

学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中外科学家发明家丛书

欧拉



学过高等数学的人都会记得欧拉常数 r (Euler's constant), 它表示的是一个数列的极限, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - I_n)$, 它就是我们下面将要介绍的18世纪瑞士最著名的数学家列昂纳德·欧拉 (Leonhard Euler) 于 1740 年提出的, 它和 r 函数, 黎曼 S 函数以及伯努利数等有密切的关系。数学大师们一直在猜想它是个超越数, 但至今还不知道它是不是无理数。通过近似计算我们可以得到 $r = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - I_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - I_n) = 0.57721566490153286060651209\dots$, 1972 年已利用计算机计算算出 7 千位以上。

人们对于列昂纳德·欧拉的赞美之词非常多, 他被称为“无与伦比的算学家”、“应用数学大师”、“分析的化身”、“英雄世纪的数学英雄”等等。被称为“法国的牛顿”的数学天文学家拉普拉斯曾经说过: “读读欧拉! 读读欧拉! 他是我们大家的老师。”阿拉哥也曾经这样形容欧拉: “欧拉计算毫不费力, 就像人呼吸、或者鹰在风中保持平衡一样。”如果说 17 世纪由于创造了两千多年以来梦寐以求的微积分而被誉为天才的世纪, 那么 18 世纪由于数学家们把微积分大大向前推进, 并且在各个数学技术领域取得了辉煌的胜利, 而成为英雄的世纪。18 世纪数学英雄的最高代表就是列昂纳德·欧拉。牛顿、莱布尼兹建立的微积分为世纪数学家所掌握, 向数学、物理、天文和其它各个科学技术领域开拓, 取得了前所未有的进步。浩浩荡荡向数学征战的旗手欧拉, 以他非凡的聪明才智、勤奋劳动和惊人毅力, 把微积分发展成为拥有众多分支的分析数学。这种广义的数学分析实际上包括了对所有运动变化的定量研究。他在几何、代数上数量庞大的发明创造, 导致了一些全新的数学分支的诞生。欧拉为促进数学空前蓬勃的发展耗尽了毕生的精力: 先是献出了他的双目, 最终是他的生命。他为人类文明建立了不朽的功勋。

欧拉是历史上最多产的数学家, 他编写了大量的力学、分析学、几何学、变分法的课本, 1748 年在瑞士洛桑出版了《无穷小分析引论》(两卷), 这是第一部沟通微积分与初等数学的分析著作。1755 年发表了《微分学原理》(两卷), 1768~1774 年发表了《积分学原理》(三卷), 这对牛顿和莱布尼兹的微积分与傅立叶级数理论的发展起了巨大的推动作用。1774 年, 他又发表了《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书, 使变分法作为一个新的数学分支诞生了。他还是复变函数论的先驱者。在数论研究上他也作出了卓越的贡献, 著名的“哥德巴赫猜想”就是从他在 1742 年与哥德巴赫的通信中引申提出来的。1766 年他双目失明后, 还口述完成了《代数学完整引论》, 先后有俄文、德文、法文版问世, 成为欧洲几代学者的教科书。他在概率论、微分几何、代数拓扑学等方面都有重大的贡献, 而在初等数学的算数、代数、几何、三角学上的创见与成就更是比比皆是, 不胜枚举。人们可以在所有数学的分支中见到他光辉的名字: 欧拉公式、欧拉函数、欧拉方程、欧拉多项式、欧拉常数、欧拉积分、欧拉线。发现立体几何中有名的欧拉定理和建立起今天三角学科学体系的就是这位大名鼎鼎的欧拉。不仅如此, 在数学以外的许多学科还有一大串以他的名字命名的专门术语来纪念他的卓越贡献: 欧拉运动学方程、欧拉流体力学方程、欧拉力、欧拉角、欧拉坐标、欧拉相关, 等等。他那博大精深的学识和无穷无尽的创造力永远是人们敬慕的对象。

有人说，欧拉写他的高超论文，恰如文笔流畅的作家给他的至亲好友写信那样轻松自如；甚至有人说，欧拉能在妻子第一次和第二次催他吃午饭的不到半小时的间隙里完成一篇论文。在这里姑且不论这些说法是不是言过其实，但是从这里我们多少可以看出他那无与伦比的数学才华。多产的法国数学家柯西（1789~1857）的全集有26卷；德国数学家高斯的全集有12卷；而欧拉的一生共创作了886篇论著，他的全集共有74卷之多。除了教科书以外，在他工作的时期几乎以每年800页的速度写出独具创造性的论文。如果考虑到他生命的最后17年双目已完全失明，就更加令人惊叹不止了。甚至到了1936年，人们也无法确切地知道欧拉著作的数量，只是估计要出版他的全部著作需要大四开本60—80卷。1909年，瑞士的自然科学协会着手收集和出版欧拉的散佚的论文时，曾经指出：“欧拉不仅属于瑞士，而且属于全世界。”当时他们得到了来自世界各地的许多个人和数学团体的经济资助。可是在俄罗斯的彼得堡（列宁格勒）发现的一大堆无可置疑的手稿，经过仔细估算过的预算费用（按1909年的货币计算，约合8万美元）给彻底搅乱了。的确，被盛誉为“数学家中的英雄”的列昂纳德·欧拉不愧为瑞士奉献于世界的最伟大的科学家。瑞士的埃米尔·费尔曼评论说：“欧拉不仅仅是历史上最有成就的数学家；而且也是历史上最博学的人士之一。……就其声誉而言，可与伽利略、牛顿和爱因斯坦齐名。”

一、加尔文教牧师的儿子

在瑞士北部连绵起伏的群山之中，与德、法两国交界的地方有一颗美丽晶莹的明珠——巴塞尔城，清澈美丽的莱茵河从她身边轻轻流过，好似一条丝带把城市装扮得分外妖娆。巴塞尔是瑞士的学术中心，历史上曾经产生过许多著名的大科学家，声名显赫的伯努利家族就居住在这里。1704年4月15日，一阵阵婴儿的啼哭声打破了黎明前的宁静，巴塞尔城市居民册上又增添了一个新居民，保罗·欧拉和玛格丽特·布鲁克的儿子列昂纳德·欧拉——一颗即将升起的巨星降生了。

第二年，小欧拉跟随双亲迁到附近的雷欣村居住，父亲保罗·欧拉就在村子里担任加尔文教派的牧师。

其实，保罗·欧拉本人对数学颇为在行，他曾经是著名的大数学家雅各布·伯努利的高才生。可是，他自己并不想从事数学工作，而且还想要儿子长大以后和自己一样，在乡村教堂当牧师。

作父亲的只指望自己的儿子继承自己的事业，不想把孩子培养成为科学家，这类事例在科学史上屡见不鲜。像高斯的父亲要儿子当花匠；维尔斯特拉斯（1815~1897）的父亲要儿子当文官；黎曼（1826~1866）的父亲想让儿子当牧师等等。保罗这样打算倒也情有可原，因为当牧师毕竟比当科学家容易，何况收入更要优厚得多呢！因此，保罗对儿子从小就灌输了极其严格的宗教思想，什么早祷告、晚祷告，每天必做，甚至在每餐饭之前都还要大讲一通主耶稣的道理。欧拉早期的宗教教育影响了他的一生，他从来没有放弃一丁点儿他的加尔文教派的信仰。确实，当他上了年纪以后，他兜了一个大圈子又回应了他父亲的召唤，他带领全家进行家庭祈祷，通常在结束时还要做一番讲道。

但是保罗·欧拉有个不坏的“毛病”，就是在每到高兴的时候，他会抛

开天国和上帝，眉飞色舞地讲起人世间迷人的自然数和三角形来。凭着他的善男信女们布道时练就的好口才，保罗把数学讲述得绘声绘色，妙趣横生，完全将小欧拉迷住了，热爱数学的种子就这样默默地埋在了孩子的心田。

中学毕业以后，欧拉顺从了父亲的意愿来到巴塞尔大学学习神学和希伯来语。不过他心里明白自己真正应当做的是做什么。这时保罗当年的老师雅各布·伯努利已经去世，由他的弟弟约翰·伯努利接替担任数学讲座教授。约翰本来是位医术高明的医生，后来受到他哥哥雅各布的影响改攻数学。他28岁时出任荷兰格罗宁根大学的数学教授，并且多次夺得法国科学院颁发的研究奖，成为驰名欧洲的大数学家。数学界至今仍流传着一段有关他的轶事。为了微积分发明的优先权，约翰站在莱布尼兹一边，同牛顿产生了相当激烈的争论。但是，牛顿在他心目中仍然无可争辩地享有崇高的地位。年轻时的约翰有一次在英国旅行，遇到一个外国人。这人身体微胖，长发披肩，显然受到周围人的极大尊敬。约翰不避嫌疑上前谦逊地介绍自己：“我是约翰·伯努利。”“我，”那人冷冷地回答，“是伊萨克·牛顿。”约翰把与牛顿的这第一次意外的会见看作是自己一生中接受的最高贵的礼物。

这时约翰虽然已经年过半百，但是精神矍铄，讲起课来旁征博引，生动而富有感情。每逢他上课，教室里总是座无虚席。欧拉也常去听约翰的课。坐在教室最前排的欧拉特别引人注目。在他高高的额头下闪烁着一对天真无邪的大眼睛。不过说他是个孩子恐怕更确切些，因为那时他的年龄最多不过十二三岁，个子足足比一般的同学矮一头，大学生们都把他当小弟弟看待，并没有把他放在眼里。可是，人不可貌相。有一次，约翰在讲课中无意间提到一个当时的数学家们还没有解决的大难题。谁知下课铃一响，欧拉不声不响地交给他一份答案。约翰看着看着，几乎不敢相信自己的眼睛。虽然欧拉的解答还称不上是真正完备的，但是他构思的精巧和大胆使约翰清楚地意识到，站在自己面前的这个瘦小的孩子，将是未来的数学巨人。这个意外的发现使约翰非常兴奋，他当即决定每星期在家单独为欧拉授课一次，帮助孩子尽快成长。有这样的好机会，欧拉连做梦也没有想到，心里真有说不出的高兴。欧拉为了尽可能少带问题去见老师，他把一周的业余时间都用在准备下一次课上。果然，在名师的精心指导下，欧拉的数学取得了突飞猛进的进展。他的勤奋和才能也深深的吸引了约翰的儿子丹尼尔·伯努利和尼科拉斯·伯努利，他们从此成为终身好友。

欧拉在15岁的时候获得了巴塞尔大学的学士学位，17岁又获得硕士学位。父亲保罗要他放弃数学，把全部的精力都放在神学上。欧拉虽然笃信上帝，可是要他去做专职的神职人员，他从心底里不愿意。不过，他是个孝顺的儿子，不愿公然违抗父亲的意志。正在欧拉感到左右为难的时候，伯努利父子知道了这个情况，赶来为他说情。

“亲爱的神甫，您知道我遇到过不少才华横溢的青年人，但是要和您的儿子比起来，他们都相形见绌。如果我的眼光不错，您的儿子无疑将是瑞士未来最了不起的数学家。”约翰压制着内心激动的心情接着说，“为了数学，为了孩子，我请求您重新考虑您的决定。”

保罗不是个铁石心肠的人，他理解约翰，也理解儿子的心情。深受众望的伯努利教授的一席话使得保罗认真地考虑起来。最后他改变了初衷，虽然这样做可能会给家里的生活带来困难。从此以后，欧拉再也不用等到父亲熟睡以后才偷偷起床来做他的计算，也不用再在数学书籍的外面套上一张圣经

的书皮来逃避父亲的注意。他像放出樊笼的苍鹰冲向自由的蓝天，又像饿虎扑向面前的食物。从古希腊的经典著作到牛顿的《自然哲学的数学原理》，恨不得一古脑地把它全都嚼碎吞下。这些丰富的知识再好不过地促使他飞速成长。

二、在沙皇统治下的彼得堡生活

转眼到了 1727 年，春风吹绿了巴塞尔的大地。年轻的欧拉满怀创造的激情，跃跃欲试。19 岁的他独立作出了他的第一份工作。

当时欧洲的科学院有个通行的做法，他们把各国政府或者有关部门提出的科研项目，设置奖金公开征求解答。在这些题目中有相当一部分同航海有关，因为随着航运事业的发展 and 连续不断的海上战争，各国政府愈来愈关注海洋的控制权。那一年，法国巴黎科学院提出在船上装桅杆的问题作为 1727 年的授奖问题。巴黎奖金是一项崇高的荣誉，对数学家来说，能赢得一次这样的荣誉就足慰平生了。欧拉决定利用这次机会考验一下自己，同时也向世人证实自己的能力。从某种意义上讲，欧拉的处女作是他一生全部工作的缩影，它既显示出欧拉的力量，又暴露了他的弱点。欧拉的力量在于分析——技术性的数学，他是分析学精妙绝伦的大师，又是顶呱呱的方法发明家的运算的巨匠。分析的利剑一到他的手中真可谓是无坚不摧，无攻不克。而欧拉的弱点在于他有的地方距实际太远，如果它还与实际有关的话。当我们记起关于并不存在的瑞士海军的传统笑话时，这个弱点就不足为奇了。欧拉可能曾经在瑞士的湖泊中见到过不多的几艘划桨的小船，但从未见到过海洋中一艘真正的大船。他因为让他的数学带走了他的实际意识而受到过严厉的批评，这些批评有时是公正的。对欧拉来说物质世界只是数学的一种特殊情况，它本身几乎没有什么意思，要是这世界没有符合他的分析，那是这世界出了毛病。评选的结果，欧拉的论文得到了很高的评价，但是没有获奖。这算不了什么，欧拉从这次工作中得到了非常有益的锻炼，后来他以 12 次获得这项奖金来补偿这次失利。

同年，在朋友们的怂恿下，欧拉向巴塞尔大学申请教授职位。可惜他资历尚浅，虽然经约翰·伯努利的极力推荐，还是被校方拒绝了。接连的挫折并没有使欧拉气馁，反而激起他更加勤奋的学习。这时，丹尼尔·伯努利正在彼得堡大学任数学教授，他一口答应为欧拉在彼得堡科学院谋个差事，并且一直与欧拉保持经常的通信联系。

欧拉在他事业的这个阶段，似乎对他自己应该做些什么无所谓，只要是与科学有关的就行，当伯努利的信上说到在彼得堡科学院的医学部可能有一个空位子，欧拉在巴塞尔就一头扎进生理学当中，并听了医学讲座。但是甚至在这个领域，他也不能摆脱数学：耳朵的生理构造使他联想到对声音的数学研究，这又扩展到对波的传播的另一项数学研究，他写下了一系列声学方面的重要论文，使这个领域成为数理物理学的一个重要分支。这些早期的研究，在欧拉的一生中就像一棵树在恶梦中疯长那样不断扩大范围。在这里，还有一个例子可以证明这一点：欧拉十分喜爱的罗马大诗人维吉尔（前 70 ~ 前 19）的国民史诗《埃涅阿斯记》中有这样一句诗：“锚抛下了，前进的大船停了下来。”读到这里，恐怕谁也不会想到它和数学有什么联系。可是，欧拉在这里却禁不住要对船体在这种状态下的运动作一番详细的计算。

丹尼尔是位动作很快的人。欧拉在 1727 年收到了彼得堡工作的邀请，职务是作为科学院医学部的助理。在这个科学院有一项聪明的规定：责成每一位外来成员带两个学生——实际上是需要训练的初学者。欧拉兴高采烈地打点起行装匆匆起程。一路上，欧拉眺望着一闪而过的茅舍、田野，憧憬着美好的未来，心中充满了希望。他感到浑身有使不完的力量，恨不得插翅飞到彼得堡，立即开始工作。

可是一到彼得堡，前来迎接的丹尼尔满面愁容，他让欧拉先好好休息，根本不提工作的事。原来就在欧拉踏上俄罗斯土地的那一天，在位刚刚两年的开明的俄国女皇叶卡捷琳娜一世猝然去世。

叶卡捷琳娜在成为彼得大帝的妻子之前是他的情妇，她似乎是一个在许多方面都很开明的女人，正是她，在她仅仅两年的在位期间，实现了在彼得堡建立科学院的愿望。叶卡捷琳娜去世后，在年幼的沙皇彼得二世（1715～1730）未成年期间，权力旁落到一个异常残忍的小集团手里（年幼的沙皇在开始自己的统治前就死了，也许这对他自己倒是幸运的事）。俄国的新统治者把科学看成是可有可无的奢侈品，在令人焦急的几个月中，他们考虑着要取消它，遣返所有的外国成员。这就是欧拉刚刚到达彼得堡时的局面。在混乱中，对他要提任的医学位置没人管了，丹尼尔四处奔走求告，结果一无所获。欧拉只得闷坐在家一筹莫展。这时候，俄国海军部正在招考海军军官，为了生活，欧拉决定去碰碰运气。半个月以后，欧拉早早来到涅夫斯基大街看结果。平日冷冷清清的海军部大楼门前，今天熙熙攘攘，人头济济。有的喜形于色，有的故作镇静。欧拉不安地在远处向贴榜处看去，心头不由一震。榜上的名字虽然写得密麻麻，但是他一眼就看出，第一个名字不是别人，正是列昂纳德·欧拉！他揉揉眼睛凑到近处再仔细一瞧，果然不错。不知道是身体不适还是今天彼得堡的寒风格外凛冽，他感到背上好像被人浇了一桶冷水，浑身发凉。他裹紧围巾，翻起大衣领子，被人群推挤着恍恍惚惚地向外走。录取无疑可以使他摆脱生活的困境，但是成为海军中尉毕竟不是他的理想。看来已经没有两全其美的好方法，只有听从命运的安排。正在这时，一辆马车飞驰而至，满头大汗的丹尼尔跳下车来一把将欧拉抱住。事情有了意想不到的转机，经过再三交涉，沙皇政府终于同意欧拉去科学院工作了。欧拉简直不敢相信这个“天上掉下来”的喜讯，他握住丹尼尔的双手久久说出一句话来，眼眶里闪烁着喜悦的泪花。

在这以后情况逐渐好了起来，欧拉也就安定下来专心投入工作。这倒不全是因为他完全沉浸在数学之中，部分原因是到处都有奸诈的告密者，稍不留心就可能惹上麻烦。他不敢过正常的社交生活。流放和处决的消息不时传来。数学部有位同事因为传抄一首无名作者的无题诗，被遣送到西伯利亚。

1730 年，小沙皇夭折，安娜·伊万诺夫娜（即安娜女皇，彼得大帝的侄女，1693～1740）即位成为新的女皇。就科学院而言，情况大大变好了。但是在安娜的情夫欧内斯特·若阿·德·比隆（1690～1772）的间接统治下，整个俄国遭受了它历史上的一段最血腥的恐怖统治。欧拉不声不响地专心于他的工作，这样持续了 10 年之久。1733 年，丹尼尔厌倦了令人生畏的俄国，回到自由的瑞士去了。而欧拉在他 26 岁时登上了彼得堡科学院的主要教学位置。

欧拉觉得他终生都要呆在彼得堡了，他决定结婚，定居下来，随遇而安。他的夫人叫凯塞琳娜，是彼得大帝带回俄国的画师格塞尔的女儿，温柔贤淑，

持家有方。婚后的生活恩爱美满。政治形势变得更加恶劣了，欧拉比以前更加强烈地渴望回瑞士工作。无奈小生命一个接一个的出世，使离开的希望化为泡影。欧拉夫妇先后生育的子女达 13 个之多（除 5 个以外，其余的都在幼年时夭折），堪与欧拉在科学上的多产相媲美。欧拉感到他被拴得比以前更紧了，于是在不停的工作中寻求慰藉。一些传记作者把欧拉无与匹敌的多产归于他在俄国的这第一次留居；应有的谨慎迫使他养成了一种牢不可破的勤奋的习惯。

欧拉是一位能在任何地方、任何条件下工作的大数学家。他非常喜欢孩子。常常是一边怀抱着一个婴儿一边写他的论文，同时稍大一点的孩子们在他周围嬉戏着。他写最困难的数学论文时的那种轻松自如是令人难以置信的。同时，他又是位慈祥而称职的父亲，他为子女的教育付出了大量的心血。每到晚上，孩子们围坐成一圈，由欧拉亲自布置和检查他们的作业，解答他们的问题。他还编了许多数学趣题启发他们的思考。下面就是其中的一个：

“父亲临终时立下遗嘱，按下述方式分配遗产：老大分得 100 克朗和剩下的 $\frac{1}{10}$ ；老二分得 200 克朗和剩下的 $\frac{1}{10}$ ；老三分得 300 克朗和剩下的 $\frac{1}{10}$ ；老四分得 400 克朗和剩下的 $\frac{1}{10}$ ；……依此类推分给其余的孩子。最后发现所有的孩子分得的遗产相同。问遗产总数和孩子总数以及每个孩子分到的遗产各是多少？”

一道初等数学的简单应用题，经过欧拉的精心编写，大大激发起孩子们的学习兴趣。但是，最受孩子们欢迎的还是他那讲不完的故事和诗朗诵，如果他有空能和孩子们在一起唱歌游戏，消磨一个愉快的晚上，更会使孩子们久久难忘。孩子们的嬉笑声和朗朗的读书声时时从窗口飘出来，许多过路的行人还以为这里一定开办着一个很好的幼儿园呢！

欧拉是那种极为罕见的数学家，就在子女绕膝、笑闹之声不绝的环境中，在沙皇恐怖统治的浓重阴影下，一篇篇论文源源不断地从欧拉的手中流出。他用拉丁文写的论文深入浅出，雅俗共赏，字句极少改动。尤其是他创造了现代数学的语言，更使他的作品受到广泛的欢迎。今天我们常用的许多数学符号，像用 Σ 表示求和；用 i 表示 $\sqrt{-1}$ ；用 $F(x)$ 表示函数；用 \sin 、 \cos 、 \tan 表示正弦、余弦和正切；以及用 a 、 b 、 c 表示三角形的边；用 A 、 B 、 C 表示它们的对角等等，都是欧拉首创的。一篇文章一完成就放在不断增加的一堆文章的最上面，等着印刷工来取走。当科学院的学报需要材料时，印刷工就从这一堆文章的最上面拿走一摞。于是就出现了这样的情况：出版日期的先后经常与写作日期的先后相反。欧拉有一个习惯，为了阐明或者扩展他已经做过的工作，他多次会回到同一个题目上，这种习惯更加剧了这种古怪的情形，以致有的时候，关于某一个论题的一系列文章的出版顺序与写作顺序是经常颠倒的。

转眼间到了 1736 年，欧拉在彼得堡已经度过了十个春秋。作为科学院数学部的负责人，他面前有一大串的课题需要研究。那时他正在修改一篇《论力学》的重要论文，准备付印。他为力学所做的，正是 100 年以前笛卡尔为几何所做的。他把微积分的全部力量第一次用来对付力学，使力学摆脱了传统所采用的几何的综合论证方法的束缚，而成为分析的科学，从而开创了这门基本科学的现代新纪元。其实，在彼得堡的 14 年中，他在分析学、数论和力学等方面作了大量出色的工作，他还应俄国政府的要求，解决了不少诸如地图学、造船业中的实际问题。

一天，吃完午饭，欧拉点燃烟斗，拿起刚刚送到的信件阅读起来。从欧洲各地向他求教的来信每天都有一大堆。今天有一封从柯尼斯堡的来信引起了欧拉的特别兴趣。偏僻的东普鲁士的柯尼斯堡坐落在美丽的普雷格尔河畔，河上旖旎的风光吸引了小镇的居民来这里散步、休息、野餐、垂钓。普雷格尔河上有两座小岛，从河的两岸分别有三座桥和它们相连，同时又有一座小桥把两个小岛连接起来。时间一久，有位爱思考的居民提出一个有趣的问题：一个散步的人能不能一次走七座桥，而且每座桥只能走一次？这个问题谁也回答不了。有人说可以，可是走来走去，始终没能完成；有人说不行，可惜又说不出令人信服的理由。这个不大不小的问题竟然一下子难住了全镇的居民和外地游客。于是，一位小学教师写信向大名鼎鼎的欧拉求教。

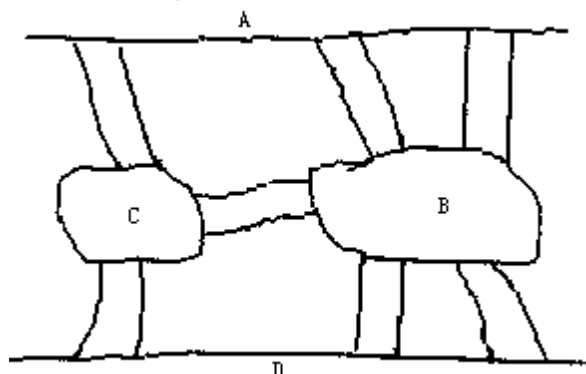


图1-1

欧拉是位出了名的“好好先生”，连中小学生在解不出的“难题”来求教，他也总能使他们如愿以偿。只要需要，无论是多么平凡、琐碎的事情，他也总会不假思索地去尽力完成。他从来不去考虑这些“杂事”是否会影响自己的研究，降低自己的身份。其实，欧拉不仅仅是把它们当作自己应尽的责任，他对这些问题也确实怀有浓厚的兴趣。像柯尼斯堡七桥这类问题在数学史上还从来没有人处理过。它显然不是我们所熟悉的代数问题，因为它并不是研究数量的大小。它和平面几何也不相同，平面几何里的图形不是直线就是圆，是讨论它们角度的大小或线段的长短。可是在柯尼斯堡七桥的问题中，桥的准确位置无关紧要，陆地的大小和形状也不需要考虑，重要的是考虑一共有几块陆地、几座桥以及它们的连接情况如何。根据这个特点，欧拉经过认真的思考，先把柯尼斯堡七桥画成一个线条图（见图1-2），在他的图形里，小岛和河岸都演变成了点，桥则成了边接这些点的线。这样，问题就被简化成为：从图上某一点开始，中间任何一条线不得重复画两遍，铅笔不准离开纸面，能不能把这张图一笔画出来？经过一番思索，欧拉终于找到了一个彻底而漂亮的答案。说它彻底，因为它给出了能否一笔画出“河—桥”图的条件；说它漂亮，因为它的条件非常简单，对于任何一张“河—桥”图，只要很短的一两分钟就可以作出准确的判断。

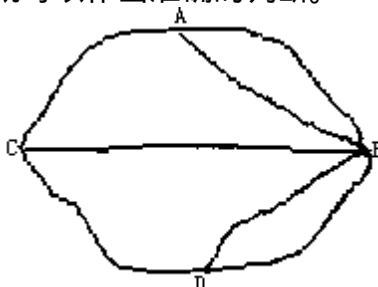


图1-2

柯尼斯堡七桥问题的圆满解决使柯尼斯堡人心满意足，而对于欧拉来说，这仅仅是个良好的开端。发现一块矿石可能意味着藏有巨大的宝藏。经过精心的开掘，欧拉果然发现了一个只需要考虑位置的关系和性质的全新的数学领域——拓扑学（拓扑学是研究图形在双方单值连续变换下不变性质的几何学），建立起了网络的概念并推导出拓扑学中非常有价值的重要关系式。拓扑学在近代有了重大发展，它已经渗透到数学的各个分支，获得了非常广泛的应用。比如，安排运输路线或邮递路线就需要考虑这样的问题：如何把货物或邮件送到指定的地点而又不走回头路。

不嫌弃平凡的工作，并且善于从平凡的工作中发现不平凡的内容，正是欧拉难能可贵的优秀品质。在欧拉琳琅满目、美不胜收的创作宝库里，珍藏着他为柯尼斯堡七桥、国际象棋中骑士的跳步等一类数学游戏所写的大量光彩照人的作品。

正当这位从巴塞尔城来的年轻数学家以神话般的速度在数学的各个领域里一篇接一篇地发表他的独具匠心的论文的时候，欧拉遇到了他一生中又一次重大的挫折：他的右眼突然失明了。

当时，欧拉正决心赢得一项关于天文学问题的巴黎大奖。天文学中彗星轨道的计算历来是数理天文学中的一个难题，因为它牵涉到两个或两个以上的星体之间的关系。没有计算机的帮助，要想得到比较精确的结果，即使是一位极具才能的数学家，一般也要花好几个月的辛勤劳动。为了吸引更多科学家们的兴趣，1739年，法国巴黎科学院特别为这一课题设置了巨额奖金，征求解答。欧拉决定在这个领域中施展一下他超群的计算才能。他对通常采用的方法进行了一系列重大的改进。尽管这样，计算仍是十分困难。可是一旦开始工作，让欧拉中途停下来是不可能的。他在书房之中着迷似地干了起来。饿了就啃几口面包，困了就靠在椅背上迷糊一会儿。凯塞琳娜看着丈夫这样不顾一切地工作，只有干着急，爱莫能助。虽说进展神速，但等他计算出彗星的运行轨道的时候，时光已经不知不觉地过去了3天。晨曦透过窗帘悄悄报告着新的工作日的来临。欧拉的眼睛里布满了血丝，头昏沉沉的，身体疲惫不堪。他轻轻阖上刚刚写好的论文，随手推开窗户，张开双臂伸了个懒腰。突然，欧拉的眼前一片发黑，他一头栽倒在地！他在床上整整躺了一个星期。病后，他的右眼完全失明了。

欧拉作为计算方法的大师，无疑从来没有人超过他，甚至连比较接近他的人也不容易找到，或许雅可比应该除外。算法专家就是为解决特殊类型的问题而设计计算方法的数学家。举一个很简单的例子，我们假设（或证明）每一个正实数都有一个真正的平方根，如何去计算这个根呢？有许多已知的方法可以计算，而算法专家则设计实际可行的方法。再举一个例子，在丢番图分析，也在积分学当中，一个问题的解答可能不是现成的，要用其它变量的函数关系做一些巧妙的（通常是简单的）代换，一个算法专家就是能自然地想到这种代换的数学家。想出代换的过程没有统一的方法——算法专家就像机敏的打油诗人一样，是天生的，而不是造就的。

看不起“纯粹的”算法专家的情况在今天是很流行的，然而，当一个像印度的罗摩拏阁那样的真正的数学家从不知道的什么地方突然冒出来的时候，就连分析专家们也都会把他当作从天而降的天才而向他欢呼：对于表面上无关的各种公式，他那几乎是以超自然洞察力揭示了从一个领域通向另一个领域的隐秘的线索，这就为分析学者们提供了弄清这个线索的新任务。一

个算法专家其实是一个“形式主义者”，他为这些公式的美丽而热爱这些美丽的公式。欧拉就是其中的佼佼者。

应该提到的是，现代考证已经表明，天文学的问题无论如何对欧拉眼睛的失明没有太大的责任。这种考证在使数学史上所有的奇闻轶事遭到怀疑方面起了很大的作用。但是富有学究气的批评家们（或者任何其他的人）怎么会知道这么多关于所谓的因果关系的东西呢？这个秘密恐怕需要大卫·休谟（欧拉的同代人）的在天之灵去解决了。尽管有这样的一个告诫，我们还是再讲述一个欧拉与无神论的（或许只是泛神论的）法国哲学家德尼·狄德罗（1713~1784）的著名故事给我们的读者听。这里我们稍稍偏离了编年史的顺序，因为这件事发生在欧拉第二次留居彼得堡期间。

那一次，叶卡捷娜女皇邀请狄德罗访问她的宫廷，狄德罗试图通过使朝臣们改信无神论来证明他确实是值得被邀请的。他喋喋不休的高谈阔论令女皇厌烦了，她命令欧拉去让这个只会空谈的哲学家闭上他的嘴巴。这很容易办到，因为狄德罗对数学一无所知。德·摩根在他的经典著作《悖论汇编》（1872年出版）中详细叙述了事情的经过：

狄德罗被告知，一个很有学问的数学家用代数证明了上帝的存在，要是他想听的话，这位数学家将当着所有朝臣的面给出这个证明。狄德罗高兴地同意了。……欧拉站起来朝狄德罗走去，他用一种非常肯定的语调一本正经地说：

“先生， $\frac{a+b^n}{n} = x$ ，因此上帝存在。”

对狄德罗来说，这听起来似乎很有道理，他困惑得不知说什么好。周围的人报以纵声大笑，使这个可怜的人觉得受了极大的羞辱，他请求叶卡捷琳娜允许他立即返回法国，女皇神态自若地同意了。

欧拉不甘于这件杰作，他极其认真又极为热忱地用非常严肃的态度去画蛇添足，一本正经地去证明上帝的存在和灵魂并非是物质的实体。据传这两个证明编进了他那个时代关于神学的专论，这些也许是他的天才在数学上不切实际的一面中最精采的例子。

在欧拉留居俄国期间，仅仅数学还不足以占据他的全部精力，无论什么地方要求他把他的数学天才用到与纯数学相去不太远的方面，他总是给政府以值得他们付出代价的东西。欧拉为俄国学校编写初等数学教科书；监督政府的地质部门；帮助改革度量衡；设计检验税率的有效方法。……这些只是他的一部分工作。无论欧拉做多少额外的工作，他都在继续倾吐出数学成果。

他在这个时期的一部非常重要的著作，是1736年关于力学的论文。请读者注意，这篇论文发表的时间只差一年就是笛卡尔发表解析几何整一个世纪。欧拉的论文对于力学就像笛卡尔的论著对于几何一样——把它从假设论证的羁绊中解放出来，并把它分析化。阿基米德有可能写出牛顿的原理，但是任何希腊人也不可能写出欧拉的力学。微积分学的全部力量第一次支配了力学，这门基础科学的现代新纪元开始了。

三、欧拉在柏林

1740年，普鲁士国王腓特烈大帝（1712~1786）在柏林登基。腓特烈身材矮小，可是野心勃勃。他自称是“欧洲最伟大的国王”，要励精图治，使

普鲁士在各个方面都雄居欧洲之首。柏林科学院的现状使他非常失望，由于缺乏称职的领导人，科学院死气沉沉，最多只能在欧洲充当二三流的角色。而此时的彼得堡科学院却是另一番景象。在欧拉的领导下，那里人才辈出，成果累累，呈现出一派蓬蓬勃勃的生机与活力。因此，当腓特烈打听到欧拉在俄国生活非常苦闷的消息以后，大喜过望。他立刻向欧拉发出盛情的邀请函，请他到柏林科学院来主持工作。

此时，在俄国，安娜女皇去世，俄国政府变得更为开明，但是欧拉已经厌倦了在这里的生活，他非常高兴地接受了腓特烈大帝请他作柏林科学院院士的邀请。

腓特烈大帝的王宫金碧辉煌。风尘仆仆的欧拉一身便装前来谒见腓特烈。腓特烈见新来的数学家身着皱皱巴巴的西服，围着一条发黄的旧丝围巾，连礼帽也没有戴，心里非常不高兴。这无异是对“欧洲最伟大的国王”不可容忍的怠慢。他爱搭不理地敷衍了欧拉几句后就拂袖而去。和国王貌合神离的王后倒是十分喜欢欧拉。他看到欧拉的打扮和风度与众不同，很想同他好好聊聊。可是，欧拉在俄国几乎与世隔绝地沉默了十多年，他担心王后连珠炮似的问话是不是别有用心。

“您为什么不愿意和我讲话呢？”王后不解地问欧拉。

“王后陛下”，欧拉回答说，“我是从那样的一个国家来的，在那里，要是谁爱多讲话，谁就会被吊死。”

欧拉并没有把宫廷不愉快的谈话放在心上，他的心早已经被一大堆数学问题所占据，已经容不下其它琐事了。这些日子以来他一直在认真地考虑，如何对17世纪中最伟大的发明——微积分作系列的介绍。因为自从牛顿和莱布尼兹建立起微积分以来，它在物理学、天文学、航海学以及工程学等广大领域里已经显示出无比的威力，并且由此产生了一系列新的分支，如微分方程、无穷级数、变分法、函数论等，迅速形成了一个数学中最庞大、最重要的分支——数学分析。数学家们热衷于分析这些新分支的发展。但是要想做到这一步，首先必须扩展微积分本身。牛顿和莱布尼兹创造了微积分的基本方法，可是从它的逻辑基础到实际应用还有大量的问题有待解决，而为了让更多的人掌握分析的武器，还需要扫除从初等代数过渡到微积分的重重障碍。欧拉决心肩负起这项艰巨而有意义的任务。在当时健在的数学家中，的确没有谁比他更适合干这项工作的了。不久，闻名遐迩的杰作《无穷小分析引论》和《微分学原理》先后问世。连同他后来在彼得堡出版的《积分学原理》，它们都是分析学中里程碑式的经典著作，为鼓舞和造就一批批有才华的青年成为伟大的数学家建立了不朽的业绩。先有拉格朗日、拉普拉斯，后有高斯、柯西、黎曼等等，这些大数学家都是在欧拉著作的指引下迈进庄严的数学殿堂的。甚至在今天大学课程里的某些内容，实际上仍然和200多年前欧拉留下来的一样。欧拉在分析学中所表现出的高深的造诣和超凡的技巧立刻博得了“分析学的化身”的美誉。

欧拉关于数论的大部分工作也是在柏林完成的。17世纪的大数学家费马生前提出的大量重要而有趣的命题，到今天为止，世界上还没有人能够把它们全部证明出来，唯有欧拉证明了其中的大部分。不仅如此，许多命题他还进一步加以引申和推广，特别是在1745年前后，他发现了18世纪数论中最重要的定理——二次互反律，这是一项极其了不起的成就。后来的数学家们为探求它的含义引申出大量极有价值的成果。

但是，欧拉在柏林期间最杰出的成就是关于变分法的工作。

在儿童游乐场里，您一定见到过孩子们喜爱的滑梯吧。顺着后面的梯子一级级地爬到顶部，身子往滑槽里一坐，哧溜一下就滑到了地面。可是有谁想过，从顶部 A 到着地处 B，滑梯做成什么形状才能使人在上滑行的时间最短呢？见图（1—3）。一般人都可能会认为把滑梯做成直的就行了，因为这样从 A 点到 B 点的距离最短。可是，距离短并不等于时间最省，因为这里没有考虑到加速度的大小。要知道，直的滑梯的下滑速度是增加得比较慢的。那么，滑梯到底应该做成什么形状才好呢？早在 1696 年 6 月号的《教师学报》上，欧拉的老师约翰·伯努利就把这个问题提出来向其他数学家挑战。提出这个著名的“最速降线问题”比欧拉的出生还要早 10 年。这一类寻求极大或极小值的问题还可以举出许多例子，它的萌芽可以追溯到古希腊以前的时代。在古代，传说迦太基人建造城市的时候允许居民拥有用一天时间犁出一条沟所围成的土地。由于一个人在一天中犁沟的长度一般是确定的，所以对对他们来说，问题就是应该把沟犁成什么形状，所围的面积才最大。

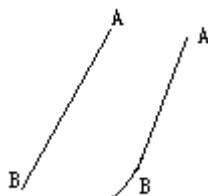


图1—3

约翰·伯努利的难题在提出以后的第二年就由牛顿、莱布尼兹、雅各布·伯努利以及约翰·伯努利本人先后给出了解答。可惜他们的工作只做到这里为止了。在约翰·伯努利的建议下，欧拉在 1728 年开始涉足这个十分艰难的领域。他以研究曲面（主要是地球）上的测地线问题着手，也就是连接曲面上（地球表面上）的两点，什么样的曲线距离最短？欧拉很快就找到了答案。不久，他又把最速降线问题加以推广，并且考虑了摩擦力和空气阻力的问题。接着，他又致力于寻找解决这类问题的更简便的方法。经过前后 16 年的不懈努力，他终于获得了成功。虽然他所采用的是分析和几何相结合的方法，而不是用纯分析的方法，论证过程十分复杂，但是最后的结果却同样简单而且优美，有广泛的应用价值。1744 年，欧拉的《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书在柏林正式出版。这部杰作立刻使他被公认为当时最伟大的数学家。随着这本书的出版，变分法作为一个新的数学分支诞生了。

10 年以后，数学界又升起了一颗灿烂的新星。年方 19 岁的约瑟夫·路易·拉格朗日（1736~1813 年）受到欧拉方法的启发，开始研究变分法。拉格朗日把自己的一些著作送给欧拉，这位著名的数学家立刻看出了它们的价值，他鼓励这个才气焕发的年轻的初学者继续做下去。当 4 年后，拉格朗日写信把解决等周问题（变分法）的真正方法告诉欧拉的时候，欧拉回信给这个年轻人，说新方法使他得以克服他的困难，因为在这以前，欧拉使用他的半几何的方法，困惑了多年未能解决这个问题。欧拉没有立刻发表他寻求已久的解答，而是一直等到拉格朗日能够先发表他的解答，用欧拉自己的话说：“这样做就不会剥夺你所理应享有的全部光荣。”欧拉知道，不管在私人信件上怎样赞美，对拉格朗日也不能有什么帮助，于是，在发表他的著作（在拉格朗日的著作发表之后）时，欧拉就故意说他是怎样被困难挡住了，在拉格朗日指出克服困难的途径之前，它们是难以越过的障碍。最后，欧拉使拉

格朗日在 23 岁这个不寻常的年轻年龄，当选为柏林科学院的外籍院士，使格朗日的地位得以确立。可以想像，作为一位在全世界享有崇高威望的大数学家，要在自己的著作中公开承认一位默默无闻的青年超过了自己，该需要何等的勇气和坦荡的胸襟！其实，这也无须使欧拉感到难堪。牛顿曾经说过：他之所以能够看得比前人远些，只因为他是“站在巨人的肩上”罢了。在变分法方面，欧拉超过了他的老师约翰·伯努利，而今天，年轻的拉格朗日又走到了欧拉的前头。“青出于蓝而胜于蓝”，科学的发展正如同滔滔江水，后浪推前浪，奔腾向前，永不停息。欧拉的高尚品质赢得了科学界的广泛尊敬，在他的晚年，当时欧洲所有的数学家都以自己曾是欧拉的学生而感到自豪。

但遗憾的是，腓特烈邀请欧拉不是为了分析和数论，也不是为了变分法。腓特烈只是要欧拉为他的科学院装点门面和给他的侄女迪莎公主当私人教师。可怜的数学家不得不每天从宝贵的时间里挤出两三个小时花在这位骄傲的公主身上。欧拉不甘心于让这位公主独享美果，他把丰富多彩的授课内容用信的形式公开发表。他那优美流畅的文笔使人们吃惊地发现，欧拉的文学才能被大大地低估了。著名的《致德国公主的信》先后用七种文字翻译出版，成为风靡一时的畅销书。

这一切还不足以耗尽欧拉无穷无尽的创造精力。他还为普鲁士政府解决了诸如铸币、城市水道、运河、保险金和养老金制度等一系列重大的实际问题。在柏林的 25 年中，欧拉的研究内容涉及到行星运动、刚体运动、热力学、弹道学、人口学等诸多方面，这些工作和他的数学研究相互推动，特别是在微分方程、曲面微分几何以及其它数学领域的研究都是开创性的。由于他的卓越领导，使濒临绝境的柏林科学院重获新生，一跃成为欧洲最有影响的科学院之一。

好像神奇的园丁，欧拉所到的地方无不繁花似锦，生机盎然！

但是谁会想到，欧拉在柏林的生活甚至比在彼得堡的时候还要难受。说来也不奇怪，一群大臣贵族整天围着腓特烈转，令人作呕的歌功颂德和阿谀奉承早已使他飘飘然了。而质朴的欧拉一不会吹牛，二不会拍马，在腓特烈面前不卑不亢，直言不讳，岂能不遭白眼？虽然腓特烈以科学的保护人自居，可是他并不懂数学，也不喜欢数学，更看不上“直愣愣”的欧拉，他甚至公然奚落欧拉是“独眼龙”。

欧拉不会机智地避开关于哲学问题的辩论也使他自己吃了苦头。

欧拉的学识渊博，举世公认。他不仅在自然科学各部门，而且在文学、音乐、神学等许多方面都有极深的造诣。可是，欧拉在哲学上却是个地道的门外汉。他认为哲学只是一门诡辩学，见仁见智，不值得下功夫去研究。当时腓特烈的宫廷里有位红人，他就是 18 世纪多才多艺的大作家伏尔泰（1694~1778）。伏尔泰是法国最伟大的作家，到今天依然作为反对暴政的英勇战士而在世界上享有很高的声誉。他体现了法兰西民族性格的特点——批判精神：机智俏皮和揶揄嘲讽。他能言善辩，口若悬河，论战起来语言尖刻辛辣，毫不留情。他常常喜欢把单纯好奇的欧拉诱入哲学的迷宫，引得一班咬文嚼字的朝臣们在旁边挤眉弄眼，大看热闹。结果可想而知，欧拉总是低头认输。在一片嘲笑声中，欧拉自己也不由得温厚地跟着笑起来。其实，欧拉只是把辩论作为无伤大雅的消遣，并不在乎它的胜负。他甚至颇为欣赏从伏尔泰那里招来的毫不留情的批评。然而，腓特烈把辩论看得十分认真，

书生气十足的欧拉使他渐渐失望了，他要物色一位仪表堂堂，能应付各种场面的老练的哲学家来领导科学院和应酬他的宫廷。他决定邀请达朗贝尔来接替这个位子。

在这里要顺便提一下达朗贝尔。让·勒隆德·达朗贝尔（1717~1783）得名于紧靠巴黎圣母院的圣让·勒隆德小教堂。达朗贝尔是谢瓦利埃·法图什的私生子，被他的母亲遗弃在圣让·勒隆德教堂的台阶上。教区的负责人把这个弃儿交给了一个贫穷的装玻璃工人的妻子，她把这孩子当作自己的孩子来抚养。根据法律，谢瓦利埃被迫出钱供他的私生子受教育。达朗贝尔的亲生母亲知道他在哪里，当这个孩子开始露出天才的迹象的时候，她派人去找他，希望能够说服他回到自己身边。

“你只是我的后母”，这孩子告诉她（在英语中这是一句很好的双关语，但在法语中不是），“装玻璃工人的妻子才是我真正的母亲。”他就这样抛弃了他自己的亲生母亲，就像她当初抛弃了她的亲骨肉一样。

当达朗贝尔在法国科学界出了名，成了大人物时，他报答了装玻璃工和他的妻子，使他们不致于生活困难（他们愿意继续住在他们简陋的房子里），他总是骄傲地说他们是他的双亲。

达朗贝尔应腓特烈之邀来到柏林。他和欧拉由于在学术上的争论曾经有过一点芥蒂，但是达朗贝尔不是一个让个人意志影响自己判断的人，他耿直地告诉腓特烈，把任何其他其他人置于欧拉之上都是一种不当的行为。可这样只是使腓特烈比以前更加顽固，更加生气，情况变得使欧拉难以忍受了，他感到他的儿子在普鲁士不会有什么出路。

四、重返彼得堡

俄国从来没有放弃过欧拉，欧拉和彼得堡科学院一直藕断丝连，即使在柏林科学院任职期间，彼得堡也照常支付他一部分薪金。同样，欧拉虽然身在柏林，仍为彼得堡寄了上百篇论文，还不时对那里的事务提供咨询意见。尽管欧拉要负担一大家子人，但是他是富有的，除了在柏林的住宅以外，他还拥有在夏洛滕堡的一个农场。在1760年俄国人入侵，进犯勃兰登堡边境期间，欧拉的农场遭到抢劫。俄国将军声称他“不是对科学宣战”，给予了欧拉大大多于实际损失的赔偿。当伊丽莎白女皇听说了欧拉的损失以后，她除了丰厚地赔偿了他的损失外，又加上了一笔数目可观的款项。

1762年叶卡捷琳娜二世（1729~1796）即位，俄国科学家的工作条件有了相当大的改善，她热情邀请欧拉重返彼得堡工作。欧拉很清楚，自己仅剩的深受白内障折磨的左眼已经绝对经不起彼得堡严寒的侵袭。不过他还是决定回去，柏林的气氛已经使他无法容忍。这位欧洲最有威望的数学家为腓特烈夜以继日地干了20多年，终于未能逃脱颠沛流离的命运。1766年，59岁的欧拉拖着虚弱的病体，偕同多病的凯塞琳娜和一大群子女，又一次长途跋涉，来到冰雪覆盖、寒风呼啸的彼得堡。

欧拉在彼得堡受到了异常隆重的欢迎，叶卡捷琳娜二世用王室成员的规格礼待这位大数学家。她专门为欧拉推备了一幢雅致而舒适的住宅，全新的家具，配备了八名仆役，还委派一名御用厨师来管理膳食。

欧拉迫不及待地投入了工作。可是，好景不长，北方刺骨的严寒和紧张劳累的工作使他左眼的视力迅速恶化。这一消息引起了拉格朗日、达朗贝尔

等许多欧洲著名科学家的不安，他们纷纷写信向欧拉表示同情和慰问，同时希望他好好休息，早日恢复健康。

按理说，欧拉是应该放下手中的工作，安心休养一阵子了。他为数学已经奋斗了足足 30 多年，取得了举世瞩目的成就；他的著作远远超过历史上任何一个最多产的数学家；特别是他为此已经献出了他宝贵的右眼。现在，如果不好好保养，他仅有的左眼又将要失明。失明意味着什么，欧拉比任何人都清楚。双目失明将使他成为生活上不能自理的残废人，将再也看不见使他神往的计算公式和几何图形，看不见亲人的脸庞和美好的世界。一句话，他将坠入黑暗的无底深渊！可是他同样清楚地知道，工作就是他的全部生命，如果生活中失去了他自己所钟爱的计算，那么活着还有什么意义？不错，失明是可以剥夺他看书写字的能力，可是夺不走他超群绝顶的才华，更休想夺走他热爱数学和献身数学的坚强决心！他平静地等待着失明那一刻的到来，但是决不向黑暗低头。他决心用加倍的努力，来回答命运对他的挑战。

在最后失明之前，欧拉总是习惯用一根石笔在一块大石板上进行演算。他双目失明以后，决定由自己口述，主要让大儿子阿尔伯特来进行笔录。从查阅资料到论文写作中所遇到的种种意想不到的不便和困难他只有用延长工作时间来弥补。

他旺盛的创作精力令年轻人都自愧不如。从他口中吐出一字一句，慢条斯理，绵绵不绝，好似一条抽不完的丝线。这根无形的丝线把年轻人紧紧捆住，常常累得他们腰酸腿疼。大儿子支持不住了，就由大女儿接着记。这位双目失明的老人凭着超乎寻常的意志和毅力，再一次创造出令人瞠目结舌的奇迹。他的科学成果在他失明以后不但没有减少，反而增加了！除了厚厚的 3 卷《积分学原理》以及《船舶制造和结构全论》等重要著作以外，他还用每年 800 页的惊人速度发表了近 400 篇具有独特见解的研究论文。这些论文的质量从下面这一点就可以看出：它们所赢得的各类奖金几乎成了他的固定收入。今天，当我们手捧他的光辉论著，欣赏着那丝丝入扣的深刻分析和令人眼花缭乱的精巧计算，谁会相信它们的作者竟是一位双目失明的老人呢！

毫无疑问，他那强烈的宗教信仰帮助他面临发生的一切，他并没有让自己“顺从”沉默和黑暗。他所取得的一切成就和他罕见的记忆力密切相关。维吉尔的洋洋 12 大卷、1.2 万行的国民史诗《埃涅阿斯记》（也译作《伊尼特》），欧拉虽然从青年时代以来已经不再翻阅，但他仍然能够背诵如流。如果这还不足以显示他记忆力的无比高超，那么他还能告诉你，史诗的每一页的第一句和最后一句是什么。他能不假思索地背出前 100 个素数的前 6 次幂，至于当时数学上的所有重要公式，不用说都准确无误地保存在他的记忆里。他的心算能力同样举世无双，无论是算术的，还是高等代数的，以及微积分的，甚至那些对于颇有才能的数学家在纸上计算起来都倍感棘手的问题，他都能应付自如。

作为他非凡记忆力和超群心算能力的一个例子，孔多塞讲述了这样一段故事：欧拉的两个学生曾经把一个复杂的收敛级数的和（对于变量的特殊值）计算到了第 17 项，只是在结果的第 15 位数上有一个数不一致。为了确定哪个结果是正确的，欧拉用心算作出了全部运算，他的答案最后被证实是正确的。所有这些，现在都对他大有帮助，失明对他并不是太大的问题，他能泰然自若地面对黑暗的挑战。

他失明以后还有一件事，说起来简直叫人难以置信。

在欧拉生活的那个时代，要确定船只在海上的位置是一项极其困难的工作。按照当时的计算方法，纬度的确定还比较容易，只要通过对恒星的观察就可以解决。困难的是经度的确定，它需要知道月球每时每刻相对于一个标准位置（17世纪后半期已经被确定为英国的格林威治）的方位，这个方位需要有极高的精确度。假如角度上差一分，那么在经度上就会差半度，真是失之毫厘，差之千里。可是，要精确计算出月球的方位相当不容易，因为它牵涉到三个星球——太阳、地球和月球三者之间的关系，这种“三体问题”是数理天文学中最困难的问题之一，甚至连牛顿对它也感到非常头痛。牛顿在《自然的哲学的数学原理》第3卷中用几何的方法研究过月球的运动，可惜用这个方法制作的月球位置表所带来的位置的误差竟高达160公里，这几乎是船只整整一天的航程，当然满足不了战争和航运事业的需要，各国政府和科学家为它绞尽了脑汁。英国为此专门成立了“经度测定委员会”，并且设置了高达20000英镑的奖金来征求解答，这在当时是一个非常可观的数目。年迈的欧拉不顾自己已经双目失明，决定利用自己的分析才能对月球的位置作一次透彻的计算。他的心血没有白费，经过精心的心算、口述，加上儿女和学生们的帮助，欧拉的新方法把最后误差缩小到只有30公里，而且全部复杂的分析计算都是他在心里做出来的。为了表彰他的功绩，英国海军部向他颁发了巨额奖金。

但是，双目失明仅仅是灾难的开始，不幸接二连三地向欧拉袭来。

欧拉回到彼得堡5年以后，1771年的夏天严重干旱，彼得堡已经有50多天没有下过一滴雨了，整座城市在烈日火焰般的烘烤下呻吟着，艰难地喘着粗气。傍晚时分，一间民房不慎失火，整个街区立刻像一堆干柴那样猛烈地燃烧起来，把天空映照得通红。欧拉此时正斜倚在沙发上，为一篇有关力学的论文打腹稿。等他听到外面惊慌嘈杂的响声和闻到扑鼻的焦糊气味的时候，整个住宅已经被火舌吞没。欧拉急忙站起来，摸索着向摆放自己手稿的书桌走去。不料，在慌忙之中他的脚被椅子绊住，身子重重地摔倒在地。呛人的浓烟滚滚而来，憋得他喘不过气来，他挣扎着想爬起来，可是四肢已经不听使唤了。在这千钧一发的时候，跟随欧拉多年的瑞士仆人彼得·克莱姆冲进屋去，他背起老主人转身就向外跑去。但是欧拉却紧紧抓住门框不肯放手，要让他丢下自己多年的心血去逃生是绝对不可能的。他坚持要彼得用台布把一大堆尚未付印的手稿包好带上。这时时间已经刻不容缓，大火已经吞噬了整座住宅，房子随时都有坍塌的可能。但是彼得拗不过固执的欧拉，只得遵命。当彼得背着双目失明而且有病的老主人和一大包手稿踉踉跄跄地来到院子中的时候，只听得轰隆一声巨响，图书馆倒了，整个住宅和全部家产随着冲天的火光付之一炬，唯一幸免的是欧拉的几千页尚未出版的手稿。

这场大火最令欧拉感到伤心的是烧了他的图书馆，因为那里收藏着的书籍和手稿，那是他的全部心血。后来，在奥尔洛夫伯爵的帮助下，欧拉的全部手稿都被抢救了出来。叶卡捷琳娜女皇马上补偿了欧拉的全部损失，他很快又回到工作中去了。

1776年，当欧拉72岁的时候，他又蒙受了更大的损失。欧拉痛失了40多年来朝夕相处、患难与共的忠实伴侣——凯塞琳娜。无论是早年在彼得堡血腥恐怖的日子里，还是在柏林的屈辱环境中，无论是双目失明的悲痛岁月，还是火烧家园的不幸时刻，凯塞琳娜总是和欧拉一起分担着痛苦和忧伤，但

是多年的颠沛和操劳使她的身体越来越差，她默默地照料着偌大的家庭，使欧拉免去后顾之忧。现在，凯塞琳娜先他而去了，欧拉的内心痛苦异常，欧拉抚摸着自已刚刚出版的新书怅然若失。40多年以来，凯塞琳娜不仅仅是欧拉生活中的伴侣，也是欧拉事业上不可缺少的助手，若不是凯塞琳娜的辛勤劳作，很难想象拥有一个庞大家庭的欧拉能够完成那么大量的工作。凯塞琳娜的去世对欧拉的打击太大了，在随后一年多的时间里，欧拉一直沉浸在痛苦之中。由于孩子众多，自己又是个行动不便的盲人。亟需一位能干的主妇来照料整个家庭，在朋友的撮合下，欧拉在凯塞琳娜去世的第二年再度结婚。他的第二个妻子叫扎洛梅·阿比盖尔·格塞尔，是凯塞琳娜同父异母的妹妹。

紧接着，为恢复左眼的视力，欧拉决定作一次手术。但是手术失败了，宣告欧拉永远失去了重见光明的希望。本来，根据医生的诊断意见，通过手术可能会使欧拉的左眼恢复视力。手术进行得十分顺利，欧拉高兴得无以复加，他心焦地计算着哪天能够重见光明。他想像着又见到了灿烂的阳光，用眼睛来“抚摸”那一个个妙不可言的数学符号。一想到这里，他就抑制不住内心的激动。可是希望又一次落空了，也许是由于医生的粗心大意，欧拉的患部发生了感染，经过一段难熬的拖延，他终于没有挣脱黑暗的无情魔掌。

但是，欧拉是棵高耸入云的参天大树，一切不幸和挫折，即使如逞凶的冰雹雷击，肆虐的风霜雨雪，也摧毁不了他旺盛的生命力，反而使他更加苍劲有力，气势非凡。面对命运的重重打击，欧拉泰然自若，依然我行我素。这位巨人以他堆积如山的伟大杰作向全世界证明：只要志向明确，意志坚强，锲而不舍，勇往直前，一个人，即使是一个盲人，同样可以创造出非凡的人间奇迹。

17世纪在英国点燃的工业革命之火，到欧拉时代，在欧洲已经形成燎原之势。发明和工业、扩张和财富、继地理发现之后的众多科学发现，这一切都给人们以信心。黄金时代正露出曙光，人类的心灵正从沉睡中觉醒。科学家们热切地要求征服世界，去探索宇宙奥秘。伟大的牛顿逝世的那一年，欧拉刚刚20岁。这时候，笛卡尔的坐标几何问世已经有90年，微积分的建立大约也已有50年，而物理和天文学的关键——牛顿万有引力定律已经在科学界流传了将近40年。在这些领域，大量孤立的问题虽然已经获得解决，但是对当时纯粹数学和应用数学所面临的种种问题，却还没有来得及发动一场系统的全面的进攻。笛卡尔、牛顿、莱布尼兹所发明的强大的分析方法远没有开发到应有的极限，诱人地展现在欧拉面前的是一片广袤肥沃的处女地。

回顾欧拉巨大的工作量，我们可能在初看时会倾向于认为，任何有才能的人都能够几乎像欧拉那样轻松地做出其中的一部分。但是如果仔细地检查一下今天存在的数学，很快就会纠正我们的错误看法。因为当我们考虑到现在我们所掌握的各种方法的力量，数学及其丛林般理论的目前状况，并不比欧拉面对的状况更复杂。数学渴望着第二个欧拉，他在他那个时代，系统化并统一了乱堆着不完整的结果和孤立的定理的广阔领域，用他那挥洒自如的分析方法的力量清理了基础，把有价值的东西收集在一起。甚至今天在大学数学课程中学习的许多东西，实际上也处在欧拉留下的状态——例如，从一般的二次方程的统一观点，讨论在三维空间中的圆锥截线和二次曲面，就是欧拉的。再有，年金问题及同它产生的一切（保险、养老金等等），也是同欧拉整理成现在学习“投资的数学理论”的学生们熟悉的状况的。

甚至在创作方面，欧拉也把教授与发现结合在一起。他在1748年、1755

年以及 1768 ~ 1770 年所著的关于微积分的伟大论著——《无穷小分析引论》、《微分学原理》和《积分学原理》，立即就成了经典著作，并且在 3/4 个世纪中，继续鼓舞着想要成为大数学家的年轻人。而且，正是在他的关于变分法的著作《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》一书中，欧拉第一次显示出他自己已是第一流的大数学家。

欧拉作为一个通过他的著作与学生见面的教师，取得了伟大而直接的成功，正如阿拉哥指出的：欧拉成功的原因之一是他绝不妄自尊大。如果需要一些相对来说真正价值较低的著作来澄清较早的和给人以更深刻印象的著作，欧拉就毫不犹豫地把它写出来，他不害怕降低自己的名声。

不过，18 世纪的数学同今天相比。还显得相当粗糙。在欧拉时代，微积分的基础本身还不清楚，而且从它诞生之日起就一直受到攻击；无理数的概念还模糊不清；连负数也遭到非议；复数不用说更是错误百出。像欧拉所著的《对代数的完整介绍》一书，1768 年——1769 年在俄国第一次出版，1800 年在德国再版，是公认的 18 世纪最好的代数教科书，其中就有这样的错误：

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$
$$\therefore \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{(-1) \cdot (-4)} = \sqrt{4} = 2$$

今天的每个初中学生都知道，在根式运算中，必须是以 a、b 不小于零为前提的。

当欧拉把力学分析化时，他向前迈出的伟大的一步我们已经陈述过了，我们只引证这个进展的一个细节，即学习刚体力学的学生们都熟悉欧拉对转动的分析。分析力学是纯数学的一个分支，因而欧拉在此处并不像他在其它一些偏于实际的工作中那样，一有机会就想要越出常规，跑出纯计算的无垠的领域。欧拉的同代人对他的工作最严厉的批评是：他只为了美妙的分析而计算的抑制不住的冲动。他有时可能对他试图转化成计算的物理情形缺乏充分的了解，不知道它们是怎么回事。不过，今天用在流体力学中的流体运动的基本方程是欧拉发现的。当实际问题值得他费神时，他是能够很实际的。

欧拉分析的一个特点，必须顺便在这里提一下，因为 19 世纪数学的一个主要趋势与它有很大关系。这就是他认识到，除非一个无穷级数是收敛的，否则使用它是不可靠的。例如，通过长除法我们发现

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \dots$$

级数无限地继续下去。这里我们让 $x = \frac{1}{2}$ ，那么：

$$-2 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots$$
$$= 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

对收敛的研究给我们揭示了如何避免发生像这样荒唐的事情。奇怪的是，尽管欧拉了解到了处理无限过程必须慎重行事，他在他自己的许多工作中却没有遵守这条规则。他对分析的信心是如此之大，以至他有时候会找出一个荒谬的“解释”，来使一件显然是十分荒唐的事情站得住脚。

但是这一切都说过以后，我们还必须补充，就欧拉作出的具有头等重要意义的正确而新奇的大多数工作而言，很少有人能与他匹敌或接近他的成就。那些喜欢算术——也许不是一个很“重要”的科目——的人会提议在丢番图分析中，给欧拉一个与费马和丢番图本人佩戴的同样大小、同等鲜艳的

荣誉勋章。欧拉是数学通才中的第一个，也许是最伟大的一个。

欧拉不仅仅只是一个狭隘的数学家，这一点我们已经多次提到：在文学和科学的各个方面，包括分析学方面，他至少是知识渊博的。但是即使在他欣赏《埃涅阿斯记》的时候，他也禁不住会看出一个要他的数学天才去解决的问题。他那无所不在的好奇心一度甚至吞下了占星术，但是他表明了他并没有消化占星术，在 1740 年当他被命令以占星术给伊万王子算命的时候，他有礼貌地拒绝了，指出算命属于宫廷天文学家的职权范围，可怜的天文学家不得不去做这件事。

欧拉在柏林期间的一项工作表明，他是一个文笔优雅（虽然多少有点过于虔诚）的作家，这就是脍炙人口的《致一位德国公主的信》，这是为了给腓特烈的侄女安哈尔特·德苏公主讲授关于力学、物理学、光学、天文学、声学等课程而写的。这些著名的信极受欢迎，汇集成书以后以七种文字广为流传。公众对科学的兴趣并非我们有时喜欢想象的那样，是最近才能发展起来的。

英国物理学家贺拉斯·兰姆（1849~1934）说得好：“不亲自检查桥梁的每一部分的坚固性就不过桥的旅行者是不可能走远的。甚至在数学中有些事情也要冒险。”达朗贝尔更有一句人们广为引用的名言：“前进吧，前进将使你产生信念！”18 世纪的数学家正是在缺乏理论保证和逻辑支持的情况下，仅仅依靠一套明确的运算法则和数学的物理意义，勇敢地开辟前进的道路。他们对数学的方法确信无疑，分析学在物理应用上所取得的不同凡响的成功使他们陶醉，而无暇顾及数学的严密性。在他们看来，追求证明的严密性似乎是自找麻烦。“为什么要用深奥的推理去证明那些人们根本没有怀疑过的东西呢？”因此，人们正确地称这个时代是英雄的时代，而欧拉更是英雄时代里的数学英雄。他凭借威力无比的分析武器，以磅礴的气势向数学的各个领域发起猛攻，夺得了又一个又一个令人惊羨的成果。他的研究足迹遍及当时科学的一切领域，范围是那样广阔，内容是那样深刻，以致于要写出他的全部发明项目都需要好几页的篇幅，而他所提出的创见至今仍然有待于我们用心研究的，还可以列出长长的一串。怪不得仅仅为整理他没有发表的文稿就使得彼得堡科学院足足忙碌了 47 年！欧拉为我们清理好场地，开辟出道路，把一切有价值的发现连接成一个整体。正是在这个基地上才建立起今天繁荣的现代数学之城。可能在欧拉著作中有个别结论在今天看来是不成熟的，甚至是错误的，但是正像白璧的瑕疵，太阳的黑子，时代的局限性毕竟掩盖不了他那光芒四射的成就。因此，大数学家高斯极其公正地指出：“研究欧拉的著作始终是各个数学领域里最好的学校，没有任何别的可以代替它。”拉普拉斯也满怀敬意地提到这位可敬的长者：“读读欧拉，读读欧拉，他是我们大家的老师。”

1783 年 9 月 18 日，像往常一样，全家还都在睡乡之中的时候，欧拉已经摸索着起床了。老仆人轻轻地把他搀扶到花园里，坐在安乐椅上。彼得堡秋天的黎明凉气袭人，远处屋顶上的袅袅炊烟和地平线轻柔的晨雾，在早霞的映衬下把城市点缀得五彩缤纷，富有诗意。偶尔传来马车驰过的辘辘声和行人的脚步声。随着城市的苏醒，老人永不疲倦的大脑开始了一天的工作。不久前，法国的航空先驱者约瑟夫·米歇尔·蒙戈尔费埃（1740~1810）和雅克·艾蒂安·蒙戈尔费埃（1745~1799）兄弟搭乘充满热气的气球成功地飞上了天空。现在欧拉正在凝神思考，怎样用数学来描述气球冉冉上升的运

动。中午，欧拉和家人有说有笑的共进了午餐，饭后在沙发上假寐片刻。天王星是新近发现的，他思索着说出它的运行轨迹，这个结果同观测数据正好相符。老人感到有些疲乏，想稍稍休息一下。他一边喝茶，一边逗孩子们玩耍。突然，他感到一阵晕眩，烟斗从手中掉落。欧拉只来得及轻轻说出一句话：“我不行了。”这位一生奋斗不息，为数学无畏地献出了自己双目的老人，终于“停止了计算，也停止了生命。”

