

学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中外科学家发明家丛书

李治



## 一、李冶的青少年时代

李冶，金、元时期的著名数学家。原名叫李治，因为朝廷禁止平民和古代帝王同名，而他的名字又和唐高宗的名字相同，于是减去了一个点，改名叫李冶。李冶字仁卿，号敬斋，公元 1192 年生于大兴（今北京市），真定府栾城（今河北栾城）人。

李冶的父亲李通（y）是一位博学多才的学者，曾在大兴府尹胡沙虎手下任推官（负责勘问刑狱的工作）。

李冶的母亲姓王。

李冶还有两个同父异母的兄弟，哥哥名叫李澈，是刘氏所生，弟弟叫李滋，是崔氏所生。

李冶另外还有两个同胞姐妹。

李冶出生的时候，金朝正由盛转衰。

1190 年，金章宗完颜景即位，官僚政治日趋腐败。

1194 年 8 月，由于管理不善，黄河在阳武（今河南原阳）故堤决口，灌封丘（今河南封丘）而东注梁山泊（今山东东平、郓城间），分夺南北清河（南清河即古泗水，北清河即古济水）入海。

除了水灾之外，公元 1206 年，宋兵分路攻金，取泗（今江苏泗洪东南）、虹（今安徽泗县）等州县，宋宁宗并下诏伐金，虽然南宋的这次伐金失败了，但金的元气也大伤。

金朝的统治者任意挥霍，财政危机越来越严重，1198 年，金章宗制定了官民存留现钱的数量标准，设立了回易务，滥发纸币，致使物价飞涨，国虚民穷。

公元 1208 年，金章宗病死了，金章宗的叔父、卫绍王完颜允济即皇帝位。

这时，在金的北方，蒙古强大起来，对金朝的统治造成了威胁。

蒙古族的祖先蒙古部落属于东胡语系室韦的一支，唐朝时称为蒙兀室韦。它原先游牧于黑龙江上游额尔古纳河东南一带，8 世纪以后西迁今蒙古人民共和国的鄂嫩河和克鲁伦河流域驻牧，属唐朝所设立的燕然都护府管辖，后来又先后臣服于辽国和金国。

在蒙古建国之前，蒙古草原上散处着大大小小的上百个部落，如塔塔儿部、蔑儿乞部、乃蛮部、克烈部、汪古部、……蒙古部只是其中之一。到蒙古部统一草原各部后，便都统称为“蒙古”了。

蒙古各部除西部的乃蛮部和南部的汪古部等少数部落从事农业生产外，大都过着游牧生活。

10 世纪时蒙古社会内部私有制有了发展。

12 世纪中期，生产力进一步提高。

由于蒙古社会经济的发展和出现了阶级对立，在 13 世纪初终于形成了国家。

成吉思汗，原名铁木真，1162 年生于蒙古部落集团内孛儿只斤部。在同各部的长期战争中，铁木真充分利用各部间的矛盾，逐渐扩大自己的力量，终于统一了蒙古各部。

公元 1206 年，蒙古各部实现统一，在东起兴安岭，西至阿尔泰山，南自大沙漠，北达贝加尔湖的广大地区，建立起蒙古历史上第一个军事奴隶制的国家；铁木真作为各部的共主，也被上尊号为“成吉思汗”（“成吉思”是

“强大”的意思)。

蒙古原隶属于金，由于金统治者对蒙古进行残酷的剥削和压迫，蒙古展开了反金的战争，成吉思汗在伐金之前，首先解决西夏问题，进军西夏迫使西夏降服，排除了伐金的障碍。

公元 1209 年，蒙古大军长驱直入西夏中兴府，西夏降。

公元 1211 年，蒙古开始对金发动战争。摇摇欲坠的金王朝一面遣使求和，一面在边境加强防御。成吉思汗率兵突然攻入乌沙堡，占领乌月营。这是首次推到了金国的边境，金军仓皇逃退，蒙军大胜，连占数州县。

当年 8 月间，卫绍王完颜永济任命完颜承裕代思忠主兵事，以 40 万大军驻野狐岭，拟马步大军并进反击，成吉思汗闻讯后，兵分两路开向野狐岭的通道獾八咀猛攻金军，卫绍王完颜永济错估了自己的力量，当时金军士气低落，根本没有战斗力量，大溃而逃，直到宣德州宣平县，金军主力全被消灭。

9 月，蒙古军乘胜而下，陷德兴府。

10 月，蒙古军至缙山县，仅距中都 180 里。

蒙古另外一支军队由者别率领，入关后前锋直达中都，以术赤、察合台、窝阔台率领的军队，从西路经汪古部进军，占领净州、丰州、云内、东胜、武州、朔州等地，直接威胁西京，西京留守纥石烈执中弃城逃走，中都被困后，主战派献策死守，完颜永济采纳之，其效果尚佳，蒙古军屡攻无效北还，中都得以解围。

公元 1212 年，蒙军再次南侵，下昌州、桓州、抚州。

即将亡国的金朝，奸臣当道，人民陷入水深火热之中。李迥的上司胡沙虎，就是一个深得朝廷宠信的奸臣，他“声势炎炎，人莫敢仰视”，动辄打骂同僚，欺压百姓，甚至“虐杀无辜”。李迥见他无恶不作，常常据理力争，置个人生死祸福于度外。只因为官谨慎，才免遭毒手。李迥为了防备不测，便把老小送回故乡栾城。这时李冶正是童年，他没有随家人回乡而独自到栾城的邻县元氏求学去了。

公元 1213 年，蒙古军又攻下了金朝的宣德州、德兴府直达怀来，金军大溃而逃，蒙古军直逼居庸关，成吉思汗亲率大军在中都以南地区掳掠，乘胜前进，又下涿州、易州。

由术赤，察合台等率领的蒙古军沿太行山麓南下，破保州、遂州、安州、定州、邢州等 13 州。由哈撒尔率领的蒙古军攻破了蓟、平、滦、辽等郡。成吉思汗所率军队攻破坝、沧、景、深、冀等 12 州，所经之处烧、杀、抢、掠，百姓深受其害，死于铁蹄之下者不计其数。

这年 8 月，胡沙虎篡权乱政，杀了卫绍王完颜永济，宣宗完颜珣继位，向蒙古求和，派完颜乘晖前往议谈求和条件，蒙古提出纳童男、女各 500，绣衣 3000 件，御马 3000 匹以及大批金、银、财宝等，宣宗对所提出的条件一一应允，并将卫绍王之女岐国公主献给成吉思汗，自此蒙古才退兵。

由于胡沙虎篡权乱政，李迥被迫辞职，隐居在阳翟（今河南禹县），从此不再过问政事。他吟诗作画，在当地颇有声名。

李冶受父亲的影响最深，他以父亲的正直为人和好学精神为典范。在李冶看来，学问比财富更可贵。他说：“积财千万，不如薄技在身”，又说：“金璧虽重宝，费用难贮蓄。学问藏之身，身在即有余。”

李冶在青少时期有一个好友叫元好问（1190—1257），他是太原秀容（今山西忻县西北）人，诗和古文都很有名，李冶对文学、史学、数学、经学都

感兴趣，就与元好问出外求学，拜文学家赵秉文、杨文献为师，不久便名声大振。

公元 1230 年，李冶赴洛阳应试，被录取为词赋科进士，时人称赞他“经为通儒，文为名家”。同年，李冶得高陵（今陕西高陵）主簿官职。

这一年的正月，金将完颜彝率回纥、乃蛮、羌、浑所组成的忠孝军，大破蒙古于大昌原。但是，到了 6 月份，蒙古又攻破了金的京兆（今陕西西安市），高陵已陷入了窝阔台军的铁蹄之下，所以李冶没有去上任。接着，李冶又被调往阳翟附近的钧州（今河南禹县）任知事。

## 二、李冶以前的方程理论

公元 1232 年正月，蒙古军绕过金朝的军事重镇潼关（今陕西潼关县北），由唐（今河南唐河）、邓（今河南邓县）北趋汴京（今河南开封），金将完颜合达等率步骑 15 万往援。蒙古主将拖雷（1193—1232）采取疲劳金军的战术，当金军出攻时，不战而退，金军驻扎时，率师出袭，使其不得休息。

15 日，天气严寒、大雪纷飞，金军受冻不能举刀槊，退至钧州的三峰山，被蒙古军四面包围。

16 日，大雪还是不停地下，地上的积雪越来越深，拖雷与金军在三峰山大战，金军大败，金将蒲阿被俘，合达、陈和尚、杨沃衍逃入钧州城，武仙逃到密县（今河南密县）。

17 日，蒙古大汗窝阔台（1186—1241）亲自到三峰山督战。

18 日，金徐州行省完颜庆山奴引兵来增援，但义胜军校侯进、杜正、张兴都率领他们的部下北降蒙古军，完颜庆山奴只得进入睢州（今河南睢县）。

19 日，金哀宗完颜守绪见形势危急，只得亲自到端门，宣布大赦，并改元开兴。

20 日，金潼关守将李平向蒙古献关投降。

21 日，蒙古军向钧州发起了猛攻，城被攻破，金将合达被俘。这时，李冶不愿投降蒙古军，他只好换上了平民的服装，北渡黄河，走上了漫长而艰苦的流亡之路。这是李冶一生的重要转折点，由此开始的就是他将近 50 年的学术生涯。

李冶北渡黄河以后，在山西的忻县、崞县（今山西宁武、原平）之间，过着“饥寒不能自存”的生活。

公元 1233 年正月初一，金哀宗完颜守绪放弃了开封，渡过黄河。

初二，蒙古军队追击完颜守绪于黄河南岸，元帅完颜猪儿、贺都喜战死，建威都卫完颜兀论出投降了蒙古军。

14 日，完颜守绪夜弃六军又渡过黄河，与六七个人逃到归德（今河南商丘县南）。

15 日，诸军知道完颜守绪已经逃跑，遂四处溃散。

23 日，金四面元帅崔立杀留守完颜奴申、完颜习捏阿不，勒兵入见太后，传令召卫王子完颜从恪为梁王，监国。自为太师、军马都元帅，又自称左丞相、都元帅、郑王。又封了一批官员。这时，李冶的好友元好问也在开封，任尚书省掾，被崔立任命为左右司员外郎。然而，崔立却在这天送款于蒙古军前，投降了蒙古。元好问也怀着和李冶一样的心情，弃官出京，到山西避难。

公元 1234 年正月，金哀宗完颜守绪传位于东面元帅完颜承麟，然后自缢于幽兰轩。末帝完颜承麟退保子城（蔡州），听到完颜守绪自缢的消息，率群臣入哭，哭奠未毕，城溃，卫兵将完颜守绪的尸体举火焚烧，完颜承麟也被乱兵所害，金朝终于为蒙古所灭亡，李冶与元好问都感到政事已无可为，于是潜心学问。李冶经过一段时间的颠沛流离之后，定居于崞县的桐川。这时，他已年过 40 了。金朝的灭亡使他不再为官，他虽然生活艰苦，但有充分的时间进行学术研究。他的研究工作涉及数学、文学、历史、天文、哲学、医学。他居住的屋子里，四面墙边堆的都是书，别人都感觉受不了，他住在里面却觉得很舒服。与李冶同时代的砚坚说他，世间的书只要是他看见的，

没有他不研究的，甚至是“薄物细故”，从不遗漏。但是他认为，数学虽然在六艺（礼、乐、射、御、书、数）的最后一位，但是把它放在“人事”中来看，却是最重要的学问，于是他把主要精力用于数学研究。

公元1248年，李冶的代数名著《测圆海镜》12卷写成了。

李冶的数学研究是以天元术为主攻方向的。这时天元术虽已产生，但还不成熟，就像一棵小树一样，需要有人精心培植。李冶就是用自己的辛勤劳动，使它成长为一棵枝叶繁茂的大树。

天元术是一种用数学符号列方程的方法，“立天元一为某某”就是今天的“设x为某某”。

在中国，列方程的思想可追溯到《九章算术》。

《九章算术》约成书于东汉前期。全书共分为9章，其中第8章《方程》，用文字叙述的方法建立了二次方程，但没有明确的未知数概念。

到唐代，王孝通已能列出三次方程。

王孝通（公元6世纪下半叶—7世纪上半叶），出身于平民，少年起开始学习天文、数学，终生研究，直至皓首。入唐，被起用为算学博士、太史丞。撰注《缉古算术》是王孝通的最大贡献。

王孝通的《缉古算术》有4类内容：

第1类：即《缉古算术》的第1问，是天文学中的数学计算问题。

第2类：即第2—6及第8问，是土木工程中的土方问题。

这一类问题，王孝通是根据《九章算术》第5章《商功》中的立体形求体积法，昼思夜想，设计出来的。一方面是根据工根的条件计算其体积及长、宽、高，另一方面要从已知的某一部分体积及某些参数计算其长、宽或高。其问题之复杂超过以往任何算经，如第3问所筑堤防，由一堑与一羨除（隧道）相叠形成，题设达290字。首先要由民工数及每人的工作量计算出堤防的体积，进而由此体积及堤防的下底差、小头的上下底差、两头的高差，小头的上底与高差及堤防长与小头高差求此堤防的两头高、上、下底及长。最后，欲从小头起筑一定土方量的堤防、求此段的长。

第3类问题，即第7及第9—14问，是求各种形状的仓房、地窖或其一段的高（深）、广、径问题。

第4类问题：即第15—20问，是已知勾、股、弦三事二者之积或差，求勾、股、弦问题。

这类勾股问题在中国数学史上是首次提出。

第2、3、4类问题大都归结为一个开带从立方即形如：

$x^3 + Ax^2 + Bx = C$ （A、B、C均为正）的三次方程。有的勾股问题要归结为形如：

$x^4 + Bx^2 = C$ 的四次方程，通过两次开平方解决。

王孝通虽然已能列出三次方程，但他不懂天元术，完全用几何方法推导方程，所以需要高度技巧，不易被一般人掌握。实际上，宋代以前的方程理论一直受几何思维束缚，如常数项只能为正，因为常数通常是表示面积、体积等几何量的；方程次数不高于三次，因为高于三次的方程就难于找到几何解释了。王孝通的四次方程，是通过两次开平方解决的。

经过北宋贾宪、刘益等人的工作，求高次方程正根的问题基本解决了。

贾宪（公元11世纪上半叶），北宋仁宗时任左班殿直，是三班小使臣，属武职。贾宪著书有两种，一为《黄帝九章算经细草》9卷，一为《算法学

文古集》6卷。

贾宪改进了传统的开方法，创造了开方作法本源和增乘开方法，对中国古代数学的算法理论作出了杰出贡献。

贾宪的第一个贡献是提出立成释锁法并创造开方作法本源。求二次及其以上次数方程的正根，中国古代统称开方术。开方在宋元时又称为释锁。

贾宪提出的立成释锁法，如开平方的程序是：

作4行布算，依次是商（根）、实（被开方数或常数项）、方法（一次项系数）、下法（二次项系数，此处是1）。将下法自右向左隔一位移1步，至实的首位而止；以商的第1位得数乘下法，置于方法，以上商乘方法，减实；以2乘方法，退1步为廉，下法退2步，得出减根方程，再如法求第2位得数。

贾宪的方法与现今方法无异。

立成是唐宋时期历算家列的算表。顾名思义，立成释锁法是利用一种算表进行开方。这种算表便是开方作法本源，今称贾宪三角。

在欧洲，贾宪三角被称为帕斯卡三角，是法国数学家帕斯卡在17世纪初创造的，比贾宪晚出600年左右。

### 三、《测圆海镜》

贾宪三角是将整次幂二项式系数

$$(a+b)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

自上而下排成一个三角形。

贾宪三角下面有五句话，前三句“左袞乃积数，右袞乃偶算，中藏者皆廉”说明了它的结构，即积、偶、廉的位置；后二句“以廉乘商方，命实而除之”，提示了积、偶、廉在立成释锁法中的应用。

显然，利用贾宪三角，当时人们已经把开方术从这之前只能开二次、三次方推广到开任意高次方。

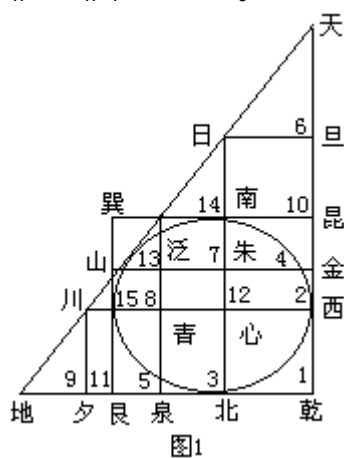
随着数学问题的日益复杂，迫切需要一种一般的、能建立任意次方程的方法，天元术便应运而生了。但在李冶之前，天元术还比较幼稚，记号混乱，演算烦琐。

李冶致力于创造一种简便的、适于各种问题的列方程方法。他认识到，只有摆脱几何思维束缚，建立一套不依赖于具体问题的固定程序，才能实现上述目的。

李冶总结出的列方程程序是：

首先立天元一，这相当于设  $x$  为未知数；然后寻找两个等值的而且至少有一个含天元的多项式；最后把两个等值多项式联为方程，通过“相消”化成标准形式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$



李冶的《测圆海镜》便是天元术的代表作。

《测圆海镜》把勾股容圆（切圆）问题作为一个系统来研究，讨论了在各种条件下用天元术求圆径的问题。

卷一的圆城图式是全书出发点，书中 170 题都和这一图式有关。

卷一的另一部分“识别杂记”阐明了各勾股形边长之间的关系及其与圆径的关系。

识别杂记共 600 余条，每条可看作一个定理（或公式），其中最重要的是下面 10 个圆径公式（ $D$  表直径， $r$  表半径， $a, b, c$  表勾、股、弦）



$$(1) \frac{1}{2}D^2 = a_{11} \times b_{10} ,$$

$$(2) \frac{1}{2}D^2 = a_{10} \times b_{11} ,$$

$$(3) \frac{1}{2}D^2 = a_{13} \times b_1 ,$$

$$(4) \frac{1}{2}D^2 = b_{13} \times a_1 ,$$

$$(5) r^2 = b_2 \times b_{15} ,$$

$$(6) r^2 = a_{14} \times a_3 ,$$

$$(7) D^2 = b_4 \times D_5 ,$$

$$(8) r^2 = b_7 \times a_8 ,$$

$$(9) r^2 = (c_{14} + b_{14})(c_{15} + a_{15}) ,$$

$$(10) r^2(c_{14} + a_{14})(c_{15} + b_{15}) .$$

卷二及以后各卷都是算题。譬如：卷四第六问：或问乙出东门，南行不知步数而立。甲出北门，东行二百步望见乙（已知  $a_3=200$ ），复就乙斜行一百七十步与乙相会（ $c_{11}=170$ ）。问答同前（求  $D$ ）。

草曰：识别得二行相减，余 30 步，即乙出东门南行步也（由识别杂记， $b_{15}=a_3-c_{11}=30$ ）。立天元一为半城径（设半城径为  $x$ ）。加乙南行，得为小股  $\boxed{\frac{1\text{元}}{30}}$ （ $b_{11}=x+b_{15}=x+30$ ）。副置甲东行步，上位减天元（ $a_{11}=a_3-x$ ），得下式  $\boxed{\frac{1\text{元}}{1100}}$ ，为小勾（ $=200-x$ ）。下位加天元（ $a_1=a_3+x$ ），得  $\boxed{\frac{1\text{元}}{1100}}$ ，为大勾也（ $=200+x$ ）。乃置大勾（因为  $1, 11$ ），以小股乘之，得下式  $\boxed{\frac{11=0\text{元}}{10000}}$ ，合以小勾除（所以

$$b_1 = \frac{a_1 \times b_{11}}{a_{11}} , \text{ 不受除, 便以此为大股 [内带小勾分母] } (= \frac{x^2 + 230x + 6000}{200 - x}$$

)。又倍天元，以小勾乘之，得  $\boxed{\frac{11}{1111000\text{元}}}$ （ $=2b_{10}=2[b_1-2x]$ ），以减于大股，

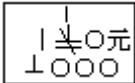
$$\text{得 } \boxed{\frac{11}{10000\text{元}}} (=$$

$$\frac{2\{[x^2 + 230x + 6000 - 2x(200 - x)]\}}{200 - x} ) , \text{ 又倍之, 得}$$

$$\boxed{\frac{11}{10000\text{元}}} , \text{ 为两个股圆差 } (= \frac{6x^2 - 340x + 12000}{200 - x}) . \text{ 合以勾圆差乘之, 缘}$$

为其中已带小勾分母，便不须乘（因为  $\frac{1}{2}D^2 = b_{10} \times a_{11}$ ），便以此为黄方（即圆径）幂，寄左（所以  $D^2 = 2b_{10} \times a_{11} = 6x^2 - 340x + 12000$ ）。然后倍天元，

以自之，为同数（又因为  $D^2 = [2X]^2 = 4x^2$ ），与左相消，得  $\boxed{\frac{11}{10000\text{元}}}$ （移项，

合并同类项，得  $2x^2 - 340x + 12000 = 0$ 。上下俱半之，得  (化简，得  $x^2 - 170x + 6000 = 0$ )。以平方开之，得一百二十步(解方程，得  $x = 120$ )。倍之即圆径也，合问(所以  $D = 2 \times 120 = 240$ )。

李冶由于摆脱了几何思维束缚，在方程理论上取得了四项进展：

第一，改变了传统的把实(常数项)看作正数的观念，常数项可正可负，而不再拘泥于它的几何意义。例如：卷六第四问所得方程为

$$-x^2 - 72x + 23040 = 0,$$

第七问所得方程为

$$-x^2 + 640x - 96000 = 0,$$

两题常数项的符号恰好相反。实际上，《测圆海镜》中方程各项的符号均无限制，这是代数学的一个进步。

第二，李冶已能利用天元术熟练地列出高次方程。书中 170 题，有 19 题列出三次方程，13 题列出四次方程，还有一题列出六次方程。在这里，未知数已具有纯代数意义，二次方并非代表面积，三次方程也并非代表体积。

第三，李冶完整解决了分式方程问题，他已懂得用方程两边同乘一个整式的方法化分式方程为整式方程。



第四，李冶已懂得用纯代数方法降低方程次数。当方程各项含有公因子  $x^n$  ( $n$  为正整数) 时，李冶便令次数最低的项为实，其他各项均降低这一次数。这一作法相当于用  $x^n$  去除方程各项。

李冶在《测圆海镜》中，采用了从 0 至 9 的完整数码。除 0 以外的 9 个数码古已有之，是筹式的反映。但筹式中遇 0 空位，没有符号 0。李冶《测圆海镜》与秦九韶《数书九章》是最早使用 0 的两本算书。

秦九韶(1202—1261)，字道古，普州安岳(今四川安岳)人。公元 1247 年 9 月，完成数学名著《数书九章》。

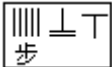
李冶的《测圆海镜》比秦九韶的《数书九章》成书的时间相差不过一年。

李冶还发明了负号和一套相当简明的小数记法。

李冶的负号与现在不同。是画在数字上的一条斜线，通常画在最后一位有效数字上，如 -175 记作 , -360 记作 

在国外，德国人于 15 世纪才首先引入负号。

在李冶之前，小数记法离不开数名，如 7.59875 尺记作七尺五寸九分八厘七毫五丝。

李冶则取消数名，完全用数码表示小数，纯小数于个处写 0，带小数于个位数下写步，如 0.25 记作  $= ||||$ ，5.76 记作  这种记法在当时算是最先进的。

西方在 16 世纪，小数记法还很笨拙。例如比利时数学家 S 斯蒂文在 1585 年发表的著作中，把每位小数都写上位数，加上圆圈，如 27.847 写作 27<sup>①</sup>847。这种记法显然不如李冶的记法简便。直到 17 世纪，英国数学家 J 纳普尔(1550—1617)发明小数点后，小数才有了更好的记法。

李冶由于掌握了一套完整的数字符号及性质符号，他的方程已能用符号表示，从而改变了用文字描述方程的旧面貌。但这时仍缺少运算符号，尤其是缺少等号。这样的代数，可称为“半符号代数”，它是近代符号代数的前

身。大约 300 年后，类似的半符号代数也在欧洲产生了。

《测圆海镜》不仅是我国现存最早的一部天元术著作，而且在体例上也有创新。全书本上是一个演绎体系，卷一包含了解题所需的定义、定理、公式，后面各卷问题的解法均可在此基础上以天元术的方法推导出来。李冶以前的算术，一般采取问题集的形式，各章（卷）内容大体上平列。李冶以演绎法著书，这是中国数学史上的一个进步。

#### 四、会见忽必烈

李冶《测圆海镜》的成书标志着天元术成熟，对后世具有深远的影响。

元代的王恂（1235—1281）、郭守敬（1231—1316），在编《授时历》的过程中，曾用天元术求周天弧度。不久，沙克什用天元术解决水利工程中的问题，收到了良好效果。

元代数学家朱世杰（公元13—14世纪）说：

“以天元演之，明源活法，省功数倍。”

清代阮元（1764—1849）说：

“立天元者，自古算家之秘术；而海镜者，中土数学之宝书也。”

李冶写成《测圆海镜》以后，到太原住了一个时期，藩府官员曾请他出仕，但他谢绝了。后来，他又流落到平定。平定侯聂珪很尊重他，把他接到自己的帅府来住。他却“私心眷眷于旧游之地”，怀念着少年求学时的元氏。

公元1251年，李冶的经济情况已经好转，他终于结束了在山西的避难生活，回元氏定居。他在封龙山下买了一点田产，以维持生活，并开始收徒讲学，从事数学教育活动。

李冶的学生越来越多，家里逐渐容纳不下了，于是师生共同努力，在北宋李昉（925—996）读书堂故基上建起了封龙书院。

李冶在书院不仅讲数学，也讲文学和其他知识。他呕心沥血，培养出大批人才，并常在工作之余与好友元好问、张德辉（山西交城人）一起游封龙山，被人们称“龙山三老”。

在蒙古军队攻金过程中，中原地区的社会经济遭到严重破坏。由于害怕被占领地区人民的反抗，蒙古军每攻下一处，都实行残酷的屠杀，使大量人民丧失了生命。如攻占保州（今河北保定）、密州（今山东诸城）、卫州（今河南汲县）时，除工匠留下不杀外，其他人都一律杀死。此外，还大量掠夺“驱口”，即奴隶。“掠者私其主”，实行谁掠夺来归谁有的政策。大军所过，麦苗被践踏，耕牛被掠走，堤堰被捣毁。因为不知道农业生产的重要性，有的人甚至主张尽杀汉人，改农田为牧场。如别迭等人就曾提出：“汉人无补于国，可悉空其人以为牧地。”

蒙古军的上述暴行理所当然地激起了中原人民的反抗斗争，即所谓“河朔盗起”，“河北群雄如牛毛”。有的起义军多达10万余人。在人民斗争的打击下，蒙古贵族内部发生了分化，出现了主张依然如故的守旧派和要求改变统治方式的革新派。蒙古族杰出的统治者忽必烈即属于后者。

忽必烈建元以前，蒙古汗国的政治中心一直在蒙古草原上的哈喇和林。燕京被成吉思汗攻克以后，蒙古统治者把它当成控制华北、中原的重要据点。蒙哥汗在位时，一方面派自己的亲信来燕京充当断事官，控制燕京。另一方面又委任自己的兄弟忽必烈（拖雷四子）去管理“漠南汉地军国庶事”，实质上在华北、中原地区形成了两个互相控制的政治集团。忽必烈受命管理汉地之事以后，把自己的营帐选在草原和汉地接壤的开平（今内蒙古正蓝旗东），既能与哈喇和林联系，又能控制漠南汉地。他把开平作为他的基地，为夺取政权积极准备人才。

公元1257年，忽必烈召见金朝遗老窦默（理学家）、姚枢（理学家）、李俊民等多人，又派董文用（金朝降将董俊之子），专程去请李冶，忽必烈说：“素闻仁卿学优才瞻，潜德不耀，久欲一见，请勿他辞。”

这年五月，李冶在开平会见了忽必烈。下面是忽必烈和李冶的问答：

问：河南（金）居官者孰贤？

答：险夷一节，唯完颜仲德（金宰相，蒙古军破蔡州，赴水殉国）。

问：完颜合答（金元帅左监军）及蒲瓦（移刺蒲阿，契丹人，金权枢密副使，与完颜合答均败于三峰山，被杀）何如？

答：二人将略短少，任之不疑，此金所以亡也。

问：魏征（唐太宗时谏臣）、曹彬（北宋太祖时忠武军节度使，伐南唐）何如？

答：征忠言谏论，知无不言，以唐谏臣观之，征为第一。彬伐江南，未尝妄杀一人，拟之方叔（周宣王卿士，北伐玁狁，南征荆楚，有功于周）、召虎（周宣王时的召穆公，出征淮夷）可也。汉之韩（韩信）、彭（彭越）、卫（卫青）、霍（霍去病），在所不论。

问：今之臣有如魏征者乎？

答：今以侧媚成风，欲求魏征之贤，实难其人。

问：今之人材贤否？

答：天下未尝乏材，求则得之，舍则失之，理势然耳。今儒生有如魏璠（金尚书令史）、王鄂（金一甲一名状元）、李献卿（金进士，以文学著名）……辈，皆有用之材，又皆贤王所尝聘问者，举而用之，何所不可，但恐用之不尽耳。然四海之广，岂止此数子哉。王诚能旁求于外，将见集于明廷矣。

问：天下当何以治之？

答：夫治天下，难则难于登天，易则易于反掌。盖有法度则治，控名责实则治，进君子退小人则治，如是而治天下，岂不易于反掌乎。无法度则乱，有名无实则乱，进小人退君子则乱，如是而治天下，岂不难于登天乎。且为治之道，不过立法度，正纪纲而已。纪纲者，上下相维持；法度者，赏罚示惩劝。今则大官小吏，下至编氓，皆自纵恣，以私害公，是无法度也，有功者未必得赏，有罚者未必被罚，甚则有功者或反受辱，有罪者或反获宠，是无法度也。法度废，纪纲坏，天下不变乱，已为幸矣。

问：昨地震何如？

答：天裂为阳不足，地震为阴有余。夫地道，阴也，阴太盛，则变常，今之地震，或奸邪在侧，或女谒盛行，惑谗慝交至，或刑罚失中，或征伐骤举，五者必有一于此矣。夫天之爱君，如爱其子，故示此以警之耳。苟能辨奸邪，去女谒，屏谗慝，省刑罚，慎征伐，上当天心，下协人意，则可转咎为休矣。

在忽必烈和李冶的问答中，李冶所答表明了他在三类问题上的态度：

第一，李冶的人才观：

“天下未尝乏材，求则得之，舍则失之，理势然耳”。

第二，李冶的政治见解：

“为治之道，不过立法度，正纪纲而已。纪纲者，上下相维持；法度者，赏罚示惩劝”。

第三，李冶的政治建议：

“辨奸邪、去女谒、屏谗慝、减刑罚、慎征伐”。

李冶的这五条建议，虽然是他根据董仲舒的“天人感应”学说推导出来的，在今人看来有些滑稽，但在当时的历史条件下，用这种学说比较容易打动忽必烈这种向往汉化的蒙古族统治者，所以得到了忽必烈的赞赏。

李冶在会见忽必烈之后，又回到了封龙山继续讲学著书。

李冶的《测圆海镜》无疑是当时世界上第一流的数学著作，但内容比较深，粗知数学的人看不懂，而且由于理学思想的影响，数学不受重视，所以天元术的传播速度较慢。

李冶深刻认识到天元术的重要性，于是便在封龙山教学的同时，着手写一部普及天元术的著作。

## 五、《益古演段》

北宋数学家蒋周写过一本《益古集》，内容多为二次方程，列方程的方法则是几何方法。

李冶读过蒋周的《益古集》，并用天元术对这本书进行了研究。

公元 1259 年，李冶的另一本数学著作——《益古演段》写成了。

《益古演段》全书共 3 卷，64 题，处理的主要是平面图形的面积问题，所求多为圆径、方边、周长之类。除四道题是一次方程外，全是二次方程问题，内容安排基本上是从易到难。从这个角度来分析，《益古演段》这本书，可能是李冶在教学过程中为学生所写的教材。

李冶在完成了《测圆海镜》之后再写《益古演段》，他对天元术的运用自然会更加熟练，但是他在这本书中却没有像他在《测圆海镜》中那样，完全用天元术来解题。书中新旧二术并用，新术是李冶的代数方法——天元术；旧术仍然是蒋周的几何方法——条段法。条段法是一种图解的方法，因为方程各项常用一段一段的条形面积表示，所以得名为条段法。这本书揭示了天元术和条段法的联系和区别，对我们了解条段法向天元术的过渡，探讨数学发展规律有重要的意义。书中常用人们易懂的几何方法对天元术进行验证，这对于人们接受天元术是有好处的。这本书还图文并茂，深入浅出，不仅有利于教学，也便于自学。

砚坚为李冶的《益古演段》作了《序》，他在《序》中称赞这本书说：“说之详，非若溟滓黯淡之不可晓；析之明，非若浅近粗俗之无足观”。

这些特点，使《益古演段》成为一本受人们欢迎的数学教材，对天元术的传播起了不小的作用。

李冶的《益古演段》在数学理论上也有创新。该书的问题同《测圆海镜》有所不同，所求的量不是一个而是两个、三个甚至四个。按照古代的方程理论“二物者再程，三物者三程，皆如物数程之。”应该用方程组来解，所含方程的个数与所求的个数是一致的。但是解二次方程组显然要比解一元方程困难得多。

李冶既然已经完善了天元术的程序，便力图提高他的一般化程度，用以解决各种多元问题。他的主要方法是利用出入相补的原理（按照吴文俊的解释，出入相补原理就是：“一个平面图形从一处移置他处，面积不变。又若把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积的和差有简单的相等关系”。）及等量关系来减少未知数，化多元为一元，找到关键的天元一。一旦这个天元一求出来，其他要求的量就可根据与天元一的关系，很容易求出了。

例如第三十五问：

“今有圆田一段，中心有直池水占之，外计地 5760 步。只云从外田东南楞至内池西北角，通斜 113 步，其内池阔不及长 34 步。问三事（指池长、池阔及圆径）各多少？”

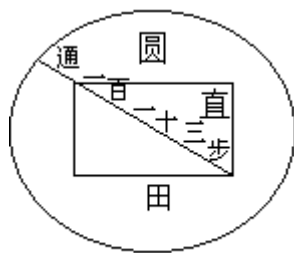


图2

这道题要求池长、池阔及圆径这三个数，如果用方程组去解，需要列出三个方程，一个可能的列法是：

设圆径为  $x$ ，直池长为  $Y$ ，阔为  $Z$ ，则

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x^2 - y^2 = 5760, & (\text{圆面积} = \frac{3}{4}[\text{直径}]^2) \\ \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{2} = 113 \\ z + 34 = y \end{cases}$$

但李冶却设法避免了联立方程。

依本题法，设角斜为  $x$ ，则圆径= $x+113$ ，

四圆径= $3(x+113)^2=3x^2+678x+38307$ ，

所以四池积=四圆积-  $4 \times 5760$ ，

$$= 3x^2 + 678x + 15267, \quad (1)$$

因为池斜= $113 - x$

所以二池斜积= $(113 - x)^2 - 34^2$ ，(2)

$$= x^2 - 226x + 11613,$$

所以四池积= $2x^2 - 452x + 23226$  (3)

由(1)、(3)消得

$$x^2 + 1130x - 7959 = 0$$

题中(2)式所用二积一较幂公式  $2ab + (a - b)^2 = a^2 + b^2$  便体现了出入相补原理。这从李冶的条段图中可以看得很清楚，如图3，四勾股形全等，每个勾股形勾  $b$  股  $a$  弦  $c$ 。

求出角斜后，易求圆径。从圆积减去外计地，得池积，由长方形面积公式便可求出池长、池阔了。这种方法显然比解三元方程组简便。



图3

另外，李冶还在列方程时首创了设辅助未知数的方法。例如：第四十问中得到方程

$$-22.5x^2 - 648x + 23002 = 0$$

后，李冶为了使最高项系数的绝对值变为1，便作如下变形



设  $y = 22.5x$ ，则上式变为

$$-y^2 - 648y + 517545 = 0$$

开方，得

$$y = 465$$

所以

$$x = 20\frac{2}{3}$$

李冶称这种设辅助未知数的方法为连枝同体术。顾名思义，他是把辅助未知数看作与原方程连为一体的一个分枝。这种方法在代数学史上是有意义的，因为它提供了方程变形的一个有力工具。

此题的另一种解法是首先“立天元一为三个内池径”，这相当于设  $y=3x$ 。

李冶称此法为之分术，实际也是一种设辅助未知数的方法，也能起到简化方程的作用。依法演算，得

$$-2.5y^2 - 216y + 23002 = 0$$

两种方法的区别在于：之分术把设辅助未知数的步骤放于题首，而连枝同体术把这一步骤用于方程变形。

《益古演段》的成书，为天元术的应用开辟了更为广阔的道路。砚坚就称赞此书说：“颇晓十百，披而览之，如登坦途，前无滞碍。旁溪曲径，自可纵横而通，……真学者之指南也。”

《益古演段》是普及天元术的杰作，和天元术的代表作《测圆海镜》相辅相成，互为表理，反映了作者既努力提高数学的一般化程度，又注意发挥其社会效益的追求。

忽必烈在开平，广招天下贤人，很快集中了姚枢、海云、刘秉忠(僧人)、张德辉、元好问等地主阶级知识分子，这些人成了他的幕僚和积极推行“汉法”的重要决策人。可惜文学家元好问在不久就不幸去世了。

蒙古在灭金以后，从 1235 年起，就开始进攻南宋，其中一个重要战场就是四川。1242 年，南宋以余阶守蜀。余阶到任后，筑招贤馆，“士之至者随才而任”。当时有播州(今贵州遵义)人冉璉、冉璞兄弟来，余阶敬之如上宾，并用二人之计，筑青居、大获、钓鱼、云顶、天生等十余城，“皆因山为垒，棋布星分，为诸郡治所。……于是如臂使指，气势联络，屯兵聚粮，为必守之计。”余阶本人虽于 1253 年去世，但他这些措施为以后合州保卫战打下了基础。

李冶会见忽必烈以后，忽必烈并没有停止他的征伐。

## 六、“世道相违，则君子隐而不仕”

蒙古大军攻南宋四川不下，就派兵绕道先攻下云南，在云南设置了郡县。又从云南进攻安南（今越南），安南王陈日煚败走海上，请降。

公元1258年2月，蒙古大举侵宋。蒙哥汗自率一军入蜀，而命忽必烈攻鄂州（今湖北武昌），兀良合台的云南之师自交广北上攻潭州（今湖南长沙），三路并举。四川一路，南宋军望风败降，只合州守将王坚坚守不降，并杀死了蒙哥汗派去的招降使者。同时，蒙古军还攻破了南宋的海州（今江苏连云港市西南海州镇）、涟水。另外，蒙古旭烈兀西征，平十余国，留在了西方，建立了伊尔汗国。

公元1259年2月，蒙古大军包围了合州。合州军民英勇抗击蒙古大军。

7月，蒙哥汗为流矢所中，死于合州城下，合州之围遂解。

8月，忽必烈督师至鄂州。

9月，忽必烈渡过长江，包围了鄂州城。另派军攻入了临江（今江西清江县西临江镇）、瑞州（今江西高安县）。

11月，蒙古云南军攻入宋广西，长驱至潭州。这时，宋帅贾似道奉命请和于蒙古，请求划江为界。

忽必烈这时已经得知了蒙哥汗的死讯，急于北归争夺汗位，遂答应了贾似道的请求。

公元1260年3月，忽必烈在开平称大汗。

4月，蒙哥汗的弟弟阿里不哥在和林称大汗。

7月，忽必烈讨伐阿里不哥，蒙古内战爆发。

公元1261年7月，忽必烈在开平建翰林国史院，聘请李冶担任清高而重要的工作——翰林学士知制诰同修国史。

这时，忽必烈正在逐步实行经济、政治改革。

经济方面：忽必烈改变了过去把农田变作牧场和掠夺人口为驱口的作法，转而保护封建土地所有制，发展农业生产。他下令把许多牧场重新还作农田，用租佃的方式招募农民耕种；有些则退给了农民。还下令禁止掠人为奴，并把一些掠夺来的驱口释放为良民，从而增加了农业生产力。他还设立了司农司、营田司等机构，专门负责农业生产和兴修水利。这样，经过与汉族地区先进农业经济的长期接触，蒙古统治者终于放弃了在汉族地区推行其落后的游牧经济和剥削方式的企图，开始大力扶持汉族地主，重视农业生产，其自身也逐渐转化为封建大地主。

政治方面：忽必烈在政治上反对封建割据势力，加强了中央集权。蒙古族统治者在初入中原地区时，对贵族进行了分封。这些贵族在封地内拥有对其人民的统治权，可自置官吏，自断刑狱，自征赋税，完全是独立王国。忽必烈逐渐改变了这种作法。他将封地改为赐田，使原来拥有封地的贵族成了一般地主，大大削弱了其政治权势，从而使中央集权得到加强。当初蒙古人进到中原，当地有些豪强地主投靠了蒙古人，受到信任。这些人拥有武装，其地位子孙世袭，也是一种威胁中央集权的地方割据势力。忽必烈时期，他们的兵权被解除了。

由于忽必烈重用汉族地主阶级知识分子，实行经济改革和政治改革，李冶本可和其他汉族地主阶级知识分子一样，到忽必烈那里去做官，以实现自己在政治上的抱负，然而，李冶却以老病为辞，婉言谢绝了。

李冶谢绝到朝廷任职的原因有两个：

第一：忽必烈和其他蒙古统治者没有接受李冶“慎征伐”的政治建议，而是大举攻宋，从而引起他的不满；

第二：蒙古爆发了内战，李冶不愿在这种动荡的政治局势下做官。正像他自己所说的那样：“世道相违，则君子隐而不仕。”

蒙古忽必烈与阿里不哥的内战爆发后，一开始，忽必烈的秦蜀行省军就在甘州击败了阿里不哥军，忽必烈又自率军大破阿里不哥。

公元1264年，阿里不哥等投降了忽必烈。忽必烈也打败了其他反对他的人。改革派战胜了守旧派，为蒙古族从奴隶制进到封建制创造了条件。

这一年，忽必烈下诏将燕京（今北京）改名中都，府名仍为大兴。

忽必烈降服阿里不哥、平定蒙古内战后，再招李冶为翰林学士知制诰同修国史。

公元1265年，李冶来到中都，勉强就职，参加修史工作。但他不久便感到翰林院里思想不自由，处处都要秉承统治者的旨意而不能畅所欲言。因此，他在这里工作一年以后便以老病为由辞职了。

李冶是个追求思想自由的人，尤其不愿在学术上唯命是从。按他自己的话来说，就是：“翰林视草，唯天子命之；史馆秉笔，以宰相监之。特书佐之流，有司之事，非作者自专而非非是是也。今者犹以翰林、史馆为高选，是工谀誉而善缘饰者为高选也。吾恐识者羞之。”

李冶辞职后一直在封龙山下讲学著书。他在晚年完成的《敬斋古今藪（tǔ）》与《泛说》是两部内容丰富的著作。

《泛说》一书今已不存，是一本随感录。

《敬斋古今藪》八卷。按经、史、集，依类分辑，各为二卷。书名取《淮南子·主术》“藪纆塞耳”《注》义，示“不欲其妄闻”之意。是一本读书笔记，“上下千古，博极群书，”在文史方面颇有独到的见解。特别是于诸史讹误之处，多有订正。原书也已失传，今本从《永乐大典》中辑出。另外，李冶作过不少诗，其中有5首保存在《元诗选癸集》中。从这些诗来看，李冶的文学造诣相当深。

李冶还著有《文集》40卷与《壁书丛削》12卷，均已失传。

纵观李冶一生，不管是在为人上还是在学术上，都不愧为一代楷模。他在任钧州知事期间，为官清廉、正直，亲自掌管出纳，一丝不苟。据载，钧州城的出纳“无规撮之误”。在当时动乱的环境中，像李冶这样的清官确实是难能可贵的。

李冶在《敬斋古今藪》中说：“好人难做须著力”，又说：“著力处政是圣贤阶级”，这正是他为人做官的写照。他同情人民，面对蒙古军队的屠杀和抢掠，不仅在诗文中表示了极大的愤慨，而且在会见忽必烈时，力劝蒙古统治者“慎征伐”。他一生热爱科学，追求自由，决不忍辱求名。在学术上不迷信名家，敢于突破传统观念的束缚。他虽是通儒出身，但当他认识到数学的重要性时，便专攻数学，这种行动本身就是对传统儒学的批判，因为在儒家看来，数学“可以兼明，不可以专业”。

当时的新儒学是程朱理学。

程朱理学是指以二程（程颢、程颐）和朱熹为代表的客观唯心主义哲学。朱熹是这一派的集大成者。

朱熹，字元晦，号晦菴，徽州婺源（今江西婺源）人，生于1130年，

卒于 1200 年，官至秘阁修撰，政治上属于南宋政府中的抗金派。他学识渊博，著述很多。有《四书集注》等；后人辑录的《朱子语录》也是他的重要哲学著作。

朱熹继承了北宋哲学家程颢、程颐的思想，进一步完善和发展了客观唯心主义的理学体系。

程朱理学把研究科技看作是“玩物丧志”，把数学说成是“九九贱技”。李冶毫不客气地批评了这些错误观点，指出在朱熹的著述中“窒碍之处亦不可以毛举也”。

## 七、李冶之死

李冶的思想受道家影响较深。

道家崇尚自然，如庄子曾经说过：“道者，万物之所由也。……道之所在，圣人尊之”。

庄子的这种思想无疑是有利于把人们的眼光引向自然科学的，甚至老、庄的自然观还能成为李冶抵制唯心主义理学的思想武器，譬如他说：“由技兼于事者言之，夷（黄帝臣名）、夔（舜臣名）之乐，亦不免为一技；由技进乎道者言之，石（古工匠名）之斤，扁（古工匠名）之轮，非圣人之所与乎？”

李冶这段话的意思是：从技艺用于实际来说，圣人所作的礼和乐也可以看作是一种技艺；从技艺中包含有自然规律（即“道”）来说，工匠使用的工具也是圣人所赞赏的。从李冶的这段话再联系庄子上述的说法，他受庄子思想的影响是一目了然的。很明显，他的真实想法是认为数学这种技艺也是“道之所在”，也应该受到尊重。

李冶还认为，数虽然奥妙无穷，却是可以认识的，他说：

“谓数为难穷，斯可；谓数为不可穷，斯不可。何则？彼其冥冥之中，固有昭昭者存。夫昭昭者，其自然之数也。非自然之数，其自然之理也”。

李冶的这种思想，也可以从老、庄学说找到渊源。如庄子说：“夫昭昭生于冥冥，有伦生于无形。”

老子说：“人法地，地法天，天法道，道法自然”，“道之尊，德之贵，夫莫之命而常自然”。

李冶正是由于对自然的深刻理解，才能进一步指出：“数一出于自然，吾欲以力强穷之，使隶首复生，亦未如之何也已。苟能推自然之理，以明自然之数，则虽远而乾端坤倪，幽而神情鬼状，未有不合者矣。”

李冶不仅有比较先进的哲学思想，而且能在极为艰苦的条件下进行顽强的科学研究。他在桐川著书时，居室十分狭小，甚至常常不得温饱，要为衣食而奔波。他却以著书为乐，从不间断自己的工作。

李冶有一个学生叫焦养直，后来做到集贤大学士，他回忆他的老师说：“虽饥寒不能自存，亦不恤也”，在“流离顿挫”中“亦未尝一日废其业”，“手不停披，口不绝诵，如是者几五十年”。另外，他还善于去粗取精，批判地接受前人知识，正如他自己所说的那样：“学有三，积之之多不若取之之精，取之之精不若得之之深。”

李冶这些优良品质，都是他在学术上取得杰出成就的重要原因。

李冶所处的封建社会中，数学不受重视，但是他却执着地追求真理，他在《测圆海镜》序中说：“览吾之编，察吾苦心，其悯我者当百数，其笑我者当千数。乃若吾之所得则自得焉耳，宁复为人悯笑计哉？”

李冶不仅学术精深，而且致力于传徒授业，对学生循循善诱。

公元 1279 年，李冶卒于河北元氏，享年 88 岁，谥号为文正。

后人盛赞李冶：“导掖其秀民，仁之者也。其徒卒昌于时，孰不曰文正公所作成也。”

李冶以自己的毕生心血，在中国科学史上写下了光荣的一页，被人们深深怀念着。

焦养直，就是“其徒卒昌于时”中的一个。

焦养直字无咎，东昌堂邑（今山东聊城市西北）人，李冶的学生，素以才器见称。

公元1281年，元世祖把符宝郎改为典瑞监，想找一个有学问的儒生担任这个职务。有个近臣向元世祖推荐了焦养直，元世祖即命令马上召见，召见以后，元世祖觉得很满意，就以焦养直的原官真定路（今河北正定）儒学教授超拜为典瑞少监。

公元1287年，焦养直跟从元世祖征讨乃颜部。

公元1291年，元世祖赐给焦养直宅一区。让焦养直到他的内室入侍。焦养直向元世祖陈说古代帝王的统治，元世祖听了，经常把疲倦都忘了。焦养直曾经向元世祖讲到汉高祖刘邦，以平常百姓起家，讲述刘邦的旧闻，分析得头头是道，元世祖采纳了他的建议，从此也不再看不起汉高祖了。

公元1297年，元成宗铁穆耳到柳林（在今北京市通县南，是元帝游畋的所在，建有行宫），命焦养直向他进讲《资治通鉴》。焦养直借这个机会向元成宗讲述规谏之言，元成宗下诏赐给他御酒和钞（纸币）17500贯。

公元1298年，元成宗又赐给焦养直金带，象笏（象牙做的“笔记牌”）。

公元1299年，焦养直升为集贤侍讲学士，元成宗还赐给他通犀带。

公元1303年，元成宗下诏要焦养直到东宫做太子的老师，由于焦养直能够尽心尽力地启发教育太子，元成宗知道后，非常高兴。

公元1304年，焦养直代元成宗到南海祭祀。

公元1305年，焦养直又被进为集贤学士。

公元1307年，焦养直被升为太子谕德。

公元1308年，焦养直被授为集贤大学士，可以参与国家大政的谋议。告老回乡后去世，赠资德大夫、河南等处行中书省右丞荣衔，谥为文清。

李冶死后不久，天元术理论便经过二元术、三元术，迅速发展为朱世杰的四元术，李冶天元术这棵参天大树，在第二代数学家们的培育下，结出了四元术的累累硕果。

从二元术、三元术到朱世杰的四元术，其间的发展线索，我们从祖颐为朱世杰《四元玉鉴》所写的《后序》里，可以窥见一斑，祖颐说：“平阳（今山西临汾市）李德载因撰《两仪群英集臻》兼有地元，霍山（在今山西霍县东南）邢先生颂不高弟刘大鉴润夫撰《乾坤括囊》未仅有人元二问。吾友燕山朱汉卿先生演数有年，探三才之颐，索《九章》之隐，按天地人物成立四元……。”

朱世杰，字汉卿，号松庭，生活于公元13—14世纪，北京附近人，是元代著名数学家。

朱世杰的青少年时代，大约相当于蒙古军灭金之后。

上面所述的这段祖颐的序文，叙述了朱世杰学术上的师承关系。毫无疑问，他较好地继承了当时北方数学的主要成就。当时的北方，正处于天元术逐渐发展成为二元、三元术的重要时期，正是朱世杰把这一代成就拓展为四元术。

朱世杰除继承和发展了北方的数学成就之外，还吸收了当时南方的数学成就——各种日用、商用数学和口诀、歌诀等。

在祖颐的《四元玉鉴后序》中有这样的话：“汉卿……周流四方，复游广陵（今江苏扬州市），踵门而学者云集”。

在莫若的序中也有：“燕山松庭朱生以数学名家周游湖海二十余年矣”。

从这两段话中我们分析，本来，在元灭南宋之前，南北之间的数学交流是比较少的。朱世杰“周流四方，复游广陵”，应是在 1276 年元军对南宋的大规模军事行动结束之后。朱世杰在经过长期游学、讲学之后，终于在 1299 年和 1303 年在扬州刊刻了他的两部数学著作——《算学启蒙》和《四元玉鉴》。

## 八、天元术的硕果

清代数学家罗士琳（1774—1853）在他的《畴人传·续编·朱世杰条》中评论朱世杰的数学成就时说：

“汉卿在宋元间，与秦道古（九韶）、李仁卿（冶）可称鼎足而三。道古正负开方，仁卿天元如积，皆足上下千古，汉卿又兼包众有，充类尽量，神而明之，尤超越乎秦李之上”。

清代另一位数学家王鉴在他的《算学启蒙述义·自序》中也说：“朱松庭先生兼秦李之所长，成一家之著作”。

由上述二人的这两条评论来看，朱世杰可以被看作是中国宋元时期数学发展的总结性人物，是宋元数学的代表，是中国以筹算为主要计算工具的古代数学发展的顶峰。

《四元玉鉴》可以说是朱世杰阐述自己多年研究成果的一部力著，全书共分3卷，24门，288问。书中所有问题都与求解方程或求解方程组有关，其中：

四元的问题（需设立四个未知数者）有7问（“四象朝元”6问，“假令四草”1问）；

三元的13问（“三才变通”11问，“或问歌象”和“假令四草”各1问）；

二元的36问（“两仪合辙”12问，“左右逢元”21问，“或问歌象”2问，“假令四草”1问）”。

一元的232问（其余各问都是一元）。

可见，四元术——多元高次方程组的解法是《四元玉鉴》的主要内容，也是全书的主要成就。

《四元玉鉴》中的另一项突出的成就是关于高阶等差级数的求和问题。在此基础上，朱世杰还进一步解决了高次差的招差法问题。

《四元玉鉴》一书的流传曾几经波折。这部1303年初版的著作，在15和16两个世纪都还可以找到它流传的线索。

第一：吴敬所著《九章算法比类大全》（1405年）中的一些算题，和《四元玉鉴》中的完全相同或部分相同。

第二：顾应祥在他所著的《孤矢算术》序言（1552年）中写道。“孤矢一术，古今算法载者绝少……《四元玉鉴》所载数条”。

第三：周述学所著《神道大编历宗算会》卷三之首曾引用了《四元玉鉴》书首的各种图式，书中有些算题也与《四元玉鉴》相同，卷十四作为“算会圣贤”列有“松庭《四元玉鉴》”。可见顾应祥、周述学二人都曾读到过《四元玉鉴》。

第四：清初黄虞稷（1618—1683）《干顷堂书目》记有“《四元玉鉴》二卷”卷数不符。

第五：梅穀成（1681—1763）《赤水遗珍》（1761年）中曾引用过《四元玉鉴》中的两个题目，可见清初时此书尚未失传。

公元1772年开《四库全书》馆时，虽然挖掘出不少古代数学典籍，但朱世杰的著作并未被收入。阮元、李锐（1769—1817）等人编纂《畴人传》时（1799年）也尚未发现《四元玉鉴》。但不久之后阮元即在浙江访得此书，呈入《四库全书》，并把抄本交李锐校对（未校完），后由何元锡按此抄本



刻印。这是 1303 年《四元玉鉴》初版以来的第 1 个重刻本。

《四元玉鉴》被重新“发现”以后，引起了当时许多学者的注意，如李锐、沈钦裴（1829 年写有《四元玉鉴》序）、徐有壬（1800—1860）、罗士琳、戴煦（1805—1860）等人，都进行过研究。其中以沈钦裴和罗士琳二人的工作最为突出。

1839 年罗士琳经多年研究之后，出版了他所著的《四元玉鉴细草》一书，影响广泛。罗士琳对《四元玉鉴》进行了校改并对书中每一问题作了细草。与罗士琳同时，沈钦裴也对《四元玉鉴》作了精心研究，每题也做了细草。

清代数学家李善兰（1811—1882）曾著有《四元解》（1845 年）。其后陈棠著《四元消法简易草》（1899 年），卷末附有“假令四草”的“补正草”。

日本数学史家三上义夫在其所著的《中国及日本数学之发展》一书中将《四元玉鉴》介绍至国外。其后康南兹和赫师慎分别把《四元玉鉴》中的“假令四草”译为英法两种文字。

1977 年华裔新西兰人谢元祚将《四元玉鉴》全文译成法文，并写了关于《四元玉鉴》的论文。

朱世杰的“四元术”是在高次方程的数值解法以及“天元术”的基础上发展起来的。

朱世杰深刻阐述了运用“天元术”——以代数方法处理几何问题的巨大的优越性。

当未知数不止一个的时候，除设未知数天元（ $x$ ）外，还需要增设地元（ $Y$ ），人元（ $Z$ ）乃至物元（ $U$ ），再列写出二元、三元甚至四元的高次联立方程组，然后求解。这就是朱世杰在他的著作中所介绍的“四元术”。

朱世杰不仅提出了多元（最多到四元）高次联立方程组的算筹摆置记述方法，而且把《九章算术》等书中的四元一次联立方程组解法推广到四元高次联立方程组，在《四元玉鉴》中举例说明了高次联立方程组的求解方法——消去法。

总之，朱世杰的《四元玉鉴》为推进我国古代数学的发展作出了不可磨灭的重要贡献。但是，我们在看到朱世杰的贡献时，千万不要忘了，站在他前面逢山开路，遇水搭桥的伟大数学家李冶的“凿空”之功！

