学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中外科学家发明家丛书

伽罗瓦

BOOK

内部资料 非卖品

一、埃瓦里斯特·伽罗瓦的生平

公元 1832 年 5 月 30 日，一个星期五的早晨，在法国冈提勒的葛拉塞尔湖附近，有个农民看见一个陌生人昏迷不省地躺在地上。后来发现他是在用短枪决斗后受了重伤被遗弃在这里的。人们把这个不知名的受伤者送到医院，但由于他受的是致命伤——一颗子弹击中了其腹部，第二天早上 10 点钟他就死了。

后来，人们得知死者就是埃瓦里斯特·伽罗瓦——法兰西科学之光。他是全世界学者公认的、卓越的数学家。他的死使数学的发展推迟了好几十年。

（一）1811—1830 年

距巴黎 18 公里，有一座十分宁静的小城——布尔—拉—林。大街两旁至今仍峙立着几幢完好地幸存下来的、门上有宽檐的 19 世纪初叶的尖顶房屋；城里依然是那几条用玫瑰色岩石砌成的马路。在大街第 54 号房的正面有一块纪念碑，写着“法国著名数学家埃瓦里斯特·伽罗瓦，生于此。卒年 20 岁，1811—1832 年”。就在这所房子里，1811 年 10 月 26 日，新生儿响亮的哭声充斥了整座房屋，埃瓦里斯特·伽罗瓦来到了这个世界上。

18 世纪末至 19 世纪初叶的法国，处于资产阶级大革命和拿破仑战争时期。在资产阶级革命的狂潮中，腐朽的波旁王朝被推翻了，资产阶级掌握了国家政权，建立了法兰西共和国。法国的革命引起了英国、俄国、西班牙、土耳其等国的不满、怨恨，它们联合起来进攻法国，欲消除法国革命在欧洲的影响，恢复波旁王朝在法国的统治。与此同时，法国国内的王党分子积极进行复辟活动，国内局势也很紧张。为此，法国大资产阶级迫切希望一个新的强有力的政权来保证资本主义的正常发展，在国内防止波旁王朝的复辟，并有效地击败外国干涉军和向海外扩展势力。于是，在 1799 年 11 月，通过政变，拿破仑·波拿巴，这位军事天才做了被战争弄得精疲力竭的法兰西共和国所需要的军事独裁者。此后，拿破仑建立了法兰西第一帝国，并进行了征服欧洲，确立霸权的战争。但是，拿破仑的对内专制独裁，对外侵略扩张，造成了推翻第一帝国的巨大力量。1814 年，在英国、俄国、奥地利、普鲁士等国的强大军事攻势下，法兰西第一帝国被冲垮了。波旁王朝复辟了。

小伽罗瓦的出生给他的父母带来了无比的喜悦，夫妇俩决心把儿子培养成为优秀人材。

小伽罗瓦的父亲尼古拉—加布里埃尔·伽罗瓦是布尔—拉—林城少年学校的校长。1789 年，法国资产阶级革命后，学校改为巴黎学区的一所中学，老伽罗瓦仍旧担任校长。老伽罗瓦为人正直，乐于助人，市民们十分尊敬他。1815 年，他当选为市长。

老伽罗瓦属于自由党人，他反对恢复旧的君主专制制度，因为在旧制度下，政权属于君主一人，而君主则被认为是上帝在人间的全权代理人。当时，拿破仑主义者都被看作是自由党人，因为他们是争取君主立宪的第一批斗士。他们支持从法国大革命时期以来，掌握着实际权力的大资产阶级。在波旁王朝复辟时期，从拥护立宪的自由党人联盟中分裂出一个小派别，它就是由优秀分子组成的共和党。共和党较自由党更为激进，主张建立共和制的资

产阶级共和国。

父亲正直的品质和对政治的热情深深影响着小伽罗瓦。小伽罗瓦从小就爱憎分明，长大后，他加入了共和党，在政治斗争中，表现得十分坚强勇敢。

伽罗瓦的母亲玛利亚—阿代累达出身名门，其父是该城有名的法官。玛利亚聪明而有教养，她积极参与对儿子的教育活动，是伽罗瓦的第一位老师。作为古代文化的热烈爱好者，她把从拉丁文和希腊文学中吸取来的英勇典范介绍给儿子，这对于培养枷罗瓦正义、勇敢的品质起了十分重要的作用。

1823 年 10 月，伽罗瓦年满 12 岁时，离开了双亲，考入路易—勒—格兰皇家中学。在这里，他和新同学在学校中上了生活的第一课。

伽罗瓦求知欲很强，常常独自一人若有所思地注视着教室的某个角落，然后拿起笔在纸上写呀，算呀，直到得出一个令他满意的结果。在课堂上，伽罗瓦常爱提一些稀奇的问题，有时还和老师争辩几句。为此，老师们认为他有“杰出的才干”，而且“举止不凡”，“为人乖僻、古怪、过分多嘴”。

伽罗瓦在路易—勒—格兰皇家中学领奖学金，完全靠公费生活。在第四、第三和第二年级时，（法国中学的年级编号与我国学校惯用的年级编号相反，即一年级是最高年级，而不是最低年级。）他是优等生，曾在应征国家奖学金的希腊语作文总比赛中获得好评。但是，教师们反对他升级，他们认为，伽罗瓦的体格不够强壮，他的判断力还有待“成熟”。尽管如此，伽罗瓦以在升级考试中的优异成绩升入修辞班学习。但是，第二学期一开始，他不得不回到二年级，因为当时发生了一件值得纪念的事情：埃瓦里斯特·伽罗瓦在数学方面有了新发现。

在升入修辞班之前，每个学生要修完中等学校必修的人文科学课程。但是，对于那些爱好精密科学的学生，学校允许他们从二年级开始去听初级数学的补充课程。着迷于数学的伽罗瓦重修二年级，会比别人具有更多的机会学习数学。他毫无阻碍地被批准去上数学课。

数学课开拓了伽罗瓦的思路，发展了他身上的科学家所需要的借以推测科学的素质。伽罗瓦懂得，在数学上掌握明确而富于表达力的语言是证明自己思维深刻的关键。他反对那些不讲推理方法而专讲引入迷途的技巧问题的学校教科书，所以他不读这些教科书，而在几天之内一口气读完了法国著名数学家 A．M．勒让德尔的经典著作《几何原理》。这本书严格地、有根据地阐述了当时已经被人遗忘的欧几里德的 8 卷书，推崇欧几里德的推论方法。作者主要在叙述方法方面对欧几里德的不朽著作作了许多修改，使这本书成为几何学方面的一部崭新著作。伽罗瓦所领悟的勒让德尔的语言，本身包含着数学思维的方法在内。

如果说勒让德尔的几何学对于伽罗瓦来说，是一种新语言的语法教科书，那么现代解析力学的创始人拉克朗日的著作——《论数值方程解法》、《解析函数论》、《函数演算讲义》则起着语法的严格练习的作用。因为拉克朗日所陈述的问题，为伽罗瓦应用“群”的概念提供了依据。

当第二年伽罗瓦回到修辞班后，他对其他科目的兴趣也很浓厚，这使他得到了全面发展。但伽罗瓦认为学校里讲授这些科目正如教科书里所讲述的一样潦草马虎，他对教师们所采用的照本宣科的教学法很不满。在课堂上，他常常提出一些超出授课内容范围的问题或提出一两处独到的见解。因此，教师们在谈论伽罗瓦时说：“他被数学的鬼魅迷住了心窍”，“平静会使他激怒”。

这时候，16 岁的伽罗瓦已经熟悉了当时的数学家欧拉、高斯和雅科比的著作、他自信自己能够做到的，不会比他们少。为了开拓通向科学大门的道路，伽罗瓦加倍努力，勤奋学习。他独立、认真地准备参加取得升入综合技术学校资格的竞赛考试，但他没有考取。不过，尽管考试失败，1828 年 10 月，他以优异的成绩从初级数学班跳到了里查的数学专业班。

里查是伽罗瓦成长过程中的良师。当时，33 岁的里查从 1821 年起就已经是数学教授了，在同行中，可谓是年轻有为。里查很有才干，他培养出了一批为科学作出巨大贡献的杰出人才，如伽罗瓦、预测海王星存在的天文学家乌尔本·列·维利叶和数学家查里士·厄米特等人。

里查的课讲得风趣优雅，深受学生们的欢迎。他对科学工作具有独特的风格，勇于把自己的观点付诸实践。在他看来，最大的快乐和欣慰就是发掘英才。所以，当伽罗瓦提出与众不同的算题解法后，他总是欢喜万分地与伽罗瓦一起进行演算、论证。他常常心满意足地听着这个在他认为是自己学生中最有天赋的孩子在同学们面前讲话。里查表扬伽罗瓦大大超过了其他同学，说伽罗瓦适宜在数学的尖端领域中工作。里查还帮助枷罗瓦发表他的第一部著作，鼓励他锲而不舍地进行钻研。

1829 年，18 岁的伽罗瓦中学毕业后、再次参加综合技术学校的入学考试。然而，这次又失败了。失败的原因是主考人不能理解伽罗瓦的见解，却在伽罗瓦阐述自己的观点时嘲笑他。为此，伽罗瓦对主考人的无知表示不屑，拒绝回答主考人提出的过于简单的问题。老师和同学们为伽罗瓦未能进入综合技术学校深造感到遗憾，因为综合技术学校的学生都有从事科学工作的可能，倘若伽罗瓦考进这所学校，就会获得非常优越的条件，在两年期间使工作得到进展。

但是，最令伽罗瓦痛心的是父亲在同年 7 月初的自杀事。事情的起因是当地天主教教区的牧师荒唐地认为旧制度和宗教上偏执的时代又回来了，并极力宣传。这引起了反对旧制度的老伽罗瓦的反对。于是，老伽罗瓦成了这个牧师的攻击目标，他不遗余力地迫害老伽罗瓦，不断地把匿名讽刺信寄给他，而干这勾当的就是牧师本人。信中充满不堪入目的诽谤、嘲笑，尤其令老伽罗瓦难以忍受的是信中诽谤他作为市长不为市民办事，并且有贪污、渎职行为。诽谤终于使正直的老伽罗瓦生病了，以致最后自杀。市民们对失去一位好市长而痛心，当老伽罗瓦遗体的送殡队伍来到布尔—拉—林市区的境界时，市民们从柩车上卸下棺材，用肩膀抬到墓地。那个牧师的出现引起了冲突，结果他挨了一顿痛打。

父亲的死使枷罗瓦悲痛欲绝，对于他来说，父亲就是他的一切，是父亲教会他分辨是非曲直，善恶美丑，教会他如何做人的，他对于父亲的感情，不只是感激，更多的是崇拜。

咖罗瓦和母亲一起度过了服丧的日子，随后，他重新振作精神，听从里查的劝告决定进师范大学。因为这使他有可能继续深造，同时生活费用也有着落。随着丈夫的逝世，伽罗瓦的母亲失去很大一部分收入，而埃瓦里斯特还有一个 14 岁的弟弟亚耳弗勒。

师范大学是大革命后创建的，为高等和中等学校培养师资。当时，师范大学的生活方式与修道院极为相似。吃饭前和早课前后，全体学生都要大声朗读祈祷文；睡觉前必须听某一宗教题目的谈话；每月要作一次忏悔。如果学生一连两个月不作忏悔的话，就要被开除出校。校长亲自督促学生遵守这

项规则。这种生活使伽罗瓦感到厌倦，他那倔强的性格难以忍受这些强制性的规定，所以很多人指摘伽罗瓦行为古怪，性格执拗。然而对伽罗瓦来说，在大学中的第一年是最顺利的一年。首先是他的科学研究获得了初次成果——他写的几篇文章获应征科学院的数学特奖。其次，他结识了奥古斯特·舍瓦烈，后者直到伽罗瓦死前一直是他唯一亲近的朋友。舍瓦烈比伽罗瓦早一年考进师范大学，他是第一批坚定不移的圣西门主义者之一，向往“各尽所能，按劳付酬”的社会制度。伽罗瓦感到，与舍瓦烈在一起探讨社会问题，能够开阔自己对当代政治问题的眼界，提高自己分析、认识政治现象的能力。

（二） 1830——1832 年

对自由党人来说，1830 年是巩固已有地位的一年。法国资产阶级不断向欧洲各国政府献殷勤，政治立场很不坚定，忽而攻击左派，忽而攻击右派，同时把国家政权攫为己有。

在波旁王朝复辟期间，自由党不仅通过自己的代表所参加的国务院，而且通过占据要位的自由党官员，来发挥自己的影响。大资产阶级关心贵族的利益胜于关心民族的利益；至于人民的利益，那根本不在考虑之列。但人民对政治形势认识不清，大多数人的情绪是痛恨波旁王族，人民认为波旁王族应对法国遭受的一切屈辱负责。

1829 年，国王查理十世——梦想完全恢复封建专制统治和贵族特权的极端王党分子的首领，任命流亡贵族头目波利尼克组织了清一色的极端王党分子的内阁。商业巨头、工业企业和银行所有者——他们都是自由党的党员——不能容忍他们的特权再次受到威胁。于是他们利用巧妙的宣传和人民生活的贫困，得到了左派的支持。有青年学生参加的共和派发动了人民；在巴黎，资产者在帽子别上三色帽徽——七月革命开始了。

当时，埃瓦里斯特·伽罗瓦将满 19 岁。他在师范大学的第一年功课行将结束。他在这个时期写成的数学著作，已经使人对他的思想的独创性和敏锐性有所认识。在政治方面，与当时大多数具有自由主义情绪的青年学生相比，伽罗瓦对待社会的态度是进步的。七月革命一爆发，伽罗瓦就准备投入到斗争中去。但是校长禁止学生们上街参加游行示威，而且把校门锁上。伽罗瓦对学校的这种举动感到愤慨，他以实际行动表示抗议。从 7 月 28 日夜晚到 29 日，正值革命高潮之际，伽罗瓦屡次试图翻过围墙加入街上战斗着的人们中间去，但均因被学校值勤人员发现而未成功。最后，当伽罗瓦慷慨激昂地与校长进行了一场争论后，盛怒之下的校长下令对伽罗瓦实行单独监禁。这是伽罗瓦的第一次政治行动。

七月革命胜利后，自由党人的受托人路易—腓利浦被拥上国王的宝座，此后，自由党的力量进一步增强。在此以前，一小部分出身资产阶级、却又鄙视本阶级的人，由于对现存制度持反对态度而在思想上团结起来，并在组织上联合成几个爱国团体，其中最著名的是人民之友协会。这些人建立了共和党，以国民议会为自己的政治理想。他们庄严地宣布，没有社会进步和社会福利，就没有未来。但是，在七月革命期间，他们还不可能指望夺取政权，因为他们的队伍数量太少，也还没有充分团结起来，他们以分散的小组参加战斗。所以，革命胜利后，共和派对自由派采取让步政策，接受路易—腓利浦在市政厅发表的声明。然而，这些承诺并未兑现。路易—腓利浦政府忙于

自己的卑鄙勾当，只顾装填金融贵族的腰包，却对国内发生的混乱情况无能为力。7 月发生了饥荒；在 10 个工业区中，1 万名适龄应征入伍的人当中，有 8000 多人不适宜服兵役；工厂里越来越广泛地使用童工；以财产多少作为是否拥有选举资格的限制没有废除。至于对外政策，则比对内政策更加令共和派失望。当时，为了与邻邦保持和睦的关系，签订了若干秘密协定：与西班牙签订的是法国承担义务向西班牙通知有关逃亡到法国的西班牙难民中的叛乱情绪的协定；与俄国签订的是把暴乱的波兰委付给沙皇的协定；与奥地利签订的是听任奥地利在意大利恢复旧制度的协定。因此，在法国的帮助下，欧洲的几次革命运动被镇压下去了，而这些国家的革命运动的领导人都是坚定地期待着 1830 年 7 月推翻波旁君主制度的法国来给予援助的。

路易—腓利浦的政策引起了社会不满情绪的增长；进步的共和派的威信逐渐提高。这使政府不再充耳不闻了，开始对共和派进行镇压。由于共和党的领袖们只相信一种美德——勇敢，因此他们尽管估计到有人民群众的支持，但并不注意广泛宣传自己的思想。而且他们的斗争策略极为简单，主要形式就是散发传单，号召仿效国民议会的榜样。共和派的这些失策和错误被政府毫不迟疑地利用了。

1830 年 10 月，伽罗瓦回到师范大学学习。此时的伽罗瓦对路易—腓利浦政府蹂躏各民族利益的对外政策和与人民利益背道而驰的对内政策极为不满。他认为共和派人是真正的爱国者。在谈话时，伽罗瓦热烈地捍卫人民的权利。这个面色苍白、神情忧郁的青年总是出现在大无畏者的行列中间。这使人联想到他的科学著作的特点首先也是其思想上的大胆独创。

1830 年 11 月，伽罗瓦毅然加入了人民之友协会。同时，他还报名参加了国民自卫军炮兵队，其中有两个炮兵连完全由共和派分子组成。

在师范大学中，伽罗瓦是唯一参加人民之友协会的学生。怀着对共和制的热忱，伽罗瓦不倦地向同学解释共和党的纲领。由于师范大学的领导人——校长吉尼奥和教授库申是君主立宪政体的热烈拥护者，路易—腓利浦的追随者，所以，伽罗瓦对他们进行抨击。伽罗瓦很鄙视吉尼奥在七月革命期间所表现的胆小怕事和他在过后的出尔反尔。除了政治动机外，伽罗瓦对师范大学教育组织也感到不满。他所听到的对于自己全部异议的唯一答复就是一句话：好学生不过问政治。尤其使伽罗瓦感到孤立的是同学们不赞同他的行动，甚至当吉尼奥不定期地把他软禁在家里的时候，他依然是孤零零的。这种处罚办法，剥夺了伽罗瓦和他的共和派朋友们见面的机会。伽罗瓦不甘心屈服于这种手段，他决定立即反抗。在伽罗瓦这样热情洋溢、胸怀坦荡的青年看来。采取这个决定和他的科学发明同样重要。但是，这一决定的结果是被开除出师范大学。

事情是由一家主要以科学界人士为评论对象的报纸——《学校公报》，在 1830 年 12 月 5 日发表了一篇批评师范大学领导的文章引起的。似乎为了证实自己的说法，文章援引了一封署名“师范大学一学生”的信，信中嘲笑校长吉尼奥在 7 月那些日子里的行为，而且特别强调他的机会主义。由于学生中只有伽罗瓦与吉尼奥发生过纠纷，因此这封信被公认是伽罗瓦写的。实际上，这封信的语调与伽罗瓦惯常的风格一点也不吻合。可是，也许伽罗瓦跟发表这篇文章有一些瓜葛，他没有正面肯定这封信是自己所写，也没有加以否认。然而，为了推卸责任，编辑部利用伽罗瓦缺乏经验的弱点，在几个星期后，发表了反对伽罗瓦的文章。这使得信为伽罗瓦所写的看法越发真实

有据了。

在指摘吉尼奥的文章发表后的第四天，尽管伽罗瓦的罪过还未被证实，吉尼奥却指示把伽罗瓦送回家中，同时向教育大臣作了报告。吉尼奥在报告中称伽罗瓦是懒汉和道德败坏的青年，并一口咬定，开除伽罗瓦可以使师范大学和整个巴黎学区摆脱害群之马的牵累。因为担心不能轻易摆脱伽罗瓦，吉尼奥采取了卑劣的手段。他开始搜集有关伽罗瓦“罪犯”行为的材料，并唆使师范大学学生进行告密。阴谋得逞了，1831 年 1 月 8 日，皇家国民教育委员会批准了这一开除处分。

开除出师范大学的处分，使伽罗瓦失去了生活费用。1831 年 1 月 9 日，《学校公报》刊登了下列一则奇怪的声明：

“1 月 18 日（星期四），伽罗瓦先生将讲授高等代数。以后每逢星期四下午 1 时 15 分，将在索尔奔纳街第 5 号，凯洛特小书铺授课。该讲座以不满足专科学所讲授的代数而希望深造者为对象。讲座将向听众介绍不曾公开讲授过的若干理论，其中某些理论完全是独创的，只须列举新虚数论、用根式求解的方程论、数论和用素代数研究的椭圆函数论便足以概见全貌。”

第一次讲座在预定日期的指定时间准时进行，课堂内有 30 名听讲者。在当代科学史上还不曾有一个年轻科学家肯向广大听众阐述自己新颖、独到的思想借以谋生。这表现了伽罗瓦所具有的罕见的坚强个性。

1831 年 4 月初，开始对国民自卫军的几名炮手提出诉讼。在塞纳省陪审法庭前，站着 1830 年国民自卫军被解散后拒绝解除武装的 19 名年轻人当中的 16 位青年。

市政府警卫队占据了司法官的走廊。上流社会青年挤满厢座，学生和工人拥挤在法庭大厅的门边。被告在辩护律师——像他们一样也是共和派——的陪同下进入大厅。当他们昂首挺胸、镇静沉着地出现时，大厅里响起了欢呼声。自从 1830 年 7 月以来，共和派得不到一次适当的机会来宣传自己的主张。因此，被告们抓住这个机会，以法庭为战场，发起了有力的进攻。他们揭露大城市中平民生活骇人听闻的贫困；揭露共和党人所受到的迫害。他们还充满激情地大谈共和党的纲领。作为证人的一位共和党人断言，传播共和思想的事业无须秘密活动。因为：“革命是全民族的事业，只有剥削人民的人除外；这是我们祖国的事业，它正履行着民意所赋予它的解放使命；这是向人类克尽己责的法兰西事业。至于我们，先生们！”在结束自己的讲话时，他大声疾呼道：“我们是革命的奴仆。我们时刻响应着革命的号召！”这段慷慨激昂的演说，引起了热烈的掌声，人们要求法庭做出公正判决。

律师们很轻易地证明了有关策划旨在以共和政体代替君主制度的秘密阴谋的指控是毫无根据的。全体被告都被宣判无罪。

当天晚上，在巴黎许多房屋里，闪耀着节日的彩灯。为了庆祝胜利，人民之友协会在“布尔根饭店”举行盛大宴会。在应邀出席宴会的 200 名爱国者中，也有埃瓦里斯特·伽罗瓦。当时，为了尽量避免与警察发生冲突，举杯致词都是预先准备好的，并且约定不发表任何抨击政府的演说。但是，宴会上，那些年纪最轻、热情奔放的共和派时常讲出一些言词过激的话。每次举杯都夹杂着呼声：“共和国万岁！国民公会万岁！”“‘打倒路易—腓利浦！”

正当晚会进行得热烈之时，伽罗瓦站了起来，他一手持着匕首，一手举着酒杯，说道：“为路易—腓利浦干杯。”他重复举杯说了两次。大多数与

会者对此举报以热烈的掌声；但一些没有看见刀子的人以为伽罗瓦真的是在提议为法国国王的健康干杯，所以他们表示出强烈的不满。于是，误会引起了混乱。到宴会结束时，根本谈不上什么秩序了。

第二天清晨，伽罗瓦在家中被捕，随后被关进了圣佩拉吉监狱。在此期间，人民之友协会试图通过该会的律师说服伽罗瓦放弃他说的话，以求获释。但是，个性刚直的伽罗瓦拒绝妥协。

6 月 15 日，在塞纳省陪审法庭上开始审查“伽罗瓦教唆谋害法兰西国王的人身和生命未遂”案。

在法庭上，针对庭长的提问，伽罗瓦——被告席上的这个身体柔弱、精神焕发、充满自尊心的少年，简短而犀利地回答着，有时迅速地说出一两句激动人心的话。当法官问他是不是用一手举杯，一手持刀的方式来表达法国国王理应吃上一刀或者竭力想鼓动某个人采取这类行动的意图时，伽罗瓦答道：“只有当路易—腓利浦成为背叛者，也就是越出法纪的范围，企图加强对人民的剥削时，我才想鼓动大家采取这种行动。”法官又问伽罗瓦是否认为国王有背叛国家的企图时，伽罗瓦尖刻地回答：“是的。国王的一举一动，虽然还没有证明他的不当，但令人怀疑他是否正直无私。例如，他的登基就是预先策划的。”

伽罗瓦机智勇敢地回击着。当法官说他的行为带有煽动性时，他笑着说：“如果我干脆提议为路易—腓利浦的死亡干杯，你们会感到更加高兴吧！”这些带有讽刺意味的话使观众感到轻松，人们不住地点头赞叹。

在审判将要结束时，伽罗瓦大声说：“你们都是小孩！你们把我们的头放到断头台上，可是你们没有力气把斧头砍下去。我们也是小孩，但是我们精力充沛，勇敢直前。共和主义者的灵魂是污泥沾染不了的！”

最后，通过律师的努力和伽罗瓦为自己，也是为共和派的有力而正义的辩护，伽罗瓦被宣告无罪，当场获释。

路易·腓利浦政府对共和党在群众中的威信不断提高以及共和派积极从事与政府对立的行动愈来愈难以容忍。7 月 11 日，政府通过了逮捕共和党领导人的决议。同时没收了共和党为纪念 7 月 14 日国庆节而印制的号召书，因为这份告巴黎人民的呼吁书写道：

“7 月 14 日（星期四），爱国者们集合在巴士的狱广场上并栽植自由之树，以纪念攻克巴士的狱和法兰西共和国成立 43 周年。

“示威游行将在下午一点钟开始。

“自由之树将由‘7 月革命’的参加者组成的仪仗队护送。装饰着花条绦带和三色绦带的树枝由 1789 年的老战士和在“七月革命’中负伤的战士高擎着。“工人、学生、‘七月革命’的参加者、资产阶级出身的青年以及一切爱国人士都被邀请参加这次庆祝会。自愿参加庆祝的国民自卫军军人请穿制服出场。”

吓破了胆的政府当局禁止示威游行，警察继续逮捕共和党人。为了表示抗议，共和派决定在 7 月 14 日组织群众示威活动。伽罗瓦勇敢地接受了担任领导者的任务。这一天，他与一个法律系的学生杜沙特列一起率领 600 名示威者，一路高喊着口号前进在大街上。不久，前来镇压的警察赶到，把伽罗瓦和杜沙特列与示威群众分隔开来，并抓走他们。随后，两人被关进了圣佩拉吉监狱。

示威游行持续了一整天。但到了晚上，共和派在爱丽舍宫广场受到了乔

装成“工人”的市政府警卫队的袭击。第二天，报上发表了被逮捕的最著名的共和党领导人的名字，其中包括伽罗瓦。

不论是内务大臣，还是警察局长，都清楚伽罗瓦对共和党的功劳；而且他的数学天赋对他们也不是秘密。因此，他们对伽罗瓦特别严厉。伽罗瓦的案子被拖了 3 个多月才审理。由于在被捕的时候，伽罗瓦穿着国民自卫军炮兵的制服，携带马枪和匕首，所以，他被控非法穿军服和携带武器而判处 9 个月徒刑。

伽罗瓦从 1831 年 7 月 14 日起至 1832 年 3 月 16 日，被关在圣佩拉吉监狱。在这所监狱里，犯人分为三类：政治犯、刑事犯和未成年犯。而政治犯主要是当时被逮捕的共和派人。他们本身又分为三等：最有钱有势的住单身房间，生活费用自备，可从邻近的饭店购买膳食。比较年轻而又比较重要的人物，七八个人合住一间房，享有与前者相同的特权。穷人则住在 60 人合住一间房的牢房里，自然，伽罗瓦被关入第二类型的牢房中。

白天，大多数政治犯把时间消磨在监狱院子里所附设的小酒馆中。夜间，全体共和党犯人要参加称作“晚祷”的仪式，即先唱“马赛曲”和“进行曲”，然后开始演戏剧。通常是表演比喻七月革命事件的节目，而演员的道具只有一样东西——装着被路易—腓利浦扼杀的共和国遗体的“棺材”。演出一直要进行到午夜一点钟。对体质虚弱、经常深思熟虑的伽罗瓦来说，这所监狱谈不上是个‘安静的住所”。

在狱中，伽罗瓦与著名的浪漫主义作家热拉尔·德·内尔瓦尔结识。内尔瓦尔风趣的谈吐吸引了伽罗瓦，内尔瓦尔则十分欣赏伽罗瓦的智慧，两人很快成了好朋友。内尔瓦尔出狱那天，枷罗瓦在与他道别时答应自己一旦获释就拜访他。然而，不幸的伽罗瓦又在牢中度过了两个多月后，于出狱的第二个月就被杀害了。

在狱中，伽罗瓦心情忧郁沉闷。有一天，有人和他打赌一人喝一瓶烧酒，伽罗瓦接受了这个挑战。自然，后果是很可怕的——伽罗瓦喝得酩酊大醉，被人抬回到牢房里，倒头昏睡了一天一夜才清醒过来。为此，伽罗瓦的一位狱中难友对发生的事情深表遗憾，他说：“宽容这位柔弱而大无畏的少年吧！3 年之中，科学在他额上划下 60 年深思熟虑也不会更深的皱纹。为了科学，请爱护他的性命吧！再过 3 年，他必将成为真正的科学家。”

伽罗瓦并未虚度时光，他在狱中仍然不停地工作着，因为他打算在获释后立即写出两部著作。

1832 年 3 月 16 日，伽罗瓦因病从圣佩拉吉监狱转移到设在努尔申街第 86 号的医院里。这所医院是受警察局监督的，院长担负着监视病人的任务。伽罗瓦在 4 月 29 日监禁期满前一直住在这所医院里。出院后，伽罗瓦的朋友们多次劝说他与大家在一起，过安闲恬静的生活，但他拒绝了。因为他所追求的革命事业还未获得成功，革命者仍然遭受着迫害。伽罗瓦在给朋友的信中写道：

“……憎恨，只有憎恨！谁对目前不感到刻骨的憎恨，而对未来不怀着真挚的热爱呢？

“如果我的理智不再需要暴力，那么我的内心却需要暴力。我要为我经历过的许多苦难复仇雪恨。

“要是没有这一切，我就可以和你在一起。”

正当伽罗瓦准备以全部热情投入到工作、革命中去的时候，不幸的事情

发生了。一次，伽罗瓦在一个朋友家结识了一个女子，此后便与她有了交往。但是这个女人却在伽罗瓦和另外两名共和党人之间进行挑拨，这招致了伽罗瓦与他们在 5 月 30 日的决斗。

在决斗前一天，伽罗瓦写了三封信：一封给共和派的同志们，一封给 N·L 和 V·D，而最出色的是给朋友舍瓦烈的信。在给 N·L 和 V·D 的信中，伽罗瓦写道：

“有两个爱国者约我决斗……我无法拒绝。

“……我是违背自己的意愿而参加决斗的，也就是说，用尽一切办法希望和平调解事情未果之后，才进行决斗的。“不要忘了我！因为命运不让我活到祖国知道我的名字的时候。”

至于决斗违背伽罗瓦意愿的原因，伽罗瓦在给全体共和派的信中表明了：

“我请求我的爱国朋友们不要责备我不是为自己的祖国而献出生命。

“我将成为一个下流的卖俏女人的牺牲品而死去。”

给舍瓦烈的信的大部分内容是谈数学问题的。伽罗瓦死后，在他的桌子上发现了两张纸条，其中一张写有这么一句话：“这个论据需要补充，现在没有时间。”日期是：“1832 年 5 月 29 日”。由此可见，在临决斗前，他仍在校正这些数学分析的著作。

5 月 30 日清晨，决斗双方在约定地点——冈提勒的葛拉塞尔湖附近，用手枪在相距几公尺的地方互相射击。不幸的是，伽罗瓦被一颗于弹击中了腹部，随后一阵剧痛使他失去了知觉。几小时之后，当地一个居民发现了他，并把他送到科申医院。

“不要哭，”伽罗瓦在生命的最后一刻，对守在身旁的弟弟说：“不要哭，我在 20 岁的年纪死去，需要我全部的勇气。”

1832 年 5 月 31 日上午 10 时，伽罗瓦与世长辞。

安葬那天，人民之友协会的代表团、法律系和医学系的大学生、巴黎炮兵部队以及他生前的许多好友都来为他送葬。市民代表致悼词，表达深切的悲痛。

伽罗瓦的全部数学著作到了 1846 年才被发表。那 60 页手稿向世界宣布了科学家伽罗瓦的名字。从此以后，他的名字开始在科学上名列前茅。

二、埃瓦里斯特·伽罗瓦对

科学发展的贡献

伽罗瓦的数学著作，保存下来的只有 60 页。这 60 页手稿是数学科学发展史上的里程碑。

伽罗瓦的思想十分独特，而且具有坚定的目的性。他对于那种烦琐累赘的计算方法感到不可抑制的厌恶。因此，他的表述极其简明扼要。但是他所写的一切，都因为具有数学家不倦钻研的思想而放出异彩。他的每一部著作，仿佛都是一次新的大胆的跃进，先前已达到的又落在了后面．新的将被更新的所取代。伽罗瓦对待读者的态度有时似乎很傲慢，他并不怎么关心读者的兴趣，但实际上这是因他惊人的洞察力和敏锐的思维所致。

在钻研中，首先使伽罗瓦感兴趣的，并不是个别的数学习题，而是决定

一连串想法的即指导思维运动的论证方法或“方式”。他把论证方法建立在一个能够概括当时已经达到的成就并决定科学长期向前发展的深刻理论的基础上。他的这种理论被后人称为“一个明确的概念结构之建立”。

很多从前彼此孤立地加以研究的各种理论，实际上是需要做精确计算和实际应用的个别情况而已。所以数学家不必去进行计算。正如伽罗瓦所说的，他们只要“预见到”如何计算就行了。伽罗瓦在圣佩拉吉监狱写成的研究报告中，对这一点作了明白的说明：

“起初，数学具有这样一种性质：即代数方法的计算已不十分需要；非常简单的定理未必值得翻译成分析的语言。只有在欧拉以后，由于这位伟大的数学家为科学界发现了新的可能性，这种较为简短的语言才成为必不可少的东西。从此，计算变得越来越需要，同时，随着它被应用于越来越高深的科学部门而变得越来越繁难了。本世纪初，算法已经达到相当复杂的程度，以致数学家们如果不使自己的学术著作具备严整性，能够迅速地、一目了然地掌握大量的运算数目，则任何进步都是不可能的。

“总之。我认为，依靠改进计算而获得的原则上的简化绝不是无穷无尽的。终有一天，数学家必将能够清楚地以规范数变换作出预见，以致不必再花时间和纸张来认真进行计算。我并非断言，除了这种预见外，分析不能有其他的新成就；但我认为，如果没有这种辅助工具，有朝一日，全部分析方法都将成为徒劳无益的东西。

“使计算听命于自己的意志，把数学运算归类，学会按照难易程度，而不是按照它们的外部特征加以分类——这就是我所理解的未来数学家的任务，这就是我所要走的道路。“不要把我流露出来的急躁情绪与某些数学家向来对无论哪一种计算都要根本回避的意图混为一谈。他们不用代数公式，而使用冗长的议论，在重迭的数学变换之上，又加上对这些变换的重迭的文字概述，所使用的又是不适于解答这些算题的语言。这些数学家落后了 100 年。

“在这里没有这类的情况。我在这里进行分析之分析。总有一天，在这个初具轮廓的高等分析中所提到的变换，将真正地得到实现，并且是按照难易的程度，而不是按照这里出现的函数形式予以分类。”

可以体会到，这份报告的字里行间都贯穿着伽罗瓦那热烈的信念。这种信念来源于他对科学客观、公正的态度。他曾经指出：

“没有跟科学打过交道的人，必定会感到一切都很奇怪，因为他们通常把‘数学’一词看作是‘精确’一词的同义语。

“但如果他们考虑到，科学不过是人类智慧的一种产物，它注定了去研究和探索真理，而不是发现和认识真理，那他们就不至于大惊小怪了。事实上，如果有足够深邃的智慧，能够立即掌握到不仅是我们已知的东西，而且是各种各样一般的数学真理的全部总和，那么就有可能借助某些普遍原理中的同样方法，合乎逻辑地、又似乎机械地引申出这些真理；这样，科学家的任务就更加艰巨了。科学的发展是比较不平衡的，因为它要通过一系列的配合才能得到发展，而在配合之中，偶然性所起的作用远非微不足道的；科学的生命是混沌一团的，它好比由于矿层的毗连而相互交错的矿物。这种情况不仅适用于由众多科学家的工作成果所构成的整个科学界，而且也适用于其中每一个科学家的单独研究工作。分析家们用不着欺骗自己，因为他们并不是在演绎真理，而是在进行组合；他们领会真理是徘徊于左右之间的。”

虽然伽罗瓦的科学活动惊人的短促，但他的研究成果是辉煌的。他的著作，标志着数学前史的结束和数学史的开始。

在伽罗瓦的著作中，所说的“ 把数学运算归类 ”指的就是群论，即从 19 世纪末叶开始，对数学分析、几何学、力学、物理学的发展有着巨大影响的群论。创立这个理论的荣誉属于伽罗瓦，因为他是第一个估计到这个理论对科学发展的意义的先驱。

伽罗瓦所研究的求解代数方程的问题，长期以来吸引着数学家们的注意。解方程，意即求出它的根值。在求一次和一次方程的根时很容易，但在三次方程中，就不太容易了。而伽罗瓦研究的是任意次方程，即方程的一般情况。

从实践观点来看，无论形式多么复杂的任何具体方程的解并没有任何意义。早在 16 世纪，数学家就已经发现，使用能确定方程根的近似值的方法较为便当。这些近似值充分满足了物理学家、化学家和工程师的需要。但对于使用字母作系数的一般方程来说，近似法是求不出它的根值的。伽罗瓦的第一个发明就在于他把这些根值的不定式的次数减低下来，确定这些根的某些特征。伽罗瓦的第二个发明就是他所使用的求得结果的方法，即他并不研究方程本身，而研究它的“ 群 ”，也就是研究它的“ 家族 ”。

“ 群 ”的概念是在伽罗瓦著作提出之前不久才出现的。但当时，它只不过像是一个没有灵魂的躯体，是偶尔出现在数学上的、人为臆断的大量概念之一。伽罗瓦的贡献不仅在于他使这个理论具有生命，还在于他以独创精神赋予这个理论以必要的完整性；伽罗瓦指出，这一理论富有成效，并且把它运用到解代数方程的具体习题上。所以，埃瓦里斯特 · 伽罗瓦是群论的真正创始人。

在数学科学中，“ 群 ”被看作是具有某种共同特性的对象总和，譬如奇数群（不能被 2 整除的数的集合），它的特性在于如果令群中的任意两个数相乘，则其积仍为奇数，如 3 乘 3 等于 9，当实例从简单到复杂时，则可以选择关于某些对象的运算自身作为“ 对象 ”。在这种情况下，群的主要特征表现为任意两种运算的结合也是一种运算。伽罗瓦在分析求解的方程时，就是把某种运算群与这个方程联系起来，并证明方程的特性反映在该群的特点上。由于不同的方程可以“ ‘ 有 ”同一个群，所以无须研究所有的方程，只须研究与之相适应的群就可以了。这一发现标志着数学发展的现阶段的开始。

不论群是由什么“ 对象 ”——数、位移或运算——组成，这些对象都可被视为是不具有任何特征的抽象的东西。而要测定群，只须说明为了使某“ 对象 ”的总和可以称为群而应遵循的共同规则就可以了。这些规则就是群的公理，群论是依据这些公理运用逻辑总结出来的结果。这一理论在证实不断被发现的新的特性过程中得到了发展。群论为研究工作提供了新的数学工具。

人类认识的发展过程是不平衡的，有时候某一方面的进展会暂时中断。科学也会在某个时期处于停滞之中，昏昏欲睡。科学家们从事琐碎的事情，把贫乏的思想隐藏在华丽的计算后面。19 世纪初期的数学发展状况就处在停滞阶段。因为在当时，代数变换已演进得很复杂了，以致向前发展实际上成为不可能的事情了。数学家们不再能够“ 预见 ”了。因此，寻找新道路以推动科学发展就成了时代的需要。对此，伽罗瓦曾说：“ 在数学中，正如在任何其他科学中一样，有一些需要在这一时代求得解决的问题。这是一些吸引

先进思想家思想而不以他们个人的意志和意识为转移的迫切问题。”

伽罗瓦以他的著作，开始了数学科学新的繁荣时期。群的概念的建立，使数学们家摆脱了研究大量的、各式各样的理论的繁重负担。伽罗瓦曾指出：“我在这里进行分析之分析”，这种想法表明了他竭力想使这些新的、像辞汇表那样具有实用意义的方法得到运用。所以说群论首先是数学语言的整理。

有些人谴责伽罗瓦参与政治活动，说他过分年轻，行为过激而招致杀身之祸。他们认为科学家的工作是超时间和超空间的，科学家应该在某种抽象的世界中生活，进行创造。这种观念使他们不能认清伽罗瓦在科学上所作的贡献的价值。与这种偏见不同，伽罗瓦反对科学家的天生孤独性。他相信：“科学家生来并不比其他人更要过孤独的生活；他们也是属于特定时代的人，而且迟早要协同合作。到了那时候，将有多少时间腾出来用于科学呀！”

正因为伽罗瓦把科学理想与社会理想结合起来，并为实现它们而奋斗，所以他成了一位杰出的数学家和勇敢的革命者。可以说，伽罗瓦短暂的一生是伟大的。

三、伽罗瓦与群论

群论这门数学在当代已经成为数学中的重要部分了，而其理论的应用、发展应该首先归功于埃瓦里斯特·伽罗瓦。因为是伽罗瓦赋予群论以实在的内容，建立起群论学并加以完善，从而改变了 19 世纪初叶，数学科学发展的停滞状况，开创了新的繁荣时期。所以说，伽罗瓦对科学的重大贡献就在于他对群论的贡献。因此，要了解伽罗瓦，就必须了解群论。

1．群的重要

解方程式是数学中一件重要的事情。代数方程式可以依他的次数来分类。

一次方程式 $ax+b=0$ 的解答很容易得出，是

$x=-b/a$

二次方程式

$ax^2+bx+c=0$ 的解是

$$x=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/2a$$

但是，三次方程式

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

和四次方程式

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

的解法就比解一次、二次方程式难得多了，直到 16 世纪才有了解法。

当方程式的次数增大时，解法的困难增加得很快。一般数学家虽都不会解高于四次的方程式，却都相信一定是能办到的。直到 19 世纪，利用群论的道理，才证明了这是不可能的事。因为一个问题能否解决要看对于解答所加的限制条件而定。譬如

$x+5=3$

如果允许 x 为负数的话，此方程可解；若限定 x 不能是负数，则此方程式就不能解了。同样，假如 x 表示饼数，方程式

$2x+3=10$

是可解的。但倘若x表示人数、这个方程式就不能解了，因为 $x=3\frac{1}{2}$（人）没有意义。

再如，一个代数式可以分解因数或不可以分解因数要看是在什么数域对它进行分解。如

x^2+1

在实数域中是不可分解的，可是在复数域却是可分的，因为

$x^2+1=(x+i)(x-i)$，

其中 $i=\sqrt{-1}$

由于一般高于四次的方程式不能用根式解，即它的根不能用有限次的有理运算（加、减、乘、除）和开方表作方程式的系数的函数，所以说高于四次的方程不能解。

2．群的内容数学中的系统可以说是一部数学的机器，它的主要部分是

（1）元素。

（2）相对应的运算。

例如：

（a）①元素是一切整数（正整数、负整数或 0）；

②运算是加法。

（b）①元素是一切有理数（可以写成两个整数的商的数，如 3／4。 0除外）；

②运算是乘法。

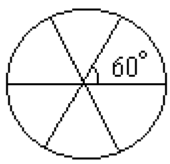
（C）①元素是某几个文字（如 x_1、x_2、x_3）的置换；

②运算是将一个置换跟着另一个置换。

①元素是下图的旋转，转的度数是 60^0 或 60^0 的倍数；

②运算是将一个旋转跟着另一个旋转。

如果这种系统能满足下列四个性质，就称为群。



（1）假使两个元素用规定的运算结合时，所得的结果仍是系统中的一个元素。

例如：

在（a）中，一个整数加上另一个整数的所得还是一个整数。

在（c）中，假设有一个置换，将 x_1 代作 x_2，x_2 代作 x_3，x_3 为代作 x_1，即将

x_1、x_2、x_3

换作

x_2 x_3 x_1

置换后的结果仍在原系统中。

（2）系统中必须含有主元素。主元素具有与系统中任意另一个元素结合的结果仍是那另一个元素的性质。

例如：

在（a）中，主元素是 0，因为 0 与任何整数相加的结果还是那个整数。

在（b）中，主元素是 1，因为任意一个有理数乘以 1 后的积还是自身。

在（c）中，主元素是那个将 x_1 代作 x_1，x_2 代作 x_2，x_3 代作 x_3 的置换，因为任何置换和自身结合的结果是不变的。

在（d）中，主元素是那个 360°的旋转，因为系统中的任意一个旋转和此旋转结合的结果仍为自身。

（3）每个元素必须有一个逆元素，即一个元素和其逆元素用系统中的运算结合的结果是主元素。

例如：

在（a）中，3 的逆元素是-3，因为 3 加-3 的和是 0。

在（b）中，a／b 的逆元素是 b／a，因为 a／b 和 b／a 相乘的积是 1。

在（C）中，将 x_1 代作 x_2，x_2 代作 x_3，x_3 代作 x_1 的置换的逆元素是将 x_2 代作 x_1，x_3 代作 x_2，x_1 代作 x_3 的置换。因为这两个置换结合的结果是那个将 x_2 代作 x_2，x_3 代作 x_3，x_1 代作 x_1 的置换。

在（d）中，60°的旋转（按顺时针方向）的逆元素是一个-60°的旋转（按逆时针方向）。因为这两个旋转结合的结果是主元素——360°的旋转。

（4）结合律必须成立。

例如，设 a，b，c 是任意三个元素，又设运算用记号 0 表示，则结合律指

（a0b）0c＝a0（b0c）

应用到系统（a）中，为

（3＋4）＋ 5＝3＋（4＋ 5）

所以结合律在（a）中能成立。

对于一个系统，它是否成群，不但要看它的元素，还要看它的运算才能决定。

3．群的重要性质

伽罗瓦用来解方程式的置换群具有十分有趣的性质。

在表示置换时，为了方便起见而采取一种简单的记法，即在记 x_1，x_2，x_3 时可将 x 省去，只用 1，2，3 来表示。例如一个将 x_1 代作 x_2，x_2 代作 x_3，x_3 代作 x_1 的置换，可以简单的记作（ 1 2 3）

这个记号的意思是说：

1 变作 2，2 变作 3，3 变作 1。

换句话说，就是

x_1 变作 x_2，x_2 变作 x_3，x_3 变作 x_1。

同样，（132）则表示一个将 x_1 变作 x_3，x_3 变作 x_2，x_2 变作 x_1 的置换。又如

（1 3）（2）或（1 3）

表示一个将 x_1 代作 x_3，x_3 代作 x_1，x_2 代作 x_2 的置换。

有时一个群的部分元素自己形成一群，这种群称为“约群”。例如，前面（a）例中，一切整数对于加法而言，为一群。若单拿一切偶数来看，对于加法，他们也成一群；因为群的四个性质它都适合：

（1）两个偶数的和还是偶数。

（2）0 是主元素。

（3）一个正偶数有相应的负偶数作逆元素，而一个负偶数的逆元素是正偶数。

（4）结合律成立。

所以，偶数群是整数群的约群。

伽罗瓦证明了约群的元素个数是原来的群的元素个数的约数。

在约群中，最重要的是“不变约群”，即一个约群中的任何元素应用原来的群中任何元素的变形，[例如设有一个元素（12），用另一个元素（12 3）去右乘它，再用（1 2 3）的逆元素（1 3 2）去左乘它，所得的结果是

（1 3 2）（1 2）（1 2 3）＝（2 3），

这个结果（2　3）就称为（1　2）应用（1 2 3）的变形。]若仍是约群中的元素，这个约群就称为原来那个群的不变约群。

一个群可以看作是它自己的约群，但不是真约群，一个真约群必须比原来的群小。但如果 H 是 G 的不变约群，假如 G 中没有包含 H 而较 H 大的不变真约群存在时，H 就称为 G 的一个极大不变真约群。

假设 G 是一个群，H 是 G 的一个极大不变真约群，K 是 H 的一个极大不变真的约群，……若将 G 的元素用 H 的元素个数去除，H 的元素用 K 的元素个数去除，……所得诸数，称为群 G 的“组合因数”。若这些组合因数都是质数，则 G 是一个“可解数”。

在有些群中，群中的一切元素都是某一个元素（主元素例外）的乘幂。如在群

1，（1　2　3），（1　3　2）

中，$(1\ 2\ 3)^2 = (1\ \ 2\ \ 3)\ (1\ \ 2\ \ 3)$

$= (1\ \ 3\ \ 2)$

$(1\ \ 2\ \ 3)^3 = (1\ \ 2\ \ 3)\ (1\ \ 2\ \ 3)\ (1\ \ 2\ \ 3) = 1$

此群中的元素都是（1　2　3）的乘幂。这种群，称为“巡回群”。

在一个置换群中，若每个文字都有一个而且只有一个置换将这文字换成其他某个文字，则这个群称为“正置换群”。例如群

1，（1　2　3），（1），

在 1 中 x_1，变成 x_1，在（1　2　3）中 x_1 变成 x_2，在（1　32）中 x_1 变成 x_3……所以这是一个“巡回正置换群”。

4．一个方程式的群

对于一个一定的数域，每个方程式都有一个群。譬如三次方程式

$ax^3+bx^2+cx+d=0$，

假定它的三个根 x_1，x_2，x_3 是相异的。任意取一个这三个根的函数，如

$x_1x_2+x_3$

在这个函数中，若把这些 x 互相替换，那么，会有六种置换。（12）一类的置换为 $x_2x_1+x_3$；（1　3）为 $x_3x_2+x_1$；（12　3）为 $x_2x_3+x_1$。此外，还有不动置换。也就是说共有：

1，（1　2），（1　3），（2　3），（1　2　3）（1　3　2）六个置换，即对于这三个 x，一共有 3！（表示 3×2×1）种可能的置换。一般说，n！表示 n（n－1（n－2）……1，所以 n 个 x 有 n！种置换。于是，伽罗瓦得出

结论，在函数 $v_1=m_1x_1+m_2x_2=m_3x_3+\cdots\cdots mnxn$ 中，当 x 作各种可能的置换时，这函数就有 n！个不同的值，用 v_1，v_2，v_3，……vn！表示这些不同的值，可作出式子 P（y）=（$Y-v_1$）（$Y-v_2$）……（Y－vn！），其中 Y 是一个变数。

将 P（y）的各因子乘出来，就得到一个 Y 的多项式。假设 P（y）在某一数域中分解因数，包含 v_1 而在此数域中为不可约的部分是（$Y-v_1$）（$Y-v_2$）或 $Y_2-(v_1+v_2)Y+v_1v_2$ 在这部分中所含的 v 仅有 v_1v_2。则将 v_1，v_2 互相交换的 x 的置换成一群，这个群叫“方程式在这数域中的群”。

一般地说，一个方程式在一定数域中的群是由 P（Y）中包含 v_1 的不可约部分而决定的。将这个不可约部分记作 G（y），则 G（y）＝0，这称为“伽罗瓦分解式”。

在一个数域中将一个式子分解因数，到了不能再分解时，若将数域扩大，可以继续分解下去。但扩大数域的结果是使方程的群变小。

明白什么是方程式在一个数域中的群，就可以去求它。例如二次方程式

$X_2+3X+1=0$

有两个根 x_1，x_2，可能的置换只有 1 和（1　2）两种。所以它的群或者含有这两个置换或者只有 1 这一个。而这要看是在什么数域中了。

以函数 x_1-x_2 为例，二次方程式

$x^2+bx+c=0$

的两根之差是

$x_1-x_2=\sqrt{b^2-4c}$

在此例中，规定 b＝3，c＝1，则

$x_1-x_2=\sqrt{5}$

如果所讨论的数域是有理数域，那么，这个函数的值不在数域中，所以群中必有一个置换能变更此函数的值，这就是（1　2）置换。则此方程式在有理数域中的群是由

1，（1　2）

两个置换作成的。但如果讨论的数域是实数域，那么，在此数域中，所以群中一切置换都不改变函数 x_1-x_2 的值，所以（1　2）不能在群中。此方程式在实数域中的群是由 1 一个置换作成的。

5．伽罗瓦的鉴定

伽罗瓦证明了：一个方程式在一个含有它的系数的数域中的群若是“可解群”，则此方程式是可能用根式解的，而且仅在这样的条件下方程式才能用根式解。

以一般二次方程

$ax^2+bx+c=0$

为例，它的两个根是 x_1，x_2。它在一个含有它的系数的数域中的群之元素是 1 和（1　2）。这个群的唯一的极大不变真约群是 1，则此群的组合因数是：2／1＝2，这是一个质数，因此，根据枷罗瓦的鉴定，凡二次方程式都是可用根式解的。

再取一般三次方程

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

来看，因为它有三个根 x_1，x_2，x_3，所以在一个含有它的系数的数域中，它的群含有 1，（1　2），（1　3），（2　3），（1　2　3），（1　3　2）六个置换。此群的唯一极大不变真约群含有 1，（1 2 3），（1　3　2）三个置换。据此可知，组合因数是 6／3＝2 与 3／1＝3，两个都是质数。所以凡三次方程式都是可用根式解的。

再看一般的四次方程式

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$

它在一个含有其系数的数域中的群元素个数是 4！＝24。这个群的组合因数是：

2，3，2，2。

这些都是质数，所以凡四次方程式也都可以用根式解。

对于一般的五次方程式，含有 5！个置换，其组合的因数是 2 与 5！／2 而 5！／2 不是质数，所以，一般的五次方程式不能用根式解。

如此，应用伽罗瓦群的理论，可以得到一个简单而有力的方法来决定一个方程式能否用根式解。

6．用直尺与圆规的作图

伽罗瓦在发明了判别方程式能否用根式解的鉴定之后，又创造了如何求一个能用根式解的方程式的根的方法，即利用一组“辅助方程式”，而这些辅助方程式的次数则是原方程式的群的组合因数。

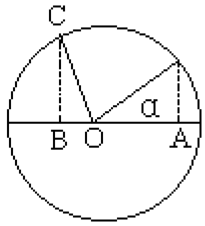
其具体方法是：先把第一个辅助方程式的根加入数域 F 中，然后假设数域经第一个辅助方程式的根之加入而扩大了，并使分解因数的工作因之可以再继续下去，令方程式在这扩大了的数域 F_1 中的群是 H。再将第二个辅助方程式的根加人 F_1 中，使方程式的群变为 K，直到方程式在那个最后扩大成的数域 F_m 中的群是 1。而函数 x_1 不能被 1 中的置换变更它的值，所以 x_1 必在数域 F_m 中。同样，其余的根也都在 F_m 中。这样就可以得知什么样的数应加入原来的数域中，把方程式的群变为 1，从而决定方程式的根存在于怎样的数域中。以方程式 $x^3-3x+1=0$

为例。此方程式在有理数域中的群由 1，（1　2　3），（1　3 2）三个置换作成。这个群的极大不变真约群是 1，组合因数是 3，所以只有一个辅助方程式，其次数是 3，这个辅助方程式的根含有一个立方根。所以这个立方根必须加入数域中，才能使方程式的群变为 1，而原来的方程式的根可从有理数域中的数及这个立方根单用有理运算得出。

只用直尺与圆规，能作直线和圆，这用代数表示是一次和二次方程式。所以，求它们的交点，只需解一个二次方程式就可以把交点的座标用有理运算和平方根表作系数的函数。因此，凡是能用直尺与圆规作出的数量都可以有限次的以加、减、乘、除和平方根表示。譬如有两线段 a，b 和单位长度，可用直尺与圆规作出它们的和 a＋b，差 a－b，积 ab，商 a／b 以及这些量的平方根如 $\sqrt{ab}$，$\sqrt{b}$ 等。

在讨论一个作图只用直尺、图规是否可能时，必须作出一个表示此种作图的代数学方程式。若此方程式在数域中能分解成单是一次和二次的代数式，则一切实数根都能用直尺与圆规作出。即使方程式不能分解成上述情况，只要它的实数根能用有限次的有理运算与平方根表作已知的几何量的函数，

那么，作图只用直尺、圆规也是可能的。



取 120°角来看假定此角位于一个半径是单位长的圆的中心，作出 cos40°来，则只要取 OA＝cos40°，于是 a 就是一个 40°的角，三等分 120°的作图就完成了。利用三角恒等式：

$2\cos 3a=8\cos^3 a-6\cos a$，

令 x=2cosa，则上式化成

$2\cos^3 a=x3-3x$

因为 3a＝120°， cos3a＝－1／2；上式可写作 $x^3-3x+1=0$ 在半径是单位长的圆中，可作 OB＝1／2，于是∠AOC＝120°。

要解上面的方程式，必须把一个立方根加入于有理数域中。但一个立方根是不能用直尺与圆规作出的，因此可知：用直尺与圆规三等分任意角是不可能的。

用相似的方法，还可证明用直尺、圆规解决立方倍积问题也是不可能的。

7．伽罗瓦的鉴定是正确的

在解方程式时，可利用方程式的根与系数之间的关系。例如在二次方程式

$x^2+bx+c=0$

的两个根 x1，x2 中，可得

$x_1+x_2=-b$ ①

与 $x_1x_2=c$ ②

的关系。那么，能不能从这两个方程式中解 x_1 与 x_2 呢？不可以。因为如果从①中得出 x_1 的值而后代入②中，结果是

$x^2{}_2+bx2+c=0$，

这与原二次方程式丝毫没有分别。所以，这个方法行不通。但是，如果能得到一对都是一次的方程式，则 x_1 和 x_2 就可求了。

首先设方程式

f（x）＝0

有 n 个相异的根，而且在由方程式的系数及 1 之 n 个 n 次根决定的数域中，此方程式的群是一个元素个数为质数的巡回正置换群。其中，1 之 n 个 n 次根的含义是：

由 1 有三个立方根：

$1，-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}，\quad -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$

可推出，在一般情况下，1 有 n 个 n 次根，记作：1，e，e^2，……，■ e^{n-1}

因为 1 个三个立方根只包含有理数和有理数的根数，所以 1 的 n 个 n 次根也只包含有理数和有理数的根数。这种数加入数域中去，不影响方程能用

根式解。

举一将 n 个方程式写作一个的一组一次方程为例：$x_1+\rho^{k}x2+\rho^{2k}x3+\cdots\cdots+\rho^{(n-1)k}x_n=r_k$，③此处 k 的值可为 0 与 n－1 之间的任何整数，如当 k＝0 时，③就为

$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n=r0$

当 k＝1 时，③为

$x_1+\rho^{x}2+\rho^{2}x3+\cdots\cdots+\rho^{n-1}xn=r_1$，

以下，依次类推。

因为一个方程式的最高次项系数若是 1，则诸根之和等于方程式中第二项的系数的负值，所以 r_0 之值可以直接从方程式的系数中求得。如果把置换（1 2 3……n）用于③式的左端，③式左端为

$x_2+\rho^{k}x3+\rho^{2k}x4+\cdots\cdots+\rho^{(n-1)k}x_1$

所以说置换（1 2 3……n）

将 r_k 之值变为 $\rho^{-k}rk$。又因 $P^n＝1$，故

$(r_k)^n＝(\rho^{-k}r_k)^n$，

所以置换（1 2 3……n）不变更 $r^n{}_k$ 的值。同理，群中其它置换也不改变 $r^n{}_k$ 的值。这就是说，所有 r 的值都可由根式得到。由③，可将 x 用ρ与 r 表示，则方程式③可用根式解。这样，就证明了：如果方程式在一个数域中的群是元素个数为质数巡回正置换群，则此方程式一定能用根式解。

举例来说，方程式

$x^3-3x+1＝0$

在有理数域中的群是 1，（1 2 3），（1 3 2）。它是一个元素个数为质数的巡回正置换群，所以可从 $x_1+x_2+x_3＝0$，

$x_1+\omega x_2+\omega^2x_3=r_1$，

$x_1+\omega^2x_2+\omega x_3＝r_2$，

这三个一次方程式中解它。此处ω表示 1 的一个虚立方根，r_1 与 r_2 可以由数域中的数的根数得出。换句话说，如果把这种根数加入到数域中，则 x 都存在于扩大的数域中。

在一般情况下，常可以

$y^2=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2\cdots\cdots(x_{n-1}-x_n)^2$ 作第一个辅助方程式，其右端是所有每两个根之差的平方之积。假如方程式的第一项系数是 1 的话，那么，上式右端则是方程式的“判别式”。例如二次方程式

$x^2+bx+c＝0$

的两个根 x_1，x_2 的差的平方是

$(x_1-x_2)^2＝(x_1+x_2)^2－4x_1x_2＝b^2－4c$，这恰是方程式的判别式。同样，高次方程式的判别式也可从系数求得。

再设所要解的方程式是一般的三次方程式，将第一个辅助方程式的根加入原数域后，方程的群为 H，即一个元数为质数的巡回正置换群。这样，可利用

$x_1+x_2+x_3=-b$，

$x_1+\omega x_2+\omega^2 x_3=r_1$，$x_1+\omega^2 x_2+\omega x_3=r_2$，

这三个一次方程式来解原三次方程式。其中 r_1，r_2 可由数域中数的根数求得。x_1 ，x_2，x_3 存在于这个最后经 r_1，r_2 的加入而扩大成的数域中。

这样就证明了：方程式在一个由其系数与 1 之 n 个 n 次根而决定的数域中的群若是一个可解群，则此方程式是可以用根式解的。

伽罗瓦的群论，是解决数学问题的重要工具，它对于数学就如同语言对于人的重要性一样。正像人们评价的，“无论在什么地方，只要能应用群论，就能从一切纷乱混淆中立刻结晶出简洁与和谐”。“群的概念是近世纪科学思想出色的新工具之一”。