学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

# 自 然 之 数

BOOK

内部资料 非卖品

## 《科学大师佳作系列》中文版序

人类正在迎接世纪之交。即将消逝的 20 世纪，科学技术又有了过去无法比拟的巨大发展与进步。科学上的重大发现，与技术发明、创造相互交替影响与促进，使人们对客观世界的认识更深入、更丰富多采了。

以“宇宙演化”这一课题为例，《科学美国人》杂志 1994 年 10 月号以“宇宙中的生命”为题的专刊，登载了詹姆士·皮博（P. James E. Peebles）等 4 位科学家的综述文章，介绍了近年来对宇宙起源的演化问题的研究成果——大爆炸标准模型。按照这一理论，宇宙是在大约 150 亿年以前从炽热而且稠密的物质与能量“大爆炸”而形成，随着它急骤膨胀、冷却，逐渐衍生成众多的星系、星体、行星，直至出现生命。人类生活于其中的太阳系，约在 50 亿年前才开始出现。这篇文章指出，研究宇宙学问题的还有哲学家、神学家、神秘主义者；然而，与他们不同的是，科学家们只接受经过实验或观测检验过的事实。文章还指出：“我们对宇宙起源与演化的认识，是 20 世纪科学研究的重大成就之一，这正是基于几十年的创新实验与理论研究的结果。用地面和发射到空间的现代望远镜，可探测到远在数十亿光年之外的星系发出的光，它告诉我们宇宙年青时是何种模样。用粒子加速器可探索宇宙演化初期其高能环境的基础物理学。用人造卫星可探测到宇宙早期膨胀后留下的本底射线，使我们在能观察到的宇宙最大尺度范围内勾画出它的大致图象。”当然，由于观察和实验受到条件和能力的局限，正如过去许多理论认识仅是客观真实的一种近似那样，也还有许多问题尚不能由这一理论作出回答，需要科学家们继续努力进行创新研究，并通过更多的观察、实验来解决。

江泽民同志近年来多次指出，各级领导干部要努力学习与掌握现代科学技术知识。1994 年 12 月，中共中央、国务院发出了《关于加强科学技术普及工作的若干意见》，要求从科学知识、科学方法和科学思想的教育普及 3 个方面推进科普工作。问题是：当代科学之发展如此迅速，其前沿领域又如此艰深，究竟能不能凭借通俗的语言，使广大干部和社会公众对当代科学成就取得比较中肯的了解？

这很不容易，但回答仍是肯定的。已故美国科普泰斗艾萨克·阿西莫夫（Isaac Asimov）曾经说过：“只要科学家担负起交流的责任——对于自己干的那一行尽可能简明并尽可能多地加以解释，而非科学家也乐于洗耳恭听，那么两者之间的鸿沟便有可能消除。要能满意地欣赏一门科学的进展，并不非得对科学有透彻的了解。归根到底，没有人认为，要欣赏莎士比亚，自己就必须能写出一部伟大的文学作品。要欣赏贝多芬的交响乐，也并不要求听者能作出一部同等的交响乐。同样地，要欣赏或享受科学的成就，也不一定非得躬身于创造性的科学活动。”

这番话很有道理。而美国布罗克曼公司组织编写的《科学大师佳作系列》（Science Masters Series）则堪称贯彻这一宗旨的上乘之作。该系列的作者们，既是当代科学前沿研究领域中享有盛誉的专家，又是成绩卓然的科普作家。他们的这些作品内涵丰富，深入浅出，水准确实是很高的。同时，该系列的选题布局也很有特色：既有选择地抓住了当前科学发展的若干热点或焦点，又从整体上兼顾了学科覆盖面。这从该系列第一辑 12 本书和第二辑 10 本书的选题即可见一斑。

《科学大师佳作系列》是世界科普出版界的一项盛举：它将在全球范围

内的十几个国家中，以二十几种语言出版。上海科学技术出版社与布罗克曼公司签约，取得了出版中译本的版权。为确保中译本早日问世，出版社邀请了 10 余位专家、学者组成中文版编译委员会，决定每拿到一本英语原著打字稿，即着手组织本学科领域中既有学术专长、又有著译和科普写作经验的学者翻译。经过编译委员会诸同仁和全体译、校、编者的共同努力，《科学大师佳作系列》中译本中首先推出的 3 本已呈献于读者面前，即《宇宙的起源》、《宇宙的最后三分钟》与《人类的起源》。这 3 本书也正好是我前面举例讲到的介绍“宇宙的起源与演化”课题的精辟之作。作为中文版编译委员会的主任，我对此委实是不胜欣喜的。

该系列的作者之一、哲学家丹尼尔·丹尼特说过：“我将这项计划（按：即出版《科学大师佳作系列》）视为向这个世界撒下了一张网，它捕获的将是我们这颗行星的下一代思想家和科学家。”但愿果真如此。与此同时，我也衷心地企盼我国的科学家、科普作家、出版家们能并肩奋斗，不懈努力，写作和出版一批足以雄视世界科普之林的传世佳作，为我国科学事业的长足进步作出更大的贡献。

谨序如斯，愿与读者共勉。

朱光亚

1995 年 1 月 20 日于北京

## 序言　虚拟幻境机

我做了一个梦。

我被空无包围。不是虚无的空间，因为没有什么空间是虚无的。不是黑暗，因为没有任何东西是黑色的。只是缺无，有待成为存在的缺无。我用思维下指令：要有空间①。但要有何种空间呢？我有一个选择：三维空间，多维空间，甚至弯曲空间。

我选择了。

我又用思维下了一条指令，这个空间充满了到处渗透的流体，流体以波浪和涡旋形式旋转。这里是平静的波浪，那里是泛泡的湍乱的大漩涡。

我给空间着上蓝色，在流体中画许多白色的流线，使流动模式显现。

我在流体中放一个小红球。它无依无靠地盘旋，对围绕它的混沌一无所知，直到我发话为止。后来，它沿一条流线流走了。我把自己压缩到原先的百分之一大小，置身于这球的表面，鸟瞰那些逐渐显露的事件。每隔数秒，我在流体中放一个绿色图标，以记录球的流程。要是我轻按一个图标，它就像下雨时沙漠仙人掌的延时摄影那样开花，并且在每一片花瓣上都有图形、数字和符号。我也可以使小红球开花，开花的时候，那些图形、数字和符号随着球的运动而变化。

由于对符号的行进不满意，我把球轻推到一条不同的流线上，细微地调节它的位置，直到看见我正寻求的清楚的奇点轨迹为止。我捻响手指，球推断出它自身的将来，并报告它所发现的事情。前景大有希望……。突然，有一整片均为流体所荷载的红球，它们像一大群很快散布开来的鱼那样打旋、伸出卷须、展平成片。然后有更多的球群加入到这一游戏中来——金色球、紫色球、棕色球、银色球、粉红色球……。我的色彩已近枯竭。各种色彩的球片以复杂的几何形式截交。我将它们冻结，打磨光滑，画上条纹。我用手势将球挥去。我把图标召来，审视它们展现的花瓣。我把有些花瓣取下，系在一个半透明的网上，这个网已经像从薄雾中显露的地形那样显现了。

好！

我发布一条新指令。“存盘。标题：三体问题中一个新的混沌现象。日期：今天。”

空间崩溃，空空如也。然后，上午的研究结束了，我从我的虚拟幻境机（Virtuai　Unreality　Machine）中脱身出来，去寻觅我的午餐。

这个奇特的梦几近事实。我们已经拥有了模拟“正常”空间中所发生的事件的虚拟实境系统①。我把我的梦叫做虚拟幻境，因为它可以模拟任何由数学家丰富的想象力创造出来的东西。虚拟幻境机的大部分部件已经存在。计算机图形软件可以让你“飞越”任何选定的几何对象；动力学系统软件可以刻划任何选定方程的演化状态；符号代数软件可以解除令人生畏的演算所带来的痛苦，并且得出正确的答案。对于数学家来说，能够进入他们自己的创造物的内部，看来只是时间问题。

尽管虚拟幻境机这种技术可能美妙无比，但是，我们并不需要它使我从梦境中醒来。如今，这个梦已是一种现实，它出现在每一位数学家的头脑里。这正是当你在进行数学创造时所能体会到的。数学家世界中的对象，通常用符号标签或名称，而不是用色彩来区分。但那些符号标签对生活在数学世界里的人来说如色彩一样鲜明。事实上，尽管我的想象丰富多采，但我的梦只

是生活在其间的每一位数学家想象力世界的苍白的投影。在这个世界里，弯曲空间或三维以上空间不但司空见惯，而且无可置疑。你可能发现，我描述的梦境既陌生又奇怪，与数学的代数符号截然不同。这是因为数学家迫不得已才用符号和图形来描述他们的世界。但符号并不是那个世界，恰如音符不是音乐一样。

几个世纪以来，数学家们用集体的智慧创造了他们自己的世界。我不知道这个世界在什么地方——就“地方”这个词的通常语义而言，我认为它并不存在，但我向你保证：当你沉浸在其中时，这个世界看起来非常真实。数学这个精神世界不仅仅非常独特，而且正是由于这些独特性，才使人类对周围的世界有了许多深刻的认识。

我将引导你在那个数学世界里游览观光。我将力图赋予你一双数学家的眼睛，并将尽我所能来改变你观照自身世界的方式。

# 第一章　自然之秩序

我们生活在一个由诸多模式组成的宇宙中。

繁星夜夜周而复始地划过天空。一年四季循环更替。这世界上没有两片完全相同的雪花，但所有雪花都具有六重对称性；老虎和斑马身披条带花纹，而美洲豹和袋狼则身着斑点花纹。错综的波列穿越海洋；非常相似的沙丘成列地横越沙漠。五颜六色的光弧交织成彩虹装扮天空；明亮的圆晕有时环绕着冬夜的月亮；球形的雨滴会从云中飘落。

人类的心智和文化已经为模式的识别、分类和利用建立了一套规范的思想体系。我们把它称作为数学。通过运用数学建立有关模式的概念并使之条理化，我们揭示了一个很大的秘密：自然之模式不仅令人赞叹，而且它是阐明支配自然过程的规律至关重要的线索。400 年前，德国天文学家约翰尼斯 ·开普勒（Johannes Kepler）写了一本名为《六角雪花》（The Six—Cornered Snowflake）的书，他在书中指出，雪花必定是由微小的相同单元集聚在一起而成。开普勒的这一认识远远早于物质是由原子组成的理论被世人所公认。开普勒并不是通过实验而得出这样的结论的，他只不过对各种各样的常识进行了深入的思考。他的结论的主要证据是雪花的六重对称性，这种对称性是物体有规则集聚的自然结果。假如你在桌子上平铺一大堆相同的硬币，并尽可能密实地把它们集聚在一起，这样你就得到一个蜂窝状排布，这一排布中的每 1 枚硬币——那些在边缘处的硬币除外——均为 6 枚其他硬币包围，并呈正六角形。

星星夜间有规则的运动也是一条线索，通过这条线索我们可以认识到地球运转这一事实。波浪和沙丘是了解水、沙和空气流动规律的线索。老虎的条纹和袋狼的斑纹显示了生物生长和生物形态中的数学规律。天上的彩虹告诉了我们有关光的散射知识，并间接地证明了雨滴是小水珠这一事实。此外，月晕也是一条了解冰晶形状的线索。

在各种各样的自然线索中蕴含着许多美妙的事物，我们毋需受任何数学训练就可认识到。在数学史话中从线索出发推断自然潜在的规则和规律也存在美，但那是另一种美，它适合于思想而不是事物。数学之于自然，恰如歇洛克 · 福尔摩斯（Sherlock Holmes）之于证据。这位具有传奇色彩的大侦探能根据雪茄烟蒂来推断出吸烟者的年龄、职业和收入状况。然而他的搭档华生（Watson）医生对此种事情却不敏感。很多时候，他只能怀着疑惑又钦佩之情做一个旁观者，看着这位破案大师铺展开无懈可击的逻辑链条。对一个数学家而言，当六角形雪花的证据呈现在面前时，他就能推断出冰晶的原子几何结构。假如你是华生，这一证据可能仅仅是一个令人困惑的圈套，但假如你是福尔摩斯，你将洞悉其中的奥秘。

模式不但蕴含美，而且很有用。一旦我们学会了辨识背景模式，许多例外就会突然变得格外醒目。例如，作为背景的沙漠处于静止状态，奔跑中的狮子就会格外抢眼；在映衬着恒星的循环背景中，少数以截然不同的方式运行的星星因特别引人注目而会被区分出来。希腊人把这些星星称为“ planetes ”，意思是“ 漫游者 ”，它被保留在我们的术语“ 行星 ”（planet）中。理解行星运动模式，比理解恒星何以在夜晚循环运动所花的时间要长得多，其原因主要在于我们都处在太阳系内，与太阳系一起运动。有些事物从外部观察要比从内部观察简单得多。行星是揭示隐藏在引力与运动背后规律

的线索。

我们仍然在学习认识新的模式。就在最近 30 年里，人类已逐渐清楚地认识到两类模式，即如今被称作“分形”（fractal）和“混沌”（chaos）的模式。分形是在愈来愈细微的尺度上重复其结构的几何形状，我将在本章末尾详谈。混沌是一种表观无规性，而其起源是完全确定性的，我将在第八章详述。自然界在亿万年前就“知道”这些模式，例如云朵是分形，天气呈混沌。要想理解这些，得花点功夫才行。

最简单的数学对象是数字，自然界最简单的模式是数字模式。月相从新月到满月再回到新月，每 28 天完成一个循环；一年大约有 365 天；人有 2 条腿；猫有 4 条腿；昆虫有 6 条腿；蜘蛛有 8 条腿；海星有 5 条臂（有的有 10 条、11 条臂，甚至 17 条臂，这取决于物种）。三叶草通常有 3 片叶，4 片叶的三叶草表示幸运，这种迷信反映了一种由来已久的信念——模式的例外是特别的。在花的花瓣中存在着一个奇特的模式。几乎所有的花，花瓣数目是如下奇特序列的数字中的一个：3，5，8，13，21，34，55，89。例如，百合花花瓣有 3 瓣；毛茛属植物有 5 瓣；许多翠雀属植物有 8 瓣；万寿菊有 13 瓣；紫菀属植物有 21 瓣；大多数雏菊有 34、55 或 89 瓣。你几乎找不到其他如此常见的数字。这些数字有一个明显的模式，人们稍加努力即可发现：每一个数字都是前两个数字的和。例如：3＋5=8，5 十 8=13，依此类推。在向日葵葵花盘内葵花籽的螺旋模式中亦可找到同样一些数字。这一特定模式在几个世纪前就被注意到了，此后又被广泛研究，但真正满意的解释到 1993 年才给出。这在第九章中我会详述。

就寻找模式而言，数字命理学方法是最容易的，因而也是最危险的。说它容易，是因为任何人都会做。说它危险，乃基于同样理由。困难在于把非偶然的数字模式与偶然的数字模式区分开来。这里有一个恰当的例子。开普勒曾醉心于研究自然界中的数学模式，他花了大半辈子的时间来寻找行星行为中的数学模式。他根据太阳系恰好存在 6 颗行星这一现象（当时只知道水星、金星、地球、火星、木星和土星），提出了一个简洁的理论。他还发现了一个很奇特的模式：6 颗行星的公转周期（即行星绕太阳运转一周所需的时间）与它们距太阳的距离有关联。回想一下，一个数的平方由它自乘而得，例如 4 的平方是 4×4=16。同理，一个数的立方由它自乘两次而得，例如 4 的立方是 4×4×4=64。开普勒发现，若取任一行星距太阳距离的立方，除以其公转周期的平方，则总能得到同一个数。这并不是一个特别雅致的数，但它对所有 6 颗行星而言都相同。

以上这些数字命理学上的观测哪个更重要？后人认为是第二个，即带平方和立方的计算。因为这一数字模式是通往艾萨克·牛顿（Issac Newton）万有引力理论的关键步骤之一。开普勒就行星数目建立起来的简洁理论早已被埋葬得无影无踪了。这首先因为，这一理论必然是错误的，我们现在知道太阳系有九大行星，而不是 6 颗，甚至可能存在更多的行星，离太阳更远的行星，它们小得和暗淡得无法检测。但更重要的是，我们不再期望就行星的数目找到一个简洁的理论。我们认为，太阳系由围绕太阳的一团星云浓缩而成，行星的数目取决于星云中的物质有多少、物质如何分布、物质运动得快慢以及向什么方向运动。一团似乎同样的星云可能使太阳系存在 8 颗，或 11 颗行星。这个数字是偶然的，而不是普适的，它依赖于星云的初始条件，并不反映自然界的一般规律。

用数字命理学办法搜寻模式所面临的一个很大的问题是，每个可产生许多偶然模式。何者是普遍的，何者是偶然的并不总是显而易见的。例如，猎户星座腰带上有 3 颗亮星，它们近乎等间距，并且位于一条直线上。那是自然界内在规律的一条线索吗？这儿有一个类似的问题。木卫一、木卫二和木卫三是木星 3 颗较大的卫星，它们分别以 1.77 天、3.55 天和 7，16 天绕木星运转一周。在这 3 个数字中，后一个数几乎恰好是前一个数的两倍。那是一个非偶然模式吗？3 颗亮星根据位置排成行 ;3 颗卫星则根据运转周期“ 排成行 ”。如果算作模式的话，哪一个模式是重要线索呢？请先考虑一会儿，我在下一章再作讨论。

除了数字模式之外，还存在着几何模式。实际上，本书本应当取名为《自然之数与形》，之所以没有这样做有两条理由。第一，书名没有“ 与形 ”两字读起来更上口。第二，数学形状总是可以归并为数——计算机就是藉此处理图形的。图形中的每一小象点是以荧屏上横向和纵向位置的一对数字来存贮和操作的。这两个数被称为小象点的坐标。普通的形状是小象点的集合体，它可以表示成一系列数对。不过，最好还是把形状视为形状，因为我们可以利用我们强大的直观视觉能力来对付形状，而最好将一系列复杂的数字留给我们软弱的、较差的符号能力去处理。

直到最近，吸引数学家主要的是一些很简单的形状：三角形、四边形、五边形、六边形、圆形、椭圆形、螺线形、立方体、球体、锥体等等。这些形状都可在自然界中找到。例如，彩虹就是许多圆的集合体，每个圆有一种颜色。我们通常看不到完整的圆，见到的只是一段弧。但从大气中看到的彩虹可以是完整的圆。你还可以从池塘里的波纹、人眼以及蝴蝶翅膀上的花斑中见到圆。

谈到波纹，流体的流动提供了无穷无尽的自然之模式。在自然界中存在着多种不同的波：以平行横波形式拥向海岸的波；在航行中船的船尾以 V 字形扩展的波；因水下地震向外辐射的波。大多数波是群聚物，但有的波，如当涨潮能量受限于坚固河道时扫荡河面的潮涌是孤立波。另外，还存在盘旋着的螺旋漩涡和小涡旋；存在貌似无结构、无规起泡沫的湍流，它是数学和物理学中的一大谜团。大气中也有类似的模式，最令人惊奇的莫过于环绕地球的宇航员所见到的飓风那巨大的螺旋。

陆地上也存在波模式。地球上最壮观的地貌之一是阿拉伯沙漠和撒哈拉沙漠巨大的沙质荒漠（或叫沙海）。在那甚至当风以不变的方向稳定地吹的时候，沙丘也会形成。最简单的模式是横列沙丘模式，它像海浪一般，以平行的直线横列排列，与盛行风的风向成直角。有时候横列本身变得波浪起伏，这种情形叫新月形沙垅；有时候横列碎裂成数不清的盾形新月形沙丘。如果沙略微潮湿，并且有一些把沙维系在一起的植被，你会发现抛物线形沙丘——在风向上有圆滑顶点的 U 形沙丘。这些横列有时成簇出现，形如耙齿。如果风向多变，可能有其他形式。例如会形成星形沙丘簇，每一簇有从一个主峰辐射出的若干不规则辐臂。它们本身呈无规斑纹模式排列。

自然界对条纹和斑纹的偏爱延伸到了动物王国：如虎和豹、斑马和长颈鹿。动物和植物的形状和模式对于有数学头脑的人来说是一个幸运的猎场。例如，为什么如此之多的贝壳呈螺旋状？为什么海星长有对称的臂？为什么许多病毒呈现有规则的几何形状(最突出的形状是二十面体——由 20 个等边三角形组成的正多面体）？为什么那么多的动物两侧对称？为什么此种对称

性很不完善，当你观察它们的细节（如人体心脏的位置或人脑两半球之间的差异）时对称性会消失？为什么我们大多数人是右撇子（但并非所有人都是）？

除了形体模式之外，还存在着运动模式。人行走时双足以规则的节律着地：左—右—左—右—左—右。当四足动物（如马）行走时，存在更复杂的但同样有节奏的模式。行进中这种模式可延伸到昆虫的蠕动、鸟的飞翔、水母的卷舒，鱼、以及蚯蚓和蛇的波浪式运动。响尾蛇像一卷螺旋弹簧那样以一系列 S 形曲线使身体向前运动，这样就能尽可能少地与地面上的热沙接触。微小的细菌用像船的螺旋桨那样快速旋转的极小的螺旋尾驱动身体向前。

最后，还存在着另一套自然模式，它只是在最近几年才戏剧性地被人类的想象力抓获。其中包含我们刚刚学会识别的模式，即那些我们认为无处不在的模式——无规和无形。例如，让我们来观察一下云的形状。不错，气象学家把云分成形态不同的若干组：卷云、层云、积云等等。但这些是十分泛泛的形态类型，而不是传统数学可识别的几何形状。你见不到球形云、立方体云或二十面体云。云是飘渺的无定形的模糊团簇。就云而言，存在着一种很有特色的模式，一种对称性，这与云形成的物理机制密切相关。简单地说就是：你不能靠观察说出云的大小。如果你观察大象，可以大致说出它有多大。对于云可不能这样。远看的较大的云完全可能比近观的较小的云显得要小。当然，它们形状的不同，并非因大小尺度的不同所致。

对于大小变化 1000 倍的云，其形状的这种“尺度无关性”已得到实验证实。方圆 1 千米的云其形形如方圆 1000 千米的云。这一模式又是一条线索。云是在水经历从气态到液态的“相变”时形成，并且物理学家已经发现，同一类型的尺度不变性与一切相变相联系。这种统计自相似性（顾名思义）可延伸到其他许多自然形态。研究石油地质学的一位瑞典人喜欢放一张幻灯片。在这张幻灯片中，他的一位朋友在一条船上，若无其事地斜靠在一块岩石上，岩石与他的腋窝齐高。这张照片完全令人信服，显然那条船想必系泊在深约 2 米的石沟边缘。事实上，这块岩石是遥远的峡湾的一个侧面，它有几千米高。拍摄这张照片的摄影师用了恰当的焦距同时捕捉到了前景和远景。

没有人尝试用大象来玩这种把戏。

然而，你可以将许多自然界的形状（包括山峦、河网、树等）拿来把玩，而且很有可能物质是用这样的方式分布于整个宇宙。用使数学家伯努瓦·芒德勃罗（Benoit Mandelbrot）名声大噪的术语来讲，它们都是分形。一门关于不规则性的新学科分形几何学，在近 15 年里出尽风头。我无意多谈分形，但导致分形的动态过程（混沌）将被着重描述。

多亏新的数学理论的发展，使自然之模式许多难以捉摸的方面逐渐被揭开。这不仅丰富了人类的知识，而且已产生了实际的效果。我们对自然之隐秘规律的新认识，使我们能用比过去任何人所能想象到的都要少得多的燃料，操纵人造卫星飞向新的目的地；能避免机车和其他车辆车轮的磨损；能提高心脏起搏器的功效；能有效、科学地管理林业和渔业；甚至能制造效率很高的洗碟机。但最重要的是，这些新认识正更进一步地向我们展示我们置身其中的宇宙的图景以及我们在宇宙中的处境。

## 第二章　数学有何用

我们现在已建立了无可争议的概念：大自然充满模式。但我们想把模式怎么样呢？我们能做的是任其自然并赞美模式。与自然交流对我们所有人来说都有好处：它提醒我们，我们是什么。绘画、雕塑和写诗是表达我们对世界、对我们自己的感受的有效和重要方式。企业家的本能是利用自然；工程师的本能是改造自然；科学家的本能在于力图认识自然，搞清楚自然界究竟在发生着什么；数学家的本能是通过寻求贯穿显见部分的普遍性，刻划这个认识过程。我们的内心都具有所有这些本能的一部分，每种本能都既有好的一面又有坏的一面。

我想向你显示数学本能对人类的认识所起的作用，但首先我想谈一下数学在人类文化中的作用。你在购买一样东西之前，通常对想用它做什么有一个明确的想法。如果它是一台电冰箱，你当然想用它来储存食物，但你的想法远不止于此。应该用它储存多少食物？把它放在什么地方较适合？这不仅仅是一个使用问题。你可能想买一幅画，但你仍然会自问把它放在什么地方合适，配有雅致镜框的这幅画是否值所开的价。数学以及其他任何智慧世界观（科学的、政治的或宗教的）都面临同样的问题。你在买东西之前，明白想用它派什么用场是明智的。

那么，我们想从数学中得到什么呢？

每一个自然之模式都是一个谜，它几乎总是很高深莫测。数学在帮助我们解谜方面功勋卓著。在发现隐藏在某个观察到的模式或规律性背后的规律和结构，进而利用那些规律和结构解释正在发生的事情等方面，数学是一套基本上自成体系的方法。数学随着我们对自然认识的不断加深而发展。我在上文提到过开普勒对雪花的分析，但他最著名的发现是行星轨道的形状。开普勒对他同时代的丹麦天文学家第谷·布拉埃（Tycho　Brahe）所作的大量天文观测结果进行数学分析，最终得出行星按椭圆轨道运动的结论。椭圆是一种卵形曲线，古希腊几何学家对它作过许多研究，但古代天文学家喜欢用圆（或许多组圆）描述轨道，所以开普勒的结论在当时是激进的。

人们常常根据对他们来说是否重要来解释新的发现。当天文学家获悉开普勒的新思想时，他们得到的启示是，那种源于希腊几何学后被忽视的概念或许有助于他们解开预测行星运动之谜。不用费很大的劲他们就可以看到，开普勒已向前迈出了一大步。各种天文现象（如月食、日食、流星雨和彗星）可能服从同样类型的数学。对于数学家来说，他们得到的启示却迥然不同。他们认为椭圆确实是有意义的曲线。他们一眼看出曲线的一般理论可能更加有意义。数学家能得出椭圆的几何规则，并加以修改，看看能得到其他何种曲线。

无独有偶，当牛顿史诗般地发现了物体的运动可用作用于物体上的力与物体具有的加速度之间的数学关系来描述时，数学家和物理学家从中得到的东西大不相同。不过，在叙述这些之前，我想对加速度作些解释。加速度是一个难以形容的概念，它不是一个基本量（如长度或质量），它是变化率。实际上，它是“二阶”变化率——变化率的变化率。物体的速度（物体在给定方向上运动的速度）就是一个变化率：它实际上是物体在距某个选定点距离变化的速率。如果一辆汽车以每小时 60 千米的稳定速度运动，则它距出发点的距离每小时变化 60 千米。加速度是速度的变化率。如果这辆汽车的速度

从每小时 60 千米增加到每小时 65 千米，则它按一个确定量加速。这个量不仅取决于初速度和末速度，而且取决于速度变化的快慢。若汽车的时速从 60 千米增加到 65 千米，共花了一个小时，则加速度很小；若只用了 10 秒钟，则加速度相当大。

我不想在这讨论加速度的测量，我的着眼点只在加速度是变化率的变化率这一更为一般的问题上。你可以用卷尺测量距离，但测量距离的变化率的变化率则难得多。这就是人类花那么长时间，到了牛顿才发现运动定律的原因。如果这个模式早已成为距离的明显特征，那么我们可能早就把握住运动规律了。

为了处理与变化率有关的问题，牛顿和德国数学家戈特弗里德·莱布尼兹（Gottfried Leibniz）各自独立地发明了一个新的数学分支——微积分。它（事实上和在隐喻意义上）改变了地球的面貌。但由这个发现而引发出来的思想还是因人而异。物理学家继续寻找能够用变化率解释自然现象的其他自然定律。他们用这只铲斗找到了它们——热学、声学、光学、流体动力学、弹性力学、电学、磁学等。尽管诠释以及在某种程度上隐含其中的世界观有所不同，但最深奥的现代基本粒子理论仍然运用着同一类型的数学。即便如此，数学家发现有待探究的一系列问题却全然不同。首先，他们花了很长时间才搞清楚“变化率”的确切含义。为了计算运动物体的速度，必须测量这物体在某时刻所处的位置，确定它后来在一个极短的时间间隔内运动到了什么地方，然后把运动的距离除以所花的时间。但是，若物体正在作加速运动，则结果依赖于所取的时间间隔。如何对待这一问题，数学家和物理学家都有相同的看法：所取的时间间隔应当尽可能地小。要是能取零时间间隔，那再好不过了，但不幸的是此路不通，因为物体经过的距离和所花的时间都将为 0，而 0/0 的变化率毫无意义。非零间隔的主要问题在于，无论你挑选哪个间隔，总存在可以取而代之的更小的间隔，从而得到更精确的答案。采用最小的非零时间间隔该有多好，可是根本不存在这样的间隔。因为给定任意一个非零数，这个数的一半也是非零的。要是时间间隔能取无限地小（即“无穷小”），则万事大吉。然而不幸的是，存在着与无穷小概念相联系的难解的逻辑悖论。特别是，如果我们把自己局限于通常词义上的数，那么根本不存在无穷小。所以，在 200 多年的时间里，人类对于微积分的态度十分奇特。物理学家利用它来认识自然和预言自然的一些行为方式，取得了巨大的成功。而数学家操心的是它的确切含义和如何最好地给它下定义，使它像一种可靠的数学理论那样管用；哲学家则在论证它毫无意义。最终一切问题都解决了，但你仍会发现各学科之间在态度上的强烈差别。

微积分的故事，告诉了我们数学的两个主要功用：为科学家计算自然正在做什么提供工具，以及令人满意地为数学家提供有待解决的新的问题。这些是数学的外表和内里，它们往往被称作应用数学和纯粹数学（我不喜欢“应用”和“纯粹”这两个形容词，更加讨厌那暗示的分离）。在这种情况下可能显示物理学家所设立的议程：如果微积分方法看上去管用，它何以管用又有何妨呢？如今你会听到以实用主义者自居的人们表达的同样看法。我并不反对这个看法，他们的主张在许多情况下是对的。设计桥梁的工程师有权运用标准的数学方法，即使他们不知道证明这些方法成立的详细又往往是深奥的推理。但我个人感到，如果驾车驶过那座桥而意识到没有人知道那些方法为什么成立的话会很不舒服。因此，在文化层次上，应当有人为实用方法操

心，并试图搞清楚到底什么使之管用。那就是数学家所做的一部分工作。他们喜欢进行研究，正如我们将看到的，数学家以外的人得益于各种各样的数学派生产品。

短期内，数学家是否对微积分的逻辑可靠性感到满意，尚无关宏旨。但从长远看，数学家因关心数学本身的内部问题而得到的新思想，证明确实对数学以外的世界很有用。在牛顿时代，不可能预言哪些可能的用途。但我认为你或许可以预言（甚至在那时）哪些用途将出现。数学与“现实世界”之间关系最奇特也是最鲜明的一个特征，在于好的数学（不管它的来源如何）终究是有用的。为什么会这样，有各种各样的理论：从人类心智的结构，到宇宙在某种程度上是由少许数学构件建立的思想。我的感觉是，答案可能相当简单：数学是关于模式的科学，大自然中的模式应有尽有。我承认很难提供大自然何以如此行事的令人信服的理由。或许这个问题应当反过来提：可能关键在于那种能够提出此种问题的生物只有在具有此种结构的宇宙中才可以进化①。

不管是什么原因，数学肯定是认识自然的一种有用方式。对于我们观察到的模式，我们想让数学告诉我们什么呢？有许多种回答。我们想了解模式如何发生；了解模式为什么发生（这与前一个问题不同）；以最令人满意的方式建立基本的模式和规律；预测自然将如何演变；为我们自身的目的控制自然；以及实际运用我们所学到的关于这个世界的知识。数学能帮助我们做所有这些事，并且它往往是必不可少的。

例如，有关蜗牛壳的螺旋形问题。蜗牛怎样形成它的壳这很大程度上是化学和遗传学的事情。粗略地讲，蜗牛基因含有制作特定化合物的配方和它们去向的指令。在这里，数学扮演着弄懂正在发生的不同化学反应的分子簿记的角色。它描述壳中所有分子的原子结构；解释与蜗牛体的脆弱性和柔韧性形成对比的壳板材料的强健性和易碎性等等。的确，如果没有数学，就永远无法使我们确信物质确实是由原子组成的，或者无法搞清楚原子是如何排列的。基因以及后来 DNA（即遗传物质脱氧核糖核酸）分子结构的发现，很大程度上有赖于所存在的数学线索。奥地利神父格雷戈尔·孟德尔（Gregor Mendel）注意到，当植物杂交时，具有不同性状（如种子颜色）的植物发生变化后所占比例的简洁的数量关系。这促使形成了遗传学的基本思想：每一个生物体都是某些因子的隐蔽组合，这些因子决定其体形的许多特征，在从亲代向子代遗传时，它们作一定程度的转移和重新组合。在 DNA 具有著名的双螺旋结构这一发现中，就包含着多种数学。它们像生于奥地利的生物化学家欧文·查加夫（Erwin Chargaff）发现 DNA 的 4 个碱基以相关比例存在的规则那样简单；又像用来从 DNA 晶体的 X 射线图象推断分子结构的衍射定律那样精妙。

蜗牛为什么有螺旋形壳，这个问题的性质截然不同。它可以在几种背景下被提出来。例如，在生物发育的短期背景或在进化的长期背景下。发育历程的主要数学特征是螺旋的一般形状。发育历程基本上是生物的几何学历程，这种几何学历程始终保持不变，但生物在逐渐长大。设想一个带有小原始壳的小动物开始生长。它沿着壳的开缘所指的方向最容易生长，因为如果试图在其他任何方向上生长，就会受壳的制约。但是长了些许以后，为了自我保护，壳也必须扩大。所以，壳当然围绕其缘长出一圈壳体。如此这般继续下去，缘的尺寸逐渐变大，动物也愈长愈大。最简单的结果是形成一个圆

锥形壳，如你在■上见到的。但如果整个系统出现一点点扭曲，这十分可能，则壳的生长缘除扩张外还缓慢以离心方式旋转。结果形成了一个以渐次扩张的螺旋形式扭转的圆锥。我们可以用数学把已生成的几何结构与其包含的所有不同变量（如生长速率和生长离心率）联系起来。

但如果我们对壳寻求进化上的解释，我们就可能对它的强度——它传递进化优势——给予更多关注，并可以通过计算得出细长圆锥壳比紧绕螺旋壳强还是弱的结论。或者，我们可能提出更高的要求，用随机遗传变异（即突变）和自然选择的组合，建立进化过程本身的数学模型。

这种思想有一个突出的例子，那就是丹尼尔·尼尔森（Daniel Nilsson）和苏珊·佩尔格（Susanne Pelger）于 1994 年发表的对眼进化的计算机模拟。回想一下，正统进化理论把动物形态的变化视为随那些最有能力生存和繁殖后代的个体作出的选择的随机突变的结果。查理·达尔文（Charles Darwin）在公布这一理论的时候，最先遇到的反对意见是：像眼这样的复杂结构必定是充分成形地进化，否则它们不会发挥应有的作用——半个眼一点用也没有。但是随机突变将产生一致的复杂变化的机会是可以忽略的。进化理论家们很快作出回应：半个眼可能没多大用处，但半发育的眼却可能很有用。也就是说，具有视网膜而没有晶状体的眼睛仍然会收集光从而能检测运动。提高捕食者检测水平的任何方式对任何拥有它的生物提供了进化优势。这是用文字论证来反驳对进化理论的一种文字上的诘难。然而，最近的计算机分析则更进一步。

计算机分析从一团扁平细胞的数学模型出发，然后允许各种类型的“突变”。例如，有些细胞变得对光较敏感，细胞团的形状可以弯曲。把数学模型转化为一种计算机程序，这种程序产生此类小的随机变化。当探测光线并分辨它所“看到”的模式时，计算出所生成的结构的完善程度，并且选择可以改进这些能力的变化。在一项模拟一段相当于大约 40 万年——进化过程中的眨眼功夫——的时间里，细胞团把自身叠成一个很深的带有一个小虹膜式开口的球形腔，最令人惊奇的是它带有晶状体。而且，像我们眼睛中的晶状体一样，它是一个折射率因部位而异的晶状体。事实上，计算机模拟中产生的折射率变化模式与实际情况十分相似（见图 2.1）。因此，数学在这里证明：眼确实可以逐步地、自然地进化，在每一阶段表现出渐增的生存价值。此外，尼尔森和佩尔格的工作还表明：给定某种关键的生物官能（如细胞对光的感受性和细胞的流动性），则极类似于眼的结构将形成。这一切都符合达尔文的自然选择原理。这个数学模型还提供了达尔文只能在文字上进行猜测的许多额外细节。它给了我们更大的信心：这种论证思路是正确的。

前面我说过，数学的另一个功用是以最令人满意的方式建立基本的模式和规律。要说明这一点，让我们回到第一章提出的问题。假如任一方都可能的话，那么何者是非偶然的：是猎户星座腰带上亮星的“三星一线”模式，还是木星卫星运转周期的“三星一线”模式？先看猎户星座。古代人类文明借助动物形象和神话人物，来勾勒天空中的星星。根据神话传说，猎户星座中的三星一直线似乎是非偶然的，因为要不然的话，那位神话人物①就不会有佩挂剑的腰带。然而，如果我们用三维几何学作为排列原则将那 3 颗亮星置于天空中的确切位置，我们就发现它们距地球的距离很不相同。它们等间距直线排列是偶然的，这依赖于观察者所处的位置。其实“星座”这个词是个误称，因观察位置不同而有任意性。

木卫一、木卫二和木卫三的运转周期之间的数字关系也可能是观察位置的偶然关系。我们怎么能肯定“运转周期”对于自然具有非偶然的意义？然而，那种数字关系确实以非偶然的方式符合一个动力学框架。它是共振的一个实例，显示了其周期“锁”在一起的周期性运动的天体之间的关系，它们以规则的时间间隔保持相同的相对位置。这种共同的循环时间叫做系统的周期。每个天体各有不同的但相关的周期。我们可以弄清楚这种关系是什么。在发生共振时，所有相关的天体必须在整数周期——但这个数可以因天体而异——之后回归到一个标准参照位置。所以，对整个系统来说，存在某个公倍周期。于是每个天体都有一个是该公倍周期某整数约数的周期。在本例中，公倍周期是木卫三的周期 7.16 天。木卫二的周期十分接近木卫三周期的一半，木卫一的周期接近木卫三周期的四分之一。当木卫二绕木星旋转 2 周、木卫三绕木星旋转 1 周时，木卫一旋转 4 周。此后，它们都恰好回到先前同样的相对位置。这就叫 4∶2∶1 共振。

太阳系的动力学充满了共振。月球的自转周期（取决于其他天体的摄动造成的小摆振）与其绕地球运转的周期相同——月球运转周期与月球自转周期是 1∶1 共振。所以，我们从地球看到的月球总是同一面，从来看不到它的“另一面”。水星每 58.65 天自转一周，每 87.97 天绕太阳公转一周。因为 2X87.97=175.94，3X 58.65=175.95，所以水星自转周期与公转周期是 2∶3 共振（事实上，长期以来它们被当作 1∶1 共振，因为由于水星太接近太阳而难以观测，因此，两个周期都被粗略地看作 88 天。于是认为水星的一面酷热，而另一面则奇冷，结果证明这并不正确。不过它们之间存在着共振——一种比单纯的相等更有趣的共振）。

在火星与木星之间是小行星带，一个包含了上千个小天体的广阔区带。小行星不是均匀分布的。在距太阳的某些距离处，我们发现小行星“小带”，而在其他距离处我们却找不到。这两种情况的解释与木星的共振有关。小行星希尔达（Hilda）星群（小带之一）与木星是 2∶3 共振。那就是说，恰好在某个合适的距离处木星的每 2 周公转,所有希尔达小行星绕太阳运行 3 周。最引人注目的空隙是在 2∶1，3∶1，4∶1，5∶2 和 7∶2 共振处。你可能关心既用共振来解释密集又用共振来解释空隙，这是因为每个共振有其自身特有的动力学；有的导致密集，有的却导致空隙。这一切都取决于精确的数字。

数学的另一功用是预测。通过了解天体的运行规律，天文学家可以预测月食和日食，预测彗星的回归。他们知道把望远镜指向何方，才能发现已从太阳背后通过的失去观测的小行星。由于潮汐主要受制于太阳和月球相对于地球的位置，所以他们可以提前许多年对潮汐进行预测。（进行这种预测主要的复杂因素不在于天文学，而在于大陆的形状和海洋底部的纵剖面，它们可以延迟或提前一个高潮的到来。不过，一个世纪又一个世纪过去了，这些潮汐大同小异，所以一旦认识到了其中的规律，通常所要做的只是对它们作些修正。）相反，预测天气是相当困难的。我们掌握的关于天气的数学知识与有关潮汐的数学知识一样多，但天气具有内在的不可预测性。尽管如此，气象学家还是可以对天气作出诸如 3 天或 4 天的有效的短期预报。然而，天气的不可预测性与无规性毫无关系。我们将在第八章讨论混沌概念时再来论述这一问题。

数学不仅仅扮演预言家的角色。你一旦了解了一个系统如何运作，就不会成为一个被动的观测者。你可以尝试着控制这个系统，使它做你想要它做

的事。然而野心过大未必有利。例如对天气的控制尚处在摇篮时期，我们不能每次成功地实施人工降雨，甚至有积雨云时亦然。从锅炉上的恒温器（它使锅炉处于恒定的温度）到中世纪控制林地长成萌生林的实践，皆为控制系统的例子。要是没有复杂的数学控制系统，航天飞机就会像砖块一样飞行，因为没有一个飞行人员能以足够快的反应来校正其固有的不稳定性。用电子起搏器帮助有心脏病的人，是控制系统的又一个实例。

这些例子把我们引向数学最实际的方面：数学的实际应用，也就是数学赖以生存的方式。我们的世界是建立在数学基础之上的，数学不可避免地融入我们整个文化之中。我们并非时刻认识到我们的生活如何强烈地受到数学的影响唯一显见的原因，在于数学尽可能地隐藏在幕后。当你去旅行社预约休假时，你不必了解使设计计算机和电话线成为可能的难懂的数学和物理学理论，也不必了解就一个特定的机场制定尽可能多的航班的最佳程序，或用来给飞行员提供准确雷达图象的信号处理方法。当你观看电视节目时，你不必了解使荧屏产生特技效果的三维几何学，以及通过卫星传送电视信号的编码方法和用来解卫星轨道运动方程的数学方法，也无需了解生产使卫星准确入轨的航天器每个部件的每一步骤所运用的众多不同的数学原理。当农民种植新的马铃薯品种时，他不必知道如何区分哪个基因导致特殊类型的抗病植物的遗传学统计理论。

但是过去有些人必须了解这些，否则飞机、电视机、航天器和新的抗病马铃薯品种就不会被发明。有些人现在也必须了解这一切，否则这些知识就不能继续发挥作用。有些人必须在将来发明新的数学知识，发明能够解决以前未出现过或迄今被证明难以对付的问题的数学知识，否则当新的形势要求我们解决新的问题或者重新认识以前出现的问题时，我们无能为力，那我们的社会就会退化。倘若从我们的世界里突然把数学（包括基于其上的一切事物）抽走，那人类社会将即刻崩溃。倘若数学被冻结，再也不能向前发展一步，那我们的文明将开始倒退。

我们不应期望新的数学理论立刻产生经济效益。数学思想转化到可以在工厂生产的或可在家庭中使用的东西上来，通常需要时间。这时间很长，一个世纪并不罕见。在第五章里我们将看到，17 世纪对小提琴琴弦振动产生的兴趣如何导致 300 年后无线电波的发现，以及收音机、雷达和电视机的发明。也许这一切应进行得快一些，然而不能进行得太快。如果正像生活在这个管理味日渐加重的文化中的许多人认为的那样，可以通过把力量集中到以应用作为目标来加速科学发现的过程，而忽视“ 好奇心驱动 ”的研究，那就错了。事实上，“ 好奇心驱动研究 ”的说法是新近由缺乏想象力的官僚们发明的，它被作为一种贬义词来引用。过于功利的研究所能产生的结果是可想而知的。为了有的放矢，就必须能够瞄准“ 的 ”（目标）。但你能瞄准的任何“ 的 ”，你的竞争对手也能做到。满足于稳妥的研究，将使我们变得贫乏。真正重要的突破总是不可预知的，正是这种不可预知性使突破变得重要。其重要性体现于这些突破以我们未能预见的方式改变我们的世界。

此外，功利的研究常常碰壁，这不仅仅在数学领域里如此。例如，在科学家发现了静电印刷基本原理之后，工程技术人员作了将近 80 年的艰巨努力，才研制成复印机。第一台传真机是一个世纪前发明的，但那时它不能很快地或很可靠地工作。全息摄影（即摄制三维照片）原理是一个世纪前发现的，但那时尚无人知道如何产生必要的相干光束（波形同步的光）。这样的

滞后在工业中并不反常，更不用说在更多的智力研究领域。这种僵局通常仅当不期而至的新思想登台时才被打破。

功利的研究作为取得特定可行目标的一种方式，并没有什么错。但也必须给异想天开的人和特立独行的人留有余地。我们的世界并非一成不变的，新问题层出不穷，旧答案屡屡失效。就像刘易斯·卡罗尔（LewisCarroIL）的象棋王后，要想不落后于周围世界，就得快跑①。

## 第三章　数学是什么

当我们听到“数学”，这个词的时候，头脑里闪现的第一样东西可能就是数。数是数学的核心，是一种无处不在的力量，亦是锻造大量称之为数学的原材料。但是，数仅仅构成数学的一小部分。前面我已说过，我们生活在一个高度数学化的世界里。但是，为了使我们的世界“界面友好”①，数学尽可能明智地藏在幕后。然而，有些数学概念对我们的世界来说如此基本，不可能藏而不露，数就是一个特别突出的例子。例如，没有数鸡蛋和折算零钱的能力，我们甚至不能买食物。所以我们要对每一个人讲授算术。不会做算术同不识字和不会写字一样，是人的一大缺陷。于是这便会使人产生一个非常深刻的印象：数学主要是关于数的学科——这并非十分正确。我们在算术中学到的数字技巧只好像是冰山的尖峰。可能有人会认为如果没有更多的数字技巧，我们似乎可以照常生活，但如果只有如此有限的数学知识，我们的文化就无法使社会运作。数仅仅是数学家关心的一类对象。在本章里，我将向你介绍其他一些对象，并阐明为什么它们也非常重要。

我的出发点必然是数。数学史的最初几页大部分可以归纳为通过各种文明，发现范围越来越宽的应称之为数的事物。事实上，在出现诸如 1，2，3 之类符号之前许久，计数就开始了。因为根本不用数字就能够计数——譬如，用手指来计数。当你的眼睛扫视骆驼时，你可以扳手指头算出“我有两只手手指加一个拇指的骆驼”。实际上，不必有数字“11”的概念来记录是否有人偷了你的骆驼。只需注意，下次如果只有两只手手指的骆驼，那么一个拇指的骆驼就丢失了。

也可以用在树枝或象牙上作记号的方法来计数。或者，可以制作标记作为计数器具来使用——用画有羊图案的泥盘计数羊，或用有骆驼图案的泥盘计数骆驼。当动物从身边通过时，可以把标记丢进袋中——一个标记代表一只动物。用符号表示数字概念可能始于 5000 年前。当时此种计数器具被一个泥封套所包裹。计数者每次想核对具体数目时就打破泥封套，核对完后又重做一个。这很麻烦。于是人们在封套的外面作一些特殊记号，这些记号代表封套里面的具体数目。后来他们认识到，实际上里面不必有任何计数器具，只需在土简上刻上同样一些记号就可以了。

弄明白这一简单道理竟花了那么长时间，真令人惊奇。但是，这一道理当然只是在现在才显而易见。

计数之后的另一发明是分数，就是我们现在用 2/3（三分之二）或 22/7（七分之二十二，或三又七分之一）来表示的数。虽然不能用分数来计数——尽管可以有三分之二头骆驼可能可以食用这样的表述，然而它是不可数的——但可以用分数来做更多有趣的事。例如，如果三兄弟继承了两头骆驼，那每人就可以分得三分之二头骆驼——一个方便的合情合理的分配。我们对这一结果非常满意，以致于忘了假如用文字来表述这种分配的话，那是多么地稀奇古怪。

公元 400～1200 年间，0 的概念被发明，并被用来指代一个数字。要是觉得 0 很久未被作为一个数字接受有点奇怪，那请记住：“1”在很长时间内未被当作一个数字，因为当时人们认为许多东西应当是几件东西。许多史书指出，0 的出现其重要意义是为“没有”发明一个符号。这也许对算术运算来说至关重要，但对数学而言，其重要意义在于产生了一种新的数字概念，

它代表了“零”这样一个具体的概念。数学使用符号，但如同音乐不是音符，语言不是字母表中的一串字母一样，数学本身不是那些符号。被许多人认为是有史以来最伟大的数学家卡尔·弗里德里希·高斯（Carl Friedrich Gauss）曾经指出，在数学中重要的“不是符号，而是概念”。

数的概念接下来的一次扩展，是负数的发明。同样，在字面意义上想象负的 2 头骆驼没什么意义，但你要是欠了某人 2 头骆驼，则你拥有的骆驼数实际上要减去 2。所以，负数可以认为表示负债。有许多不同方式可以用来解释这些令人难以理解的数。例如，负温度（用摄氏温标）是比结冰更冷的温度；一个物体具有负速度，是指它作反向运动。因此，相同的抽象的数学对象可以描述自然的多个方面。

对于大多数商品交易来说，分数对你足够用了，但对数学来说，分数是不够的。例如，古希腊人懊丧地发现，2 的平方根无法用一个分数来精确表示。也就是说，让任何分数自乘，都不能精确地得到 2。你可以很接近地得到 2。例如，17/12 的平方是 289/144，若它是 288/144，则你得到 2，但它不是。不管你拿什么分数来试，你永远无法成功。2 的平方根（通常记作$\sqrt{2}$）于是被说成是“无理数”。扩张数系使之能容纳无理数的最简单的方式，是采用所谓的实数——一个令人吃惊的不恰当的名称。因为实数可以用无限进行下去的不循环小数（如 3.14159…）来表示，其中数字后的 3 个小点指无限多位。如果你连把它们全部写出来都做不到，那么它们怎么会是真实的呢？但这个名称长期被沿用，可能是因为实数能使诸如长度和距离等许多自然的直观知识形式化的缘故。

实数是人类心智作出的最大胆创新的理想化描述之一。在有人为隐藏在其背后的逻辑性操心之前，它们已被幸运地使用了几个世纪。令人费解的是，人们十分担心数系接下去的那次扩展，尽管这完全无害。那就是为负数引入平方根，导致产生了“虚”数和“复”数。如果没有它们，数学家肯定寸步难行。但所幸的是，阅读本书将一点不需要复数的知识，所以我打算把它们塞到数学地毯的下面去，希望你别在意。然而，我应当指出，不难把无限不循环小数解释成对某个量度（如长度或重量的量度）的一系列愈益精细的近似，而-1 的平方根的满意解释则较难表述。

在目前的术语里，0，1，2，3，…所有的数被称为自然数。如果将负整数也包括在内，我们就得到了整数。正分数和负分数统称为有理数。实数比有理数内涵大；复数则更大。至此，我们有了 5 个数系，后面的数系包含了前面的数系：自然数、整数、有理数、实数和复数。在本书中，整数和实数这两个数系较为重要。我们将不时地谈论有理数。如上所述，我们可以忽略复数。但我希望你现在明白，“数”这个词没有任何不可改变的天赐含义。这个词的义域不止一次地被扩展，扩展过程原则上在某个时候可能再次发生。

然而，数学不仅仅与数有关。我们已经遇到过不同种类数学思想涉及的对象——运算、即加、减、乘、除。一般而言，运算是运用两个（有时更多个）数学对象得到第三个对象。若取一个数，求它的平方根，则得到另一个数。此种“对象”叫函数。你可以把函数想象成从某个数学对象——通常是数——出发，以特定方式把它与另一个对象相关联的数学规则。函数往往用代数表达式来定义，那是解释这种规则的捷径。但函数也可以用其他简便的方法来定义。与函数同义的另一个术语是变换，即把第一个对象变换成第二

个对象的规则。当数学规则是几何规则时，便会使用这一术语。我们将在第六章里用变换这一概念来阐述对称性的数学本质。

运算和函数是很类似的概念。从普遍意义上来看，不必严格地把它们区分开来。它们都是过程，而不是事物。我想现在到了把潘朵拉盒子①打开的时候了，我们来解释数学家军械库中最厉害的一件常规武器。我们把这件武器称为“过程的事物化”（辞典里有一个词“使抽象具体化”，但它听上去太做作）。数学“事物”在现实世界里根本不存在，它们是抽象物。数学过程也是抽象物，所以过程是和适合于它们的“事物”一样的“事物”。过程的事物化是很平常的事。事实上，我可以举一个非常好的例子：数字“2”确实不是事物,而是过程——当你把 2 头骆驼或 2 只绵羊与反复吟诵的符号“1，2”相联系时所实现的过程。数是一个很久以前已被彻底事物化的过程，以致于人人都把它当作事物。把运算或函数当作事物同样是可行的——尽管这对我们大多数人来说不太熟悉。例如，我们可以把“平方根”当作事物一样来谈论。在这，不是指任一特定数的平方根，而是指函数本身。在这一图景中，平方根函数像是一部做香肠的机器，你在一端装进数，它的平方根在另一端冒出来。

在第六章里，我们将把平面或空间的运动当作事物一样来讨论。我之所以现在提醒你，是因为在阅读那章节时，你可能会感到困惑。不过，数学家并不是唯一玩事物化游戏的人。法官在谈论“盗窃”时就像是在谈论一件事物，他甚至知道是何种事物——罪行。在诸如“西方社会中的两大祸害是毒品和盗窃”之类的话中，我们发现一件真正的事物和一件事物化的事物被完全同等对待。因为盗窃是过程，是一个我的财产在未经我允许的情况下被某人转移的过程，而毒品具有真实的物质实在。

计算机专家对于通过事物化过程用数字建立起来的事物有一个有用的术语：数据结构。计算机科学中的常见实例，是列表（用序列表达的数的集合）和数组（有若干行列的数表）。前面讲过，计算机屏幕上的图案可以用一系列数对来表示。那是较为复杂但完全可以理解的数据结构。你还可以设想更为复杂的可能性——列表的表构成的数组，而不是数字的表；数组的表；数组的数组；列表的数组的表的表……。数学就是以类似方式建立其基本思维对象的。回溯到数学的逻辑基础正被清理的年代，伯特兰·罗素（Bertrand Russell）和艾尔弗雷德·诺思·怀特海（Alfred North Whitehead）合写了一部 3 卷本巨著《数学原理》（Principia Mathe-matica）。此书是以最简单的逻辑要素——集合概念（即事物的集合体）开篇的，随后描述了如何建立数学的其余部分。他们撰写此书的主要目的在于分析数学的逻辑结构，但书中的主要内容却变成了为数学思想的重要对象确立适当的数据结构。

数学基本对象的这一描述所展现的数学图景就像一棵树，它植根于数，随着从树干到大树枝、从大树枝到中树枝、从中树枝到小树枝……，愈益向深奥的数据结构不断分叉。但这一图景缺了一个本质性要素，它不能描述数学概念如何相互作用。数学不仅仅是孤立事实的集合，它更像“一幅风景画”，有固有的“地形”。它的使用者和创造者们可用它来穿越那些很难通过的“丛林”，开辟他们的道路。在任何特定数学事实周围，我们发现了其他的相关事实。例如，圆周长是其直径的 π 倍这一事实，很接近于圆周长是其半径的 2π 倍这另一事实。这两个事实之间的联系是直接的：直径是半径的 2 倍。相反，不相关的概念彼此相去甚远。例如，依次排列 3 个物体恰好有 6 种方式

这一事实，与关于圆的事实毫无干系。此外，数学中还存在一种像山峰一样突起的思想。这些非常重要的思想像高耸的山峰直刺蓝天，它们可以被广泛地使用并从远处仰视。如关于直角三角形的毕达哥拉斯（Pythagoras）定理，或微积分的基本方法。在数学每一个转折点上，都会出现新的景色——一条必须用踏脚石才能涉过的不期而遇的河流；一个巨大、宁静的湖；一条无法跨越的冰隙。数学的使用者只能在数学领地上人迹常至的地方行走，而数学的创造者则在探求数学未知的奥秘，并把它们标画出来，开辟出使其余人更易通过的道路。

将数学这一幅风景画紧密结合在一起的要素是证明。证明确定从一个事实到另一事实的途径。对数学家来说，没有任何陈述可被认为是有效的，除非它被证明已排除了存在任何逻辑错误的可能性。然而，对于什么可被证明，以及如何被证明存在着许多极限。哲学和数学基础中的许多工作已经表明你不能证明一切事物，因为你必须有某个出发的地方，甚至当你已经确定出发的地点时，某些陈述仍然可能既不是可证明的，又不是不可证明的。我不想在这里探讨这些问题，我只想实际考察一下什么是证明，以及为什么证明不可或缺。

数理逻辑教科书指出，证明是一系列陈述，每个陈述或者由这个序列中的前一些陈述导出，或者由公理——即实质上定义所研究的数学领域的不证自明的前提——导出。这有点像把一部小说描述成一系列语句，每个语句要么建立在公认的语境上，要么可靠地由前面的语句得出。但这些定义都忽略了一个基本点：证明和小说都必须讲述一个有意义的故事。它们确实抓住了次要方面，即故事必须可信。它们也描述了所用的全部格式，但一个好的故事情节是最为重要的。

很少有教科书指出这一点。

我们大多数人都会被一部漏洞百出、然而又被吹得天花乱坠的电影所激怒。最近我看过一部电影，在影片中，游击队员占领了一个机场，他们关闭了控制塔所使用的电子设备，并用他们自己的设备来代替。然后，机场管理人员和影片中的主人公花了半个小时或更多的时间为无法与正在接近的飞机取得联系而苦恼。等待着陆的飞机在头顶上空盘旋，并且燃料几近用尽。没有一个人想到在不到 30 千米以外有一个二流的、完全可用的机场，也未想到与附近的空军基地联络。这个故事是精采的、过分电影化的，却不合情理。

然而这并不妨碍许多人喜欢它。他们的评判标准一定比我的低。但我们对我们打算接受的可信的事物都有限度。假如在一部纪实性的影片中，一个孩子将一座房子提起来，并把它搬走，从而反败为胜，大多数观众都会兴趣顿失。同理，数学证明是讲述合理的数学故事。读者会以合理的步骤来填空——就像一部影片的主人公突然出现在新环境中，而不必说明他们是如何到那儿的。但这个故事必须没有漏洞，没有不可信的情节。数学规则是严格的。在数学里，一条小裂缝就会是致命的。而且，隐约的裂缝可以像明显的裂缝一样致命。

让我们来看一个例子。这例子很简单，以避免带有专业背景。这个例子是我从一位同事那儿偷来的，他把它称作 SHIP/DOCK 定理。你可能知道此类谜题：给你一个词 SHIP（船），要求一次改变一个字母，每一步得到一个有效的词，最后把它变成另一个词 DOCK（船坞）。你可能喜欢在读下去以前试着解这个谜题。要是你这么做，你可能会比较容易理解这条定理及其证明。

这儿是一个解答：

SHIP
SLIP
SLOP
SLOT
SOOT
LOOT
LOOK
LOCK
DOCK①

有许多种可供取舍的解法，有的解法用词较少。要是推敲过这个问题，你最终会发现所有的解答有一个共同点：至少有 1 个中介词必须包含 2 个元音字母。

好，于是得证。

我不愿意接受实验证据。我不关心你是否有 100 个解答，并且每一个解答是否都包含有 2 个元音字母的词。你也不会为此种证据而高兴，因为你可能私下里觉得正好漏掉了不含此种词的某个真正聪明的序列。另一方面，你还有可能明显地感觉到：不知怎么地，“ 这是显然的 ”。我同意，但为什么它是显然的？

现在你已经进入了一种状态：失落。大多数数学家是在这种状态中度过他们的大部分时光的。你知道你想证明什么，你相信它，但你看不出求证的可信的故事情节。这意味着，你缺少将使整个问题豁然开朗的某个关键思想。过一会儿，我将给你一条线索。请先考虑几分钟，你将可能体验一段令人满意得多的数学家的状态：启发。

以下就是线索。英语中每个有效词必须含有元音字母。②

这是一条很简单的线索。首先，自信它是正确的（不妨找一部大字典查查看），然后考察它的含义……。

好，你要么接受它，要么放弃它。不管你作何选择，这与所有数学家在解决问题时所做的相同。这儿有一个技巧，你必须把注意力集中在元音的变化上。元音是 SHIP/DOCK 地形中的山峰，是避风道之间的陆标。

在初始词 SHIP 中，只有 1 个元音字母，它处在第 3 的位置。在终末词 DOCK 中，也有一个元音字母，但它处在第 2 的位置。元音字母是怎么改变位置的？有 3 种可能性：它可能从一个位置跳到另一个位置；它可能在某个位置上全部消失，随后再现；一个或几个额外的元音字母可能在某个位置上出现，随后消失。

第 3 种可能性直接导致这条定理。由于 1 次改变 1 个字母，这个词必须在某个阶段从有 1 个元音字母变成有 2 个元音字母。例如，它不能从有 1 个元音字母跳到有 3 个元音字母。但其他可能性怎么样呢？前面提到的线索告诉我们，SHIP 中的单个元音字母不能消失。那只剩下第 1 种可能性：总存在 1 个元音字母，但它从位置 3 跳到了位置 2。然而，只改变 1 个字母那又不能实现！因为你必须从位置 3 的元音字母和位置 2 的辅音字母，一步变成位置 3 的辅音字母和位置 2 的元音字母。那意味着 2 个字母必须改变，这是不合法的。证毕（正像欧几里得过去常说的那样）。

数学家会以更加正规的格式写下证明，即写下像教科书范例那样的东

西。但重要的是，要讲一个可信的故事。如同任何好的故事一样，它有开头，有结尾，有使你从一个情节到另一个情节并不出现任何逻辑漏洞的故事情节。即使这是一个很简单的故事，而且一点也不是标准的数学，但它却能阐明事物本质，特别是，那些真正令人信服的论证与听上去就可疑但确实未澄清的论证之间的突出差异。我希望它还能使你感受到具有创造性的数学家的某些情感体验：无法找出较容易解决问题方法时的失落；曙光渐露时的欢欣鼓舞；检查论证过程中是否有漏洞时的疑惑；断定某种想法是否确实可行，并认识到它与显而易见的复杂情况相吻合时的满足。创造性的数学就是如此，但它具有更为严肃的内容。

证明必须令人信服，要得到数学家的承认。有过许多事例，其中大量的数字论据却暗示了一个完全错误的答案。有一个著名的与素数（除了自身和 1 以外没有任何约数的大于 1 的自然数）有关的例子。素数序列从 2，3，5，7，11，13，17，19 开始，一直延续下去。除了 2，所有素数都是奇数。奇素数分为两类：小于 4 的倍数的素数（如 3，7，11，19），大于 4 的倍数的素数（如 5，13，17）。如果你顺着这个素数序列跑一段距离，数一数落入每一类素数有多少次，那你将会发现似乎总是“小于 4 的倍数”一类的素数比另一类“大于 4 的倍数”的素数多。例如，在上列 7 个相关素数中，4 个素数属第一类，而属第二类的素数有 3 个。这个模式至少对达百万万亿的数都成立。看来完全有理由认为它是正确的。

但是，它不正确。

数论专家们通过间接方法已经证明，当素数变得足够大时，这模式发生改变，“大于 4 的倍数”那一类占上风。这一事实的头一个例证仅当数大于 10’10’10’10’46 时才成立（这里为避免打字机作怪，我用记号“’”代表形成幂次）。这个数非常巨大，把它全写下来，则为 10000…000，带有许许多多 0。假如宇宙中的所有物质都变成纸，在每个电子上记一个 0，还没有足够多的纸能装下哪怕所需 0 的极小一部分。

即使再多的实验证据也无法考虑如此稀罕的例外可能性，你需要有大到能容纳它们的数。不幸的是，极稀罕的例外在数学中至关重要。在日常生活里，我们很少会担心有百万万亿分之一机会可能发生的事。你担心被陨星击中吗？其概率大约是百万万亿分之一。但数学起于层层堆垒的逻辑推理，如果任意一步错了，整个大厦就会倾覆。假如你叙述这样一个事实：一切数都表现为某种形式，有且仅有一个数不这样，你就错了，你在那个不正确事实基础上所建立起来的一切都令人怀疑。

甚至很优秀的数学家偶尔也会声称证明了后来被证明并非如此的事物——他们的证明有一个微小漏洞；或者运算中有一个简单的错误；或者他们粗心地假定了不像他们想象得那么可靠的事物。所以，几个世纪以来，数学家学会了对证明极端地挑剔。证明把数学织物编织在一起，如果其中的一根丝线不牢靠，整个织物就会解体。

# 第四章　变动之常数

许多世纪以来，人类对于自然的认识在相反的两极之间摇摆。一种观点认为，宇宙遵从恒定不变的规律，一切事物都表现为完全确定的客观实在。相反的观点则认为，根本不存在像客观实在那样的事物；一切皆在流动，皆在变化。正如希腊哲学家赫拉克利特（Heraclitus）所言，“你不能两次踏进一条相同的河流。”科学的兴盛基本上由第一种观点支配。但有越来越多的迹象表明，流行的文化背景正开始向第二种观点转换，诸如后现代主义、电脑朋客（cyberpunk）和混沌理论那样多元的思维方式，都使实在的所谓客观性变得模糊，于是关于刻板的规律与灵活的变动之间无休止的争论重又开战。

我们真正要做的，是完全摆脱这徒劳无益的游戏。我们需要找到一条从这两种相反的世界观后退的途径。这不是寻求综合，而是把它们都看成是某种高级实在秩序的投影，两种投影仅仅由于从两个不同方向看高级秩序而有所不同。但此种高级秩序存在吗？如果存在，它可以被理解吗？对许多人，尤其是对科学家来说，牛顿代表着一种理性战胜神秘的辉煌。然而著名经济学家约翰·梅纳德·凯恩斯（John Maynard Keynes）在《牛顿其人》（Newton，theMan）一文中却有不同看法：

> “在 18 世纪里，以及从那时以来，牛顿被认为是第一位并且是最伟大的一位现代科学家；一位教我们依照冷静的、无感情色彩的理性去思考问题的理性主义者。但我却不这样看他。我认为，任何深入研究过牛顿 1696 年离开剑桥时放在那只密封的箱子里的东西（尽管部分东西已散失，但大部分东西还是幸存下来）的人，都不会那样看他。牛顿并不是理性时代的第一人。他是最后一个法术师；最后一个巴比伦人和苏美尔人；最后一个用与早于一万年前开始建立我们求知传统的那些人相同的眼光，看待这个可见的智慧世界的大智者。艾萨克·牛顿，这位 1642 年圣诞节出生时就没有父亲的遗腹子，是东方三贤（Magi）①能够向其表示诚挚和恰当的敬意的最后一个奇才。”

凯恩斯研究牛顿的个性，以及除了对数学和物理学的兴趣外，他对炼金术和宗教的兴趣。但在牛顿的数学里，我们还发现了他向超越和统一刻板定律与灵活可变的两种世界观迈出的重要的第一步。宇宙犹如在风暴中飘摇的变动之海，但牛顿，还有在他之前让他站在他们肩上的两位巨人伽利略（Galileo）和开普勒，却认识到变化须遵循一定的法则。定律和变动不仅可以共存，而且定律产生变动。

如今正在兴起的混沌和复杂性科学提供了缺失的反命题：变动产生定律。但这是另一个故事，留待本书最后一章再述。在牛顿之前，数学提供了一个本质上静态的自然之模型。然而有几个例外，最明显的是托勒密（Pto1emy）的行星运行理论。这一理论用一系列绕中心旋转的圆（中心本身又依附于旋转的圆）——圆内套圆——很精确地再现了观察到的变动。但在当时，数学的任务被理解为发现大自然所采用的“理想形式”的目录。基于圆周上任意一点到圆心等距这一事实，圆当时被认为是可能存在的最完美的形状。大自然这个高级生命的创造物被认为是完美无缺的，理想形式是数学的完美，所以两者当然相配。并且，完美被认为是未被变动玷污的事物。

开普勒通过找到取代复杂的一系列圆的椭圆，向那种观点发起挑战。但牛顿把它们都抛弃了，他用产生形式的定律取代了形式。

尽管其细节颇为繁杂，但牛顿对运动的研究方法却很简单。可以用抛射物（如以一定角度从炮中射出炮弹）来解释运动。伽利略通过实验发现，此种抛射物的轨迹是抛物线，一种早已为古希腊人所知并与椭圆有关的曲线①。在抛物运动过程中形成一个倒 U 形，我们可以把抛物运动分解成两种独立的分量，即水平方向上的运动和垂直方向上的运动。这样就能很容易理解抛物线的轨迹。分别研究这两种运动，当每一种运动被彻底搞清楚后把它们合在一起，我们就会明白为什么抛物运动的轨迹应当是抛物线。

炮弹与地面平行的水平方向上的运动很简单：是匀速运动。炮弹垂直方向上的运动则比较有趣。它起先很快地向上运动，然后速度逐渐慢下来，直至一刹那悬在空中不动；然后开始下落，起初很缓慢，之后速度越来越快。

牛顿认识到，尽管炮弹的位置以一种十分复杂的方式在变化，但其速度的变化方式却较为简单，它的加速度则以更简单的方式在变化。图 4.1 概括了以下例子中 3 种函数之间的关系。

为方便起见，我们假设向上的初速度是 50 米/秒，则炮弹每隔 1 秒距地面的高度是：

0，45，80，105，120，125，120，105，80，45，0

从这些数字可以看出，炮弹上升，在接近最高点时平飞，然后下落。但一般的高度模式不会这样明显。因为很难直接测量这些数。在实际情况中，伽利略让一个球向一略斜的斜面上方滚，以放慢整个过程。最大的难题在于精确地测量时间。物理史学家斯蒂尔曼·德雷克（Stillman Drake）曾想象伽利略大概像音乐家那样独自哼着曲子，在头脑中划分基本节拍。

距离的模式是一个谜，但速度的模式却清楚得多。球开始时以 50 米/秒的向上速度出发，1 秒后速度减到大约 40 米/秒；再过 1 秒，速度是 30 米/秒；然后是 20 米/秒，10 米/秒；最后是 0 米/秒（静止）。再过 1 秒后，球向下运动的速度是 10 米/秒。采用负数，我们可以把这当作-10 米/秒的向上速度。随后的数秒，球继续向下运动：-20 米/秒，-30 米/秒，-40 米/秒，－50 米/秒。最后球触及地面。因此，每隔 1 秒测得的速度序列是：

50，40，30，20，10，0，-10，-20，-30，-40，-50

现在有一个几乎不会被忽视的模式，但让我们再进一步来看一看加速度。就炮弹的加速度而言，相应的序列（用负数代表向下运动）是

-10，-10，-10，-10，-10，-10，-10，-10，-10，-10，-10

我想你会同意，这模式极其简单。炮弹向下的恒定加速度为 10 米/秒 $^2$（真正的数值约为 9.81 米/秒 $^2$，这取决于你在地球上的什么地方来做这一实验。但 10 比较好记）。

我们如何来解释隐藏在动态变量中的这个常数呢？当其他所有变量都在发生变化时，为什么加速度不变？一个引人注目的解释分成两个因素。第一个因素是地球引力一定在将炮弹向下拉，即存在着作用于炮弹的重力。预期这个力在距地面不同的高度上保持相同是合理的。确实，由于重力把我们身体向下拉，我们感受到了重量。要是我们站在高楼的楼顶，我们仍然有相同的重量。当然，这种日常的观察并未告诉我们倘使距离变得足够大——如大到月球与地球之间的距离——会发生什么情况。不久我们将回到这个问题上来。

第二个因素是真正的突破。我们有一个在不变的向下力的作用下运动的物体，并且我们观测到物体的运动有一个不变的向下的加速度。为方便起见，我们假定重力强一些，这样向下的加速度也大一些。我们没有到过重力较大的行星，如木星，因此无法验证这一概念，但它似乎是合理的。同样有理由假设木星上向下的加速度也是常数，但它与地球上的常数不同。与这一真实实验和理想实验混合物相容的最简单理论是，当一个力作用于物体时，物体具有一个正比于该力的加速度。这正是牛顿运动定律的核心。唯一缺失的成分是，对一切物体和一切力，无论这些力是否保持不变，这一假设总是正确，并且比例常数的确认与物体的质量有关。准确地说，牛顿运动定律表述为：

质量×加速度=力

这一定律的巨大价值在于，对于任何质量和力系统，包括随时间改变的质量和力，它都有效。我们通过论证得出这个定律的时候，未曾预料到这种普遍性，但结果正是如此。

牛顿表述了 3 条运动定律，但现代研究把它们视为单一数学方程的 3 个侧面。所以我将用“ 牛顿运动定律 ”这个短语指代这 3 条定律。

每当遇到一座山时，登山队员的自然冲动是攀登它；遇到一个方程时，数学家的自然冲动是求解它。但怎么解呢？已知物体的质量和作用于物体上的力，我们不难解这个方程，求得加速度。但这是对错误问题的解答。已知炮弹的加速度总是-10 米/秒 $^2$，这并未告诉我们关于弹道形状的任何明显东西。这是名为微积分的数学分支一显身手的地方，牛顿（以及莱布尼兹）为此才发明了微积分。微积分提供了一种方法，如今叫积分方法，它使我们能从任意时刻的加速度得出任意时刻的速度。我们同样可以用它来得到任意时刻物体的位置。这才是对正确问题的解答。

我前面说过，速度是位置的变化率，加速度是速度的变化率。微积分则是被发明出来处理变化率问题的数学方法。尤其是，它提供了求变化率的方法——微分方法。积分“ 消除 ”微分的效果；积分两次消除微分两次的效果。好像罗马神杰纳斯（Janus）的两张面孔①朝向相反，这些孪生的微积分方法作用相反。如果知道任一时刻任意一个函数——位置、速度和加速度，就可以算出另外两个函数。

牛顿运动定律给我们上了重要一课。这就是，从自然定律到自然行为的道路不一定是直接的、明显的。在我们观察到的自然行为和产生这些行为的自然定律之间是一道鸿沟，人类心智只能借助数学计算来跨越它。这并不表明自然界就是数学；不表明“ 上帝是数学家 ”[物理学家保罗 · 狄拉克（Paul Dirac）如是说]。或许自然之模式和规律有其他起源，但无论如何，数学对于人类把握这些模式是一条极为有效的途径。

贯彻牛顿的基本思想，即自然界中的变化可用数学过程来描述，正如自然界中的形式可用数学上的事物来描述一样，所发现的物理定律都有一个相似的特征。这些定律都以方程的形式表述。方程不是与最初感兴趣的物理量有关，而是与那些物理量随时间变化的速率或那些速率随时间变化的速率相关。例如，决定热量如何通过导体的“ 热流方程 ”是关于物体温度的变化率的方程；支配水、空气或其他材料中波运动的“ 波动方程 ”，则与波高的变化率的变化率有关。光、声、电、磁、材料弹性弯曲、流体流动和化学反应进程的物理定律，都是有关各种变化率的方程。

由于变化率涉及某个量的现在与将来某时刻的数值之差（difference），所以这种方程叫微分（differential）方程，微分（differenti-ati0n）这个术语就是这样得来的①。自牛顿以来，数学物理学的策略成为用各种微分方程来描述宇宙，然后求解方程。

然而，随着我们把这一策略用于更为复杂的领域，我们对“求解”这个词的认识经历了一系列重大变化。最初它意味着找到一个描述系统在任意时刻的状态的准确的数学公式。牛顿发现的另一个重要的自然模式——万有引力定律——就是建立在这种解的基础之上。他将开普勒发现的行星以椭圆形轨道运行与另两个也是由开普勒发现的数学规律②相结合作为开始，然后探究作用于行星上的什么样的力必然产生开普勒发现的模式。实际上，牛顿试图由自然行为反推自然定律。他运用的是归纳过程而不是演绎过程。他发现了一个美妙的结论：所需要的力应当总指向太阳方向；力应当随行星至太阳的距离增大而减小，并且，这种减小应当服从一个简单的数学定律——平方反比律。这就是说，例如，这一距离加倍，作用于行星上的力就减小到四分之一；距离成 3 倍，力减小到九分之一；以此类推。这一发现是如此美妙，以致它肯定揭示了关于这个世界的深刻真理。从这一发现出发，与认识到必然是太阳产生这个力仅一步之遥。太阳吸引行星，假如行星远离太阳，则吸引力变弱。这是一个很动人的思想。牛顿又实现了一个巨大的智力飞跃：他认为同样类型的吸引力必然在宇宙中任何地方任何两个天体之间存在。

至此，牛顿“归纳出”关于力的定律以后，才通过演绎行星运动的几何学来自圆其说。对于服从平方反比律的两个相互吸引着的天体系统，牛顿求解根据他的运动定律和万有引力定律给出的方程。在当时，“求解”意味着找出其运动的数学公式。公式表明，天体必须围绕其公共质心以椭圆形轨道运动。当火星以一个巨大的椭圆形轨道绕太阳运行时，太阳却以一个小得其运动很难被察觉的椭圆形轨道运行。与火星相比，太阳的质量要大得多，这使得两者的公共质心位于太阳表面处，这便解释了开普勒认为火星以椭圆形轨道围绕不动的太阳运行的原因。

然而，当牛顿和他的后继者试图再接再厉求解三体系统或多体系统——如月球/地球/太阳系统或整个太阳系——的方程时，他们遇到了技术上的困难，而且他们只能靠改变“求解”这个词的含义来摆脱困境。他们找不到精确解出方程的任何公式，因此只得放弃这种努力，而企图找到计算近似值的途径。例如，在 1860 年前后，法国天文学家夏尔-欧仁·德洛内（Charles-Eugene Delallnay)用了几乎一本书的篇幅得到了一个在地球和太阳引力的作用下月球运动的近似解。它是一个相当精确的近似，所以它有一本书的篇幅，而且德洛内花了 20 年的时间才得出这一近似解。1970 年，用符号代数计算机程序核算它时，仅用了 20 小时。在核算中只发现德洛内犯了 3 个不严重的错误。

月球/地球/太阳系统的运动由于显见的原因叫做三体问题。它完全不同于由牛顿干净利落地解决了的二体问题，以致于就像是在另一个星系或另一个宇宙中另一颗行星上发明出来的东西。三体问题寻求描述在平方反比律万有引力作用下 3 个天体运动的方程的解。数学家几个世纪来一直想找到这样的解，但除了得到近似值（如只适用于像月球/地球/太阳这样的特殊情形的德洛内近似）之外，未取得多少引人注目的进展。甚至连所谓的限制性三体问题，即其中一个天体质量很小，可以认为它对另两个天体不施加任何力，都被证明完全无法逾越。这是第一个重要的暗示：了解定律可能不足以认识

系统的行为；定律与行为之间的鸿沟可能不总是可跨越的。

牛顿之后过了 3 个世纪，尽管付出了巨大的努力，我们仍然没有得到关于三体问题的完满答案。不过，我们终于明白了这个问题为什么如此难以攻克。二体问题是“可积的”①——能量守恒定律和动量守恒定律把解限制得相当严格，解被迫取一个简单的数学形式。1994 年，佐治亚理工学院的夏志宏（Zhihong Xia）②证明了数学家长久猜测的命题：三体系统不是可积的。通过证明三体系统呈现一个由国立莫斯科大学的弗拉基米尔·阿诺德（Vladimir Arnold）于 1964 年首先发现的名为阿诺德扩散的奇怪现象，夏志宏确实取得了不小的成果。阿诺德扩散在相对轨道位置上产生极其缓慢的“无规”漂移。这种漂移并非真正无规，它是如今称之为混沌的一类行为的一个例子。混沌作为貌似无规的行为可以用纯粹确定性的原因来描述。

在此，我想请读者注意：这种研究再一次改变了“求解”的含义。起初“求解”这个词意味着“求公式”，后来其含义变成“求近似数”，最后它实际上变成“大致告诉我解像什么样子”。我们用寻求定性解答取代了寻求定量解答。在一定意义上，正在发生的事好像是一种退步：要是求公式太难，就试着求近似；要是近似不可得，就试一试定性描述。但把这种进步视为退步是错误的，因为这种含义变化给我们的启示是，对于像三体问题这样的问题，不会存在任何公式。我们可以证明，存在着公式不能抓住的解的定性内容。在这种问题中探求公式就是寻找海市蜃楼似的东西。

为什么人们首先想要得到一个公式呢？因为在动力学的早期岁月，那是证明何种运动存在的唯一一条路。之后，同样的信息可以由近似导出。如今，它可以从直接又精确地处理运动的主要定性方面的理论得到。正如我们在后面几章将看到的，这种向明显定性的理论的转变不是退步，而是一个长足的进步。我们第一次开始按照自然的本来面目认识自然之模式。

# 第五章　从小提琴到录象机

如上所述，把数学分成两个分离的子学科，即所谓的纯数学和应用数学，是约定俗成的。正是这一分离迷惑了经典时代的大数学家们。例如，高斯在数论的象牙塔中感到最愉快，他陶醉于抽象的数字模式，仅仅因为它们优美和富有挑战性。他称数论为“数学的王后”，不让任何有用的东西弄脏自己手的王后们有着雅致的美，这一富有诗意的思想距他的想法不远。然而，他也计算过谷神星（最早发现的小行星）的轨道。在谷神星被发现后不久，它运行到了太阳背后（从地球上看时），不再能观察到它了，除非它的轨道可以被精确地计算出来，否则天文学家在它几个月后再次变得可观察时就无法找到它。但这颗小行星的观测次数太少，计算轨道的标准方法不能提供所需的精度。所以高斯作出了几个重大创新，其中有的沿用至今。那是一次精湛的表演，使他在公众中赢得了声誉。这并不是他对数学的唯一一次实际应用，他还对土地测量学、电报学以及对磁学的发展起过重要作用。

在高斯时代，一个人有可能完全掌握全部的数学知识。但现在由于科学的所有经典分支已成长得如此庞大，以致没有一个头脑能把握甚至其中之一，所以我们现在生活在一个专家的时代。如果人们要么投身于数学这门学科的理论领域，要么在数学的实际应用方面有专长，数学的组织结构就会更规整地起作用。由于以这两种风格中的一种或另一种工作的大多数人感到这样较愉快，于是个体的偏好愈加强化了这一区分。不幸的是，当时对于数学圈外的人来说，假定数学唯一有用的部分是应用数学的观点十分诱人；那毕竟是其名称的含义。在建立数学方法的时候，这一假定是正确的，任何确实有用的东西最终必然被冠之以“应用”，不管它的起源可能是什么。但它严重歪曲了实践上重要的新数学知识的来源。好的思想是不多见的，但它们至少像来自于解决专门实际问题的尝试一样多地来自于关于数学内部结构的想象性梦幻。本章正是要讨论此种发展过程的一个案例，这案例是一个比其他任何东西都更有争议地改变了我们世界的发明——电视。在这个故事里，数学的理论方面和应用方面相结合，得出某种较任一方面可能单独得出的更为强大和有推动力的东西。故事始于 16 世纪初的振动小提琴弦问题。尽管这听上去像一个实际问题，但它主要被作为求解微分方程的一项练习来研究，这项工作并不针对改进乐器的质量。

设想在两个固定的端点之间把一条理想的小提琴弦拉成直线。假如你拨弹此弦，把它扯离直线位置，然后松手，会发生什么情况？当你把弦拉开时，它的弹性张力增大，产生一个把弦向初始位置回拉的力。当你松手时，按照牛顿运动定律，弦在这个力的作用下开始加速。不过，当它回到其初始位置时，运动速度很快，因为它始终在加速——所以它越过直线位置，继续运动。现在张力向相反方向拉，使弦慢下来，直到弦停止运动，然后这整个过程又开始。假如没有任何摩擦，弦将从一边向另一边永远振动不止。

这是一段似是而非的文字描述。数学理论的任务之一是看看这一说明是否确实成立，如果成立，则搞清楚细节，如描述弦在任意时刻的形状。然而这是一个很复杂的问题，因为同一根弦会以许多不同方式振动，这取决于怎样拨弹它。古希腊人早就知道这一点，因为他们的实验表明，振动着的弦会产生许多不同的音调。后来几代人认识到，音调的音高由振动的频率——弦来而复往的速率——来决定。于是这个希腊人的发现告诉我们，同一根弦能

以许多不同频率振动。每个频率对应于运动弦的不同形状，所以同一根弦在振动时可以取许多不同的形状。

弦振动对于肉眼来说太快，快得看不清任意一个瞬时弦的形状。但希腊人为弦可以以许多不同频率振动这一思想找到了重要的证据。他们证明，音高取决于节点——弦上保持不动的点——的位置。你可以在小提琴、班卓琴或吉他上对此进行检验。当弦正在以它的“基”频（即最低可能的音高）振动时，只有两个端点不动。假如你把一个指头按在弦的中央，造出一个节点，然后拨弹弦，则弦产生高一个音阶的音调。假如你把指头放在弦长的三分之一处，你实际上造出两个节点（另一个节点在三分之二弦长处），这时会产生更高的音调。节点越多，频率越高。一般来说，节点数是整数，并且节点等间距。

对应的振动是驻波，其意义是波上下运动但不沿弦传播。上下运动的大小称为波幅，它决定音调的响度。波是正弦波——形如正弦曲线，即三角学中产生形状很雅致的反复的波浪线。

1714 年，英国数学家布鲁克·泰勒（Brook Taylor）发表了小提琴弦的振动基频与弦的长度、张力和密度的关系。1746 年，法国人让·勒朗·达朗贝尔（Jean Le Rond d'Alemberi）证明，小提琴的许多振动并不是正弦驻波。事实上，他证明了波的瞬时形状可以是你喜欢的任何形状。1748 年，针对达朗贝尔的工作，杰出的瑞士数学家列昂纳德·欧拉（Leonhard Euler）就弦建立了“波动方程”。按照牛顿的精神，这是一个刻划弦形状变化率的微分方程。事实上，这是一个“偏微分方程”，其意义是它不但包含相对于时间的变化率，而且包含相对于空间——沿弦的方向——的变化率。它用数学语言表达了这样的思想：弦的每一小段的加速度与作用于那小段的张力成正比，所以它是牛顿运动定律的产物。

欧拉不仅建立了波动方程，他还解出了波动方程。他的解可以用文字来描述。首先，把弦变形成你选择的任何形状——比如抛物线、三角形，或你自己设计的扭动的不规则曲线。然后想象该形状沿弦向右传播，这被称为右向行波。接着把所选择的形状倒过来，想象它沿另一条路线传播，产生左向行波。最后，叠加这两个波形。这一过程导致弦端点保持不动的波动方程的所有可能的解。

欧拉几乎立即卷入了与丹尼尔·伯努利（Daniel Bernoulli）①的一场争论。伯努利也解出了这个波动方程，但用的是一种完全不同的方法。按照伯努利的方法，最一般的解可以表示为无限多个正弦驻波的叠加。这种表面上的不一致引发了长达一个世纪的争论，最终以欧拉和伯努利都正确而结束了这场争论。他们都正确的原因在于，每个周期性改变的形状都可表示为无限多个正弦曲线的叠加。欧拉认为他的方法导致较为多样的形状，因为他未认识到它们的周期性。然而，这种数学分析适用于无限长的曲线。由于曲线的唯一部分是两个端点之间的那部分物质，所以它可以不发生任何实质性的变化沿很长的弦周期性地重复。因此，欧拉的担忧是不成立的。

从而，这一切工作的结论是，正弦波是基本振动成分。可以出现的所有振动，由形成所有可能振幅的所有可能有限多个或无限多个正弦波之和给出。正像伯努利一贯坚持的那样，“一切由达朗贝尔和欧拉给出的新曲线只是泰勒振动的组合”。

随着这一争论的解决，小提琴弦的振动不再是一个谜了，于是数学家们

着手猎取更大的猎物。小提琴弦是一条曲线，是一维对象，但多维对象也可以振动。二维振动最明显的乐器是鼓，因为鼓面是一个平面，不是一条直线。因而，1759 年从欧拉开始，数学家们把注意力转向了鼓。欧拉又导出了一个波动方程，这个方程描述鼓面在垂直方向上随时间变化的位移。它的物理解释是，一小片鼓面的加速度与所有邻近部分鼓面作用于其上的平均张力成正比。如用符号来表示，它看上去很像一维波动方程，但现在除了有时间变化率之外，在两个独立方向上还有空间（二阶）变化率。

小提琴弦有固定不动的两端。这一“边界条件”有一个重要效应：就小提琴弦而言，它决定波动方程的哪个解有物理意义。在这一整个对象中，边界绝对至关重要。鼓不仅在其维度上不同于小提琴弦，而且有一个更加有趣的边界：鼓的边界是闭合曲线或圆。然而，与弦的边界一样，鼓的边界固定不动，其余鼓面可以运动，但它的边缘被牢牢捆扎住。这一边界条件限制了鼓面的可能的运动。小提琴弦孤立的端点不像闭合曲线式的边界条件那样有趣又多变。边界条件的真正作用只有在二维或多维中才变得明显。

随着对波动方程认识的加深，18 世纪的数学家们学会了就各种形状的鼓的运动求解波动方程。现在波动方程已开始离开音乐领域，成为数学物理学的绝对中心特征。尽管艾伯特·爱因斯坦（Albert Einstein）的质能关系也很重要，但波动方程可能是曾经提出的最重要的一个数学公式。这个突出的例子表明，数学可以揭示大自然隐藏的统一性。同样类型的方程开始在各个领域出现。在流体动力学中，波动方程描述水波的形成和运动。在声学理论中，波动方程描述声波的传递——在空气振动中，空气分子交替地变得致密和疏散。波动方程还出现于电学和磁学理论中，使人类文明大为改观。

电学和磁学具有久远的、错综复杂的历史，比波动方程的历史要复杂得多。它们除了数学和物理理论之外，还包含偶然的发现和关键的实验。它们的故事从威廉·吉尔伯特（William Gilbert）开始。这位伊丽莎白一世（Elizabeih I）的御医把地球描述为一个大磁体，并观察到带电体会相互吸引或相互排斥。后继者及其主要工作有：本杰明·富兰克林（Benjamin Franklin）于 1752 年用在雷雨天放飞的风筝证明闪电是电的一种形式；卢伊季·伽伐尼（Luigi Galvani）注意到电火花促使死青蛙腿肌收缩；亚历山大罗·伏打（Alessandro Volta）发明了第一个电池。纵观这早期发展史的大部分时期，电和磁被视为两种截然不同的自然现象。把电和磁统一起来的人是英国物理学家和化学家迈克尔·法拉第（MichaeI Fara-day）。法拉第曾在伦敦的皇家研究院任职，他的一项工作是每周设计一项实验，以供有科学素养的成员品鉴。这种对新思想的不断需求，使法拉第成为有史以来最伟大的实验物理学家之一。他对电和磁特别着迷，因为他知道电流会产生磁力。他花了 10 年时间试图证明磁体反过来能产生电流。1831 年他取得了成功。他证明了磁和电是同一样东西——电磁——的两个不同方面。据说国王威廉四世（William IV）曾问法拉第，他的摆样子的科学把戏有什么用，法拉第的回答是：“我不知道，陛下，但我确实知道有朝一日您将对它们征税。”事实上，这些“科学把戏”的实际用途不久就出现了。著名的有电动机（电生磁生运动）和发电机（运动生磁生电）。但法拉第还发展了电磁学理论。他不是数学家，于是他把他的思想诉诸物理图象，其中最重要的是力线思想。假如你把磁铁放在一张纸下面，在纸面上撒许多铁锉屑，则铁挫屑会排列成轮廓分明的曲线。法拉第对这些曲线的解释是，磁力并非在没有任何介于其

间的媒质的情况下“远距离”起作用，而是沿弯曲的线条通过空间传播。这对电力同样适用。

法拉第不是数学家，但他智慧的继承人詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（James Clerk Maxwell）却是数学家。麦克斯韦把法拉第的力线思想用磁场和电场数学方程表达出来——把力线解释为磁体和电荷在空间的分布。1864 年，麦克斯韦把他的理论优化成将磁场变化与电场变化相关联的一组 4 个微分方程。这组方程简练精美，揭示了电和磁之间奇妙的对称性，两者都以类似方式影响对方。

正是在麦克斯韦方程的精致符号中，人类实现了从小提琴到录象机的巨大飞跃。通过一系列简单的代数操作后我们可以从麦克斯韦方程中得到波动方程——它意味着存在电磁波。而且，波动方程还意味着电磁波以光速传播。一个即刻产生的推论是，光本身就是电磁波——以光速传播的最明显事物非光莫属。但正如小提琴弦可以以许多频率振动，所以根据波动方程，电磁场亦然。对于人眼可见的波，它使频率对应于颜色。具有不同频率的弦产生不同的声音；具有不同频率的可见电磁波产生不同的颜色。当频率在可见范围之外时，电磁波不是可见光波，而是某种别的波。

是什么波呢？麦克斯韦在建立他的方程的时候，尚无人知道是什么波。毕竟这一切都是基于麦克斯韦方程确实适用于物理世界这个前提的一种推测。在这些波可被公认为真实之前，他的方程有必要经受检验。麦克斯韦的思想在英国颇受青睐，但直到 1886 年德国物理学家海因里希·赫兹(Heinrich Hertz)发生了电磁波——在我们现在称为无线电的频段处——并用实验检测了电磁波时，他的思想在英国之外几乎完全被忽视。具有英雄传奇色彩的故事的最后一幕的主角由古列尔莫·马可尼（Guglielmo Marconi）担当，他于 1895 年成功地拍发了第一份无线电报，并于 1901 年成功地传送和接收了第一个跨越大西洋的无线电信号。

在这之后呢？正如人们所知的那样，随后出现的是雷达、电视和录象磁带。

当然，这一切不过是数学、物理学、工程技术和金融界之间冗长又复杂的相互作用的一个梗概。没有一个人能声称享有发明无线电的荣誉，也没有任何一个学科能如此。可以想象得到，假如数学家们没有透彻地了解波动方程的话，麦克斯韦或他的后继者无论如何都会搞清楚波动方程的含义。但许多思想在“爆炸”之前，必须保持一个临界质量，没有任何创新者有时间或有想象力为了制造工具而制造工具，即使它们是智慧工具。非常清楚的事实是，有一条发端于小提琴，最后发明了录象机的明晰的历史线索。也许在另一个星球上事情的发生会有所不同，然而这一切是发生在我们星球上的事情。

或许在另一个星球上事情的发生不会有所不同，可能区别不大。麦克斯韦波动方程相当复杂，它描述了电场和磁场同时在三维空间中的变化。小提琴弦方程则简单得多了，仅仅是一个量（位置）沿一维线的变化。现在，数学的发现通常从简单向复杂推进。如果没有对简单系统（如振动的弦）的充分认识，那么，对无线电报问题的“目标定向”攻坚战，其成功机会与如今攻克反引力或超光速动力的成功机会几乎是一样的。没有人知道从哪里出发。

当然，小提琴是人类文化——实际上是欧洲文化——的偶然产物。但线

状物体的振动是普遍存在的，它们以一种或另一种形式出现于各个地方。可能在猎户星座II，蜘蛛样的外星人中发现了电磁波，或许是因为蜘蛛网上蛛丝的振动，而蛛网是由为了生存的昆虫织成的。但设计使赫兹作出他那史诗般发现的一系列特定实验要有某个清晰的思路，并且那个思路必须从简单现象出发。正是数学揭示了大自然的简单性，使我们能把简单实例推广到现实世界的复杂性。这使许多不同领域的人，将数学思想转变成了有用的产品。要记住，下次你戴着随身听慢跑，或者打开你的电视机，或观看录象磁带时，请暂停几秒钟，想一想，要是没有那些数学家，所有这些奇迹都不会被创造出来。

## 第六章　破缺的对称

人类心智中的某种东西受对称的吸引。对称对我们的视觉有感染力，从而影响我们对美的感受。不过，完全的对称是重复性的、可预言的。而我们的头脑却喜欢意外，于是我们常常把不完全的对称看作比精确的数学对称更为优美。大自然似乎也被对称所吸引，因为自然界中许多最显著的模式是对称的。然而，大自然似乎也对过多的对称不满意，因为自然界中几乎所有对称模式都比产生它们的原因更不对称。

说起来这简直是一件怪事。你可能记得与夫人玛丽·居里（Marie Curie）共同发现放射性的那位大物理学家皮埃尔·居里（Pierre Curie），他曾指出“结果与其原因一样对称”的一般原则。然而，这个世界充满了不如原因那么对称的结果，道理在于一种叫“自发对称破缺”的现象。

对称不仅是一个美学概念，而且还是一个数学概念，我们用它可以划分不同类型的规则模式，并对模式进行区分。对称破缺则是一个描述模式中的变化的较为动态的概念。在我们能理解自然之模式来自何方以及如何变化之前，我们必须找到一种描述它们是什么的语言。

对称是什么？

让我们从特殊到一般来看一看。最熟悉的对称形式之一是伴你度过一生的躯体。人体是“两边对称的”，也就是左边一半（大致）等同于右边一半。如同你所注意到的，体形的两边对称只是近似的：心脏并不在中央，脸的两边并不相同。但整个体形很接近于具有完全对称性的形状。为了描述对称之数学，我们可以设想一个理想化的人体，它的左边完全与右边相同。但完全相同吗？不完全。这人体的两边占居不同的空间区域；而且左边是右边的反面——它的镜象。

我们一旦使用像“图象”这样的词，就已经在思考一个形状如何对应于另一个形状——即在思考如何变动一个形状，使它与另一个形状相重合。两边对称意味着，若把左边一半在镜子里反射，则得到右边一半。反射是一个数学概念，但它不是形状，不是数，不是公式。它是变换，即事物变动的规则。

存在着许多可能的变换，但大多数变换并不是对称的。要正确地使两半相关联，镜子必须放置在对称轴上，对称轴把人体分成相关的两半。反射使人的体形不变——外表不变。于是我们发现了两边对称的精确数学特征——一个形状若在反射时不变，则它是两边对称的。更概括地说，物体或系统的对称是使之不变的任何变换。这一表述是我在前面称之为“过程的事物化”的一个妙例：“如此变动”的过程变成一种事物——对称。这个简单又优美的特征打开了通向数学广阔领域的大门。

存在着许多不同类型的对称。最重要的对称类型是反射、旋转和平移——或不太正规地说，是翻动、转动和滑动。假如你在一个平面上拿一物体，把它拿起来，翻一个身，你就得到犹如将这一物体在适当的镜面中反射所得到的相同的效果。为了找出镜子合适的放置地点，可在物体上选一个点，看看翻动物体时那个点落在什么地方。镜子必须位于这点和它的镜象之间，它至这点和至镜象的距离应相等，并与连接两者的直线成直角（见图 6.1）。反射也可在三维空间里进行，但镜子是我们更为熟悉的一种平面反射。

要在平面内转动一个物体，你选择一个点（叫中心），然后使物体绕中

心转动，就像轮子绕轮毂转动一样。通过旋转物体的度数来决定旋转的“大小”。例如，设想有 4 个等间距花瓣的一朵花，如果你把花转 90 度，它看上去完全一样，所以“直角旋转”变换是花的一种对称。旋转也可在三维空间里进行，但现在你必须选择一条线（即轴），使物体绕那根轴旋转，就像地球绕地轴旋转一样。你还可以与同一根轴成不同角度来旋转物体。

平移是在不转动物体的情况下滑动物体的变换。让我们来看看贴了瓷砖的浴室墙壁。假如你取一块瓷砖，将它水平地滑动适当的距离，那段距离等于瓷砖的宽度，这块瓷砖恰好覆盖在相邻瓷砖上。假如你将瓷砖滑动 2 块、或 3 块或任何整数块砖宽的距离，它还是符合这一模式。要是你在垂直方向上滑动瓷砖，或将水平滑动和垂直滑动组合起来，这同样成立。事实上，你可以滑动更多的瓷砖——甚至滑动整个瓷砖图案。当你以整数倍砖宽的距离，将垂直滑动和水平滑动组合起来滑动瓷砖图案，这个图案恰好落在它原来的位置上。

反射反映一个模式左右两半相同的对称性，例如人体。旋转反映同样的单元绕圆重复的对称性，如花的花瓣。平移反映像规则排列的瓷砖那样重复的单元的对称性，具有六角形“瓷砖”的蜜蜂蜂巢是自然界的一个佳例。

自然模式的对称性是从哪里来的？若有一个平静的池塘，它平坦得可以当作数学平面，大得对所有边缘而言亦可能是平面。向池塘掷一颗卵石。你看见了花样，即从卵石着水点表面向外扩展的圆形波的波纹。我们都见过这一现象。没有人会对此大惊小怪，因为我们明白其中的原因：那是卵石所致。假如你不掷入卵石，或别的什么可能扰动水面的东西，就不会有波纹，而只是一个平静、平坦的平面池塘。

池塘上的波纹是破缺对称的例子。理想的数学平面有着大量的对称：它的每一部分等同于其他任一部分。你可以朝任何方向将平面平移任何距离；围绕任一中心将平面旋转任何角度；或向任何镜线反射它，它看上去完全相同。相反，圆形波纹的花样有着较少的对称性。它只在绕卵石着水点旋转和向通过该点的镜线反射时是对称的。没有平移，没有其他旋转，没有其他反射。卵石扰动了池塘之后，池塘的许多对称性丧失了，在此意义上，卵石破坏了平面的对称性。但它未全部被破坏，因为我们还是看到了花样。

然而，这都不令人惊奇，那是因为那颗卵石的缘故。事实上，由于卵石击水产生了一个不同于其他任何点的特殊点，波纹的对称性正是你所预期的。它们完全是不移动那个特殊点的对称。所以当波纹出现时，池塘的对称并非被自发打破，因为你会发现导致平移对称性丧失的那颗卵石。

要是没有任何明显的原因，一个完全平静的池塘突然出现一系列同心的圆形波纹，你一定会很惊奇。你会猜测那或许是水面下的一条鱼的扰动所致，或是由于某物落入了池塘，而你没看见，因为它落得太快。花样必须有明显的原因所致这个根深蒂固的思想是这样强,以致当1958年化学家别洛索夫(B.P.Belousov）发现一个表面上无缘无故自发形成花样的化学反应时，他的同事们拒绝相信他。他们认为他犯了错误。他们不愿为检验他的工作费心，检验是浪费时间。

真是遗憾，因为别洛索夫是对的。

别洛索夫发现的特定花样并不表现在空间里，而存在于时间上：他的化学反应通过一系列周期性化学变化而振荡。1963 年，另一位化学家扎鲍京斯基（A. M. Zhabotinskii）修改了别洛索夫反应的配方，使它在空间上也形

成花样。由于他们的贡献，任何类似的化学反应都被赋予一个专有名称“别洛索夫—扎鲍京斯基反应”(简称 B—Z 反应)。由于英国生殖生物学家杰克 科恩（Jack Co-hen）和美国数学生物学家阿瑟·温弗里（Arthur Winfree）对此反应作了一些改进，使如今的反应所使用的化学物质有所不同且更为简单。现在实验也很简单，任何能得到必要的化学物质的人都可以做。这些配方略有保密，只有他们 4 个人掌握密钥①。

如果你想做这实验，而又不具备合适的装置，那让我来描述一下这一反应。化学物质都是液体，你把它们按先后顺序混合，倒入一个平盘。混合物变蓝，尔后变红。过 10 分钟，有时候甚至过 20 分钟，什么也没发生，就像凝视一个无特色的平坦池塘——除了液体的颜色（一色地红）之外，什么也没发生。这种均一性并不令人惊奇，因为毕竟你已把液体混合了。然后你注意到一小块蓝斑在显现——这才是令人惊奇的事。蓝斑扩展，形成蓝色的圆碟。在每个圆碟内出现一个红斑，把圆碟变成具有红色中心的蓝色环。蓝色环和红色碟都变大，当红色碟变得足够大时，蓝斑又在它里面出现。这个过程不断进行，形成逐渐生长的一系列“靶式花样”，即红色和蓝色同心环。这些靶式花样具有与池塘中波纹环完全相同的对称性。但这回你看不到任何卵石。这是一个奇怪又神秘的过程，其中的花样——秩序——从无序的、随意混合的液体中出现。难怪化学家们不相信别洛索夫。

但那并不是 B—Z 反应聚会魔术的尾声。假如你让盘子略微倾斜，然后恢复原样，或插入一根带电电线，你会将圆环打破，使之变成旋转着的红色和蓝色螺线。

这种反应并不是化学魔术。你的心脏有规则的搏动完全依赖于与之相同的模式，只不过它们是电活动波中的模式。你的心脏并不是一团未分化的肌肉组织，它不是自动地同时收缩。心脏由上百万条细小的肌纤维组成，每一条肌纤维是一个单细胞。肌纤维对电信号和化学信号作出收缩反应，它们把这些信号传送给邻近的肌纤维。问题在于确保肌纤维都大致同步收缩，让心脏作为一个整体而搏动。为了取得所需的同步度，你的大脑向你的心脏发送电信号。这些信号触发某些肌纤维中的电变化，然后电变化影响邻近的肌纤维——于是电活动波纹扩展，仿佛池塘中的波纹或 B—Z 反应中的蓝碟。只要波形成完整的环，心肌纤维就同步收缩，心脏就正常跳动。但要是波变成螺线，正像有病的心脏那样，结果是一组不一致的局部收缩，心脏就颤动。假如几分钟内未消除颤动，则颤动会致人碎死。因此，圆形波模式和螺线形波模式对我们每个人都有着切身的利害关系。

然而，如同在池塘中一样，在心脏中，就波模式我们看到了一个特殊原因：来自大脑的信号。在 B—Z 反应中，我们看不到特殊原因：对称在没有任何外部刺激的情况下自发地——“自愿地”——破缺。不过，“自发的”这个词并不意味着不存在任何原因，它指的是原因像你较为满意地那样微不足道，那样无关紧要。用数学语言来说，关键点在于化学物质的均一分布——无特色的红色液体——是不稳定的。假如停止等量混合化学物质，则保持溶液红色的精致平衡会被打破，所产生的化学变化会促使蓝斑形成。从此时开始，整个过程变得好理解得多，因为现在蓝斑的作用犹如产生一系列化学活动波纹的化学“卵石”。但引发蓝斑的液体对称性中的不完全性，假如不为零的话可以非常之小。在真实的液体里，总是存在扰动完全对称性的微量的灰尘、气泡，或者只是正在作热振动的分子，那就是它们起的作用。微小的

原因产生大尺度的结果，并且那结果是一个对称模式。

自然界的对称性可以在从亚原子粒子的结构到整个宇宙的结构的每一个尺度上找到。许多化学分子是对称的。甲烷分子是一个四面体——四个面都是三角形的金字塔，一个碳原子在中心，4 个氢原子在角上。苯具有正六边形的六重对称性。目前时髦的分子富勒烯（buckminster fullerene）①是 60 个碳原子的截角二十面笼（二十面体是 20 个面均为三角形的正多面体，“截角”指所有的角都被截去）。它的对称性使之惊人地稳定，它为有机化学开辟了新的发展前景。

在比分子略大的尺度上，我们发现细胞结构的对称性。在细胞复制的核心处隐藏着一小块机械工程。在每个活细胞内部有一个叫中心体的不定形的结构，它生成细长的微管，微管则是形如小海胆的细胞内部“骨架”的基本成分。中心体于 1887 年首次被发现，它在组织细胞分裂中起重要作用。然而，从某一方面看，中心体的结构惊人地对称。在中心体内，有两个叫中心粒的结构，它们彼此成直角。每个中心粒呈圆柱形，由 3 倍于其长度的 27 个微管混合形成，并呈完全九重对称排列。微管本身也有惊人的对称形式。微管是中空的管，由包含 2 个不同蛋白质（α 管和 β 管）单位的完全规则的棋盘模式构成。也许有朝一日，我们将认识到大自然为什么选择这些对称形式。但在活细胞的核心中看到对称结构是令人惊奇的。

病毒往往也是对称的，其最常见的形状是螺旋形和二十面体。例如，流感病毒的形状就是螺旋形的。在其他病毒的形状中，大自然首先偏爱二十面体。如疱疹、牛痘、人体肉赘、犬传染性肝炎、芜菁黄花叶病毒、腺病毒及许多其他病毒。腺病毒是分子工程艺术的又一个突出例子。它由 252 个相同的病毒亚单位组成，其中的 21 个亚单位像开球之前的台球那样聚在一起，构成一个个三角面（沿边缘的亚单位位于一个以上的面上，角单位位于 3 个面上，所以 20×21 不等于 252）。

自然界在较大的尺度上也呈现对称性。正在发育的蛙胚从球形细胞开始其生命，随着分裂逐步丧失对称性，直到变成囊胚，即整个形状又呈球形的上千个小细胞。然后囊胚在原肠胚的形成过程中开始吞食自身的一些部分。在这一解体过程的初期，胚围绕一根轴（其位置往往由卵中的卵黄初始分布来决定，或有时候由精子着床点决定）呈旋转对称。之后，这一对称被打破，只有导致成体蛙两边对称性的单一镜象对称得以保持。

火山是锥形的，恒星是球形的，星系是螺旋形的或椭圆形的。按照某些宇宙学家的观点，宇宙本身一点不像一个膨胀着的巨球。对自然的任何认识，必须包括对这些普遍的模式的认识。它必须解释这些模式为什么如此普遍，自然界的许多不同的东西为什么呈现相同的模式。雨滴和恒星呈球状，漩涡和星系为旋涡状，蜂巢和巨人岬①呈六角形排列。某种模式必然存在着构成此类模式基础的普遍原理，仅仅将这些个例孤立起来加以研究并用其自身的内部机制作出解释是不够的。

对称破缺就是这样一个原理。

要想打破对称，必须有个开头。乍一看，这似乎是用另一个问题取代了模式生成问题：也就是说，在我们可以解释池塘中的圆环之前，必须先解释池塘。但在圆环和池塘之间有一个根本性差别。

池塘的对称性如此广延——池塘表面上的每一个点都等同于其他各个点——以致我们甚至无法把它认作一个模式，而只把它看作平淡无奇的均一。

解释平淡无奇的均一很容易：系统在没有任何原因使其组成部分彼此相异时的状况。所以可以说，它是大自然的默认选择②。假如某物是对称的，则它的组分特征可取代或可交换。正方形的一个角看上去与其他角完全相同，于是我们可以不改变正方形的面貌而交换诸角。甲烷中的一个氢原子看起来与其他氢原子完全一样，所以可以交换那些氢原子。星系中的一片恒星与另外一片恒星看上去完全一样，所以我们可以交换旋臂的两个不同部分而不造成任何重要的差别。

总之，大自然是对称的，因为我们生活在一个批量生产的宇宙——类似于池塘表面。每个电子与其他电子完全相同；每个质子与其他质子完全相同；每块真空空间与其他真空空间完全相同；每一时刻与其他时刻完全相同。空间、时间和物质的结构不但处处相同，而且支配它们的规律也相同。爱因斯坦以此种“不变性原理”作为他对物理学研究的奠基石。他认为时空中没有任何特定点是特殊的。这使他得出相对性原理——有史以来最伟大的物理发现之一。

这一切都很完美，但它产生了一个深刻的悖论。假如物理学定律在任何地方、任何时间都相同，为什么在宇宙中会存在“有趣的”结构？它不应当是均一的、不变的吗？要是宇宙中的每一地方可与其他任何地方交换，那么所有地方都无法分辨；这对所有时间亦成立。但它们并非如此。这问题反倒被那种认为宇宙肇始于单个点（即亿万年前大爆炸时从虚无发生爆炸的那个点）的宇宙学理论弄得更尖锐了。在宇宙生成那一时刻，一切地方和一切时间不但不可分辨，而且相同。但为什么它们现在不相同了呢？

答案在于本章开头提到的居里原则的失效。如果不用任意小的原因的某些很详细的说明来限制那条原则，它就会使人错误地认识对称系统的行为应当如何。这一原则预言成体蛙应该两边对称（因为蛙胚两边对称。按照居里原则，这种对称性不可改变），初看这似乎是一大成就，但在球形囊胚阶段，以同样的论据运用同样的论证却预言成体蛙应当是球形。

一条更好的叫自发对称破缺的原则则恰恰与此相反。对称的原因往往产生不够对称的结果。演化的宇宙可以打破大爆炸的原始对称性。球形囊胚可以发育成两边对称的青蛙。腺病毒的 252 个完全可交换的单位可以把自己排列成二十面体，其中有些单位居于特殊位置（如角）。一组 27 个很普通的微管可以汇聚在一起，产生中心粒。

然而为什么有模式呢？为什么不是一团无结构的凌乱，其中一切对称都被破坏呢？贯穿于迄今为止所作的每一项对称破缺研究的最强的纽带，是数学不这样起作用。对称不愿被打破。在我们批量生产的宇宙周围有那么多对称，却几乎没有一条像样的理由打破这一切。所以相当多的对称幸存下来。甚至那些确已被打破的对称在一定意义上仍然存在，但现在是以潜在形式而不是以实际形式存在。例如，当腺病毒的 252 个单位开始联接时，其中任何一个都可以落在一个特定角处。在这个意义上，它们是可交换的。但实际上只有其中一个在那里终止，对称在此意义上被打破了：它们不再是完全可交换的。但某些对称仍然保留下来，于是我们看到一个二十面体。

这种观点认为，我们在自然界中观察到的对称性乃是我们这个批量生产宇宙的最高普遍对称性的破缺痕迹。这个宇宙可能以所有可能的对称状态潜在地存在，但实际上它必须选择其中一种状态。这么做的时候，它必须用它的某个实际对称性换取不可观察的潜在对称性。此种实际对称性确实会留

下，于是，我们就观察到模式。自然界大多数对称模式都由这个一般机制的某种形式产生。

在相反的意义上，这又复活了居里原则：假如我们允许会引发完全对称态失稳的微小的不对称扰动存在，那么我们的数学系统就不再是完全对称的。但重要的是，原因中的对称性之微小偏离会导致最终结果中的对称性完全丧失，而且微小的偏离总是存在。这就使得居里原则对于对称性的预言毫无用处。它对用具有完全对称的模型去模拟真实系统很有益处，但请记住，此种模型有许多可能的状态，实际上只有其中一种状态能够实现。小扰动促使真实系统从可实现的理想的完全对称系统之状态中作出选择。如今，这种对对称系统的行为进行的研究乃是认识模式形成一般原理的主要来源之一。

特别应该指出的是，对称破缺的数学统一了许多一眼看上去很不相同的现象。例如，第一章提到的沙丘中的模式。沙漠可以用一平板沙粒来模拟，风可以用流经平板的流体来模拟。通过研究此种系统的对称，研究对称如何破缺，可以得出许多观察到的沙丘模式。例如，假设风沿某个固定方向平稳吹过，则整个系统在平行于风向的平移下保持不变。打破这些平移对称的一种方式是，在垂直于风向的方向上产生一个平行沙波纹的周期模式。这就是地质学家称之为横向沙丘的模式。要是这种模式在沿沙波纹方向上也变成周期性的，则更多的对称被打破，波浪起伏的新月形沙丘垅便会出现。

然而，对称破缺的数学原理不单单适用于沙丘。它们适用于具有同样对称性的任何系统——流经平面产生模式的任何东西。你可以把同样的基本模型应用于诸如流经海岸平原和沉积沉积物的河流，或者应用于在海床上涨落的浅海水等地质学中类似的重要现象，因为上百万年以后，沙海床和泥三角洲会变成岩石的模式，其模式等同于沙丘的模式。

或者，流体可能是液晶（液晶由在磁场或电场影响下按模式排列的许多细长分子组成），你再次会发现一些相同的模式。或者，可能根本不存在流体：运动的物质或许是化学物质，经过组织扩散，为在发育中的动物皮肤上的花纹设立遗传指令。那么横沙丘的类比就是老虎或斑马身上的条纹，而新月形沙丘脊的类比则是豹或袋狼身上的斑纹。

相同的抽象数学能产生不同的物理学和生物学上的认识。数学是技术转移的极致，但是被转移的是思维技术（即思维方式）而不是机械技术。对称破缺的这种普遍性解释了生命系统和非生命系统何以具有许多共同的模式。生命本身是一个对称创生过程——繁殖过程；生物学世界如同物理学世界一样批量生产，因此生物界呈现许多见之于非生物界的模式。活的生物体最明显的对称性是形态对称——二十面体的病毒，鹦鹉螺的螺线形外壳，瞪羚的螺旋形角，海星、水母和花朵的惊人的旋转对称性。但生命世界中的对称超出了形态对称，还有行为的对称——不仅仅是前文提到的行进的对称节律。休伦湖中鱼的地盘像蜂巢中的蜂房那样排列就出于相同的原因。这地盘如同幼蜂一样不能都处在相同的位置上——那正是完全对称的含义。它们尽可能紧密地挤在一起，彼此间没有什么区别，受其本身的行为限制产生六角对称的砖瓦结构。那像是数学技术转移的另一个突出例子，出于把晶体原子排布成规整晶格的相同的对称破缺机制——最终支持开普勒雪花理论的一个物理过程。

自然界中最迷人的一类对称是镜象对称，即相对于反射的对称。三维物体的镜象对称不能通过把物体在空间连续转动来实现——左脚鞋不能靠转动

它变成右脚鞋。然而，除了某些亚原子粒子的相互作用之外，物理学定律却很接近镜象对称。于是，不呈镜象对称的任何分子以两种形式潜在地存在，譬如左手形式和右手形式。在地球上，生命选择了特殊的分子手性，例如氨基酸即如此。地球生命这种特殊手性来自何方？它可能纯属偶然——靠复制的批量生产技术传播的原始机遇。倘若如此，我们可以设想在某个遥远的星球上存在着其分子是我们分子的镜象的生物。另一方面，世界各地的生命都选择同一个方向可能有深刻的原因。物理学家目前认识到了自然界中的 4 种基本力：引力、电磁力、强核相互作用和弱核相互作用。已知弱力违反镜象对称性——即它的行为方式在同一个物理问题的左手形式和右手形式有所不同。正如物理学家沃尔夫冈·泡利（Wolfgang Pauli）指出的，“上帝是一个弱左撇子”。违背这种镜象对称的一个显著结果在于，分子及其镜象的能级不完全相等。这种效应相当小：一个特定氨基酸与其镜象之间的能级差大约是 $1/10^{17}$。这看上去十分微小，但我们明白，对对称破缺来说所需要的扰动是十分微小的。一般来说，大自然应当偏爱低能形式的分子。就这种氨基酸而言，可以通过计算得知，其低能形式有 98%的概率将在大约 10 万年间占支配地位。确实，在活的生物体中发现这种氨基酸的形式就是低能氨基酸。

在第五章里，我介绍过把电和磁相关联起来的麦克斯韦方程的奇异对称性。粗略地讲，若你把电场方程中的符号与磁场方程中的符号作交换，则你重新得到相同的方程。这种对称性隐藏在麦克斯韦把电力和磁力统一成单一电磁力的背后。在自然界 4 种基本力的方程中有一种类似的对称性，尽管这种对称性是不完全的，但它可能暗示一种甚至更大的统一：这 4 种力都是同一事物的不同方面。物理学家已经取得了弱力和电磁力的统一。按照目前的理论，这 4 种力应当在早期宇宙中占主导地位的极高能级处实现统一——即对称地相关联。早期宇宙的这种对称在我们自己的宇宙中是破缺的。总之，存在一个理想的数学宇宙，在这个宇宙中，所有的基本力以完全对称的形式相关联。但我们不生活在这个宇宙中。

这说明我们的宇宙也许与那个宇宙不同，它可能是通过不同方式打破对称而生成的其他宇宙中的一个。那是一个很好的思想。但还有一个更为动人的思想：相同的模式形成基本方法，亦即在一个批量生产的宇宙中相同的对称破缺机制，支配着宇宙、原子和人类。

# 第七章　生命的节律

大自然非常有节律，它的节律多样又多变。我们的心和肺服从有节律的循环，这种定时的循环适应我们身体的需要。自然界的许多节律好似心跳：它们在“幕后”运作并自己照料自己。另一些节律好似呼吸：存在一种简单的“默认”模式，只要没有什么不寻常的事情发生，它就起作用。但还有一个更复杂的控制机制，必要时它会介入，使这些节律适应即时之需。这种可控的节律在行进中特别常见，并且特别有意义。在有腿动物中，当有意识的控制不起作用时发生的运动默认模式叫做步态。

在发展出高速摄影技术之前，实际上不可能准确地得知动物疾驰时四肢如何运动。因为对于人眼而言，这种运动快得无法看清。传说这种摄影技术发端于一次有关马的打赌。19 世纪 70 年代，铁路巨头利兰·斯坦福（Leland Stanford）就马在奔跑时的某些时刻四肢完全着地与人赌 25000 美元。为了得出结论，一位名叫埃德沃德·迈布里奇（Eadweard　Mugbridge，原名为 Edward　Muggeride)的摄影师在马要跑过的线路上安置了一排带有拉发线的照相机，并拍摄了不同时相的马的步态。据说斯坦福最后赢了。不管这传说真实性如何，我们确实知道迈布里奇是步态研究的先驱。他还采用了一种叫旋转画筒的机械装置，把步态显示成“电影”，这使他很快跻身于好莱坞。所以迈布里奇既为一门学科又为一门艺术奠定了基础。

本章的大部分内容将与步态分析相关，步态分析是围绕“动物如何运动”和“动物为什么如此运动”这些问题而逐渐形成的数学生物学一个分支。我们先侧重于介绍多种多样的步态，然后再围绕整个动物群体发生的节律模式而展开讨论。这一模式的一个突出例子是在远东某些地区（包括泰国）可以见到的几种萤火虫的同步闪光。尽管个体动物和动物群体中发生的生物相互作用很不相同，但它们仍然有一个内在的数学统一性。本章的要点之一乃是，同样的一些一般数学概念可在许多不同层次上运用，并适用于许多不同事物。大自然尊重这种统一性，并且充分利用它。

隐藏在许多生物循环背后的组织原理，是一个数学概念：振荡器——自然动力使它反复重复相同的行为的一个装置。生物编织起巨大的振荡器“线路”，它们彼此相互作用，产生复杂的行为模式。此种“耦合振荡器网络”正是本章的统一论题。

系统为什么要振荡？答案是，假如你不想或不被允许保持静止，这是你所能做的最简单的事。为什么被关进笼子的老虎来回走动？它的运动由两种限制的组合造成。首先，它感到焦躁不安，不愿坐在那。其次，它被限制在笼子内，不能在附近的山里活动。当你必须动又不能逃走的时候，你所能做的最简单事情是振荡。当然，没有什么东西迫使这种振荡重复规则的节律；老虎围绕笼子沿着不规则的路径随意走动。但最简单的选择，在数学和自然界中都最可能出现的选择，是找到某个系列的行之有效的运动，并不断重复这种运动。这就是我们所说的周期振荡的含义。在第五章里，我描述了小提琴弦的振动，那也是周期振荡运动，并且这种振动与老虎在笼内来回运动的原因是相同的。琴弦不能保持静止，是因为它被弹拨；它不能远离，是因为它的两端被固定，并且它的总能量不能增加。

许多振荡产生于定态。当条件改变时，处于一个定态的系统会丧失定态，开始周期性地摆振。1942 年，德国数学家埃伯哈德·霍普夫（Eberhard

Hopf）发现了一个确保此科行为的一般数学条件。为了纪念他，这一条件被命名为霍普夫分岔。这一思想是以特别简单的方式去逼近原来系统的动力学特性，看看在这一简化了的系统中是否出现周期性摆振。霍普夫证明了如果这简化系统发生摆振，那么原系统也会发生摆振。这一方法的一大优点在于，仅仅对简化系统进行相对直接的数学计算，计算的结果却能告诉我们原系统的行为特征。由于一般情况下难以直接研究原系统，所以运用霍普夫的这一方法可以非常有效地解决这个难题。

之所以采用“分岔”这个词，是因为正在发生的事情的心理意象：周期振荡就像池塘里的波纹从中心扩展那样从原定态“长大”。这一心理意象的物理解释在于，振荡开头很小，后来逐渐变大。振荡长大的速度在这里并不重要。

例如，单簧管发出的声音就依赖于霍普夫分岔。当单簧管手向这种乐器中吹入气流时，静止的簧舌开始振动。若空气轻微流动，则振动很小，产生柔和的音调。若乐手用力吹，则振动增大，音调变高。重要的是，乐手不必以振荡方式吹（即以一系列快速短促的气流吹）就可使簧舌振动。这是典型的霍普夫分岔：若简化系统通过了霍普夫的数学测试，则真实系统将主动开始振荡。在这种情形下，简化系统可以解释成具有相当简单的簧舌的虚构的数学单簧管，尽管此种解释实际上不必要进行计算。

霍普夫分岔可以被视为特殊类型的对称破缺。与上一章介绍的对称破缺的例子不同之处在于，被打破的对称性不是与空间相关，而是与时间相关。时间是单个变量，所以数学上它对应于一条直线——时间轴。只有两类线对称性：平移和反射。对于一个在时间平移下对称的系统，它意味着什么？其含义是，假如你观察系统的运动，然后等待某个固定的时间间隔，再次观察系统的运动，你将看到完全相同的行为。那就是周期振荡的描述：假如你等待等于周期的时间间隔，你将看到完全相同的事。所以周期振荡具有时间平移对称性。

时间反射对称性又如何呢？这相当于倒转时间流逝的方向，这是一个比较微妙、深奥的哲学概念。时间反转对本章内容来说无关紧要，但它是一个非常有意义的问题，值得讨论一番。运动定律在时间反转下是对称的。假如你制作了一部有关任何“合法”的物理运动（符合定律）的电影，把电影倒过来放映，你看到的还是合法的运动。不过，在我们这个世界里司空见惯的合法运动倒过来进行时往往会显得离奇。从天而降的雨点形成水坑是很常见的，水坑向天空喷雨点则是不可思议的。这主要源于初始条件。大多数初始条件打破了时间反转对称性。例如，假设我们决定从向下落的雨点开始。这不是时间对称态：它的时间反转将具有向上飞的雨点。即使定律是可时间反转的，它们产生的运动却不一定是，因为一旦时间反转对称被初始条件的选择所打破，它就保持破缺。

我们再回到振荡器。刚才我已解释过了周期振荡拥有时间平移对称，但我尚未告诉你何种对称被打破才能产生那种模式，回答是“所有时间平移”。在这些对称下不变的状态必须看上去在所有时刻完全相同——不仅仅在一个周期的时间间隔内相同。也就是说，它必须是一个定态。所以，当一个处于定态的系统开始周期性地振荡时，它的时间平移对称性从所有平移不变性降到一个固定区间内的单个平移不变性。

这一切听起来十分理论化。然而，霍普夫分岔确实是时间对称破缺的一

种情况，这一认识已经导致霍普夫分岔的一个推广理论：在此种系统中还有其他对称——特别是空间对称。这台数学机器不依赖于特殊的解释，可以很容易同时适用于若干不同种类的对称。这一方法的成功例子之一，是振荡器的对称网络经历霍普夫分岔时典型地出现的模式的一般分类，此种一般分类近来已被实际应用，应用的领域之一是动物行进。

动物行进过程中涉及两类生物学上不同、数学上相似的振荡器。最明显的振荡器是动物肢体，它可以被看作是机械系统——与骨头相连、在关节处旋转、通过收缩肌肉而伸缩的机械系统。然而，我们所关心的振荡器出自生物的神经系统，即产生对肢体活动起刺激和控制作用的节律性电信号的神经网路。生物学家称这样的网路为 CPG，它是“中枢模式发生器”（central pattern generator）的缩写。我的一位学生用所谓的“行进兴奋发生器”（locomotive excitation generator)的第一个字母缩拼词 LEG 来代表肢体①。动物有 2、4、6、8 或更多个 LEG，但我们对控制它们的 CPG 知之甚少，其原因我会马上解释。我们所知道的许多东西是通过从数学模式反推或正推（如果你喜欢的话）而得的。

有的动物只有一种步态——就其肢体运动而言只有一种节律性默认模式。例如，大象只会行走。它想运动得较快时，就“小步跑”，但小步跑不过是快步走，腿的运动模式相同。其他动物有许多不同步态，就拿马来说，马在低速时行走；在速度较高时快步跑；在极高速度时飞跑。有的动物竟然在快步跑和飞跑之间插入另一种运动——慢跑。其差别是根本性的：快步跑不是快步走，而是一种不同类型的运动。

1965 年，美国动物学家米尔顿·希尔德布兰德（Milton Hildebrand）注意到大多数步态有一个对称度。也就是说，当动物跳跃的时候，前腿一起运动，后腿也一起运动，于是跳跃步态保持动物的两边对称性。还有一些其他的对称性则很微妙。例如，骆驼的左边一半与右边一半保持相同的系列运动，但有一半周期反相，即滞后半个周期。所以骆驼的侧对步步态有其自身的特征对称：“左和右互相映照，相位差半个周期。”你完全可以用这种对称破缺使你自己兜圈子：虽然你两边对称，但你不是双腿同时运动！就两足动物而言，不这样做有着明显的好处：假如他们双腿同时缓慢运动，就会跌倒。

四足动物有 7 种最常见的步态：快步跑、侧对步、跳跃、行走、旋转跑、横向跑和慢跑。在快步跑情况下，四肢实际上是对角成对相联系。首先，左前腿和右后腿一起着地；然后右前腿和左后腿一起着地。在跳跃情况下，两前腿先一起着地，然后两后腿一起着地。侧对步则与纵向运动相联系：两左腿先着地，两右腿后着地。就行走而言，包含较复杂但同样有节律的模式：左前腿、右后腿、右前腿、左后腿依次着地，然后重复。在旋转跑情况下，前腿几乎同时着地，但（例如）右前腿略比左前腿迟着地；然后后腿几乎同时着地，但左后腿略比右后腿迟着地。横向跑类似，但其后腿的着地次序相反。慢跑甚至更离奇：左前腿先着地，右后腿后着地，然后另两条腿同时着地。还有一种较为罕见的蹦跑步态，在这种情况下，四腿同时运动。

蹦跑除了在动画片中能见到之外不常见，但有时可见于幼鹿。侧对步见于骆驼，跳跃见于狗；猎豹常用旋转跑以最快的速度飞奔。马有比较多样的步态，依不同环境行走、快步跑、横向跑和慢跑。

动物的这种变换步态的能力来自于 CPG 的动力学。CPG 模型的基本思想

是，动物步态的节律和相位关系由比较简单的神经网路的固有振荡模式决定。此种网路是什么样子的？试图在动物体内将特定部分的神经网路定位，就像是在沙漠中搜寻特殊的一粒沙子那样困难：要确定几乎是最简单的动物神经系统都是完全超出当今科学的能力的。所以我们必须以一种不太直接的方式悄悄接近 CPG 的设计问题。

办法之一是搞清楚可能产生所有不同但又相关的步态对称模式的最简单类型的网路。乍一看，这个要求好像过高，假如我们用导致从一种步态变成另一种步态的切换（犹如汽车变速箱）编制某个精致的结构，我们可能会被理解。但霍普夫分岔理论告诉我们有一种较简单、较自然的方式。步态中观察到的对称模式，使人强烈地联想到在振荡器对称网络中发现的那些模式。此种网络自然拥有全套的对称破缺振荡，并可以以一种自然方式在振荡之间切换。你不需要一个复杂的“变速箱”。

例如，表示双足动物的 CPG 网络只需两个相同的振荡器，每一个代表一条腿。数学证明，若两个相同的振荡器相耦合——即相联系，使一个振荡器的状态影响另一个振荡器的状态，则恰好存在两个典型的振荡模式。一个是同相模式，两个振荡器呈现相同行为。另一个是反相模式，两个振荡器除了有半个周期的相位差外呈现相同行为。假设来自 CPG 的信号被用于驱使控制双足动物两腿的肌肉，给每一条腿分派一个振荡器，于是最终的步态获得相同的两个模式。因为网络同相振荡，所以两腿一起运动：动物完成两腿跳跃运动，就像袋鼠那样。相反，CPG 的反相运动产生类似于人行走的步态。这两种步态是双足动物中最常见的步态（当然，双足动物还可以有其他动作，例如单腿跳跃，但在这种情况下，它们实际上成了单足动物）。

四足动物情况又如何呢？最简单的模型是四个耦合振荡器的系统——每一个振荡器代表一条腿。现在，数学预言了多种模式，其中几乎所有模式都对应于观察到的步态。最对称的步态蹦跑对应于四个振荡器都同步，即对应于未破缺的对称。次最对称的步态跳跃、侧对步、快步跑，对应于把四个振荡器合为两个反相对：前足一后足，左足一右足，或对角足。行走是不断循环的“8”字形模式，这也很自然地在数学模型中出现。旋转跑和横向跑比较精妙。前者是侧对步与跳跃的混合，后者则是跳跃与快步跑的混合。慢跑更微妙，目前对它尚未了解清楚。

这种理论不难推广到六足动物（如昆虫）。例如，蟑螂的典型步态（也是大多数昆虫的典型步态）是三足式，一边的中足与另一边的前后足同步运动，然后其他三足一起运动，第二组与第一组相差半个周期。对于相连成圈的 6 个振荡器，这是自然模式之一。

对称破缺理论还可解释动物在没有齿轮箱情况下如何改变步态：单个振荡器网络可以在不同条件下采用不同的模式。步态之间可能的转变也靠对称来组织。动物运动得愈快，其步态具有的对称愈少，即速度愈快，被打破的对称愈多。但要解释动物为何改变步态，则需要生理学方面更详尽的资料。1981 年，霍伊特（D. F. Hoyt）和泰勒（R. C. Taylor）发现，当允许马根据地形选择奔跑速度时，马会选择氧耗最小的那种步态。

关于步态的数学，我已相当详细地介绍过了，因为它是现代数学方法在一个貌似完全无关的领域里不寻常的应用。在结束本章之前，我想介绍一下一些相同的普遍思想的另一种应用，只是在这种情况下，对称不被打破在生物学上亦很重要。

自然界中最壮观的景象之一发生在东南亚。在那，一大群萤火虫同步闪光。在 1935 年发表于《科学》（Science）杂志上题为《萤火虫的同步闪光》的论文中，美国生物学家休·史密斯（HughSmith）对这一现象作了引人入胜的描述：

> “想象一下，一棵 10 米至 12 米高的树，每一片树叶上都有一个萤火虫，所有的萤火虫大约都以每 2 秒 3 次的频率同步闪光，这棵树在两次闪光之间漆黑一片。想象一下，在 160 米长的河岸两旁是不间断的芒果树列，每一片树叶上的萤火虫，以及树列两端之间所有树上的这种昆虫完全一致同步闪光。那么，倘若某人的想象力足够生动的话，他会对这一惊人奇观形成某种概念。”

这种闪光为什么会同步？1990 年，雷纳托·米洛罗（Renato Mirollo）和史蒂文·施特盖茨（Steven Strogatz）证明，此种同步是数学模型的规则，在这种模型中，每一个萤火虫都与其他萤火虫相互作用。建模的思想是把诸多昆虫模拟成一群彼此靠视觉信号耦合的振荡器。每个萤火虫用来产生闪光的化学循环被表示成一个振荡器，萤火虫群体则表示成完全对称耦合的此种振荡器网络——即每个振荡器以完全相同方式影响其他各个振荡器。这一模型最不寻常的特征由美国生物学家查尔斯·佩斯金（Charles Pe-skin）于 1975 年引入，即诸多振荡器是脉冲式耦合的。也就是说，振荡器仅在产生闪光那一时刻对其邻近振荡器施加影响。

数学上的困难在于，要弄清楚所有的相互作用，使它们的组合效应明显突出。米洛罗和施特盖茨证明，不管初始条件如何，所有振荡器最终都会变得同步。这一证明基于吸附概念，吸附发生于两个不同相位的振荡器“互锁”从而彼此保持同相之时。由于耦合完全对称，一旦一群振荡器已互锁，就不能解锁。几何证明和解析证明表明，一系列这种吸附最终必定把所有振荡器都锁到一起。

行进和同步给予我们的重要启示之一是：自然界的节律往往与对称性相联系，自然界出现的模式可借助对称破缺一般原理在数学上加以分类。对称破缺原理并未回答自然界中的每一个问题，但它们确实提供了一个统一的框架，并且常常提出有意义的新问题。特别是，它既提出又回答了“为什么是这些模式而不是其他模式”的问题。

启示之二是：数学可以描述我们通常不把它们看作是数学对象的大自然的许多方面。这一启示可以回溯到苏格兰动物学家达西·汤普森（D'Arcy Thompson），他那本 1917 年出版的离经叛道的经典著作《论生长和形态》（On Growth and Form）为数学在生物形态发生和行为发生中的作用，提供了多种多样、或多或少可信的证据。在一个大多数生物学家似乎都认为关于动物唯一有意义的东西是动物的 DNA 序列的时代，它是一个有必要经常大声重提的启示。

# 第八章　骰子掷上帝吗

牛顿的智慧遗产是钟表宇宙观，运动在宇宙创生那一瞬间发动，从此以后，宇宙像一台加足了油的机器按指定的轨道运转。这是一幅完全决定性的世界图景——未给各种偶然性留有任何余地，宇宙的未来完全由它的过去决定。正如大数学家、天文学家皮埃尔—西蒙·德·拉普拉斯（Pierre－Simon de Laplace）于 1812 年在他的《概率的解析理论》（Analytic Theory of Probabilities）一书中指出的那样：

> 假如有一位智者在任一给定时刻都能洞见所有支配自然界的力和组成自然界的存在物之间的相互位置，假如这一智者的智慧巨大到足以对自然界的所有数据进行分析，他就能将宇宙最大的天体和最小的原子的运动统统纳入单一的公式之中。对这样的智者来说，没有什么是不能确定的，未来同过去一样都历历在目。

世界的未来是完全可以预言的，这个相同的世界观隐含在道格拉斯·亚当斯（Douglas Adams）1979 年发表的科幻小说《免费搭车游银河》（The Hitchhiker's Guide to the Galaxy）中给人印象最深的一个情节背后。在这个情节中，哲学家马基克西斯（Majik-thise ）和弗鲁方德（Vroomfondel）命令超级计算机“沉思机”计算“生命、宇宙和万物这个超乎寻常问题”的答案。对此书着迷的读者们可能还会想起，经过了 500 万年，这台计算机的回答是“42”，两位哲学家由此认识到，尽管这个答案清楚又精确，但有些答非所问。与此类似，拉普拉斯世界观中的错误不是隐含在他那宇宙原则上是可预言的回答之中，这是牛顿运动定律特定数学特征的精确陈述，而是隐含在他对那个事实的解释之中，这一解释则是基于对提出这个错误问题的一个严重的误解。通过提一个更恰当的问题，数学家和物理学家们如今逐渐认识到决定论和可预言性并不同义。

在日常生活中，我们常常遇到不可胜数的事例说明拉普拉斯决定论是一个很不恰当的模型。我们成千上万次安全地下楼梯，不料有一天却扭伤了脚踝甚至骨折；我们去看网球比赛，比赛却被一场不期而至的暴风雨中断了；我们就赛马中偏爱的马打赌，结果就在它领先于其他马 6 匹马身长度时跌倒在最后一道栅栏处。这个宇宙不太像上帝在其中掷骰子的宇宙，正如爱因斯坦坚决拒绝相信的那样，它似乎更像一个骰子掷上帝的宇宙。

我们的世界是像拉普拉斯声称的那样是决定性的，还是像它常常表现出来的那样是受偶然性支配的？假如拉普拉斯的确正确，那为什么我们有那么多的经验表明他错了呢？数学最激动人心的新领域之一非线性动力学——俗称混饨理论（chaos theory）——声称对这个问题有许多答案。无论如何，它对我们思考秩序和无秩序、定律与机遇、可预言性与无规性的方式肯定正在带来一场革命。

按照现代物理学理论，大自然在其最小的空间和时间尺度上被机遇所支配。例如，放射性原子（如铀）在任一给定时刻衰变与否，纯粹出于偶然。在将要衰变的铀原子与将不衰变的铀原子之间根本不存在任何物理差别。没有差别，绝对没有！

至少存在两个讨论这些问题的框架：量子力学和经典力学。本章大部分内容将围绕经典力学来展开，但我们不妨暂时先来考虑量子力学框架。正是这种量子不确定性观点促使爱因斯坦作出那个著名的表述。爱因斯坦在给他

的同事马克斯·玻恩（Max Born）的信中写道：“你信仰掷骰子的上帝，我却信仰完备的定律和秩序。”我认为，关于量子不确定性的正统物理学观点有某种明显靠不住的东西。我并不认为我的观点是孤立的，因为越来越多的物理学家正开始怀疑爱因斯坦是否一贯正确，怀疑传统量子力学是否缺少某种东西——或许是其数值反映一个原子何时衰变的“隐变量”（在这我得赶紧补充一句，这不是传统观点）。在那些物理学家中最有名的要数普林斯顿大学的戴维·玻姆（David Bohm），他对量子力学作出的修正是完全确定性的，而且与过去已被用来支持量子不确定性传统观点的所有迷惑人的现象完全一致。玻姆的思想也有自身的问题，特别是一种“远距作用”的概念，它与量子不确定性一样令人不安。

然而，即使量子力学关于最小尺度上的不确定性是正确的，在空间和时间的宏观尺度上，宇宙却服从确定性的定律。这造成一个名为返常（decoherence）的效应，它使得足够大的量子系统几乎丧失其一切不确定性，表现出极像牛顿系统的行为。实际上，就大多数人类尺度而言，这使经典力学故态复萌。马、天气和爱因斯坦著名的骰子由于量子力学而并不是不可预言的。相反，它们在牛顿模型内竟然不可预言。当涉及到马——具有自身的“隐变量”（如它们早餐吃何种干草）这样的活的生物时，这或许不那么令人惊奇。但它对那些已对天气作了大量的计算机模拟、以期预言几个月后的天气状况的气象学家来说，肯定非常惊奇。说到骰子，即使人类错把骰子当作代表机遇的较好的象征之一，确实让人惊奇。骰子不过是一个立方体，一个滚动着的立方体应当与一颗运行着的行星同样可预言。因为两者毕竟都服从同样一些力学运动定律。骰子和行星虽然形状不同，但都是规则的数学形状。

要弄明白不可预言性如何可以与确定论相调和，可以来看看一个比整个宇宙次要得多的系统——水龙头滴下的水滴。这是一个确定性系统，原则上流入水龙头中的水的流量是平稳、均匀的，水流出时发生的情况完全由流体运动定律规定。但一个简单而有效的实验证明，这一显然确定性的系统可以产生不可预言的行为。这使我们产生某种数学的“横向思维”，它向我们解释了为什么此种怪事是可能的。

假如你很小心地打开水龙头，等上几秒钟，待流速稳定下来，通常会产生一系列规则的水滴，这些水滴以规则的节律、相同的时间间隔落下。很难找到比这更可预言的东西了。但假如你缓缓打开水龙头，使水流量增大，并调节水尤头，使一连串水滴以很不规则的方式滴落，这种滴落方式似乎是随机的。只要做几次实验就会成功。实验时均匀地转动水龙头，别把龙头开大到让水成了不间断的水流，你需要的是中速滴流，如果你调节得合适，就可以在好多分钟内听不出任何明显的模式出现。

1978 年，加利福尼亚大学圣克鲁斯分校的一群年青的研究生组成了一个研究动力学系统的小组。他们开始考虑水滴系统的时候，就认识到它并不像表现出来的那样毫无规则。他们用话筒记录水滴的声音，分析每一滴水与下一滴水之间的间隔序列。他们所发现的是短期的可预言性。要是我告诉你 8 个相继水滴的滴落时刻，你会预言下一滴水何时落下。例如，假如水滴之间最近 3 个间隔是 0.63 秒、1.17 秒和 0.44 秒，则你可以肯定下一滴水将在 0.82 秒后落下（这些数只是为了便于说明问题）。事实上，如果你精确地知道头 3 滴水的滴落时刻，你就可以预言系统的全部未来。

那么，拉普拉斯为什么错了？问题在于，我们永远不能精确地测量系统的初始状态。我们在任何物理系统中所作出的最精确的测量，对大约 10 位或 12 位小数来说是正确的。但拉普拉斯的陈述只有在我们使测量达到无限精度（即无限多位小数，当然那是办不到的）时才正确。在拉普拉斯时代，人们就已知道这一测量误差问题，但一般认为，只要作出初始测量，比如小数点后 10 位，所有相继的预言也将精确到小数点后 10 位。误差既不消失，也不放大。

不幸的是，误差确实放大，这使我们不能把一系列短期预言串在一起，得到一个长期有效的预言。例如，假设我知道精确到小数点后 10 位的头 3 滴水的滴落时刻，那么我可以精确到小数点后 9 位预言下一滴的滴落时刻，再下一滴精确到 8 位，以此类推。误差在每一步将近放大 10 倍，于是我对进一步的小数位丧失信心。所以，向未来走 10 步，我对下一滴水的滴落时刻就一无所知了。（精确的位数可能不同：它可能使每 6 滴水失去 1 位小数的精度，但只要取 60 滴，同样的问题又会出现。）

这种误差放大是使拉普拉斯完全确定论破灭的逻辑缺陷。要完善整个测量根本做不到。假如我们能测量滴落时刻到小数点后 100 位，我们的预言到将来 100 滴（或用较为乐观的估计，600 滴）时将失败。这种现象叫“对初始条件的敏感性”，或更非正式地叫“蝴蝶效应”（当东京的一只蝴蝶振翅时，可能导致一个月后佛罗里达的一场飓风）。它与行为的高度不规则性密切相关。任何真正规则的东西，据定义都是完全可预言的。但对初始条件的敏感性却使行为不可预言——从而不规则。因此，呈现对初始条件敏感性的系统被称为混沌系统。混沌行为满足确定性的定律，但它又如此不规则，以至在未受过训练的眼睛看来显得杂乱无章。混沌不仅仅是复杂的、无模式的行为，它要微妙得多。混沌是貌似复杂的、貌似无模式的行为，它实际上具有简单的、确定性的解释。

混沌的发现是由许多人（多得在此无法一一列举）作出的。它的出现，是由 3 个相互独立的进展汇合而成的。第一个是科学注重点的变化，从简单模式（如重复的循环）趋向更复杂的模式。第二个是计算机，它使得我们能够容易和迅速地找到动力学方程的近似解。第三个是关于动力学的数学新观点——几何观点而非数值观点。第一个进展提供了动力，第二个进展提供了技术，第三个进展则提供了认识。

动力学的几何化发端于大约 100 年前。法国数学家昂利·庞加莱（Henri poincaré）是一个独立独行的人（如果有的话），但他非常杰出，以致他的许多观点几乎一夜之间就成了正统的观点，当时他发明了相空间概念，这是一个虚构的数学空间，表示给定动力学系统所有可能的运动。为了举一个非力学的例子，让我们来考虑猎食生态系统的群体动力学。此系统中捕食者是猪，被捕食者是块菌（一种味道奇特、辛辣的真菌）。我们关注的变量是两个群体的规模——猪的数目和块菌的数目(两者都相对于某个参考值,如 100 万）。这一选择实际上使得两个变量连续，即取带小数位的实数值，而不取整数值。例如，假如猪的参考数目是 100 万，则 17439 头猪相当于值 0.017439。现在，块菌的自然增长依赖于有多少块菌以及猪吃块菌的速率：猪的增长依赖于猪的头数以及猪吃的块菌数目。于是每个变量的变化率都依赖于这两个变量，我们可把注意力转向群体动力学的微分方程组。我不把方程列出来，因为在这里关键不是方程，而是你用方程干什么。

这些方程原则上确定任何初始群体值将如何随时间而变化。例如，假使我们从 17439 头猪和 788444 株块菌开始，则你对猪变量引入初始值 0.017439，对块菌变量引入初始值 0.788444，方程会含蓄地告诉你这些数将如何变化。困难的是使这种含蓄变得清晰：求解方程。但在什么意义上求解方程呢？经典数学家的自然反应是寻找一个公式，这个公式精确地告诉我们猪头数和块菌株数在任何时刻将是多少。不幸的是，此种“显式解”太罕见，几乎不值得费力去寻找它们，除非方程具有很特殊的、受限制的形式。另一个办法是在计算机上求近似解，但那只能告诉我们这些特定初始值将发生什么变化，以及我们最想知道的许多不同的初始值将发生什么变化。

庞加莱的思想是画一幅图，这幅图显示所有初始值所发生的情况。系统的状态——在某一时刻两个群体的规模——可以表示成平面上的点，用坐标的方法即可表示。例如，我们可能用横坐标代表猪头数，用纵坐标代表块菌株数。上述初始状态对应于横坐标是 0.017439、纵坐标是 0.788444 的点。现在让时间流逝。坐标按照微分方程表达的规则从一个时刻变到下一个时刻，于是对应点运动。依动点划出一条曲线；那条曲线是整个系统未来状态的直观表述。事实上，通过观察这条曲线，不用搞清楚坐标的实际数值，你就可以“看出”重要的动力学特征。

例如，如果这曲线闭合成环，则两个群体遵从周期性循环，不断重复同样一些值——就像跑道上的赛车每一圈都经过同一个旁观者那样。假如曲线趋近某个特定点并停在那，则群体稳定到一个定态，它们在此都不发生变化——就像耗尽了燃料的赛车。由于幸运的巧合，循环和定态具有重要的生态意义——特别是，它们给群体规模设置了上限和下限。所以肉眼最易看出的这些特征确实是实际事物的特征。并且，许多不相关的细节可以被忽略——例如，不必描述其精确形状，我们就可以看出存在一种闭合环（它代表两个群体循环的合成“波形”）。

假如我们试一试一对不同的初始值，那将会发生什么情况？我们得到第二条曲线。每一对初始值定义一条新曲线。通过画出一整族的此种曲线，我们可以抓住所有初始值之下系统所有可能的行为。这族曲线类似于围绕平面盘旋的一种虚拟数学流体的流线。我们称此平面为系统的相空间，那族盘旋曲线是系统的相图。取代具有各种初始条件的以符号为基础的微分方程概念，我们有了流经猪-块菌空间的点的直观几何图象。这仅在其许多点是潜在点而非实际点而有别于普通平面：它们的坐标对应于在适当初始条件下可能出现，但在特定情况下可能不会出现的猪头数和块菌株数。所以，除了从符号到几何的心理转移，还存在从实际向潜在的哲理性的转移。

对于任何动力学系统，都可以设想同一种类型的几何图象。有相空间，其坐标是所有变量的值；有相图，即一族表示从所有可能的初始条件出发的所有可能行为的盘旋曲线，这些曲线为微分方程所刻划。这一思想是一大进展，因为我们无需关心微分方程解的精确数值，而可以把注意力集中于相图的宽广范围，使人发挥其最大优势（即惊人的图象处理能力）。作为把全部潜在行为编织起来的一种方式（自然界从中选择实际观察到的行为）的相空间图，在科学中已被广为应用。

庞加莱这一大创新所带来的结果，是动力学可借助被称为吸引子（attractor）的几何形状来加以直观化。假如你使一动力学系统从某个初始点出发，观察它长期运作的情况，你往往会发现，它最终围绕相空间中某个

明确的形状游荡。例如，曲线可以向一个闭合环旋进，然后绕环永远兜圈子。而且，初始条件的不同选择会导致相同的终末形状。倘若如此，那形状就叫做吸引子。系统长期的动力学特性受其吸引子支配，吸引子的形状决定产生何种类型的动力学特性。

例如，趋向于定态的系统，它具有的吸引子是一个点。趋向于周期性地重复同样行为的系统，它具有的吸引子是一个闭环。也就是说，闭环吸引子相当于振荡器。请回忆一下第五章有关振动的小提琴弦的描述：小提琴弦经历一系列最终使它回归到出发点的运动，并将一遍又一遍重复那个系列。我的意思不是小提琴弦以物理环运动，但我对它的描述是隐喻意义上的闭环：运动经过相空间的动态地形而环游。

混沌有其自身颇为古怪的几何学意义，它与被称为奇异吸引子的离奇分形形状相联系。蝴蝶效应表明，奇异吸引子上的详细运动不可预先确定，但这并未改变它是吸引子这个事实。设想一下如果把一个乒乓球抛进波涛汹涌的大海，无论你从空中向下丢球，还是从水下让球向上浮，球都会向海面运动。一旦到了海面之后，它就在起伏的波浪中经历一个很复杂的运动路径，但不管这路径多么复杂，球仍然留在海面上或至少很接近海面。在这一图景里，海面是吸引子。因此，尽管有混沌，不论出发点可能是什么，系统最终将很接近它的吸引子。

混沌作为一种数学现象已得到充分证实，但在现实世界里我们如何检测它呢？我们必须完成一些实验，但这存在一个问题。实验在科学中的传统作用是检验理论预言，但要是蝴蝶效应在起作用——正像它对任何混沌系统所做的那样——我们怎么能期望去检验一个预言？莫非混沌天生不可检验，从而是不科学的？

回答是，“不”！因为“预言”这个词有两个含义。一是指“预卜未来”。当混沌出现时，蝴蝶效应阻碍预卜未来。但另一个含义是“预先描述实验结果将是什么”。让我们来考虑一下如果掷 100 次硬币的例子。为了预言——在算命先生的意义上预卜——会发生什么情况，你必须预先列出每一次抛掷的结果。但你可以作出科学的预言，如“大约一半硬币将正面朝上”，而不必具体地预卜未来——甚至预言时，这系统仍然是随机的。没有人会因为统计学处理不可预言的事件而认为它不科学，因此亦应以同样态度来对待混沌。你可以作出各种各样的关于混沌系统的预言。事实上，你可以作出充足的预言把确定性混沌与真正的随机性区分开。你能常常预言的一件事是吸引子的形状，它不受蝴蝶效应的影响。蝴蝶效应所做的一切，是使系统遵从同一吸引子上的不同轨线。总之，吸引子的一般形状往往可从实验观测中得到。

混沌的发现揭示了我们对规律与由此产生的行为之间——即原因与结果之间——关系的一个基本性的错误认识。我们过去认为，确定性的原因必定产生规则的结果，但现在我们知道了，它们可以产生易被误解为随机性的极不规则的结果。我们过去认为，简单的原因必定产生简单的结果（这意味着复杂的结果必然有复杂的原因），但现在我们知道了，简单的原因可以产生复杂的结果。我们认识到，知道这些规律不等于能够预言未来的行为。

原因和结果之间的这种脱节是怎么出现的？为什么相同的一些规律有时候产生明显的模式，有时候却产生混沌？答案可以在家家户户的厨房里，就在打蛋器那样简单的机械装置中找到。两条打蛋臂的运动简单又可预言：每条打蛋臂都平稳地旋转。然而，装置里的糖和蛋白的运动则复杂得多。糖和

蛋白在打蛋臂的作用下得到混合，那正是打蛋器要达到的目的，但那两条旋转的打蛋臂并未绞在一起。当你打完蛋后，不必把打蛋臂解开。为什么调合蛋白的运动如此不同于打蛋臂的运动？混合是一个远比我们想象的复杂得多的动态过程。设想一下，试图预言一颗特定的糖粒最终将在何处是何等艰难！当混合物在那对打蛋臂之间通过时，它被向左右两边扯开。两颗起初紧靠在一起的糖粒不久分得很开，各走各的道。事实上，这正是蝴蝶效应在起作用——初始条件中的微小变化有着巨大的影响。因此，混合是一个混沌过程。

反之，每一个混沌过程都包含一种在庞加莱虚拟相空间中的数学混合。这就是潮汐可预言、而天气不可预言的原因。两者包含同一种类型的数学，但潮汐的动力学不在相空间混合，而天气的动力学则在相空间混合。

重要的不在于你做什么，而在于你如何来做。

混沌正在颠覆我们关于世界如何运作的舒适假定。一方面混沌告诉我们，宇宙远比我们想得要怪异。混沌使许多传统的科学方法受到怀疑，仅仅知道自然界的定律不再足够了。另一方面，混沌还告诉我们，我们过去认为是无规则的某些事物实际上可能是简单规律的结果。自然之混沌也受规律约束。过去，科学往往忽视貌似无规则的事件或现象，理由是，既然它们根本没有任何明显的模式，所以不受简单规律的支配。事实并非如此。恰好在我们鼻子底下就有简单规律——支配疾病流行、心脏病发作或蝗灾的规律。如果我们认识了这些规律，我们就有可能制止随之而来的灾难。

混沌已经向我们显示了新的规律，甚至是新型的规律。混沌自有一类新的普适模式。最初被发现的模式之一存在于滴水水龙头里。可能我们还记得水龙头可以有节律地或杂乱地滴水，这取决于水流的速度。实际上，有规则滴水的水龙头与“无规则”滴水的水龙头都是同一数学处方的略微不同的变体。但随着水流经过水龙头的速率的增加，动力学特性的类型发生变化。代表动力学特性的相空间中的吸引子在不断地变化——它以一种可预言的、但极复杂的方式在发生变化。

有规则滴水的水龙头有一个反复滴—滴—滴—滴的节律，每一滴都与前一滴相同。然后略微旋开水龙头，水滴略快。现在节律变成滴—滴—滴—滴，每 2 滴就重复一次。不仅水滴的大小（它决定水滴听上去有多响），而且从这一滴到下一滴的滴落时刻，都略有变化。

假如你让水流得再快一些，得到 4 滴节律，水滴再快一点，产生 8 滴节律，水滴重复序列的长度不断加倍。在数学模型里，这一过程无限继续下去，具有 16，32，64 等水滴的节律群。但产生每次相继周期倍化的流速变得愈来愈细微；并存在一个节律群大小在此无限频繁加倍的流速。此时此刻，没有任何水滴序列完全重复同一模式，这就是混沌。

我们可以用庞加莱的几何语言来表达所发生的情形。对于水龙头，吸引子起初是闭环，表示周期循环。设想这环是围绕你手指的一根橡皮筋。当流速增大时，这环分裂成 2 个相邻的环，就像橡皮筋在手指上绕了 2 圈。于是橡皮筋 2 倍于原长度，所以周期加倍。然后这已经加倍的环又沿其长度完全以同样方式加倍，产生周期 4 循环，以此类推。在无穷多次加倍之后，你的手指被细面条似的橡皮筋缠绕，即混沌吸引子。

这种混沌创生方案叫周期倍化级联。1975 年，物理学家米切尔·费根鲍姆（Mitchell Feigenbaum）发现，一个可用实验加以测量的特殊数与每个周期倍化级联相联系。这个数大约是 4. 669，它与π并列成为似乎在数学

及其与自然界的关系中都有非同寻常意义的离奇数之一。费根鲍姆数也有一个符号：希腊字母δ。数π告诉我们圆周长如何与圆的直径相关。类似地，费根鲍姆数δ告诉我们水滴周期如何与水的流速相关。准确地说，你必须通过这个额外量旋开水龙头，在每次周期倍化时减小 1/4.669。

π是与圆有关的任何东西的一个定量特征。同理，费根鲍姆数δ是任何周期倍化级联的定量特征，不管级联是如何产生的或如何用实验得出的。这同一个数在关于液氦、水、电路、摆、磁体以及振动车轮的实验中都会出现。它是自然界中一个新的普适模式，是我们仅仅透过混沌之眼就可看到的模式，一个从定性现象产生的定量模式，一个数。这数确实是自然之数中的一个。费根鲍姆数打开了通往数学新世界的大门，我们才刚刚开始探索这个世界。

费根鲍姆发现的这个精确模式（和诸如此类的其他模式）是一件杰作。其根本点在于，甚至当自然之定律的结果看上去无模式时，定律依然存在，模式亦然。混沌不是无规，它是由精确规律产生的貌似无规的行为。混沌是隐秘形式的秩序。

科学在传统上看重秩序，但我们正开始认识到混沌能给科学带来独特的好处。混沌更容易对外部刺激作出快速反应。设想一下等待接发球的网球运动员。他们站着不动吗？他们有规则地从一边移向另一边吗？当然不。他们双脚零乱地蹦跳。部分原因在于扰乱其对手；但同时也准备对任何发过来的球作出反应。为了能够向任何特定方向快速运动，他们在许多不同方向上作出快速运动。混沌系统与非混沌系统相比较，前者轻而易举地就能非常快地对外部事件作出反应。这对工程控制问题来说很重要。例如，我们现在知道某类湍流由混沌造成——混沌正是使湍流混乱不堪的元凶。我们也许可以证明，通过建立对破坏任何小区域的原发湍流作出极快反应的控制机制，使擦过飞机表面的气流不致太湍乱，从而减小运动阻力，这种情况是可能的。活的生物为了对变化的环境作出快速反应，也必须呈现混沌行为。

这一思想已被一群数学家和物理学家，其中包括威廉·迪托（William Ditto）、艾伦·加芬科（Alan Garfinkel）和吉姆·约克（Jim Yorke），变成了一项非常有用的实用技术，他们称之为混沌控制。实质上，这一思想就是使蝴蝶效应为你所用。初始条件的小变化产生随后行为的大变化，这可以是一个优点；你必须做的一切，是确保得到你想要的大变化。对混沌动力学如何运作的认识，使我们有可能设计出能完全实现这一要求的控制方案。这个方法已取得若干成功。混沌控制的最早成就之一，是仅用卫星上遗留的极少量肼使一颗“死”卫星改变轨道，而与一颗小行星相碰撞。美国国家航空与航天管理局操纵这颗卫星围绕月球旋转 5 圈，每一圈用射出的少许肼将卫星轻推一下，最后实现碰撞。

这一数学思想已被用来控制湍乱流体中的一条磁性条带——控制流经潜水艇或飞机的湍流的一个原型；控制使胡乱跳动的心脏恢复有规则的节律，这预示着智能起搏器的发明；用来建立和防止脑组织中电活动的节律波，这又开辟了预防癫痫发作的新途径。

混沌已是一个迅速发展的行业。每一个星期都有有关混沌的数学基础的新发现、混沌对我们认识自然界的新应用，或有关应用混沌产生的新技术的报导，包括混沌洗碟机（日本人发明用两条混沌旋转的转臂使碟子洁净的节能机器）和英国人发明的用混沌理论进行数据分析从而改进矿泉水生产中的

质量管理的机器。

然而，还有更多的东西有待研究。或许混沌最终悬而未决的问题是奇异的量子世界，幸运女神主宰那里的一切。放射性原子“随机地”衰变，它们唯一的规律是统计规律。大量放射性原子虽有明确的“半衰期”——一段半数原子将衰变的时间，但我们不能预言哪一半原子即将衰变。前面提到的爱因斯坦的断言，就是针对这一问题的。在将不衰变的放射性原子与将要衰变的放射性原子之间，确实根本不存在任何差别吗？原子怎么知道该干什么？

量子力学的表观随机性可能骗人吗？它确实是确定性混沌吗？设想原子是宇宙流体的某种振动液滴。放射性原子很有力地振动，并且较小的液滴时常会分裂——衰变。这振动快得我们无法对它们进行细致测量，我们只能测量平均量（如能级）。现在，经典力学告诉我们，一滴真实流体会混沌地振动。当它振动时，其运动是确定性的，但不可预言。许多振动不约而同“随意地”分裂微小的液滴。蝴蝶效应使得不可能预言何时液滴将分裂，但这事件具有精确的统计特征，包括明确的“半衰期”。

放射性原子表观随机衰变可能是某种在微观尺度上的类似物？为什么终归存在统计规律？统计规律是内在确定性的外显，抑或会来自别的什么地方？遗憾的是，尚没有人使这诱人的思想产生结果——尽管它在精神上类似于时髦的超弦理论，在超弦理论中，亚原子粒子是一种人为的振动着的多维环。在这里主要的类似特征是，振动环与振动液滴都将新的“内部变量”引入其物理学图景中，而显著的区别在于它们处理量子不确定性的方式。超弦理论同传统量子力学一样，把这种不确定性视为真正的随机。然而，在一个像液滴这样的系统里，表观不确定性实际上是由确定性的（但是混沌的）原动力所产生。诀窍——如果只有我们知道如何来操作的话——也许在于：发明某种维持超弦理论成功特征的结构，同时造就几个行为混沌的内部变量。它可能是使上帝的骰子变得确定，并使爱因斯坦在天之灵欣慰的一条动人途径。

# 第九章　液滴、动力学与雏菊

混沌告诉我们，遵从简单规律的系统会以令人惊奇的复杂方式表现其行为。对于每一个人来说，无论是以为严格管理的公司将会自然而然地顺利运作的经理们，还是以为令则行、禁则止的政治家们，以及以为一旦给某系统建立了模型，他们的工作就完成了的科学家们，都还有重要的课程需要学习。但这个世界不能完全处于混沌状态，否则我们就不能在其中生存。事实上，混沌之所以迟迟未被发现，其原因在于，我们的世界在许多方面是简单的。这种简单性在我们由表入里观察事物时便会逐渐消失，但在表面上它却依然如敌。我们用以描述这个世界的语言是建立在简单性的基础之上的。例如，“狐狸追逐兔子”这一陈述之所以成立，只是因为它抓住了动物相互作用的一般模式。狐狸确实追逐兔子，在这样的意义上成立：如果饥饿的狐狸看见兔子，那么它很可能追捕兔子。

然而，假如你开始深究其中的细节，它很快就变得复杂了，以致于丧失了简单性。例如，为了完成这一简单行为，狐狸首先必须识别出它所追逐的动物是一只兔子，然后它必须全力以赴追捕它。为了理解这些活动，我们必须了解视觉、大脑中的模式识别和行进。在第七章里，我们研究了行进，我们发现了生理学和神经学错综复杂的内容——骨骼、肌肉、神经和大脑。肌肉的运动依赖于细胞生物学和化学；化学依赖于量子力学；量子力学又依赖于尚未找到的“万物至理”，所有的物理学定律将在这个包罗万象的理论中合成一个统一的整体。假如我们撇开行进，沿着由视觉或模式识别开辟的道路深入下去，我们会再次看到同样类型的不断分化的复杂性。

这任务看来无望实现，除非存在我们从那出发的简单性。因此，大自然要么采用这一极其复杂的因果网络，要么把事物安排停当，使大多数复杂性都无关紧要。直到最近，科学研究的自然之路已愈益深入复杂性之树——科恩和我把它称为“还原论者梦魇”。沿着那条道走，特别是把怎样操纵自然作为我们的目的，我们已经学到了关于自然的许多东西。但我们却对重要的简单性视而不见，因为我们不再把它们看作简单的了。近来，科学家已在复杂性理论的名义下，提出了一个全然不同的思想。其核心是，大尺度简单性从大量组分复杂的相互作用中出现。

在这最后一章里，我想向你展示从复杂性中出现的简单性的 3 个实例。这 3 个实例并非取自那些复杂性理论家们的著作，而是我从现代应用数学的主流——动力学系统理论——中挑选出来的。我这么做有两个原因。原因之一是，我想显示复杂性理论的中心思想正在所有学科冒出来，这与推动它发展的任何明显的运动无关。一场平静的革命即将爆发，你可以感觉到，因为气泡的表面已开始破裂。另一个原因是，每一个实例都解决了自然界中有关数学模式的一个久攻不下的难题，这样，就能使我们认识到过去未曾认识的那些自然特性。这 3 个例子是水滴的形状、动物群体的动态行为和植物花瓣数字命理学中的奇怪模式（它的解我在第一章已提到过）。

首先，让我们回到水从水龙头中缓缓滴落的问题上来。就是这样一个简单的日常现象竟教给了我们关于混沌的知识。现在它又将教给我们关于复杂性的知识。这次我们将不把注意力集中在相继水滴的滴落时刻，而是来看一看水滴脱离水龙头尾端时所呈现的形状。

这种形状不是显而易见的吗？它必然是典型的“泪滴”形，颇似蝌蚪（圆

头尖尾）。这就是我们称此形状为泪滴的原因。

但它并非显而易见。实际上它不是这样的。

当有人初次对我谈起这一问题时，最使我感到惊奇的是，这一问题的答案在过去很长的时间里一直没有找到。长长的图书馆书架上堆满了有关研究流体流动的科学文献，肯定有某人花功夫来查看过有关滴水形状的资料吗？然而在早期文献中只有一幅有关滴水形状的正确的插图，它是物理学家瑞利勋爵（Lord Rayleigh）在一个世纪前绘的。这幅图太不起眼，几乎没有人注意过它。1990 年，数学家豪厄尔·佩里格林（Howell Peregrine）和布里斯托尔大学的同事们曾一起拍摄过水从水龙头滴落的过程，他们发现它比任何人曾经想象过的远为复杂和有趣。

滴水形状的形成，从挂在一个表面（水龙头尾端）上的一滴膨胀着的水开始。它发育成细窄的腰，其下部似乎向典型泪滴形状演变。但这腰并未挤压形成短而尖的尾巴，而是拉长成细长的圆柱丝，尾端挂着一个几近球形的水珠。然后圆柱丝恰好在与水珠相连的那点处变窄，直至形成一个尖点。在这一阶段，其大致的形状很像一根正触及一只柑橘的织针。然后柑橘脱离织针落下，下落时略有颤动。紧接着织针的尖端开始修圆。轻微的波动向针上部的根部回传，使它看上去像变得越来越小的一串珍珠。最后，悬挂着的水丝在顶端窄化成一个尖点，它也脱离。当它落下时，其顶端修圆，一系列复杂的波沿它传播（见图 9.1）。

我希望你发现这一过程时能像我一样惊奇。我从未想象过下落的水滴会如此令人目不暇接。

这些观察表明，为什么以前没有人在这么细微的数学细节上研究过这一问题，原因是它太难了。当水滴脱离时，在这一过程中有一个奇点——数学在此变得很难处理。奇点是“织针”的尖端。但为什么有一个奇点？为什么水滴以如此复杂的方式脱离？1994 年，埃格斯（J. Eggers）和杜邦（T. F. Dupont）证明了这种性态是流体运动方程的结果。他们在计算机上模拟了那些方程，复制出了佩里格林的性态。

这是一项杰出的工作。但就某一方面而言，它并未完满解答我的问题。得知流体流动的方程确实能预言正确的性态是令人欣慰的，但这本身并未帮助我们理解那种性态发生的原因。在计算自然之数与使你用头脑得到答案之间有很大的差别——正如马基克西斯和弗鲁方德在得到答案是“42”的时候所体会到的那样。

芝加哥大学的史向东（X. D. Shi）①、迈克尔·布伦纳（Michael Brenner）和悉尼·内格尔（Sidney Nagel）对水滴脱离机制作了进一步的研究，并已取得了成果。这个故事中的主角在佩里格林的工作中就已出现：它是流体流动方程的一类特殊解，叫“相似解”。此种解有某种可在数学上处理的对称性：它在短暂时间间隔之后在较小尺度上重复其结构。史向东的研究小组通过研究水滴脱离时的形状如何依赖于流体的粘度，从而使这一思想得到了发展。他们将水和甘油混和而得到的不同粘度做了实验。他们还进行了计算机模拟，并用相似解建立了理论模型。他们发现，对于较粘稠的流体，柱丝的第二次窄化出现在奇点形成和液滴脱离之前。所得到的东西颇似被一段从织针尖端垂下的细绳悬挂的柑橘。粘度更大时，存在第三次窄化——被织针尖端的一段细绳引出的一段棉线悬挂的柑橘。随着粘度的增大，相继窄化的数目无限制地增加——如果我们忽略物质的原子结构所设置的极限的话。

不可思议！

第二个例子是关于群体动力学。那个术语的使用，反映了数学建模的一个悠久传统，在建模过程中用微分方程表示相互作用着的生物群体中的变化。我在前面提到的猪－块菌系统就是一个例子。然而，此种模型缺乏生物现实性——这不仅仅就我对生物的选择而论。在现实世界里，支配群体规模的机制并不是与牛顿运动定律类似的“群体定律”，存在着各式各样的其他效应，例如随机效应（猪会发现块菌吗？或者有石头挡道吗？）或者未包含在方程中的种种多变性（有些猪天生就比其他的猪能繁殖更多的猪仔）。

1994 年，沃威克大学的雅基尔·麦格拉德（Jacquie McGlade）、戴维·兰德（David Rand）和霍华德·威尔逊（Howard Wilson）进行了一项惊人的研究，这项工作是针对生物学上更真实的模型与传统的方程之间的关系来进行的。它贯彻了在复杂性理论中常见的一条战略方针：按照生物学上可信的（尽管是相当简化的）规则，进行包含大量相互作用的“因素”的计算机模拟，并从模拟结果中抽象出大尺度模式。在这种情况下，模拟是借助“元胞自动机”（你可以把它当作一种计算机数学游戏）进行的。麦格拉德、兰德和威尔逊没有我那种对猪的偏好，他们考察了较为传统的狐狸和兔子。计算机屏幕被划成许多正方形网格，每个正方形被指定一种颜色——例如红色代表狐狸，灰色代表兔子，绿色代表草地，黑色代表光秃秃的石头。然后建立一套规则，模拟起主要作用的生物学影响。此种规则的例子可能有：

·若兔子靠近草地，则它向草地位置运动，并吃草；

·若狐狸靠近兔子，则它向兔子位置运动，并吃兔子；

·在游戏的每一步，兔子以某个选定的概率繁殖后代；

·经过若干步数尚未吃到东西的狐狸将饿死。

麦格拉德小组所玩的游戏比这更复杂，但你能明白这种游戏的思想。游戏中的每一步都采取目前的兔子、狐狸、草地和石头配置，并应用规则产生下一个配置——当需要随机选择时，就掷计算机“骰子”。这过程持续好几千步，成了一个在计算机屏幕“人造生态”上玩生命的游戏。这一人造生态类似于动力学系统，在这系统中反复运用同样一些规则。但它还包含随机效应，即把不同数学范畴中的模型放在一起，产生随机元胞自动机效应——带有偶然性的计算机游戏。

正因为这生态是人造生态，所以你可以完成在现实生态中不可能完成或因过于昂贵而难以完成的实验。例如，你可以观察给定区域中的兔子数目如何随时间而变化，并得到准确的数字。这正是麦格拉德小组所作出的引人注目的发现。他们认识到，假如你观察的一个区域太小，你所看到的随机性就非常大。另一方面，假如你观察的区域太大，你所看到的一切是平均得到的群体统计特性。可是在中等尺度上，你所看到的东西又不够鲜明。于是，他们为了发现多大的区域才能提供最大量有意义的信息而发展了一项技术。然后，观察大小合适的一个区域，记录变化着的兔子数目。他们运用从混沌理论中发展而来的方法来研究这一系列数字是确定性的，还是无规的。如果是确定性的，它的吸引子又是何种样子的。这似乎是在做一件怪事，因为我们知道，用来模拟的规则是建立在大量的随机性之上的，但他们还是做了。

他们的发现令人惊奇。在中等尺度上，兔子数目动力学特性的近 94%可以通过 4 维相空间里混沌吸引子上的确定性运动加以说明。简而言之，仅有 4 个变量的微分方程就能抓住兔子数目动力学特性的重要特征，而误差只有

6%，尽管这种计算机游戏模型非常复杂。这一发现表明，具有少量变量的模型可能比许多生物学家迄今宣称已建立的那些模型更加“真实”。其深层意义是，简单的大尺度特征可以并且确实能从复杂的生态游戏精细的结构中得到。

我的第三个、也是最后一个有关自然之数学规律的例子亦来自于复杂性，而不是“靠规则建立起来的”，这例子是花瓣的数目。我在第一章中提到过，大多数植物具有从级数 3，5，8，13，21，34，55，89 中取出的花瓣数。传统生物学家的观点是，花的基因决定一切信息。然而，正是因为活的生物体具有决定诸如它们由哪些蛋白质组成等特性的复杂的 DNA 序列，基因决定一切就不能成立。即使基因决定一切，也可能只是间接地做到这一点。例如，基因决定植物如何制造叶绿素，但它并未告诉植物，叶绿素必须是何种颜色。假如它是叶绿素，那必定是绿色的——别无选择。因此，活的生物的有些形态特征植根于基因，有些特征则是生物生长过程中物理学、化学和动力学因素作用的结果。区分它们的一个办法是，基因影响具有巨大的灵活性，但物理学、化学和动力学则具有数学规律。

植物中出现的数字——不仅仅是花瓣数——呈现数学规律。它们组成所谓的斐波那契级数的开端，其中每一个数是其前两个数之和。花瓣不是你发现斐波那契数的唯一例子。假使你观察大向日葵，你在其葵花盘中会发现很显著的小花——最终变成葵花籽的小花模式。小花呈现两族相向螺线排列，一族顺时针旋转，另一族逆时针旋转。在某些品种里，顺时针螺线的数目是 34，逆时针螺线的数目是 55。它们都是这个级数中接连出现的斐波那契数。准确的数字依赖于向日葵的品种，但你往往得到 34 和 55，或 55 和 89，或甚至 89 和 144，或更大的斐波那契数。菠萝有 8 行向左边斜的鳞苞——方块形的铠甲，还有 13 行向右边斜的鳞苞。

大约在公元 1200 年，莱奥纳尔多·斐波那契（Leonardo Fi-bonacci）就兔子数目增长问题发明了以他名字命名的级数。它不是像我刚刚讨论过的“生命游戏”那样真实的一个兔子群体动力学模型，但它是数学的一个很有趣的部分。数学家发现斐波那契数本身绝妙又优美。本章的关键问题是：假如遗传学能给花选择它所喜欢的任意数目的花瓣，或者给松果选择它所喜欢的任意数目的鳞苞，为什么我们能观察到这么多的斐波那契数？

答案或许在于，这数是通过某种数学机制而不是通过任意的遗传指令产生。此种机制最可能是植物发育过程中的某种动态限制，它自然而然地导致斐波那契数。当然，表面的东西可能是靠不住的，它可能尽在基因之中。但假使如此，我倒想知道斐波那契数如何转化为 DNA 密码，想知道为什么它是那些数。也许进化从自然出现的数学模式开始，并通过自然选择来对之进行微调。我猜想许多这样的情况已经发生，如老虎的条纹，蝴蝶的翅膀。那可能解释，为何遗传学家认为模式是遗传的，数学家笃信模式是数学的。

有大量出色的文献讨论过树叶、花瓣及植物中类似物的排列。但早期的研究纯粹是描述性的，它们没有解释数字如何与植物生长相关，而只对排列的几何特征加以分类。最惊人的见解来自于法国数学物理学家斯特凡娜·杜阿迪（Stéphane Deuady）和伊夫·库代（Yves Couder）最新的工作。他们提出了一个植物生长动力学理论，并用计算机模型和实验室实验证明这一理论阐明了斐波那契模式。

这一理论的基本思想并不新鲜。假如你观察一下植物生长过程中的芽

梢，你会发现一些蛛丝马迹，植物的所有主要特征——叶子、花瓣、萼片、小花等等都由此发育而成。在芽梢的中央是一个无特别特征的圆形组织区，叫尖端。围绕尖端，形成一个挨一个的小块，叫原基。每个原基从尖端迁移出来，或更准确地说，尖端从小块中长出来。小块最终发育成叶子、花瓣或诸如此类的东西。而且，那些特征总的排列在一开始（原基形成时）就已被规定了，所以，你所需做的一切基本上就是解释为什么你在原基中见到螺线形和斐波那契数。

首先要认识到，最为显眼的那些螺线并不重要，最重要的螺线是由表观次序中的原基排列而成。较早出现的原基作进一步的迁移后，于是你可以根据离尖端的距离来推断表观次序。你所见到的是相继的原基沿一个很紧密盘绕的螺线（叫生成螺线）十分稀疏地相间排列。人眼能认出斐波那契螺线的原因在于它们是由在空间中彼此相邻出现的原基组成，但斐波那契序列在时间上确实至关重要。

基本定量特征是相继原基之间的夹角。设想从相继的原基中心到尖端中心画几条线，测得线之间的夹角。相继的夹角完全相等，它们的公共数值叫发散角，也就是说，原基沿生成螺线是等间距的——在角距离意义上，而且，发散角通常很接近于 137.5 度。1837 年晶体学家奥古斯特·布喇菲（Auguste Bravais）及其兄弟路易（Louis）首先强调了这一事实。要明白这个数为什么很重要，可在斐波那契级数中取两个相连的数，例如 34 和 55。现在组成相应的分数 34/55，再乘以 360 度得到 222.5 度。由于这个角度大于 180 度，所以我们应当在绕圆的相反方向上测量它，或等效地用 360 度减去它，结果就是 137.5 度，布喇菲兄弟俩测得的就是这个数值。

相继斐波那契数之比率越来越接近 0.618034 这个数。例如，$34/55=0.6182$，它已经很接近了。其极限值恰好是（$\sqrt{5}-1$）/$2$，即所谓的黄金分割数，它常常用希腊字母φ表示。大自然给数学侦探们留下了一条侦破线索：相继原基之间的夹角是“黄金分割角”：360（1－φ）度＝137.5 度。1907 年，范蒂尔森（G. Van lterson）顺着这条线索探寻，搞清楚了当你在被 137.5 度角分割的紧密盘旋的螺线上画出相继点时所发生的情况。由于相邻点并列的方式，使人眼能认出两族互相交错的螺线——一族顺时针旋转，另一族逆时针旋转（参见图 9.2）。又由于斐波那契数与黄金分割角之间的关系，所以这两族中的螺线数是相连的斐波那契数。究竟是哪些斐波那契数，则取决于螺线的紧密程度。那么，花瓣数又如何解释呢？实质上，在两族螺线里的一族中，恰好在每条螺线的外缘处得到一个花瓣。

无论如何，这完全可以归结为解释相继原基何以被黄金分割角所分割，其余的一切都顺理成章。

杜阿迪和库代为黄金分割角找到了一个动态解释。他们把自己的思想建立于福格尔（H. Vogel）1979 年的一个重要见解之上。福格尔的理论又是一个描述性理论，它注重的是排列的几何学而不是造成排列的动力学。他完成的数值实验很明显地表明，假若相继原基按照黄金分割角排列在生成螺线上，则它们将最有效地挤在一起。例如，假设不按照黄金分割角排列，试一试 90 度的发散角，90 度恰好是 360 度的 4 等分，相继原基则沿着形成十字交叉的 4 条射线而排列。事实上，只要采用的发散角是 360 度的有理数倍数，总能得到一系列的射线。于是在射线与未有效地挤满的原基之间存在着空隙，所以，我们得出这样的结论：要想有效地填满这空间，需要的发散角是

360 度的无理数倍数，即被一个不能表示成两个整数之比的数相乘。但究竟是哪一个无理数呢？数不是无理数,就是有理数,但正如乔治·奥威尔(George Orwell）在《动物庄园》（Animal Farm）一书中所提及的平等性，有些数比其他一些数更加无理。数论专家们早就知道，最无理的数就是黄金分割数。它用有理数“很难逼近”，如果把难逼近的程度定量化，它就是最难逼近的。从另外一个角度来理解，这表明黄金发散角应当最密集地挤满原基。福格尔的计算机实验证实了这一预言，但没有用严密的逻辑来证明它。

杜阿迪和库代所做的最杰出的工作，是把黄金分割角作为简单动力学的一个推论得出，而不是根据有效集聚直接假设黄金分割角。他们假定，某种相继的基元——代表原基——在小圆（代表尖端）边缘上某处以相等的时间间隔形成，然后这些基元以某个特定的初始速度径向地迁移。此外，他们还假定基元之间互相排斥，就像带相同极性的相等电荷或磁体那样。这确保了径向运动不断进行下去，以及每个新基元尽可能紧接着前面的基元出现。此种系统将满足福格尔的有效集聚判据是意料之中的事，所以你会期盼黄金分割角自动地出现。它确实如此。

杜阿迪和库代不是用植物，而是用置于垂直磁场中充满硅油的圆碟完成了一个实验。他们让可磁化的液体以规则的时间间隔一滴一滴落入碟的中央。液滴被磁场磁化，互相排斥。通过使碟边缘处的磁场比碟中央的磁场强，来给液滴在半径方向上施加一个推力。所出现的模式取决于液滴之间问隔的大小；但一个很普遍的模式是这样的：其中相继液滴以很接近于黄金分割角的发散角落在一条螺线上，产生交错螺线的向日葵种子模式。杜阿迪和库代还在计算机上进行了计算，得到了十分类似的结果。通过这两种方法他们发现，发散角按照一个复杂的扭动曲线分枝模式而依赖于液滴之间间隔。每一段相继扭动之间的曲线对应于特定对的螺线数。主要分枝很接近 137.5 度发散角。沿着它，你可以发现所有可能对的相连的斐波那契数，即在数字序列中一个数与紧挨着它的另一个数组成一对数。分枝之间的间隙代表“分岔”，即动力学特性经历显著变化的地方。

当然，没有人提出，植物学就像这一模型中的数学那样完美。特别是在许多植物中，原基的出现速率会加快或减慢。事实上形态中的变化——例如给定的原基变成叶子还是花瓣——往往伴随着此种速率的变化。所以基因所起的作用也许是影响原基出现的时间。但植物并不需要基因告诉它们如何摆布它们的原基，那是动力学干的事。物理学和遗传学之间是相互合作的关系，要认识生命现象，两者不可偏废。

这 3 个涉及不同学科发人深思的例子，每一个都是自然之数起源中的案例研究，其中包含了可以用自然形式加以探测的深刻的数学规律。这些例子中隐含着一条相同的思路，一个尤为深刻的启示。然而，并不是说自然很复杂。不，自然是简单的。自然的那些简单性并不直接呈现在我们面前，而是以其独特的、难以捉摸的方式表现出来。自然为那些喜欢追根刨底的数学侦探们留下了许多探求的线索。对于一位旁观者来说，探索自然也是一种令人陶醉的游戏。倘若你是一位数学福尔摩斯，那探索自然对你来说绝对是无法抗拒的。

## 尾声　形态数学

我做了另一个梦。

我的第一个梦"虚拟幻境机"不过是一种技术，它将帮助我们使数学的抽象概念直观化，鼓舞我们发展新的数学抽象概念的直觉知识，让我们不必太介意数学研究中那乏味的簿记部分。大多数情况下，这将使数学家易于在那样的智力王国里探索。但由于他们有时候会开垦出新的土地，当他们在新开垦的土地上漫游时，虚拟幻境机也将起创造性的作用。事实上，虚拟幻境机或某种类似的东西，不久就会出现。

我把第二个梦叫做"形态数学"（morphomatics）①。它不是一项技术，而是一种思维方式。它的创造性意义十分巨大。但我不知道它是否会成为现实。

我希望它成为现实，因为我们需要它。

我在上一章里举的 3 个例子，液滴、狐狸和兔子以及花瓣它们在细节上很不相同，但它们阐明了关于宇宙是如何运作的相同的哲学观点。这一观点并不是直接从简单的定律（如运动定律）出发得到简单的模式（如行星的椭圆轨道），而是经过了庞大的枝节交错的复杂性之树。复杂性又在一定程度和适当尺度上解体成相对简单的模式。"水龙头滴水"这一简单陈述是靠非常复杂的、出乎意料的一系列转变才得以完成。我们尚不知道为什么那些转变从流体流动定律导出，尽管我们有有关这种转变的计算机证据。结果简单，原因却不简单。狐狸、兔子和青草在玩一场具有复杂的或然性规则的数学计算机游戏。它们的人造生态的重要特征可以用有 4 个变量的动力学系统表示，精度达 94%。植物花瓣的数目是所有原基之间复杂的动态相互作用的结果，那些原基借助黄金分割角恰巧导致斐波那契数。斐波那契数是数学福尔摩斯们探案的线索——它们不是那些线索背后的元凶。在这种情况下，数学的莫里亚蒂（Moriaty）①是动力学，而不是斐波那契——是自然之机制，而不是自然之数。

从这 3 个数学故事中可以得到一个共同的启示：自然之模式是"涌现现象"。它们从复杂性之海中涌现出来，就像波堤切利（Botticelli）的维纳斯（Venus）从半边贝壳中诞生②——突发性涌现，超越它们的起源。自然之模式不是自然定律之深藏简单性的直接结果；就此而言那些定律仍在错误的层面上起作用。它们无疑是自然之深藏简单性的间接结果，但从原因通向结果的道路是如此地错综复杂，以致于没有人能理解它的每一步。

假如我们想千方百计地来解决模式涌现的问题，我们需要新的研究方法，一种可以与注重潜在定律和方程的传统方法并驾齐驱的方法。计算机模拟是它的一个部分，但我们还需要更多的方法。我们并不满足于这种情况，即被告之某种模式出现了，这是因为计算机如是说，我们想知其所以然。这意味着我们必须发展一种新型数学，它把模式作为模式而不是作为细微尺度上相互作用的偶然结果来对待。

我并不想用某些东西来取代我们目前的科学思维，它已带领我们走了很长的路。我想发展某些能补充它的东西。近来数学的最显著特征之一，是注重普遍原理和抽象结构——注重定性而不注重定量。大物理学家欧内斯特·卢瑟福（Ernest Rutherford）曾经指出"定性乃是定量不足"，但那种态度已不再大行其道了。要把卢瑟福的格言颠倒过来，定量乃是定性不足。数

字仅仅是有助于我们认识自然和描述自然的极其多样的数学量中的一个。倘若我们试图把自然的一切自由都限制到数字框架里，我们将无法理解树的生长或沙漠中沙丘的形成。

建立一种新型数学的时机已经成熟，这种数学既拥有智力的严格性——卢瑟福批评草率的定性推理的真实用意，又有很大的概念灵活性。我们需要一个有效的形态数学理论，这就是我把我的梦命名为“形态数学”的原因。遗憾的是，许多科学分支目前却在向相反的方向推进。例如，DNA 序列往往被认为是生物体中形态和模式问题的唯一答案。然而，目前的生物发育理论并不能恰当地解释为什么有机界和无机界享有如此之多的数学模式。或许 DNA 给发育编制动态规则，而不仅仅为最终的发育形态编码。倘若如此，我们目前的理论就忽视了发育过程的最重要的部分。

数学与自然形态密不可分，这一思想要追溯到达西·汤普森，追溯到古希腊人，甚至追溯到巴比伦人。然而，只是在当前，我们才开始发展这种数学。我们以前的数学框架本身因受制于铅笔和纸而太刻板。例如，达西·汤普森就注意到了各种生物形态与流体流动模式之间的相似性。但目前了解的流体动力学运用的方程还相当简单，尚难以模拟生物体。

如果你在显微镜下观察单细胞生物，最令人惊奇的莫过于它的流动方式所表现出来的明显的目的感。它确实好象知道要去那里。事实上，它正在以一种很特别的方式对其周围环境及其自身的内部状态作出反应。生物学家正开始揭示细胞运动的机制，这些机制比经典流体动力学要复杂得多。细胞最重要的特征之一是所谓的细胞骨架，即类似于一捆稻草并在细胞内部起坚固的支架作用的缠结的管网。细胞骨架有令人惊奇的可塑性和动态性。它可以在某些化学物质影响下完全消失，或者在需要支撑的任何地方生长。细胞通过拆毁其细胞骨架并在别的某个地方建立细胞骨架而运动。

细胞骨架的主要成分是微管蛋白，前面我提到它与对称性相联系。如前所述，这种非凡的分子是由两种单位α微管蛋白和β微管蛋白组成的长管，像国际象棋盘的黑白方格那样排列。微管蛋白分子可以通过添加新的单位而扩张，或者像香蕉皮那样从顶端向后裂开而收缩。收缩比扩张快得多，但这两种趋势都受到适当的化学物质的刺激。细胞通过用微管蛋白“钓竿”在生物化学海洋中“钓鱼”，而改变其结构。微管蛋白“钩竿”本身对使之扩展、解体或摇摆的化学物质作出反应。细胞分裂时，它在自身产生的微管蛋白网上把自己拉开。

这不是传统的流体动力学。但不可否认，它是某种动力学。细胞的 DNA 包含制造微管蛋白的指令，但它不含微管蛋白遇到特定类型的化学物质时应当如何行事的指令。那时的行为受化学规律的支配，就像你不能写下 DNA 指令让大象用耳朵作翅膀飞行一样，你同样不能在 DNA 中写下新的指令来改变其行为。就化学物质海中的微管蛋白网而言，流体动力学的类似物是什么？没有人知道。这对数学以及对生物学显然是一个难题。此种难题并非绝无仅有：液晶的动力学（由长分子形成模式的一种理论）同样令人困惑。然而，细胞骨架动力学极其复杂，因为分子会改变其大小或完全解体。一个好的细胞骨架动力学理论将是形态数学的重要组成部分。要是我们哪怕是模糊地认识到如何从数学上理解细胞骨架该有多好。微分方程看来不可能是此任务的合适工具，因此我们有必要拓展全新的数学领域。

那可能是一个过高的要求，但那首先是数学这门学科如何成长的问题

了。在牛顿想了解行星运动的时候，没有微积分，于是他创造了微积分。混沌理论在数学家和科学家对那类问题感兴趣之前并不存在。今天，形态数学尚不存在，但我相信动力学系统、混沌、对称破缺、分形、元胞自动机等形态数学的零星碎片已经存在了。

该是我们把这些碎片合在一起的时候了。因为只有那样，我们才能真正开始认识自然之数以及自然之形状、结构、行为、相互作用、过程、发展、变形、演化、变革……。

我们也许永远不会成功，但那将是有趣的尝试。·科学大师佳作系列·

| | |
|---|---|
| *《宇宙的起源》 | 约翰·巴罗 |
| *《宇宙的最后三分钟》 | 保尔·戴维斯 |
| *《人类的起源》 | 理查德·利基 |
| *《周期王国》 | 彼得·阿特金斯 |
| *《大脑如何思维》 | 威廉·H·卡尔文 |
| *《自然之数》 | 伊恩·斯图尔特 |
| *《伊甸园之河》 | 理查德·道金斯 |
| 《粒子物理学》 | 莫雷·盖尔曼 |
| 《生物共生的行星》 | 林恩·马古利斯 |
| 《语言与心智》 | 史蒂文·平克 |
| 《大气与环境》 | 斯蒂芬·H·施奈德 |
| 《癌的分子起源》 | 罗伯特·A·温伯格 |
| 《适应性》 | 乔治·C·威廉斯 |
| 《社会变化与适应》 | 玛丽·凯瑟琳·贝特森 |
| 《认知科学》 | 丹尼尔·C·丹尼特 |
| 《人类进化与环境》 | 贾里德·戴蒙德 |
| 《生物进化的模式与方向》 | 斯蒂芬·杰伊·古尔德 |
| 《计算机的未来》 | 丹尼·希利斯 |
| 《思维机器：计算机与人工智能》 | 马文·明斯基 |
| 《时间的起源》 | 乔治·斯穆特 |
| 《蜗牛，苍蝇与蝴蝶》 | 史蒂夫·琼斯 |
| 《你的大脑》 | 苏珊·格林菲尔德 |

带*为已出书