学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

趣文选读—数学篇

BOOK

内部资料 非卖品

内容简介

这套趣文选读系列丛书，包括有“品德篇”、“历史篇”、“智谋篇”、“军事篇”、“语文篇”、“数学篇”、“地理篇”、“生物篇”、“科学篇”等 9 本。这 9 本书，分别收集了相关方面的知识短文及故事若干篇。这些文章及故事，思想内容健康，题材风格多样。知识性趣味性极强，读来引人入胜。可以帮助广大读者尤其是青少年读者扩展知识视野，陶冶思想情操，提高阅读欣赏能力。

“汝人学字”和“十进制”

从前有一个故事，叫做《汝人学字》。说的是一个小孩向老师学认字。老师第一天就教他认“一”，第二天教他认“二”，第三天教他认“三”。于是，这个小孩就说：“哈！认字这么容易，我已经学会认字了。”他爸爸、妈妈听了十分高兴，以为儿子真的学会认字了。过了几天，他爸爸要请一位姓万的客人吃饭，就叫儿子写张请贴。小孩答应马上就去写，他爸爸等呀等，过了老半天还没见儿子来，他十分奇怪，走到书房一看，只见儿子正在纸上一划一划地划个不停。他看见爸爸来了，就说：“这个客人真怪，不姓别的偏要姓万，我才写了几百呢！”

这是古代的一个笑话，当然不会确有其事。但是，如果我们的祖先不创造出一套好的记数方法的话，那么我们可真得像这个小孩一样，写个万字要划上一万道杠杠了！

人类是怎样巧妙地用十个阿拉伯数字来表示许许多多的数呢？

让我们先看一看古埃及人的记数方法。下面是古埃及人记数的符号：

10 100 1000 10000 100000 1000000 10000000

记数时，有 10 个■就用一个■表示，10 个就用一个■（或）■表示……这种记数法具有“逢十进一”的特点。这就是我们常说的十进制的记数方法。他们是从右往左来表示数的。例如。

古埃及的记数法虽然有趣，却不方便。用 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这十个阿拉伯数字来记数可方便多了。无论多大的一个数，用这个数字都可以简便地写出来。

阿拉伯数字记数也是十进制，具有“逢十进一”的特点，就是十个一用 10 表示，十个十用 100 表示，十个百就用 1000 表示，如此等等。这“一、十、百、千、万，十万、百万、千万、亿……”叫做计数单位。在阿拉伯数字记数法中，每一个计数单位不像古埃及那样用不同的符号表示，而是把它们从小到大依次由右往左排列在一定的位置上，这样就得到一系列记数的数位。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !99701040_0002_2.bmp}

同一个数字在不同的数位上所表示的数值是不同的，当它向左移动一位时，它的值就扩大 10 倍。例如，“5”记在个位上表示 5 个一，记在百位上表示 5 个百，记在万位上表示 5 个万，等等。这就是说，记数时，每个数字除了它本身所表示的数值外，还有一个位置值。这就是记数的位置原则。

有了十个阿拉伯数字和十进位值原则，就可以很方便地写出任何一个数了。例如，三十八万五千六百二十九就可以写成 385629；一千零七万六千零六，就可以写成 10076006。

（王福田　杨爱霞）

奇妙的进位

世界上所有的发明和创造，归根结底都是为了应用。数学也是一样，抽象的逻辑关系往往是由具体的事物和矛盾而发生出来的。数字运算中不可缺少的进位制就是一个例子。

上古时候，人们为了数出物体的个数，便产生了自然数的概念。但是，如何读出和说出这些数呢？由于自然数有无限多个，如果每一个都用一个独立的名称和记号来表示，这显然是不可能的。有人对莎士比亚著作中的单词作过统计，共有 1 万 7 千个不同的词，即使一个英文程度很好的人，在阅读这些著作时，也非有一本专门辞典不行。文字是如此的复杂，数字要是没有一种简化的方法去表示，也像文字这样复杂，那在表达数量关系时所出现的困难，是很难设想的。实践的需要促使进位制的产生。

早在有文化的初期，多数民族由于实际生活的需要，都或多或少地创造出一定的进位制；但是，用专门数码来表示数的书写方法，却产生得很晚，甚至像古代希腊、罗马这样有高度文化的民族，用数码来表示数的书写方法也是极不完整的。直到纪元初年，人们才初步应用数码，并按一定的进位制来表示数。

国际上通用的是十进制读数与记数方法，即较低位上的十个单位组成较高位上的一个单位。在我国，很早就运用了这种进位制。如周代《易经》中表示数量时曾有“万有一千五百二十”的记载，说明早在 2 千多年前，我国就有了十进位制。后来，甄鸾在他的《数术记遗》（成书于公元 6 世纪）中还有下面一段话：“黄帝为法，数有十等，乃其用也，乃有之焉。十等者：亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载。三等者，谓上中下也。其下数者，十十变之，若言十万曰亿，十亿曰兆，十兆曰京也。中数者，万万变之，若言万万曰亿，万万亿曰兆，万万兆曰京也。上数者，数穷则变，若言万万曰亿，亿亿曰兆，铛兆曰京也。”从这段话我们可以看出，当时虽采用了十进制，但缺乏统一的规定，主要原因是那时的生产力不发达，人们在实际生活中还不迫切需要用很大的数记载。

据调查，美国原始亚美利加各族的 307 种计数系统中，有 146 种是十进位的，106 种是五进位和二十进位的。可见，十进位制在历史上为人们所普遍采用。人类为什么喜欢十进位呢？根据语言学家对世界各进化民族和多数原始民族语言的研究，这是由于人类的手有十个手指，可以自由伸展。是一个很好的天然计数工具，因而不谋而合地都采用了十进位制。在英文中，“dight”这个单词既可以当“手指”讲，又可以理解为“数字”，这与人们长期用手指表示数字，是有必然联系的。另外，十进位制比较简单，这也是它传播最广的一个重要原因。

当然，除了十进位制外，还有其它进位制。实际上除了 0 和 1 以外，任何自然数都可以用来作为进位制的基础数。例如：二进位制，三进位制、五进位制等等。像北美的印第安人，中南美的少数民族、西伯利亚的北部民族及非洲人等，常用五进位制和二十进位制。1937 年在罗马尼亚境内发现旧石器时代的一根幼狼的挠骨，长七英吋，上面有五十五个刻痕，前面二十五个是五个一组地排列着，随后一个刻痕是原长的两倍，作为这一列的结束。这是五进位制应用的一个证明。巴比伦人最初使用六十进位制，直到现在我们还在使用这种进位制，如一小时等于六十分钟，一分钟等于六十秒，圆周等

于三百六十度，一度等于六十分等。在今天还在应用的进位制还有十二进位制，如一年有十二个月，一天是二十四小时（钟表面上仍只用十二）等，从英文数字的构词形式上也能看出十二进位制的痕迹。学过英语的人都知道，英文中从 1 到 12，这十二个数字是独立的，13 以后才有一个统一的构成法。

科学技术发展到今天，很多问题的解决都需要进行大量的计算。在许多情况下计算速度要求很高，必须使用自动控制。有些数学问题计算工作量很大，如建筑巨型水力发电站的拦河坝工程，就需要进行极为繁杂的计算。这里遇到的联合方程已经不是两三个未知数，而是十几个、几十个乃至上百个未知数，其计算的艰难复杂程度可想而知。堤坝设计不仅是整个工程的关键，而且直接关系到千百万人的生命安全，要求计算准确，迅速，这些都促进了计算机技术的不断发展。为了适应这样的需要，人们发明了二进位制，用 0 和 1 两个符号，就可以把一切自然数表现出来。如

自然数一，二，三，四，五，六，七，八，九，十，……

十进制 1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，……

二进制 1，10，11，100，101，110，111，1000，1001，1010，……

为了区别不同的进位制，我们常用括号加注的方法。如，在十进位制里，数 101 表为 $(101)_{10}$；在二进位制里，数 101 表为 $(101)_{2}$。

由于二进位制只有两个数字（0，1），人们就把电路的“开”、“关”分别表示 0 和 1 这两个数码，进行复杂的运算，这就是电子计算机的简单原理。

随着科学技术的发展，奇妙的进位必将得到更加深入的研究和广泛的使用。

（谭英）

数学，你从哪里来

记得有这样一个真实的笑话：一所城市小学的一年级新生入学测试，老师问一个从未到过农村的孩子：“ 你知道吃的米和面是从哪里来的？ ”“ 是从粮店来的。 ”“ 粮店里的粮是从哪里来的呢？ ”“ 不知道。 ”你觉得幼稚可笑吗？

其实，虽然今天你已经是六年级的学生，快要毕业了。如果提出一个类似的问题：“ 数学是从哪里来的？ ”你会不会认为是从教科书上来的呢？或者是从数学家的头脑里想出来的呢？那么，数学到底是从哪里来的呢？你知道吗？你能说清楚吗？

你可知道，你在小学学过的和将来升入中学还要学的数学知识——算术、几何、代数、三角，是人类从远古经过长期的生活实践才获得的。人类在地球上已经生活二、三百万年了，可是直到二、三万年前，才建立起初步的数和形的概念，积累了一点数学知识，这些知识就是幼儿园孩子们学的那些简单的数与形。大约在公元七世纪欧洲最有学问的英国学者倍达曾经说过：“ 没有比算术四则再难的了！现在从小学到中学学的算术、几何、代数、三角直到 400 年前公元十六世纪才完备起来。可是到了公元十八世纪，人们还对分数感到头痛。这就是说，你在学校的几年里，学完了人类二、三百万年里通过生活实践积累起来的数学知识！这真了不起！可是，当你回忆当初扳手指头数数的时候，你是不是感到当时真是太幼稚了呢？ ”

你知道算术的“ 算 ”字为什么是竹字头吗？

1954 年在湖南长沙一座战国晚期的楚墓中，发掘出一个竹笥（si），里面装有 40 根长约 12 厘米的竹棍，这就是中国古代的计算工具——算筹。到了十三世纪人们用竹棍把算珠穿起来，制成了一直到今天仍流传使用的算盘，用它来计算、加、减、乘、除，这就是小学数学的四则计算。

人们最初的计算只是数数。数过去，再数过去，这就是加法：数过去，再数回来，这就是减法。减法是加法的逆运算。随着熟练程度的提高和经验，人们总结出便于记忆和提高计算速度的加法口诀……七四一十一，七五一十二，七六一十三，七七一十四，七八一十五……

后来人们注意到一种情况：几个相同的数相加，例如二个九相加得十八，三个九相加得二十七……九个九相加得八十一。于是人们为了简便总结出乘法九九口诀。可见，乘法只是加法的简便算法。那么，知道“ 二五一十 ”这句乘法口决，十里有几个五，几个二呢？这就是除法。可见，除法是乘法的逆运算。由于加与减、乘与除是互逆关系，所以可以利用加法口决计算减法，用乘法口决计算除法。在分数除法中，除以一个分数，可以把分数颠倒相乘。同时除法也可看成是减法的简便计算。

（彭景康）

“方程”的由来

同学们，我们已经知道了方程的意义。但是，“含有未知数的等式”丝毫没有“方”的意思，为什么叫做“方程”呢？

要说明“方程”的由来，先得从我国古代的“筹算”说起。

我们现在都用拉丁字母表示数，用阿拉伯数字写数。可是我国古代的人们既不知道拉丁字母，也不认识阿拉伯数字。他们是用“算筹”记数的。你看这个“算”字多有意思！上面是“竹”字，下面是“具”字，所以，“算”就是“竹制的计算工具”。从汉朝开始，人们用竹子制成许多长六寸（合现在的 4.15 市寸）的小竹棒，这些小竹棒就叫“算”，或者叫“筹”，我们现在把它叫做“算筹”，用算筹来计算的方法叫做“筹算”。

1—9 这九个数字用算筹表示出来就是：

那么算筹又怎样表示方程呢？公元 263 年，数学家刘徽所注《九章算术》一书里有一个例子：“今有牛五、羊二，值金十两；牛二、羊五，值金八两。问牛羊各值金几何？”刘徽列出的“方程”如图所示。

右行表示“牛五、羊二，值金十两”，左行表示“牛二、羊五、值金八两”。要写成现在的方程，就得先设未知数，用 x 表示一头牛的价钱，用 y 表示一只羊的价钱，就得到：

$$\begin{cases} 5x + 2y = 10 \text{（右行）} \\ 2x + 5y = 8 \text{（左行）} \end{cases}$$

这是两个方程所组成的方程组，这种方程组要在初中数学才学到。

现在小朋友该明白了：在“方程”这个词里，“方”就是“列筹成方”的意思，刘徽用算筹列出的方程不就是把算筹摆成了一个长方形吗？“程”就是“课程”，所以“方程”就是“列筹成方的课程”。

方程的英语是 equation，就是“等式”的意思。这里当然不会有“方”的含义。清朝初年。中国的数学家把 equation 译成“相等式”，到清朝咸丰九年（公元 1859 年）才译成“方程”。从这时候起，“方程”这个词就表示含有未知数的等式，而刘徽所说的“方程”就叫做“方程组”了。

什么叫“几何”

初次接触几何知识的同学，会提出这样的问题：“什么叫‘几何’？”

原来在古埃及，这种关于几何知识的学科叫 geometria，“geo”的原意是“土地”，“metria”的原意则是“测量”。这说明古埃及人的几何知识主要来自测量土地。

后来希腊人欧几里德总结前人的几何知识写成了一本书叫《几何原本》，现在初、高中用的几何教科书基本上还是属于欧几里德《几何原本》，可见它的影响之大。

在我国明朝，一个意大利传教士利玛窦来到中国。利玛窦精通数学，在传教的同时也传授数学、天文学知识。当时我国上海人徐光启对数学极感兴趣，就与利玛窦一起翻译“几何原本”。在翻译中，他们不知把“geometria”翻译成什么。一些数学家认为，根据“geo”的读音，译成汉字“几何”。从此，“几何”一词，作为一门学科的名字被一直沿用到现在。

但是别以为几何知识都是由埃及和希腊传来的。在我国出土的古代文物中，有一幅画：两个人，一个人手里拿“矩”，就是三角尺那样的工具；一个人手里拿“规”，就是圆规。古语说：不以规矩，不成方圆。这足以说明我国人民早就掌握了几何知识。

（彭景康）

列表解逻辑问题

在数学智力题中，有一些比较复杂的逻辑问题，如果我们用列表的方法来解，不仅条理清楚，而且可以使一些比较隐蔽的条件和关系明朗化。这里举两个例子：

红光小学，李老师、王老师、张老师分别教一门课，但不知他们教什么课，只知道这三门课是语丈、数学、外语。另外还知道：

①李老师不会外语；

②外语老师是一个学生的哥哥；

③张老师是女的，她和数学老师同住在一个楼里。

请问三位老师各教什么课？

我们列表时，先列出下面的表格：

	李老师	王老师	张老师
语　文			
数　学			
外　语			

根据题中①知道，李老师不是外语老师。在李老师一栏外语一行中填上“ 0 ”（表示否定）。

	李老师	王老师	张老师
语　文			
数　学			
外　语	0		

由②可以推知，外语老师是男的。由③知张老师是女的，所以张老师不是外语老师。在张老师一栏外语一行中也填上“ 0 ”，于是由表中外语一行中可知，外语老师必定是王老师。在王老师一栏外语一行中填上“ 1 ”（表示肯定）。王老师既然是外语老师，就不可能再教语文和数学，可以在王老师一栏的数学和语文两行中都填上“ 0 ”。

	李老师	王老师	张老师
语　文		0	
数　学		0	
外　语	0	1	0

由③还可知张老师不是数学老师，在张老师一栏数学一行中填“ 0 ”，由此栏可知，张老师一定是语文老师，在张老师一栏语文一行中填“ l ”，同时在李老师一栏语文一行中填“ 0 ”，最后由表可知，李老师必定是数学老师。

	李老师	王老师	张老师
语　文	0	0	1
数　学	1	0	0
外　语	0	1	0

通过上面分析，我们知道：李老师教数学，王老师教外语，张老师教语文。

我们再来举一个列表解逻辑问题的例子：

五年级有四个班，每班都有正、副班长各一人。平时召开五年级班长会议时，各班都只派一名班长参加。参加第一次会议的是小杨、小童、小方、小刘；参加第二次会议的是小叶、小童、小汪、小刘；参加第三次会议的是小杨、小叶、小童、小徐。三次会议小金都因病没参加。你能说出哪两位班长是同班的。

我们把参加会议情况列表如下：

	小杨	小童	小方	小刘	小叶	小汪	小徐	小金
第一次会议	1	1	1	1	0	0	0	0
第二次会议	0	1	0	1	1	1	0	0
第三次会议	1	1	0	0	1	0	1	0

由题意可知，两人同班的必要条件是他们没有一次会议是同时出席的。按照这个条件，从表上首先可以发现，三次会议都出席的小童一定与三次会议都没出席的小金是同班；因为小杨参加了第一、三次会议，而小汪参加了第二次会议，所以小杨与小汪同班；小刘参加了第一、二次会议，小徐参加了第二次会议，所以小刘与小徐同班；剩下小叶与小方同班。

从这两个例题中我们看出，用列表的方法解答逻辑问题是个好方法。

（孙义信）

蜘蛛的启示

什么是数学？一言以蔽之曰：数学是研究数和形的学问。但是在漫长的数学征途中，数和形各自默默走着自己的路，由于没有共同语言，谁也不理谁。就这样数和形各自背着装有一大堆不解难题的沉重包袱，足足走了一千多年，相互不说一句话！和古希腊三大几何难题一样，人们在计算圆内接正多边形时，发现用尺规作图法能作出正方形、正三角形、正五边形、正六边形，可是怎么也作不出正七边形来，难怪人们说“７”是一个特殊的神秘数字！知识愈向纵深挖掘，钻头碰到的石头就愈多。在探讨尺规作图三大难题时，几何学遇到了许多作图难题。大自然啊，我们赞美你的巧妙、神奇，但是你为什么要在路上设下这么多障碍和不解之谜？“我劝天公重抖擞，不拘一格降人才。”但是，哪里会有天生的天才数学家呢？就拿为解答几何三大难题奠定基石——创建解析几何的法国大数学家笛卡尔来说吧，他的著名的“笛卡尔坐标”竟是受到一只蜘蛛的启示！

这到底是怎么一回事呢？

“世上无难事，只怕有心人。”面对一千年历史遗留下来的三大几何难题，笛卡尔认真总结前人大量的解题教训后感到：需要探究一条前人没走过的新思路！他怀疑几千年以来人们用圆规和直尺作图这把“万能钥匙”了：一千多年的失败教训说明什么呢？是不是尺规作图法这把钥匙不可能打开三大难题的锁呢？人们总是“就形论形”，能不能把“形”化成“数”来研究呢？能不能在“形”与“数”之间架起一座桥梁呢？一个新的数学求异思维在他的头脑中萌发了，他朝思暮想，梦寐以求，恰是“衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴。”艰苦的脑力劳动使体质虚弱的笛卡尔病倒了，可是躺在病床，他仍在瞑思苦索着……突然，他的眼前一亮，一只蜘蛛激发了他的灵感：他目不转睛地望着天花板——一只蜘蛛正忙着在墙角结网。它像一个小小的黑点在天花板与两面墙壁三条直线构成的直角中移动着……一个智慧的闪光，照亮了笛卡尔的头脑，也照亮了数学界：用点到两条垂直的直线的距离表示点的位置。是一只蜘蛛的启示，笛卡尔建立起“形”与“数”的桥梁这就是神通广大的笛卡尔坐标。由此笛卡尔建立了一门崭新数学分支——解析几何。

（彭景康）

奇偶数趣谈

你知道，能被 2 整除的数叫做偶数；不能被 2 整除的数叫做奇数。你可注意到奇数与偶数有一个显著的特点：就是它们的相间性，即一个奇数后面是一个偶数；一个偶数后面是一个奇数。利用奇偶数的这一特征，和下面一些显而易见的运算性质 :奇教±奇数=偶数偶数±偶数=偶数偶数±奇数=奇数奇数×奇数=奇数偶数×偶数=偶数奇数×偶数=偶数,我们可以解决很多用其他方法不好解决的问题。如：“ 7 只茶杯口朝上放在桌上，每回翻转其中的 4 只，能不能做到使 7 只茶杯全部变成口朝下？ ”

如果当真去试验一下的话，情况将会很复杂，因为每回究竟翻转哪 4 只有许多不同的选择，于是，我们把思路集中到 1 只茶杯上，容易想到，一只茶杯无论翻多少次，只要翻转的次数是偶数，杯口的方向一定会保持原样；只有当翻转的次数是奇数时，杯口的方向才会向下。所以 7 只杯口要从向上变为向下，翻转的总次数一定是 7 个奇数的和，仍然是一个奇数。而每回翻转 4 只相当于 1 只 1 只地翻转 4 次，无论翻转多少回，总次是都是偶数，即 4 的倍数，因此，所提要求是无法实现的。

从上面题目得到一个经验：当一件事物只有两种状态时，如上与下，正与反，开与关，通与断……就可以联系奇偶数来考虑。

有时还可以采取形象化的处理方法。在中国象棋盘上，马跳奇数次能不能回到原来的位置？

这里用试验的方法是不行的。因为我们不能断言要试多少次才能发生这种情况。为此，我们用黑白相间的两种颜色把棋盘上的点分成黑点白点两类，正如整数分成奇、偶数一样。现在我们可以知道，马在原来的位置无论向什么方向每跳一步，点的颜色就会随着改变一次。因此，马跳了奇数次后，颜色必然与原来不同，更谈不上跳回原位了。

再看一个例子：“ 在一张纸上画了 34 个方格（如图 1），能不能用一些两个方格连在一起的小纸片，把这 34 个方格全部盖住而没有重叠？

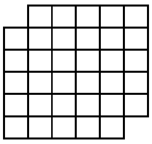


图 1

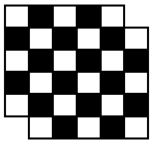


图 2

这道题如果简单地根据 34 能被 2 整除就作出肯定的回答是没有说服力的，因为没有考虑小纸片的排法。那么能不能用试验的方法来解决呢？这里我们采取染色的方法（如图 2），可见，图中有 16 个黑格子，18 个白格子，小纸片无论怎样放，盖住的格子总是一黑一白，所以无论每样排都会剩下两个白格盖不上。

上面两题所使用的方法叫“ 染色法 ”，是对奇偶相间性的巧妙应用。

最后请看一道有趣的题：

有一只奇怪的猫不仅非常善于捕鼠，而且吃老鼠的方式也很独特。每天晚上它总是让捕到的老鼠站成一行从 1 开始编号，然后把编号是奇数的吃掉,再让剩下的老鼠原地不动重新从 2 开始编号,再把编号是奇数的吃掉……照此方法直到吃到剩下一只为止，让这只老鼠留下来。可有一天，这只猫忽然发现有一只小白鼠一直留了下来。那么这只聪明的小白鼠是采用了什么方

法躲过了一关又一关呢？

我们假定小猫一天捕 10 只老鼠，从下图可以看出，8 号老鼠在前 3 轮编号一直处于偶数位置。

```
1  2  3  4  5  6  7  8  9  10
   ↓     ↓     ↓     ↓     ↓
   1     2     3     4     5
         ↓           ↓
         1           2
                     ↓
                     1
```

从上面过程可以想到，因为每一轮总是把偶数号的老鼠留下来，所以谁编号中含有因数 2 越多，谁留下的机会就越多。聪明的小白鼠采取的策略是：先数一下是多少只老鼠，然后找出这个范围内含因数 2 最多的数是几，当它看到老鼠的总数刚刚大于其中某个数时，就抢先站在这个编号的位置上，于是它就能成为唯一的幸存者。

（彭景康）

数列与新星

1766 年，德国有位叫提丢斯的中学数学教师，他发现如果写出这样一列数字：

0，3，6，12，24……

不难看出：从第 3 个数起，以后每个数字都是它前面相邻数字的 2 倍。

如果在这列数每个数字上都加上 4 ，再除以 10，就得到一个新数列：

0.4，0.7，1，1.6，2.8，5.2，10，19.6，……

有一天，提丢斯的朋友天文学家波得来看望他。他们从天气说到天文，又从天文谈到数学。提丢斯把自己近来的教学手稿拿来请波得过目。在手稿最后一页上，波得以天文家的敏感发现了上面的那个数列：“我的上帝，这些数字多么近似水星、金星、地球、火星、木星、土星到太阳的距离的比值啊！”两个朋友惊喜地互相拥抱着，欢呼他们的巧合和胜利！1772 年波得公布了他们的这个发现，引起了世界科学界的重视，把这个发现称为“提丢斯——波得定则”。1781 年，英国业余天文学家赫歇尔在接近 19.6 的位置发现了太阳系的一颗新星——天王星。1801 年 1 月 1 日晚上意大利天文学家皮亚齐又在火星与木星之间的 2.8 位置上发现了一颗体积不大的“谷神星”，然而像是在捉迷藏，这颗行星只在皮亚齐眼中露一次面就不见了，尽管皮亚齐宣布了自己的发现，但是天文学家们说：眼见为实！皮亚齐只好说：信不信由你！

正当天文学家们对皮亚齐发现的“谷神星”半信半疑的时候，数学家高斯提出要通过理论上的推导和计算找回这颗丢失的行星！

听到这个“门外谈”的消息，好心的朋友劝阻高斯说：“你是个数学家，天文学家找不到的谷神星，你怎么可能算出来呢？”高斯没有动摇，当年牛顿不是凭着渊博的数学知识，发现了万有引力吗？他相信宇宙是按照数学规律构成的，数学是科学之母。

高斯在前人研究的基础上，运用自己卓越的数学知识，创立了比前人更加精确完整的计算理论，只用了一个小时就计算出了结果，他根据理论计算，断定谷神星确定存在，并根据它的运行轨道准确地推算出它在什么时间会出现在哪一片天空。在高斯预言的时间里，天文学家在望远镜中，果然在那片天空捉到了谷神星！

啊，数学，天机妙算的数学，你是多么神奇，威力无穷！

（彭景康）

模糊数学

数学还能模糊吗？

多少年来，人们都把数学看成是一门最精确的科学，认为高度的精确性是数学与其他学科的主要区别之一。有的人还说过数学是科学的女王或皇后之类的话，大概就是为了称赞数学的精确性。

其实，与其说数学是科学的女王，不如说数学是科学的仆人。数学是基础学科，它是为其他学科服务的。

数学不能只讲精确。人们在生活、生产和科研中，常常要用到一些模糊的概念、判断和推理，数学也应该想办法研究这些东西，解决有关的问题，同时也丰富自己。

一个人如果拒绝使用模糊的概念、判断和推理，他大概会成为精神病患者。

比如说，你请他替你去告诉李鹏同学一件事。可是他并不认识李鹏。你就告诉他说，请他到操场的东南角去找李鹏，李鹏正在那里和几个同学玩，他是个矮个儿，胖子。

你以为已经说清楚了，可是他问：“ 矮个儿，身高不超过一米几？胖，他的腰围多少？体重多少？ ”

就算你的答复能使他感到满足了，他拿起皮尺和磅秤去操场了。可是问题又来了，“ 东南角 ”，这是多大的个范围？是半径五米的一个圆？还是边长三米的一个正方形？如果有一个人一只脚站在这个范围内，另一只脚站在这个范围外，应该不应该考虑在内？……

他还在郑重其事地考虑这些问题，天早已黑下来了，操场上只剩他一个人了。

可见不允许用模糊的概念是不行的。那么，人们是怎样利用模糊概念去思考的呢？

起初，人们以为模糊就是近似。人们就去研究有关近似的计算、误差等的数学道理，取得了不少成果。

后来，人们把模糊和偶然性联系在一起。人们就去研究有关随机变量、随机过程和数理统计方面的数学道理，也取得了不少的成果。

但是，人们渐渐发现，这些并没有抓住模糊的概念的主要特点。

精确的概念是什么呢？假如我们谈论你班上的男同学，这“ 男同学 ”就是一个精确的概念。为什么精确？因为一个同学概括不概括在这个概念内，是完全确定的，你和我都清清楚楚。当然，我没见过你班上的同学，所以我并不知道某一个同学，比如李明，是不是一个男同学。但是这并不要紧，因为我很清楚，他或者是个男同学，或者不是个男同学，这是明确的。我们可以把一个明确的概念看成一组事物的总称，用现代数学的术语来说，就是一个“ 集合 ”的名称。

模糊的概念与此不同，比如我们谈论你班上的高个子，这“ 高个子 ”就是一个模糊的概念。李华身高 1.90 米，他算高个子是当之无愧的。张明身高 1.44 米，他和高个子根本不沾边。但是王虎呢？他身高 1.65 米，算不算你班上的高个子呢？这就很难说了。

所以“ 高个子 ”这个概念是个模糊的概念，主要不是因为测量可能有误差，也不是因为人的身高会随着他的健康情况、运动情况等发生偶然的变化，

而是因为我们对“高个子”这个概念根本没有一个明确的界限。

如果要把你们班上身高在 1.70 米以上的同学挑出来，这“身高 1.70 米”就不是一个模糊概念。模糊概念的最根本特点就是：有些事物是否概括在这个概念里，是不太明确的。

当然，一个同学的个子越高，他越可以算作高个子。所以不同的事物，能否概括在一个模糊概念中的资格也不同。

这样，我们就可以把一个模糊概念与一张表联系起来，表上列出了每一个事物是否能概括在这个概念中的资格。例如，

概念：你们班上的高个子	
李　华	1
张　明	0
王小虎	0.4
陈大刚	0.75
……	……

这叫资格表。1、0、0.4 等表示资格的多少。对不同的模糊概念，资格表也不同：

概念：你们班上的胖子	
李　华	0
张　明	0.2
王小虎	0.9
陈大刚	0.75
……	……

模糊数学的研究工作，就是以这种表为基本材料。比如说，两个概念可以合成一个新的复杂概念。对于精确的概念来说，“你们班上的身高超过 1.70 米、体重超过 70 公斤的同学”是个复杂概念。这个概念是一些什么事物的总称呢？就是你们班上的同学必须既属于“身高超过 1.70 米”这一组，又属于“体重超过 70 公斤”这一组，也就是说这两组的共同部分。用现代数学的术语来说，就是这两个集合的交集。

对于模糊的概念来说，“你们班上的高个胖子”这个复杂概念，有一个什么样的资格表呢？就是“你们班上的高个子”这个资格表与“你们班上的胖子”这个资格表中，每行的两个数中的较小的一个：

概念：你们班上的高个胖子	
李　华	0
张　明	0
王小虎	0.4
陈大刚	0.75
……	……

李华太瘦了，他根本没有资格叫做胖子，虽然他完全有资格叫做高个子，还是根本没有资格叫做高个胖子。张明呢？他完全没有资格叫高个子，所以不管他是胖是瘦，反正没有资格叫做高个胖子。王小虎相当胖，但是只有 0.4 的资格叫做高个子，所以他也只有 0.4 的资格叫高个胖子。陈大刚与他们都不同，　叫高个子与叫胖子都有　0.75 的资格，所以他有 0.75 的资格叫高个胖子。

如果你班上就只有这四个同学，你要我去找你班上的高个胖子，我毫不

犹豫地就把陈大刚找来了，虽然李华比他高，王小虎比他胖。

说到这里，你多少可以觉出一点模糊数学的味道了。模糊数学利用了资格表——用现代数学的术语来说叫做特征函数，就可以用精确的数量关系来表达模糊的概念和它们的关系了。所以模糊数学处理的虽然是模糊的东西，但是它本身并不是模糊的！

在数学的各种分支中，类似模糊数学的例子还有。比如研究数量变化，这个变化可以非常复杂，甚至可以反复无常，但是变量的数学——微积分，却是一门脚踏实地的严肃学科，丝毫也没有反复无常的地方。

以不变对万变，以精确对模糊，这都是现代数学的深刻性和技巧性的精彩所在！

（马希文）

椭　圆

人造地球卫星的轨道

1970 年 4 月 24 日，我国成功地发射了第一颗人造地球卫星。

我国在新闻公告中，公布了有关这颗卫星的几个重要数字：重量 173 公斤，远地点 2384 公里，近地点 439 公里，周期 114 分钟，与赤道平面夹角 68.5 度。

这几个数字像一幅速写画，寥寥几笔，就把卫星飞行的情况勾画出来了。卫星飞

行到离地面最远的时候是 2384 公里，飞行到离地面最近的时候是 439 公里，说明它的飞行轨道不是圆，而是一个椭圆。

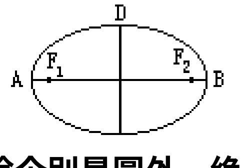
椭圆很好画。在桌子上放张纸，把两颗大头钉钉在纸上，再把一根线的两头结在大头钉上，用一支铅笔把线拉成折线，顺着一个方向，像用圆规画圆那样，画出来的就是一个椭圆。

这个画法告诉我们：一个动点到两个定点的距离保持不变，动点画出来的图形，就是椭圆。

要是我们改变大头钉之间的距离，或者改变线的长短，可以画出各种各样的椭圆来。

线的长度不变，两个大头钉之间的距离越远，椭圆越扁；两个大头钉之间的距离越近，椭圆就越鼓；两个大头钉要是重合在一起，椭圆就变成圆了。要是大头钉之间的距离不变，线越长，椭圆越大越鼓；线越短，椭圆就越少越扁，直到成为一条直线段。

椭圆各部分都有名字，两个定点 F_1、F_2 叫做焦点；过焦点 F_1、F_2 的直线与椭圆交于 A 、B 两点，AB 叫做椭圆的长轴；AB 的中垂线与椭圆交于 C、D，CD 叫做椭圆的短轴。椭圆的焦点总是在长轴上。

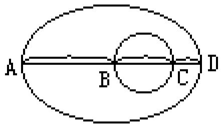


人造地球卫星的轨道，除个别是圆外，绝大多数是椭圆，地球的中心，也就是地心，位于椭圆的一个焦点上。

一个物体围绕地球旋转，要不被地球引力拽[zhuài]下来，它的初速度不能小于 7.9 公里/秒，这叫做第一宇宙速度。

如果飞行速度恰好等于第一宇宙速度，那么，物体正好维持自己不被地心引力拽下来，它飞行的轨道是一个圆。如果物体飞行速度大于第一宇宙速度，它就要挣脱地心引力往外飞。物体在飞离地球的过程中，要不断克服地心引力，飞行速度就会逐渐变小，到速度减小到不足以挣脱地心引力的时候，它会被地心引力往回拽。在接近地球的过程中，物体飞行的速度又逐渐加大，最后又挣脱地心引力往外飞。这样周而复始，物体的飞行轨道就成了椭圆了。物体初速度越大，它挣脱地心引力往外飞得越远，它的椭圆形轨道的长轴也越长。

物体需要多大初速，才能挣脱地心引力，飞离地球呢？经计算，初速度不能小于 11.2 公里/秒，这叫做第二宇宙速度。



我国第一颗人造地球卫星的轨道既然是一个椭圆，那么，它的（长轴 AD）=（远地点 AB）+（近地点 CD））+（地球直径 BC）= 2384 +439+2×6371=15565 公里。我们还可以算出它在近地点的速度最大，等于 8.1 公里/秒；在远地点的速度最小，等于 5.2 公里/秒。

太阳系的九大行星，围绕太阳旋转的轨道都是椭圆，太阳位于一个焦点上。在太阳系中，还有慧星和流星等天体，它们运行的轨道，也有许多是椭圆的。

壮观的狮子座流星雨

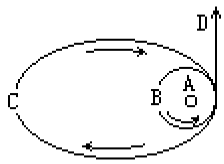
夏天的晚上，人们都喜欢在庭院里乘凉。在繁星点点的夜空中，有时会出现一道亮光，一闪即逝。孩子们看见了，高兴地叫起“流星”来。流星是地球以外的物质。它们进入地球的大气层，与空气磨擦，发热燃烧，留下的一条光亮的痕迹。

1833 年 11 月 13 日凌晨，全世界很多地区的居民，都看到了满天流星，像下雨似地落下来，情景十分宏伟。在几小时之内，出现的流星和火球有 20 万个之多。看起来，它们像节日夜晚放的札花那样，好像从一个点迸[bèng]发出来的。这个点的位置在狮子座附近，于是人们把这次流星雨称为“狮子座流星雨”。

天文学家查考了中国和阿拉伯 的古书，发现常有关于 11 月流星雨的记载，而且出现的年代是有规律的，大约每隔 33 年或者 34 年出现一次。于是，人们满怀信心地等待着它下一次再出现。过了 33 年，到了 1866 年，不少天文爱好者守望天空，果然又看见了流星雨。

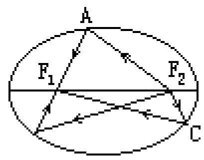
狮子座流星雨是怎样产生的呢？原来流星雨本是集结成群的无数小流星，它们也以椭圆形的轨道绕着太阳转圈子。狮子座流星群的轨道很扁，远日点在天王星的轨道以外，近日点正好和地球的轨道相交。每隔 33 年或者 34 年，这群流星正好和地球相遇，其中有些受到地心引力，进入地球的大气层，与空气相磨擦，燃烧发光，于是形成了光彩缤纷的流星雨。这时候地球运行的方向正指向狮子座，所以这些流星好像都是从狮子座附近迸发出来的。右图的 A 是太阳，B 是地球的轨道，C 是流星群的轨道，D 表示狮子座的方向。

不过最近几次，狮子座流星雨越来越少，只偶尔有疏疏落落的几点。可能是这个流星群已经衰落了，也可能因为地球只在它的边缘擦过。等到 1998 年，地球将再一次和狮子座流星群相遇，不知我们能不能看到它告别二十世纪的壮丽情景？

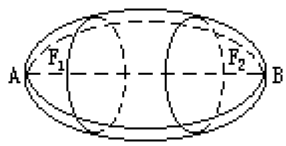


椭圆和声音

椭圆有一个重要的性质，就是从一个焦点上发出来的声音、光或者热，经椭圆反射，可以全部聚集到另一个焦点上。



我们以椭圆的长轴为轴，把椭圆旋转一周，可以得到一个旋转椭球面。过长轴的任一平面，与椭球面的交线都是相同的椭圆。这个事实告诉我们，椭球面和椭圆有相同的性质，也可以把一个焦点处的声、光或者热，全部反射集中到另一个焦点处去。



古代的希腊人，曾经修建过椭球形的音乐厅，把演奏台设在其中的一个焦点上。他们认为把音乐厅修建成这样，一个乐队演奏，两个焦点处同时发出声音，就相当于两个乐队同时演出，听众可以大量增加。实际上，这样的音乐厅并没有使用价值，因为音乐厅中，除了在另一个焦点上能听到很大的声音以外，其它许多位置上的听众，听到的声音都不大。

椭圆和激光

椭圆在声学上虽然没有多少作为，但是在光学上却大显身手，越来越得到人们的重视。

你知道激光吗？有一些物质，比如红宝石、钕[nǚ]玻璃、二氧化碳等，在外界强光的刺激下，可以发出一种能量非常集中、方向性非常好的单色光，这就是激光。

激光本领高强，在工业、通讯、测量、医疗、军事等各个方面，已经开始发挥强大的作用，前途不可限量。用激光测量地球到月球的距离，在遥远的 384400 公里距离中，误差只有几厘米，还不到一根指头那么长。牙科医生用激光来治疗牙病，外科医生用激光手术刀代替一般手术刀。在军事上，甚至可以做成激光炮，用来打敌人的飞机和导弹。

各种激光材料需要在外界强光的刺激下，才能发出激光。目前，外界光源多选用高压氙气灯。人们考虑把氙灯发出来的光，最大限度地集中到激光材料上去，经过研究，科学家看中了椭圆。他们用反光性能非常好的材料，

做成一个椭圆形柱面的聚光器；然后把棒状激光材料和氙灯，放在所有椭圆的焦点所组成的两条焦线位置上，使氙灯发出来的光，经椭圆形柱面反射，绝大部分集中在激光材料上，使激光材料得到更好的激发。

怪模样的电影放映灯

我们都喜欢看电影。当电影院的铃声响过以后，窗帘拉上了，灯也熄了，一束很强的光，从后面的放映孔中射出来。你也许这样想过：电影放映机中装了多大度数的灯泡，才能发出这么强的光来？

把电影胶片上的图像放映在比它大许多倍的银幕上，需要有一束很强的光线。怎样才能得到一束很强的光线呢？当然要求灯泡的度数大。但是，仅仅有一个大灯泡还是不够的，因为灯泡发出的光射向四面八方，只有很小的一部分照在胶片上，绝大部分都浪费掉了。人们想，能不能把灯泡发出来的光集中起来，让它尽可能多地照在胶片上呢？这个问题，被圆和椭圆很好地解决了。

下页的图是一个叫做“全反射式放映灯”的断面图。你看它样子长得挺怪，一边鼓，一边扁，除去右边正中有一个圆形的窗口 mn，其余都镀上一层亮亮的铝。它的右侧 AB 是圆弧，灯丝 F_1 是这段圆弧的圆心；左侧 AC 是椭圆弧，灯丝 F_1 是这段椭圆弧靠左边界的焦点。把电影胶片放在椭圆靠右边的焦点 F_2 处，让我们来看看，圆和椭圆是怎样密切合作，把光都集中到胶片上去的：

灯丝 F_1 发出的一部分光，能直接通过窗口 mn 照射到 F_2 处的胶片上去。F_1 发出的另一部分光，射到椭圆面 AC，经过反射，就可以照射到胶片上去。其余的光，经圆面 AB 反射到椭圆面 AC，再一次反射，也可以照射到胶片上去。

在全反射式放映灯里，圆和椭圆真称得起精打细算的能手。它们俩把绝大部分的光，都反射到胶片上去了，使胶片得到很强的光。

椭圆的用途可不止以上几种，在科技和生产的许多领域里都少不了它，比如在机械加工中，现在有椭圆形齿轮，椭圆形凸轮；在光学研究中，有椭圆偏振光等等。

（李毓佩）

数学家趣闻

据说，凡是能成为数学家的人多少总有一点诗人的气质；喜欢一个劲儿地动脑筋琢磨。数学家为了解决一个数学难题，不仅坐在办公室里想，等公共汽车时也想，躺在床上休息的时候也想，在幽静的小路上散步也想，以致像陈景润那样朝思暮想“ 哥德巴赫猜想 ”。

“ 哥德巴赫猜想 ”是怎么一回事呢？

1742 年 6 月 7 日，俄国彼得堡科学院士欧拉接到早年做过驻俄国公使的德国老朋友哥德巴赫的一封信。信是这样写的：

“ 欧拉，我亲爱的朋友：

您用极其巧妙而又简单的方法，解决了千百人为之倾倒而又百思不得其解的‘ 七桥问题 ’，使我受到莫大鼓舞，鞭策着我在数学的山路上攀登。

经过充分的酝酿，我想冒险地发表一个大胆的猜想。现来信征求您的意见。我的问题如下：任意取一个奇数，如 77，它可以写成 3 个数（即质数）之和，即 77=53+17+7。再任取一个奇数 461，那么 461=449+7+5 ，或 461=257+199+ 5 ，都是 3 个数之和。这样我发现：任何大于 5 的奇数都是 3 个素数之和。但怎样证明呢？虽然任何一次试验都可得到上述结论，但不可能把所有的奇数都拿来检验，需要的是一般的证明，而不是个别的检验。你能帮忙吗？”

这就是至今 200 多年尽管无数数学家为此付出艰辛劳动，绞尽脑汁，仍然还没有最后被证明，也没有被推翻的“ 哥德巴赫猜想 ”！

哥德巴赫在给欧拉的信中提到“ 七桥问题 ”又是怎么回事呢？

故事发生在 1736 年的德国。普雷格尔河在北欧平原上静静地流着，它像一条银色的飘带系在波罗的海岸古老的领地哥尼斯堡的胸前，贯穿市区的河流像“ 8 ”字结一样，环绕着两座风景秀美的小岛，在两岸和小岛之间有七座桥把它们连结起来，这别出一格的天然公园成了游人络绎不绝的乐园。不知是谁提出一个有趣的数学游戏：一个游人怎样才能一次走遍七座桥，而且每座桥只过一次，最后回到出发地点。从此这里变成了“ 数学游戏迷宫 ”，吸引了许多游人前来试验自己的能力。无论是风华正茂的少年，还是满头银发的学者，他们都不厌其烦地在七座桥上穿来穿去，从旭日东升到日薄西山，从春暖花开到雪花飘飘，人们不断地穿行着……，时间，像桥下的河水一样，无情地流驶着。有的人从少年时代起就迷在七座桥上，直到老态龙钟仍然念念“ 七桥问题 ”；甚至在生命最后一息还想再试最后一次，找不到“ 七桥问题 ”的答案，死不瞑目！

一传十，十传百，“ 哥尼斯堡七桥问题 ”很快传遍了欧洲，成了全欧闻名的难题。

“ 哥尼斯堡七桥问题 ”这个耗费不知多少人生命和精力的难题最后是怎样解决的呢？

还是让我们从俄国彼得堡科学院士欧拉说起吧 ！1735 年因为他长期观测太阳致使右眼失明，他忍受着痛苦，开始潜心研究“ 七桥问题 ”。他想：千百万人的无数次失败，是不是就断定不存在一条能行得通的走法呢？开始他想用“ 穷举法。，对“ 七桥问题 ”中的 7×6×5×4×3×2=5040 条路线逐个查证，但太麻烦了！何况，如果是更多桥的问题又怎么证明呢？于是他改换了思考问题的方法，七桥图巧妙地抽象化了：

他从而得到了一个用 4 个点表示两岸和两个小岛，用 7 条线表示七座桥，这里岛的大小、形状和桥的长短都是无关紧要的表面现象，图 3 的点与线的关系才是问题的本质。最后欧拉用“一笔画”的方法证明图 3 是不可能一笔画成的，也就是不可能一次走遍七座桥又回到原来出发点的。

善于动脑的欧拉，竟如此简单地用“一笔画”定理，解决了千百万人耗费生命和精力百思不解的难题。但，欧拉并没在世界数坛一片赞叹声中故步自封，在此基础上他开创了数学的一个新的分枝——拓扑学。

（彭景康）

二月为啥少两天

小朋友，你能回答这个问题吗；闰年全年有多少天？平年全年有多少天？一年多少天是不能随意增减的，而一个月多少天却是人们自己规定出来的。

据说很早以前，古罗马儒略，凯撒大帝修改历法时，原定一、三、五、七、九、十一月各为 31 天，二、四、六、八、十、十二月各为 30 天，全年共 366 天，平年减少一天为 365 天。但在平年应从哪个月里去减少一天呢？当时古罗马处决犯人都规定在二月份执行，因此人们把二月份看作不吉利的月份，厌恶它希望缩短它，所以就把二月份减少一天，改为 29 天。后来罗马帝王奥古斯特在修订历法时，为表彰自己的功绩，又从二月份里取出一天，加在他出生的八月份里。这样一来二月只有 28 天了。同时又把九、十一两个大月改在十、十二月上，就成了现在大、小月的样子。

那么闰年的二月为啥有 29 天呢？现在规定平年是 365 天，可是事实上地球绕太阳一周的精确时间是 365.2422 日，就是说有 365 天多一点。这样每过四年就会多出一天。于是制订历法的人就把这一天放到二月份，这样闰年的二月就有 29 天了。

因为要经过 4 年才多出一天，所以隔四年就有一个闰年。根据规定：以公元年份为标准，凡是 4 的倍数的年份必是闰年。公历年份是整百数的，必须是 400 的倍数才是闰年，这也就是历法规定的：“百年少一闰，每四百年加一份闰”。

（卫　华）

数数问题

谁不会数数？这也算个问题？

当然罗，人有几个手指，屋子里有几把椅子，这谁也会数。

但是也有一些数，不能靠“一、二、三……”这样简单的办法去数。

比如中国有十二亿人口，如果一、二、三……这样地数，就算一秒钟数两个，一天二十四小时不停地数，也只能数 24×60×60×2=172800 个，一年数 172800×365=63072000 个，也就是六千三百万多一点，十二亿个就要数十五年还不止。在这个时间内，不知有多少人死去，多少人出生，怎么数得清呢？

又比如教室里有多少座位，我们一般不是一个一个地数，而是数数有多少排，每一排有多少个座位，然后用乘法来计算。

有一些数字很大，又只需要一个比较粗略的近似值，这时候，我们就要利用种种的办法进行估计。一本书有多少字？大体上可以用页数乘上每页的行数，再乘上每行的字数来估计。

不过，即使是估计，有时候也需要认真思考，才能找到一个切实可行的好办法。

例如，你头上有多少根头发？

据说，人的头发有几十万根之多，当然不可能一根一根地去数。你想用乘法来计算，可是头发不是成行成垅、整整齐齐地排好的。

一种切实可行的办法，是测量一下长着头发的皮肤面积有多大，再数一数一个平方厘米的头皮上有多少根头发，这是可以数得清的。

当然罗，头上这一平方厘米和那一平方厘米的头发可能不一样多。我们可以仔细观察一下，选有代表性的一个平方厘米。

数头发并不重要，数森林中的树有多少棵，可是一件重要的事。这两个问题十分相似，可以用相同的办法去解决。

但是，森林中的树木长得有稀有密，我们根难走遍整个林区，来挑选一块最典型的地方。这怎么办呢？

最好的办法是任意挑选若干块地方，分别计算，然后求出平均数来。数学的研究说明，平均数总是更加接近实际。

研究这类问题的数学叫做数理统计。这是现代数学中一个非常活跃的分支。这里用的方法，叫做抽样方法。

我们再举一个例子，来说明数理统计的用途。

水库里养了鱼，每年要捕捉一些供应市场需要，爱吃鱼的人很多，最好多捕一些。捕得太多了，剩得就太少，会影响鱼的繁殖，明年就捕不到多少鱼了。

为了掌握好捕鱼的数量，就需要知道水库里到底有多少鱼。这个问题看来和上面的问题很相像，其实要困难得多。因为鱼是游来游去的，而我们也不好选出一平方米水面，来数一数下面有多少鱼。

渔业人员想出了一个巧妙的办法，他们捕上一千条鱼，给每条鱼都做上记号，比如在尾巴上剪去一个小角，然后放回水中。

鱼儿到了水里就四散游开去。过了几天，这些鱼均匀地散布在水库的各个地方了。

渔业人员再捕上一千条鱼，一看，其中有二十条是做过记号的。

他们想，如果水库中共有 X 条鱼，其中有一千条被我们做过记号，那么，做过记号的鱼占全部X条鱼的几分之几呢？当然是$\frac{1000}{X}$了。现在捕了一千条鱼，其中有二十条做过记号，也就是说，在这一千条鱼中，有记号的鱼占$\frac{20}{1000}=\frac{1}{50}$。这个比和前面那个比的值，大体上应该是一样的。所以，$\frac{1000}{X}\approx\frac{1}{50}$。这样一来，就计算出$X\approx5000$。

五万条鱼，今年捕上三四万条，大概没问题吧！

这个问题，简直像一个简单的比例问题，其实不然。你也去那里捕一千条鱼，数数有几条是做过记号的，你敢保证也是二十条吗？不敢吧！

实际情况必然是这样，每捕一千条鱼，其中做过记号的鱼的数目，不会是一成不变的。

比如说，你捕的一千条鱼中有二十五条是做过记号的，你列出的方程就会是$\frac{25}{1000}\approx\frac{1000}{X}$，算出的结果是$X\approx40000$，比刚才算的少了一万条。那么，水库里到底有多少鱼呢？

数理统计可以帮助我们解决这个问题。它告诉我们，在后捕上来的一千条鱼中有多少条做过记号，数目虽然不是固定的，而是可变的，但是有一定的变化的规律。一旦掌握了这个变化的规律，我们不但可以用比例的办法来估计出水库中的鱼的总数，而且可以掌握这个估计会有多大的误差。数理统计还可以给我们提出一些更好的办法，来帮助我们尽可能地减少这种误差。

这样，就在数理统计的基础上，发展出一整套调查动植物资源和研究许多其他问题的方法。

（马希文）

该跟踪谁

侦察员小王接到命令，去跟踪一个重要的间谍“熊”。现在，“熊”正在一间密室里和另外两个间谍碰头。小王只知道“熊”是三个人中最高的一个，但是无法看到他们三个人碰头的情况，因而也不知道三个人中哪个身材最高。小王只能在门口等待他们出来。他想：这三个间谍如果不一块儿出来，可能最先出来的是“熊”，也可能最后出来的是“熊”，也可能中间那一个是“熊”，我应该跟踪哪一个呢？

三个间谍在密室里也正考虑呢，为了防备外面有人盯梢，谁先出去好呢？

这就是一个对策论的问题。

对策论是现代数学的一个重要分支，在军事、公安、经济和日常生活各个方面，都很有用处。由于对策论经常用智力游戏——打扑克、下棋等做模型，所以又叫博奕论。博就是赌博，奕就是下棋。其实，赌博如果去掉输赢财物的规定，就是智力游戏。

再举一个例子：有人要买外国一家公司的一条旧船。他知道这家公司有三条旧船，价格一样。双方商定先看第一条船，如果他表示不要，再看第二条船，如果又表示不要，再看第三条船。既然三条船价格一样，他当然要尽可能买最好的，但是哪一条是最好的呢？

公司呢？它知道这次只能卖掉一条船，为了多赚一些钱，当然希望把最坏的一条卖掉，那它应该按什么顺序介绍呢？

这两个对策论的问题含意是不同的，但是在数学上，它们是相同的问题。

一般的对策问题都是这样：双方各有一些可以采取的策略，一旦双方的策略都确定了，就会出现一定的结果，问题是双方怎样找到最好的策略？

孩子们很喜欢的“石头、剪子、布”划拳游戏，就可以作为对策论的一个例子：甲乙二人同时伸出手来，做出石头、剪子、布的样子。两个人如果手势相同，就算平局；如果不同，石头可以砸坏剪子，剪子可以把布剪破，布可以把石头裹起来，那就有了胜负。

在这个问题里，甲和乙各有三种可以采取的策略。结果如何？我们列出一个输赢表来：

这是甲的“得分”表。“0”表示平局，“－1”表示输，“1”表示赢。

		乙		
		石头	剪子	布
甲	石头	0	1	-1
	剪子	-1	0	1
	布	1	-1	0

我们把对策问题列成这样的表，就成了“表上游戏”。这种表是由若干行和若干列数字组成。甲可以指定其中的某一横行，乙可以指定其中的某一直行。规定他们同时说出他们指定的横行或直行。在这两行的交叉点上的数，就是甲得到的分数。例如在这个表格里：

-3	5	4	-1	-5
-2	6	-3	0	2
-1	1	2	1	0
-3	-5	4	-1	3

如果甲指定第二横行，乙指定第三直行，甲就得到-3 分，也就是说输 3 分。

到此为止，我们为对策问题找到了一个数学模型。在代数课上，我们常常要为一个应用题列出方程式来。这个方程式就是应用问题的数学模型。有了数学模型，我们就可以暂时丢开原来的应用问题，全力去解决这个数学模型中的问题了。

所以现在，我们就暂时丢开什么“熊”呀，船呀，手势呀，全力以赴去研究这样的一个问题：

在表上游戏中，怎样找出最好的策略。

（马希文）

一次游戏

小王和小张是同班同学。在小学的时候，他们没有学好数学，也不喜欢数学。一起进了中学，两年来，在李老师的耐心帮助下，他们越来越喜欢数学了，特别爱钻研各种有趣的数学问题。这一天，他们去看望李老师，想请他出一些题给他们做。

李老师笑了笑，说：“今天我们做一个游戏吧！你们每人任意想一个正整数，按照我说的进行运算，我就能知道你们的答案是多少。”

“真的？”

“当然是真的。你们每人拿一张纸，各人算各人的，不要互相看。”

等他们准备好了，李老师说：“你们每人任意想一个正整数，——想好了吗？”

“想好了。”小王在纸上写了一个数——7。

“给这个数加上任意一个正整数。”

小王写：7 + 4=11。”

“把所得的和，用任意一个正整数乘。”

小王写：11×6=66。

“把所得的积，再用小于乘积的任意一个正整数来除。”李老师继续说。

小王继续写：66÷5 =13 余 1。

“如果不能整除，把商和余数相加。”

小王写：13+1=14。

“然后把计算结果，用 45 乘。”

小王算：14×45=630。

“现在，把所得的积的各位数字加起来，比如得到 231，就 2 加 3、再加 1 得 6 。加起来如果是两位以上的数，再这样相加下去，直到得到一位数字时为止。比如第一次相加后得到 43，就把 4 和 3 加起来，得到 7。”

小王按李老师说的写：6+3=9。

“你们都得到一位数字了吧？”

“是的。”

“现在，你们把所得的结果用 3 乘。”

小王写：9×3=27。

“再给积加上 23。”

小王写：27+23=50。

李老师问道：“你们的答案是不是 50？”

“对！”“是的！”小王和小张高兴得站了起来，异口同声地问道：“老师，你是怎样知道我们的答案的？为什么答案都是 50？”

李老师说：“你们先互相看一看所设的数和计算过程吧！”

小王先看完小张的计算过程，惊讶地说：“真奇怪！我们所设的数，所加、所乘、所除的数都不一样，可最后的答案都是 50，真巧呀！”

李老师笑了，看着他们的草稿纸说：“这是由于你们的一个老朋友在作怪。这个朋友，你们每天见面，每天和它打交道，可是你们对它的脾气和特点，还不完全了解。这个老朋友，你们猜是谁？”

小王和小张想了一会，说：“不知道。”

“就是 9。”

“9？”“9？”

“就是这个老朋友。”李老师接着说，“刚才这个游戏，关键的一步，就是我让你们用 45 乘你们前面的计算结果。因为 45 等于 5 乘 9，就等于用 5 乘后再用 9 乘，所得的结果，必然是 9 的倍数。凡是 9 的倍数，它的各位数字相加后，最后的结果必然是 9。用 3 乘 9，再加 23，那当然是 50 了！至于乘 45 之前的各种运算，目的是要得到一个正整数。只要能保证得到一个正整数，怎么运算都行。”

弄清了这个游戏的秘密，小王、小张高兴地说：“真有意思！”

李老师说：“9 的学问还多着哩！”

善于动脑筋的小王问道：

“老师，刚才的游戏，如果不用 45 乘，而用 9 或者 18、27、36、54 等 9 的倍数乘，那么，积的各位数字相加，所得的最后结果，是不是也是 9 呢？”

李老师答道：“对，也是 9！你们回去还可以再算一算，想一想其中的道理。”

小王和小张知道李老师还要批改作业，就告辞了。

李老师说：“好，欢迎你们常来！”

（杨勇光）

寻找秘密

在庆祝“五四”青年节的晚会上，小王要登台表演一个叫做《数学魔术》的节目。

幕拉开了，只见台上正中放着一块黑板，小王从后台走了出来，大声说道：

“同学们，为了使我们的晚会内容丰富多采，我代表我们班来演出《数学魔术》。其实，这不是什么‘魔术’，也不是我一个人来演，而是要大家来演。

“同学们，请上来一位，在黑板上任意写上几个正整数，只要这几个数的位数相同就行了。然后，我也很快写几个数，我马上就能知道这些数的和是多少。请上来一位试试吧！”

观众中有好几位同学都离开座位准备上台去，但小张上去最早。他拿起粉笔，在黑板上连续写了三个三位数：523，618，462。

字写得很大，台下的观众都看得很清楚。小张刚写，小王马上也跟着写了三个三位数：537，476，381。

并且紧接着说：“请小张和同学们都算一算，这六个数的和是不是2997！”

$$\begin{array}{r} 523 \\ 618 \\ 462 \\ 537 \\ 476 \\ +\quad 381 \\ \hline 2997 \end{array}$$

小张拿起粉笔，列成竖式，整整算了两分钟才算出来：

小张刚算完，写出答数，台下就响起了热列的掌声。

和小王、小张很熟的小吴急了，以为里边有鬼，赶忙抢上台去，尽快在黑板上写了三个五位数：

45236，23897，94182。

小王马上也写了两个数：

76102，5817。

小王刚写完，就说：“这五个数的和是 245234，请小吴和同学们都算一算。”说完，在黑板上写下 245234。

小吴列成竖式，足足用了三分多钟才算出来，答案和小王说的完全相同。台下又响起了热烈的掌声。

早已作好准备的文莉走上台去，用最快速度在黑板上写了四个七位数：

5384261，7093514

2683465，6137942。

小王接过粉笔，立即写了三个数：

4615738，2906485

3862057；

并且接着在旁边写了一个数——

3268462。

然后说：“这个 32683462，就是上面七个数的和，请文莉同学和同学们都算一算，看对不对！”

文莉列成算式，一个一个地加，用了四分多钟才算出来，答案果然是

32683462！台下又响起了掌声。

小王在掌声中向大家鞠躬谢幕。但是，同学们一致大声鼓掌，要求讲一讲这个“魔术”的秘密在哪里。小王重新出台，边写边说：

“说穿了，很简单！这都是利用 9 的特点来计算的。刚才小张写的三个数是：

523，618，462；

“我写的三个数是这样得来的：

537=999－462，476=999－523，381=999－618。

“所以这六个数的和必然是 999×3=2997。至于后面小吴和文莉写的数和我写的数，大家一看就会明白的。”又是一阵掌声……

晚会结束后，小吴回到家里，把记录下来的数拿出来看了一遍又一遍，终于发现小王写的两个数的秘密：

76102=99999－23897，5817=99999－94182，

所以这五个数的和等于：

45236+99999×2=45236+199998=245234。

他又想，小王为什么会算得那样快呢？想啊，算啊，终于发现：

199998 不是等于 200000－2 吗？给 45236 加上 199998 就等于加上 200000，再减去 2；也就是给 45236 前边写一个 2，从个位数字 6 中减去 2，不就是 4 吗？所以：45236+199998=245234。

小吴高兴地跳起来，拍着手说：秘密找到了！”

关于文莉所写的四个七位数以及小王所写的三个数的和，究竟是怎样计算出来的，请你自己进行分析吧！

（杨勇光）

意外发现

爱动脑筋的小吴和文莉经过准备，决定用一个有趣的难题来考住小王。

这一天下课后，他们两个笑嘻嘻地对小王说：

“听说你挺喜爱数学，来！我们考一考你。”

“爱是有点爱，可是没学好，应该向你们学习。”

“那好！你拿上笔，任意写一个三位数，要求第一位数字大于第三位数字，例如 523 就可以。把它倒转过来得到另一个三位数，例如 523 倒转得 325。从第一个三位数中减去第二个三位数。把所得的差的最后一位数告诉我们，我们就知道你得的差是多少。”

小王想了一个三位数，算好后，说：“最后一位数字是 5。”

“你得的差是 495，对吧？”文莉问。

“完全对！我想的数是 853，倒转后得 358，853—358= 495。”

“请问我们是用什么方法算出来的？”小吴说。

小王一时答不上来。小吴和文莉说：“可以三天以后交卷，但是不准和任何人商量。”

说也巧。小王边想边走，回到家里，正好弟弟等着要他帮助算一道算术题。他一看，题目是：甲乙两组拾棉花，甲组共拾 521 斤，乙组比甲组少拾 125 斤，已知乙组共九人，问乙组每人平均拾多少斤？

小王给弟弟讲了题意，列出了算式，让弟弟计算：

（521－125）÷9 = 396÷9=44（斤）

“哪，秘密在这儿！”小王惊奇地说着。原来他发现 521 倒转后得 125，相减后的差是 396，可以被 9 整除；又看了看 396 这个数，中间是 9 ，首末两位 3+6=9，他联想到自己所得的差 495，也符合这个规律。所以他想：知道了最后一位数字是几，当然知道差是多少了。这真是意外的发现，把我的问题也解决了！

接着，小王又想了一个三位数 846，倒转后得 648，846－648=198，中间还是 9 ，首末两位是 1+8=9，完全符合自己分析出来的规律。

小王进一步观察，还发现这样算出来的差，不但可以被 9 整除，同时还能被 11 整除，也就是说可以被 99 整除。

小王想，李老师常说数学是很严密的科学，只有经过证明，才能算是规律或定理。怎样才能证明这一规律呢？他想啊，算啊，终于证明出来了：

设一个三位数 ABC，其中 A＞C，列成竖式：

$$\begin{array}{rccc} & A & B & C \\ - & C & B & A \\ \hline & (A-C-1) & 9 & (10+C-A) \end{array}$$

因为 A ＞C ，所 C －A 不够减，必须在 B 中借 1 ，就变成（10+C ），所以差的个位数字是（10+C－A ）。

这样，B －1 要减去 B ，也不够减，又向 A 借 1 ，变成“10+B—1 ”，再减去 B 就得（10+B－1 ）－B =1－1=9。所以差的中间一位数字一定是 9 。

很显然，差的第一位数字必然是 A —C —I 。

所以差的首末两位数字的和是：

（A -C-1 ）+ （10+C-A）=10-1=9。

这就证明了这个规律的正确性。

由于差的中间一个数字是 9 ，首末两个数字的和是 9 ，所以知道了末位数，当然就知道整个差数了。

同理，知道了首位数字，也能立即说出整个差数。

第二天，小吴和文莉听小王讲了详细情况，高兴地称赞道：“我们只知道方法，你还加以证明，很会动脑筋，该得双百分！”

（杨勇光）

有趣的“三”

数字中最神秘、最受青睐的大概要算“三”了。在我国，从许慎的《说文解字》到《淮南子·天文训》，历来注家对此都有解释。其中，较为科学的解释是：“道始于一；一而不生，故分而阴阳；阴阳合和而万物生，故曰：一生二，二生三，三生万物”。“三”是两性合和的成果，是万物生殖繁衍的体现。

如中国古代建筑，王城的营建制度是九里见方，城的每一面各开三个城门；城内南北道路、东西道路各九条，路宽 72 尺。这些数字都是三或三的倍数。为何要这样修建呢？一是帝王都自称“受命于天”，表示其统治人民的权力是上帝赋予的；于是干什么都打着“行天之道”的旗号；二是因为“三生万物”，王朝要兴盛发达，就得行“三”之法。

再如历史上的“三公”“九卿”“二十七大夫”“八十一元士”，共计 120 个官。这说明王朝设官也是以“三”为法的，其用意仍然是为了表明王者法天，即所谓“顺天成道”。

在社会和民俗方面，“三”这个数字也是无所不在的。“一问三不知”中的“三”体现了事物的开始、过程和结果。“三羊开泰”中的“三”在民俗中有“吉祥”之意。“三教九流”中的“三”和“九”概括了社会各行业的方方面面。

自古以来，中国就有礼仪之邦的美称。通过对中国古代礼节的研究，我们不难发现这样一个有趣的事情，古代的礼节也多与“三”这个数字有关。

古时候，中国人待客，往往要客人熏三次香，洗三个澡，叫做“三衅”、“三浴”，表示极高的尊重。古有“退避三舍”之说，也是起源于一种礼节。晋重耳为报楚王之恩，在两国交兵时，后退三次，以表示感谢和敬畏之心。古代，臣民们拜见帝王都得行三叩九拜之礼，同时还得三呼万岁。如遇家中长辈死丧，晚辈人还有守孝三年之说。《三国演义》中，诸葛亮高卧隆中，刘备一而再，再而三地去请他出山，帮他打天下，演出了一部思贤若渴“三顾茅庐”的剧目，诸葛亮在三请之下如再不出山，恐怕就失礼之嫌了。

古代的许多礼节对于现代人来讲是很繁琐的了，没有必要去讲究了，但是有的礼节我们还仍然保留着，如去吊唁时，面对死者，哀悼者要三鞠躬；去别人家里作客，需得敲门而进，而敲门三下，则是比较礼貌的行为；现在还有一种礼貌是与“三”联系比较密切的表现，就是我们常见到汽车的厢板上往往写着“礼让三先”。

“三”这个数字也被广泛地应用于时空和算数。凡极言时间之长、空间之大、数量之多，古时多用三或三的倍数来表示。如“三思而行”，“三人行必有吾师”、“九天”、“十八层地狱”、“三百六十行”等等。

“三”这个数字还与人体结下了不解之缘。人体结构的基本单位——细胞，是由细胞膜、细胞质和细胞核三部分组成；人体各组织和器官的形成，开始于外、中、内三胚层的形成和分化；构成完整的人体系统，有运动系统、循环系统、消化系统、呼吸系统、泌尿系统、生殖系统、脉管系统、神经系统和内分泌系统，其数目正好是三和三的倍数。

可见，关于“三”这个数字，在中国古代被广泛运用到自然和社会的各个方面。

在国外，“三”也同样受到人们的重视。

古希腊人把“三”称为完美的数字，说它体现了“开始、中期和终了”，因而具备神性。

在民间流传的希腊罗马神话中，世界是由三位神灵统治的——主神朱比特、海神尼普顿、冥神普路托。朱比特手执三叉闪电，尼普顿挥舞三叉戟，普路托牵着一条三头狗。女神也有三位——命运女神、复仇女神、美惠女神。

那时的西方文化认为，世界由三者合成——大地、海洋、天空；大自然有三项内容——动物、植物、矿藏；人体具有三重性——肉体、心灵、精神；基督教主张三位一体——圣父、圣子、圣灵；人类需要三种知识——理论、实用、鉴别。

到了近现代，世界名人的理性思维也离不开“三”。雨果说：“人的智慧掌握着三把钥匙：一把启开数字，一把启开字母，一把启开音符。”车尔尼雪夫斯基说：“要使人成为真正有教养的人，必须具备三个品质：渊博的知识、思维的习惯和高尚的情操。”爱因斯坦则总结了成功的三条经验；艰苦的工作、正确的方法和少说空话。

数字巧对趣事多

数字嵌入诗中能编写出妙趣横生、耐人寻味的数字诗，而数字嵌入对联中同样可以组成构思新奇和令人叫绝的数字联。

嵌有数字的对联很多，如“四面荷花三面柳，一城山色半城湖”，“辞旧岁，十亿人民重添百倍劲；迎新年，四化建设更上一层楼”，“六塔重重，四面七棱八角；一掌平平，五指三长两短”，联中都嵌有一些数量不等的数字，它使对联显得更加生动形象，也增加了趣味感。再如杜甫草堂的对联“诗史数千言，秋天一鹄先生骨；草堂三五里，春水群鸥野老心”，云南黑龙潭的对联“万树梅花一潭水，四时烟雨半山云”，“千朵莲花三尺水，一弯明月半亭风”，以及戏剧家田汉的“二河两岸双江口，单人独马一杆枪”，联中不仅有数字，还有一些数量词，搭配起来，则更使对联增色不少。

然而更为巧妙的是，有些对联竟把一至十这十个数字全嵌进了联中，有的是有规律地排列，有的是无规律地排列，有的则全联均由数字组成，而且还有的对联则大量使用数字迭字，真是满目琳琅，多姿多采，妙趣无穷。

全由数字组成的对联

据说有一年腊月的一天，郑板桥和苏州蔡州官同游苏州城，见有一户人家门上贴了这样一副对联：

二三四五

六七八九

郑板桥见后便跟蔡州官说：“请稍等一会，我马上就来。”一会，郑板桥手拿几件衣服，拎了几斤肉，还背了一袋粮食回来了，他敲开那家的门，把衣服、粮食等给了主人。主人千恩万谢，说衣服和粮食送得好，救了他们的命，否则很难过这个年。

离开这家后，州官问郑板桥怎么知道这家人缺少衣服和粮食，郑板桥说：“他家大门上不明明白白地写着吗，你看那对联是‘二三四五，六七八九’，这不就是缺一（衣）少十（食）吗？”

此上下联各隐去“一”（衣）和“十”（食），构思精巧，修辞方法奇妙，且又合情合理，毫不牵强附会，实让人拍手叫好！

民国初，军阀混战，民不聊生，窃国大盗袁世凯假称“人民拥戴”，竟恬不知耻地演出了称帝的闹剧，有人便为其写了这样一副对联：

一二三四五六七

孝悌忠信礼义廉

此联下联虽无数字，但上联却全是数字。上联隐去了“八”，下联隐去了“耻”，从而影射袁世凯“忘（王）八无耻”的丑恶行径，以这种奇特的方法对袁予以嘲讽和抨击，真是入木三分，大快人心！

嵌“ 一 ”至“ 九 ”的数字联

上两联虽都按顺序把数字嵌于联中，但未把十个数字全嵌于联中，下面这几联则按顺序嵌入了一至十这十个数字。

明代学者章懋少年时读书不爱吟诵，只好默念，老师叫学生齐声朗读时，总听不到他的声音。老师见他这样“ 不听话 ”，所以就出一上联，罚他对下联。老师的上联是：

懒弟子仰面数椽，一二三四五六七八九十

章懋虽不爱吟诵，但思维敏捷，所以稍加思考便对出了下联：

瞎先生低头算命，甲乙丙丁戊已庚辛壬癸

章懋用表示次序的符号天干来对数字，既工整而又恰当，致使教书先生也不得不点头叹服。

此联上联中嵌有自一至十这十个数字，下联却不是数字。而有些对联，下联也嵌有自一至十这十个数字，而且是自十至一颠倒排列，故更有一番情趣。

据说清初诗人吴伟业少时乘船去太仓应试，因路上耽误，晚到了一天，故考官不准其考试。经他一再恳求，考官便道，你如果能用“ 一 ”至“ 十 ”这十个数字来出个上联，并且说明你迟到的原因，那我就准你补试。吴伟业年龄虽小，但学识渊博，出口成章，见考官只有这一要求，自然满心欢喜，所以当即便出了上联：

一叶孤舟，坐了二、三个骚客，启用四浆五帆，经过六滩七湾，历经八颠九簸，可叹十分来迟

考官见吴伟业如此聪慧，非常高兴，便道：“ 你如果还能用“十”至“ 一 ”这十个数字做下联，并且诉说一下你应试的愿望，如果下联对得好，我就录取你！ ”吴伟业一听竟有此好事，所以稍加思索便对道：

十年寒窗，进了八、九家书院，抛却七情六欲， 苦读五经四书，考了三番两次，今天一定要中

考官见吴伟业的确才学出众，妙语惊人，便真的“ 破格 ”录取了他。

吴伟业的对联虽各嵌有十个数字，但上下联各三十五个字，数字和其他字搭配的余地较大，故对下联相对地说要容易一些，下面这个上联则就不那么容易对了。

据说郑板桥有一次和老师陆仲园乘船出游，二人在船上吟诗对对，好不惬意。艄公见他师生二人雅性甚浓，便道，他那里也有一上联，不知他二人能否对出。郑、陆二人本是联对高手，听说艄公有上联，心想那有何难，于是便请艄公出对。但见艄公出的上联是：

一扁舟，二客人，三四五六水手，扯起七八尺风帆，离九江，还有十里

此联只有二十六个字便有十个从一到十的数字，较前者难对多了。所以此联不仅郑板桥和老师陆仲园均未对上，以后近二百年的时间里竟一直无人对出。直到 1959 年，佛山市有个叫李戎翎的工人在运“ 九里香 ”这种木材时，灵感突发，这才对上那一上联。李戎瓴的下联是：

十里运，九里香，八七六五号轮，虽走四三年旧道，只二日，胜似一年。

联中后两句，即“ 虽走四三年旧道，只二日，胜似一年 ”，是这样得来

的。原来作者在 1943 年就顺江运过九里香木材，但那时由于运输方法落后，转运速度慢，所以运一趟需要一年时间；而现在用轮船运，只两天便可运到，所以说“ 只二日，胜似一年 ”。可见，此下联对得也是很巧妙的。

上两联都是长短句，且不需要押韵，所以还有其好对的一面，然而还有一幅类似两首五言诗的对子，相对说来就更难对了。

据说清代某地有个姓乔的老员外，他的两个女儿分别叫大乔和二乔。老人想为女儿们找两个学识渊博、才学出众的读书人做女婿，所以便张贴告示，要天下未婚学子于某月十九日晚到他家应考。文学家、画家徐文长是年尚不足 20 岁，本不想娶妻，但为了试试自己的文学才能，也前来佯作应考。是夜一共来了七人。于是老员外便给他们出了一个上联：

一大乔，二小乔，三寸金莲四寸腰，五匣六合七彩粉，八环九钗十倍娇。

老员外要求，下联也要嵌有自一至十这十个数字，但数字必须倒排，并要押同一韵脚。还要求他们必须在当晚对出来，如过了五更四鼓时分再对出来也不算数了。

这上联二十七个字中便有十个数字，且句句押韵，要对出同韵下联，谈何容易！所以来应选乔家乘龙佳婿的七个书生，未到三更时分便走了四人；四更时，便只剩徐文长一人了。徐文长虽不真想当乔家女婿，但为了对出下联，是心急如焚。他望着明亮的月光，不时听着远方传来的更鼓声。待听到五更鼓敲了三声时，他茅塞顿开，于是赶在乔员外宣布“ 时间到 ”以前，一气呵成地对上了下联：

十九月，八方照，七人六个都走掉；五更四鼓三声响，二乔大乔一人要！

此虽是民间传说，但说明要想对出一副妙趣横生的数字对联是很不容易的。

以上各联，一至十这十个数字不是按正顺序排列，就是按倒顺序排列。而下面还有一副对联，一至十这十个数字是无规律地嵌在联中的。

据说清朝乾隆年间，乾隆皇帝传旨命人在京城某地新修建了一座孔明、赵云庙。乾隆皇帝把当时最著名的学者、《四库全书》总纂、协办大学士纪晓岚和当时最著名的书法家、东阁大学士刘墉（1719—1804 年）一齐请了去，让他们一个撰联，一个题写联语。乾隆皇帝和纪晓岚关系甚好，深知纪晓岚学识渊博，思维敏捷，什么样的难题也难不倒他，故在纪晓岚撰写对联前，乾隆临时改变了主意，想难一难纪晓岚。山东孔明的事迹多，且上联好出，下联难对，所以乾隆要刘墉用孔明的事出上联，要纪晓岚用赵云的事对下联。纪晓岚虽知乾隆皇帝是有意难为自己，但也无可奈何，只得任乾隆安排。刘墉领命后，根据孔明的一些主要事迹，如三顾茅庐，排八卦阵，收二川，七擒孟获，六出祁山等，很快撰写了一个嵌有一至十这十个数字的上联：

收二川，排八阵，七擒孟获，六出祁山，五丈原中，四十九盏明灯，一心只望酬三顾

刘墉出完上联后，乾隆洋洋得意，心想，这回一定能把纪晓岚难倒了，因为此联不仅把一至十这十个数字全用了，而且概括了孔明一生的主要事迹，而赵云的事迹不仅远不如孔明多，而且也不能再用一至十这十个数字了，所以乾隆暗自高兴，心想这回要看纪晓岚的热闹了，过去从未难倒过他，但这回他则非栽跟斗不可了！然而就在乾隆还没“ 高兴 ”完的时候，纪晓岚却

早已对出了下联：

抱孤子，出重围，匹马单枪，长坂坡边，日夜争战，数百千员上将，独我犹能保两全

此下联虽然只用了赵云的一件事，虽然未用一至十这十个数字，却用了“孤、重、匹、单、两、百、千、长、日、夜”等数词、数量词等，可见，同样巧妙和奇特，令人叫绝！

（谭　英）

嵌数诗

早在南北朝时期，文学家鲍照（约 414—466 年）就曾写过一首数字诗《数诗》：

一身仕关西，
家族满山东。
二年从车驾，
斋祭甘泉宫。
三朝国庆毕，
休沐还归邦。
四牡辉长路，
轻盖若飞鸿。
五侯相饯送，
高会集新丰。
六乐陈广坐，
祖帐扬春风。
七盘起长袖，
庭下列歌钟。
八珍盈雕俎，
绮肴纷错重。
九族共瞻迟，
宾朋仰徽容。
十载学无就，
善宦一朝通。

此诗把一至十这十个数字巧妙地嵌入诗中，且自然贴切，毫无刀凿斧砍之痕，因此在俗文学史中颇有影响。

上诗共二十句，嵌有十个有规律的数字。而还有一些妙趣横生的数字诗，在十句诗歌中就嵌有十个数字。例如民国时期史学家李平心曾写有一首名为《十家皆断炊》的诗描写 30 年代我国各地中小学教师饥寒交迫和工作紧张劳累的悲惨情景。该诗写道：

一身平价衣，
两袖粉笔灰。
三餐吃不饱，
四季常皱眉。
五更就起床，
六堂要你吹。
七天一星期，
八方逛几回。
九天不发饷，
十家皆断炊。

此诗将十个数字搭配得非常得当，描写旧社会中小学教师的悲惨生活情景既真实又生动，可谓妙不可言。

解放前，反动文人罗家伦当清华大学校长时，不仅吃喝嫖赌，生活靡烂，而且镇压学生运动、贪污学生经费，学生虽多次揭露他的丑行，上书国民党

政府，但由于罗家伦对上级会溜须拍马，有靠山保护，故很长时间无人过问此事。有个叫乔大壮的诗人、书法篆刻家在忍无可忍之时，便写了一首题为《赞罗家伦》的数字诗发表在清华大学学生们编印的一个小报上，诗曰：

一身猪狗熊，
二眼官势钱。
三才吹拍骗，
四维礼义廉。
五毒均不少，
六脏烂成团。
七窍流浓血，
八成要玩完！
父母久（九）悔恨；
“生此十不全！”

此诗不仅将十个数字天衣无缝地嵌在了诗中，而且诗写得也很妙。如“四维礼义廉”就很耐人寻味。因为“四维”本包括礼、义、廉、耻四个内容，在这里，罗家伦的“四维”只剩了三维，而“无耻”了！诗的最后借罗家伦父母之口所发出的哀叹“生此十不全”，也很自然和恰当，故此诗实让人拍案叫绝！

以上两首五言诗都是十句，都嵌有一至十这十个数字，也就是说，五个字中便有一个数字。但是，按比例而言，它们还不是嵌数字最多的数字诗。

宋代理学家邵康节有首描写乡村风光的诗，其嵌数字的比例更大，全诗二十个字竟有十个是数字，诗曰：

一去二三里，
烟村四五家。
亭台六七座，
八九十枝花。

此诗通俗而又形象地给我们展现了乡村风俗的自然画面，更是数字诗中的上乘佳作。

以上所谈的数字诗所嵌的均是一至十这十个数字，而唐代著名诗人张祐所写的一首《闺怨》诗却嵌有“一二三四五六七八九十百千万尺丈双半”这十七个数字和数量词。

张祐的这首诗的写作背景和写作原因是这样的。

唐代我国北部边境常有少数民族到内地骚挠，为了边境居民的安全，唐王朝经常征召大量青年从军。在广西溪西有个叫燕端影的女子，新婚不久丈夫便从军去了辽西，从此便再无音信。十多年后，燕端影又被强征入宫。他的悲惨遭遇受到人们的同情。传说她入宫时，整个溪西的鸡均高声啼叫不止。诗人张祐听到这个故事后，感慨万分，于是他便以“溪西鸡齐啼”为韵，用“一二三四……尺丈双半”为律，作诗与以怀念。诗曰：

百尺楼窥万丈溪，
音书八九寄辽西。
忽惊二月双飞燕，
最恼三更一鸣鸡。
五六归期空望断（端），
七千离恨竟未齐。

半身回顾孤形影，
十载悲随杜宇啼。

此诗虽然人为地嵌入了“一二三四五六七八九十百千万尺丈双半”这些数字和数量词，但仍然悲悲切切，浑然天成，实在难得。特别值得提的是，该诗不仅嵌有十七个数字和数量词，还将这位令人同情的女子的名字燕端（断）影嵌在诗中，这就更加难能可贵了。

（许静波）

赞新娘姐妹们的数字诗

上面曾谈到有不少诗人写过各种形式的数字诗。但是清代诗人、作家徐文长在一个时辰内连作数首数字诗的事恐怕是最富有趣味性的事了。

故事是这样的。

原来徐文长是一个耿直乐观、幽默风趣的人。年轻时，好乘牛车远游，喜结交文坛朋友。有一次他和好友舒诒禄出游时，曾写了下面一首数字诗：

一车二人牛三头，
五岳名人四处游。
六寨七村随意住，
八九十天乐悠悠！

此诗自然流畅，数字使用得巧妙恰当，故曾轰动一时。

不久，好友舒诒禄和曹家二小姐喜结良缘时，他自然而然地成了座上客。席间，人们知道他是上面所说的那首数字诗的作者，于是有人便提议请他给新娘写首贺诗，并要求他也将此诗写成嵌有一至十这十个数字的数字诗。

大家知道，要在一首只有二十八个字的诗中嵌入十个不同的数字，那是非常困难的事，所以人们以为他不可能即席成诗。谁知他不负众望，只稍加思索后，便给新娘写了一首符合大家要求的诗：

一姐不如二姐娇，
三寸金莲四寸腰。
擦得五六七钱粉，
妆成八九十分标！

此诗不仅数字搭配得当，诗歌也生动形象，所以诗成后立即引起满屋宾客的鼓掌叫好，而新娘意外地得到了这首赞美她的好诗，更是兴奋异常，连道万福，感谢不止！

徐文长的这首诗虽然受到满屋宾客的赞赏，但是却“得罪了一个人，这就是新娘的大姐。原来徐文长并不知道“大姐”在场，故在赞美新娘时，无意把“大姐”当成了不好的陪衬，所以写了“一姐不如二姐娇”的诗句。谁知“大姐”也来参加二妹的婚礼了。她听徐文长如此公开地贬讥自己，深为不满，于是便通过妹夫、新郎倌舒诒禄向徐文长提出“抗议”，并强烈要求他也要给自己写一首赞美诗，以“挽回”自己在广大宾客中的“不良形象”。徐文长听好友一说，恍然大悟，感到自己确不该褒一个贬一个。既然是自己“理亏”，所以他便爽快地答应了“大姐”的要求，又立即给她写了一首赞美诗：

二姐不如一姐甜，
四衬五官三寸莲。
七州六府倾国色，
爱煞八九十少年！

诗中的“三寸莲”即“三寸金莲”的简写。该诗在前面热情赞美“二姐”的基础上说大姐“更甜”，而且“爱煞八九十少年”，这则使诗所描写的内容更加具体，更有说服力，所以“大姐”得此诗后也高兴得久久合不拢嘴，心满意足地回到自己的座位上去了。广大宾客见徐文长竟能如此出口成章，妙语连篇，更是惊愕不已，无比敬佩，掌声和叫好声自然就更加响亮了。

但在掌声尚未平息时，新郎却又来找徐文长了。原来新娘不仅有个姐姐，而且还有个妹妹。这个妹妹则可谓是才貌双全，特别是才学尤为出众。她的记忆力甚好，四书五经，正史野史，她虽不敢说能倒背如流，却敢说大都记得滚瓜烂熟。在二姐的婚礼上，她见徐文长既赞美了二姐，也赞美了大姐，所以也起了嫉妒之心，因而也通过二姐夫向徐文长转达了自己的要求，即要求他必须“平等地”对待他们三姐妹，也得给她赋诗一首。徐文长本是忠厚之人，见“三妹”又言之有理，他岂能单单地扫她的兴致？所以对“三妹”的要求他连点头称是。他在简单地了解了“三姐”的才学过人、记忆力特好的情况后，便当即为她吟诵道：

一姐二姐虽聪慧，
仍然不如小三妹。
四书五经七八部，
八九十天全背会！

此诗写成后，自然又赢得广大宾客的满堂喝彩！

在喝彩声刚刚平息时，不知是谁又提议说，徐文长的三首诗分别赞扬了三姐妹，但仍不免有褒一贬一之嫌，故还应为他们三姐妹合写一首，以为婚礼增添情趣。此意见一提出，又得到了全体宾客的齐声附和。徐文长一方面见大家雅兴未消，再者也不肯在众人面前承认自己已经“江郎才尽”，所以对他们的要求，他便再次答应了下来。他思考片刻后，便又要来纸卷挥笔写道：

一二三姐喜满堂，
四年生得五儿郎。
六品七品高官坐，
八九十岁孝顺娘！

此诗对尚未婚嫁的“三姐”虽然不太恭敬，但其内容还是很好的。它不仅满足了封建社会人们普遍关心的多子多福及儿女孝敬老人的愿望，而且诗歌的表现手法也很高明。它不是直接地、正面地说三姐妹高寿，而是说她们的五个儿郎在八九十岁时都是孝子，这就等于说他们肯定都是一百多岁的老寿星了！

徐文长能在不到一个时辰的时间里连写四首分别嵌有一至十这十个数字，且妙趣横生的数字诗，不仅活跃了婚礼的气氛，使三姐妹皆大欢喜，也使全体宾客大饱眼福，目睹了诗人、文学家的出众才华。

（高星寒）

赵州桥的曲直

河北省赵县有一座世界闻名的石拱桥——赵州桥。它是隋代著名石匠李春建造的。远远望去，赵州桥像一道彩虹架在河上，那弯弯的桥拱形成的圆弧，多么艺术，富有曲线美！可是当你走近一看，那优美的曲拱，却是用一块块直棱石料巧妙构造的。这构思奇特的赵州桥不但在世界桥梁史上留下了光辉的一页,而且闪耀着高等数学启蒙思想的光芒,有谁会想到曲中有直呢？

如果你留心观察，你就会发现在周围生活中有许许多多曲中有直的物体。那高耸的烟囱很多都是空心的圆柱，你观察过手艺高超的建筑工人是怎样用砖砌圆柱形烟囱的吗？你想过曲中有直的辩证关系吗？如果你用一把像直尺一样的锉刀，你相信可以在铁板上锉出圆吗？当你用剪刀在纸上剪圆形时，你可洞察秋毫地想到：这恰恰是用无数条难以察觉的直线剪出了圆上的曲线……在你周围生活中，这样的例子还多得很，它告诉我们：把许多短短的直线连接起来，可以逐渐接近曲线；当这些直线变得极短时，直线就可以变成曲线。这个认识是数学思想史上一个重大发现和飞跃，它像赵州桥一样沟通了曲直，为高等数学中大名鼎鼎的微积分奠定了思想基础。

赵州桥的曲直与我们学的圆有什么联系呢？在推导圆的面积公式时，我们把圆分割成许多扇形，然后把这些扇形拼成接近长方形或平行四边形。分的扇形越多，扇形的弧就越接近直线，化曲为直，由此推导出圆的面积公式。我国古代数学家刘徽和祖冲之就是运用曲中有直的思想。刘徽从圆内接正 6 边形算起，依次把边数加倍，算出圆内接正 12 边形、24 边形……直到 96 边形，求出π=3.14。过了二百年，闻名于世的伟大数学家祖冲之，从圆内接正 12288 边形，求出π的正确数值在 3 .1415926 与 3 .1415927 之间。在一个圆内画一个内接正 12288 边形，这时的直线边已经非常短，几乎与圆周重合了。由此看来，在一定条件下，直线可以转化为曲线，曲线也可以转化为直线，曲线和直线是对立统一的。

生活中处处有数学，如果你留心观察和思考，你就会在平常的事物中发现许多闪光的数学思想。

（彭景康）

猜中和猜不中

有些游戏就是怪。看来能猜中的偏偏猜不中。看来猜不中的偏偏猜得中。

不信，各讲一个给你听。

小牛和小马、小羊在一起做游戏。小牛用两小张纸，各写一个数。这两个数都是正整数，相差是 1。他把一张纸贴在小马额头上，另一张贴在小羊额头上。于是，两个人只能看见对方头上的数。

小牛不断地问他们，你们谁能猜到自己头上的数吗？

小马说：我猜不到；

小羊说：我也猜不到。

小马又说：我还是猜不到；

小羊又说：我也猜不到。

小马仍然猜不到；

小羊仍然猜不到。

小马和小羊都已经三次猜不到了。

可是，到了第四次，小马喊起来：我知道了！小羊也喊道：我也知道了！

请你想想，他们头上是什么数？怎么猜到的？

原来，“猜不到”这句话里，包含了一个重要的信息。

要是小羊头上是 1， 小马当然知道自己头上是 2 。小马第一次说“猜不到”，就等于告诉小羊，你头上的数不是 1！

这时，要是小马头上是 2 ，小羊当然知道自己头上应当是 3 。可是，小羊说猜不到，就等于说：小马，你头上不是 2 ！

第二次小马又说猜不到，就等于说：小羊头上不是 3 ，不这样，我头上一定是 4 ，我就能猜到了。

小羊又说猜不到，说明小马头上不是 4 。

小马又说猜不到，小羊头上不是 5。

小羊又说猜不到，小马头上不是 6 。

小马为什么这时猜到了呢？原来小羊头上是 7。小马想：我头上既然不是 6 ，他头上是 7 ，我头上当然是 8 啦！

小羊于是也明白了：他能从自己头上不是 6 就能猜到是 8 ，当然是因为我头上是 7 罗！

实际上，即使两人头上写的是 100 和 101，只要让两人对面反复交流信息，反复说“猜不到”，最后也总能猜到的。

这游戏，还有一个使人迷惑的地方：一开始，当小羊看到对方头上是 8 时，就肯定知道自己头上不会是 1 ，2 ，3 ，4 ，5 ，6 ；而小马也会知道自己头上不会是 1 ，2 ，3 ，4 ，5 。这么说，两人的前几句“猜不到”，互通信息，肯定是没用的了。可是说它没用，又不对，因为少了一句，最后便要猜错。这里面，究竟是什么道理呢？你得仔细想想。

另一个游戏是：小牛偷偷在纸上写了一句话，这句话叙述一件事，请小马和小羊猜这句话叙述的事对不对。并且给两人各一张纸，要他们把所猜的结果写在纸上。

小牛说：你们两人中只要有一个猜中了，你们就胜了。晚上，我给你们唱一支好听的歌。都猜不中，你们输了，什么时候给我演个节目都行。

小羊说：我们一定有一个人猜得中。我猜你这句话说得对，他猜你这句话不对，总会有一个猜中吧！

可是，结果还是小牛胜了。

原来，小牛写了这样一句话：

“你的纸上写的是‘不对’”。

小羊在纸上写的是“对”，这时，小牛这句话当然错了。可小羊猜“对”，当然猜不中了。

小马呢，他在纸上写的“不对”，这时，小牛这句话当然对。可小马猜“不对”，也没有猜中。

小羊和小马恍然大悟，说：“你就是把纸上的话给我们看了，我们也决不会猜中的啊！”

上面这两个游戏，都牵涉到一些逻辑推理中的怪现象，人们把它叫做“数学悖论”。怎样说明悖论？怎样消除悖论？是数学基础研究中的一件大事，很多人正在努力研究解决。

（谈扬烊　张景中）

在速算的背后

速算，看起来使人惊奇。弄清了它的根底，原来十分平常。

两数相乘，要是都是比 100 略小的数，例如 98×93，懂得窍门的人，可以应声说出它的答案：9114。一算，确实不错。

怎么速算的呢？

容易看出，98×93 的积是 4 位数；98 对 100 的补数是 2，93 对 100 的补数是 7。用 98 减去 93 的补数 7，或者用 93 减去 98 的补数 2，得 91，这就是答案的前两位；两补数相乘，2×7=14，这就是答案的后两位。

要是两补数相乘得到的是一位数，就在前面补个 0，凑够两位；要是得到的是三位数，就进上一位。98×97=9506，95=98-3，06 是由 2×3=6 凑 0 得到的；86×92，86-8=78，14×8=112，结果是 7912。

这两步，说起来有点噜苏，用起来是非常干净利落的。

比 1000 或者 10000，100000，……略小的数相乘，都可以如法炮制。

为什么可以这样算呢？

两个数都比 100 或者 1000，10000，……略小一些，就一定可以用 10^n-a 和 10^n-b 来表示，这里的 n、a 和 b 都是自然数，得到

$(10^n-a)(10^n-b)=10^n(10^n-a-b)+ab$。

右边第二项 ab，显然就是两个补数的乘积。右边第一项里的 10^n-a-b，可以看作 $(10^n-a)-b$，或者 $(10^n-b)-a$，这正是一个乘数减去另一个乘数的补数；10^n 是添 0 数，是定留空位数的。

速算之所以能成功，就因为它是建立在恒等式的基础上的！

从速算背后，捉到了隐藏的恒等式，不要轻易放掉了它。在这里头，还可能找到更多的窍门。

你看，在恒等式

$(10^n-a)(10^a-b)=10^n(10^n-a-b)+ab$ 中，把“-”换成“+”，它也对。

$(10^n+a)(10^n+b)=10^n(10^n+a+b)+ab$。

这样，又学会了两个都比 100 或者 1000，10000，……略大的数相乘的速算法了。

1045×1006，

1045+6=1051，补三个 0 是 1051000，

45×6=270，结果是 1051270。

能把这两个速算法统成一个吗？

能。这只要推广一下补数的概念就行了。通常，比 100 小的数，例如 95，它补上 5 就是 100，所以 5 叫做 95 的补数。那么，105 要补上多少才是 100 呢？只要补上—5 就行了。

这么说，比 100 略大的数，它的补数是负数。

可不是吗，100—a 是 a 的补数，a 比 100 大，补数是负的，完全合理。

补数可以是负数，那开头说的方法，就不只可以用于两个略小于 100 或者 1000，……的数相乘，也可以用于两个略大于 100 或者 1000，……的数相乘。这时，减去另一数的补数，因为补数是负的，实际上是加上一个正数。两个补数相乘，在补数是负的情况下，负乘负得正，后头部分也是正的！

再一想，两数相乘，要是一个比 100 或者 1000，……略大，另一个略小，

这个方法也是可以用的。

995×1046，1046-5=1041，

5×（-46）=-230，1041000-230=1040770。这就是答案。你不妨验算一下。

这样看来，我们要两个数与 100 或者 1000，……很接近，这个条件，在那个恒等式里并不需要，只是速算的目的要我们这样做！实际上，随便两个数相乘，都能用这个方法。例如 57×34，这里的补数是 43 和 66， 34-43=-9，补两个 0 是-900，43×66=2838，-900+2838=1938，这就是答案。

这样做，结果倒不错，可是比普通的算法还麻烦，就不是速算了。

在这个速算法的背后，躲着一个恒等式，那么、是不是在别的恒等式背后，也藏着别的速算法呢？

确实是的。

根据（a+b）（a-b）=a^2-b^2：

603×597=（600-3）（600+3）=360000-9=359991；

78^2-77^2=（78+77）（78-77）=155。

根据$(a+b)^2$=a^2+2ab+b^2=a（a+2b）+b^2：

25^2=2×300+25=625；

75^2=7×800+800+25=5625。

把它推广一下，由

（a+b）[a+（10-b）]=a（a+10）+b（10-b），

可以计算两个 10 位数相同、个位数互补的数相乘。

76×74=7×800+4×6=5624。

最后，建议你想一下， 97×989 能不能速算？背后躲着哪个恒等式？

（谈柏祥）

奇妙的三兄弟

自古以来，在我国各地，就流传着多种多样的智力游戏。其中，有的流传至今，深受欢迎。

最近，见国外介绍一种叫做“拣石子”的游戏，明确指出是从中国学来的，有的学者还就此写了论文。可惜它究竟起源于我国什么朝代，流传情况如何，已经无从查考了。

这个游戏的玩法非常简单，只要在地上拣些小石头或者小树杈，分成两堆，每堆的个数可以是任意的，只要不相等就行。玩的规则如下：

一，两人轮流拿石子，每次可以从一堆石子中，任意取一颗或者几颗，直到把一整堆石子全部取走。也可以从两堆中，任意取走相等数量的石子。

二，每次轮到谁拿，他至少得拿一颗石子，不允许弃权，一颗都不拿。

三，谁拿光剩下的石子，就算他赢了。

说也奇怪，这个看起来十分简单的游戏，要想十拿九稳，取得胜利，很不容易。不知道取胜诀窍，马虎大意随便拿，只能一输到底。

诀窍在哪里呢？

先请看这张表：

表中第一排数，是表示拿石子的先后顺序的。第二和第三两排数，叫做 A 数列和 B 数列，数列中相应的数构成一对。例如第五对是（8，13），第九对是（14，23）。

序数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A 数列	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19
B 数列	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31

你想取胜，只要记住：在每次取走石子以后，要是能使留下的石子个数，和表中 A 数列和 B 数列的某一对相符合，就必胜无疑了。所以，你可以把（1，2），（3，5），（4，7），……　这些数叫做“胜利之数”。

举一个例子。

开始时，两堆石子分别有 7 颗和 11 颗：

0000000

00000000000

要是你先拿，就可以在第二堆中取走 7 颗石子，使它成为：

000000

0000

注意，这对（4，7），是表中的第三对。

以后，不管对手怎样动作，你总是稳操胜券了。要是对手从两堆石子中各拿掉一颗，使它成为：

000000

000

这时，你就可以再从第一堆中取走一颗石子，使留下的石子数，是表中第二对（3，5）：

00000000

这样一步一步，从表中较大的一对数，逐渐过渡到较小的一对数，就可

以保证你拿到最后的一颗石子。

你可能要问：表上一对一对的数那么多，又看不出有什么变化规律，这怎么记得住呢？

是怪别扭的，不好记。可这正是游戏的奥妙所在！

说到这里，讲一个“无理数三兄弟”的故事给你听。因为这个故事和拣石子有密切关系。

在数学里，不循环无限小数叫做无理数。它是一个庞大的家族，成员比有理数家族多得多。在这个家族里，有三兄弟的模样和脾气特别相像。

其中，老大是2.61803398……准确值是$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$；老二是1.61803398……准确值是$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$；老三是0.61803398……准确值是$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。他们挨个正好相差1。

在这三兄弟中，老三来头不小，它随同华罗庚教授奔走大江南北，在推广优选法中立下了汗马功劳，这就是有名的0.618法。优选法里用0.618最好，这是1953年一个美国人发现的。为什么0.618最好？国外虽有一些证明，可都是不正确的，华罗庚指出了这一点。随后，我国青年数学家洪加威，在1973年首先发表了一个严格的证明。

从历史上来看，老三早在古希腊、罗马时代，就已经名扬四海，叫做“黄金分割数”，和绘画、雕刻、建筑等都结下了不解之缘。

三兄弟友爱相处，亲密无比，它们之间的奇特联系，说出来令人大吃一惊。不信，你用笔算一下就知道了。

现在，请你把老二和老三乘一乘：

$\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}{4}=\frac{5-1}{4}=1$。它们的乘积是1。换句话说，老二和老三是互为倒数。在一切实数中，只有唯一的这样一对具有倒数关系的正数，而它们的差是1。

老大和老二的关系也很不平常。老大正好是老二的平方，而它们的差是1。在全部实数中，具有这种关系的一对正数，也是独一无二的。

这样，要是你设老二为x，得老大是x+1，老三是x-1，那么，x（x-1）=1，$1+x=x^2$。

搞清楚了它们之间的这种关系，要是你把老二记为φ，那老大就是ϕ^2，老三就是$\frac{1}{\phi}$。

说到这里，原来上面拣石子游戏中很难记住的A数列，它的通用公式是[nφ]，B数列的通用公式是[$n\phi^2$]。注意，这里的n表示序数；〔 〕不是中括号，而是表示对正数来说，只取整数，略去小数，比如[2φ]=[3.236]=3，[$2\phi^2$]=[5.234]=5。

不仅如此，A数列和B数列中所有的数，正好是全体自然数，既不重复，也不遗漏！

这些性质是惠特霍夫发现的，所以这个游戏，在国外就叫做惠特霍夫游戏。

游戏说到这里，你也许会问：有没有简便办法，可以排出这个胜利之数的表格呢？

回答是有。按照下面的办法，你马上就能把这个表排出来：

一，第一对胜利之数当然是（2 ，1 ）。对方不论怎么拿，剩下的你都能一把抓尽。

二，比 1 ，2 大的数轮到了 3 。3+序数 2=5 ，（3 ，5 ）就是第二对数。下一个轮到 4 ，4+3=7，（4 ，7 ）就是。

三，以此类推。要是第 1 ，2 ，……，n-1 对数都排好了。那第 n 对中的 A 数，就是前面没用过的最小自然数。把它加上序数 n ，就得到 B 数。

为什么这样拿必胜，说来话长，就不多说了。

（张景中）

韩信点兵

韩信是我国历史上著名的兵法家之一，“韩信点兵”说的是：某天扎营后，韩信为了弄清某营帐士兵的具体人数（大概人数他知道），却并不亲自点数，只是传令下去，让那个营帐的士兵分几次按不同人数列队，并把每次列队后的剩余人数[①]报上来。得知这几次列队的余数后，韩信马上就能把士兵的总数算出来。

韩信点兵的秘诀在哪里呢？为了便于讨论，设这些士兵先后按 3 、5 、7 人数列队，它们的余数分别为 a 、b 、c 。

解法 1 ：由题意可立方程式

$$\begin{cases} x = 3n_1 + a, & (1) \\ x = 5n_2 + b, & (2) \\ x = 7n_3 + c。 & (3) \end{cases}$$

因 3 、5、7 的最小公倍数是 105，故将(1)×35 、(2)×21、(3)×15，得

$$\begin{cases} 35x = 105n_1 + 35a, & (4) \\ 21x = 105n_2 + 21b, & (5) \\ 15x = 105n_3 + 15c。 & (6) \end{cases}$$

(5)+(6)-(4)，得

$x=-35a+21b+15c+（n_3-n_2-n_1）·105$

$=105（n_3+n_2-a）+70a+21b+15c$。

令 $70a+21b+15c=105n_4+r$，上式变为

$x=105（n_4+n_3+n_2-n_1-a）+r$

$=105n+r$。

式(7)表明 x 有无穷解，r 是最小的一个正整数解。105 是 3 、5 、7 的最小公倍数，将式（7）代入(1)、(2)、(3)式后，无论 n 取任一正整数，三个余数 a 、b 、c 的值总不变。

如设 a = 1、b=2、c=3，由

70a+21b+15c=157=105+52，

得 r=52。

再由式(7)得　　　　　　x=105n+52。

即知士兵的总人数为 52 人、157 人、262 人，……。

在有无穷解的情况下，韩信又怎能确定士兵总数呢？因为韩信已知士兵的大概人数（设有一、二百人），所以他能在得知几次列队的余数后（设 a=1、b=2、c=3），很有把握地算出

了这部分士兵的总人数（x=105+52=157 人）。

解法 II：我们首先引入一个概念：“同余”。如果 a、b 两数分别除以 m 后所得余数相同，就说：对数 m，a 和 b“同余”。

记作 a≡b（modm），m 称为模数，符号≡为同余。

不难理解，如某数 a 除以 m 所得的余数为 r，

即 $a=ma_1+r$，

[①] 如排成五列横队，剩余人数可能是 0、1、2、3、4 人。

则 $a \equiv r \pmod{m}$。

例 1.∵$14=5\times2+4$，

∴$14\equiv4 \pmod{5}$。

例 2.∵$11=5\times2+1$，

$21=5\times4+1$，

∴$11\equiv21 \pmod{5}$。

例 3.∵$26=8\times3+2$，

$-14=8\times(-2)+2$，

∴$26\equiv-14 \pmod{8}$。

如设 $a\equiv b \pmod{m}$；$c\equiv d \pmod{m}$，可得以下同余式的推理：

$a+c\equiv b+d \pmod{m}$；　$a-c\equiv b-d \pmod{m}$；

$lca\equiv kb \pmod{m}$；$ac\equiv bd \pmod{m}$；$a^n\equiv b^n \pmod{m}$。

在分析一些有关的余数问题时，如运用同余式及其推理，将使问题得到简化。由上述韩信点兵问题的题意可得同余式：

$x\equiv a \pmod{3}$，$x\equiv b \pmod{5}$，$x\equiv c \pmod{7}$。

以上三式可变换为：

$35x\equiv35a \pmod{105}$，　　(1)

$21x\equiv21b \pmod{105}$，　　(2)

$15x\equiv15c \pmod{105}$。　　(3)

(2)+(3)－(1)，得

$x\equiv21gb+15c-35a \pmod{105}$，

$x\equiv70a+21b+15c \pmod{105}$①。

令 $70a+21b+15c=105m+r$，上式变为

$x\equiv r \pmod{105}$，

即得 $x=105n+r$。

以上两种解法得到的结果相同。关于三、五、七列队的解法，在我国民间还流传有一首诗：“三人同行七十稀，五树梅花甘一支，七子团圆整半月，除百零五便可知。”

（赵为禾）

迷人的九宫图

我国古代的许多数学书籍里，都记载着这样一个故事，相传在大禹治水的时候，一匹“龙马”在黄河里驮着一幅图，上面画着许多神秘的数学符号，后来人们便把马背上的图叫做“河图”，以后又有所谓的“洛书”，这显然是一种神话。那么，“河图”、“洛书”到底是什么呢？其实就是下面所示的这个图，也叫做九宫图。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

你瞧，它还真有点迷人之处呢！图中每行里的 3 个数加起来都等于 15，每列里的 3 个数加起来也是 15，对角线上的 3 个数加起来也都等于 15。前 9 个自然数里，3 个数的和是 15 的 8 个算式，被巧妙地安排在一个图形里。

类似这样的图，现在人们叫它做幻方。上图就是一个 3 阶幻方。几百年来，幻方一直得到人们的喜爱，素有“智力体操”之说。幻方种类也越来越多，有同心幻方、分块幻方、质数幻方、六角幻方等等。随着科学技术的发展，幻方在许多方面都得到了应用。

（王晓秋）

扑克牌之谜

小奇最不爱学数学，一上数学课就无精打采，最近学分数乘法可别扭啦！$10\times\frac{1}{2}=5$，他怎么也想不通：乘法不是越乘越多吗？怎么分数乘法越乘越少呢？今天放学回家他把书包一扔，就去找同学打扑克。嘿，打起扑克，你看他那兴高采烈劲儿：“哈！我赢了！”想不到的是今天“小数学迷”小研也来了。小研说：“今天我给你们个小魔术。”他让小奇拿出一副扑克牌，抽掉大、小王，然后把剩下的 52 张牌红、黑相间排好。他问小奇：“52的$\frac{1}{2}$是多少？”小奇说：“26张”。小研说：“也就是说$52\times\frac{1}{2}=26$，对吗？”小奇笑着说：“想不到扑克牌里还有分数乘法哩，老师要是这么讲我不就明白了么！”小研说：“只要你留心，处处都有数学。现在你把这副牌平均分成两叠，让每叠牌最底下那张牌一红一黑，然后将两叠牌洗一次”。小奇洗完牌，小研让他从这叠洗过的牌的底下开始，一对一对地拿牌，奇迹出现了——不管你是怎样洗牌的，你拿的每一对牌都是……

你想知道结果吗？那就自己试一试吧！我告诉你这个神秘的结果是数学家兼魔术师诺尔曼·吉尔布雷德在 1958 年发现的，因此被命名为吉尔布雷德原理。你能想象出这是怎么一回事吗？你能捉住扑克牌中的魔数吗？

故事还没讲完，让我接着给你讲“小扑克迷”是怎么变成“小数学迷”的：

那天，小奇按照小研告诉他的扑克魔术变了一次又一次，不管怎样洗牌，最后拿的每一对牌总是一红一黑！这里的奥妙在哪里呢？小奇想啊想啊，他一边摆牌，一边观察，一边思考，他发现拿的每一对牌虽然总是一红一黑，可是顺序却不一样：有的先红后黑，有的先黑后红。接着小奇把牌依次摆开，他发现这副牌不再只是红、黑相间，有的是红、黑相间，有的是“红、黑、黑、红”。有的是黑、红、红、黑”。如果连起来就是：……红、黑、红、黑、黑、红、黑、红、红、黑……”这样，每一对牌中都有一红一黑。小奇突然眼前一亮：如果把扑克牌的红与黑看成奇数和偶数，说不定能发现奇数与偶数的奥秘呢！

别看小奇他学数学不行，打起扑克可机灵呢！他想：如果两红两黑间隔，洗一次牌再四张四张地拿会怎么样呢？他猜想会不会是两红两黑呢？他一试，证明他果然猜对了！不过他又有一个新发现：每四张牌虽然都是两红两黑，但组成的顺序有六种：红、红、黑、黑、黑、黑、红、红、红、黑、红、黑、黑、红、黑、红……还有两种，你能推想出来吗？

（王晓秋）

分　　钱

一位老伯伯要带着 10 元钱上街买东西。他请小聪明帮他把 10 元钱分成 10 份，包在 10 个小包里。使他买东西时，从 1 分到 10 元，不管要花多少钱，只要从这 10 包中挑出几包付钱，不用找钱。

小聪明想，必须有一包是 1 分钱的，不然买 1 分钱的东西怎么办呢？

为了买 2 分钱的东西，有两种包法。一种是再包一个 1 分钱的包，另一种方法是包一个 2 分钱的包。那种方法好呢？当然是第二种方法好。因为第二种方法不但可以买 2 分钱的东西,还可以和第一包和起来买 3 分钱的东西。

下一步要考虑怎样买到 4 分钱的东西。这可以有四种方法：

增加一个 1 分钱的小包，可买 1—4 分钱的东西。

增加一个 2 分钱的小包，可买 1—5 分钱的东西。

增加一个 3 分钱的小包，可买 1 —6 分钱的东西。

增加一个 4 分钱的小包，可买 1—7 分钱的东西。

当然是第四种办法好。

下一步，为了买 8 分钱的东西，我们要增加一个什么样的包呢？想一下刚才的包法——1 分、2 分、4 分，很自然会想到 8 分。

这样我们发现了一个规律：后一包比前一包多一倍。

可是从 8 分到 10 元，相差很大，我们已经包了四包，还剩六包，能行吗？小聪明按照规律算了一下：

第五包，1 角 6 分，可买 1 分—3 角 1 分的东西。

第六包，3 角 2 分，可 买 1 分—6 角 3 分的东西。

第七包，6 角 4 分，可买 1 分—1 元 2 角 7 分的东西。

第八包，1 元 2 角 8 分，可买 1 分—2 元 5 角 5 分的东西。

第九包，2 元 5 角 6 分，可买 1 分—5 元 1 角 1 分的东西。

第十包，按规律应是 5 元 1 角 2 分。可老伯伯的 10 元钱，前九包已经包完 5 元 1 角 1 分，剩下的 4 元 8 角 9 分，包成第十包。

这样把 10 元钱包成十包，能搭配出从 1 分到 10 元的 1000 种钱数。

比如老伯伯要买 3 元 4 角 5 分钱的东西，只要拿出第一包、第四包、第五包、第七包、第九包付钱，正好是 3 元 4 角 5 分，不用找钱。

你看，小聪明有多聪明呀！

（孙义信）

樵夫和神仙

从前有个懒惰的樵夫，他整天幻想能遇到神仙，好得到一种不花力气就能发财的窍门。

一天，他在山里砍柴，真的遇到了神仙。樵夫苦苦哀求神仙说：“我在山里累死累活地砍了 3 天柴，才卖了这么一点钱。你神通广大，教我一个不费力气就能得到钱的办法吧！”

神仙听完他的话，指着南边的一座石头桥说：“好吧！我教你一个不费力气得到钱的办法。从现在起你从这座桥上每走一个来回，口袋里的钱就会增长一倍，但每走一回，必须付给我 24 个钱作为报酬。”

樵夫高兴地在桥上走了一个来回。他数一数口袋里的钱，果然增长了一倍。他拿出 24 个钱交给了神仙，然后又向桥上走去。等到他第三回次来，把 24 个钱交给神仙后，摸一摸口袋，竟一个钱也没有了。

这时神仙说：“年轻人，想不劳而获是不行的啊！”说完飘然而去。

现在我们来想一想这个故事里包含的算题。

樵夫第三次回来，交给神仙 24 个钱后，口袋里就一无有了，那么樵夫原来有多少钱呢？

其实，樵夫口袋里的钱反复经历了两种变化：

①增长一倍（即增加到原来的 2 倍）；②减少 24。

这样变化三回，最后变为零。

（孙义信）

你的生日是星期几

你知道你出生那天是星期几吗？现在教你把这个问题算出来的有趣的方法。

例如，算一算 1979 年 5 月 5 日是星期几。

事先必须知道下面四个数：

①公元年数的末两位数。如 1979 年，就是 79。

②年数的末两位数除以 4 所得的商。如 1979 年，就是 79÷4=19……余 3

但是，如果恰能整除，那么所求的是 1 月和 2 月时，要从得数上减去 1。

③月系数。查下面的表，5 月的系数是 1。

月的系数：1 月…0 2 月…3 3 月…3 4 月…6 5 月…1 6 月…4 7 月…6 8 月…5 9 月…5 10 月…0 11 月…3 12 月…5

④日数。如 5 日就是 5。

知道了这 4 个数，把它们相加，得数再除以 7，求出余数。

若余数是 1 ，那么那天就是星期一，余数是 2 ，那天是星期二……余数是 6 ，那天就是星期六，恰能整除，那天就是星期日。

这样，1979 年 5 月 5 日是 79+19+1 +5 =104

104÷7=14……余 6 所以这一天是星期六。

（彭景廉）

头发、游鱼与数学

你能回答出你头上有多少根头发吗？你能回答出一个池塘里有多少游鱼吗？你一定会皱着眉头，觉得无从下手，无法知道它的数量。

怎么解决这个问题呢？原来这就要用一种新学问——数理统计来解决它。你头上有多少根头发？回答这个问题，一根根数显然是不行的。怎么办呢？那就要测量一下长着头发的头皮面积有多少，再数一数一个平方厘米的头发有多少根，然后用乘法计算，得出头发的总数。据统计，人的头发大约有 13 至 15 万根。

那么怎样计算在池塘里游动的鱼有多少条呢？你只要从池塘里捞出 100 条鱼，然后在每条鱼身上拴条红线，或者做别的记号，然后把鱼放回池塘里。过一两天后，当这些鱼游开后，你再捕上 100 条，看看这 100 条鱼中有几条做了记号的鱼。如果有 2 条有记号，那么池塘里的全部鱼 x 应为

$$\frac{100}{x}=\frac{2}{100} \qquad x\approx 5000（条）$$

你看，这种统计的方法妙不妙啊！

（彭景廉）

巧分羊

传说古代有一老翁，病魔缠身，卧床不起。一天，他知道自己已经不行了，便给自己的三个儿子面授遗嘱：“我即将不能生活在人间了，有羊 19 只给你们，你们就按下面的比例分配吧！三人分得羊的只数是：老三为二分之一，老二为四分之一，老大为五分之一。不能卖了羊分钱，也不准杀了羊分肉。”说完这段话后，老翁便去世了。料理了老翁的后事后，兄弟三人便开始分羊，但怎么也分不到整头数。正当他们为难之际，一位白头老人手牵一只羊路过此地，见他们议论不休，便上前去问个明白。白头老人听后哈哈一笑，说道：“这个好办。我先把这只羊给你们算进去一起分，你们可以不卖不杀，按你们父亲的遗言分配，保险你们人人满意，至于我的这只羊嘛，分完后还要还给我。”兄弟们重新分起羊来，确能按老父遗言分妥，兄弟三人很高兴。白头老人也牵着他的羊远去了。同学们，你们说他们是怎样分的？

分法是：19＋1=20（只）

$20\times\frac{1}{2}=10$（只）（老三的）

$20\times\frac{1}{4}=5$（只）（老二的）

$20\times\frac{1}{5}=4$（只）（老大的）。

检查：10＋5＋4=19（只）

（高星寒）

草纸算术趣题

在公元前 2 千年左右，埃及人已学会用一种芦苇制造草纸，用削尖的芦苇杆蘸着颜料在上面写字。这种草纸和写字的方法不久便流传到很多欧洲国家。

考古学家在公元前 1800 多年的草纸上，曾发现过不少数学题。其中有一个题目很有趣，它是五个数，即 7、49、243、2401、 16807，而在这五个数的旁边依次有五个图，即人、猫、鼠、大麦、量器。很明显，这道题目的原意是：有 7 个人，每人养 7 只猫，每只猫吃 7 只老鼠，每只老鼠吃 7 棵麦穗，每棵麦穗可以长成装满 7 个容器的大麦。请问，它们各有多少？而那五个数字便是答案。

这道 3800 年前的算术题直到 19 世纪中叶才被考古学家发现，但是，在 18 世纪，意大利数学家斐拉契的著作中却也有一个类似的数学题：

7 个老妇同赴罗马，每人有 7 个骡子，每匹骡子驮 7 个口袋，每个口袋装 7 个面包，每个面包带着 7 把小刀，每把小刀有 7 个刀鞘。问各有多少？

自 19 世纪以来，和这大同小异的题目便在欧洲和美洲广为流传。在美国和俄国，有人还把它编成了歌谣写进算术书里。在俄罗斯民间流传的那首歌谣是这样的：

路上走着 7 个老汉，
老汉各拿 7 个竹竿；
竹竿各有 7 个枝桠，
枝桠各挂 7 个竹篮；
篮里各有 7 个竹笼，
笼里各有 7 个雀蛋。
请问雀蛋共有多少？
看谁能够最先做完。

民国时期，我国也流传有类似的歌谣：

7 对老夫妇，
各有 7 棵老槐树；
每树各有 7 树杈，
每杈 7 对老鸹住；
每对老鸹孵 7 窝，
每窝各孵 7 幼雏。
一共多少小老鸹？
看谁最先算得出。

在不同的时代，不同的地区，竟然流传着同样一个数学题，而且它们都是在“7”上做文章，而不在“5”、“8”、“9”等数字上做文章，这不是一个很有意思和很奇怪的事吗？是人类对“7”有特殊的好感，还是“7”这个数字有什么魔力影响着人类的思维？这就不得而知了。

（许静波）

日本古代趣题拾零

在日本历史上，古代劳动人民在长期的生产实践中创造了自己光辉灿烂的民族文化，其中巧妙的数字运算成就就是该民族文化的一个重要组成部分。这里，我们举几个有趣的数字运算故事。

一、小町算

不知从什么时候起，古代日本皇宫里的妇女盛行玩一种数字运算的游戏。把从 1 到 9 或从 0 到 9 的每个数字都用上进行运算,结果得数必须是 100。这种算法，叫作“小町算”。什么叫“小町算”呢？传说，在日本古代的历史上，有一个叫小野小町的女子，长得非常非常美丽。因此，人们就把这种优美漂亮的计算，叫作小町算。

小町算有许多种类型，请看：

(1) 123—45—67＋89=？

(2) 123＋4—5＋67—89=？

(3) 12＋3—4＋5＋67＋8＋9=？

(4) $91+\dfrac{5742}{638}=$ ？

(5) $94+\dfrac{1578}{263}=$ ？

(6) $3+\dfrac{69258}{714}=$ ？

(7) $81+\dfrac{5643}{297}=$ ？

(1)～(3)题是用从 1 至 9 的数字，按顺序做的题，它的结果是多少？

(4)～(7)题是把从 1 至 9 的排列顺序给打乱了，但仍然是每个数字仅使用一回，而且全部都用上，它们的答案是多少呢？

我们算算看，到底结果是多少？

$$\begin{array}{rr} & 123 \\ - & 45 \\ \hline & 78 \\ - & 67 \\ \hline & 11 \\ + & 89 \\ \hline & 100 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 123 \\ + & 4 \\ \hline & 127 \\ & 5 \\ \hline & 122 \\ + & 67 \\ \hline & 189 \\ - & 89 \\ \hline & 100 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 12 \\ + & 3 \\ \hline & 15 \\ - & 4 \\ \hline & 11 \\ & 5 \\ & 67 \\ & 8 \\ + & 9 \\ \hline & 100 \end{array}$$

(4) $91+\dfrac{5742}{638}$
$=91+9$
$=100$

(5) $94+\dfrac{1578}{263}$
$=94+6$
$=100$

(6) $3+\dfrac{69258}{714}$
$=3+97$
$=100$

(7) $81+\dfrac{5643}{297}$
$=81+19$
$=100$

从结果看，不仅是(1)～(3)题，连(4)～(7)题的答案都是 100。

亲爱的读者朋友，像第一种类型的小町算，你不想自己做一个看看吗？

这是一种很有乐趣的数字运算，否则，怎会在日本的宫廷里盛行不衰呢？

小町算除有上述排列顺序外，还有按照 9、8、7、6、……1 的数字顺序排列的方法。如：

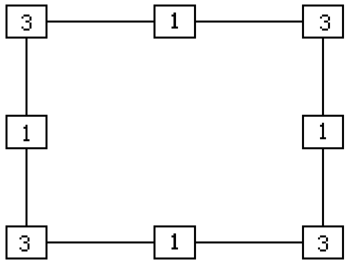
98-76+54+3+21=100

9-8＋76-5＋4＋3+21=100。

二、藏盗法

日本江户时代末期，有一个人叫柳亭仲彦，他写了一本名叫《柳亭记》的书。在书里有这样一段记载：

中国和日本之间有海峡相隔，在日本沿海设有检查出入船只的关卡，这个关卡的四周各有 7 个哨兵把守（如图）



有一天，忽然有 8 个海盗惊慌失措地来到关卡，说是他们在海上和另一伙海盗发生火拼，因为对方人数众多，英勇善战，把他们杀得惨败。最后，只有他们 8 个人死里逃生。眼下那伙海盗正四处追击他们。所以，这 8 个海盗苦苦哀求把他们隐藏一下，以躲过这场灭顶的灾难。哨所的人有心搭救他们。然而，关卡上没有能藏人的地方。只要四面的人数一增加，很快就会被发现。关卡的人很是为难。这时，一个聪明的海盗说：“我有办法使关卡四面增加我们 8 个人以后，每一面看上去还是 7 个人”。这个海盗用的是什么办法呢？读者仔细研究一下就会明白了。原来，关卡的四周，各角是 3 个人，关卡四边的中间是 1 个人。这样，从一面看，每一面都是 7 人。海盗加进来后，关卡的各个角是 1 个人，关卡四边的中间是 5 个人。这样，从四个方面来看，每一面的人数仍然是 7 人。聪明的海盗救了他们自己的性命。后来，这种方法，就叫做“藏盗法”。

三、龟鹤算

“有一群鹤和乌龟都圈在一个笼子里。从上边数脑袋是三十五个，从下边数脚是九十四只。问乌龟和鹤各是多少只？”

这就是距今一百五十多年前的《算法点窜指南录》的日本算术书中指出的有名的“龟鹤算”。

知道了这个问题的由来，那么，就把这个问题解一下看吧！

假如，笼子里圈的都是龟，那么三十五只龟就应该有 140 只脚。可是实际上却是 94 只脚。140 和 94 的差是 46，这是把鹤也当成龟了，结果多出来的数。少算一只鹤就多出 2 只脚。所以，把 46 用龟和鹤脚数的差去除，即除以 2，得 23，这就是鹤的数。由此知道龟是 12 只。

可能有的读者会说：这类问题过于简单容易，没啥意思。那就出一道稍

稍难一点的题。

下边的问题是日本江户时代出版的《算法童子问》书中记载的。

“院子里的鸡和狗。厨房的菜墩上还有章鱼。鸡、狗、鱼合在一起是 24 个，一共有 102 只脚。问鸡、狗和章鱼各是多少？”

鸡有两只脚，狗是四只脚，章鱼有八只脚，这个问题应该怎么解决呢？若还是用上述那种简单的算法，显然是很困难，并且很麻烦的。若做成联立三元方程式就容易解决了。解答本题的方法有好几种。

设鸡、狗、章鱼的数各为 x、y 和 z

则$\begin{cases} x + y + z = 24 \\ 2x + 4y + 8z = 102 \end{cases}$

由此得出：

$\begin{cases} x = 13 \\ y = 3 \\ z = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 7 \\ y = 12 \\ z = 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5 \\ y = 15 \\ z = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = 18 \\ z = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 21 \\ z = 2 \end{cases}$

当然，解这个问题可以用其它方法，亲爱的读者朋友，你解解看。

四、虫食算

很久以前，日本京都有个商人叫松本太郎。一次，他突然发现，他的帐本被虫子蛀了，帐本里很多数字被虫子蛀得破碎残缺不全。为此，他冥思苦想，最后终于把被虫子蛀的数字又填上了。这就是所谓的“虫食算”，也就是还原算法。当时帐本上的算式是什么样的？我们已无法查证。但是，我们可以举个类似的算式。

$$\begin{array}{r@{}r} & \square 3 \\ \cline{2-2} 3\square \big) & \square\square\square 1 \\ & \square\square 5 \\ \cline{2-2} & \square\square 1 \\ & \square\square 1 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

这道算式中，“□”表示被虫蛀的数字。那么，应如何推算呢？认真分析一下这个题。我们知道，在 3 的倍数里，要找个位数是 1 的数，只有 7 倍。所以除数的个位数是 7，这个除数就是 37。在 37 的倍数里，个位数是 5 的数只有 5 倍。所以，商的十位数是 5，商就是 53。商和除数都知道了，以下就可以用计算求出。它的答案是：

$$\begin{array}{r@{}r} & 53 \\ \cline{2-2} 37 \big) & 1961 \\ & 185 \\ \cline{2-2} & 111 \\ & 111 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

请看这个算式。

```
          □□□□□□□□□
□□□ ) □□□□□□□
      □□□
      ─────────
         □□□
         □□□
         ─────────
          □□□
          □□□
          ─────────
           □□□
           □□□
           ─────────
              □□□□
              □□□□
              ────────
                  0
```

这是一个典型的“还原算法”。算式中所有的数字：除了最下面的一个 0 以外，其它全被虫子咬掉了。现在的要求，就是经过合理的推算、计算，把原来的算式给恢复起来。

看了这样的算式，也许有人会想：随便填进一些数字不行吗？我们说，这种想法可不行。

如果不是一步一步地沿着合理的方法、顺序思考，是无论如何也算不出来的。

```
         1.
234 ) 246
      234
      ─────
       12□□
```

另外，也不要稍加思考就说：“太困难了”而不去解答。看看右面的提示，在弄明白的□里，就可以把数字很容易就填写进去了。

右面提示的□里应当填的都是 0，可能你已经注意到了。这样，在本问题里有 10 处的□里可以填上 0。那么，把 0 写进去看看吧。

这样一填，怎么样？最后的数一定是“几千”个的整数。把 P 和 Q 乘起来，如果正好是“几千”的话，那就只有 500×2，250×4……875×8 等一共是十六组数字。但是由于除数 P 都是以 0 或 5 作个位的数，所以和它相乘的 Q 不论是个什么数，下面的 B 不是 0 就是 5。可是从算式上看 B 不是 0，那么肯定就是 5。于是，A 和 C 也都是 5。

总之，P×Q=5000，再求出 P 和 Q 的数值就行了，符合这个条件的只有一种数，P=625，Q=8。

除数确定以后，其余的就简单了，只要从下面往里填就行。

```
      1011.1008
625 ) 631938
```

（谭英　许静波　高星寒）

惊人的老鼠繁殖

一对老鼠原也没什么稀奇，但谈到它们的繁殖能力，却着实叫人大吃一惊。也许有的读者会问，一对老鼠即使有再强的生殖能力，并接二连三地繁殖下去，一年最多也就只能繁殖出千儿八百的小老鼠。其实不然。下面我们就讲一个“ 老鼠算题 ”。听完这个故事，你就会对老鼠那惊人的繁殖能力有了重新的认识。

这是日本古代一本有名的算术书《尘劫记》里的题目，把原文改写通俗的故事，就是这样的。

“ 正月里，有 2 只大老鼠生了 12 只小老鼠，这两代共计是 14 只。

这些长大了的老鼠在二月里互相成亲，每对（2 只）都生了 12 只小老鼠，连大带小共计是 98 只。

三月里又有 49 对老鼠各生下 12 只小老鼠。这四代共计是 686 只。

这样，每月一回，父母、儿女、孙子、曾孙子、子子孙孙，总是每对生 12 只，那么十二个月里将变成多少只呢？ ”

我们列出算式，即：

$2\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7\times7$

$=27682574402$。

究竟变成了多少只呢？你能准确地读出来吗？是二百七十六亿八千二百五十七万四千四百零二只。这是多么大的数字，又是多么惊人的繁殖能力呀！

（王晓秋）

智赚鲁智深

话说北宋时候，一天中午，开封府大相国寺的和尚们正围在一起准备吃饭时，鲁智深突然从寺门外闯了进来，他拿起桌上的馒头就要吃。可是，寺里的馒头是按照人数做的，99 个馒头 99 个僧，一个不多，一个也不少。智清长者见此状后，灵机一动，计上心来，他对鲁智深说："智深，把馒头先放下！今天的馒头是按寺里的人数做的，没有多余。你吃了，别人就得饿着。这样吧，你和我们大伙围成一个大圈，从我所在位置开始报数，报 5 者就给他一个馒头，让他退出。然后再接着从 1 开始报数，……。整个的报数过程都顺着圆圈循环进行。经过轮番报数后，谁的运气不好，留在最后，谁就不吃馒头，自想它法。这个办法，你意下如何？"智深暗自思忖：一百个人就差一个馒头！我运气再不好，也不会落到我头上。想到此，他爽快地答道："好吧！就这么办！洒家要是运气不好，今天就不在这里吃了！"

一百个和尚围成了一个大圆圈。智清长老在某一位置上开始报数，报数者逢五退列，拿走一个馒头。看到一个又一个的大馒头都被寺里的和尚拿走了，鲁智深真着急。尽管他横眉瞪眼，他还是被留在最后，没有分到馒头。鲁智深叹了一口气道："洒家运气不好，不在这里吃了！"说完后提起禅杖，大踏步地走出去了。

人们不禁要问：智清长老把鲁智深安排在哪个位置上？也就是说，鲁智深所在的那一个倒霉位置的序号[①]是多少？为了解答这个问题,我们先做一个简单的扑克牌游戏。

有九张牌叠在一起，从上向下一张一张地数，每数到第五张时抽出来放在桌上。经过若干轮后，我们在桌上相继得到由小到大、从 1 到 9 的所有的牌。读者可能会问，在开始时，怎样排列这九张牌呢？说起来也非常简单：可先将九张牌从上向下按由小到大的顺序排好，再按照上面的规定，当数到第五张牌时把它抽出来放在桌上。这样，放在桌上的这九张牌的顺序即成为 5、1、7、4、3、6、9、2、8。这一过程可用以下图式表示：

排列序号 1、2、3、4、5、6、7、8、9。

原牌（手中）1、2、3、4、5、6、7、8、9。

新牌（桌上）5、1、7、4、3、6、9、2、8。

通过以上分析，可确定第一张牌放 2，第二张牌放 8，……即

排列序号 1、2、3、4、5、6、7、8、9。

应放牌 2、8、5、4、1、6、3、9、7。

通过扑克牌游戏，我们知道了按顺序排列的第 8 张牌乃是按照游戏方法留在最后的一张牌。因此，如用上述方法将牌数增加到 100，我们就能够得到留在最后的一张牌的序号应为 16，也就是在前面智清长老给鲁智深安排的那一个倒霉位置的序号。

（赵为禾）

[①] 智清长老所在位置的序号为 1。

收成与岁数

很早以前，有一年，先是天气大旱，后来又连下暴雨，沟满壕平，庄稼被糟蹋了一大半。可是官府里要的苛捐杂税不但没减少，反而比上一年增加了。眼看着要缺粮断顿，逃荒要饭，老百姓怨声载道，狠狠咒骂那些不顾老百姓死活的混官、赃官。

有一个老农，实在憋不住这一肚子气，闯进县衙门，报告今年的荒情，要县太爷少给老百姓要捐要税。

县太爷听了老农说的年景后，问：“今年麦子收成多少？”

老农答：“三成。”

县太爷又问：“棉花收成几成？”

老农答：“二成。”

县太爷又问：“谷子收成几成？”

老农答：“二成。”

县太爷听到这里，火就上来了，呵斥道：“三成、二成、二成，这不就有了七成收成了吗！比去年还多一成，是个好年景，你还找上衙门来告荒，想不纳粮交税！你这个刁民，是想找打！”

挨了一顿臭骂，老农不仅没生气，倒呵呵地冷笑起来，说：“我老汉活了一百七十多岁，没见过这样的荒年，也没见过像你这样的县太爷。”

县太爷一听，更加恼火了，把惊堂木“啪”地一拍，骂道：“你这个贱民！刚才谎报年景，是为了不想纳税交租，现在，你为什么又虚报自己的岁数？”

老农冷笑着说：“小民现在实报，按照老爷的算法，小民今年七十岁，大儿子今年四十二岁，小儿子今年三十八岁，孙子今年二十岁，加起来不就是一百七十岁了吗？”

县太爷一听，像猴吃芥茉——干瞪眼。

（李炳然）

陈景润的故事

今天我们来讲一讲陈景润叔叔的故事。我国著名的数学家陈景润叔叔在攻克数学难题——“ 哥德巴赫猜想 ” 中取得了世界领先的成绩。因此，他的名字就和 “ 哥德巴赫猜想 ” 紧紧地联系在一起了。什么叫 “ 哥德巴赫猜想 ” 呢？1732 年德国的数学家哥德巴赫发现的一个规律：凡是大于 2 的偶数，都可以表示为两个素数（质数）的和，即“ 1+1 问题 ”。例如，12=7＋5，28=11+17，等等。哥德巴赫对许多偶数进行的检验都说明这个猜想是正确的。后来有人验算到三亿三千万这样大的偶数都说明是正确的。但是对更大更大的偶数呢？哥德巴赫猜想也是正确的。不过猜想应该证明。但是要证明这个猜想却很难。哥德巴赫把这个猜想告诉了大数学家欧拉，请他来帮忙，但是欧拉一直到死都没有证明出来。这个难题传遍了世界，吸引了成千上万的数学家。两百多年过去了，“ 哥德巴赫猜想 ” 仍没有被证明。

解放前陈景润叔叔还在中学读书的时候，就听到了曾经在清华大学教过书的沈先生说：“ 自然科学的皇后是数学，数学皇冠是数论，哥德巴赫猜想是皇冠上的明珠。 ” 沈先生讲了以后，有的同学喊喊喳喳地讨论。陈景润叔叔呢？他没有笑也没有说，却把摘下皇冠上的明珠的美好愿望埋在心窝里了。从此，他学习更加勤奋，1953 年陈景润叔叔以优异的成绩在厦门大学毕业了。他先在北京当中学教师，后来又调到厦门

大学研究著名数学家华罗庚的的数学名著，写出了质量很高的数学论文。他的论文得到了许多老前辈数学家的称赞。特别是华罗庚教授对他的研究成果更为赞赏，鼓励他继续前进。在华罗庚教授的建议下，陈景润叔叔调到了中国科学院搞研究工作。他在精通英语、俄语的基础上，又自学了法语、德语。他在打好了扎实的基础后，开始向 “ 哥德巴赫猜想 ” 的高峰进军了。就在这时候陈景润叔叔忽然病倒了，医生给他开了一张又一张的病假条要他休息。可是他不肯休息，仍然在埋头钻研。每天从早到晚，甚至连节日、假日也不停地工作。他的手总是握着笔在一页又一页的草稿纸上计算。

“ 文化大革命 ” 中，他被指责为走白专道路的人，不准他进办公室，他只得躲在只有六平方米的自己的宿舍里工作。有人连电灯都不给他，他就点上煤油灯在床板上演算。到 1972 年陈景润叔叔终于在研究 “ 哥德巴赫猜想 ” 方面攻破了 “ 1+2 问题 ” 的难关，并发表了重要论文《大偶数表为

一个质数及不超过两个质数乘积之和》。例如：$124 < \overset{3}{121} = 11 \times 11$。这篇

论文很快传到了国外，被国外数学家称为陈氏定理。陈景润叔叔在 “ 哥德巴赫猜想 ” 的研究方面攀上了前人没攀上的高峰，取得了世界领先的地位，为国争了光。现在离 “ 哥德巴赫猜想 1＋1 问题 ” 的证明只有一步之远了。我们要像陈景润叔叔那样从小认真学习数学，打好扎实基础，长大了当个数学家。争取登上 “ 哥德巴赫猜想 ” 的顶峰，摘下这颗明珠。

（刘　平）

分　马

相传在很久很久以前，有一个善良的阿拉伯老人，他有三个儿子。一天，他生了病，感到自己不行了，就把三个儿子叫到身边，对他们说：“我就要离开人世了，我一生清白，现在心里很安宁。我死了以后，你们兄弟三人要和睦相处，要用自己的双手，靠劳动去取得幸福。我留下的十九匹马是一生辛劳的积累，不要卖掉，更不能杀了。你们三人这样分：老大分总数的一半，老二分总数的四分之一，老三分总数的五分之一，一定要照这样分……”三兄弟一想，19 不能被 2 整除，也不能被 4 或 5 整除，这可怎么分呢？刚想问老人，老人已经咽气了。

兄弟三人把老人安葬好，开始分财产了。但是他们绞尽脑汁也没办法遵照老人的临终嘱咐来分这十九匹马。周围邻居们也没有办法。为此三兄弟非常忧愁。

一天，一位学者骑马经过三兄弟家门前，向三兄弟要水喝。他发现三兄弟满面愁容，就问他们有什么心事。老大把情况讲了讲，老二摇着头，老三唉声叹气。学者想了想说：“我来帮你们解决吧。”说着就走过去把自己的马牵过来说：“这匹马我送给你们。”老大急忙说：“那不行，那不行。”“别忙，”学者微笑着说。然后问兄弟三人，“这样，你们的马一共几匹了？”三兄弟连忙答：“共二十匹。”学者接着问：“老大分总数的一半，几匹？”老大笑着说：“十匹。”“好，”学者又问：“老二分总数的四分之一，几匹？”老二说：“五匹”，学者又说：“好，现在老三分总数的五分之一，是几匹？”老三说：“是四匹。”学者微笑着说：“好了，现在老大分得十匹马，老二分得五匹，老三得四匹，这都是依你们父亲的嘱咐分的。”三兄弟都点了点头。“但是现在你们马的总数是二十匹，分掉了十九匹，还剩余一匹。”学者一边说一边指了指那匹他自己的马说：“这匹马就给我，作为我给你们分了马，解决了这一难题的报酬，好吗？”三兄弟一听，高兴得相互拥抱。学者微笑着上了马，在三兄弟的欢笑声中向远方走去。

同学们，你们一定为学者巧妙的分法而惊叹，然而趣味还不止于此！让我们继续考究 20、10、5、4 这四个数，发现其中 10、5 和 4 都能整除 20，它们的和 10＋5＋4=19，比 20 少 1。具有这样性质的一组自然数（ｂ、ｃ、ｄ都能整除ａ，而它们的和ｂ＋ ｃ ＋ ｄ比ａ少 1）还有吗？我们的回答是：还有！例如：18、9、6、2。18÷9=2，18÷6=3，18÷2=9，9＋6＋2=17，18—17=1。这样，我们可以把这篇古老的算术故事改为：有十七匹马分给三个兄弟，老大分总数的一半，老二分总数的三分之一，老三分总数的九分之一。这是多么有趣的呀！

问题还没有结束，我们还要问，这样的四个自然数共有几组呢？我们给出答案，共有十二组，它们是：

a=4，b=1，c=1，d=1；
a=6，b=2，c=2，d=1
a=6，b=3，c=1，d=1；
a=8，b=4，c=2，d=1；
a=10，b=5，c=2，d=2；
a=12，b=6，c=3，d=2；
a=12，b=6，c=4，d=1；

a=12，b=4，c=4，d=3；
a=18，b=9，c=6，d=2；
a=20，b=10，c=5，d=4；
a=24，b=12，c=8，d=3；
a=42，b=21，c=14，d=6。

如果要问这十二组数是如何求得的？如何知道只有十二组？这要用到数论中不定方程的知识，我国著名的数学家陈景润研究的哥德巴赫猜想就是数论中的一道世界难题，数论中至今还有许多难题在等待你们去攻关呢！

（陈正康　张中行　凌围伟）