学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

学生成长百卷读本一

(22)点石成金

BOOK

内部资料 非卖品

学习新方法

第一章　让数学思维腾飞

一、如何提高运算能力

具备准确、迅速、合理、灵巧的运算能力，是数学能力的基础。为了最大幅度地开发运算技能，在平时学习中需不断强化缜密、逆向、发散、整体、构造、直觉等思维训练，以确保运算的准确、合理、高效、创新，确保思维质量不断升级。

1.训练镇密思维，保证准确度。

例1 判断f（x）＝lg（$\sqrt{X^2+1}+x$）＋lg（$\sqrt{x^{+}1}=-x$） 的奇偶性；

此题粗看很熟，很多同学信手解得：

$$\because f(-x)=\lg[\sqrt{(-x)^2+1}+(-x)]+\lg[\sqrt{(-X^2)+1}-(-x)]=\lg(\sqrt{X^2+1}-X)$$

$+\lg(\sqrt{X^2+1}+X)=f(x)$，$\therefore f(x)$是偶函数。

上述解法的错误原因是：其一，没从本质上理解奇偶函数的定义，认识不全面、不深刻；其二，忽视了题设中的隐含条件。正确解法为：

易得 f（x）的定义域为 R，故当 X∈R 时有-X∈R，又

$$f(x)=\lg[(\sqrt{X^2+1}+x)(\sqrt{X^2+2}-X)]=\lg(X^2+1-X^2)=$$

0，∵f(x)=0=f(x)且 f(-x)=0=-f(x)，∴f(x)既是奇函数，又是偶函数。

例 2　已知点 P（x。，y。）是圆 $x^2+y^2=R^2$ 内的一点，则直线 X、X＋Y、Y＝R^2 与圆的交点的个数是（　　）。

很多学生一瞧“X、X＋Y、Y＝R^2”这种直线方程的形式就误认为直线与圆相切；有的学生由 P（X。，　Y。）是圆内一点，错断直线与圆相交。

然而，真正决定直线与圆位置关系的是圆心到直线的距离d，d＝$R^2/\sqrt{X_0{}^2+Y_0{}^2}$，由点P在圆内知$\sqrt{R_0{}^2+Y_0{}^2}$＜R，所以 d＞R，即直线与圆相离，交点个数应是0。

小结　无论题目难易，仔细认真审题是关键，应真正弄清题意，将隐含条件挖掘出来，并随时校对，最后查核。要克服主观性太强的懒惰作风，确保运算的准确性。

2.训练逆向思维，保证简洁利落。

例 3　若下列三个方程中，至少有一个方程有实根，求出实数 a 的取值范围。

（1）$X^2+4ax+(3-4a)=0$，

（2）$X^2-(a-1)X+a=0$，

（3）$X^2+2ax-2a=0$。

若依习惯解之，用判别式分类讨论，繁杂！细一打量“三个方程中至少有一个方程有实根”的否定形式是“三方程皆无实根”。故易得：

$$\begin{cases}\triangle_1=(4a)^2-4(3-4a)<0\\ \triangle_2=(a-1)^2-4a^2<0\\ \triangle_3=(2a)^2-4(-2a)<0\end{cases}\qquad\Leftrightarrow$$

$-\frac{3}{2}<\alpha<1$故所求应为其解集的补集$\{a \mid a\leq-\frac{3}{2}$或$a>，-1\}$。

小结 逆向思维主要用于否定多数型试题，进行正向思维与逆向思维的转换，可培养思维的深刻性、敏捷性、灵活性，更全面地理解题意。

3.训练发散思维，保证合理。

例 4 知 a、b∈R，

$$A=\left\{(x，y)\begin{cases}X=1+a\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases} a\neq0、\theta\in R\right\}，$$

$$B=\left\{(x，y)\left|\begin{cases}X=t\\ y=mt+b\end{cases}\right. m，t\in\right\}$$问是否存在实数a、b使$A\cap B$ $\neq0$恒成立？

若将椭圆方程与直线方程联立的方程组恒有实数解来使 A∩ B≠0，运算量太大。此时由题设中的条件可看出几何图形来，利用数形结合，自可得到简捷的方法：

解 欲使 A ∩ B≠0 恒成立，由题设知只须点（o，b）落在椭圆$\frac{(X^2-1)^2}{a^2}+y^2=1$内或椭圆上。故$\frac{(o-1)^2}{a^2}+b^2\leq1$，即当$-\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leq b$ $\leq\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}(|a|\geq1)$时，总有$A\cap B\neq\phi$。

小结 善于利用解题信息，多向联想，恰当调整，可简化过程，提高速度和准确率，其中最关键的是把握数学语言间的联系与区别。

4.训练整体思维、高效构造思维，开运算新途径。

例5 解不等式$\lg(x-\frac{1}{X})<0$

解 原不等式等价于

$$0<x-\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow\frac{1}{X-\frac{1}{X}}>0\Leftrightarrow\frac{X}{X^2-1}>\Leftrightarrow$$

$$\frac{\left[X-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\left[X-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]}{(X-1)(X+1)}<0，$$

由区间隔离法可得所求：$\left[-1，\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[1，\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$。

例 6 已知 a.b 满足 $a^2=7-3a$，$b^2=7-3b$ 且 a≠b，求$\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}$的值。

解 ∵a≠b，由题设 a，b 是方程 $X^2+3X-7=0$ 的两根，故有 a＋b＝-3，ab ＝ -7，∴$\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}=\frac{a^3+b^3}{a^2b^2}=\frac{(a+b)[(a+b)^2-3ab]}{a^2b^2}=-\frac{90}{49}$。

5.训练直觉思维，追求简洁。

例7 解不等式$\left|X^2-\sqrt{X-3}\right|<\left|2-\sqrt{X-3}\right|+\left|X^2-2\right|$。

此题中既含绝对值，又含无理式，较复杂。但若能退一步从外形上展开联想，就会发现它与公式$|a+b|\leq|a|$
$+|b|$**形式类似，若将原式变形为：**$\left|(2-\sqrt{X-3})+(X^2-2)\right|<\left|2-\sqrt{X-3}\right|+$
$\left|X^2-2\right|$**，则得原不等的同解不等式**$(2-\sqrt{X^2+3})(X^2-2)<0$**，易得：**
$X>7$。

总之，要提高运算技巧，不可片面地强调纯粹运算训练的作用，也不可一味追求技巧。应与思维训练结合，在思维中才能真正提高能力。

二、教学中的联想思维

通过不同形式的联想，探求多种途径的解法，多方位、多层次地发散思维，是学习数学的重要方向和目标。

1·纵向联想。

在学完每一章节后，通过一定量的习题使思维在此章知识网络中充分发散开来，不同的解法涉及到不同的知识点，这样有助于全面复习，巩固加强已学的知识。此过程中如能注意逆向思维的训练，效果尤佳。

例 求证：$\sec a-\mathrm{tg}a=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})$

证法 1：$\sec a-\mathrm{tg}a=\frac{1}{\cos a}-\mathrm{tg}a=\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}-\frac{2\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}$

$=\frac{1-\mathrm{tg}\frac{a}{2}^{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{a}{2}}=\frac{1-\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{a}{2}}=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})$

证法2：$\sec a-\mathrm{tg}a=\frac{1-\mathrm{Sin}a}{\cos a}=\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}-a)}{\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}-a)}=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})$

证法3：$\sec a-\mathrm{tg}a=\frac{1-\sin a}{\cos a}=\frac{(\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2})^2}{\cos^2\frac{a}{2}-\mathrm{Sin}^2\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{a}{2}-\mathrm{Sin}\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}}$

$=\frac{1-\mathrm{tg}\frac{a}{2}}{1+\mathrm{tg}\frac{a}{2}}=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})$

证法4：∵ $\sec^2 a-\mathrm{tg}^2 a=1$，∴ $(\sec a-\mathrm{tg}a)(\sec a+\mathrm{tg}a)=1$，$\sec a-\mathrm{tg}a=$

$\frac{1}{\sec a+\mathrm{tg}a}=\frac{\cos a}{1+\sin a}=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-a)}{1+\cos(\frac{\pi}{2}-a)}=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})$

证法5：$\mathrm{Sec}a-\mathrm{tg}a=\frac{1-\mathrm{Sin}a}{\cos a}=\frac{\cos\frac{a}{2}-\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}+\sin\frac{a}{2}}=\frac{\sqrt{2}\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})}{\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})}$

$=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2})$。

以上五种证法，运用了同角三有函数关系、互余公式、和、差、倍、半角的三角函数公式。

2.横向联系的把握。

突破习题所在原章节的知识范围与应用范围，用其它章节的知识来思考，或用代数知识解几何，或用三角知识解代数，培养串通和融化知识的能力。

例　已知 x＋y＝1，求 x^2+y^2 最小值。

解法　1：(利用判别式法)设 $m=x^2+y^2$，则 $m=x^2+(1-x)^2$，即 $2x^2-2x+1-m=0$. ∵X ∈ R，∴判别式Δ≥0，Δ=(-2)-4×2×2(1-m) ≥0，得 m≥ $\frac{1}{2}$，∵x^2+y^2的最小值为$\frac{1}{2}$。

解法 2：（利用点到直线的距离公式）把 x＋y＝1 看作一直线方程，把所求转化为在此直线上找一点，使其到原点距离$\sqrt{x^2+y^2}$为最小，

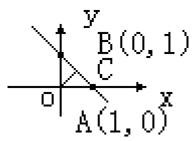

图1-1

如图1—1，∵$|oc|=\frac{|0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴$|oc|^2=\frac{1}{2}$，∴x^2+y^2最小值为$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2=\frac{1}{2}$

解法 3：（利用三角函数性质）

设 $x^2+y^2=n(n\geq 0)$，令 x=ncosθ，y=nsinθ，代入 x+y=1 中，ncosθ+nsinθ=。

$n=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{Sin}(\theta+\frac{\pi}{4})}$，$n^2=\frac{1}{2\mathrm{Sin}^2(\theta+\frac{\pi}{4})}\geq\frac{1}{2}$，

∴x^2+y^2最小值为$\frac{1}{2}$。

此处还可用配方法以及基本不等式性质来解。

3.受控联想。

增减或变换习题条件，调整思路，产生联想，寻求新的解题方法。

例：九张卡片分别写着 0、1、2、……8 九个数字，从中任取三张排成一行组成三位数，问共可组成多少个不同的三位数。

开始可设想取三张卡片排一行，若首位数字为 0，则不成三位九，故有$P_9^3-P_8^2$个不同的三位数。接着加一条件，将原题改为九张卡片分别写有0、1、……8 九个数字，从中任取三张排一行组成三位数，如果写着 6 的卡片又可当 9 用，问共可组成多少个不同的三位数。此时可得：$P_7^1\cdot P_7^2+2(C_8^2P_3^3-C_7^1P_2^2)$（个）。

4.旧中求新联想。

将新做的习题与做过的分析对比，觅其内在联系，用解旧题的方法去解决新问题。如此则新旧知识融洽相处，线索分明，牢固可靠。

例　（1）求半径为 R 的圆中的内接矩形面积的最大值。

（2）求半径为 R 的球的内接圆柱的侧面积的最大值。

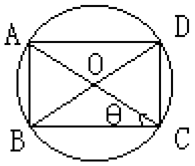

图1-2

（1）解　如图 1—2，矩形对角线 AC 显然是⊙O 的直径。设 AC 与矩形一边 BC 的成角为θ，则 AB＝2RSinθ，BC=2Rcosθ，矩形 ABCD 面积 S=AB，BC=2Rsinθ，2R=cosθ=2R，Sin2θ≤$2R^2$，

∴当θ $=\frac{\pi}{4}$**，**AB**＝**BC**＝**$\sqrt{2}R$**，矩形** ABCD**面积最大值**$2R^2$**。**

（2）如图，本题属立体几何范围，但仍可类似地将球半径 AC 与圆柱底面所成角∠ACB 为θ，圆柱母线为　h，则有 h=AB=2R.Sinθ。圆柱底面的直径 B2=2r=A2.cosθ=2Rlosθ，∴圆柱侧面积 S=2πrh=π.2Rsosθ.2Rsin

θ $=27.\mathrm{RSin}$**θ≤2π**R^2**，∴当且公当**$\theta=\frac{\bar{\pi}}{4}$**，**$24=h=\sqrt{2}R$**时，圆柱侧面积的最大值为**$2\pi R^2$**。**

三、如何完成转化过程

转化问题的过程即是分析问题、解决问题的过程，是化繁为简、化难为易、化未知为有知的过程。

1.等价原则。

产生等价问题的途径有更换等价的条件和结论；通过适当的代换；利用原命题与逆否命题的等价关系等。

例 1 在πΔABC中，已知 $\mathrm{Sin\ \ Acos^2}\dfrac{C}{2}+\mathrm{Sinc.\ cos^2}\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{2}\mathrm{SinB}$，且最大角与最小角之差为90°，求证，它的三边之比为$(\sqrt{7}+1)$：$\sqrt{7}$：$(\sqrt{7}-1)$。

分析：因 $\mathrm{SinA.cos^2}\dfrac{C}{2}$・$\mathrm{cso^c}\dfrac{A}{2}=\dfrac{3}{2}\mathrm{Sin\ B}\Leftrightarrow\mathrm{SinA}$・$\dfrac{1+\mathrm{los}^2}{2}+\mathrm{Sinc.}$ $\dfrac{1+\mathrm{losA}}{2}=\dfrac{3}{2}\mathrm{SinB}\Leftrightarrow\mathrm{SinA}+\mathrm{SinC}=2\mathrm{SinB}\Leftrightarrow\mathrm{a}+\mathrm{c}=2\mathrm{b}.$最大角与最小角之差为90° $\Leftrightarrow$ 三个角由小到大依次为a，90°－2a，90°＋a $\Leftrightarrow$ 0°＜a＜30°又因为正弦定理得三边长之比为：Sina：cos2a：cosa（0°＜a＜30°），至此，原命题可转化为：“已知0°＜a＜ 30°，且满足2cos2a＝sin2+cos2，求证：sin2：cos22：$\mathrm{los2}-(\sqrt{7}-1)$：$\sqrt{7}$：（$\sqrt{7}+1$）”显然，这是易于证明的。

证：$\because 2\cos 2a=\mathrm{Sina}\cos a\therefore \cos a-\sin a=\dfrac{1}{2}$，设 Sina＝X，则 $\sqrt{1-X^2}-x=\dfrac{1}{2}$，$(0<X<\dfrac{1}{2}$解得，$\sin a=\dfrac{1}{4}(\sqrt{7}-11)$，$\cos 2a=\dfrac{1}{4}\sqrt{7}$，$\cos a=\dfrac{1}{4}(\sqrt{7}+1)\therefore\mathrm{Sina}$：$\cos 2a$：$\cos a=(\sqrt{7}-1)$：$(\sqrt{7}+1)$，

故原命题成立。

例 2　设二次方程 $ax^2+26x+1=0$，$cx^2+2bx+1=0$ 已知系数组成的 a、bd、C 三数构成等差数列，求证：上述两个方程中至少有一个方程有实根。

分析：原问题用数学符号简化为：设 $ax^2+2bx+1=0$，$cx^2+2bx+1=0$，(a≠0)，已知 a+c=2bd，求证 $b^2-a<0$ 与 $b^2-C<0$ 是不能同时成立。它的逆否命题为：“设 $ax^2+2bx+1=0$，$cx^2+2bx+10$(a≠0，C≠0)已知 $b^2<a$，$d^2<c$，求证：a＋c ≠2bd。”

证明：∵$b^2<a$，$d^2<c$，即 a＋c≠2bd，故原命题成立。

2．映射原则。

如问题在原集合中直接解决有较大难度，可运用某法则“移”之于另一集合内，得到一对应问题。然后在其中讨论并解决，再把结果这映射回原集。

例1 已知复数$Z_1+Z_2+Z_3$满足条件Z、$\overline{Z}_1=Z_2\overline{Z}_2=Z_3\overline{Z}_3=1$，且$Z_1+A_2+Z_3=0$，求证：$Z_1$、$Z_2$、$Z_3$对应的点恰是复平面上一个正三角形的顶点。

分析：因复数集与向量集、实数对集均可建一一映射，故其可转化为三角形式、代数形式、向量形式，其等价三角式及证明如下：

已知

$$\begin{cases}\cos a+\cos\beta+\cos v=0, \\ \text{Sina}+\text{Sin}\beta+\text{Siny}=0,\end{cases}$$

求证：β-α=±120°，Y-α=±120°（α，β，Y 为三复数的辐角）。

证明：∵-cosY=cosα+cosβ①

-siny=sinα+sinβ②

①^2、②^{2}得：$\text{Cos}^2Y=\text{Cos}^2\alpha+\text{Cos}^2\beta+2\cos\cdot\cos\beta$③

$\sin^2Y=\text{Sin}^2a+\text{Sin}^2\beta+2\text{Sina}.\text{Sin}\beta$，④

③十④，得$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$，得$-2=\pm120°$，不难求出$Y-2=\mu120°$，

∴原命题成立。

例2，求证 $\max\sqrt{1+X}-\sqrt{X})=1$

分析：因$X\geq0$，设代换$X=\text{ctg}^2t\begin{bmatrix}0< \\ t\leq\frac{1}{2}\pi\end{bmatrix}$即将集合$A=\{X|X>0\}$与

集合$B\{t|0<t\leq\frac{1}{2}\pi\}$建立一一对应。因 $y=\sqrt{1+X}-\sqrt{X}=\sqrt{1+\text{ctg}^2}-$

$\sqrt{\text{ctg}^2t}=\csc t-\text{ctg}t=\frac{1-\cos t}{\sin t}=\text{tg}\frac{t}{2}$，$(0<\frac{1}{2}t\leq\frac{\pi}{4})$。

故原命题可转化为；“求证$\max(\text{tg}\frac{t}{2})=1$，$(o<t\leq\frac{\pi}{2})$。

证：∵$\text{tg}\frac{t}{2}$在$(0$，$\frac{\pi}{2})$上单调递增函数，∴max（$\text{tg}\frac{t}{2}$），故原题成立。

3.构造原则。

设想一个与原问题有关的新问题，通过对新问题的研究达到解决原问题的目的，其表现在构造方程、构造函数以及构造图形上。

例 1　设 a.b ∈ R，满足 2a+b+2≤0，试证：方程 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 至少有一个正实数解。

证：$x=0$不是方程的解，故令$u=x+\frac{1}{x}$则有$u^2+au+b-2=0$……①

此时，如原方程有解$x_0>0$，则①有解为$u_0=x_0+\frac{1}{X_0}\leq2$，反之若

①有解$U_0\pm\sqrt{U_0^2-4}/2$因此，原方程至少有一解$X0>0$，所以原方程有解 $X_0>0$ 方程①有解 $U_0\geq2$ 等价。构造函数 $f(u)=u^2+au+b-2$，因为 f(2)=2a+b+2，由已知，有 f（2）≤0，又 f（u）图象开口向上抛物线，故定有 $U_0\geq2$，使 f（$u_0\geq2$，使 f（u_0）＝0，原命题得证。

例 2　已知 $a^2\sin\theta+a\cos\theta-1=0$，$b^2\sin\theta+b\cos\theta-1=0(a\neq b)$，用 1 表示过点（a，$a^2$），（b，$b^2$）的直线。证明：此直线在变化时，恒与一定圆相切。

证：二式结构同，且 a≠b 构造 $\sin\cdot t^2+\cos t-1\theta\neq 0$，显然 a，b 为这方程二异根，由韦达定量有$a+b=-\frac{\cos}{\sin}\cdots ab=-\frac{1}{\sin}$过$(a，b)(b，b^2)$两点的直线方程为$y-a=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a)$，即$y=(a+b)x-ab\cdots$，将代入得$x\cos\theta+y\sin\theta-1=0$，因原点到此直线距离为$d=|\frac{0+0-1}{\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}}|=1$，故无论为何值，该直线与单位圆恒相切。

四、在课外练习中突破

养成独立思考问题的良好习惯，功夫在课外，通过它可以巩固所学的知识，培养运用知识的技能，提高分析问题、解决问题的能力。

1.精选有典型性、针对性的习题。

不要钻牛角尖，选一些思路狭窄的题目。所选的习题要能充分发挥自己的能力，得到收益，避免穷于应付，这样基础较差的同学能有时间一步步打好基础，获得进一步学习的潜在能力；能力较强的得到更多的训练。

2.及时纠正错漏之处。

在不易回生的时间内，找出正确的思路，思索其中的技巧，明了自身的差距。错误及其原因一旦被及时提醒纠正，就使正确的思路和方法得到及时肯定而更加巩固，有效地克服一错再错的十分被动局面。

3.多角度思维。

不要仅仅满足于得出正确结果，浅尝辄止不是做学问的态度，它在很大程度上限制了思维能力的发展，这种看似省劲的法子其实效率不高。一题多解可开阔思路、左右逢源。揭其本质，变换观察和思维角度，可能有几种不同的解法。

更重要的是，这种方法有助于掌握知识的联贯性、群体性，使同学们从题海中解脱出来。这种能力当然要靠训练得来。

4.分类的习惯。

数学题中有许多同类不同法、貌合神离的题，错误常发生在这些地方，有较强的隐蔽性。这种题可以通过分析一些典型错误来清除迷雾。

例 当 k为何值时，直线 $y = kx$与双曲线段$\frac{X^2}{9}-\frac{Y^2}{36}=1$相切？

解：依题有$\begin{cases} Y = KX, \\ \frac{X^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1 \end{cases} \Rightarrow (4-K^2)X^2=36$

∵直线与双线相切，∴Δ=0

从而 k＝±2，答：（略）

我们来分析一下：（1）解法上有无错误？（2）产生错误的原因？

分析：（ 1）因为直线 $y=\pm 2X$ 是双曲线的两条渐近线，渐近线与双曲线绝无公共点，故解法一定错误。

（2）导致错误原因：将判定圆的切线的结论错误地引用到判定双曲线的判定上面。

（3）进一步分析；对于中心在原点的双曲线：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$和$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，绝没有形如$y=kx$形式的切线。

通过此例，我们可以深刻地感觉到：在解题过程中不能一拍脑门就下笔，要冷静地以定义、定理、公理为依据。久而久之，在做到某一类题型时，自然会将其清楚地划入某一解法领域，而不再拿起笔来心茫然，下笔洋洋洒洒，离题万里。

5.将知识点串起来，形成网络。

为了更清楚地记忆种类繁多的定义、公理、定理，最好将较分散的知识

串起来，不仅有纵向的联系，还要有横向的跨越。如此则可使记忆的容量增大，效率提高、记忆准确、可靠。例如最易混淆的各类角的概念可以归纳成如下形式：

名称	范围
平面内条直线所成角	$[0,\frac{\pi}{2}]$
平面内直线 L_1 到 L_2 的	$[0,\pi]$
角坐标平面内 L 倾斜角异面直线 ab	$[0,\pi]$
所成角……	$[0,\frac{\pi}{2}]$

还可附以相应的图形，加强直观的鲜明性。

五、在探索中前进

为了考查知识的灵活运用能力、抽象思考及概括能力，有一类结论没有确定的问题的思路及方法常被提到：

（一）着眼最复杂处，快刀斩“乱麻”

例 1　已知 A、B、C 是△ABC 三内角，若任意交换两个角的字母，问：$\frac{1}{\mathrm{tgA}}+\frac{2\mathrm{SinA}}{\cos\mathrm{A}+\cos(\mathrm{B}-\mathrm{C})}$的值是否变化？请证明你的结论。

分析：直觉告诉我们，必须对已知式化简，最复杂部分为“已知式的分母$\cos\mathrm{A}+\cos(\mathrm{B}-\mathrm{C})$”即$\cos\mathrm{A}+\cos(\mathrm{B}-\mathrm{C})=2\cos\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}\cos\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}+\mathrm{C}}{2}=2$ $\sin c.\sin b$，于是原式为$\frac{1}{\mathrm{tgA}}+\frac{\sin\mathrm{A}}{\mathrm{SinC}\cdot\sin\mathrm{B}}$再以复杂部分$\frac{\mathrm{SinA}}{\mathrm{Sinc}-\mathrm{SinB}}$处开刀，即$\frac{\mathrm{SinA}}{\mathrm{SinC}\cdot\mathrm{SinB}}=\mathrm{ctgB}+\mathrm{ctgC}$稍加整理，结论明了。

（二）对未知之处加以变形

当观察已知成分寻不到解决途径时，变换进攻角度，往往能云开雾散，豁然开朗。

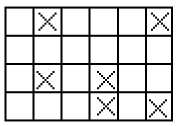

图1-3

例 2　18 瓶牛奶放在 个方格内外（如图　1—3，每格只能放一瓶），在数牛奶瓶时要求横数的瓶数为偶数，竖数的瓶数也是偶数，这能办到吗？分析 如直接将 18 瓶牛奶在 24 个方格内进行试放(用 18 个记号进行打‘X’)，则由于瓶太多很难顾及整体，则屡试不成。若从反面出发，将未知成分变形为“寻找不放牛奶的位置，则只需考虑 6 个记号，这样便一目了然（答案如图——＜不固定＞，“X”为不放奶瓶处）。

（三）联想熟悉的题或分式

面临的题目可分为两大类：较为熟悉与比较生疏。思索时，应紧抓题中传达的信息及隐含条件，联想一个熟悉的题或公式，将思维纳入自如运转的得心应手之轨道。

例 3 在△ABC中，已知$\mathrm{CtgA}+\mathrm{CtgB}+\mathrm{CtgC}=\sqrt{3}$，这是何种三角形？并说明理由。

分析：想起最熟悉的三角形，再取特殊值 A=B=C=60°代入已知式，便可猜想其为等为三角形。为了证明之，对已知式进行变形，由“CtgA+CtgB+CtgC”不由想起那熟悉的公式$(a+b+c)=a^2+b^2+c^3+2ab+2ac+2bc$，则已知式可化为$(\mathrm{CtgA}+\mathrm{CtgB}+\mathrm{CtgC})^2-3=0$，即$\mathrm{Ctg}^2\mathrm{A}+\mathrm{Ctg}^2\mathrm{B}+\mathrm{Ctg}^2\mathrm{C}+2(\mathrm{CtgA}+\mathrm{CtgB}\cdot\mathrm{CtgC}+\mathrm{CtgC.CtgA})-3=0$)。这还是我们熟悉的，Ctg.Ctg2B+CtgB.ctgC+cogC.Ctg=1，于是有 $\mathrm{Ctg}^2\mathrm{A}+\mathrm{Ctg}^2\mathrm{B}+\mathrm{ctg}^2\mathrm{C}$

$-\frac{2}{\sqrt{3}}(\mathrm{CtgA}+\mathrm{CogA}+\mathrm{CogC})+1=(\mathrm{CtgA}-\frac{1}{\sqrt{3}})^2+(\mathrm{Ctg}-\frac{1}{\sqrt{3}})^2=0$，**因此**

$\mathrm{A}=\mathrm{B}=\mathrm{C}=60$°，**即**△ABC**为等边三角形。**

（四）万绿丛中一点红，试探特殊情况

通过对特殊点、特殊值、特例的试探，取部分信息，搜索规律，找出解决问题的一般方法。

例4 **计算** $\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个}-\underbrace{22\cdots2}_{n个}}$

乍看，此题深奥无比，无从进入，故先派侦察者入内：n=1 时， $\sqrt{11-2}=3$，$n=2$**时，**$\sqrt{1111-22}=33$；$n=2$**时，**$\sqrt{11111-222}=333$；……**归纳，猜想：** $\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{22\cdots2}_{n个}}=\underbrace{33\cdots3}_{n个}$**由猜想的结果回溯，胸中有数。**

证明： $\sqrt{\underbrace{111\cdots1}_{2n个}-\underbrace{22\cdots2}_{2n个}}=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times10^n+\underbrace{22\cdots2}_{n个}-2\times\underbrace{11\cdots1}_{n个}}$

$$=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times(10^n-1)}$$

$$=\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{n个}\times(\underbrace{99\cdots9}_{n个})}$$

$$=\sqrt{\underbrace{33\cdots3}_{n个}\times(\underbrace{33\cdots3}_{n个})}$$

$$=\underbrace{33\cdots3}_{n个}$$

六、跨越思维障碍

解题过程，就是开展积极活跃的思维，找出一条越过障碍达到目标的途径。我们有时思路宽，反应快，甚至解题带有独创性，而有时却一筹莫展，不知从何下手。

有的同学解题时无明确的思考方向和步骤，东一棒槌短西一鎯头，费时甚多，效果甚微，亦或半途而废；有的同学的解题方法过于繁杂，弯弯曲曲地绕好多弯却浑然不觉；有的同学一旦遇到稍有变化、形式一新题的就大脑一片空白。对于这些不良现象，只有有的放矢地加强思维训练才能有质的飞跃。

那么，引起这些障碍的原因何在呢？

掌握基础知识是其一。这是前提，是做某类题目的“许可证”。离开具体的基础的知识，思维就成了空想，无法正常进行。例如：集合 A={x|^2-px=0}，B={x|^{2}x+qx+r=0}若 A∩B={|}，A∪B={-2，1，5}，求 p、q、r 的值。如果对集合符号“ { } ”“∩”“∪”，不晓得无素互异性，就无与此题对话的机会。

未掌握数学思维方法为其二。思维操作过程中要综合应用各种思维方法。

如：已知数列{a_n}满足：a_1=1，a_n+1=2a_n+1 写出其通项 a_n，并证明之。

先据已知条件求出：$a_1=1$，$a_2=3=2^2-1$，$a_3=2\times3+1=7=2^3-1$，……由此设想：$a_n=2^n-1$ 并用数学归纳法加以证明。

运用归纳——猜想——证明解此题，如未考虑分析法、归纳法，则数学观点、观念在此题中便得不到正确的反映。而数学观点又包含方程观点、函数观点；推理意识、转化意识、整体意识、化归意识；换元法、数形结合法、待定系数法等。若未能形成自己的数学观念，思维过程失控，遇到新题往往难以下手或逻辑不强。

如：设{a_n}是公差为-2 的等差数列，如果 $a_1+a_4+a_7\cdots\cdots+a_{97}=50$，那么：$a_2+a_6+a_9+\cdots a_{99}=?$

解此题，若孤立地看每一项，只有用引进 a_1，d 后通项式得前 n 项和公式，较复杂，如有整体意识，观察到条件与结论均有：$\frac{97-1}{4-1}+1=\frac{99-3}{6-3}+1=33$项，将此两个 33项进行整体比较，设后者为Q，则$Q-50=$ $(a_3-a_1)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{99}-a_{91})=33\times2d=33\times2\times(-2)$ ∴Q=-82。

思维品质差是引起思维障碍的原因之一。经过长期学习和练习，同学们应具备思维的灵活性、深刻性、敏捷性、独立性等品质。

例 求函数$y=\sqrt{X^2-10X+50}+\sqrt{X^2+25}$的最小值。如按习惯，常是两边平方，化去根号后再求出 y 的最小值，如此则思路受阻。此种单轨道思维囿于实数域；如发散思维则将触角伸向复数域，据其鲜明特征，联系复数的模，用复数模的不等式求出 y 的最小值即可。

又如：设，$f(Z)=\frac{Z^2-Z+1}{Z^2+Z+1}$，则$f\left\{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}=$ ______。

若掌握复数知识，由$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$联想到-1，即知$Z^2-Z+1=0$，于是f$\left\{\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right\}=0$；但如将自变量值代入，虽可求出结果，但计算量大。原因是其思维只限于求函数值的表象认识上，没有留心题目的特殊含义。

鉴于以上种种原因，特提出以下几种建议：

一是抓双基，练思维。在学习中将概念、定理、公式都看成“题”，亲自实践、独立思考、研究解题整个过程，这应当在预习中得到贯彻，同时应注意及时总结思维方法，培养数学观念。

二是加强知识的整体结构。如只以知识点谈论知识点，做一道题算一道题，则不是积极的、科学的学习态度，这导致瞎子摸象的不良后果，对知识内在的联系仍会一片茫然。

三是进行思维形式的各种训练。其中包括：（1）一题多解、一题多变、一理多用，培养发散思维，提高思维的灵活性、敏捷性、独立性；（2）进行发散思维时强调逆向思维。不会运用逆向思维的学生，其对知识的反映只是单方面的，缺乏立体感，所学的知识不会很巩固，缺乏创造和分析能力。通过逆向思维，可以加深对基础知识的理解，有利于寻找解决思路受阻的原因；（3）进行直觉思维和逻辑思维的综合训练。数学的发现来自直观直觉，而分析直觉则应通过证明。同学们应通过观察——猜想或归纳——证明，探索、发现方法，培养思维的独创性。

七、关于解题原则

要正确有效地解题，应当遵循一定的原则，否则可能“节外生枝”，导致前功尽弃。最基本的解题原则有以下几种：

（一）答问原则

跟着纯粹的感觉走，答非所问，徒劳无功。遵循答与问的一致性，有强烈的目标意识才是最彻底的。

例 1　圆锥侧面展开图为半径是 1，圆心角为 270°的扇形，则过圆锥顶点截面的最大面积是（　　）。

错解：设圆锥底面半径是v，由$\frac{r}{v}\cdot 360°=270°$得$r=\frac{3}{4}$，圆维高$h=\sqrt{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$。∴$S\max=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{3\sqrt{7}}{16}$。

原因：将圆锥轴截面判断为过顶点的截面中的最大截面，但此判断只有在轴截面顶角不大于 90°时方成立。

正确解法：设轴截面顶角为0，则$\cos\theta=\frac{1^2+1^2-(\frac{3}{2})^2}{2.1.1}=-\frac{1}{8}$得$0=\pi-\arccos\frac{1}{8}$，∴$0<0\leq\pi-\arccos\frac{1}{8}$，∴当$0=\frac{\pi}{2}$，$S\max=\frac{1}{2}\cdot 1^2 *\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$。

（二）精确原则

解题时要有正确依据。重于计算过程而忽视推理的精确度是屡见不鲜的问题。强化思维的科学性和严格性，对养成言必有据的解题思路有重要的意义。

例 2　设 f（x）为奇函数且对于任意 x，y∈R，都有 f(x+y)=f(x)+f(y)，且 x＞0 时 f(x)＜0，f(1)=-2，求 f(x)在[-3，3]在上的最大值和最小值。

错解：∵f(1)-2，∴f(2)=f(1+1)=f(1)+f(1)=-2-2=-4，故 f(x)为单调减函数。∴fmin(x)=f(3)=3f(1)=-6，fmax(x)=f(-3)=-f(3)=6。

原因：只求 f（2）＜f（1），即判定 f（x）为单调减函数，运用特殊值法，而特殊值不是十分严格的推理方式，由此而得出的结果并非全可靠。

正确解法：在错解基础上补充——设$-3\leq x_1\leq x_2\leq 3$，则$x_2-x_1>0$，$f(x_2-x_1)<0$.∵f(x)是奇函数，∴$f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f(-x_2)=f(x_2-x_1)<0$，即 f(x)在[-3，3]上为减函数。∴f(x)在[-3，3]上为单调减涵数。

（三）映射原则

这是指如在解题中涉及法则、定理或公式，与题目时需应用到的这些定理公式的条件，两者必须对应。其中法则或公式的成立范围条件一般较明显，而题目的条件则有隐含条件。条件有一般性的亦有特殊性的，不能用特殊代一般；有充分的亦有必要的，要分清彼此。

例 3　设$x\in(0，\pi)$，则$\frac{\mathrm{Sin}x}{2}+\frac{2}{\mathrm{Sin}X}$的最小值是多少？

错解：$\because \frac{\mathrm{Sinx}}{2}+\frac{2}{\mathrm{SinX}} \geq 2\sqrt{\frac{\mathrm{SinX}}{2} \cdot \frac{2}{\mathrm{SinX}}}=2$。

原因：运用均值不等式“a+b≥2ab”求函数的最小值有三项条件：①a，b∈R^+；②积 ab 为定值；③当且仅当 a＝b 时取等号。

正确解法：$\because 0 \leq X < \pi$，$0 < \sin X \leq 1$，$\therefore \frac{\mathrm{SinX}}{2}+\frac{2}{\mathrm{SinX}}=\frac{\mathrm{SinX}}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{SinX}}+\frac{\frac{3}{2}}{\mathrm{SinX}} \geq \sqrt{\frac{2}{\mathrm{SinX}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{SinX}}}+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$，当且仅当$\frac{\mathrm{SinX}}{2}=\frac{\frac{1}{2}}{\mathrm{SinX}}$即时等号成立。

（四）筹价原则

解题中进行的推理、判断、构造、变换与运算必须保证前后等价。尤其在变换时，如片面强调形式，对本质重视不够，往往对概念偷梁换柱，失去解题思维的系统性和连贯性。

例 4　设 A、B 为复平面上的点集，

$A=\{Z|Z\overline{Z}+3i(\overline{Z}-Z)+5=0，Z \in C\}$，

$B=\{W|W=2iZ，Z \in A\}$，设$Z_1 \in A$，$Z_2 \in B$，试求$|Z_1 \cdot Z_2|$的最大值与最小值。

错解：由$Z\overline{Z}+3i(\overline{Z}-Z)+5=0$得出$(Z+3i(\overline{Z}-3i)=4$，$|Z+3i|=2$…①

$|3i|-|Z+3i \leq |Z|=|(Z+3i)-3i| \leq |3i|+|Z|3i|$，即$1 \leq |Zi| \leq 5$，由于$Z_2 \in B$故$Z_2=2iZ$，得$|Z_2-Z_1|=|Z_1-2iZ_1|=5|Z_1$，$5 \leq |Z_2-Z_1| \leq 5\sqrt{5}$。

原因：将$|Z_1\text{-}Z_2|$变换为$|Z_1\text{-}2iZ_1|$是不等价的，前者表明在点集 A 上任取一点，在点集 B 上任取一点，求它们之间距离的最大值；后者则把两点拘于点集 A 上任一点与其在 B 上的对应点间的距离的最小值。

正确解法：如图1—4，由$W=2iZ$，得$Z=\frac{W}{2i}$一代入①得$|\frac{W}{2i}+3i|=2$，$|W-6|=4$故点集B表明复平面上以 6的对应点为圆心，4为半径的圆；又集 A 表示以-3i 的对应点为圆心，2 为半径的圆。

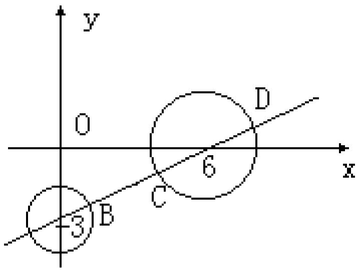

图1-3

故$|Z_1-Z_2|\max=|AD|=\sqrt{6^2+3^2}+2+4=3\sqrt{5}+6$，$|Z_1-Z_2|=|BC|=\sqrt{6^2+3^2}-2-4=3\sqrt{5}-6$。

（五）全面原则

对问题的分析应力求全面严密，不搞片面化，不马虎遗漏。此类错误多

表现为审题的不同，忽视细节，忽视特殊情况，忽视讨论，以偏概全，忽视检验，取舍不当。

例 5 **在等比数列**$\{a_n\}$**中，已知**$a_3=1\frac{1}{2}$**，**$S_3=4\frac{1}{2}$**，求**a_1**及**q**。**

错解：

$$\begin{cases}\frac{3}{2}=a_1q^2\cdots\cdots① \\ \frac{q}{2}=\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}=\frac{a_1(1-q)(1+q+q^2)}{1-q}=a_1(1+q+q^2)\cdots\cdots②\end{cases}$$

两式相除，可得$\frac{q^2}{1+q+q^2}=\frac{1}{3}$**，**$2q^2-q-1=0$**，**$q=1$**或**$q=\frac{1}{2}$**，故**$a^1$

$=\frac{3}{2}$**或**$a^1=\frac{3}{2}/(-\frac{1}{2})=6$**。**

原因：在②式的简化中，分子、分母约有公因式应在 q≠1 的前提下，而最后解得 q＝1 却保留下来作为答案。

正确解法：(1)**当**$q=1$**时，**$a_1=a_3=1\frac{1}{2}$**。**

(2)**当**$q\neq1$**时，列方程组同上，由**$2q^2-q-1=0$**可得**$q=-\frac{1}{2}$

（舍去$q=1$**），这时**$a_1=\frac{a^3}{q^2}=6$**。**

综上所述，$a_1=1\frac{1}{2}$**，**$q=1$**或**$a_1=6$**，**$q=-\frac{1}{2}$**。**

当然，以上几条原则不是不关联的，而是彼此有联系的，重视这方面的培养可以减少在许多不该犯错误的地方产生错误，这对提高思维品质，形成良好的数学作风有巨大作用。

八、攻克选择题、填空题

此类题有不必在卷面上写出推理演算过程的优越性，从而可以迅速地得出结论。为提高解题的准确度，特谈以下几点：

1.回眸定义，闪电突破。

例 1　已知{a_n}为等比数列，且 a_n＞0，即 $a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$，则 a_3+a_5 的值为（　　）。

A．5；B．10；C．15；D．20。

分析；由等比数列定义知：$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$即$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$，∴$a_2a_4=a_3^2$，$a_4a_6=a_5^2$，故原式可变为$(a_3+a_5)^2=25$，从而$a_3+a_5=5$，选（A）。

例 2　圆心在抛物线上，且与 X 轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程是（　　）。

A．$x^2+y^2-x-2y-\frac{1}{4}=0$；

B．$x^2+y^2+x-2y+1=0$；

C．$x^2+y^2+x-2y+1=0$；

D．$x^2+y^2-x-2y+\frac{1}{4}=0.$

分析：由抛物线定义知：圆心只能在抛物（$\frac{1}{2}$，1），圆半径为1，故易知选（D）。

由以上两例知：由于定义反映了问题的本质特征，故抓住定义即抓住了问题实质，从而可利用这最具有威力的工具进行快速突破。

2.着眼全局，一举歼灭。

不去考虑组成整体的每一个体或对式子进行分割变形。

例 3　已知长方体的全面积为 11，十二条棱长度之和为 24，则这个长方体的一条对角线长为（A）23；（B）14；（C）5；（D）6。

分析：设长方体从一项点出发的三条棱长分别为 a，b，c 则对角线长为$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，分别计算a，b，c的值属天方夜谭，因此考虑整体，$2(ab+ac+bc)=11$，$a+b+c=6$所以$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=36-11=25$，故对角线长为5，选（C）。

例4　方程$\frac{1+3^{-x}}{1+3^x}=3$的解是——。

分析：一般地是去分母整理成以 3^x 为未知数的一元二次方程求解。但如果从整体上考虑此式，在等式左边分子、分母同时乘以 3^x，则有

$\frac{1+3^x}{3^x(1+3^x)}=3$，即$3^x=3$，∴X = +1。

3.数形携手，共图利果。

例5 如果$|X|\leq\frac{\pi}{4}$，那么函数$f(x)=\cos^2 X+\mathrm{Sin}X$的最小值是（ ）。

A．$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$；

B．$-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$；

C．-1；

D．$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

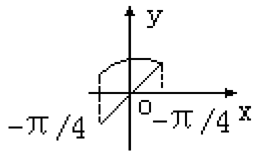

图1-5

分析：由题意构草图1—5，由图易知：$X=\frac{\pi}{4}$时，$\mathrm{los}^2 X$

与 SinX 同时取得最小值，故 f（x）的最小值为

$(\cos\frac{\pi}{4})^2-\mathrm{Sin}\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$**，选（D）。**

例6 如实数x，y满足$(x-2)^2+y^2=3$，那么$\frac{y}{x}$的最大值为______。

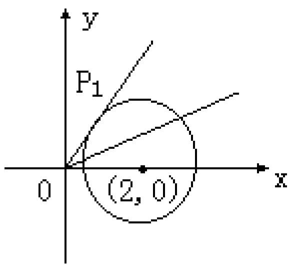

图1-6

分析：由题意构草图1—6，从而$\frac{y}{x}$为直线OP的斜率，其最大值在OP

与半径为$\sqrt{3}$的⊙A在第一象限相切时取得，如图，P_1为切点，连结

AP_1**，则OPal，**$\therefore\frac{y}{x}=\mathrm{tg}\angle AOP'=\sqrt{3}$。

4.特值先锋，扫除“异己”。

使变量选定特殊值。可否定其中一些选支，减弱干扰程度。

例 7 设 a，b 满足 ab＜0 的实数，那么（　　）。

（A）|a+b|＞|a-b|；

（B）|a+b|＜|a-b|；

（C）|a-b|＜||a|-|b||；

（D）|a-b|＜|a|+|b|.

分析：取 a＝1，b＝-1，易知，（A）、（C）、（D）均不成立，故选（B）。

例8 $\frac{1+\mathrm{Sin}2\theta-\cos\ 2\theta}{1+\mathrm{Sin}\ 2\theta+\cos\ 2\theta}=(\quad)$。

（A）tgθ；（B）ctgθ；（C）Sinθ；（D）2Sinθ；（E）Sin2θ。

分析：取$\theta=\frac{\pi}{6}$代入计算知：（A）为正确选支。

5.活代活换，巧过难关。

例9要得到$y=\mathrm{Sin}(2x-\frac{\pi}{3})$的图象，只要将$y=\mathrm{Sin}^2X$的图象（ ）。

（A）向左平移$\frac{\pi}{6}$；

（B）向右平移$\frac{\pi}{3}$；

（C）向左平移$\frac{\pi}{6}$；

（D）向右平移$\frac{\pi}{6}$；

分析：在$y=\mathrm{Sin}^2X$中，令$X=X^1-\frac{\pi}{6}$，则有$y=\mathrm{Sin}(2x^1-\frac{\pi}{3})$。由

$X=X^1-\frac{\pi}{6}$可知：应选（D）。

例 10 已知 a 在第三象限且 tga＝2，则 cos2 的值为______。

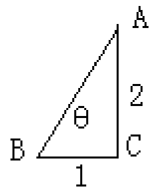

图1-7

分析：构造如图1—7的Rt△ABC，其中a = π + θ，$AB=\sqrt{5}$。

$\therefore\cos 2=-\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$。

例 11已知$\mathrm{Sin}\theta=-\frac{3}{5}$，$3\pi<\theta<\frac{7\pi}{2}$，求$\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}$的值。

分析：构造图 1—8 的 R△ABC，

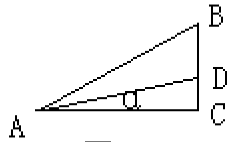

图1-8

$\angle BAC=2$，$\theta=3\pi+2$，$\angle DAC=\frac{\alpha}{2}$。由角平分线性质定理易知：

$CD=\frac{4}{3}$。

所以$\text{tg}\frac{\theta}{2}=\text{tg}(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2})=-\text{ctg}=\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{\frac{4}{3}}=-3$。

7.逆向探路，出其不意。

例 12 方程 Sin3Xcos5X=-cos4X-Sin5X 的一个解是（　　）。

（A）10°；（B）20°；（C）50°；（D）70°。

分析：由条件有 cos4X·Sin5X+cos4X·Sin5X=0。即 Sin(4X+5X)=0。（两角和正$3\frac{1}{3}$公式适用。∴$\text{Sin}9X=0$，选（B）为正确项。

例 13 已知直线 L_1 和直线 L_2 的夹角平分线为 y=x，如果 L_1 的方程为 ax+by+c=0(ab＞0)，那么 L_2 的方程是（　　）。

（A）　bx+ay+c=0；

（B）ax-by+c=0；

（C）　bx+ay-c=0；

（D）bx-ay+c=0。

分析：如果选取选支中某一方程是 L_2 的方程，则满足 $ax_0+by_0+c=0$ 的点（X_0，y_0），关于 y＝x 的对称点（y_0，x_0）的坐标应满足选支中某一方程，易知 $by_0+ax_0+c=0$，选（A）。

8.熟记结论，一马当先。

利用平时熟悉的重要例、习题的结论。

例14　$\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}]$**的值为……。**

分析：利用课本中的重要例子：若等比数列{a_n}的公比|q|＜1，则

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S=\frac{a_1}{1-q}$**，易知所求为**$\frac{1}{4}$**。**

例 15 立方体 ABCD——$A_1B_1C_1D_1$ 中，已知顶点 A 上三条棱长分别为

$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、2**，如对角线**AC_1**与过点**A**的相邻三个面所成的角分别为α、β、ν，则 $\text{los}^2\alpha+\text{los}^2\beta+\text{los}^2\nu$=______。**

分析：这是立体几何课本上一道习题，由该习题易知值为 2。

九、畅思维信息之流

在一些几何证明题上，有时因没主动掌握题中提供信息，思维混乱，无解题策略和方向，或因缺少解题经验和对图形模式的概括，导致练习不少却收效甚微。鉴于此，建议如下：

（一）仔细审题、斟酌图形、弄清关系

此种能力包括：（1）所作图是否正确、合理。不正确作图形时对解题是直接干扰；（2）已知、求证的化简、转化。使各种关系明朗化，有利于思路展开；（3）将每个信息，包括求证的信息充分展开，按定义、定理或公理延伸出尽可能多的信息，避免忽视或遗忘较弱的信息；（4）结合图形，按一般规律及经验传递或转换，挖掘必要的隐含条件，添辅助线即为明证；（5）探求已知信息间的关系及组合能力，找出实质性关系，提高识图能力。

例 1 如图 l—9，已知△ABC 中，AB＝AC，D 为 AB 上的一点，DE⊥BC，E 为垂足，DE 的延长线交 CA 延长线干点 F，求证 AD＝ AF。

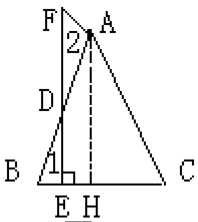

图1-9

分析：此题需对 AB＝AC、DE⊥BC、ED 延长线交 CA 的延长线于点 F 以及 AD＝AF 加以探究。对 DE⊥BC 充分展开，至少要求抽取∠DEC＝∠DEB＝Rt∠＝90°等信息，ED 延长线交 CA 延长线于点 F 却需化成∠1＝∠2。

（二）分析综合、加工条件、前后呼应

为避免盲目的尝试，要抓住揭示的一系列信息，结合图形，筛选所学的公理、定理、定义等，经过反复比较、判断、检索、组合，变形、代换等加工，筛选多余的，逐步缩短已知至求证之距离。

为解决其过程受阻，建议：（1）寻找遗忘的关系和量。不能前后呼应、沟通的原因常是忘记了某些解题的有效信息，思维无法活跃；（2）检索过去的解题经验，提取出证题模式及探索原则，努力接通。（3）探索新的证题方向。架设新的通道和桥梁，寻找媒介物，建立新联系。（4）重新审题、考察图形，如以上方法皆不奏效，则为图形中的信息没有充分发掘作用，需进一步探究或调整角度。

（三）重理表述，总结得失

首先寻求简洁、合理、最佳的论证，然后找出图中的基本因素，想想用了哪些性质，这对于识别基本性图形，把握其组合，考察知识点间的联系，积累解题经验十分重要。

其次，找出失败的原因。论证时，开始难免碰壁，要从这中间好好思考一下，究竟哪些地方没把握好，以免下次再走弯路，同时增强解题的自信。对老师的小结内容，更要牢牢记住。如等腰三角形应抓住它的对称轴，即底边的垂直平分线，平形四边形应抓住其对称中心，即两条对角线的交点。

平时，还应注意通过一组系列题，体会在不同图形中的共同解题经验，下面是一组利用、寻找、制造轴对称图形的习题。

例 2 已知△ABC 中，AB＝AC，D 是 AB 的中点。DE⊥AB，求证：AC＝BE＋EC。

例 3 在△ABC 中，AD 是∠A 的平分线，DE∥AC，交 AB 于 E，过 E 作 AD 的垂线交 BC 的延长线于 F，求证：∠CAF＝∠B。

例 4 过△ABC 的顶点 A，分别作两底角∠B 和∠C 平分线的垂线 AD⊥BD 于 D，AE⊥CE 于 E，求证：ED∥BC。

总结一类问题的共同因素，概括到一定的水平，有助于在新的情景中将已有的知识和经验加以运用，有助于从总体上认识一个新的命题，并将其纳入到自己已有的认识系统结构中加以类化，以形成真正的实用的证题思路。

关于例 2 的进一步证明，读者可据此文提供的方法进行探索、实践，然后揭示出实质，充实自己。

第二章　物理学习方法集粹

一、谈用“线索法”进行中学物理综合复习

高中物理复习通常分两个阶段，即单元复习和综合复习。综合复习是打破课本上的章节界限，知识跨度大，涉及同容多，必须从中找出联系不同知识的线索，根据这些线索来复习。笔者总结出力、能量、动量三条复习的主要线索，根据这些线索进行综合复习，能清楚、完整地体会到中学物理知识的全貌，掌握其主要内容、规律和方法，有利于从整体上提高分析问题、解决问题和研究问题的能力，现简介如下。

（一）力的线索

1.中学物理中常见的力有：万有引力（重力）、弹力、电场力、磁场力、摩擦力、核力等。

2.力的瞬时效应——产生加速度。加速度是联系物体受力状况和物体运动状态变化之间的桥梁，力变，加速度也跟着变。

3.受力分析：

①分析顺序：场力（重力、电场力、磁场力）、弹力、摩擦力等。

②运动方程：$F_{合}=ma$。

不少涉及电磁场的有关问题，可以用一般的力学规律来解决。

4.力的合成和分解：（略）

例对于带电粒子在匀强电场（图 2—1）和匀强磁场（图 2—2）中的求解问题，应注意以下问题：

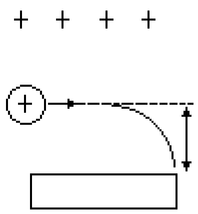

图2-1

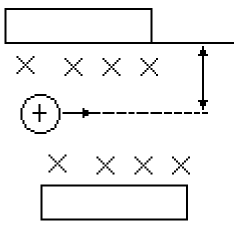

图2-2

①电场力是恒力，运动轨迹是抛物线的一段。

②用“类抛体法”解题；

③无能量损失有 $\frac{1}{2}mV_t^2=\frac{1}{2}mV_0^2+qE\Delta S$。

在磁场中：

①$f_{溶}$是变力，运动轨迹是一段圆孤或圆。

②用“类匀速圆周运动法”解题。

③当 $F_{溶}\perp V$ 时有 $V_t=V$。

（二）能量的线索

1.功的意义：功是力对空间的累积效应。做功的过程总伴随着能量的转换。

W=Fscos0

2.功能关系：任一物理过程都严格遵循能量守恒定律，某一力做功，一

种形式的能量减小，另一种形式的能量增加。增加和减少的能量等值。

3.能量的形式（见表 2—1）

4.有关能量的规律：（见表 2—2）

表 2—1

能量名称	公式	能量名称	公式
动能（E_k）	$E_k=\frac{1}{2}MV^2$	电势能(E)	=qV
重力势能(E_p)	E_p=mgh	光子能量(E)	E=hv
弹力势能(E_p)	$E_p=\frac{1}{2}K^2$	结合能(Δ E)	Δ E=Δ mC^2

表 2—2

名称	表达式	适用范围条件
机械能守恒定律	$E_2=E_1$ 或Δ E=0	只有重力弹力做功的物体系
功能定理	W=Δ E_k	其它形式能与物体动能转化
功能原理	WF=Δ E （F 除重力、弹力外）	其它形式能与物体机械能转化

（续表）

热和功关系	W=IQ	做功使物体内能转化
热学第一定律	Q+W=Δ E	做功和热传递使物体内能变化
焦耳定律	$Q=0.24I^2Rt$	电能转化内能
电路中功率关系	I=I2(R+r)	电能转为内能
法拉第电磁感应定律	δ=BULSin0	导体切割磁力线机械能转为电能
爱因斯坦方程	$hv=\frac{1}{2}mu^2+W$	光电效应
跃迁公式	hv=E2-E1	原子的光辐射吸引

例一质量为 m，带电量为 q 的小物体，可在水平轨道 OX 上运动，O 端有一与轨道垂直的固定墙，轨道处于大小为 E，方向沿 OX 轴正方向的匀强电场中，所受摩擦力 f 大小不变，求它在停止运动前所通过的总路程。

解：小物体受到的电场力 F=-qE。大小不变。

方向指向墙，摩擦力 f 的方向与小物体运动方向相反。不管开始时小物体是沿 X 轴正方向还是负方向运动，小物体在多次与墙碰撞后，最后将停在原点 O 处，此过程中电势能减少了Δ ε=qE_x，小物体动能减少了 $mv^2/2$，由于小物体与墙壁碰撞时，不损失机械能，因而小物体克服摩擦力所做的功就等于所减少的动能和电势能之和。于是有：

$$fs=\frac{1}{2}mV^2+qEX$$

解得：$S=(2qEX+mV^2)/(2f)$

二、谈高中物理“知识立体化”复习法

高中物理总复习是中学物理的重要组成部分。很多学生知识“平面化”，结果概念不清、知识掌握不牢、运用不活。为减少上述现象，建立知识的立体模型，达到事半功倍的效果，特将此法提出与大家探讨。

物理复习中实现“知识立体化”主要有两个方面：一是以大纲要求，突破教材原有的章节顺序，根据知识的成份、结构及它们的内在关系，巧妙地把知识进行重新梳理和组织，从全貌到单个、从外延到内涵，从理解到掌握以使灵活运用，形成多层次的知识立体感；二是精心设计具有单项针对性和综合运用性的立体习题，适时检查对知识的理解和掌握的程度，训练灵活运用知识的能力，强化知识立体模型，使自己对知识的理解和运用达到尽善尽美的程度。现根据以上两个方面谈谈具体做法。

（一）形成知识立体型

复习中要形成知识立体模型，主要采用分析比较、归纳演绎、渗透联想等思维方法，在尊重知识的发展规律和相互依存的关系的基础上按以下三个步骤复习：

1.分析知识的内在联系，抽出知识主线组成主骨架。

2.分析现行物理教材，它构成的知识体系的主骨架是三条主线：一是力和运动；二是冲量和动量；三是功和能。如果有目的地按这三条主线去复习教材，组织讨论，寻找各部分知识之间的联系和发展，就容易把握住知识的主要方面。

例如复习功和能，可以提出下列问题：教材中有哪些部分含有功和能的概念？哪些规律是功和能的运用和发展？从同一信息来源发出，沿力学、热学、电磁学、光学、原子物理学等不同方向去分析探索，明白功和能在各部分知识中的主导作用，便会自然地把握住功和能这条主线。一旦掌握这条主线，使会有的放矢地去认识现象，掌握规律，巩固旧知识，启迪新知识，也就是实际学会了探求问题真谛的方法。

3.围绕知识主线归纳演绎主要知识形成的知识经络。

在头脑中形成知识主骨架后，就应打开思路，根据知识主线去演绎各知识单元的主要知识并形成经络。如力学知识单元，它主要是由干作用的瞬时效应（牛顿第二定律）、时间累积效应（动量定理）、空间累积效应（动能定理）和两个守恒定律（动量守恒、机械能守恒）组成两条经络，可以用力和运动为基础做如下层层归纳演绎：

力是物体运动状态改变的原因，即产生加速度的原因；物体只要受到力的作用就立即产生加速度，它们之间的关系是瞬时的比例关系，用牛顿第二定律来表达，即：$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$。

如将牛顿第二定律和运动学公式相结合，就得到牛顿第二定律的另一种表示形式：

$$\Sigma \vec{F} = \Delta \vec{P} / \Delta t$$

从而得到动量定理的表达式：

$$\Sigma \vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{P}$$

即：物体受合外力的冲量等于物体动量的增量，它表示了力对作用时间

的累积效应。

如仅仅是物体 1 与物体 2 之间发生相互作用，根据牛顿第三定律知：$F_{12}=-F_{21}$。

若物体相互作用时间为 t，对每个物体则有：$F_{12}=\Delta P_2/t$、$F_{21}=\Delta P_1/t$

对两个物体组成的物体系有：

$\Delta P_2=-\Delta P_1$ 得 $P_1+P_2=P_1'+P_2'$

即：相互作用的物体构成的系统，或不受外力或所受外力的合力为零，系统的总动量保持不变，这就是动量守恒定律。

如果用牛顿第二定律和运动学公式相结合还可演绎出另一种表达式：

$$\Sigma F\cdot S=\frac{1}{2}mV_2^2-\frac{1}{2}mV_1^2$$

又得到动能定理表达式 $W=\Delta E_k$。

即：所有力（包括重力、弹力）对物体所做的功的代数和等于物体动能的增量，表示了力作用的空间积累效应。

若物体所组成的系统只有重力和弹力做功，其它力不做功（或他们做功的代数和为零），按动能定理又得到机械能守恒定律等等。

从以上可以看出，通过将知识主线演绎成的知识经络，学生对知识的理解可实现由部分到整体，由粗向细的逐步过渡。花的时间少而收效大。

4.把主要知识纵横渗透到各个部分，建立知识立体雏形。

知识的“主骨架”和“经络”形成后，继续分析知识的发展规律和相互依存关系。通过“搭桥”、“攀越”，“解惑”等手法把主要知识渗透到各个部分，从多角度运用知识，建立知识立体雏形。

如力学知识中的力作用瞬时效应（牛顿第二定律），它是解决动力学问题的桥梁。对它的渗透可作如下引导：

物体所受力的情况 $F_1\cdot F_2$，F_3 $\Longrightarrow$ 力的等效变换 $\xrightarrow[\text{正交分解法}]{\text{平行四边形法则}}$ ΣF

$\Sigma\vec{F}$决定物体运动的加速度 $\vec{a}$ 的运动性质。

（1）当时，$\Sigma\vec{F}=0$，$\vec{a}=0$，物体处于平衡状态，要么静止，要么做匀速直线动动。

（2）当 $\Sigma\vec{F}$恒矢量时，$a=\Sigma\vec{F}/m$，为恒矢量，物体

做匀变速运动。如 $\Sigma\vec{F}$的方向与初速 $\vec{V_0}$。的方向出现夹角0时，可以出现以下不同情形的匀变速运动。$V_0=0$，为匀加速直线运动，如自由落体。

$V_0\neq$且 0=0°，匀加速直线运动，如竖直下抛运动；

$V_0\neq$且 0=180°，匀加速曲线运动，如平抛物体；

$V_0\neq$且 0=90°，匀加速曲线运动，如平抛物体；

$V_0\neq$且 0°＜0＜90°，匀加速曲线运动，如斜下抛运动；

$V_0\neq$且 0°＜0＜180°，匀加速曲线运动，如斜下抛运动；

（3）当 $\vec{\Sigma} F$为变矢量时，$\vec{a}$ 也为变矢量，但仍满足 $\vec{a} = \vec{\Sigma} F/m$（即时值）。

① $\vec{\Sigma} F$的大小不变，方向始终与V的方向垂直，质点做匀速圆周运动。

② $\vec{\Sigma} F$的大小与对平衡位置的位移成正比，方向与位移方向相反，即：ΣF=-KX，则质点做简谐振动。

由此看出，通过上述的渗透，同学们不但对知识的理解和掌握有了新的飞跃，形成了较为完整的知识整体，而且还激发了研究问题的兴趣，培养了思维能力。

三、强化知识立体模型

要在头脑中建立扎实的知识立体模型是不容易的，它不但要求同学们能对知识理解透彻，掌握坚实，而且要求学生能灵活地运用知识，提高各种技能，因此，在建立知识立体雏形中，同学们必须进行科学的、多层次的训练，强化知识立体模型，以达到预期效果。这需要做好以下两项工作：

1.精心选取具有“立体性”的训练题。

（1）针对知识元素本身的立体化，设计单项主体练习题组，以使自己对知识的内部成份结构，对知识全貌进行认识和运用。

例如对“功”这个概念可以有如下题组：

①功所表示的物理实质是什么？1 焦耳所表示的意义是什么？

②用相同的力推动物体沿力的方向移动同样的距离 S，在下列几种情况下：A.光滑水平面上，B.在粗糙水平面上，C.在粗糙斜面上，这个力做的功是：

（a）在 A 情况下的，（b）在 B 情况下的，（c）在 C 情况下的，（d）一样多。

（检查目的：强调决定功的因素，一个力做功的值只由这个力的本身大小，受力者的位移大小以及力和位移的夹角决定，与其它无关。）

③固定在水平地面上的斜面长 5m，高 3m，在斜面上放一个质量的 2 千克的物体，物体与斜面间的摩擦系数为 0.2，用 30 牛顿的水平力从下把物体沿斜面推上 4 米，求在这一过程中，推力、重力、斜面对物体的弹力以及物体对斜面的摩擦力所做的功。

（目的：(a) 进一步强化决定功的因素和由力和位移的夹角决定正负功。（b）明确研究对象，即：力对物体做了功，必须是受力物在力的方向上要有位移）

④一个物体做圆周运动，在它所受的诸力中有一个大小方向都恒定的力 F，在物体转一圈的过程中，力 F 做的功是多少？如果它所受的力中有一个大小不变方向在圆的切线上的力 F′，在它转一圈的过程中，F′做的功是多少，如果物体做匀速圆周运动，它受诸力的合力做的功是多少？（圆周运动半径为 R）。

（目的：强调用 F-Scos0 求功的条件，只有在 F 恒定不变的情况下才能用 F-S-cos0 求 F 的功，否则只能用分段求积或利用能量变化来求功。）

通过上述的立体题组的训练，同学们对功的内涵和外延都加深了理解，完成了宏观立体中知识元素本身的微观化。

（2）围绕知识元素在宏观模型中的作用和与其它知识的联系，做综合运用习题，实现知识迁移，强化知识的宏观主体。如下题：

有一回路竖直放在匀强磁场中，磁场方向垂直磁场所在平面由里向外，AC 导体可沿轨道自由滑动而不分离，回路电阻除 R 外均可忽略。当 AC 从静止释放后：

①下列说法哪些正确？

A、AC 加速下落，最后趋向一最大恒定速度；

B、电流增大，最后趋向一最大恒定值；

C、AC 均匀加速下落；

D、AC 匀速下落。

②欲使 AC 下落的最大速度减小为原来的一半,可以采用下述哪些方法？

A、把 AC 质量减为原来的一半；

B、增加 AC 的长度为原来的 2 倍；

C、增加磁感应强度为原来的 2 倍；

D、减小电阻为原来的一半。

③欲使电流达到稳定后，在 R 上产生的热功率增加为原来的 2 倍，可用下述哪些方法？

A、将 AC 质量增加为原来 2 倍；

B、将磁感应强度减为原来一半；

C、将 AC 的长度减为原来一半；

D、将电阻 R 增大 2 倍。

此题综合了电磁感应现象，闭合电路的欧姆定律、功和能、力和运动等方面的知识，达到了强化知识的目的。

2.集中问题进行有针对性的评价。

在学习中，练习训练的过程，既是知识运用强化的过程，也是老师巡回辅导接受信息反馈的过程。此时同学们如能针对出现的错误和漏洞进行反思，从知识主体模型上补缺纠漏，进行更深层次的思考，便可以促进多方面技能的发展。

高中物理“知识立体化”复习法在教学中已收到良好的效果，采用它不仅能较好地达到复习的目的，还能较好地训练学生的思维方法，通过分析、归纳、演绎、渗透、想象、迁移等把握事物的内部联系，培养学生的各种能力。

四、如何提高高三第二轮总复习的效果

物理高考总复习，一般学校都要搞二、三轮。大致是第一轮按照教学内容逐章逐节地复习。复习得比较细。复习后，大部分同学基本上能掌握教材中各物理定律，定理的物理意义和适用条件，也能解一些比较直截了当的问题。单元检查时，考分能让人满意。

在这个基础上，第二轮复习应如何进行？

复习决不是简单的重复，而是一次重新理解、总结、归纳、提高的过程。所以在第二轮复习中决不能只选择一些难题做例题，必须打破章节界限，找出贯穿全教材的红线，让学生冲破单项思维定式，培养学生的发散性思维，从而提高其解题能力，拓宽思路。

贯穿中学物理教材的红线有两条：一条是力，一条是能量。因此在复习中可以采用红线贯穿的专题复习法。在第一个专题《力》中按力的性质引导出、回忆出高中阶段学了哪些力？它们各有什么特点？在第一轮复习的基础上，同学们可以很清楚地、熟练地答出中学所学的重力、弹力、摩擦力、洛仑兹力和核力等。前三种力同学们比较熟悉，而电场力 F＝Eq，要使带电体在电场中才能受到，若电场恒定，电场力也恒定，电场不恒定，则电场力也不恒定。因此，在匀强电场中的带电体的受力恒定，仅此力中多了一个电场力，解题思路类同于力学。而在解匀强电场的题中，牛顿第二定律只有瞬时意义。一套匀变速运动的公式是不能配用的。磁场力的存在，一要电流处于磁场中，二要电流方向与磁感应强度方向垂直，若不垂直，则用正交分解法取其垂直分量。洛仑兹力是作用于运动电荷的，一是 $f_{溶}$的方向一定要与 B 与 V 的方向垂直，谁不垂直就分解谁；二是 $f_{溶}$的方向是用左手定则确定，正电荷运动即电流方向，负电荷运动方向为电流的反方向，三是 $f_{溶}$的方向时刻改变，它是一个变力，万不能与匀变速运动公式配用，且因 $f_{溶}$与 V 永远垂直，故 $f_{溶}$水远不做功。而核刀则是超短程力。掌握了它们的特点，则在解题中也就会采用不同方法来处理。

贯穿教材中的第二条红线是能量，任一物理过程均遵循能量守恒与转换定律，某一个力做了功，必然引起一种能量减少，另一种能量增加，因此只要有能量转换的物理习题都可以用功能关系来解决。例如在分子物理学中，同学们往往不能理解的是为什么分子间距离平衡位置变大、变小后分子势能均增加？其实只要弄清分子间距 r。变大时外力要克服分子引力，而当 r。变小时，外力要克服分子斥力做功，问题就迎刃而解了。既然外力做了正功，分子势能当然是增加。再如在进行电场的学习中，同学们往往难以搞懂带电粒子电势能的变化，实质上只要弄清电场力做了什么功就清楚了，它作正功时，电势能必然减小；它做负功时，电势能必然增加。而在匀强磁场中 $f_{溶}$永不做功、所以带电粒子如果能量变化，则必有其它力做功而与 $f_{溶}$无关。

通过这两条红线进行专题复习后，再配合适当的综合性较强的例题训练，这样同学们在头脑中既加深了对原有知识的理解，也加强了知识的横向联系，培养了发散性思维，从而开拓了思路，增强了应变能力，达到举一反三的效果，顺利实现了知识的水平迁移。

在第二轮复习中，要把教材中的定理、定律进行归纳，揭示它的本质特征，揭示它的内涵与外延在不同条件下不同的应用，有的还需要通过比较来

进行类比性理解和记忆，这是极为重要的，例如教材中通过比值来进行定义的物理量有：E＝F/q，V＝E/q，C＝Q/V，R＝V/1，B＝F/IL。等等。同学们往往会误解以为 E、 V、 C、 R、 B 等物理量与等号后面的物理量有什么必然的联系。其实不然，这些物理量均是由它们本身的因素决定的。与等号后面的物理量并无本质的联系，再引进公式 $E_{点}=KQ/r^2$，$E_{匀}=V/d$，$V_{点}=KQ/r$，$r_{匀}=Ed$，C＝δS/42kd，R＝PL/S，B＝∅/S 等公式来进一步证明，这样可以对这些物理里的本质意义有更深刻的理解。又如教材中的定理、定律；“力学”中有三个定律和两个定理（牛顿运动定律、机械能守恒定律、动量守恒定律、动能定理、动量定理）；“气体性质”中有气体实验三个定律与理想之体状态方程；“电磁感应”现象中的楞次定律与法拉第电磁感应定律等，在第一轮复习时往往因教材顺序关系只讨论每条定律在前面知识范围内的应用。如对动量定理、动能定理往往只偏重于它们在力学习题中的应用，而事实上它们在电场中，磁场中及原子物理中同样有许多应用，动量守恒定理不仅在碰撞问题中可以应用，而且在相互作用中，虽不直接相碰，但动量守恒定律则是任何物理过程都必须满足的。经过这样的归纳、提高、处理，既加深了同学们对物理定理、定律的深刻理解，又大大开拓了解题的思路，克服了单向思维定式的消极影响，实现了知识的垂直迁移。

五、对历年高考物理图象考题的分析

物理图象跟物理公式一样，都是表示物理规律的一种数学工具，每年高考都有这样的题目。下面就历年高考有关图象问题试题的命题方向做一些粗浅的讨论：

（一）试题统计

为了分析的方便，现对 1980——1990 年的历年高考图象试题做以下统计。限于各种条件，仅以内容提要。

△1980 年第一题（6）题（选择， 3 分）

给出物体竖直上抛全过程的速度——时间图象，判断正误。

△1981 年第二（4）题（填空，4 分）

给出某时刻横渡的波形图，读出振幅和波长，确定指定质点此时的运动方向。

△1981 年第四（2）问，（作图，7 分）

给出定质量理想气体在 P—V 上的变化全图，将其改画在 V—T 图中。

△1982 年第二（1）题（选择， 3 分）

给出一质点的振动图象，确定质点在指定时刻的速度和加速度。

△1982 年第二（5）题（填空，5 分）

给出飞机从起飞到落地的竖直分速度 vy 与时间 t 的关系图,确定飞机上升的最大高度和在指定时间内在竖直方向的分加速度 a_y。

△1982 年第六题（3）问，（作图，4 分）

已知单匝矩形线圈在磁场中受外力矩 M_y 作用而匀速转动的情况，画出 $M_{外}$随 t 变化的图线。

△1983 年第三（1）题（选择， 3 分）

给出某时刻横波的波形图，选择由图象可确定的物理量。

△1983 年第四（3）题（作图，2 分）

给出“研究电源输出功率 P 跟外电阴 R 的关系”实验时所得实验数据，画出 P—R 图象。

△1985 年第六题（计算，7 分）

给出某横波在两个不同时刻的波形图，求①波的振幅和波长，②已知传播方向，求波速，③已知波速，求传播方向。

△1985 年第八题（计算，12 分）

给出加在平行电路板上的交变电压波形图。要求电子从一板运动到另一板时动能最大，求交变电压的频率范围。

△1986 年第一（6）题。（作图，3 分）

已知某横彼的振幅、频率、波速、传播方向及某时刻指定质电运动特点，画出波形图。

△1987 年第一（5）题，（作图，3 分）

已知某横波上两指定质点在某时刻所在的位置和运动特点，画出波形在两质点间的形状。

1987 年第一（8）题（作图，3 分）

已知一定量的理想气体在 P—V 图上的变化过程，将全过程改画在 P—T 图上。

△1987 年，第三（1）题（填空，4 分）

给出“ 研究物体质量一定时，得到的 a—F 关系图 ”，分析误差产生的原因。

△1988 年，第一（6）题，（选择，2 分）

给出物体竖直上抛全过程的速率一时间关系图，判断正误。

△1989 年第一（11）题（选择， 2 分）

给出一定质量理想气体在 P 一 T 图上的变化过程，改画在 P—V 图上。

△1989 年第三（23）题（填空，3 分）

给出横波在两个不同时刻的波形图，确定它可能的传播速度。

△1990 年第一（7）题（选择， 2 分）

给出一定质量的理想气体在 P—T 图上的变化过程，改画在 P—V 图上。

△1989 年第（23）题，（填空， 3 分）。

给出横波在两个没时刻的波形图，确定它可能的传播速度。

△1990 年第一（7）题（选择，2 分）

给出 LC 振荡电路电容器某一极板的电量 q 随时间 t 变化的图线,确定指定两时刻电路中电流的大小和方向。

△1990 年第一（10）题（选择， 2 分）

均匀直角板绕某轴转动，已知外力的方向特点，画出缓慢转动中 F—X 的图线。

△1990 年第二（2）题（选择， 3 分）

给出闭合线圈中产生的 i—t 图，确定穿过线圈磁场的 B—T 图。

△1990 年第三（26）题，（填空，3 分）

给出简谐波某时刻波形图和波速，确定指定质点在一段时间内通过的路程和发生的位移。

（二）试题分析

1.试题特点。

①比重不小。如上表所示，十年九考，21 题平均每年 2 题，总分 80 分，年均 8 分，少则几分，多则十几分。值得一提的是 1990 年考题 10 分，但考题四道，占总题数的 12.1%，比例很大。

进入 90 年代以来，图象题比例更加突出、分值更大，因为图象题能考察出学生的综合分析、观察及运用能力。所以任何时候都不能轻视，更不可忽视图象题。

②重点突出。力学、热学和电磁学这三大单元每年都有图象题，其中力学中的“ 波形图 ”题明显突出，这是符合教材特点和大纲精神的。像以上 21 道题，波形图题就有七道，占 33%，共计 26 分，占总分的 33%，这两个数字如此接近，大概并非偶然。

③题型多样。历年高考有作图题、选择题、和计算题。每年都以选择、填空、作图为主，总计 19 题，占总数的 90%，题型小，考察点清，客观性强。这正是“ 标准化考试 ”的明显标志。

④层次较高。从考查知识点的学习水平来看，（a）“ 识记 ”约占 11%，如 1981 年二（4）（4 分）， 1983 年三（1）（3 分）， 1985 年六（1）（2 分）；（b）“ 理解 ”层次约占 20%，如 1980 年一（6）（3 分）， 1982 年一（3 分）， 1986 年一（6）（3 分）， 1988 年一（6）（2 分）， 1990 年一（7）（2 分），1990 年三（26）（3 分）；（C）“ 分析 ”层次约占总

分的 46%，如 1981 年四（2）（7 分）， 1982 年二（5）（5 分）， 1982 年六（3）（4 分）， 1983 年四（3） （ 2 分），1985 年六（2）、（3）问（3 分），1987 年一（5）（3 分）， 1987 年一（8）（3 分）， 1987 年三（1）（4 分），1989 年一（11）（2 分）， 1990 年一 （10）（2 分）；（d）“ 综合 ”层次约占总数的 23%, 如 1985 年八（12 分），1989 年三（23）（3 分），1990 年二（20）（3 分）。

由此可见，较高思维层次（分析、综合）的约占 70%，较低层次占 30%、“ 安全团结分 ”不多。

⑤呼应性大。1981 年一（6）是对竖直上抛运动的速度一时间图象的考查、而 1988 年一（ 6）却是此题的速率时间图象，差异点点。又如 1981 年一（8）和 1989 年

一（11）都是对热学图象间转化的考查，而 1987 年一（8）和 1989 一（11）又是此类问题的变形或反设。再如 1985 年六题与 1989 年三（23）题很雷同，1986 年一（6）与 1987 年一（5）很相似。

2.命题角度。

①从画图角度命题。方法之一是“ 描点法 ”， 1983 年四（3）题就是根据实验数据描点画图。另一方法是，先建立函数关系式，再赋予特殊值。如 1982 年六（3）题，在建立 M 外$=(BL_1L_2)^2/R$。Sin^2wt 之后再找几个特殊点便画出 M 外—t 图象。又如 1990 年一（10）题，只有先建立 F=GS/L · cos $(x+0)$（其中$L=\overline{BC}$，S是重心O到轴的距离，Q＝LOCB），才能确定正确的图象。

②从识图角度命题。即由图象看出所表达的物理意义。这是图象的重点，故命题有所侧重。如 1980 年一（6）， 1981 年二（4）， 1983 年三（1），1985 年六， 1988 年一（6）， 1989 年三（23）， 1990 年三（26）等。

③从图象转化角度命题。应该说它是画图与识图的综合。如 1981 年四（2）题由 P—V 图转化为 P—V 图。突出了热学图象的这一重点问题。

3.能力侧重。

①试题的新颖性。很多命题不落俗套，“ 新而不偏，难而不超、活而不怪 ”。如 1990 年二（20）题，一般这类问题都是根据磁通量的变化来确定感生电流，而此题是逆命题，并且以图象形式表述磁场的变化。又如 1990 年一（7）题，LC 电路的电量 q 随时间 t 变化规律是用图象反映的，既脱俗又灵活。

②试题的隐蔽性。关键性条件或含蓄或朦胧，或隐含。只有仔细推敲，才能从字里行间悟出道理。如 1989 年三（23）题中，不仅波的传播方向隐蔽，而且沿波的方向传播的距离也未作限制和约束，造成了此题很多的“ 可能速度 ”。又如 1990 年一（10）题中，考生最难发现的就是“ 板的重心位置确定 ”这一关键条件，一旦发现答题即自然是水到渠成。

在物理学习中，重要的一点就是从高考这样大规模、严格的考试命题中吸取有价值的东西。

六、解物理题的八种思维方法

掌握正确的思维方法，是加快解题速度，提高解题能力的重要途径，分析中学物理各类题型的求解过程，将其归纳一下，有如下几种：

（一）分步法

把研究对象的全部过程分解为若干个分过程，根据每个过程所遵循的规律依次列方程求解。

例质量为 M 的重锤从离木桩 H 的高处自由落下,打在质量为 M 的木桩上，并和木桩一起下降 h 深后停止。求泥土对木桩的平均阻力。

解：本题可分为三个过程：

1.M 自由下落，由机械能守恒定律得：

$$MgH = MV_1^2/2 \quad (1)$$

2.M 和 m 做完全非弹性碰撞，由动量守恒定律得：$MV_1=(m+M)V_2$（2）

3.M、m、受重力和阻力作用一起向下运动，由动能定理得：

$$(M+m)sh-\bar{f}h=0-(M+m)V_2^2/2 \quad (3)$$

联立（1）（2）（3）得：

$$f=m^2g1-1/[(m+m)\cdot h_3+(m+m)g]$$

（二）整体法

当涉及多个物理过程时，通过对各个过程的分析，如能找出物体在各个过程中所遵循的共同规律，则可把各个过程看作一个整体，一次性列方程求解，应用整体法解题，往往能化繁为简、化难为易，收到事半功倍的效果。

例一质量为 m 的木块用长为 t 的细线悬挂于 O 点，此时木块与水平面刚接触，现把木块拉至使悬线水平处 A，由静止释放。当木块下落至最低点 B 时绳子被拉断，木块滑过粗糙水平面后继续沿光滑斜面向上运动，到达最高点D时速度恰为零。设斜面高为$2t/3$，$\overline{BC}=t$，木块大小，空气阻力不计，求木块与 BC 面间摩擦系数。

解：木块从 A 运动到 D 可分为三个过程。因为这三个过程均可用动能定理，所以要把 A→D 作一个整体过程，一次性用动能求解最为简捷。

各力做的总功为：$W=mgl/3-\mu mgt$，动能的增量为$\Delta Ek=0$，由 $W=\Delta Ek$ 得，$mgt/3=\Delta\mu mgt$

解之得：$\mu=1/3$。

（三）等效法

对一个复杂的问题，提出一个简单的方案或设想，而使它们效果完全相同，这种方法叫等效法。在中学物理中，合力与分力、合运动与分运动，等效电路、等效电阻都是等效法的应用。

（四）假设法

在研究某些物理量或物理过程的变化时，有时要先提出一个假设，接着由假设进行推理论证，进而找出其变化的规律。

例在一个粗细均匀，两端封闭的玻璃管中用水银柱把立体分成 A、B 两部分，当把玻璃管竖直保持在热水中时，试判断水银柱移动的方向，

解：当温度由 T 升高到 T'时，两部分气体体积、压强都发生变化，为研究其变化规律，可假设温度升高，二者气体的体积都不变，在此前提下，求出两气体压强的变化量△P。比较△P 的大小，即可判断移动方向。

对气柱 A：由查理定律得 $P_A/P_A'=T_A/T_A'$ 即 $P_A'=T_A'/T_A\cdot P_A$ 得：

$\triangle P_A=P_A-P_A=(T_A'-T_A)/T_A\cdot P_A$

对气柱 B：由查理定律可得 $P_B/P_B'=T_B'$，$=T_A/T_A'$，即 $P_B'=T_A'/\cdot T_B$ 得，

$\triangle P_B=P_B'-P_B=(T_A'-T_A)/T_A\cdot T_B$

又 $P_B=P_A+Pgh$，即 $P_B>P_A$，所以 $\triangle P_B>P_A$， 故水银柱向上移动。

（五）极限法

在求解某些判断类题型时，为使结论趋向明朗，可把变量的变化外推到极限值，从而简化问题，加快解题的速度。

（六）换元法

列出的方程，当其少于未知量的个数时，可用换元法，问题便迎刃而解。

（七） 图象法

对一些物理题，作出图象，便一目了然。根据图象进行计算，一般能简化过程，甚至收到意外的收获。

（八）归纳法

即对物理过程或物理现象，先进行分析，推导归纳出其一般规律的表达式——通式，然后依据通式进行计算，最后得出答案。

例有一质量为 1 千克的放射物质，其半衰期为 5 天，求经过 40 天后，有多少种物质被衰变掉。

解：设原质量为 m，半衰期为 t。

则当经 $T=t$ 后，被衰变质量 $m_1=\frac{M_0}{2}$

经 $T=2t$ 后，被衰变质量为 $m_2=\frac{3}{4}m_0$

经 $T=3t$ 后， $m_3=\frac{7}{8}m_0=(2^3-1)/2^3m_0$

经 $T=4t$ $m_4=\frac{15}{16}m_0=(2^4-1)/2^4m_0$

经 $T=nt$ 后，$m_n=(2^n-1)/2m_0=(2t/t-1)/2t/t\cdot m$

本题 $h=T/t=10/5=8$，

则 $m_g=(2^8-1)/2^8\cdot m_0=255/256$(千克)。

第三章　化学巧点点拨

一、 重视思路训练 锻炼解题技能

二、

进行解题思路的训练，是学好化学的一个重要方面。学生的计算能力是基础知识、智力以及计算技能三者的合成，重视解题思路的训练，可使学生逐步掌握解题的思想与方法，顺利地解题，培养良好的计算的技能与技巧。

进行思路训练，培养技能技巧，应注意哪些问题呢？

（一）注重对概念、原理的准确理解和知识体系的形成与运用

掌握概念、原理是化学计算思维活动的前提，也是化学计算的目的之一。每个概念都有其特定的内涵与外延，与其它概念相互联系，从而形成知识系统。掌握好这一点，是掌握解题的技能技巧，发展思维能力的重要因素。

上述概念系统有：

1.物质的量与物质的质量、一定状况下气体的体积、微粒个数之间的关系：

微粒数 $\xrightarrow{\text{阿佛加德罗常数}}$ 物质的量 n

×摩尔质量　×质量m

↑×密度p

×BT/P

一定状况下气体体积（标况下×22.4L/mol）

2.质量百分比浓度与溶液的摩尔浓度：

$$\text{质量百分比浓度} = \frac{\text{溶质质量m}}{\text{溶液质量m}} \cdot 100\% \quad \frac{\text{溶质的物质的量n(摩)}}{\text{溶液体积v(升)}} = \text{摩尔浓度}$$

溶质的摩尔质量M

溶液的密度p

（二）总结基本题型及其解法

归纳常见的基本题型，掌握其解法，才能提高分析和解决综合计算题的能力。在平时的练习中，遇到综合题时，应首先进行剖析，将其分解为几个小问题，抓住其联系点求解。

例如，常见的过量问题可归纳为以下情况：

1.两种物质反应，可能其中一种物质过量或者两种物质均未反应完。

例 1 将 m 克铜加入到 n 克 90%的硫酸溶液中，当放出 b 升二氧化硫时（标准状况下），被还原的 H_2SO_4 一定为：

A．m/64 摩　B．m/32 摩　C．98V/22.1 克　D．n·90%/2 克

说明：铜与硫酸可能恰好完全反应，也可能有一种反应物过量或者它们均没有完全反应，因此，求被还原的 H_2SO_4。的量时，只能根据产物 SO_2 的量计算。答案为 C。

2.某反应物部分完全反应，另一部分不完全反应。

例 2 将标准状况下硫化氢 24 毫升和 30 毫升氧气混合点燃后，产生的二

氧化硫在同状况时的体积为：

（A） 24 毫升（B） 30 毫升（C） 20 毫升（D）18 毫升

说明：完全燃烧：$2H_2S+3O_2=2H_2O+2SO_2$，

不完全燃烧：$2H_2S+O_2=2H_2O+2S$，

按题意，H_2S 和 O_2 的体积比为 24：30，由此判断部分 H_2S 完全燃烧，另一部分 H_2S 不完全燃烧。本题答案为 D。

3.判断反应物过量的情况。

例 3 质量为 25.6 克的 KOH、$KHCO_3$ 混合物煅烧后冷却，其质量减少 4.9 克，可知原混合中

（A）n(KOH)＞n($KHCO_3$)

（B）n(KOH)＜n($KHCO_3$)

（C）n(KOH)=n($KHCO_3$)

（D）可以任意比混合

说明：可假设 KOH、KHC_0 以等摩相混合，此种混合物 25.6 克煅烧后质量减少 X 克，

$$KOH + HKCO_3 \overset{\Delta}{=} K_2CO_3 + H_2O$$

$$\frac{56+100}{25.6} = \frac{18}{X} \qquad X = 2.95$$

2.95＜ 4.9，可知部分 KHC_0 跟 KOH 反应，另一部分 $KHCO_3$ 发生分解，生成 CO_2 和 H_2O 本题答案为 B。

（三）解题思考原则与方法、技巧

解题思路的形成与基本知识及其体系掌握的程度有关，还与思想方法有关。要提高计算能力与思维素质，应注意思维原则和方法。

1.熟悉化原则与架桥过渡的思想。

由不熟悉的问题联想到已熟悉的概念、知识或同类型题的基本解法，用熟悉的知识与方法架设由已知到未知的桥梁。

例 4 实验测得乙烯与氧气混合气的密度是氢气的 14.5 倍,可知其中乙烯的质量百分比为：

（A） 25%（B） 27.6%（C） 72.4%（D） 75%

说明：由密度可知混合气体的平均分子量。质量百分组成与平均分子量无直接关系。由质量百分比联想到物质的量的百分比，以二组分的分子量及混合气体的平均分子量可求出物质的量的百分比，以物质的量的百分比为桥梁，根据二组分的分子量可估算出乙烯的质量百分比为 72.4%，故本题答案为 C。

2.简单化原则与简取相关思想。

思考时，应设法将复杂的综合问题剖析为相互联系的简单的基本问题来解，选取相关物、相关量进行计算。

①估算法和分子式拆合法

例 5 1.5ml、 0.02 mol/L 的石灰水三份，均加入 0.02ml/L 的 H_3PO_4 溶液，恰好完全反应，分别生成 $Ca_3(PO_4)_2$、$CaHPO_4$、 Ca（H_2PO_4），试计算所加入的 H_3PO_4 溶液的体积之比。

说明：$Ca_3(PO_4)_2$、$CaHPO_4$、 Ca（H_2PO_4）中 Ca、 P 元素的原子数之比分别为 3∶2、1∶1、1∶2。Ca（OH）$_2$ 提供 Ca 元素，H_3PO_4 提供 P 元素。因所用石灰水等浓度、等体积，所以提供的 Ca 元素量相同，那么形成上述三种盐所需磷原子的物质的量之比为 2∶3∶6，由于所用磷酸溶液浓度相等，其体积之比便为 2∶3∶6。

②代换法

例 6 某种铝、铁混合物完全溶于盐酸，再加过量 NaOH 溶液，待沉淀物全部转变成红褐色后过滤，灼烧沉淀物得红褐色粉末。测知此粉末的质量等于原铝、铁混合物的质量。试求原金属混合物中铝的质量百分比。

说明：从发生的化学反应知最后所得红褐色粉末为 Fe_2O_3，按定量测定结果及等量代换思想可判断 Fe_2O_3 中氧元素的质量百分比即为金属混合物中铝的质量百分比，本题答案为 30%。

③关系式法

例 7 将镁、铝分别完全溶于稀硝酸中，均放出氧气，且体积相等（同状况），镁和铝的质量之比是多少？

说明：金属和硝酸作用，其产物跟金属的活泼性、硝酸的浓度及温度等因素有关。本题中的两个反应均产生 N_2，N^0 由 N^{+5} 转变而来，根据题意 N_2 量相等，可知 N^{+5} 得到的电子数相等，也就是说 Mg、 AL 失去的电子数相等，有关系式 3Mg～2AL，据此可知镁和铝的质量之比为 4∶3。

④假设法

例 8 过氧化钠的样品表面已变为白色，将它溶于足量的盐酸中，所得气体在标准状况下密度为 1.696 克/升，求此样品中过氧化钠的质量百分比。

说明：题中所述气体为 O_2、CO_2 的混合气，其平均分子量为 1.696×22·4=38

设 O_2 为 1 摩，CO_2 为 X 摩，则有 32·1＋44X=38·（1＋X），解之，X=1，∴混合气中 O_2、CO_2 的物质的量相同。

∵$2Na_2O$～O_2、$N_{a2}CO_3$～CO_2。

∴样品中 Na_2O_2 与 Na_2Co_3 物质的量之比为 2∶1。

Na_2O_2的含量为 $\frac{78.2}{78.2+106.1}\cdot 100\%=59.5\%$

如上所述，如遇题“缺数据”，可以假设此数据为 X 等未知数，有时假设为 1 能使计算进一步简化。

3.整体化原则与整体究因思想。

纵观全题，综合分析，找出物质转化的由此及彼的来龙去脉，由此寻求解题方法，前面所述的关系式均体现了整体究因的思想。

例 9 有两瓶不同浓度的 NaOH 溶液，各取 100ml，分别通人标况时的 $CO_2$1.12L，完全反应后低温蒸干，分别得到不含结晶水的固体 5 克、6 克，求原两瓶中 NaOH 溶液的浓度。

说明：本题应用“抓两头带中间”的思想进行分析，首先判断低温蒸干溶液所得固体的成分。

如 1.12L CO_2 完全被 NaOH 溶液吸收生成 $NaHCO_3$，可得 $NaHCO_3$4.2 克，如这些 CO_2 完全被吸收生成 Na_2CO_3，可得 $Na_2CO_3$5.3 克。由此判断 5 克固体的

成分为 $NaHCO_3$、Na_2CO_3。6 克固体由 Na_2CO_3 及过量 NaOH 组成。

最后按题意列代数方程式求出浓度，答案分别为 0．86mol/L、 1．18 mol/L。

例 10 在金属 M 的氢氧化物 M（OH）$_2$ 溶液中，加入过量 $NaHCO_3$ 溶液，产生碳酸盐沉淀，过滤，得沉淀物 39.4 克。此沉淀溶于足量盐酸中，产生 4.48 升气体（标况）。取滤液的 1/10，恰与 70 毫升 1 摩/升盐酸完全反应，又产生气体 1.12 升（标况）。试计算，（1）沉淀物的物质的量，（2）金属 M 的原子量；（3）最初加入的 $NaHCO_3$ 的质量。

说明：沉淀物为 0.2mol， M 的原子量为 137。计算最初加入的 $NaHCO_3$ 的量可从本题整体关系着手分析，原 $NaHCO_3$ 中 C^{+4} 均转化生成 CO_2 时，有：

$$NaHCO_3 \sim CO_2，\quad \frac{84}{X}=\frac{22.4}{4.48+1.12\cdot 10} \qquad X=58.8（克）。$$

也可从题意得知 $NaHCO_3$ 中的 Na^+ 最后与 CL^- 形成 $NaCL_3$，有：$NaHCo_3$～HCL

$$\frac{84}{X}=\frac{1}{1\cdot 0.07\cdot 10} \qquad X=58.8（克）$$

即最初加入的 $NaHC_3$ 为 58.8 克。

以上所述的三次思考原则是相互联系，交叉应用的。通过练习，学生们能逐步掌握思维的方向和方式，在联想中求流畅，在究因中求变通，在寻异中求独特，进行发散思维，提出新设想，进行收敛思维，找出最优方案，培养解题技能技巧，提高思维素质。

二、用量的差比法简解一类化学题

题目特征：已知或隐含着反应混合物和生成混合物的量差。

解题方法：运用以上量的差，根据化学反应方程式中的系数关系，运用比的形式直接求解。这种计算方法思路清晰、列式简单，解法巧妙易懂。

根据题目所给的物理量，可划分为物质的量、体积、质量三种情况计算，但其解法的实质都是相同的。现举例如下：

（一）题目所给量是物质的量（即摩尔）时：

例：在一密闭的容器中进行如下的反应：$N_2+3H_2 \overset{\leftarrow}{\rightarrow} 2NH_3$，反应开始时，有 5moL$N_2$和 6mol$H_2$反应，达到平衡时，混和气体共有 10mol。问其中氨气有多少 mol？

解：设其中有氨气 X mol。

反应前后物质的量差为；（5＋6）－10=1（mol）。

根据题意和化学方程式$N_2+3H_2 \overset{\leftarrow}{\rightarrow} 2NH_3$可得：每生成 2mol的$NH_3$，混和气体就减少 2 mol（4－2）;现混和气体减少 1mol,排比例式为： 2/2=X/1，解得 X=10（mol）。

此题还可用同样的方法求解参加反应的 N_2或 H_2等。

（二） 题目所给物理量是体积时：

例：将 20ml NO_2和 NO 的混合气体，通入倒立在水槽中的盛满水的玻璃筒（带刻度）后，筒内剩下 11ml 气体。求原混合气体中 NO_2和 NO 各多少 ml？

解：设原混合气体中 NO_2占 Xml，则 NO 为（20－x） ml.

反应前后体积差：20－11=9（ml）。

根据题意和化学方程式 $3N_2+H_2O=2HNO_3+NO\uparrow$

有 3mlNO_2气体参与反应，就生成 1ml NO，体积减少 2ml；现体积减少 9ml，求有 XmlNO_2反应，则比例式 3/2=X/9，X=13.5ml，NO 为：20－13.5=6.5（ml）。

此题还可从另一角度求新生成 NO 气体的量，用同样的方法求解。

（三）题目所给物理量是质量时：

例：把 148 克碳酸钠和碳酸氢钠的混合物加热至质量不再变为止，加热后，质量变为 137 克，问原来的混合物中有多少克碳酸钠？

解：设原混合物中有 $NaHCO_3$X 克。则 Na_2CO_3为（148－X）克。

反应前后质量差为：148－137=11（克）。

根据题意和化学方程式 $ZNaHCO_3 \xlongequal{\triangle} Na_2CO_3+CO_2\uparrow+H_2O$，有 2 X 84 克 $NaHCO_3$分解，就生成 106 克 Na_2CO_3，质量减少 2×84—106（克）；现质量减少 11 克，求 X 克 $NaHCO_3$分解，同样接比例式，求得 $NaHCO_3$为 29.8 克，Na_2CO_3为 148—29.8=118.2（克）。

此类题目可以使表面看似较为复杂的混合物计算问题，化繁为简，且有一定的规律可循，中学化学有不少的题目可以归入此类。

三、用视一法速推混合物的可能组份

所谓视一法，就是把整个混合物看作一种组份（平均组份），根据混合物各组份的共同性质，建立反应通式或相应的性质关系式，求出混合物的平均原子量或平均分子量，再根据平均值定则，将各组份的原子量或分子量与其相应的平均值进行比较，从而得出正确结论。

例；某一种含杂质的 Fe_2O_3 粉末，测知其含氧量为 32%，这种杂质可能是（　　）

A.C_uO　B.Sio_2　C.Al_2O_3　D.Fe_3O_4。

分析：若 M 是一分子中含有 n 个氧原子的氧化物的分子量，化合物含氧百分含量可表示为 $\frac{N}{M}\times 100\%$。

$\frac{n\times 16}{M}\times 100\% = 35\%$，平均分子量 $M = 55n$。

n	1	2	3	4
M	50	100	150	200

由于 Fe_2O_3 分子量为 160，大于其相应的平均分子量 150，另一氧化物的分子量必小于其相对应的平均分子量。SiO_2 和 Al_2O_3 均小于其相应的平均分子量，故此题答案为 B 和 C。

视一法推断混合物的组成，同样运用了平均值定则，但又不同于一般的平均值法求解，其奥妙就在于，求得的平均值不是定值，对于各种不同的组份，有其相对应的平均值。它扩大了平均值求解法的运用范围，同时又不必引进诸如平均摩尔电子质量等新概念，使学生易于掌握和运用。

下面几例供学生们练习：

1.将含两种金属粉末的混合物 13 克，投入到足量的稀硫酸中，在标准状况下得到 11.2 升空气，此混合物可能是（　　）

（A）Fe+2n　（B）Mg+Al　（C）Fe+Mg　（D）2_n+Al

2.将两种金属粉末组成的混合物 50 克，与氯气完全反应。消耗氯气 71 克，此混合物可能的组成为（　　）。

（A）Cu+Fe　（B）Mg+Al　（C）Mg+Cu　（D）Fe+Al

3.燃烧镁和某金属组成的合金时，所形成的氧化物的质量为反应前合金质量的 2.3 倍，则另一种金属可能是（　　）

（A）钠（B）锂（C）铍（D）铝

4.含下列一种杂质的硫酸钠粉末 12.8 克，与足量的氯化钡溶液反应，生成硫酸钡沉淀 23.3 克，则这种杂质可能是（　　）

（A）K_2SO_4　（B）CuSO　（C）$ZnSO_4$　（D）$Al_2(SO)_3$

5.9.6 克下列醇的混合物与足量的金属钠反应，在标准状况下生成 2.24 升氢气，这种醇的混合物可能是（　　）

（A）乙醇、乙二醇（B）丙醇、丙三醇

（C）乙醇、丙三醇（D）丙醇、乙二醇。

参考答案：　1. C、D 2.A 3.C 4.D 5.D

四、因“题”制宜抓“特”巧解

（一）抓住电荷平衡，背面智取

例 1 将 5．1 克镁、铝合金，投入到 500 毫升 2 摩/升盐酸溶液中，金属全部溶解后，再加入 4 摩/升氢氧化钠溶液，若要达到沉淀最大值，则加入氢氧化钠溶液的体积应为（）毫升：

（A） 250（B） 425（C） 500（D） 560

解析：该题特点是有两条解答途径。一是暴露在表面的“正道”，经如下转化来逐步计算：$Mg、Al \xrightarrow{HCL} Mg^{2+}、AL^{3+}、H^{+} \xrightarrow{NaoH} Mg(OH)_2$，$Al(OH)_3$，这种解法虽然没有错，但显得呆板、繁琐；二是背面有一条暗道，即以不参加反应的离子的电荷平衡入手，因为原溶液中只有 CL^-不参加反应，加入溶液中的也只有 Na^+物质的量必定相等，而原溶液中含 CL^-1 摩。所以需加进 1 摩 NaOH，则 NaOHl 溶液体积是 250 毫升，答案为 A。

（二）抓住实验常识，推理巧解

例 2 在 30 毫升 18 摩/升的硫酸溶液中加入足量的铜片并加热,充分反应后被还原的硫酸的物质的量为（　　）

（A）0.54 摩　（B）0.27 摩　（C）小于 0.27 摩　（D）在二者之间

解析：30 毫升 18 摩/升硫酸溶液中含有 0.54 摩分子，与足量铜反应，化学方程式为：

$Cu+2H_2SO_4$（浓）$\xlongequal{\triangle}CuSO_4+SO_2\uparrow+2H_2O$

应有 0.27 摩 H_2SO_4分子被还原。这是部分学生容易做出的错误判断。题中隐含着一个很重要的条件，浓 H_2SO_4与铜反应的实际过程中，浓硫酸浓度要逐渐降低，浓硫酸要变成稀硫酸，这是实验常识。抓住这个常识，联系铜不与稀硫酸反应的性质，实际参加反应的 H_2SO_4必小于 0.54 摩，所以被还原的 H_2SO_4也必定小于 0.27 摩。此题答案为 C。

有的题目中，巧解因素往往隐含在一些化学常识中，要注意思考。

（三）抓住过量情况，周密分析

例 3 在 0℃，　1.01 × 10^5Pa 时，下列哪组气体混合后，平均分子量能达到 50 的是（　　）

（A）N_2、O_2　（B）SO_2、HB_r　（C）CO_2、SO_2、（D）HI、CL_2

解析：同学们很容易选出 C，但对 D 就会因为考虑不周而误判。有的同学忽视 HI 和 CL。混合要发生反应，简单地认为 HI、CL_2混合气体的分子量必大于 50；有的同学认为 HI 和 CI_2反应后生成 HCL 气体和 I_2固体，留下气体是纯气体，分子量等于 35.6。实际上，当 HI 和 CL_2反应时，反应后气体成分有三种可能：一是纯 HCL（恰好完全反应）；二是 HI 和 HCL 混合气体（HI 过量时）；三是 CL_2 HCL（CL_2过量时）。显然后两种情况分子量可能达到 50。所以应选 C．D。

（四）抓住离子数比，大胆判断

例 4 在 10 毫升 0.1 摩/升的硫酸铜溶液中加入 10 毫升 0.15 摩/升的氢氧化钠溶液时，产生一种蓝色沉淀。经测定，溶液中的铜离子几乎完全沉淀。该沉淀的主要成分是：（　　）

（A）$Cu(OH)_2$　（B）$Cu_2(OH)_2SO_4$　（C）$3Cu(OH)_2CuSO_4$　（D）$Cu_2(OH)_2$

解析：限于知识基础，有的学生错误地选择了 A。其实是一例信息给予题，解答时要敢于抓住条件，大胆判断。据题意，反应中 Cu^{2+}、OH 必定完全都进入沉淀物，那么产物中 Cu^{2+}、OH^-离子的个数比必等于 2∶3（实质上这是唯一的判断线索），对照四个待选答案，只有选 C。

（五）抓住关键点，分段思考

例 5 在天平两托盘上分别放置等体积含 n 摩尔 NaOH 的溶液，天平平衡。现分别向两个烧杯中投入 A 克铝片和 A 克硅粉，待反应完成时天平仍平衡。则下列各种情况中，可能的是（　　）

（A）　A＞27n（B）　A＝18n（C）A＝14n（D）　A＝27n。

解析：由于原溶液质量中投入物质的质量分别相等，反应后天平能否平衡只需比较放出 H_2 质量是否相等。根据下列反应关系：

$Si+2NaOH+H_2O=Na_2SiO_3+2H_2\uparrow$ $+2AL+2NaOH+2H_2O=2NaALO_2+3H_2\uparrow$

14（n）克 n 摩 2n（克）27（n）克 n 摩 3n（克）。

只要抓住 14n、27n 两个关键点就可以分段分析。

若 A≥27n 时，两盘中 NaOH 都反应完，所以投铝片盘放出 $H_2$3n 克，投硅粉盘放出 $H_2$2n 克，硅粉盘要下沉。

若 A≤14n 克时，两盘中硅、铝都完全反应，等质量铝、硅反应放出 H_2 为后者多，所以的投硅粉盘要上升。

那么若要天平平衡，只有当 14＜A＜27n 时才可能。所以，此题答案为 B。

（六）抓住特殊反应，直觉筛选

例 6 将 KCL、C_rCL_3 两种固体混合共熔，可制得化合物 X。X 中含 K、U、Cr 三种元素。将 1.892 克 X 中的 Cr 元素均氧化成 $Cr2O_7^{2-}$，可以从过量的 KI 溶液中氧化出碘 2.667 克。反应式为：

$$Cr_2O_7^{2-}+6I^-+14H^+=2C_1^{3+}+3I_2+7H_2O$$

如取溶有 1．892 克×X 溶液,加入过量的硝酸银溶液,可得 4.52 克 AgCl 沉淀，则表示 X 的化学式为（　　）

（A）$K_3Cr_2cl_7$　（B）$K_3LCr_2CL_5$　（C）$K_3Cr_2CL_9$　（D）K_2CrCL_4。

解析：同学们很容易通过一步步计算，再得到答案。但只要抓住：“熔融生成”这个特点，即

$$KCL+CrCL_3\overset{溶化}{=}KCLn\cdot CrCL_3m$$

X 的化学式必定可表示成（KCL）m·（$CrCL_3$）m。对照四个待选答案，凭直觉也可选出答案 C。

（七）抓住特征性质，避入俗套

例 7 常温下将 10 克下列固体与 90 克水充分反应混合，所得溶液的百分比浓度最小的应该是（　　）

（A）$CuSO_4\cdot 5h_2O$　（B）Na_2O_2　（C）CaO　（D）KNO_3。

解析：题中隐含着一个不可忽视的条件，CaO 与水反应生成 Ca（OH）$_2$，Ca（OH）$_2$。属微溶性物质，其溶解度在 0.l～1 克之内，而其它物质均易溶于水，所以选 C。若发现不了隐含条件，必定会陷入“计算”误区，错选 A。

五、突破思维定势

思维定势是一种普遍的心理现象，是指用某种思维模式解决某类问题后，当解决相类似的新问题时，就会套用以前的思维模式解决问题的倾向。突破它的关键就在于：严格审题，全面正确领会题意，透过问题的实质和关键，跃过命题精心设计的“陷井”，避免错解或漏解。

例 10.lmol/L 硝酸亚铁溶液 100ml，加入适量的氢氧化钠溶液，使亚铁离子恰好完全沉淀，然后把沉淀和混合液体一起小心加热，蒸干水份到质量不变。则灼烧后固体物质的量为（　　）克

（A）0.6 克　（B）0.8 克　（C）1.38 克　（D）2.18 克

解析：此题计算不太难，但暗伏“陷井”，如果审题不清，易误入“恰好反应，使亚铁离子完全沉淀”、“固体移至坩锅中灼烧”之中产生定势思维：以为沉淀是过滤后灼烧，最后得到 Fe_2O_3 粉末。根据铁原子守恒，质量为：

0.1×0.1×1/×160=0.8（克）错选答案 B。

其实，命题者并未言明沉淀进行了过滤。恰恰相反，“沉淀和混合溶液一起小心加热，蒸干水份”，则灼烧固体应为 Fe（OH）。和 NaO。的混合物，最后产生的是 Fe_2O_3 和 $NaNO_2$ 固体，其质量分别根据质量守恒定律得：

据，$Fe(NO_3)_2$∽Fe^{2+}+∽$1/2Fe_2O_3$，据 $Fe(NO_3)_2$∽$2NaNO_3$∽$2NaNO_2$

0.1×0.1mol　0.8 克　0.1×0.1mol　1.38 克

灼烧后固体质量为：0.8＋1.38=2.18（克）。选 D。

例 2 将 2.3 克金属钠用铝箔包好，刺些小孔后投到足量的水中，反应完毕后所得氢气的体积（在标准状况下）应为（　　）

（A）1.12 升（B）＞1.12 升（C）＜1.12 升（D）0.156 升

解析：依题意，实验中铝箔的作用是减少水与钠的接触面积，以减轻反应的剧烈程度，从而使不少学生形成定势“铝箔不与水反应”。命题者巧布“陷井”，蓄意在试题中掩盖了铝还能跟钠与水反应生成的氢氧化钠溶液作用产生氢气这一重要信息，目的是诱使人单纯地从钠与水反应的角度求解 H。的体积，因而错选答案 A。基实本题　的正确选项应为 B。

例 3 将氯化钾与二氧化锰的混合物 20.95 克,加热到质量不再减少为止，剩余固体质量为 16.15 克，向剩余物中加入过量浓硫酸并加热，放出气体与过量 KI 溶液反应，生成的碘用硫代硫酸钠溶液吸收（反应式为 $2Na_2S_2O_3+I_2=NaI+Na_2S_4O_6$）。问需要 2mol/L 的 $Na_2S_2O_3$ 溶液多少毫升才能把生成的碘全部吸收？

解析：这是一道计算型信息给予题。命题者故意布下“陷井”：加热到质量不再减少为止，剩余固体质量为 16．15 克，它是 和 的混合物。如果定思维按 $4HCL+MnO_2=MnCL_2+CL_2\uparrow+2H_2O$ 进行求解。则造成错误答案 25ml。

其实 MnO_2 要过量 0.1×3/4=0.75（mol）。过量的 MnO_2 要继续氧化酸性条件下的 CL^- 至完全（酸性条件下 Mno_2 物质的量/HCI 物质的量≥1 时）。

解：依题意有 $2KCLO_3 \overset{Mno_2}{\underset{\Delta}{=}} 2KCL + 3O_2\uparrow$

＞ Mol96 克

Xmol(20.95-16.15)克

解得 X=0.1mol（剩余 KCL 固体），则剩余固体中在过量酸性条件下全部氧化 MnO_2 为(16.15-0.1×74.57/87=0.1(mol)。

∵KCL/MnO_2=0.1:0.1=1:1

∴KCL 中 CL^-在过量酸性条件下全部氧化为 CL_2，得关系式：4KCL∽2cl_2∽2I_2∽4 $Na_2S_2O_3$

即 KCL∽$Na_2S_2O_3$

1mol　1mol

∴需 $Na_2S_2O_3$ 溶液体积为 0.1/2×1000=50（ml）

答：需要 2mol/L 的 $Na_2S_2O_3$ 溶液 50ml 才能把生成的碘全部吸收。