FEN XING

分形

大自然的艺术构造

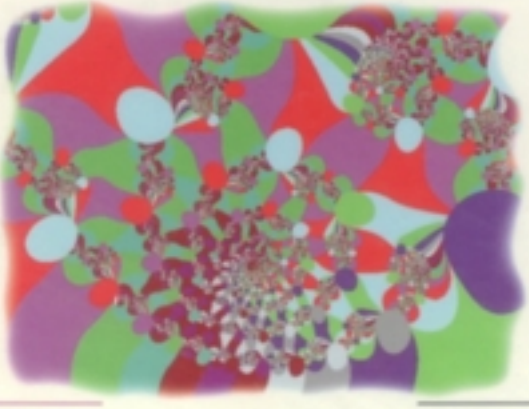
汪富泉 李后强 著

山东教育出版社

新·视·野·丛·书 第1辑

主编·曾国屏

副主编·刘 兵·刘华杰·杨君游



新视野丛书（第 1 辑）

●**顾　问**　朱光亚张玉台张岱年倪维斗
●**主　编**　曾国屏
●**副主编**　刘兵刘华杰杨君游
●**编委（以姓氏笔画为序）**
任晓明 刘　兵 刘华杰 刘啸霆
李后强 杨君游 吴　彤 吴国盛
何国祥 张建华 陈　忠　范冬萍
胡　皓 胡新和 曹南燕 曾国屏
●**丛书策划**　隋千存 曾国屏 乔　青

新视野丛书（第 1 辑）

●**浑沌之旅——科学与文化**刘华杰＼著
●**分形——大自然的艺术构造**汪富泉＼李后强＼著
●**生长的旋律——自组织演化的科学**吴彤＼著
●**350 年历程——从费尔马到维尔斯**胡作玄＼著
●**传统与后现代——科学与中国文化**董光壁＼著
●**克丽奥眼中的科学——科学编史学初论**刘兵＼著
●**灵捷制造——21 世纪的生产和管理战略**罗振壁＼周兆英＼主编
●**开拓市场——高技术产品的市场营销**何国祥＼著
●**汽车文化——中国面临的挑战**曹南燕＼刘立群＼著
●**信息高速公路——面向未来的震荡**严康敏＼赖茂生＼著

责任编辑＼隋千存
装帧设计＼张晶

浑沌＼分形图制作：刘华杰

本丛书封面、封底图形系采用数值迭代方法，在微机上编程计算出（浑沌＼分形图）来的。这些图形展示了绚丽多彩、气象万千的非线性自组织世界图景，体现着科学之美，也蕴含着深刻的哲理。

新视野丛书（第1辑）
分　形
——大自然的艺术构造
汪富泉　李后强　著
*
山东教育出版社出版发行
（济南经九路胜利大街）
山东新华印刷厂德州厂印刷
*
850毫米×1168毫米 32开　7.75印张　5插页　160千字
1996年12月第1版　1996年12月第1次印刷
印数1—2000
ISBN　7—5328—2331—8/C·　2155
定价：11.50元

后　　记

本书参考了国内外众多专家学者的研究成果，部分室员资料是国内外学者赠送的，因而它是集体智慧的结晶。由于另方面原因，其中一部分文献未能收录于参考文献之中，我们已尽力在书中反映出原作者的工作，并在此向各位编、著、译者和馈赠资料的朋友门表示衷心的感谢。

四川联合大学艾南山教授、丁晶教授，清华大学曾国屏教授，北京大学刘华杰博士，四川师范学院蔡择昌教授、唐孝奎副教授，对作者的工作给予了极大的关心写支持，在此谨向他们表示要心的感谢。

作者非常感谢梅雪珍、汤忆玲女士。她们不辞辛劳，乐于奉献，使作者有大量时间从事本书写作。她们还在资料准备、书稿打印与校对等工作中付出了辛勤的劳动。没有她们的奉献，本书是难以在较短时间内完成的。

四川师范学院数学系微机室程国忠、谭代伦、尚明生、万俊、陈强等老师在书稿打印过程中给予了多方面的热情帮助，在此逢向他们表示衷心的感谢。

作者 1996 年 6 月

参 考 文 献

[1] 郝柏林·分形与分维.科学， 1985， 38 （1）：9～17

[2] （日）高安秀树著·分数维.沈步明等译.北京：地震出版社，1989

[3]Mandelbrot B B. Fractal：Form， Chance and Dimensions，w.H.Freeman and Company，1977

[4] 文志英，井竹君.分形几何与分维数简介.数学的实践与认识，1995（4）：20～34

[5] （英）法尔科内 KJ 著.分形几何——数学基础及其应用.曾文曲等译.沈阳：东北工学院出版社， 1992

[6] 汪富泉，李后强.分形几何与动力系统.哈尔滨：黑龙江教育出版社， 1993

[7] 蒲保明，蒋继光，胡淑礼编.拓扑学.北京：高等教育出版社，1985

[8] 汪富泉，罗朝盛等，G—P 算法的改进及其应用.计算物理，1993，10（3）：345～351

[9] 李后强，汪富泉.分形理论及其在分子科学中的应用.北京：科学出版社， 1993

[10] 董连科.分形理论及其应用.沈阳：辽宁科学技术出版社，1991

[11] 李后强，程光钺.分形与分维.成都： 四川教育出版社，1990

[12] 汪富泉，罗朝盛等.关联维数在油气勘探中的应用.中国海上油气（地质）， 1992，6 （6）： 60～67

[13] 汪富泉，罗朝盛，混沌理论在油气预测与布井决策中的应用.运筹学杂志， 1995， 14 （1）： 43～47

[14] 汪富泉，罗朝盛.非均匀介质中地震波能量的分形分析.见：胡尊国等编。全国第一届地质科学与分形学术讨论会论文集.武汉：中国地质大学出版社， 1993.60～66

[15] 汪富泉，罗朝盛等.Hurst 指数与容量维在油气检测中的应用.石油地球物理勘探. 1996， 31（2）： 184～189

[16] 汪富泉.阳新统油气储集与渗流结构的分维研究.见：周衡孟等编.中国青年科技论文精选.北京：中国科学技术出版社，1994.535～538

[17]Grassberger P,Procaccia.Measuring the Stranges ofStrange Attractors. Physica, 1983，7D，189～208

[18] 汪富泉，李后强.一类分形集及其刻划.应用数学， 1994，7（1）：60～64[19] 汪富泉，李后强.有面积的曲线的性质及高维推广.数学研究与评论， 1994， 14 （4）： 579～584

[20] Bahcall N A.Ann.Rev.Astron，Astrophys.1988（26）： 631

[21] Fang L Z，MO H J，Bj H G.Selfaffinity of thf 1arge scalestructure of the universe，Modern Phys. Letters A，1987，

2（7）：473～478
[22] 夏晓阳，邓祖淦，邹振隆， IRAS 星系大尺度分布的分维.中国科学 A， 1991 （8）： 867～875
[23]（美）格莱克 J 著.混沌开创新科学.张淑誉译.上海：上海译文出版社， 1990
[24]（加）凯依 BH 著.分形漫步.徐新阳等译.沈阳：东北大学出版社， 1994
[25] Mandelbrot B B.Science，1967，155：636
[26] Fedor J.Fractals.P1enum，1988
[27] 李后强，艾南山.分形地貌学及地貌发育的分形模型.自然杂志， 1992 （7）： 516～519
[28] 励强等.地理学报， 1990，45 （11）： 110
[29] Ohta S，Honjo H.Phys.Rev.Lett.，1988，60：611
[30] 高鹏.小流域地貌的分形研究.兰州大学硕士论文.1993
[31] 艾南山，侯文贵.流域演化动力学的初步研究.中国地质灾害防治学报，1993 （2）
[32] Denis N，Steve S.PAGEOPH，1989，131（1/2）： 55
[33] TakayuKi H.PAGEOPH，1989，131（1/2）：107
[34] King G.PAGEOPH，1983，121：761～815
[35] Sadovskiy M A. Izvestiya.Earth Phys.，1984，20：87～96
[36] Hjrata T，Satoh T， Ita K.Geophys.J.Roy.Astr.Soc.，1987，90：369～374
[37] wu R S，AKi K.PAGEOPH，1985，123：805～818
[38] Okubo P，Aki K.EOS，1987，64：766
[39] SChOlz C H，Aviles C A.Earthquakes Notes，1985，326：20
[40] 汪富泉.断层与裂缝系统的分形结构研究，见：辛厚文编：分形理论及其应用.合肥：中国科学技术大学出版社，1993，307～309
[41] 谢和平.大理石微观断裂的分形（fractal）模型研究.科学通报， 1989 （5）： 365～368
[42] 洪时中，洪时明，地学领域中的分维研究：水系、地震及其它.大自然探索.1988 （2）： 33
[43] Turcotte D L.PAGEOPH，1989，131（1/2）：117[44] Drew L J，Schuenemeyer J H，Bawiec w J.U.S.Geol.Survey Prof.Paper 1982（26）：1252
[45] Cargill S M，Root DH，Bailey E H.Econ.Geol.，1981，76：1081～1095
[46] Kate A J，Thompson A H.Phys.Rev.Lett.1985（54）：1325～1328
[47] Nolte D D，Pyrak-Nolte L J，Cook G w.PAGEOPH，1989，131（1/2）：77
[48] 汪富泉，罗朝盛等.油气预测的新方法研究.见：王荫清等编.运筹与决策.成都：成都科技大学出版社， 1992，1830～1836[49]

Barnsley M F.Fractals Everywhere.Orlando FL：Academic Press，1988
[50] Mareschal JC.PAGEOPH，1989，131（1/2）：136
[51] BarenblattGl， et a1. Oceanology，1984，24：695～697
[52] Malinverno A.PAGEOPH，1989，131（1/2）：96
[53] DubucB，et al.Proc.R.Soc.Lond.A，1989，425：113
[54] Wang FQ，LiHQ.The Study of Sefl-organization andPercolating Gritia1 State on Fault and Fissure System.in：Chen M Y ed.Proc.of SCI’94，Vol.2.wuhan：Huazhong University of Science and Technology Press.1995，1192～1195[55] 罗朝盛，汪富泉.用分形技术重建声测井曲线的算法及其应用. 四川师范学院学报（自然科学版）， 1995， 16 （4）：303～307
[56] Mandelrot B B，et al.Nature，1984，308：721[57] 沈步明.准晶体晶格的数学表达式及其分数维结构维数计算.科学通报.1989（5）： 362～364
[58]（美）尤金斯H等.分形语言.科学（中译本）， 1990， 263（2）：24～32
[59] 王方石。L-系统在分形中的应用.见：辛厚文编：分形理论及其应用.合肥：中国科学技术出版社， 1993， 90～93
[60] （加）杰恩RV著，植物生长模式与形态的数理研究方法. 王本楠等译.北京：学术书刊出版社， 1990
[61] 张颖清.生物全息诊疗法.济南：山东大学出版社， 1987
[62] 黄立基，李后强.分形.见：魏宏森等编著.开创复杂性研究的新学科，成都： 四川教育出版社， 1991， 562～642
[63] 李后强，汪富泉.蛋白质的谱维数.科学通报， 1993（8）：705～707
[64] Li N Q， wang FQ， ZhaO HM.Fractal Reactions onEnzvmeSurfaces.Chin.J.Chem.Phys.1995，8（2）：162～169
[65] Li H Q，Wang FQ. Structural entropy and correlationdimension for a biological macromoleCule.Chem.Phys. Lett.，1994，229：257～261
[66]LiHQ， Li Y， Zhao H M， Fractal analysis of protein chainconformation.Int.J.Biol. Macromol.1990，12（1）：6～8[67] Li HQ， Chen S H， Zhao H M. Fractal structrue and con-formation entropy of Protein chain.Int.J.Biol，Macro-mol.1990，12（6）：374～378
[68] Li HQ，Chen S H，Zhao H M. Fat fractal and multifractalsfor protein and enzyme surfaces.Int.J.Biol.Macromol.1991，13（4）：210～216
[69] Li HQ， Li Y ， Zhao H M. Fractal mechanisms for theallosteric effects of Proteins and enzymes，Biophys.J，，1990，58（11）：1313～1320
[70] Li HQ，Wang FQ. Protein Conformation and

EnzymaticKinetics. in ：lannaccone P ed. Fractal Geometry in Biologi-cal Systems.Boca Raton FL：CRC Press INC，1996
[71] 李后强，张国祺，汪富泉.分形理论的哲学发初.成都：四川大学出版社.1993

引　言

新世纪的钟声即将敲响。

回顾即将过去的一个世纪数学的发展历程，我们可以欣喜地看到，一个世纪以来，数学家们在追求数学理论的完美性和数学应用的广泛性上所做出的孜孜不懈的努力和所取得的丰硕成果：孤子、混饨、分形、小波（wavelet）……

在层出不穷的新学科中，美籍法国数学家曼德尔布罗特（B.B.Made1brot）于本世纪 70 年代中期所开创的分形几何（fractalgeometry）理论在上述两个目标的追求上都取得了突出成就，被誉为开创了 20 世纪数学的重要阶段。

一方面，分形几何中的主要角色都是由传统数学中的“病态”结构或数学“怪物”所扮演的：三分康托（G.Cantor）集、维尔斯特拉斯（K.Weierstr-ass）函数、科契（Von Koch）雪花曲线、皮亚诺（G.Peano）填充空间的曲线等等。曼德尔布罗特把它们放在分形几何中统一处理，使人们看到了过去那些被认为是“病态”的“怪物”展现出新的规则和奇妙无比的美。另一方面，使科学家们惊讶并欢迎的是，分形几何为研究自然界中形形色色的复杂形状和结构提供了十分简洁的工具，因而在天文、地学、物理、化学、生物、医学、材料乃至语言学、经济学等领域得到了十分广泛的应用。

从 80 年代中期开始，分形“热”了，成了科学界叫得最响的名词，吸引了几乎所有领域科学家和社会工作者的注意。有关分形出版了上百部专著，在国际期刊上发表了几千篇专业论文。美国物理学家惠勒（J.A.Wheeler）说：“明天谁不熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人。”

分形研究是非线性科学的前沿之一，也是哲学家们感兴趣的课题之一。世界本质上是非线性的，而分形是复杂非线性特征的一种几何表现。分形概念与自相似是密不可分的，没有自相似就没有分形，但有自相似却未必有分形。从自相似概念到分形概念，在思维上有一个巨大的质的“飞跃”。对于大自然而言，自相似性是普遍存在的，但从来没有绝对的自相似。“分形”是一个科学术语，仍然只是一种人为的抽象，虽然在某种意义上说它比“整形”更能反映事物的本来面目。分形概念表达了 20 世纪下半叶人们看世界的一种新的方式，但它仍然是一种普通的科学模型，有好的方面，也同样有不适当之处。时至今日，分形理论所包含的深刻内涵及其哲学启迪还远未揭示出来。

科学新概念的诞生，往往需要有一个整体的社会意识。 20 世纪初之所以有许多新概念问世，是由于当时社会整体的技术有了很大的进展，而且经典的理论已开始与实验所发现的事实发生冲突。另一方面，科学的哲学思想也为新概念的建立作了准备。分形概念的诞生也有类似的原因，决定论框架中的随机性的发展导致了混沌动力学的建立，而这些优美的动力学几何图象则鲜为人注意，分形正是在这方面显露才华，并引起各个领域的研究工作者的注意。

但是，分形并没有对时空给出一个实质性的新概念。而且依照分形的概念，在动力学的意义上对系统的行为的理解仍然获益不多。如果说多标度分形的理论使对这些形态的认识大大向前迈出了一步，那么概念性的突破仍然太少，因为它很快又返回到了“热力学”的类比之中去了。分形理论仍然处于发展之中，而且空间广阔。

来自科学哲学界的情报表明，一些富于探索精神的哲学家们，正在试图把分形的概念和思想抽象为一种方法论——分形论，它是一种辩证的思维方法和认识方法。部分与整体的关系是一对古老的哲学范畴，也是分形理论的研究对象。把复杂事物分解为要素来研究是一条方法论原则——简单性原则。哲学史上，人们很早就认识到，整体由部分组成，可通过认识部分来映像整体。系统中每一个元素都反映和包含整个系统的性质和信息，即元素映现系统，这可能是分形论的哲学基础之一。

从分析事物的视角方面来看，分形论和系统论分别体现了从两个极端出发的思路。它们之间的互补恰恰完整地构成了辩证的思维方法。系统论由整体出发来确定各部分的系统性质，它是沿着宏观到微观的方向考察整体与部分之间的相关性。而分形论则相反，它是从部分出发来确立整体的性质，沿着微观到宏观的方向展开的。系统论强调了部分依赖于整体的性质，而分形论则强调整体对部分的依赖性质。于是二者构成了“互补”。

分形论的提出，或许具有以下几个方面的意义。首先，它打破了整体与部分之间的隔膜，找到了部分过渡到整体的媒介和桥梁，即整体与部分之间的相似性。

其次，分形论的提出，使人们对整体与部分的关系的思维方法由线性进展到非线性的阶段，并同系统论一起，共同揭示了整体与部分之间多层面、多维度的联系方式。分形论从一个新的层面深化和丰富了整体与部分之间的辩证关系。

再次，分形论为人们认识世界提供了一种新的方法论，它为人们从部分中认知整体，从有限中认知无限提供了可能的根据。

最后，分形论的提出进一步丰富和深化了科学哲学思想中关于普遍联系和世界统一性的原理。这主要表现在两个方面：一是分形论从一个特定的层面直接揭示了宇宙的统一图景；同时，分形论所揭示的整体与部分的内在联系方式是对宇宙普遍联系与内在统一的具体机制的一种揭示。二是关于世界物质统一性，分形论可以从共时态与历时性两个维度上展开说明：一方面在自然界中蕴含着历史的演化与嬗变的信息，另一方面部分与分形整体之间普遍的相似性编织了一张世界统一的网络。

分形论的产生，也是古代哲学思想在近代自然科学中的重现和历代思想家们智慧火花的积累。古代哲学为分形论的诞生做好了思想准备，而分形论的创立则为现代哲学关于普遍联系和统一性的原理提供了最新的数理科学根据。

世纪之交，世界各国都面临着机遇与挑战，其焦点突出表现在科技与教育上。最近，据一份名为《课程改革：关于科学、数学及技术教育的革新》的报告报道，经济合作与发展组织的 13 个成员国——美国、澳

大利亚、奥地利、加拿大、法国、德国、爱尔兰、日本、荷兰、挪威、英国、西班牙及瑞士正在加强中、小学课程的实践性，使之与学生日常生活联系得更加紧密。报告还显示，大学里的科学家和数学家们也在转变思想，更新旧的教育观念。长期以来，我国数学教育与实践严重脱节的现象曾引起大批有识之士的极大关注。著名数学教育学家张奠宙教授对此现象极度忧虑。他曾给李岚清副总理写信，希望我国及早进行数学教育改革，加强数学教育的实践性，并希望这一重要问题能引起政府和社会的普遍重视。

现代教育理论认为，数学教育的主要目的之一是让学生获得对数学的审美能力，发展学生良好的个性品质，培养他们的创造性思维能力。我们认为，这些能力的培养，其出发点和归宿在于解决科技、经济和社会中的实际问题。因此，在数学教育中，数学的美及其应用的广泛性都具有十分重要的作用。从这个意义上说，分形具有不可忽视的重要性。尤金斯（H. Jurgens）等写道："分形几何除了用于描述自然物体的复杂性以外，它还能为数学教育的振兴提供一个好机会。分形几何的理论是直观可见的，它所涉及的形态具有巨大的审美感染力和各种各样的用途。因而分形几何可有助于反驳那种认为数学枯燥无味和难于接近的看法，并可激发学生去了解这一令人迷惑和激动人心的研究领域。"

本书力图展示分形的数学美和它的各种应用。在分形的数学基础一篇中，除介绍分形与分维的必备知识外，我们给出了不同类型的数学实例，并指出了它们与自然界的真实物体或过程的联系。我们可以看到，正是那些在传统数学中被称为"病态"的结构，在这里展现出奇异的数学美，表现出与大自然的和谐与统一。第二篇介绍分形的各种应用，以此来揭示大自然自组织结构的分形艺术。由于分形理论的应用领域众多，难以一一枚举，且很多领域的研究成果异常丰富；因此，全面介绍分形的应用非作者的能力之所及，难免有很多好的素材没有选到，请读者朋友鉴谅。

限于作者水平，书中定有不少不妥和错误之处，望读者朋友们批评指正。

引　言

新世纪的钟声即将敲响。

回顾即将过去的一个世纪数学的发展历程，我们可以欣喜地看到，一个世纪以来，数学家们在追求数学理论的完美性和数学应用的广泛性上所做出的孜孜不懈的努力和所取得的丰硕成果：孤子、混饨、分形、小波（wavelet）……

在层出不穷的新学科中，美籍法国数学家曼德尔布罗特（B.B.Made1brot）于本世纪 70 年代中期所开创的分形几何（fractalgeometry）理论在上述两个目标的追求上都取得了突出成就，被誉为开创了 20 世纪数学的重要阶段。

一方面，分形几何中的主要角色都是由传统数学中的“病态”结构或数学“怪物”所扮演的：三分康托（G.Cantor）集、维尔斯特拉斯（K.Weierstr-ass）函数、科契（Von Koch）雪花曲线、皮亚诺（G.Peano）填充空间的曲线等等。曼德尔布罗特把它们放在分形几何中统一处理，使人们看到了过去那些被认为是“病态”的“怪物”展现出新的规则和奇妙无比的美。另一方面，使科学家们惊讶并欢迎的是，分形几何为研究自然界中形形色色的复杂形状和结构提供了十分简洁的工具，因而在天文、地学、物理、化学、生物、医学、材料乃至语言学、经济学等领域得到了十分广泛的应用。

从 80 年代中期开始，分形“热”了，成了科学界叫得最响的名词，吸引了几乎所有领域科学家和社会工作者的注意。有关分形出版了上百部专著，在国际期刊上发表了几千篇专业论文。美国物理学家惠勒（J.A.Wheeler）说：“明天谁不熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人。”

分形研究是非线性科学的前沿之一，也是哲学家们感兴趣的课题之一。世界本质上是非线性的，而分形是复杂非线性特征的一种几何表现。分形概念与自相似是密不可分的，没有自相似就没有分形，但有自相似却未必有分形。从自相似概念到分形概念，在思维上有一个巨大的质的“飞跃”。对于大自然而言，自相似性是普遍存在的，但从来没有绝对的自相似。“分形”是一个科学术语，仍然只是一种人为的抽象，虽然在某种意义上说它比“整形”更能反映事物的本来面目。分形概念表达了 20 世纪下半叶人们看世界的一种新的方式，但它仍然是一种普通的科学模型，有好的方面，也同样有不适当之处。时至今日，分形理论所包含的深刻内涵及其哲学启迪还远未揭示出来。

科学新概念的诞生，往往需要有一个整体的社会意识。 20 世纪初之所以有许多新概念问世，是由于当时社会整体的技术有了很大的进展，而且经典的理论已开始与实验所发现的事实发生冲突。另一方面，科学的哲学思想也为新概念的建立作了准备。分形概念的诞生也有类似的原因，决定论框架中的随机性的发展导致了混沌动力学的建立，而这些优美的动力学几何图象则鲜为人注意，分形正是在这方面显露才华，并引起各个领域的研究工作者的注意。

但是，分形并没有对时空给出一个实质性的新概念。而且依照分形的概念，在动力学的意义上对系统的行为的理解仍然获益不多。如果说多标度分形的理论使对这些形态的认识大大向前迈出了一步，那么概念性的突破仍然太少，因为它很快又返回到了“热力学”的类比之中去了。分形理论仍然处于发展之中，而且空间广阔。

来自科学哲学界的情报表明，一些富于探索精神的哲学家们，正在试图把分形的概念和思想抽象为一种方法论——分形论，它是一种辩证的思维方法和认识方法。部分与整体的关系是一对古老的哲学范畴，也是分形理论的研究对象。把复杂事物分解为要素来研究是一条方法论原则——简单性原则。哲学史上，人们很早就认识到，整体由部分组成，可通过认识部分来映像整体。系统中每一个元素都反映和包含整个系统的性质和信息，即元素映现系统，这可能是分形论的哲学基础之一。

从分析事物的视角方面来看，分形论和系统论分别体现了从两个极端出发的思路。它们之间的互补恰恰完整地构成了辩证的思维方法。系统论由整体出发来确定各部分的系统性质，它是沿着宏观到微观的方向考察整体与部分之间的相关性。而分形论则相反，它是从部分出发来确立整体的性质，沿着微观到宏观的方向展开的。系统论强调了部分依赖于整体的性质，而分形论则强调整体对部分的依赖性质。于是二者构成了“互补”。

分形论的提出，或许具有以下几个方面的意义。首先，它打破了整体与部分之间的隔膜，找到了部分过渡到整体的媒介和桥梁，即整体与部分之间的相似性。

其次，分形论的提出，使人们对整体与部分的关系的思维方法由线性进展到非线性的阶段，并同系统论一起，共同揭示了整体与部分之间多层面、多维度的联系方式。分形论从一个新的层面深化和丰富了整体与部分之间的辩证关系。

再次，分形论为人们认识世界提供了一种新的方法论，它为人们从部分中认知整体，从有限中认知无限提供了可能的根据。

最后，分形论的提出进一步丰富和深化了科学哲学思想中关于普遍联系和世界统一性的原理。这主要表现在两个方面：一是分形论从一个特定的层面直接揭示了宇宙的统一图景；同时，分形论所揭示的整体与部分的内在联系方式是对宇宙普遍联系与内在统一的具体机制的一种揭示。二是关于世界物质统一性，分形论可以从共时态与历时性两个维度上展开说明：一方面在自然界中蕴含着历史的演化与嬗变的信息，另一方面部分与分形整体之间普遍的相似性编织了一张世界统一的网络。

分形论的产生，也是古代哲学思想在近代自然科学中的重现和历代思想家们智慧火花的积累。古代哲学为分形论的诞生做好了思想准备，而分形论的创立则为现代哲学关于普遍联系和统一性的原理提供了最新的数理科学根据。

世纪之交，世界各国都面临着机遇与挑战，其焦点突出表现在科技与教育上。最近，据一份名为《课程改革：关于科学、数学及技术教育的革新》的报告报道，经济合作与发展组织的 13 个成员国——美国、澳

大利亚、奥地利、加拿大、法国、德国、爱尔兰、日本、荷兰、挪威、英国、西班牙及瑞士正在加强中、小学课程的实践性，使之与学生日常生活联系得更加紧密。报告还显示，大学里的科学家和数学家们也在转变思想，更新旧的教育观念。长期以来，我国数学教育与实践严重脱节的现象曾引起大批有识之士的极大关注。著名数学教育学家张奠宙教授对此现象极度忧虑。他曾给李岚清副总理写信，希望我国及早进行数学教育改革，加强数学教育的实践性，并希望这一重要问题能引起政府和社会的普遍重视。

现代教育理论认为，数学教育的主要目的之一是让学生获得对数学的审美能力，发展学生良好的个性品质，培养他们的创造性思维能力。我们认为，这些能力的培养，其出发点和归宿在于解决科技、经济和社会中的实际问题。因此，在数学教育中，数学的美及其应用的广泛性都具有十分重要的作用。从这个意义上说，分形具有不可忽视的重要性。尤金斯（H. Jurgens）等写道："分形几何除了用于描述自然物体的复杂性以外，它还能为数学教育的振兴提供一个好机会。分形几何的理论是直观可见的，它所涉及的形态具有巨大的审美感染力和各种各样的用途。因而分形几何可有助于反驳那种认为数学枯燥无味和难于接近的看法，并可激发学生去了解这一令人迷惑和激动人心的研究领域。"

本书力图展示分形的数学美和它的各种应用。在分形的数学基础一篇中，除介绍分形与分维的必备知识外，我们给出了不同类型的数学实例，并指出了它们与自然界的真实物体或过程的联系。我们可以看到，正是那些在传统数学中被称为"病态"的结构，在这里展现出奇异的数学美，表现出与大自然的和谐与统一。第二篇介绍分形的各种应用，以此来揭示大自然自组织结构的分形艺术。由于分形理论的应用领域众多，难以一一枚举，且很多领域的研究成果异常丰富；因此，全面介绍分形的应用非作者的能力之所及，难免有很多好的素材没有选到，请读者朋友鉴谅。

限于作者水平，书中定有不少不妥和错误之处，望读者朋友们批评指正。

编 者 的 话

现代文明的潮流正在我们的时代奔涌，种种新学科、新理论、新思想往这个历史的潮流中翻波鼓浪，知识更新、学科交又、知识集成在这个历史的潮流中分合汇聚。

改革开放、科教兴国，我们的国家正在走向世界，走向现代化，走向可持续友展的美好未来。汪这个崭新的发展时期，我们正面临和经历着不同文化传统、学术观点、科学文化和人文文化的大交流、大碰撞和大融合。

于是，《新闻出版报》组织发表的“新学科出版物系列述评”不仅受到了出版界的赞扬和重视，而且得到了社会的广泛欢迎和好评。正是在此“系列述评”的直接鼓舞和学术前辈的热情关怀下，《新视野丛书》应运而生。

《新视野丛书》以促进文理相通、科教兴国、社会发展和文化繁荣为宗旨，将致力于发表、宣传和传播具有强烈时代感的新学科、新理论和新思想以及对于社会热点问题的新观察、新研究和新思考。

《新视野丛书》在坚持新颖性和高品位的同时，还注重严谨学风和活泼文风的统一，以更好地为广大读者服务，以促进对于我们的时代进行更广泛的思考分析和更深刻的认识理解。

特别是：《新视野丛书》希望自己成为广大读者的阴友，在读者朋友们的支持下共同招展好通向未来的、有利于思想交流共鸣的知识新视野。

《新视野丛书》编委会

1996 年 6 月于北京

分　形——大自然的艺术构造

第一篇

分形与分维—传统数学中的怪物

欧氏几何以及以此为背景的传统数学所研究的图形（或空间形式）都是足够正则、足够光滑的。然而自然界的真实形态并非如此光滑、规则：充满空隙的宇宙空间，起伏不平的地形地貌，九曲回肠的河流，曲曲弯弯的海岸线，纵横交错的大地褶皱、断层、裂缝，流体的湍流，相变点附近的涨落花斑，地下水和石油的渗流，结晶体的分支，生物体的形态与结构，静电传输误差，股票市场的波动……它们不是欧氏几何意义下的光滑、规则形体。根据研究问题的需要，光滑、规则的形态不仅不能较好地近似它们，有的甚至连一级近似也做不出来。

19 世纪的数学家也凭借想象创造出来了一些不够光滑、不够正则的形体（空间形式），如康托集合、维尔斯特拉斯曲线、科契曲线、谢尔品斯基地毯、皮亚洛曲线等等。但是长期以来，它们被视为是“病态”的或称为“数学怪物”。通常只是作为传统数学教科书中的反例，起着对正则结构的点缀和陪衬作用，很少对它们进行较详细的研究。近年来，由于“分形”这一新概念的诞生，才使这些非正则的“数学怪物”获得了新生。科学家们发现，这些难以想象的错综复杂的结构是数学奇葩，它们以极其简洁的形式描绘出复杂的物体和过程。因此引起天文、地学、物理、化学、生物、材料、冶金、石油等领域的科学家们的广泛兴趣。科学家们称分形几何是大自然本身的几何。

第一章 分形的墓本概念与分维数的计算

“分形”一词译于英文“fracta1”。该词系美籍法国数学家曼德尔布罗特（B.B.Mandelbrot）于 1975 年最先创用的。他在 1982 年出版的著作《大自然的分形几何》一书中介绍说，“fracta1”一词源于拉丁形容词 fractus，对应动词 frangere，意为“破碎”、“产生不规则碎片”；同时，与英文 fractional 和 fragment 有相同的词根，意为“碎片、断片”、“分数的”。因此，fractal 有非规则的、破碎的、分数的等含义。曼德尔布罗特指出，分形由三个要素组成，即形状、机遇和维数。这里的维数概念与欧氏几何不同，不仅可以取整数，而且可以取分数。

初涉分形的读者定会迷惑不解。在传统数学里，形体的维数都是整数。大家都知道 0 维的点，1 维的线，2 维的面，3 维的体，4 维的时空。而分形体的维数可以取分数，这倒是有些奇怪了。那么，分形的数学定义到底是什么呢？为什么分形可以有分数的维数呢？怎么确定分形体的维数呢？下面我们将对上述问题做出通俗直观的回答，而不计较数学上的严格性。

1．1　什么叫分形

欲从数学角度对分形下一个严格的定义并不是一件容易的事。其实，从分形诞生至今，20 年来，人们都在不断地探索分形的严格定义，但是至今尚无一个是完全令人满意的。虽然如此，这也不妨碍人们对分形的理解。科学中未予严格定义的概念可多了。例如集合、生命、混沌等等。本节中我们先从特征尺度的概念入手给出分形的描述。至于维数，人们可从不同角度对同一分形给出不同意义的维数，我们将在下节讨论。

1.1.1　特征尺度

自然界的形体和人们考虑的各种图形大体可以分成两类，一类有特征尺度，一类没有特征尺度。这里的特征尺度也没有什么严格定义，可以指某个形体的尺度中的代表者，因而是针对具体的形体而言的。例如，圆或球的特征尺度即是它的半径或直径。正方形或长方形的特征尺度则是它的边长。人体的特征尺度既可以是人的身高，也可以是人的腿长或手长。

具有特征尺度的形体，就要用适当的尺度去测量。用厘米去量万里长江，或用公里去量乙肝病毒，前者尺度太短，而后者又嫌太长，都是不适当的。我们日常生活中的很多形体，其特征尺度与人体尺度密切相关，如床的长度、桌椅的高低。营业员卖布用的尺子常用米或尺作单位，可视为特征尺度。为什么不用寸或丈来量度呢？很显然，它与人体的特征尺度（手长）不匹配。著名科学家郝柏林教授指出[1] ，特征长度、特征时间等特征尺度可以用来想事推理，并举了计算机微型化会达到什么程度这一生动例子。内部元件的微型化以分子尺度为极限，还有很大的发展余地。而外部设备如显示屏、打印机、键盘等则必须与人体尺度

一致，不能无限制地缩小。火柴盒似的荧屏、指甲盖大小的键盘、微雕艺术品似的打印结果决不会成为常规产品。

具有特征尺度的形体有那些特征呢？日本学者高安秀树[2]认为，其特征之一是，只要保持特征尺度不变，对这些形体稍作简化，其性质不会有太大的变化。例如，树立一个大小和汽车基本相同的矩形，从远处看它和汽车不会有很大差别。一般地，这类形体的构造可以用熟知的几何形体如矩形、圆柱、圆、球等的组合来近似。我们认为这类形体最根本的、共同的本质特征可能在于下述两点。（一）在测量这些形体的时候改变测量尺度的大小，在允许的误差范围内，测得的结果应该是一致的。例如，一张长 1.2 米的写字台，无论用米，还是用分米、厘米、尺、寸作尺子去测量，测得的结果应基本相同。（二）这类形体是光滑的或近似光滑的。例如，从宇宙空间看地球，它近似为一球体，其大小可用半径作为特征尺度来描述。尽管地球表面凹凸不平，但与地球的半径相比是可以忽略不计的。

自然界中是否还存在无特征尺度的形体呢？我们先看看下面的例子。科学家们发现，当人们从不同高度观察海岸线时，看到的形状大致相同。虽然高度越低，看到的范围越窄、细节越多，但从不同高度观察和拍摄照片可以发现海岸线有相似的曲折性和复杂程度。这一性质造成了海岸线长度精确测量的困难。曼德尔布罗特在 1967 年发表的关于海岸线的文章中，得出英国海岸线长度不确定这一结论使人十分惊讶。海岸线的长度怎么会不确定呢？他在 1975 年出版的《分形图：形状、机遇和维数》一书中，第二章专门讨论“不列颠的海岸线有多长”这一问题。他指出[3]，海岸线的长度是随测量尺度变化的。当人们从不同高度测量海岸线时，测量尺度随之变化。如果以公里作为单位，那么海岸线上几米至几百米的一些弯曲被忽略。设这时测得的长度为 L_1，如果用米作为单位，那么较小的弯曲虽然可以测出来，但更小的弯曲仍被忽略。设这时测得的长度为 L_2。则必有 $L_1<L_2$。若以毫米为单位，则几乎所有肉眼能够看出的弯曲都不会忽略，这时测得的长度 L_3 必大于 L_1 和 L_2。如果考虑一个极端情况，以原子尺度为测量单位，测出的长度可能达到天文数值。因此，与直觉相反，海岸线没有特征长度。

1.1.2　科契曲线及其性质

现在我们用科契曲线来证实这一事实。英国海岸线如图 1.1 所示，科契雪花曲线如图 1.2。

科契曲线的构造如下：设 E_0 为一单位直线段，将其三等分，中间的 1/3 用边长 1/3 的等边三角形向上指的另两条边代替，得到的集记为 E1。它包含四条线段。对 E_1 的每条线段重复这一

图 1.1 英国海岸线的形状

图 1.2 科契曲线的构造

过程得到 E_2。归纳地，E_{k+1} 是把 E_k 的每条线段中间的 1/3 用边长 $1/3^{k+1}$

的等边三角形的另两条边代替得到的。当 k 充分大时，E_{k+1} 与 E_k，只在精细的细节上不同。当 k→∞时，极限曲线称为科契曲线。它被人们用作典型的海岸线模型。其复杂和粗糙度可以刻画真实海岸线的复杂性和粗糙程度。

先考虑科契曲线的近似，用三角形和直线段来逼近它。最粗的近似为一三角形，它与科契曲线相去甚远，如图 1.3（a）所示。进一步提高近似，如图 1.　3（b）一（c），把这种操作反复进行，其极限也可以看成科契曲线。这就是说，如果想用具有特征尺度的图形去近似科契曲线，则在任何时候都会产生不能忽视的误差。为了减小这种误差，就必须准备无数不同的图形。因此，像海岸线、科契曲线那样的形体是无法用传统几何中的规则图形去近似的。

再考虑科契曲线的测量。如果选用长度为 1 的尺子，这时，大小的弯曲都被忽略，科契曲线的长度为 1。若用长度为 1/3 的尺子测量则得到长度 4/3。归纳地，若用长度 $1/3^k$ 的尺子测量，则科契曲线的长度为$(4/3)^k$，当 k→∞时，其长度趋于∞。因此，科契曲线也没有特征尺度。

从科契曲线的构造还可以看出，该曲线上每一点都是尖点。因此，该曲线是连续而不可微的。根据文献[2]和[4]、[5]还可以更细致地总结出科图 1.3 用科契曲线近似海岸线契曲线的下述性质。

图 1．3　用科契曲线近似海岸线

（1）自相似性。无特征尺度、非光滑性，是这类形体复杂性的主要表现。没有特征尺度，就必须考虑从小到大的许许多多尺度，这显然是十分困难的。这类形体在自然界中不是个别的，而是广泛地存在着，如天空中默默翻滚的积雨云、岩石破裂与可怕的地震、物理学中的连续相变与湍流等等。正是由于它们没有特征尺度，因而常常成为科学研究中的难题。在这类复杂形体的背后，是否还存在着规律性和简单性呢？我们在介绍海岸线时实际上已经提到了。这就是在不同高度（或以不同尺度）看到的海岸线的相似性。我们再考察科契曲线，不难看到，只要把[0，1/3]这一部分图形放大 3 倍，结果和原来的曲线完全相同。把[1/3，1/2]、[1/2，2/3]、[2/3，1]上的各部分放大 3 倍，也得到同样的结果。把[0，1/9]上的图形放大 9 倍，也得到与原来相同的曲线。对更小的部分放大相应倍数，结果仍然如此。不论多小的部分，放大适当倍数都得出和科契曲线一样的图形。这种性质称为自相似性。

（2）科契曲线具有“精细结构”，即在任意小的比例下曲线都含有丰富的细节。事实上，不管取多么小的尺度，60 度的尖角仍然出现，只是边长相应减小。这一事实表明，科契曲线的复杂性不随尺度的减小而消失。

（3）科契曲线的几何性质难以用传统的数学方法描述。整体上，它既不是满足某些条件的点的轨迹，又不是任何简单方程的解集。在局部，它不能通过切线来描述，因为它的每一点都是尖点，其切线是不存在的。

（4）科契曲线的长度为无穷大而面积为零。因此，通常的测度不能对它给出好的描述，拓扑维数也不能给它以很好的描述。

（5）科契曲线虽然如此复杂，但是它的定义简单明了，是由单位直线段通过递归产生的。随迭代步骤的增加，它的逐次迭代 Ek 出它的越来

越好的近似。

上述性质（2）、（3）、（4）反映了科契曲线的不规则性，而性质（1）、（5）则说明了科契曲线在新的观点（尺度变换）下的规则性和简单性。一般说来，分形集合都具有上面所说的某些性质或它们的变形。具有特征长度的形体，是非常规则、光滑的，在欧氏几何体系中已经得到研究；而任意复杂和粗糙的形体（称之为“几何混沌”），其中一部分是很难处理的，另一部分具有某些本质特征的图形，即“粗糙而又自相似”的、同时又比欧氏几何中的图形更复杂的图形，就是分形几何的研究对象。用曼德尔布罗特的话说，分形几何的对象是挤到“几何混沌”和欧氏几何对象之间的第三种可能类型的图形。因此，分形几何研究的对象从本质上看有别于经典几何，但同时又排除了那些极为无序的几何形体。所以说，分形几何是介于欧氏几何的极端有序和一般的几何混沌之间的中间状况，是从有序过渡到无序的中间类型。

1.1.3　统计自相似性

形体的自相似性不仅限于科契曲线。前面提到的海岸线、积雨云、相变、湍流等也有类似的性质。除此以外，山脉的起伏、河流的形状也有类似的相似性。从地图和航空照片来看，如果不借助参照物（房屋、道路等），一般很难估计它的比例尺有多大。此外，人或动物体内的肺、血管、胆管等的复杂分枝构造也有一定的自相似性。但是，这种自相似性不是严格的，而是统计意义上的。也就是说，局部与整体有相同的统计分布。例如，在科契曲线的构造中，每次去掉三分之一，而在用与去掉部分构成等边三角形的另两条边代替时，改用掷硬币的方法决定新的部分位于被去掉部分的上边或下边。比如正面表示上边，反面表示下边。也可以用掷四面体骰子的办法确定，根据 mod2 的余数 0，1 确定：0 表示上边，1 表示下边。这样得到的曲线

图 1.4　随机科契曲线，更像真实的海岸线。

更复杂，也更像真实的海岸线（如图 1.4）。它是统计自相似的，即它的任意部分放大以后与整体具有相同的统计分布规律。

1.1.4　拟自相似集

度量空间（X，d）到自身的一个映射 f 称为 k 拟等距（简称拟等距），如果对 X 中的任意两点 x，y，有

$$d(x, y)/k \leqslant d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y), \quad (1.1\text{—}1)$$

令φr（x）＝x / r 表示变量x的一个1/ r伸缩， B （x_o，r）表示中心在 x_0，半径为 r 的圆盘。集 S 称作一个 K-拟自相似（或简称拟自相似）的，如果存在一个k和r_o。使得对S ⊂ X及x∈X和所有的r＜r。， φr（S∩B（x， r）可以被一个K拟等距映射于S上。其直观意义

是，这样的图形的任意小的部分经过放大，然后再经光滑扭曲就可与该图形的某一更大部分重合。例如，二次复多项式 F（Z）=Z^2＋c，对适当

的复参数 C 产生的 Julia 集，就是拟自相似集[6]。

1.1.5 自仿射集

自相似集沿各个方向的伸缩率都相等，它是相似变换下的不变集。压缩比为 r 的相似变换将一点 $x=\{x_1, \cdots x_n\} \in E^n$ 变换成点 $rx=(rx_1, \cdots, rx_n\}$。若所定义的变换沿各个方向的伸缩率不全相同，就得到自仿射集，它是一族仿射变换下的不变集。设 $r=\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$ 是一个比率向量，则一个仿射变换把点 $x=\{x_1, \cdots, x_n\}$ 变换成点 $\{r_1x_1, \cdots, r_nx_n\}$。更一般地，一个映射 $S: E^n \to E^n$ 称为仿射变换，若

$$S(x)=T(x)+b \qquad x \in E^n \qquad (1.1\text{–}2)$$

这里 T 是 E^n 上的非退化线性变换，即 T 可表成一个 $n \times n$ 阶矩阵，且 $\det(T) \neq 0$，b 是 E^n 中的一个常向量。直观上，该集合可以分解成若干部分，而每部分通过一个仿射变换与整体重合。

如前所述，目前分形集还没有严格的数学定义，只能给出描述性定义。鉴于上面提到的各种意义下的相似性，曼德尔布罗特曾经建议把分形定义为：局部以某种方式与整体相似的形体。但是这一定义过于狭窄，有一些形体，局部和整体之间没有明显的自相似性，例如螺线、噪声中出现的大量信号曲线并不具有明显的自相似性，但可以看成是分形。而欧氏几何中的线段、正方形等图形具有严格的自相似性，显然它们不能归入分形的范畴。可以认为，分形是对没有特征长度但具有某种意义下的自相似性的形体和结构的总称。历史上，分形还有过其它定义，这要涉及到分形的维数，我们将在讨论了维数以后再介绍。

1.2 分形维数

维数是刻画图形占领空间规模和整体复杂性的量度，是图形最基本的不变量。早在两千多年以前，欧几里德就给出图形维数的描述：“曲面有两个量度，曲线有一个量度，点连一个量度也没有。”这里的量度即欧几里德维数。后来将其定义为描述空间中的一个点的位置所需要的独立坐标数目或连续参数的最小数目，例如，定义曲线时需要一个连续参数，而定义曲面需要两个独立的连续参数。

在拓扑学诞生以后，拓扑空间的分类问题是十分重要的[7]。在欧氏几何或仿射几何中，人们用线性变换进行分类。但是，拓扑空间中线性概念没有意义，因此必须寻求其它的变换。起初，人们提出用连续满映射来分类拓扑空间。1890 年，意大利数学家皮亚洛举出一个反例，使人们感到非常惊讶。他指出，存在定义于闭区间上的连续映射，把区间映满平面上的二维区域，比如正方形或三角形。现在，皮亚洛曲线已有很多变体，被称为填充空间的曲线。下面我们举一个简单的例子（详见[6]）。

设△表示平面上边长为 1/2 的正三角形。按下述方式构造一个连续映射的序列 f_n：[0，1]→△，前三步如图 1.5 所示。f_1 的象是通过三角形重心连接三角形顶点的一条折线；然后把△分成 4 个全等的小三角形，曲线在每个小三角形内的部分都恰如 f_1 的象。在向下一步过渡时，

每个小三角形又被分成 4 个更小的三角形，并引人像 f_2 那样更复杂一些的曲线。如此不断地将正三角形分小，f_n 的象就逐步扩大了△内被填上的部分。

图 1.5　皮亚诺曲线的构造（前三步）

对平面 E^2 内的两点 x 和 y，d（x，y）表示它们间的欧氏距离。设 n ≥m，则对 t∈[0，1]，可以找到边长不超过 $1/2^m$ 的一个三角形同时包含 f_m（t）与 f_n（t，因此 d（f_m（t），f_n（t））≤$1/2^{m-1}$，对[0，1]中的任意点 t 成立。这说明函数列{f_n}一致收敛。令极限映射为 f：[0，1]→△由于对每一个 n，f_n 连续，故 f 连续。设 x 是△内的任一点，x 在 E2 内的邻域为 U。因为对每个 n，f_n 的象到△内任何点的距离不超过 $1/2^{n-1}$，故取 N 足够大，使得以 x 为中心，$1/2^{N-1}$ 为半径的圆含于 U，并取 t_0∈[0，1]，使得 d（x，f_N（t_0）＜$1/2^{N-1}$。因为 t 在[1，0]时，d（f_N（t），f（t））≤$1/2^{N-1}$，应用三角不等式得到 d（x，f，（t_0））≤$1/2^{N-2}$。这说明 f（t_0）∈△，即△的每一点是集合 f（[0，1]）的极限点。由拓扑学知，f（[0，1]）是 E^2 的闭集（其详细说明要用到较多拓扑学知识，请参考[7]），因此必包含它所有的极限点。这就是说 f 的象为整个△。

皮亚洛曲线的例子说明了两个问题。其一，连续满映射可以把一维的图形（区间）映满二维的图形（三角形），基本的不变量——维数不能保持不变，因此不能对拓扑空间进行分类；其二，在定义空间维数的时候必须十分小心，把图形的维数定义为确定图形中各点所需要的连续参数的最少个数并不妥当。因为照这样的定义，皮亚洛的例子说明三角形或正方形区域的维数将是一维的。用同样的方法可以在三维及其以上的空间中定义充满空间的曲线。这就是说，从自由度的角度考虑，也可把 n 维空间看成一维，这显然是矛盾的。

为了避免这一矛盾，必须从根本上重新考虑维数的定义。20 世纪初期，阐明维数概念的意义并创立维数理论的是前苏联数学家乌雷松。其定义如下：称图形 X 是 0 维的，如果其中不存在包含多于一点的连通图形。归纳地，若已定义 n—1 维或更低维的图形，则 n 维图形就定义为：它不是 n—1 维或更低维的但可以用 n —1 维或更低维的图形把其中任意点及其邻近点同图形的其余部分分割开。这就是图形的拓扑维数的定义。它是拓扑不变量，即在拓扑变换之下保持不变。它可以解决关于皮亚洛曲线的疑难。由于用点不能将皮亚洛曲线上的任一点和其他部分分开，因此，填充平面区域的皮亚洛曲线的拓扑维数为 2。

拓扑维数只取整数，因此，它还不能对图形的整体复杂性和图形占领空间的规模给出很好的描述。事实上，在圆锥曲线和皮亚洛曲线之间还有许许多多的曲线，它们的复杂程度很不一样，占领空间的规模也大不相同，只要没有填充一个邻域，按乌雷松的定义，它们的拓扑维数都是 1。科契曲线就是这样的例子。这说明，用拓扑维数作为尺度刻画图形的整体复杂性和占领空间规模还失之太粗。因此，维数的概念还应该扩展。在传统数学中，当我们测量图形的长度和面积时，分别用单位长线段和单位面积的正方形去量度，而线段与正方形的欧氏维数分别为 1 和 2，与被测对象的维数一致。若用线段去量正方形，其结果为无穷，说明

所用的尺度“太细”；反之，若用正方形来量线段，所得结果为零，说明所用尺度“太粗”，因此，在测量图形时，测量结果与所采用的尺度有关。欧氏几何中的规则、光滑的对象的测量，整数维尺度就可以很好地解决。但是，对于科契曲线，用一维尺度去测量，其长度为无穷；而用二维尺度去测量，其面积为零。因此，一维尺度太粗而二维尺度太细，用非整数维的尺度可能正合适。这就要求把维数扩展到 1 与 2 之间的实数，类似地，为了刻画完全不连通集，维数应该扩展到 0 与 1 之间的实数；为了刻画不同曲面占领空间的规模，维数应该扩展到 2 与 3 之间的实数等等。

维数跳出整数的圈子，就产生了分维数。由于分形集的复杂性，对不同的测量对象需要不同的测量方法，因此引进了分维数的不同定义。目前尚没有对所有分形集都适合的定义。各种意义下的分维数简称为分维。

1.2.1 相似维数

相似维数的引入受到规则形体如线段、正方形、立方体的启发。如果把线段、正方形、立方体的边分成两等分。这时的线段是原来一半长度的二个线段；正方形被分成四个全等的小正方形；立方体被分成八个全等的小立方体。也就是说，线段、正方形、立方体可被看成是由 2、4、8 个与整体相似的图形组成。2、4、8 这些数字可以改写成 2^1、2^2、2^3，这里出现的指数分别与图形的欧氏维数与拓扑维数一致。一般地，若把某个图形的长度（或标度）缩小 1/r 时得到 N 个和原图形相似的小图形，有 $N=r^{-D}$。则指数 D 就具有维数的意义，称为相似维数，记为 D_s，由下式计算

$$D_s=\log N/\log(1/r) \qquad (1.2\text{–}1)$$

如果把科契曲线分成四个相等的部分，则每个部分是原图形大小的 1/3，或者说，把原图形的每一部分放大 3 倍，就可以得到四个和原图形相似的图形，因此，其相似维数 $D_s=\log4/\log3=1.2618\cdots$。这个非整数维数，恰好定量地表现了科契曲线的复杂程度。后面我们还将指出，它也对海岸线的复杂性给出了好的描述。

1.2.2 豪斯道夫维数

相似维数既很重要又很简单，但是实用范围是很有限的。因为只有对严格自相似的分形集，才能定义这一维数。豪斯道夫维数不仅是具有严格的数学定义的维数，而且实用范围广，不仅对一般的分形集有意义，而且对一些非分形集有意义。下面是该定义的直观表述。设 F 是 d 维欧氏空间的子集，令 $N(\varepsilon)$ 表示覆盖 F 所需要的直径为 ε 的 d 维球的个数，如果当 $\varepsilon\to0$ 时 $N(\varepsilon)$ 的增加与 ε 之间有关系

$$N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D} \text{ 当 } \varepsilon\to0 \qquad (1.2\text{–}2)$$

则说 F 的豪斯道夫维数为 D。例如，用直径为 $(1/3)^K$ 的小球来覆盖科契曲线，所用的小球数为 4^k 个。因此，科契曲线的豪斯道夫维数 $D=\log4/\log3=1.2618\cdots$。豪斯道夫维数的严格定义为：设 F 是度量空间

的一个子集，r＞0，ε＞0，F 的 r 维外测度 mr（F）定义为

$$mr(F)=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf\{\sum_i \|U_i\|^r:\ \{U_i\}\text{ 是}$$

F 的有限覆盖且 $0<\|U_i,\ \|<\varepsilon\}$ （1.2–3）

mr（F）可以为 0 或∞，取决于 r 的选取。即 mr（F）关于不同的 r 存在一个使 mr（F）从∞跳跃到 0 的唯一临界值 D_h。当 $0\leqslant r<D_h$ 时，mr（F）=∞（即测量尺度太细）；当 D_h（F）＜r 时，mr（F）＝0（即测量尺度太粗）；当 $r=D_h$（F）时，0＜mr（F）＜∞。这个唯一的临界值 D_h（F）就是 F 的豪斯道夫维数，可以写成

$$D_h(F)=\inf\{r:\ mr(F)=0\}$$

$$=\sup\{r:\ mr(F)=\infty\} \qquad (1.2\text{–}4)$$

例如，对科契曲线 E，若 D＜log4/log3，则 mr（E）=∞；若 D＞log4/log3，则 mr（E）=0；若 D=log4/log3，则 mr（E）为非零有限值。事实上，通过简单的计算可知，mr（E）的值为 $4/(3^{D_h}-4)$。

自相似集的豪斯道夫维数一般等于它的相似维数。除个别集外，豪斯道夫维数的严格计算一般是很困难的。为了计算上的方便，人们又引人了容量维。

1.2.3 容量维数

假设 E 是 d 维欧氏空间中的有界子集，N（ε）是覆盖 F 的半径为 ε 的闭球的最少个数，则容量维 D_c 定义为

$$D_c=\lim_{\varepsilon\to 0}(\log N(\varepsilon)/\log(1/\varepsilon)) \qquad (1.2\text{ -}5)$$

这是因为在 ε→0 时，N（ε）与 ε^{-D_c} 成比例，所以（1.2–5）成立。而且，在 ε≈0 时，有

$$\log N(\varepsilon)\approx -D_c\log\varepsilon=D_c\mathrm{loog}(1/\varepsilon) \qquad (1.2\text{–}6)$$

此式提供了近似计算容量维的实验方法。在不同的标度 ε 下，计算出不同的 N（ε）。在双对数坐标系下，用最小二乘法回归点（log（1/ε），logN（ε）），就可求出容量维数。当然，这里涉及无标度区问题，我们将在后面介绍。

在很多时候，D_c 与 D_h 一致，但有时候取不同的值。一般地，有关系

$$D_c\geqslant D_h \qquad (1.2\text{–}7)$$

上述维数都有较严格的数学定义，而且已有不少数学上的结果。但是在应用中，也存在不适合、不方便之处。在应用中，人们还提出了一些具有实用意义的分维和确定维数的多种方法。自然界中，并不存在像数学上那样严格、规则的分形，大量存在着的只是近似的分形。所谓的自相似性，也只在一定的标度范围存在。所以，有必要讨论无标度区间。

1.2.4 无标度区间

在讨论科契曲线的性质时，我们已经看到，曲线的某些性质如复杂程度、非规则性等，不随尺度的缩小而改变，这就是所谓的无标度性。无标度性与自相似性是一致的。而无标度区间，则指自相似性存在的范

围。研究表明，实际系统的尺度变换受到大小两头的限制。在中间一段无标度区间内，可以视为分形。超出这一区间自相似性便不复存在。实际系统的无标度区间如图 1.6 所示。

图 1.6　无标度区间示意图

有了无标度性这一概念，就可以给出实用的维数定义。

1.2.5　量规维数

设 C 是一无自交点的约当（Jordan）曲线，即 C 是区间[a，b]在连续双射下的象。由于[a，b]紧致，E^2 是豪斯道夫空间，由拓扑学的一个定理[7]可知，C 是[a，b]的同胚象。设 $\delta>0$，x_0，x_1，…，x_m 是 C 上的点且满足对 k=1，2，…，m，$x_k-x_{k-1}=\delta$。定义 M（δ，C）为点 x_1，x_2，…，x_m 的最大数目，则（M（δ，C）−1）δ 可以看成利用两脚间距为 δ 的两脚规测量 C 所得的长度。当下述极限存在时，其值定义为

$$D_{div}(C)=\lim_{\delta\to 0}(\log M(\delta，C)/(-\log\delta)) \qquad (1.2-8)$$

若极限不存在，可改用上、下极限定义上、下量规维数。曲线的量规维数大于或等于容量维数。在简单的自相似集（如科契曲线）中，它们相等。

这一维数常用于求自然界中的曲线的分维。设想有一张绘制得很精确的海岸线地图，我们用两脚规来测量其长度。假设两脚规张开的长度为 r，沿着海岸线用这个两脚规一步步的测量，量出的步数记为 N（r）。于是，海岸线的长度 L（r）可以写成

$$L(r)=N(r)r \qquad (1.2-9)$$

改变 r 的大小重复测量过程，r 越小，N（r）越大，反之亦然。在无标度区间内，N（r）与 r 之间有如下关系

$$V(r)=Kr^{-Df} \qquad (1.2-10)$$

式中 K 为常数，D_f 就是量规维数。把（1.2−10）代入（1.2−9）即得海岸线长度和测量尺度之间的关系

$$L(r)=Kr^{1-Df} \qquad (1.2-11)$$

由此可见，D_f 较好地描述了海岸线长度随测量尺度变化的快慢情况，即海岸线的复杂弯曲程度。在双对数坐标系中，作（logr，logL（r））的散点图，识别出无标度区间（可用文献[8]的方法），再用最小二乘法回归无标度区间内的点（logr，logL（r））求出 $1-D_f$，即可求出分维 D_f。曼德尔布罗特求出英国西海岸线的分维 $D_f\approx1.25$，德国届境线（1899 年）$D_f\approx1.15$，西班牙与葡萄牙国界 $D_f\approx1.14$，澳大利亚海岸 $D_f\approx1.13$，南非洲海岸 $D_f\approx1.02$。这表明了海岸线和国境线的分形性质。

著名科学家理查逊（L.F.Richardson）早就研究过海岸线。由于对海岸线和曲折的国境线感到怀疑，他核查了西班牙、葡萄牙、比利时和荷兰的百科全书，发现这些国家对共同边界长度的估计相差 20％。1961 年，他经验性地发现了前面的公式（1.2−11）。但是，他只把 D_f 看作一个指数，而未能指出它的特殊而深刻的意义。曼德尔布罗特在分形方面

的第一个贡献就是把理查逊公式中的 D_f 解释成分维，从而使海岸线成了一个经典的分形实例。目前，人们已应用科契曲线来模拟形态各异的海岸线。图 1.7 就是计算机模拟的海岸线，与真实的海岸线十分相似。

图 1.7　计算机模拟的海岸线

1.2.6　计算维维数的方法[2,9]

（1）改变粗视化程度求维数

上述求量规维数的实质实际上是改变粗视化程度，用不同长度的线段去近似海岸线。当然也可以用圆或正方形去近似它。此方法还可以推广到二维或者更高维数的空间中。例如，设 F 是平面上的一个离散子集，现在要求 F 中的点的分布的维数。首先，用间隔为 r 的格子把平面分成边长为 r 的正方形，再数出有多少个正方形含有 F 中的点，把这些正方形的数目记为 N（r）。然后改变 r 的值重复上述过程。如果对不同的 r，有关系式

$$N(r) \propto r^{-D_f} \qquad (1.2\text{–}12)$$

成立，则 D_f 就是下的分维。这种方法不仅可以用来分析曲线形状和点的分布，而且可以用来处理像断层、裂缝、河流这类含有大量分岔的图形。

这种方法还可以用来分析点的随机分布。和前面一样，把空间分割成尺度为 r 的单元，考察某个物理量在空间的分布。第 i 个单元含有该物理量的概率记为 P_i（r），根据香农（Shannon）的信息论，信息熵（即信息总量的期望值）为

$$H(r) = -\sum_i Pi(r)\log P_i(r) \qquad (1.2\text{--}13)$$

$P_i(r)$ 满足 $\sum_i P_i(r) = 1$。如果对不同标度的r, H（r）满足

$$H(r) \approx H_0 - D_I \log r \qquad (1.2\text{–}14)$$

则该物理量有分形分布，D_I 为分维，称为信息维数。

（2）根据测度关系求维数

考虑形体的测度特征，设长度为 L，面积为 S，体积为 V，它们有如下关系

$$L \propto S^{1/2} \propto V^{1/3} \qquad (1.2\text{–}15)$$

现在假设 F 是一个非规则的集合，其豪斯道夫测度为 μ，分维为 D，则可把（1.2–15）推广为

$$L \propto S^{1/2} \propto V^{1/3} \propto \mu^{1/D} \qquad (1.2\text{–}16)$$

并运用式（1.2–16）求出维数 D。例如，用它来求岛屿的海岸线的分维 D。假设岛屿的面积为 S，“长度”为 μ，由（1.2–16）得 $S^{1/2} \propto \mu^{1/D}$。首先把所考虑的平面分割成边长尽可能小的小正方形的集合，只要小正方形中包含有海岸线，就把它涂黑。数出黑正方形的个数，记为 S_b。与白正方形相邻的黑正方形的个数记为 μ_b。当单位正方形足够小时，可以认为 $S \propto S_b$，$\mu \propto \mu_b$ 成立。如果有关系式

$$S_b^{1/2} \propto \mu_b^{1/D} \qquad (1.2\text{--}17)$$

成立，则海岸线的分维为 D。这里的单位正方形取得越小，误差越小。它

与粗视化方法不同的是不必改变单位正方形的大小。

这一方法也可以用来求空间中离散分布的点集 F 的分维。以 F 中的一点为中心，以 r 为半径作球，它所包含的 F 中的点数记为 M（r）。改变 r 的值，如果对不同的 r，能得到关系式 $M(r) \propto r^{-D}$，则 D 就是 F 的分维。这里的点既可以是几何中的点，也可以是某个物理量，如质量、电荷等。运用这一方法，最关键的问题是球心的取法。一般地，可以对不同的球心求出 D，然后取这些 D 的平均值。最好的方法是把球心取在分布的重心上。

值得指出，（1.2—16）和（1.2—17）中的 μ 不是欧氏测度而是豪斯道夫测度。在具体分形的维数计算（如计算岛屿边界）时，如果都取欧氏测度，则周长-面积关系为[10]

$$L_E^{1/D} = a_o \delta^{(1-D)/D} S^{1/2} \qquad (1.2\text{--}18)$$

这里 δ 是码尺，L_E 欧氏长度，a_0 是常数、称为形状因子。当 D=1 时，（1.2—18）变成 $L_E=a_oS^{1/2}$，与欧氏几何中的周长-面积关系一致。同理可得表面积一体积的关系式

$$S_E^{1/D} = k_o \delta^{(2-D)/D} V^{1/3} \qquad (1.2\text{--}19)$$

式中 S_E 是形体表面的欧氏面积，D 是表面分维，k_o 是比例常数。当 D=2 时，上式与欧氏几何中的表面积。体积关系一致。高维空间的情况可以类似地分析。

（3）密度相关函数法[2、11]

假设某量（如微粒）在空间中随机地分布，在点 x（也可看成向量）处的密度为 p（x），空间中另一点 x＋r 的密度为 ρ（x＋r），则 ρ（x）、ρ（x＋r）的密度相关函数为

$$C(r) = \langle \rho(x)\, \rho(x+r) \rangle \qquad (1.2\text{—}20)$$

此处（•）表示平均。规定在点 x 有微粒，则 ρ（x）=1，无微粒则 ρ（x）=0。当 r 远大于微粒尺寸、远小于分形集的尺寸时，如果 r 和 C（r）有关系

$$C(r) = Kr^{Df-d} \qquad (1.2\text{—}21)$$

式中 K 是常数，d 是分形所在欧氏空间的维数，则 Df 就是分形集的分维。例如，对于 DLA（Diffusion Limited Aggregation，即置限扩散凝聚）模型，用这一方法求得分维 D_f=1.66。

对相关函数 C（r）作傅立叶变换，其波谱

$$F(k) = 4\int_0^{\infty} \cos(2\pi kr)\, C(r)\, dr \propto k^{d-D-1} \qquad (1.2\text{--}22)$$

式中 k 为波数。求出其幂指数 d—D—1 后，就不难求出其维数。

（4）利用分布函数求维数

分形集中，如果某一几何量或物理量的分布有概率密度 P（s），s 是一尺度，则尺度大于 r 的量的分布 P（r）可表成

$$P(r) = \int_r^{\infty} \rho(s)\, ds \qquad (1.2\text{--}23)$$

如果在尺度变换之下，该量的分布不变，那么对任意的 λ＞0，有 P（r）∝P（λr），能满足这种分布的量，通常有负幂律分布

$$P(r) \propto r^{-D} \qquad (1.2\text{—}24)$$

在应用（1.2—24）时，为了避免 P（r）在 r→0 时发散，可设定 r

的下限使 P（0）=1 或取二个以上 P（r）的比。

研究发现，月面上月坑的分布，语言学中的齐普夫（zipf）词频法则都近似地满足（1，2—24）式的分布。

（5）频谱法

前面的改变粗视化程度的方法，如果放到频率域上来分析，它相当于改善截止频率 f_c，即把比 f_c 更细的振动成分舍去的界限频率。因此，如果波动表现出分形的特征，那么即使改变截止频率 f_c，也不会改变波谱的大致形状。它相当于：即使改变观测尺度（即作尺度变换 $f\rightarrow\lambda f$），波谱形状也保持不变。具有这种性质的振动的频谱（或功率谱）必然有如下的分布

$$S(f) \propto f^{-\beta} \qquad (1.2\text{—}25)$$

如果讨论的是曲线如地震波、经济波动等，则

$$\beta=5-2D \qquad (1.2\text{—}26)$$

如果讨论的是曲面，如地貌、地震波传播的波前面等，则

$$\beta=7-2D \qquad (1.2\text{—}27)$$

我们研究了地震勘探中的 CDP 记录（曲线）、波前面（曲面），它们都有类似于（1.2—25）的分布[12、13、14、15]。

（6）重整化群方法[10、11]

重整化群理论是著名物理学家威尔逊（K.G.Wilson）1974 年提出的。其大意如下：在取定的物理模型（如原子模型）下，将 a 取成点阵常数时，不同格点上的某个物理量为 P_a。若把尺度变换为 2a，3a，…，则物理上相当于把原子模型改成原子簇或块体模型。相应的物理量记为 P_{ia}（i=2，3，…）。上述过程相当于引进标度变换 T。威尔逊假定，在标度变换 T 下，物理量之间存在如下关系

$$P_{na}=T(P_{(n-1)a}) \quad n=2,3,\cdots, \qquad P_{1a}=P_a \qquad (1.2\text{—}28)$$

或等价地将上式改写成

$$P_i=T^{i+1}=Ti+1(P) \quad i=1,2,\cdots \qquad (1.2\text{—}29)$$

这里 T^i 表示变换 T 的 i 次复合变换，它们满足

$$T^0=I \qquad (1.2\text{—}30)$$

$$T^iT^j=T^{i+j} \qquad (1.2\text{—}31)$$

上式中的 I 表示恒等变换。一般情况下，Ti 未必有逆变换。所以从上两式知，$\{T^i: i=0,1,2,\cdots\}$ 构成一个半群，通常称为重整化群。

重整化群理论的一个主要结果是不动点存在定理。该定理指出：若 $\{P_n\}$ 的极限存在且为 P*，则 P*为重整化变换 T 的不动点，即 P*=T（P*）。虽然这一结果至今未被证明，但人们已经承认这一事实并加以应用。

前面已经指出，自相似集 F 都可以看成是从某一原始图形 F_o 出发，按照某种规则逐次迭代产生的。这种迭代规则即标度变换 T。第 n 步的图形 F_n 经迭代后得到 F_{n+1}，即

$$F_{n+1}=TF_n=T^{n+1}F_0 \quad n=0,1,2,\cdots \qquad (1.2\text{—}32)$$

F是迭代的极限集，即 $\lim\limits_{n\rightarrow\infty}F_n$。显然 $\{T^i: i=0,1,2,\cdots\}$ 构成重整化群，由不动点存在定理知，F 为重整化变换 T 的不动点即不变集 F=TF。

若每一步按 1/b 的规律改变长度标度，相应的重整化群记为 T_b，图形 F_n 的某种可测量如长度、面积、体积等用 L（T_bF_n）来表示，则

$$T_bF_n=T_b（T_bF_{n-1}）=（T_b）^nF_o \qquad （1.2—33）$$

根据自相似性，有

$$L（T_b\ F_{n+1}）=b^DL（F_n） \qquad （1.2—34）$$

式中 D 表示分形集的维数。由于只有当 F_n 进入一定层次之后，（1.2—34）才能成立，故

$$D=\lim_{n\to\infty}\log[L（T_bF_{n+1}）\ /\ L（F_n）]\ /\log b \qquad （1.2--35）$$

上式给出了计算分维的一种简便方法。

自然界中的渗流问题实质上是临界点问题，因此运用重整化群方法，容易计算渗流集团的分维。文献[10]中给出了多孔介质渗流集团的分维：对正方形点阵，渗流集团分维 D≈1.79；而三角形点阵上渗流集团的分维 D≈1.476。在文献[16]中，汪富泉给出了裂缝介质中渗流集团的分维：地台区裂缝系统渗流临界集团的分维 D≈1.6；而褶皱区临界渗流集团的分维 D≈1.46。在文献[16]中，考察了碳酸盐岩地区一个实际的阳新统断层与裂缝系统，其分维 D 亦在 1.6 左右。由此可以推断该系统具有较好的渗流性。再根据不同部位的地质构造情况，可对油气产层做出较好的评价。详细内容将在第四、第五两章讨论。

（7）关联维数与 G-P 算法[8、9、11]

在科学研究和日常生活之中，时间序列是经常遇到的。在科学实验或社会经济活动中，我们所研究的对象可能受到很多因素的影响，涉及到的变量是很多的。我们不可能跟踪每一个变量，因而只能把它投影到平面或直线上来观察，即只能采集到一两个变量的数据序列。借助现代数据采集设备，可为少数观测量取得很长的时间序列。这样的时间序列是否具有分形的特征呢？能否在不知道对象所处的背景空间（相空间）维数的情况下，从少数甚至单一的时间序列中求出关于维数的信息呢？1983 年，格拉斯伯格和普洛克西娅（P.Grassberger 和 1.Procaccia）根据怀特海（Whitehead）的嵌入定理和帕肯（Pack-ing）重建相空间的思想提出了从实验数据序列求分维的算法，现在通称为 G-P 算法[17]。这一算法不仅受到物理学家的广泛重视，而且不少化学家、生物学家、生理学家和经济学家也掌握了这一方法并用来处理自己的数据。鉴于人们在实际工作中广泛地采用这一方法，下面我们详细地介绍这一算法。

设实验中测得的时间序列为｛x_1，x_2，…，x_i，…｝，其中 x_i，是第 i 时刻测得的值。现在把这些数据分成若干组。假设每组分 m 个数据，取定一个步长 τ，例如取 τ=1，则第一组的数据记为 y_1=（x_1，…，x_m），然后右移一步得第二组 y_2=（x_2，…，x_{m+1}），如此划分下去。一般地，第 j 组的数据 y_j 可以表成

$$y_j=y_j，…，y_{m+j-1}）\quad j=1，2，…，N_m \qquad （1.2—36）$$

若时间序列的长度为 N，则按上述方法，时间序列被划分成 N_m=N—m＋l 组。其中每一组数据即是 m 维空间中的一个矢量或一个点，所有这些点构成 m 维欧氏空间 E^m 中的一个子集 J（m）。定义这些点之间的距离

$$r_{ij}=d（y_i，y_j）=\{\sum（x_{i+1}-x_{j+1}）^2\}^{1/2} \qquad （1.2--37）$$

式中对 l＝0，1，…，m—1 求和。首先任意固定一个 i，对 j=1，2，…，N_m 计算出 r_{ij}。这可以看成是以 y_i 为球心，r_{ij} 为半径作球，再改变 i 的值重复上述计算，这相当于改变球心再作球，于是得到一系列的小球。现在用半径为 r 的“筛子”来筛这些小球，显然半径比 r 小的球就“漏”下去。漏下去的小球与小球总数的比 C（r）称为关联积分函数，可表为

$$c(r)=2\sum H(r-r_{ij})/N_m(N_m-1) \qquad (1.2\text{--}38)$$

式中对 i,j 求和，指标变程从 1 到 N_m。H（x）是海威赛（Heavi-side）函数，即当 x＞0 时取值 1；而 x≤0 时取值 0。如果对充分小的 r，关联积分逼近下式

$$\ln C(r)=\ln C+D(m)\ln r \qquad (1.2\text{—}39)$$

则子集 J（m）具有分形的特性，其分维

$$D(m)=\lim_{r\to 0}(\ln C(r)/\ln r) \qquad (1.2\text{--}40)$$

若 D（m）不随相空间维数 m 的升高而改变，即

$$D_2=\lim_{m\to\infty}D(m) \qquad (1.2\text{--}41)$$

就是所考察的动力系统的吸引子维数，称为关联维数。它可以为我们提供所考察的系统动态的有用信息。当 D_2=1 时，我们处理的系统是周期振荡的；当 D_2=2 时，我们面临的是具有两个不可通约频率的准周期振荡；当 D_2 不是整数或大于 2 时，系统将表现出一种对初始条件敏感依赖的混沌振荡。

在使用 G-P 算法时，下列几点值得注意[8、9]。

（1）距离公式（1.2—37）涉及到平方和开方，因此是非线性的，不易求出递推公式，在计算过程中，包括很多重复的计算，浪费机时。为了简化运算，可定义另外两种距离

$$r_{ij}^{(1)}=\sum_{l=0}^{m-1}|x_{i+1}-x_{j+1}| \qquad (1.2\text{--}42)$$

$$r_{ij}^{(2)}=\max\{x_{i+l}-x_{j+l}\mid：0\leqslant l\leqslant m-1 \qquad (1.2\text{--}43)$$

这时可以推出递推公式，例

$$r_{i+1,j+1}^{(1)}=r_{ij}^{(1)}-|x_i-x_j|+|x_{i+m}-x_{j+m}| \qquad (1.2\text{--}44)$$

根据拓扑学的知识，上述三种距离产生的拓扑是等价的，因而都是欧氏距离。所以我们可以选择（1.2—42）定义的距离，在应用中可以节约大量的计算时间。详细讨论可参考文献[8、9]。

（2） G-P 算法对样本量有一定的要求，D_2 越大，要求样本量越大。例如，当 $2\leqslant D_2\leqslant 3$ 时，最低样本量 N_{min}=1764；当 $3\leqslant D_2\leqslant 4$ 时，N_{min}=74088。因此，样本量数给出了 D_2 的上限

$$(D_2)_{max}=2\log N/\log(1/P) \qquad (1.2\text{—}45)$$

式中 P 是最小标度与吸引子直径的比。若求出的 D_2，超过这一上限，则是无意义的。详细讨论可参考文献[9]。

上面谈到的分形，只涉及到一个标度的变换，可称它们为单分形（或简单分形）。如果同时涉及到多个标度的变换，则我们所遇到的就是所谓的重（或多重）分形。我们将在 1.4 节中讨论。

1.3 传统数学中的怪物
—分形的数学实例

前面我们多次提到的科契曲线是传统数学中一个十分有名的反例。其原因在于 18 世纪的数学家们认为，连续函数最多只在可数个点不可微分。 1872 年，分析学大师维尔斯特拉斯（K. Weierstrass）发现了一个处处连续但不可微分的函数，使数学界为之震惊。由于维尔斯特拉斯构造的函数是无穷函数级数，所以人们认为， Weierstrass 函数是极为“病态”的例子，处处连续而不可微分的函数的结构想必都是十分复杂的。1904 年科契从几何的角度出发，通过线段的递归作出了处处连续而不可微分的函数的第一个例子，使人们认识到连续函数的结构未必都是很复杂的。而且这是人为构造的局部与整体严格自相似的典型例子之一。除科契曲线以外，传统数学中还有一些其它反例。本节中我们将介绍几个典型的例子。

1.3.1 康托集合

1872 年，集合论创始人、德国数学家康托（G. Cantor）为了讨论三角级数的唯一性问题，构造了一个现今被称为三分康托集的奇异集合。其构造如下：从单位区间 E_0 出发，去掉中间的 1/3，得到的集合记为 E_1，它包含两个子区间[0，1/3]和[2/3，1]。接着去掉 E_1 的两个子区间各自中间的一段得到 E_2。设已作成 E_k，它由 2^k 个长度为 3^{-k} 的小区间组成。从每个小区间出发，去掉中间的1/3得到E_{k+1}。作为点集，显然$E_{k+1} \subset E_k$， < /PGN0037.TXT / PGN > 其极限集$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} E_k$就是三分康托集。它由[0，1]区间中可以展

3为底的幂级数$\sum_{i=1}^{\infty} ai3^{-i}$形式的数组成，$a_i = 0$或2，即$a_i$，不取1。这是由于从 E_i 得 E_{i+1} 时要去掉每个小区间的中间 1/3，因此就去掉了那些使 a_i=1 的数。

三分康托集有许多奇怪的性质。从拓扑学上看，它是紧致的、完全不连通的完备集，而且具有连续统的基数；但是它的长度为 0。因此，在传统数学中它被看作数学怪物。当时，人们认为这类集合在传统数学的研究中是可以忽略的，但康托的研究结果表明，这类集合在研究象三角级数的唯一性这样重要的问题时不仅不能忽略，而且起着非常重要的作用。为了描述自然界的几何形态，它们更是必需的。正如曼德尔罗特所说：“我不想声称这些集合如此美妙以至一定会派上用场。我只是想要人们承认，正是使康托不连续统是病态的那些性质到头来却是间歇现象的现实模型中必不可少的东西。”

与科契曲线类似，不难看出，三分康托集 F 具有下述典型的几何性质。

（1）F 是自相似的。即 F 的每一个充分小的局部与 F 是几何相似的。E_1 的两个区间内 F 的部分与 F 相似，相似比为 1/3，将每一部分放大 3

倍就得到 F；E_2 的每个区间内 F 的部分也与 F 相似，相似比为 1/9，将每个部分放大 9 倍也得到 F……因此，F 中包含了无穷多个不同比例的与 F 相似的样本。如图 1.8。

（2） F 有精细结构。它包含有任意小比例的细节，用越来越大的倍数观察 F，间歇就越来越清楚。

（3）F 的定义简单明了，是一个简单图形（单位直线段

图 1.8 三分康托集的构造

E_o）通过迭代产生的，即是不断地去掉中间的 1/3 而得到的。迭代的步骤越大，E_k 越逼近 F。

（4）F 的几何性质难以用传统的术语描述。它既不是满足某个方程的解集，也不是满足某些简单条件的点的轨迹。

（5）F 的局部性质也难以用传统的数学语言描述。在它的每点附近都有大量被各种不同间歇分开的其它点。

F 虽然是不可数无穷集，但 F 的勒贝格测度为 0。事实上，Ek 的长度为 $2^k3^{-k}=(2/3)^k$，$k\to\infty$ 时，F 的长度为 0。因此，勒贝格测度不能对 E 给出好的描述。图形的拓扑维数 0 和 1 也不能对 F 给出好的描述。因为按拓扑维数的定义，$D_T(F)=0$。但是 F 的初次构造中的两个特征量：相似比 1/3 和与原图形相似的新图形的个数 2 可构成新的特征量 $D_s=D_H=\log2/\log3$，即相似维数或豪斯道夫维数虽然是非整数，却对集合 F 的复杂程度和占据空间的规模给出了好的描述。它使得集合 F 既能够区别于可列点集又能区别于区间[0，1]。

1.3.2 谢尔品斯基集合

波兰数学家谢尔品斯基（W.Sierpinski）1915 年给出从平面上的二维图形作曲线的有趣例子。如图 1.9 所示。

在图 1.9 中，把一个单位正方形 D_o 划分成 9 个相等的小正方形并挖去中间一个得到 D_1，把 D_1 的每个小正方形再分成 9 个相等的更小的正方形并挖去各自中间的一个得 D_2。重复这一过程至无穷，极限图形 F 为一曲线，称为谢尔品斯基地毯。如图 1.9（C）所示。

图 1.9 谢尔品斯基地毯的构造

将上述构造过程中的正方形改成三角形，在每步构造中都将前次的正三角形等分成 4 个小正三角形并去掉中间的一个。这一构造过程的极限图形是一曲线，称为谢尔品斯基垫，如图 1.10 所示。

图 1.10 谢尔品斯基垫的构造

这两种曲线有着和康托集合、科契曲线类似的性质。地毯的分维 $D_s=D_H=\log8/\log3$，垫的维数 $D_s=D_H=\log3/\log2$。

谢尔品斯基垫还显示出一种重复的分叉过程，它的每一点都是一个分叉点。在拓扑学中，对谢尔品斯基地毯的性质有过比较深入的研究，比如平面曲线和地毯的关系。若能嵌入平面内的曲线也能嵌入地毯内，

则称为万有平面曲线。人们已经证明，不能嵌入平面内的曲线也不能嵌入地毯内。

从空间中的单位立方体出发，与地毯构造方法类似地可以得到 E^3 中的谢尔品斯基海绵，如图 1.11 所示。

图 1.11 谢尔品斯基海绵的构造

谢尔品斯基海绵是一曲面，易见它所包围的体积有限而它的表面积确无限大。奥地利数学家孟格尔证明，任何曲线都能够嵌入到谢尔品斯基海绵中。

应用谢尔品斯基的方法可以构造许多分形集。例如，在每次构造中将一个正方形分成 16 个相等的小正方形，保留其中的 4 个而把其余的去掉，这一过程的极限集合是平面上的一个康托尘，如图 1.12 所示。其维数 $D_0=D_H=1$。在这一过程中，如果保留不同次序或不同个数的小正方形就构造出不同的分形集。应用相同的方法但使用两个不同的相似比，可以构造出类似于雪花的分形集，如图 1.13 所示。容易看出，这里的康托尘和雪花也有类似于科契曲线和康托集合的性质。

1.3.3 维尔斯特拉斯曲线

维尔斯特拉斯曲线是数学分析中的一个重要反例。原来人们认为连续函数只在个别的点处不可微分，或者说不可微分的

图 1.12 平面上具有整数维数的康托尘集的构造

图 1.13 具有两个两个相似比的自相似集的构造

点最多是可数的。但是德国数学家维尔斯特拉斯这位分析学大师在 1872 年发现了处处连续但处处不可微分的函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \qquad (1.3\text{--}1)$$

其中 $0<a<1$，$ab>1+3\pi/2$，b 是奇数。

这一结果的发表曾经使数学界为之震惊。现在维尔斯特拉斯函数已有许多变形。例如

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(3/2)^{-n/2}\sin[(3/2)^n x] \qquad (1.3\text{--}2)$$

最著名的是

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{(s-2)n}\sin(\lambda^n x),\ 1<s<2,\ \lambda>1 \qquad (1.3\text{–}3)$$

曼德尔布罗特提出的变形为

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\lambda^{(s-2)n}(1-\cos\lambda^n x),\ 1<s<2,\ \lambda>1 \qquad (1.34)$$ < /PGN0042.TXT / PGN >

它满足

$$f(\lambda x)=\lambda^{2-s}f(x) \qquad (1.3\text{–}5)$$

令 $\Gamma=\{K, f(x)): 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 表示维尔斯特拉斯函数的图象，则（1.3–2）式的曲线 P 如图 1.14 所示。由于无穷项求和导致了函数具有精细结构，而且处处不存在切线。因此，它不能像光滑曲线那样，可以用经典的微积分来研究。它也不像科契曲线、康托集合、谢尔品斯基集合那样，局部与整体之间是严格自相似的。但是，它有一种自仿射性，即纵横两个方向具有不同的标度特征。正因为如此，维尔斯特拉斯曲线维数的研究比自相似的分形集更为困难。对于（1.3–3）式，$D_H(\Gamma)\leqslant s$，而对等号的严格证明至今尚未见到。对于（1.3–4）式，$D_H(\Gamma)=s$。

图 1.14 维尔斯特拉斯曲线

如今，维尔斯特拉斯函数已经推广到更一般的形式

$$W(t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\lambda^{(s-2)n}[1-\exp(i\lambda^n t)]\exp(i\varphi_n) \qquad (1.3\text{-}6)$$

式中$1<s<2$，$\lambda>1$，φ_n任意。这一函数的标度性质已经应用于海底地形剖面线的研究。该函数称为维尔斯特拉斯–曼德尔布罗特函数（简称 w-M 函数）。实际上，该函数在研究地貌的分形性质和模拟地貌剖面线时有着重要的应用。奥斯罗斯（Aus-loos）和贝尔曼（Berman）还把 W-M 函数推广到多变元

$$W(r)=[(\ln\lambda)^{1/2}M^{1/2}]\sum_{m=1}^{n=+\infty}A_m\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}[1-\exp(ik_0\lambda^n r\cos(\theta-a_m)]\exp(i\varphi_{m,n})(k_0\lambda^n)^{s-3}$$

式中r为向量，k_o是波数，A_m是振幅，$\varphi_{m,n}$是位相，a_m是曲面的褶方向角。选取适当的参数λ，M，s 等，W（r）的图象是分形曲面，可以模拟起伏不平的地表。W（r）的图的维数 $D_H=s$，$2<s<3$。

还有其它类型的处处连续而不可微分的函数。例如，把（1.3–3）中的 sinx 换成如下定义的分段函数

$$g(4k+x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ 2-x, & 1\leqslant x<2\\ x-4, & 3\leqslant x<4\end{cases}$$

所得到的函数仍然是处处连续但处处不可微分的。处处连续但处处不可微分的函数还有德·拉姆（de Rham）函数等等。

1.3.4 胖分形

在 1.2 中讨论维数时，我们已经引进了填充空间的曲线，这些曲线的特征是有正的勒贝格测度。现在我们把填充空间的集合的概念进一步推广，引进胖分形的概念。

胖分形是指具有分形边界且勒贝格测度不为零的集。这一概念是昂伯格（D.K. Umberger）和法默（J.D. Farmer）在 1985 年首先提出的。

胖分形的勒贝格测度为非零有限值，维数为整数而且与所在的欧氏空间维数相等。因此，分维已经不是描述胖分形的敏感参数，通常需要

引入胖分形指数来刻画它。

设一迭代过程的不变集合为一胖分形 F,其所有尺寸小于 ε 的孔所构成的粗粒集记作 Aε；则对每一个充分小的 ε，A_ε，的勒贝格测度（面积）

$$\mu(A_\varepsilon)=\mu_0+f(A_\varepsilon) \qquad (1.3\text{–}8)$$

其中 $\mu_o=\lim_{\varepsilon\to 0}\mu(A_\varepsilon)$ 是极限集F的勒贝格测度。而 $\mu(A_\varepsilon)>\mu_o$，

因此，这一测度可用来刻画胖分形。目前，已有刻画胖分形的几个标度指数，一个指数 β 由下述标度特征定义

$$\mu(A_\varepsilon)=\mu_o+A_\varepsilon^{\beta} \qquad (1.3\text{--}9)$$

$$\beta=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln f(A_\varepsilon)/\ln\varepsilon=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln|\mu(A_\varepsilon)-\mu_o/\ln\varepsilon \qquad (1.3\text{–}10)$$

上式提供了刻画胖分形的一个有用的参数。当幂律关系（1.3–9）不成立时，上式仍能产生一个有用的数几 β。例如，当 $\mu(A_\varepsilon)=\mu_o+\varepsilon\ln\varepsilon$ 或 $\mu_o+1/|\ln\varepsilon|$ 或 μ_o+e^{-1}/ε 时，可以得到 β 分别等于 0 或∝。所以，β 的变化范围为 0≤β≤∝。对于非分形，β=∝；对于瘦分形，$\mu_o=0$，这时 $\mu(A_\varepsilon)=A_\varepsilon^{\beta}$，$f(A_\varepsilon)\propto\varepsilon^{d-Df}$，dJ是F所在的欧氏空间的维数，Df＜d，这表明 β 是集的分形余维数。因此，对胖分形，产生不同的分形指数，每一种都可看作对应分维的推广。

格里波基（C. Grebogi）等采用了另一方法来定义粗粒集，其实质是闵可夫斯基容度，在瘦分形的情形对应容量维。

设 S 是一集合，S（ε）表示用 ε 加胖 S 生长成的集合，它是原集加上与 S 的距离不超过 ε 的所有点组成的集合，即

$$S(\varepsilon)=S\cup\{x:S)\leqslant\varepsilon\} \qquad (1.3\text{–}11)$$

上述集合称为闵可夫斯基“香肠”。令 S*（ε）=S（ε）\S 示从胖集 S（ε）中削去原集 S 后所剩的部分（即长胖的部分），μ[S*（ε）]表示 S*（ε）的 d 维勒贝格测度，其外容量维定义为

$$d_x=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\mu[S^*(\varepsilon)]/\mathrm{In}\,\varepsilon \qquad (1.3\text{-}12)$$

描述胖分形的另一指数 α 由下式定义

$$\alpha=d-d_x=d-\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\mu[S^*(\varepsilon)]/\ln\varepsilon \qquad (1.3\text{-}13)$$

它在描述分形集边界的性质时起着容量维的作用。

1986 年，法默和昂泊格将分形所在的 d 维空间划分成大小为 ε 的网格，通过含有胖分形中点的所有 d 维方块和网格标度，给出了胖分形的另一指数 λ，0≤λ≤d。它对应于瘦分形的盒维数。

指数 α 和 γ 对任意集合有定义，特别是可以较好地描述分形河流结构。指数 β 虽然是对有孔的这一类分形结构引入的，但是，它对任意的集合也是有定义的。

上述指数之间有些什么关系呢？1986 年，依克荷特（R.Eykholt）证明：在 d 维欧氏空间中的任意胖（或）瘦分形，α－γ。这一结果说明，α 和 γ 是相同的分形指数，在研究胖分形的这两个指数时，只要求出其中之一就行了。

为了求出α和β之间的关系，将（1.3–8）式改记为$\mu_\beta(A_\varepsilon)=\mu_o+f(A_\varepsilon)$。另一方面，若用ε/2加胖集$A_\varepsilon$，它将使半径大于ε的孔收缩，增加的测度记为$g(A_\varepsilon)$，则$\mu_\alpha(A_\varepsilon)=\mu_o+f(A_\varepsilon)+g(A_\varepsilon)$，由此，

$$\alpha=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln[f(A_\varepsilon)+g(A_\varepsilon)/\ln\varepsilon] \qquad (1.3\text{-}14)$$

若我们令

$$\beta^*=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln g(A_\varepsilon)\,\mathrm{lh}\,\varepsilon \qquad (1.3\text{-}15)$$

则$0\leqslant\beta^*\leqslant d$且可以得到：对d维欧氏空间中的任意胖（或）瘦分形，$\alpha=\min\{\beta,\beta^*\}\leqslant\beta$。从这一结果可知，$\alpha=\beta$或$\alpha=\beta^*$。因此，当α与β不同时，β由小孔决定，而α由大孔决定，从而对d维欧氏空间中的胖（或瘦）分形，给出了更细致的刻画。

下面我们给出有关胖分形的例子。首先看一个最简单的胖分形[6]。

设I_o表示单位区间。像构造经典的三分康托集一样，第一步，将I_o分成三段，其长度为$(1-\lambda)/2$，λ，$(1-\lambda)/2$（λ为任意常数且$0<\lambda<1/2$）；去掉中间长度为λ的一段，得到的两条线段记作I_1。第二步，将I_1中每一直线段分成三段，对应长度为$(1-\lambda-\lambda^2)/4$，$\lambda^2/2$，$(1-\lambda-\lambda^2)/4$；去掉各自中间的一段，其长度之和为λ^2，留下的四条线段记作I_2。设I_{j-1}已经作成，归纳地，第三步，从I_{j-1}的每一线段中去掉长为$2^{-(j-1)}\lambda^j$的一段，去掉线段的长度之和为λ^j得到的集合I_j由2^j条长度为$(1-\sum_{i=1}^{j}\gamma^i)/2^j$，的线段组成，$j=1,2,\cdots$。显然$I_j\supset I_{j+1}$，$j=0,1,2,\cdots$。极限集$I=\bigcap_{j=0}^{\infty}I_j$。$j\to\infty$时，$I_j$中线段的长度趋于0。由I的构造可知，I与经典的三分康托集有类似的拓扑性质。即它有完全不连通、紧致不可列、非稠密、自稠密等拓扑性质。但是，两集的几何性质却有较大的差异，经典的三分康托集的勒贝格测度为0，分维为In2/In3；而I有正的勒贝格测度

$$\mu(I)=1-\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i=1-\lambda/(1-\lambda)>1-2\lambda>0;\ \text{分维}D_f(I)=1,$$

由此知I是一个胖分形集。

欧氏几何曾在希腊大放异彩，并对传统数学产生了深刻的影响。但是，欧氏的《几何原理》中却有一些美中不足。皮亚洛曲线正是基于对图形最基本的拓扑不变量—维数及图形分类标准的推敲而发现的。

欧几里德曾把曲线定义为“有长无宽”，这当然不是曲线的定义，而只是一种直观描述。人们为了说明这个描述不是良好的而构造了平面上的一个康托尘集，它是一个典型的胖分形集。其构造如下：取单位正方形A_0，从A_0割去一个十字形，其宽度取得使十字形的面积等于1/4，留下的图形记为A_1。从A_1的每个小正方形中再割去十字形，使割去的十字形的面积之和为1/8，留下的16个小正方形记为A_2。从A_2的每个小正方形中再割去十字形，使割去的十字形的面积之和等于1/16，等等。设

A_n 表示经过第 n 步手续后留下的图形，第 n 步割去的十字形的面积之和为 $1/2^{n+1}$。

设A表示极限图形，因$A_n \supset A_{n+1}$，故$A=\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$。因为留下的正方形越来越小，故图形 A 由离散的点组成，即 A 是康托尘集。最近我们详细地研究了这一尘集[18]，发现它具有传统的三分康托集的部分性质，但它不是严格自相似的，因为它没有不变的相似比，它具有拟自相似性。另外，它具有正的勒贝格测度（面积）。事实上，A 的面积

$$\mu(A)=1-\sum_{n=1}^{\infty}1/2^{n+1}=1/2 \qquad (1.3-16)$$

这说明 A 是胖分形。最近[18] 我们将 A 的构造扩充成平面上的一类集合 A（k，σ）。随参数 k，σ 的变化，A（k，σ）既包括了普通的（瘦）分形，又包括了胖分形；再将 A（k，σ）推广到 d 维欧氏空间中，得到一类更广泛的分形集 A（k，d，σ）。我们计算了 A（k，d，σ 的勒贝格测度

μ（A（k，d，σ））=1—σ/（1 — k）（1.3—17）

当 σ＜1—及时，μ（A）＞0，A 为胖分形：当 σ=1—及时，A 为瘦分形，其分形维数和胖分形指数分别为

$$D_H(A(k,d,\sigma))=\begin{cases} d, \\ \ln 2^d/\ln(2/k^{1/d}), \end{cases} \qquad (1.3-18)$$

$$\beta=\begin{cases} -\ln k/\ln 2, & 0<\sigma<1-k \\ d-\ln 2d/\ln(2/k1/d), & \sigma=1-k \end{cases} \qquad (1.3-19)$$

$$\alpha=\begin{cases} d, & 0<\sigma<1-k \\ \ln 2d/\ln(2/k1/d), & \sigma=1-k \end{cases} \qquad (1.3-20)$$

当 d=1，σ=k=λ 时，A 就成为前面的类康托集Ⅰ。

当 d=2，σ=1/4，k=1/2 时，我们来作出通过集合 A 的全部点的简单弧。如图 1. 15 所示，先取包含第一步得到的四个正方形的弯曲长条，然后再作更窄更弯曲的长条，使它包含 A_2 的全部正方形、A_3 的全部正方形等等。经过 n 步，得到长条 B_n，使得

$$A \subset A_n \subset B_n \subset B_{n-1} \text{ < /PGN0049.TXT / PGN >}$$

极限图形$B=\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$。由于$A \subset B$，因此有μ（B）≥μ（A）=1/2，即曲线 B 的面积不小于 1/2，因此不能说该曲线“有长无宽”。由图 1.15 可见，曲线 B 是一条非常曲折的曲线，我们详细地研究了该曲线的性质，知道也是一条胖分形曲线[19]。我们还根据 A（k，σ），按照 B 的作法，构造出一类曲线 B（k，σ），讨论了它们的拓扑性质和分形特征。计算表明，B（k，σ） 与 A（k，σ）有相同的分维和胖分形指数。

图 1.15 康托曲线（有面积的曲线）的构造

1.3.5 和田曲线

这一数学怪物仍然来自于欧几里德关于曲线的描述。欧几里德曾说，曲线是“曲面的边界”。但是，“边界”概念包含着许多意外的情况。人们习惯于认为，在平面曲线的每一段，平面“从两侧”与它相邻。例如，若 C 是简单闭曲线，则由 C 决定的两个区域 U 和 V 在 C 的沿线到处与它相邻；即对 C 中的任意点 x，不论在离 x 多近的地方，都有区域 U 和 V 中的点。直观上以为很明显的是，平面曲线不会是平面上多于两个区域的共同边界，这些区域在曲线的沿线到处与它相邻。然而，与直观完全相反，日本数学家和田发现，平面上存在作为三个区域共同边界的曲线。下面就来介绍这一曲线。

假设有被海洋环抱的陆地，它上面有两个湖：暖湖和冷湖。为了把湖里和海里的水引到旱地，人们开挖运河。第一天从暖湖开运河，使它不与海水和冷湖里的水相通且旱地的点到暖湖水的距离不大于 1。第二天从冷湖开运河，使它没有一处与海洋、暖湖或早一天所开的运河相通且留下的旱地的每个点到冷湖水的距离不大于 1。第三天按同样的要求开运河。

在以后三天，继续延长运河，使留下的旱地的每个点到两湖水和海水的距离都小于 1/2。再以后三天，运河网的密度扩充到使任何水面离留下旱地的距离不大于 1/4，等等。由于在每工作一天以后，留下的旱地仍连成一片，因此可以用更稠密的运河网去遍布它。

在极限情形我们得到的是这样的暖水、冷水和海水网，它们不在任何点处相混。至于留下的旱地，它已经是“曲线”，并且对于这条曲线的任意点都有暖水、冷水和海水邻接它。即是说，在这条曲线的整个延伸处，与它“邻接”的都有三个区域：海洋连同海水运河、暖湖连同它的运河以及冷湖连同它的运河。

虽然至今尚无人作出和田曲线的图形，也没人计算出它的分形维数，但是，我们可以肯定和田曲线已经不是传统几何学中的光滑规则曲线，而是一条分形曲线。我们猜测，和田构造类似于流体在非均匀介质中产生的渗流网络。估计这一渗流网络比计算机产生的“粒子随机聚集的渗流网络”要复杂一些。我们认为，和田构造可作为非均质地层中油气水三相渗流的分形模型。由于地下油气水处于高温高压状态，所以，在水驱油过程中、在关井后压力曲线的恢复处理的过程中都可能遇到油气水三相渗流。因此，这一模型可能会在油气资源的勘探开发中产生重要应用。鉴于此，和田构造是值得深入研究的。

1.4　多重分形及其维数谱

1.4.1　概念与例子

多重分形是为了研究自然界中的非均匀和各向异性现象而提出的，它与简单分形的区别在于标度性质与方向有关。因此，一个单一的维数无法描述其全部特征，必须用多重分形测度或维数的连续谱来表示。

多重分形至今也没有严格的定义，我们先来看两个例子。

首先我们把三分康托集推广到广义双标度情形。假设每次把一条线

段分成三条线段，中间和两边的长度之比为 l_1，l_2，并且假设去掉中间一段的概率为 p_1，去掉两端线段的概率为 p_2，$p_1>p_2$ 且 $p_1+2p_2=1$。在每一小段上重复这一过程，经过几次构造以后，概率分布很不均匀。当如此嵌套的步骤无限增大时，所形成的概率分布就是一个多重分形。

再看谢尔品斯基集合的一个变形。将平面上的一个单位正方形分成 9 个小正方形，然后随机地去掉一些小正方形。假设第 i 个不被去掉的概率为 p_i（i＝1，2，…，9），然后将每个小正方形分成 9 个更小的正方形。第二步，第 i 个大方格中的第 j 个小方格不被去掉的概率为 p_ip_j。按此方法重复这一过程至极限情形，所得到的概率分布是平面上的一个多重分形。这一结构是非均匀且各向异性的。特别当 $p_{2i-1}=1$，i=1，2…，5 且 $p_{2i}=0$，i＝1，…，4 时得到的是豪斯道夫维数 D=log5/log3 的一个简单分形。

从上述两个简单例子可见，多重分形常常和随机性分不开。根据这两个例子，我们给出多重分形的一个尝试性定义。设 X 是 d 维欧氏空间中的一个子集（它也可以是测度的支集或某个动力系统的不变子集），对 X 进行适当的划分并赋以概率不变测度μ。这里的划分类似于前面的例子，是迭式的或递归的。设 a 是与划分有关的一个参数，第 n 步划分后的 X 的子集记为X_n（a）。若调$X_\alpha=\lim_{n\to\infty}X_n$（α）是一个分形集，则称它是（X，μ）的分形子集。若在划分下，（X，μ）产生的分形集可以表成若干个分形子集的并，且每一分形子集有不同的分维，则称此分形集为多重分形。

广义维数谱是描述多重分形的一套基本语言，它是从信息论的角度引入的。假设测度支集（X，μ）被划分成若干个尺度为δ的单元{$\triangle_i$}，μ是概率不变测度。第 i 单元的概率为

$$Pi=\int_{\triangle_i}d\mu(X)$$

当q＞＞1时，若P_i＞＞P_j，则P_i^q＞P_i^q。考虑P_i的q阶矩P_i^q（δ）可给出广义利依（Renyi）维数 D（q）

$$D(q)=\begin{cases}\lim\limits_{\delta\to0}\sum\limits_i P_i^q(\delta)/((q-1)\ln\delta)\\ \lim\limits_{\delta\to0}\sum\limits_i P_i(\delta)\ln P_i(\delta)/(\ln\delta)\end{cases}\qquad(1.4-1)$$

当 q=1 时，D（1）即 1.2 中定义的信息维，q=2 时，D（2）即 1.2 中定义的关联维数。利用 P_i（δ）的 q 阶矩可以定义质量指数

$$\tau(q)=-\lim_{\delta\to0}\ln\sum_i P_i^q(\delta)/(\ln\delta)\qquad(1.4-2)$$

有了质量指数τ（q），也可以从下式求广义维数谱

$$D(q)=\begin{cases}\tau(q)/(1-q),q\neq1\\ -\tau'(1),q=1\text{且}\tau(q)\text{可微}\end{cases}\qquad(1.4-3)$$

利用质量指数作勒让德（Legendre）变换

α（q）=—dτ（q）/dq　　（1.4–4）

f（α）＝qα（q）+τ（q）　　（1.4–5）

f（α）在α—f/（α）坐标系中为一单峰图象，是描述局域维数的连续谱，因而是描述多重分形局部特性的一套基本语言。f（α）是α的凸函数，它在每点的斜率为 q，当 q→＋∞时，最大的 p_i 支配 D（q）且对应于α取最小值和 f（α）取零的一点；当 q→—∞时，最小的 p_i 支配 D（q）且对应于α取最大值和 f（α）取零的点；q=0 时，f（α）取最大值，并且 D（0）=τ（0），即 f（α）的最大值为盒维数 D_0。由τ（1）=0 知α（1）=f（α（1））。α—f（α）的一般变化关系如图 1. 16 所示。q—D（q）和α—f（α）谱构成了多重分形理论的内核。α—f（α）不仅可与 q—D（q）互换，而且与 q—τ（q）构成一对共轭热力学变量，因而可将多重分形与统计热力学进行形式类比，从适当定义的配分函数出发引入熵、自由能等一系列热力学量，为全面地描述和分析多重分形提供新的途径。

图 1.16 α—f（α）曲线

1.4.2 多重分形谱的计算方法

自然界中的很多真实形体具有多重分形的特征。因而，在实际应用中的重要问题之一是根据实际观测资料计算广义维数谱。然后再应用勒让德变换求 f（α）谱。计算 D（q）谱的方法有三种。

（1）数盒子法

这种方法直接以 D（q ）定义为基础。用尺度为δ的相等的“盒子”对整个研究对象进行划分，所得盒子的总数记为 N。由每个盒子的尺度δ、概率测度 p_i（δ）和给定的参数 q，可以计算利依信息量 I_q（δ）

$$I_q(\delta)=\begin{cases}\log\sum_{i=1}^{N}p_i^{\,q}(\delta)/(1-q), q\neq 1\\ \sum_{i=1}^{N}p_i(\delta)\log P_i(\delta), \quad q=1\end{cases} \qquad (1.4-6)$$

改变δ的大小，计算出一系列的 I_q（δ）值，在 logδ— $\log I_q$（δ）图上求出无标度区间；用最小二乘法拟合出该段的斜率，这一斜率的绝对值就是给定 q 值的 D（q）；对不同的 q 求出相应的 D（q），并在 q — D（q）坐标系中作出曲线图就得到 D（q）谱。

数盒子法经典、简单，但对样本量要求较高，而且精度往往不够高。

（2）固定半径法

使用这种方法时，首先必须引入“质量”。这里的质量是广义的。例如将地震作为点事件时，每次地震的质量即取作 1，多次地震的总质量就等于其次数；而在研究地震能量的时空分布时质量指地震能量。在其它一些具体问题中质量可代表某种测度。

固定半径法的公式是

$\log E[M(r)]^{q-1}=(q-1)D(q)\log r$（1.4—7）

这里期望算子 E 表示按圆心求平均，r 表示半径，M（r）表示半径为 r 的圆内的总质量。实际操作时，首先按一定规则（如等间距）设立若干

基准点（圆心），取定一个 r 值，分别统计每个圆内的质量 M_j（r），再求其q-1阶矩的均值$E[M(r)]^{q-1}=\sum_{j=1}^{N'}M_j(r)^{q-1}$（这里N′表示基准点的总数）；然后改变 r 的值，计算出一系列的 $E[M(r)]^{q-1}$值；最后在双对数坐标系中求出无标度区间，其斜率就是（q—1）D（q）据报道，这一方法适用于 q 大于零的情况，但 q＝1 时不能直接使用公式（1.4—7）。

（3）固定质量法

固定质量法的基本公式是

$$\log E[R(m)^{(q-1)D(q)}]=-(q-1)\log m \quad (1\cdot4\text{—}8)$$

其中 E 仍然表示按圆心取平均，m 为质量，R（m）表示质量为 m 的圆的最小半径。在上式中，由于 D（q）位于平均符号以内，难以直接求解。应用公式 r（q）=-（q-1）D（q）将（1.3—26）改写成

$$\log E[R(m)^{-\tau(q)}]=\tau(q)\log m/D(q) \quad (1.4\text{—}9)$$

亦即

$$\log E[R(m)^{-\tau(q)}]/\tau(q)=\log m/D(q) \quad (1.4\text{—}10)$$

实际操作时，先按一定的顺序设立若干个基准点。给定非零的τ（q）值，取定一个 m，分别统计每个基准点的 R_j（m），再求其—τ（q）阶矩的均值$E[R(m)^{-\tau(q)}]=\sum_{j=1}^{N'}R_j(m)^{-\tau(q)}/N'$。然后改变m的值，计算出一系列的 $E[R(m)^{-\tau(q)}]$值。在 $\log m-\log E[R(m)^{-\tau(q)}]/\tau(q)$图上找出无标度区间，通过线性回归求出其斜率绝对值的倒数就得到 D（q）。由 D（q）和τ（q）就可计算出 q：

$$q=1-\tau(q)D(q)$$

在 q＜0 时，固定质量法的效果比前面两种方法好。在地震时空分布的多重分形的研究中，这种方法较实用。

求出 D（q）以后，根据勒让德变换可求出α和 f（α），这是一种间接的求法。近年来还提出了一种直接计算 f（α）的新方法，其基本思想是用尺度为δ的盒子覆盖被研究的多重分形。一个点落入第 i 个盒子的概率为 P_i（δ），构造一个规一化的单参数的测度簇μ（q，δ）

$$\mu(q,\delta)=P_i^q(\delta)/\sum_j P_i^q(\delta) \qquad (1.4\text{-}11)$$

该测度簇支集的豪斯道夫维数为

$$f(q)=\lim_{\delta\to0}\sum_i \mu i(q,\delta)\log \mu i(q,\delta)/\log\delta \qquad (1.4-12)$$

由标度关系 $\alpha_i=\log p_i(\delta)/\log\delta$ 可得

$$\alpha(q)=\lim_{\delta\to0}\sum_i \mu_i(q,\delta)\log p_i(\delta)/\log\delta \qquad (1.4\text{-}13)$$

改变δ的值，求出其对应值$\sum_i \mu_i(q,\delta)\log\mu_i(q,\delta)$和$\sum_i \mu_i(q,\delta)\log p_i(\delta)$，分别在$\sum_i \mu_i(q,\delta)\log\mu_i(q,\delta)\log\delta$图和$\sum_i \mu_i(q,\delta)\log p_i(\delta)$—$\log\delta$图上求出无标度区间并用最小二乘法拟合出 f 和α的值。对应不同 q 求出

α和f（α）值。在α—f（α）坐标系中绘出曲线即得到f（α）谱，f（α）一般为单峰图象。

第二篇 多姿多彩的分形世界
—大自然的艺术构造

在上一篇，我们看到了纯数学上的一些奇妙无比的分形图象。与数学家们的分形设计相比，大自然的艺术构造毫不逊色。著名科学家弗里曼·戴桑在“不规则性特征的描述”一文中写道：“自然界给数学家们开了个玩笑。19 世纪的数学家可能缺乏想象力，而自然界却不乏想象力。这些数学家为从19世纪自然主义的樊笼中挣脱出来而创造出的所谓的病态结构原来却是我们周围所有熟悉物体中所固有的。”分形几何远远不只是一枝数学奇葩，它们还为描述物体和组织的结构形态、为探索物质世界的复杂机制提供了极其简洁的工具。同时，分形几何自身也是一个美妙而又极富生命力的领域。正如曼德尔布罗特所写的那样：“科学家们发现他们以前必须称为粒状、流体状、中间状、丘疹状、麻窝状、树枝状、海草状、奇异状、紊乱状、弯曲状、波形状、束状、褶皱状等不少形状从今以后能以严格的和强有力的定量方法加以处理，对此他们会惊喜不已。

数学家发现那些迄今为止认为奇异的（分形）集在某种意义上说应该是规则的，被认为是病态的结构应该自然而然地从非常具体的问题中演化出来。对于大自然的研究应该有助于解决一些老问题和产生如此之多的新问题，对此他们会惊喜不已。”

本篇的内容，就是介绍大自然中形形色色的分形。

第二章　宇宙中的分形构造

如果按照系统的复杂性来分类，那么宇宙是一个最大最复杂的系统。它不仅包括一切我们已知的东西，而且包括一切我们所未知的东西。从古代开始，科学家们就一直在孜孜不倦地探索宇宙的奥秘。近年来，人们发现宇宙中存在着许多的分形结构。本章中我们将介绍与宇宙分形有关的内容。

2.1　星系分布的分形特征及其分维

浮在夜空中的星星看起来稀稀拉拉、满是缝儿。但是，星系在宇宙空间的分布是成团的，同时又存在着一些空洞。巴卡尔（N. A. Bahcall）等人通过分析星系团和超团的两点相关函数[20]，发现星系团和超团是成团分布的，且其相关函数和星系相关函数类似，是幂指数为–1.8 的幂律形式。这一结果给出了一幅等级成团的图景，也就是描述了星系分布的分形特征。另一方面，许多大尺度上的巡天观测结果显示，星系在很大尺度上分布的主要特征是由星系密集区包围着的一些空洞。这些空洞中星系密度远低于空洞以外区域。这种结构被称作是泡状或海绵状的结构。尽管迄今尚无统一的看法，但在较小尺度上星系分布主要表现为星系成团而在较大尺度上则存在巨大的空洞是普遍承认的观测事实。怎样统一而定量地描述这种结构是人们在星系分布的分形研究中讨论和探讨的一个重要问题。

初期的研究认为，宇宙大尺度结构是自相似的。那时，人们根据观测确认，银河空间分布的相关函数服从于幂法则[21]，由此所估计的分形维数约为 1.2。其最有力的证据是，无论对于星系、星团和超团，其相关函数都满足以 $\zeta(r)=Ar^{-l}$，而且所有的 $l=1.8$。在自相似模型中指数 l 和分维的关系为 $D=3-l$。由 $l=1.8$ 即得到 $D=1.2$。因为所考虑的宇宙空间是三维的，1.2 这一数字是较小的。但是，根据高安秀树的观点，这一数字是合理的。[2]他认为其原因有两个。其一，宇宙满是缝儿，而且浮在夜空中的星星也是稀稀拉拉，如果星系分布的分维是 2 以上，夜空理应全被星星覆盖才对。其二在于人们对巨大爆发后的宇宙密度的看法发生了动摇。银河团由数千至数十万个银河聚集而成，其大小为 2000 万光年左右，但是，银河团似乎是细长线状或薄面蜂巢状构造。同时还发现数个几乎没有银河、大小的数亿光年的空隙。从银河这种分布的事实来看，银河分布是 1.2 维的结果可以说得到了证实。这就是高安秀树的观点。

1987 年，我国学者莫厚俊、毕红光等提出，宇宙大尺度结构是自仿射的，而不是自相似的。[21]他们认为，如果星系是分维为 1.2 的自相似分布，则不能满足以下特征：（1）两点相关函数尾部的“展平”；（2）CfA 红移观测的泡状结构；（3）相关尺度对所考虑的样本尺度的依赖关系。他们提出了一个具有两个自仿射分维的宇宙弦模型，其局域分维为 1.2，整体分维为 2.4。这一模型不仅可以解释形如 $r^{-1.8}$ 负幂律分布，而且可以解释诸如相关强度对样本点的依赖关系、相关函数末端的展平、泡状结构、相关尺度对样本尺度的依赖关系等一系列问题。莫厚俊等指

出，分维 D=1.2 只是在区间 r<2～3d 中成立。这里 d 是所考虑样本点的平均间距，也就是对于星系和星系团分别为～5Mpc 和～50Mpc。还发现星系的相关函数在 10Mpc 处有一个间断。在 r> 10Mpc 时，相关函数有展平的尾巴，而且指数 l＝1。

另外，一些科学家在分析了 $8^h<\alpha<17^h$ 和 $26.5°<\delta<32.5°$ 之间，直到 m_B=15.5 的 CfA 红移观测值。发现了如下的泡状结构：（1）几乎所有（～98％）的星系都分布在泡泡的表面；（2）泡泡的边沿非常尖锐；（3）泡泡典型的直径为～25Mpc。如果认为星系分布在半径为 R 的球壳上，相关函数为

$$\zeta(r)=1/8\pi\mu R^2 r \qquad (2.1\text{—}1)$$

这里 μ 是球壳的平均数密度，在球壳密集分布的情况下 $\mu=1/(2R)^3$，则可得到

$$\zeta(r)=R/\pi r=4r^{-1} \qquad (2.1\text{—}2)$$

这里取 R=12.5Mpc，r 的单位为 Mpc。把（2.1—2）式与通常星系相关函数 $\zeta(r)=20r^{-1.8}$ 比较，可以得出在 $r_b=(20/4)^{1/0.8}=7.5$Mpc 处，ζ（r）有一间断。对于 $r>r_b$，指数 l 近似为 1。因而，$r^{-1.8}$ 的规律只在 r＜（2～3）d 时可用，而在大尺度结构上，应该采用宇宙弦模型，它是一个自仿射模型。该模型主要是由圈弦组成，这些圈弦主要由母弦的自相交形成，弦圈的统计特性可以用一个分维 D_1 决定，其中 D_1 由下式决定

$$n(R)\propto R^{D1} \qquad (2.1\text{—}3)$$

式中 R 表示圈弦的尺度，n（R）表示尺度为 R 的圈弦的数密度。对任意给定的比例 b>0，n（R）和 $b^{D1}n(bR)$ 相同，因此 R 和 n（R）有不同的标度比，从而从 n（R）到 $b^{D1}n(bR)$ 的变换是自仿射的。同时，与半径为 R 的圈弦相联系的样本点的相关函数为

$$\zeta(r)=1/4\pi^2 n(R)R^3(r/R)^2[1-(r/2R)^2]^{1/2} \qquad (2.1\text{—}4)$$

上式只在 r<R 时才成立，这时可用幂律 $r^{-1.8}$ 来拟合 ζ（r），得到分维为 1.2。在此范围内，r 与 ζ（r）的关系为 $1/(r/R)^2[1-(r/2R)^2]^{1/2}$。这一式子是由单个弦圈的形状决定的。就是说，当 r 小于某个临界尺度 R 时，相关函数由单个弦圈决定，其维数大约与单个弦的维数相同；而当 r 大于 R 时，相关函数不再由单个弦圈决定，而是由弦圈的分布决定。

应用相关强度和 d^2 的关系可以得到整体分维为 D_1=2.4。因此，对 ζ（r）＞＞1，可求得

$$\zeta(r)=0.8(L/r)^{0.6}-1\propto r^{-0.6} \qquad (2.1\text{—}5)$$

式中 L 是所考虑的样本的半径。上式与泡状结构的相关函数（2.1—2）基本一致。如果考虑下述因素：（1）有些星系是分布在泡壁以外的；（2）泡壁的厚度不是无限小而是有限的。则（2.1—2）式中的指数 l 就应小于 1，因而更接近（2.1—5）式中的 0.6。

莫厚俊等还寻找了宇宙大尺度结构自仿射性质的其它证据。其理论值与观测值完全一致。用阿贝尔团检验，也获得了与自仿射模型相一致的结果。其详细情况请参考文献[21]。

2.2 IRAS 星系大尺度分布的分形特征与分维

1991 年,夏晓阳等[22]报道了他们对 IRAS 星系大尺度分布的研究结果。IRAS（红外天文卫星）巡天覆盖了全天 96％的区域。首批公布的红外源中包括了约 2.5 万个星系，对这些星系在大尺度上分布特征的研究吸引了许多天文学家的注意。其原因在于 IRAS 星系在天球上的分布看起来远比光学亮星系均匀，而且，初步分析表明 IRAS 星系分布的角偶极矩和空间偶极矩均与宇宙微波背景的偶极矩接近。此外，对牧夫座空洞方向上 IRAS 星系的研究发现，有四个 IRAS 星系处于牧夫座空洞之中。这些事实使很多天文学家认为 IRAS星系的空间分布很可能比光学亮星系的分布更接近宇宙中物质的分布。因此，IRAS 星系大尺度分布的研究就显得更为重要。

一些学者对 IRAS 星系的两点相关函数进行了研究。结果发现，IRAS 星系的分布是成团的，其相关尺度约为 $10h^{-1}_{50}$Mpc。另一些学者使用了一种可以避免在分析中对每一星系对引入权重因子的方法探讨了 IRAS星系成团的问题，发现即使在 $80h^{-1}_{50}$Mpc 尺度上，IRAS 星系也明显成团。并指出，这一结果对通常的冷暗物质模型不利。

夏晓阳等对 F15 和 NGW 两个选区内 IRAS 星系红移巡天所得的样本进行了研究。他们从这两个选区红移巡天所得的样本中选取出一系列完整和统计上均匀的体积限定的子样本，用计数方法对这些子样本进行分形研究。结果表明： IRAS 星系至少在 $60h^{-1}_{50}$Mpc 尺度上仍存在明显结构；其分布的分形特征在较小尺度和较大尺度上有明显不同。这种不同尺度范围上分维的差别可以说明 IRAS星系在较小尺度上主要表现为星系成团而在更大尺度上则以空洞为主要特征。由于详细介绍该项研究将超出本书的范围，因此我们只介绍其主要结果。

如前节所述，在分析宇宙大尺度结构时广泛地应用两点相关函数。夏晓阳等指出，在计算空间两点相关函数时，无论是在样品或方法上均存在某些难以解决的问题，如逻辑上的循环、所得结果严重依赖于所取的相关函数模型等。为了避免这些困难，他们用体积限定样本取代流量限定样本。但是，从流量限定的样本 S_f 中选取出体积限定的样本 S_v 时，许多 S_f 中的天体将被排斥在 S_v 以外，这将使样本中天体数密度大大降低，并导致计算中随机起伏引起的误差棒增大，从而限制可以进行分析的尺度。为此，他们以与任一星系相距小于 r 的平均星系数 N（r）代替两点相关函数中计算的和任一星系相距在 r～r＋△r 之间的平均星系数△N。由于前者是一个累积量，在 r 增大时其随机起伏所引起的误差棒将迅速减小，因此可以分析更大尺度上的结构。进一步还可以通过 N（r）和 r 得出大尺度分布的分维 D。实际上，

$$D=d[\log N(r)]/d[\log r] \qquad (2.2\text{—}1)$$

D 通常是 r 的函数。如果在某尺度范围内 D 是常数，则在此尺度范围内的分布是分形的，其分数维为 D。

在计算 N（r）时应尽量避免边界效应的影响，以保证结果的可靠性。边界效应的大小通常可以用蒙特卡罗（Monte.Carlo）方法模拟来估计。如果在与选取出的体积限定样本 S_v 相同区域内产生一个有相同星系数的均匀随机分布样本 S_r，则可以计算出与任一 S_v 中星系相距 r 以内 S_r 中星系的平均数 N_{Dr}。从大量这样的随机样本可以得出 N_{Dr} 的平均值 N_r（r）及

方差σ。如果把分析的尺度限制在 $\log[N_r(r)]$—logr 曲线与斜率为 3 的直线偏离在±σ以内，就可以保证边界效应不会产生明显的影响。由于

$$d[\log N_r(r)]/d[\log r]=3 \qquad (2.2\text{—}2)$$

由上式和（2.2—1）式可得

$$D=3+d[\log N(r)/N_r(r)]/d[\log r] \qquad (2.2\text{—}3)$$

上面给出了对宇宙大尺度结构进行分形分析的原理和方法，下面介绍样本的选取。IRAS 星系有若干的红移巡天样本，其中，在 F15 和 NGW 两个选区内的红移巡天既覆盖了足够大的天区又有足够的深度。它们提供的样本比较适合用来分析 IRAS 星系的大尺度分布特征。文献[22]中指出，此二选区内的样本在下述条件下是完全的：

F15：$120° \leqslant l \leqslant 180°$，$20° \leqslant b \leqslant 40°$，$f_{60} \geqslant 0.6J$；

NGW：$0° \leqslant l \leqslant 110°$，$60° \leqslant b$，$f_{60} \geqslant 0.6J$；

F15 和 NGW 选区红移巡天样本中分别包含了 445 和 385 个满足上述条件的 IRAS 星系，都测定了红移值，由红移可以计算出这些星系的距离，F15 和 NGW 选区分别覆盖了 1034 和 844 平方度天区。作者根据他们给定的两个条件[22]，从 F15 和 NGW 中各选取了 5 个体积限定的子样本进行分析。其中既有红外光度较高的，也有红外光度较低的。

选定子样本以后，就按照前面的原理和方法对每一体积限定的子样本进行分析。①在和该子样本相同空间区域内用蒙特卡罗方法模拟产生与子样本有相同点数的均匀随机样本；②对大量随机样本（样本数大于 5000）计算出 $N_r(r)$ 和σ；③在 $\log[N_r(r)\pm\sigma]$ —logr 图上确定出与斜率为 3 的直线偏离在士σ以内的尺度范围 r_{max}。研究表明，相同红移范围内，从 F15 和 NGW 选出的子样本，r_{max} 不尽相同，这是由于子样本中星系分布在接近边界处的多少不同所造成的；④在 r_{max} 以内，通过计数得出每一个样本的 N（r），并由此得出各自的 $\log(N/N_r)$ —logr 图，如果在某一尺度范围内 $\log(N(r)/N_r)$ —logr 图呈直线关系，则对该尺度范围内的点用最小二乘法回归，该直线段的斜率即分维 D，同时在此尺度范围内 IRAS 星系的分布特征即是分维为 D 的分形分布。

对所选出的 F15 和 NGW 子样本的计算表明，所有子样本的 $\log(N/N_r)$ —logr 曲线均难以用单一直线在±σ误差范围内拟合。但是，用两条以上的直线段都可以较好地分段拟合。这表明 IRAS 星系的分布并非简单分形，而是具有多个不同分维的多级分形结构。F15 的子样本都只有两级分形结构而多数 NGW 子样本至少有三级分形结构。计算结果还揭示出所有子样本在较大尺度范围的分维均大于较小尺度范围的分维。并且，在最小尺度一级的分维明显小于 2，而在最大尺度一级均明显大于 2。

总结起来，文献[22]得到如下一些结果：

（1）在相同红移间隔内，从 F15 和 NGW 两个样本中选出的体积限定子样本的分维及其变化有明显差异，说明此二样本还不足以构成代表宇宙大尺度结构的好样本。所有全部 10 个子样本在容许进行分析的最大尺度上仍然存在明显结构，说明 I-RAS 星系至少在约 $60h^{-1}_{50}$ 尺度上仍然存在结构，此结果对冷暗物质模型是不利的。

（2）IRAS 星系的分布不能用简单分形描述，它具有多级分形结构，

因而具有多重分形的特征。这种多级分形分布可能暗示着在星系形成和演化中一定有某种非引力作用或物质起着重要作用。

（3）更大尺度上的分维比较小尺度的分维数大。在最小尺度一级的分维小于 2,其取值范围为 0.365 至 1.78;而最大尺度一级的分维大于 2，其取值范围为 2.05 至 2.74。这表示 IRAS 星系在小尺度上的分布特征为成团而在大尺度上的分布特征为存在空洞，其结果与观测相符。

值得指出的是，这里得到的结果与莫厚俊等人的结果有一定联系。后者指出，宇宙大尺度分布是自仿射的，其整体分维为 2.4 而局域分维为 1.2。

（4）60μm 光度很高的 IRAS 星系在小尺度（$\leqslant 50h^{-1}_{50}$Mpc）上成团不明显，其原因可能在于其中包含相当比例的相互作用和并合星系的结果。 IRAs 垦系呈多重分形分布的转变尺度可能与 60μm 红外光度有关，但不如光学亮星系明显。

作者们猜测，IRAS 星系的多重分形结构可能来源于早期宇宙中不同尺度扰动的迭加；或者星系形成与小尺度扰动是否处于大尺度扰动的背景上有关；或者由于同时有冷、暗物质存在，其初始扰动谱不同并相互影响，均有可能导致多重分形结构的产生。这种猜测的合理性尚有待进一步研究。

在分形数学中，人们常常用勒维（lévy）尘埃来模拟宇宙星系的分布。这是一个随机分形模型。假设有一个微粒在正方形网格上随机行走，其行走方向是完全随机的。可把每步走的距离 r 看成类似于（1.2—24）式确定的随机行走。把停止点依次描绘出来，就得到勒维的尘埃，如图 2.1 所示。

图 2.1　用勒维尘埃模拟星系的分布

从图中可以看出，各点是在形成一大团和一小团的过程中分布的。宇宙星与行星系、银河系、银河团甚至超银河团等呈不同大小团块分布的星系之间有着某种类似性。由于这种模拟结果可以与观测结果和理论分析结果进行对比并呈现出某种一致性，因而是非常有趣的。这同时进一步说明了星系与星团分布的分形特征。

2.3　月坑和小行星的直径分布

从所拍摄的月面照片上可以看到各种不同大小的月坑。如果只看照片，其比例尺是完全看不出来的。这是因为月坑的尺度大小分布并没有特征长度，或者说其分布存在着分形的特征。通过对实际资料的分析表明，在直径为 lkm 到 100km 之间，月球“酒海”的月坑数 N（r）和直径 r 有下述的负幂律关系

$$N(r) \propto r^{-D} \quad D \approx 2.0 \qquad (2.3\text{—}1)$$

其中 N（r）表示直径大于 r 的月坑总数。上述分维值不仅适合于“酒海”的月坑，而且对月球其它地区的月坑、甚至对火星和金星的火山口也有效。

因为月坑是由陨石碰撞而形成的，所以可以预料陨石的大小分布也具有分形的特征。研究表明，质量在 100kg 以上的大陨石的尺度是满足

分维为 2.3 的分形分布。[2]比这小的陨石，在进入大气圈时大都被燃烧，不满足分形分布。

据报道，木星和火星轨道之间的许多小行星也有类似的分布。据推测，小行星中以谷神星为最大，其直径约为 1000km，其它仅绝对等级 20 以上的就有 7 万个，其等级分布是满足分维为 2.1 的分形分布[2]。

综上所述，月坑的直径分布、陨石和小行星的大小分布是维数大于 2 的分形分布。这些结果还可以用实验来证明。以高速子弹打入岩石时所形成的碎片的大小分布就是一例。研究表明，这种岩石碎片的大小分布是分维约为 2 的分形分布[2]。把陨石和小行星看成是某一大小集团破碎时的碎片，就可以得到统一的解释。岩石破碎时产生的碎片服从幂分布在工程学领域早有研究，而小行星这样大的碎片也有类似的分布却是非常有趣的。

2.4　木星大气中的涡流与土星的环

木星上的大红斑是一个巨大的椭圆型漩涡。在伽利略的望远镜第一次指向木星后不久，天文学家就注意到这个巨大行星表面上有一块瑕疵。但是，在几乎三个世纪里，人们对大红斑的构造与起因知之甚少。为此，人们曾提出许多假说，诸如岩浆流动说、新月说、鸡蛋说、气柱说[23]等等来解释其成因，但是终未得到什么进展。

1978 年，旅行者 2 号宇宙飞船所拍摄的木星大红斑的照片揭示了强大的风暴和多彩的漩涡。从壮观的细节中，天文学家看到红斑本身是像飓风一样的漩涡系统，它把镶嵌在形成环绕行星的水平条带的东西风带中的云层排开。但是，大红斑不是飓风。地球上的飓风是由湿气凝聚成雨时所释放出的热供给能量的，而大红斑没有这种潮湿过程来驱使；飓风按照气旋的方向转动，而大红斑的转动方向与气旋方向相反；更重要的是，飓风在几天之内就会消失。同时，天文学家们注意到，木星实际上是一团运动中的流体，大红斑坐在那里不停地转动，完全不被周围的混沌所干扰。因此，旅行者号使得已有的秘密更加难解，因为它同时显示了流体的小尺度性质。或者说，木星上的流体运动是一种湍流，流体宏观运动的能量，经过大、中、小、微等许许多多尺度上的漩涡，最后转化为分子尺度上的热运动，涉及大量不同尺度上的运动，这就是无标度性。表面上看来，小尺度显示出快速的无组织化，但在尺度变换下却存在着一定的规律，即分形的规律。

美国学者马库斯研究了环绕西部大西洋的海湾洋流，它产生扭曲和分支。它所形成的小小的波浪，通过扭结，再变成环，然后从主流中旋转离去，形成缓慢而持久的反气旋方向的漩涡。另外，他还研究了气象学中的“阻塞”现象。有时高气压系统会离开海岸，连续几周或几个月地缓慢转动，而且通常与东西流向背道而驰。马库斯借鉴这些现象的规律性，用类比的方法对木星上的湍流作计算机模拟，结果竟鬼使神差般地再现了美国宇航局根据实物所摄制的木星大红斑动画片。通过计算机模拟发现，木星大红斑是一种自组织系统，它是由在它周围不可预言的同样的非线性扭曲造成和调节的。这是一种稳定的混沌。换句话说，木星上的流体运动的轨道有嵌套的精细结构，它实际上就是一个分形

[23]。旅行者号卫星所拍摄的木星表面照片展现出沸腾的液体流。马库斯对此进行了计算机模拟，用不同颜色表示特定小片流体的旋转方向，反时针旋转为红色，顺时针旋转为蓝色。不论从什么样的构形开始，蓝色区域倾向于破碎，而红色区域倾向于合并成单个斑点，不管周围如何骚动，这斑点是稳定的。

现在再来看看土星的环。行星探测卫星航行者号发现木卫一（Io）的火山活动与土星环的微细构造。从地球上看到的数条土星环，实际上是超过 1000 条细环的集合体。土星环的构造，如果能提高分辨率，还可以看见更细的构造。这就是说，土星的环可能是像依依（Hénon）吸引子一样的分形。有些作者指出，从理论上看，土星环的构造有可能像具有有限宽度的康托集合那样的构造。根据这一观点，若要形成这样的环，围绕土星近旁回转的卫星似乎发挥了重要作用。

前面刚刚提到了依依吸引子，什么叫依依吸引子呢？下面我们简要地介绍一下。

依依是法国南海岸尼斯天文台的一位天文学家。他也像 20 世纪的其他天文学家一样在研究球状星团整样聚集到一起、整样随时间演化等令人大伤脑筋的问题。球状星团是拥挤的成百万星星聚于一处而形成的球体，其星体密度出奇地高。因而，它可能是夜空中古老而又激动人心的对象。与二体问题不同，它是一个大的多体问题。二体问题早被牛顿所解决，但三体问题确是如此复杂，以至于人们无法回答系统的长时间行为。依依对球状星团作了一些简化以后，开始模拟星体环绕银河系中心的轨道。他采用了可与庞加莱映射相比拟的技术，设想在银河一端竖立一个平面，使每条轨道都穿过它并记下轨道穿过这平面处的点，跟踪这个点从一个轨道到另一个轨道的运动。结果如图 2.2 所示。

研究表明，这样的轨道不完全规则，它们永不重复，但又是可预言的。某些轨道是不稳定的，点在平面上呈随机分布；有些地方可以画出曲线，而另一些地方的点不能用任何曲线连接，有序和无序混合在一起，形成了天文学家们称为“岛屿”和“岛链”的形状。为了探索其几何实质，他考虑了下述迭代

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + by_n \qquad (2.4-1)$$

$$y_{n+1} = X_n$$

上式是一个离散的动力系统。这个动力系统的吸引子就叫做依

图 2.2 围绕星系中心的轨道的二维相图

依吸引子，如图 2.3 所示。

在小正方形内取一个初始点。开始，每迭代一次，小正方形内两个点的距离按指数增加，而面积则按指数减小，因此，正方形就会变成像细绳子那样的形状。迭代步数增大时，细绳子就会折叠嵌套而形成一个具有分形结构的奇怪吸引子。从图 2.3 可见，如果把一根细线放大一定倍数，则该线又是由许多线按自相似方式排列而成的，即具有线内有线的嵌套细节。前面提到，土星的环可能有这种形式的排列。据称，人们用改变粗视化程度和利用相关函数的方法求得依依吸引子的分维数约为 1. 26。

图 2.3（a）—（c），依依吸引子，后一图形
是前一图形方框中的部分的放大

2.5　宇宙微粒的分形构造

前面我们介绍的主要是宇宙大尺度结构的分形问题，那么，小尺度的情况又如何呢？下面我们就来探讨这个问题。

在月球表面，可以发现未经任何磨损的新鲜碎石。当阿波罗 12 号飞船从月球表面带回一些粉尘时，科学家们发现，粉尘中包含各种各样形状的碎片，特别发现其中一种有非常复杂曲折的结构，如图 2.4 所示。

很明显，月球粉尘的轮廓线可以用分形和分维来描述。用多边形法则测得四个月球粉尘的分维约为 1.11—1.13。

图 2.4　粪状月球粉尘微粒的复杂边界（选自 B.H. Kaye[24]）

另据报道[24]，布朗利（Brownlee）教授在一系列旨在研究古代宇宙粉尘的实验中，曾驾驶 U2 飞机在高空飞行，通过固定在机翼上的扫描收集器捕获从外层空间进入地球大气层的宇宙粉尘，其中一种如图 2.5 所示。

这种宇宙粉尘看来是由超微粒结团而成的，用多边形方法测量其分维，结果得 D=1.15。粉体科学家认为，这种聚团的分形结构有助于科学家们解释聚团的形成。

图 2.5　布朗利教授在高空收集到的宇宙粉尘的
轮廓线及其分维（选自 K.H.Kaye[24]）

第三章　地形形态与地质的分形构造

被誉为人类摇篮的地球，其表面呈现出丰富多采、千姿百态的形貌，称为地貌。早在 60 年代，分形理论的创始人曼德尔布罗特发表的第一篇划时代的成名之作《英国的海岸线有多长？》就是研究海岸地貌的。他在 1974 年出版的著作《分形：形状、机遇和维数》中又专辟一章讨论这一问题；在 1982 年出版的名著《大自然的分形几何》一书中，又引用了许多地貌学的生动实例来表达其独特深刻的思想。可见，分形理论从诞生之日起就打下了地貌学的烙印，并在与地貌学相关的肥沃土壤中成长壮大。本章中我们将讨论地表形态与地质的分形构造。

3.1　地貌发育的分形特征

第一章中，我们在介绍分形与分维的基本问题时，曾用英国海岸线作为例子，说明分形图的性质与自然界的真实形态是如何地接近，同时已经较详细他说明了英国海岸线具有典型的分形性质。研究表明，不仅英国的海岸线具有分形性质，其它许多国家的海岸线或国界线也有类似的特征。事实上，地貌剖面线的无限弯曲性、其测量随所用尺度的变化而变化等特征早就被科学家们注意到了。早在 1954 年和 1960 年，斯坦毫斯就研究过这类问题，被地理学家们称为“斯坦毫斯之迷”。理查逊用边长为 L 的多边形的长度之和去逼近海岸线或地貌曲线的长度，得到公式

$$\sum L=L^{\alpha} \qquad (3.1\text{–}1)$$

式中 α 为负常数。显然，随着 L 变小，∑L 将不断增大。这个奇怪的现象使地理学家们大为吃惊，并将 α 称为“理查逊参数”。后来，正是曼德尔布罗特为参数 α 赋予了分维的含义，使“斯坦毫斯之迷”得到了合理的解释。

弯曲的地貌剖面线常用量规维数来表示。例如，用步长为 r 的尺子去测量海岸线，测得的步数为 N（r），在双对数坐标系中，用最小二乘法对点（logr，logN（r））作线性回归，求得其分维在 1 到 1.3 之间。一般说来，分维数越大，其海岸线越复杂。

从宏观大尺度角度来看，地表是绵延起伏、凹凸不平的曲面，其构造具有分形的特征。人们常用随机科契曲线描述海岸线，并用随机科契曲面（即把随机科契曲线沿着与科契曲线所在平面垂直的方向平行移动所得到的曲面）来描述地表曲面。由于海岸线是在一定高度水平地切割凹凸的地表而得到的剖面线，所以，不难预料，把海岸线的维数 D 再加上 1 就可以得到凹凸的地表面的维数。

在中观尺度上，地表的山和谷等凹凸地形具有分形特征。只要看看用分形方法或分形模型模拟的山谷风景，它们和实际地貌相比，往往可以达到以假乱真的程度，这就不难理解地表的分形艺术构造。在第四章我们将讨论这些问题。

把尺度再缩小一些，比山谷更小的地表凹凸也具有分形的特征。据《摇动的世界》[2]一书记载，路面凹凸的功率谱是 $f^{-2.5}$ 型；由第一章

可知，路面是分形曲面，其分维为 D＝（7 —β）/2，这里β=2.5，所以 D=2.25。

3.2　流水地貌及其分形特征

3.2.1　流水地貌与紊流的分形

流水地貌是一种重要的地貌，这是因为地表流水是主要的地貌外力之一。它在流动过程中侵蚀地面，形成各种形态的侵蚀沟谷，同时又将被侵蚀的物质沿途堆积，形成各类堆积地貌。凡由地表流水作用塑造的各种地貌，统称为流水地貌。由于地表流水几乎无处不有，因此，流水地貌在陆地上的分布广泛存在。

流水地貌可分为沟谷地貌、河谷地貌、河床地貌、流域地貌等类型，它们都与水流的性质有关。水流可分为层流和紊流两种基本流态。层流仅能在水库及高含沙量的浑水中遇到，由于没有垂直于水流方向的向上分力的作用，一般不能卷起泥沙。层流失稳就成为紊流，沟槽水流均为紊流，它主要由许多不同类型的漩涡构成，水质点呈不规则运动并且相互干扰。如果体系存在正色散和正耗散作用，则随着时间的推移，大漩涡逐渐分裂成小漩涡，小漩涡又逐渐分裂成更小的漩涡。从能量的观点来看，可以解释为大尺度漩涡能量不断地分割成小尺度漩涡能量，这被称为能级串联散裂。如果存在正耗散加入负色散的作用，则是小尺度漩涡能量不断转变为大尺度漩涡能量，这就是紊流能量逆转现象。

能量散裂是一个分形过程，可用能谱 $E(k)\propto k^{a}\varepsilon^{b}$ 来描述。式中 k 称为波矢，ε是单位时间内能量的散裂量（标度）。由量纲分析可得著名的柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）负 5/3 次方定律 $E(k)\propto k^{-5/3}\varepsilon^{2/3}$。事实上，紊流是间歇性的，按照弗里希（U. Frisch）的间歇紊流模型，得能谱 $E(k)\propto k^{-(8-D)/3}\langle\varepsilon\rangle^{2/3}$，式中 D 是间歇紊流的分维，（ε）是ε在全空间的平均值。据此可算出直径为 d 的球形沙粒受到水流的推力 P_x 和上举力 P_y

$$P_x=9\lambda_x k_x^{(D-5)/3}(\varepsilon)^{2/3}/16d(5-D) \qquad (3.2\text{—}1)$$

$$P_y=9\lambda_y k_y^{(D-5)/3}(\varepsilon)^{2/3}/16d(5-D) \qquad (3.2\text{—}2)$$

式中 λ_x，λ_y 分别为推移力和上举力系数。根据沙粒处于平衡的条件，可得滚动沙粒的直径与分维的关系。故不难推知，当 k_x、$k_y\geqslant1$ 时，分维越大，推移力和上举力越大，推动的沙粒也越大；反之，分维越小，推动的沙粒也越小。由此可以划分不同的流水侵蚀程度。当 k_x、$k_y<1$ 时，情况较复杂。如果把紊流视为简单分形，则进一步研究可以发现 D=2.09—2.72，通常 D=2.34。事实上，紊流是一个典型的多重分形，因而，流水的侵蚀是很复杂的，塑造的地貌也是千奇百怪的。

据研究，分维越大，被流水带走的泥沙越多，并且与雷诺数成正比关系。当 D=7/3 时，紊流中的所有通量（质量、动量、能量）与雷诺数无关，这叫做雷诺数的相似性。

在研究流水地貌时，不仅要研究水流的特征和泥沙运动的规律，而且要注意水系的形式与发展规律。

水系是指每一条干流及各级支流的组合，其组合形式受一定地质构

造和自然环境的控制。在平面上表现为有规律的排列。近年来，国内外学者的研究表明，水系有分形的特征。在下述两个假设：

（1）曲流以大于河道宽度一至两个量级的尺度表示

（2）曲流是一个较大标度上的不规则结构之下，Snow 于 1989 年利用理查逊方法计算了 12 条形态各异的单河道的分维。分析结果表明在中尺度范围（大于河宽一二个量级），河道弯曲主要表现于分形弯曲。尽管不同河流的分维值和标度范围大不一样，但该值的存在证明了单一河道形态的不规则性及其结构特征都可用分形来描述。

流域地貌的一个重要特征量是主河道（单一河道）与流域面积的关系。1957 年，哈克指出，主河道长度和流域面积之间并不存在经典几何学中的周长（L）面积（A）关系：

$$L=cA^{1/2} \qquad (3.2\text{–}3)$$

实测得到的公式为

$$L=aA^{b} \quad (b=0.6) \qquad (3.2\text{–}4)$$

这就是河流地貌学中有名的经验法则，即哈克（J.T. Hack）定律：主流长度 L_m（km）与到达此地点的流域面积 A（km^2 ）之间有如下关系

$$L_m=1.89A^{0.6} \qquad (3.2\text{–}5)$$

哈克认为，（3.2–3）与（3.2–4）的差异是由于流域形状随面积的增加而变长引起的。曼德尔布罗特（1982）将其解释为分形现象。这里 A 的指数不是 0.5 而是 0.6 就说明主流为分形曲线。经变换可得 $A^{1/2}\infty L_m^{1/1.2}$。正是由于主河道长度具有分形结构，而流域面积却是用欧氏测度量度的，从而导致了两个公式的差异。他指出，幂指数 b=0.6 反映了主河道的分形特征，其主河流的分维满足关系 b=0.6=D/2，即 D=1.2。他进一步推导了流域面积和主河道长度之间的分形关系：

$$L(\varepsilon)=c\varepsilon^{1-D}[A(\varepsilon)^{D/2} \qquad (3.2\text{–}6)$$

Hjelmfelt（1988）验证了这一关系式。他选取并计算了密苏里（Missouri）河的八条支流的实测数据，所得结果与（3.2–6）式吻合。人们还用改变粗视化程度的方法计算了亚马逊河（其形状如图 3.1 所示）的分维，大约为 1.85，而沙漠中的尼罗河分维为 1.4 左右。

Robert 和 Roy（1990）进一步研究了主河道长度与流域面积的关系。他们用 23 个小流域的数据研究了公式（3.2–4）中参数 a 的变化，指出 a 是影响 b 值的一个重要因素，a 的变化是不同比例尺地图对实地“扭曲”的反映。由此，他们认为，指数 b 的偏高是地图“扭曲”影响和主河道的分形特征共同引起的。因此，公式（3.2–4）不能用来计算主河道的分维值。

一般说来，对于线性干流水系，可用求海岸线分维的方法即 $L_H=L_E\delta^{D-1}$ 求出干流的分维 D。这里 L_H 为豪斯道夫长度，L_E

图 3.1　亚马逊河的形状

为欧氏长度，δ 为码尺；对于树枝状、放射状、环状、辐合状和网状水系，可用曼德尔布罗特[25]和费德（J.Feder）[26]给出的公式 $L=C_oA^{D/2}$ 计算分维，式中 L 为流域长度，A 为流域面积。

曼德尔布罗特证明，对许多水系，C_o＝1.4，D=1.2。哈克曾用朗拜

恩测定的数据验证过此数量关系。迄今，在各类专业书刊上报道了许多水系的分维。霍顿（R.E.Horton）定律一直是流域地貌学中一个公认的经典定律。研究水系的分形特征与霍顿定律的关系是地貌学家们极为感兴趣的一个课题。根据哈克在霍顿理论基础上建立的水系模型，可把水系的发展分成不同级别。设级别为 i 的河道的平均长度为 L_i，仅次一级的河道的平均长度为 L_{i-1}，则长度比为 $R_L=L_i/L_{i-1}$。如果级别为 i 的河道数为 Ni，仅高一级的河道数为 N_{i+1}，则分支比为 $R_b=N_i/N_{i+1}$。设水系的最高级别为 s，最低级别为 i=1，则由霍顿定律可得水系分维为

$$D_s=2\log R_L/\log R_b \qquad (3.2\text{—}7)$$

这是费德于 1988 年导出的主河道的分维公式。该公式的导出依赖于三个假设：（1）所有的霍顿比都为常数，即水系具有自相似性；（2）所有河流的宽度（包括汇流区）都相等；（3）流域中任一级别的所有河流的长度都相等。于是，由霍顿数、流域面积和公式（3.2—7）可以导出：河网密度是一个不随面积和水系级数变化而变化的常数。这与真实水系的发育过程不符。为了讨论水系与分维的关系，李后强、艾南山[27]从哈克模型出发，导出了一个分维与水系级别关系的公式

$$D_s=2(s-i)\log(L_i/L_o)/i\log N_i \ (i\neq 0) \qquad (3.2\text{—}8)$$

式中 L_o 为最小河道的平均长度。由于 i、s 是水系的级别，代表河流发育程度，与河网密度有关，因此由 D_s 可讨论水系的发育情况。在水系形成的初期，河网密度很小，地面切割深度不大，这时支流短小并且数量很少，水系级别 s 低，分维 D_s 小；随着水系的下蚀和溯源侵蚀，谷道伸长，流域扩大，继续产生许多新的支流与小支流，河网密度增大，地面切割深度也不断增大，逐渐发展为水系的繁盛时期，此时水系级别 s 增大，分维 D_s 也大。

近年来，由于流域“数字化立视图模型”(Digital ElevationModels DEM）的提出和计算机功能的增强，河流分维的计算已成为较容易的事情。DEM 是不断改变水道的分辨率或细节，并构成水道网络的方法。具体处理过程是：将 DEM 数据产生于矩阵上，矩阵各点代表一个个象素（或面积）（如 30mX30m）的立视图，流域方向由象素的八个近邻之一而定，这样就规定了流域方向或流场；再计算流过各阵点的象素数，给出流进各阵点的累积面积；当累积流域面积大于临界支撑面积时，所得象素就构成水道网络。减少支撑面积，会导致水道网络的细化，相当于增加流域的分辨率。细化度要设定一个极限值。由 DEM 可产生数字化的水系，并从所得数据计算出分维值。

3.2.2 流域地貌发育的分形模型

前面从静态角度讨论了水系网络的分形特征和分维与水系级别的关系，下面我们讨论流域地貌发育的分形模型。众所周知，任何一条河流，每时每刻都处在水流与河床的相互作用之下。河床经常发生冲淤变化，使河岸崩塌，航道淤塞。因此，研究流域地貌的发育对生产建设有重要的意义。

流域发育具有阶段性是由流域发育的规律性所决定的。流域在不同

的发育阶段具有不同的产沙特性及地貌形态。流域的发育主要与水流侵蚀有关。我们从被侵蚀掉物质的量的角度来研究地貌发育过程。首先需要引入一个渗流模型。该模型是布罗得本特（S.R. Broadbent）和哈默斯勒（J.M. Hammersley）在 1957 年提出的一个随机模型，主要研究流体随机地穿过介质的行为。地表水系在河网密度较大时可视为渗流。设在一范围为 L 的地表被河流侵蚀的比例为 P。理论研究表明，当 P 接近于某一临界值 P_c 时，就构成具有统计自相似性的分形网络，被侵蚀掉的物质为 $M(L)=C_1L^D$。把 L 视为流域长度，A 为流域面积，则河网密度 d_s 定义为 $M(L)=C_1(d_sA)^D$。若全流域物质为 M_o，则

$$P=M(L)/M_o=Ed_s^D \qquad (3.2\text{—}9)$$

式中 $E=C_1A^D/M_o$ 称为侵蚀模数。P 也称为侵蚀积分值。励强等[28] 曾求得黄土高原侵蚀积分 P 与河网密度 d_s 关系为 $P=0.194d_s^{0.697}$，与渗流模型接近。

研究表明，实际计算得到的分维 D 值都小于理论值，其原因可能在于河流不甚密集，P<Po，没有构成分形渗流结构，此时 $M(L)\infty \ln L$，得到的仅是标度指数 β，即 $P=Ed_s^{\beta}$。只有当 $P\approx P_c$ 时，β=D。当 $P>>P_c$ 时，$M(L)\infty L^2$。显然由 P_c 可划分出流域地貌的发育阶段：

当 $P<P_c$ 时，侵蚀早期，标度指数 β=0～0.75，对应侵蚀积分值 0《P＜0.39；

当 $P\approx P_c$ 时，侵蚀中期，分维 D=0.75～1.89，对应侵蚀积分值 0.30《P＜0.70；

当 $P>>P_c$ 时，侵蚀晚期，分维 D=1.89～2.0，对应侵蚀积分值 0. 70《P＜1.00。

这样就给出了定量刻画流域发育阶段的新参数。

更有意义的是可以从理论上大致确定各种水系的临界值 P_c。研究表明，

$P_c=1/(R_b-1)$ 或 $P_c=d/R_b\ (d-1)$

其中 R_b 是河流的分支比。假定河流在一个平面上分布（d=2），网状、环状、放射状水系的临界值分别为 $P_c\approx 0.347$、0.45、0.50，格状和树状水系的临界值分别为 $P_c\approx 0.65$。分支比越大，越趋于侵蚀晚期。如果河流分布在一个立体空间中，则 $P_c=0.12$～0.39，与实测值大体相符。更深入的研究表明，P_c 值还与地质条件有关。

用单分形的方法描述地貌的发育较之传统数学方法虽是一大进步，但仍失之粗糙。真实的地貌，应采用多重分形来刻画。以海平面为起点，若在水平方向移动 dx，地貌高度变化为 dH，则高度变化梯度 g（x）=dH/dx，实际上 H 是 x 的函数。大仁（S.Ohta）和本庄（H.Honjo）的研究表明[29]，高度变化几率 P_i 与 g（x）成正比。可设 $P_i=c\,|\partial H^i(x)/\partial x_i|^m$，c 为规一化常数。当 m = 1 时，还原为简单的受限扩散凝聚（DLA）模型。定义几率矩 $Xq=\sum P_i^q$，若考虑的地貌范围为 ε，则当 ε→0 时，$X_q(\varepsilon)\infty\varepsilon^{(q-1)Dq}$。式中 Dq 为广义维数，它描述地貌的总体形态。地貌的非均匀性还可以用另一种系统熵

$$S_q(\varepsilon)=\ln X_q(\varepsilon)/(1-q) \qquad (3.2-10)$$

来描述。用这种方法来刻画河床的侵蚀和河流阶地，都是十分有效的。

3.2.3 小流域水系的多重分形特征

最近，高鹏[30]运用双标度康托模型研究了小流域水系的多重分形特征。其方法如下：首先，将各级河道的平均长度由小到大依次连接成一条直线，作为构造的初始长度。其次，选取两个适当的标度和相应的几率，为了讨论整个水系的分形特征，必须在整个水系的尺度上选取标度，即在初始长度上选取。由于最高级河道反映了水系结构的非均匀性，不能忽略，所以取这一级河道的长度为一个标度，记为 l_2；水系发育最活跃的地方是该尺度下的未级河道，因此取这一级河道的长度为另一个标度，记为 l_1。一般在较大比例尺的地形图上，小流域中的水系往往只能看到三级、四级，所以上述标度的选取完全符合三级水系。对四级水系，可取 l_1 为一级、二级河道的平均长度之和。如果出现高级别的水系，则可以认为更高级的河道已不具有外形特征，可不加考虑，而把标度 l_2 选为第四级河道的平均长度。将映射后落到标度 l_1 上的一级河道数目记为 n_1，落在标度 l_2 上的数目加上最高级河道数目记为 n_2。在实测中取 n_1 为所有一级河道的数目，n_2 为汇入标度 l_2 的河道中的一级河道数目。这相当于加了一个权重。相应的几率 $P_1=n_1/(n_1+n_2)$，$P_2=n_2/(n_1+n_2)$。将这四个初始数据代入到双标度康托模型的公式中，就可得到相应水系的多重分形谱。

由于该模型包含了描述结构非均匀性的高级河道和反映水系发育快慢的一级河道数目，故产生的多重分形谱能刻画水系内部结构的局部标度性质，从而为研究水系的发育演化规律提供定量依据。

3.2.4 泥石流沟判别的分形研究

高鹏、艾南山等[30-31]还对段家河流域泥石流沟进行了分形判别研究。所用的模型仍为双标度康托模型。他们的做法是在比例尺力 1 ：50 000 的地形图上，以 0.5cm 为测量单位进行测量。由于地形图上的水系一般只有主沟和主要支沟，因此，先依据地形图上的等高线绘出整个水系再进行测量。分别计算出每一级河道的平均长度及落在其上的支沟数目。把测量结果代入到双标度分形模型中就可求出每个水系的多重分形谱。结果发现，分维值 D_o 可以定量地描述流域中水系的整体分形结构。同时，其数值变化规律还可以用来描述流域水系的发育、演化特征。$D_o>0.8$ 时，水系处于幼年期，此时水系整体粗糙度最大，支沟发育不充分，各级支沟的差别也不明显；$0.4<D_o<0.8$ 时，水系处于壮年期，其中又可分为两个阶段 $0.7<D_o<0.8$ 为壮年早期，$0.4<D_o<0.7$ 为壮年晚期，此期水系的粗糙度降低，但在壮年早期仍较大，各沟发育稳定，各级支沟的差异较明显；$D_o<0.4$ 时，水系处于老年期，此时水系粗糙度较低，支沟发育基本稳定，各级支沟的差异又变小。D_o 值的这一划分与小流域泥石流沟谷纵剖面形态特征的定量指标——沟谷纵剖面形态指数 N 值的划

分大体一致。这里地貌演化阶段的划分借用了戴维斯“地理循环”的术语。流域水系的演化一般是内外营力作用的结果，描述水系形态结构的分维不仅是外力侵蚀作用的体现，而且含有新构造隆升强度的信息。因此，这里所说的流域演化阶段，实际上是指内外营力相互作用的强弱程度。

泥石流多发生于山区次级小流域，由于泥石流动力作用特别强，其沟谷发育远比一般河流快。作为相对侵蚀基准的主河随构造抬升，不断受到下切侵蚀，从而使谷坡变陡，支沟坡降增大，坡面侵蚀增加，泥石流频发，大量固体松散物质进入河床。当达到冲淤动态平衡，即转入侧蚀或加积阶段时，主河的稳定又反过来影响谷坡和支沟的剥蚀，致使流域地貌趋向复杂化。主河这种下降继以稳定的周期性，使泥石流流域理论上应与地壳抬升继以长期稳定条件下的流域具有类似的演化规律。所以有：D_o＞0.7 为泥石流发育期；0.4＜D_o＜0.7 为泥石流旺盛期；D_o＜0.4 为泥石流衰退期。由于泥石流有不同于一般河流的许多特征：（1）泥石流下切力远比水动力强，在主河下切时，一旦沟谷侵蚀导致泥石流爆发后，河床就急剧下切，最大一次下切深度可达十多米；（2）泥石流侵蚀下切主要在中下游段流通区；（3）由冲淤平衡导致的主河相对稳定期不长，泥石流流域难以形成准平原。所以，仅用 D_o 一个指标判断泥石流是不完善的。从多重分形的观点看，泥石流的上述特征恰恰反映了流域水系的局部标度性，衡量这一特性的定量指标就是标度指数 α_q。由于双标度康托模型是建立在一维空间上的，对于一维情形，标度指数 α_2 描述的是分布在整体分形结构上的几率点间的距离。在地学意义上，它刻画了水系支沟分布的相类性。因此，可选用 α_2 作为泥石流的一个判别指标，相应的关联维 D_2 可作为泥石流强度的判别指标。研究表明，段家河流域在泥石流旺盛期（0.4＜D_o＜0.7），α_2 的分布范围为 0.178–0.315，其余水系的 α_2 值均在此范围之外。由此可判别出该流域内的六条泥石流沟：羊毛土南沟、粪积厂沟、小河沟、石家庄南沟、冷水沟、下西埔沟。流域中游的假岩沟的 α_2 值为 0.　328，刚刚超出泥石流沟的 α_2 的范围，可认为是潜在的泥石流沟。与实际情况对照，可发现除羊毛土南沟、粪积厂沟以外，其余五条均为泥石流沟。错断率为 28.5%。将五条泥石流沟的 D2 值按从小到大的顺序排列，下西埔沟（0.238）、冷水沟（0.299）、石家庄南沟（0.303）、小河沟（0.360）、假岩沟（0.397）。其中，冷水沟曾经爆发过两次泥石流，较为严重。假岩沟没有真正爆发过泥石流。因此，可以将 D_2=0.3 作为判别泥石流沟强弱的临界值：D_2＜0.3 的沟为泥石流较强的沟，D_2＞0.3 为泥石流较弱的沟。

进一步研究表明，成昆线北段泥石流活动受构造影响大，流域水系的整体分维值 D_o 偏高，在泥石流的发育期（D_o＞0.7）也表现出较强的泥石流活动。因此，前述的泥石流演化阶段的定量描述在这里不完全适用，可用的 α_2 值的范围是 0.313–0.502.即 α_2 值落在此范围内的沟为泥石流沟。研究发现，在所有 D_o＜0.7 的沟中，特克沟的 α_2 值属于这个范围。说明除这条沟以外，其余的都不是泥石流沟，尽管它们都处在泥石流旺盛期。由此可判断出该区的八条泥石流沟：利子依达沟、老木坪沟、依不洛多沟、布交已达沟（苏雄沟）、崖吉沟、窄板沟、资勒沟、特克沟。

根据野外调查资料，其中的崖吉沟、资勒沟和特克沟不是泥石流沟。可见，错断率为 3/8=37.5%。据已有的调查结果，在所判的非泥石流沟中，列古多沟和瓦洪沟爆发过泥石流，因此，漏判率为 2/7＝28.6%。对所有的泥石流沟，其 D_2 值分别为：列古洛多沟（0.084）、瓦洪沟（0.288）、老木坪沟（0.377）、窄板沟（0.399）、依不多沟（0.520）、利子依达沟（0.537）、布交已达沟（0.561）。把 D_2=0.4 作为划分泥石流强弱的临界值即 D2＜0.4 为泥石流活动较强的沟。

小江流域的泥石流受小江断裂带的控制。从河流发育阶段看，所选水系的 Do 值多在 0.4—0.8 的范围内，即处于河流演化的壮年期，只有蒋家沟和大白泥沟处于幼年期（D_o＞0.8）。很明显，这是强构造造成的结果。D_o 值的这一刻画与实际情况比较吻合。由于小江活动带和强新构造运动的影响，流域内泥石流现象极为普遍，泥石流规模和爆发频率也较大。流域内泥石流沟一般都处在旺盛期。根据流域内水系的分形谱，可对该流域内的泥石流活动进行定量分析。在泥石流的旺盛期（D_o＞0.7），α_2 值的范围为 0.141—0.306，其余的沟虽然都处在发育期（D_o＞0.7），但只有三条沟（铜厂箐沟、小白泥沟、里里落沟）的 α_2 值不属于这个范围。通过 α_2 值判别得到，所选水系内有 11 条泥石流沟：蒋家沟、里大坪子沟、大桥沟、老干沟、达德沟、大白泥沟、达朵沟、三合口沟、小水沟、拖沓沟、望天地沟。实际资料表明，其中的望天地沟不是泥石流沟，故错判率为 1/11=9%，而在判为非泥石流的三条沟中，有两条是泥石流沟：铜厂箐沟、小白泥沟。故漏判率位 2/12＝16.7%。所有泥石流沟的 D_2 值分别为：达朵沟（0.194）、达德沟（0.222）、蒋家沟（0.227）、三合口沟（0.229）、老干沟（0.247）、大桥沟（0.259）、小水沟（0.369）、大白泥沟（0.371）、拖沓沟（0. 371）、里大坪子沟（0. 373）、铜厂箐沟（0.476）、小白泥沟（0.579）。判别泥石流强弱的临界值为 D_2=0.3。D_2<0.3 的为泥石流较强的沟，D_o＞0.3 为泥石流较弱的沟。

在高鹏等研究的三个地区中，作为泥石流判据的第二指标 α_2 值的范围分别为 0.178—0.315，0.313—0.502，0.141—0.306，没有较一致的范围界限。但是，可以发现大多数泥石流沟的 α_2 值小于 0.40。因此，可以认为这一数值是单一指标 α_2 值的一个粗略界线。α_2 值小于 0.4 的水系发生泥石流的可能性大，α_2 值大于 0.4 的水系发生泥石流的可能性小。在三个地区中，强度判别指标 D_2 值的分布为：0.238—0.397，0.084—0.561，0.194—0.579，虽然实际情况中并没有严格遵循 D_2 值由小到大、泥石流强度由强到弱的规律，但确定 0.3—0.9 为界，小于此界的为强泥石流沟，大于此界的为弱泥石流沟，则有一定的实际意义。事实上，由于这三个小地区的地质条件差异很显著，构造运动的强烈作用往往打破了流域地貌的正常循环周期，使地貌发育转入早期，即所谓的“回春”效应。所以，从 D_o 值的分布看，位于小江流域下游的的蒋家沟本应属壮年期，但实际却为幼年期。成昆线北段牛日河中游的依不洛多沟、崖吉沟情况相同。如果把构造活动看成流域系统的外力，则恰恰可以说明多重分形谱能较真实地反映流域演化中的非线性过程。以 D_o 值为定量指标分出的流域水系的演化阶段与实际较吻合。构造运动对泥石流的影响更

为明显。一般说来，处于泥石流旺盛期的沟谷最容易爆发泥石流。在所有的泥石流沟中，有 13 条处于泥石流发育期，有 11 条处于泥石流旺盛期。其中，地质条件较稳定的段家河流域中，仅有一条泥石流沟处于发育期，另外四条全部处于旺盛期，与泥石流发育的一般规律基本一致。而受地质构造运动影响较强烈的地区则有 12 条处于发育期，7 条处于旺盛期。由此可见，构造运动使泥石流的发育期向旺盛期转变，从而增加了泥石流的活动。这种作用与用分维、局部标度指数划分的泥石流发育、演化阶段并不矛盾。用这种方法划分仍然是可靠的。在所研究的三个地区，运用多重分形谱判别出 26 条泥石流沟，其中有 20 条是已知的泥石流沟，判别正确率达到 76.9%。在错判的 6 条泥石流沟中有 3 条（粪积厂南沟、羊毛土南沟、望天地沟）是因为没有野外调查资料的印证而归为非泥石流沟的。因此，有理由相信，这种分形方法可以为未知泥石流沟的预测提供有价值的参考信息。

3.3　岩石断口的分形构造与地震的分形现象

岩石断裂后，其断口粗糙不平，大小断层、裂缝、微裂纹互相嵌套、纵横交错，形成极其复杂的图象。研究表明，这种极其复杂、极其破碎、表面无规的结构的背后隐藏着分形的规律。

3.3.1　断层与裂缝的分形结构

丹尼斯（N.　Denis）和斯蒂佛（S.　Steve）[32]研究了破裂花岗岩深成岩体的地形面几何量值的变化。他们认为，由富含挥发性物质的岩浆结晶而成的花岗岩深成岩体的露头，反映了相应的地面与在深成岩体及邻近的基岩内发育的破裂格架之间存在着极好的相关性。下伏这种深成岩的山脉剖面具有一特征形式：山脉内部的溪流、路径及植被都沿花岗岩块间通过，其分布特征表明这些形迹是发育于地下深处而后又为侵蚀扩宽的狭窄细长的破裂形成的。这些深成岩及基岩中破裂的格局是力学变形的结果。这种变形与富含挥发性物质的岩浆的侵蚀、结晶和半固结冷却过程相伴出现。将这些体系剥露出来的风化和侵蚀过程，通过沿破裂的差异风化作用也形成了发育于地面的格局。在少数情形下，破裂也可以是包括远离冷却岩浆的热能、机械能及化学能等的耗散这一动力过程的产物。

在岩浆-热液系统中，破裂系的几何性质已广泛用于对构造、流体流动及化学史进行反演。作者们认为，虽然人们早就认识到破裂可成为热液流动的通道并建立了估计热液事件中岩石平均渗透率的反演方法，但是还应建立除理想情形外，由露头观察到的破裂网络的几何性质及估计的渗透率之间的函数关系。研究发现，这类深成岩体的地形极不规则：为壁陡的峡谷深切，这种峡谷为破裂控制，从一组破裂向另一组破裂过渡时形成突然拐弯。这样的表面难以用传统数学定量描述，而分形几何则为其提供了用武之地。小尺度研究发现地形数据具有分形特征，并可用分数布朗运动来模拟。地形数据的分析还表明区域断裂过程是分形

的。

作者们发现，随着硅酸盐的结晶并冷却到环境温度，熔融的硅酸盐在基质及其半固结的部分形成了系统破裂格架。深成岩体的风化使破裂更为明显，并造成地形面支离破碎，从而无法通过欧氏几何进行测量。在本质上，这些表面的几何量可能是破裂网络渗透性的标志。根据 1 ：25 万和 1 ：24 万地图可以对等高线和垂直剖面数值化并计算其分维 D。在单一的深成岩体内，具类似碎块形式的花岗岩深成岩体下伏区域的 D 值为 1. 15—1.28。这一值域是由于干扰及其它地质因素所致，其中包括使 D≈1. 05 的制图和数值化过程引入的误差。然而所有的值都大于该阀值，它们与局部的差异风化密切相关。在沉积物堆积或冰川侵蚀造成地表平坦的地方，D 值最小；而沿刃脊发育的等高线和无冰川的台地上，D 值最大。对于上述的每一区域，破裂的密度越高和（或）较连续发育的地方，D 值越大。在深成岩体造成的应力场近场的下伏基岩范围内，D 值也高。所得的分维显然与盐浆一热液事件相关，这可用来确定热液过程中活动的渗透网络的性质。

丹尼斯等的研究结果可以在如下方面得到应用，（1）应变分析。对存在类似的构造变形区域进行判定时，地质学家感到很费工夫。考虑到其分形构造，可能克服这一困难。如：索图斯山脉（地形极不规则的锯齿形山脉）深成岩体近场中较大的分维测量值，可能与岩体形成时所产生的异常变形格局相吻合。应变尺度也可能与相应的应力场有关，而且能够反演传统的连续介质力学无法完成的应力状态。（2）渗透率值与破裂网络的关联。破裂系的渗透性是破裂形成的变形期间岩石内部渗透率的统计测量值。这一期间被定义为破裂系的 F 处于活动状态的时段。其中“活动”的含义是沿 F 提供的网络的平流运移作用所导致的净热通量大于通过同一区域的传导热通量。（3）实例分析。克拉默山和沃邦纳特地幅的 7.5 分地图的地形等高线的分维测量值 D 在 1.11—1.26 之间变化。尽管这种变化与海拔高程有最直接的联系，但值域还受到诸如岩性、破裂发育程度、连续性及冰川平滑程度的影响。最大的 D 值出现于沿中央刃脊的高海拔等高线。在这些地方风化使花岗岩中的破裂更为明显。

近年来的研究发现，岩石破裂过程具有随机自相似性。H. Takayuki[33] 研究了日本断层系的分维，发现了不同标度下岩石破裂几何形状的分形结构。其方法是根据断层图，用数盒子法检验岩石破裂几何形状的统计自相似性。结果表明：在 2 到 20 公里的标度范围内，断层破裂系显示出较好的统计自相似（即分形结构）特征。在日本断层系中，其分维变化范围为 1.05—1.60；在日本岛弧中部地区为 1.5—1.6，并随着离开其中心距离的增加而逐渐减小。在较小的标度下，岩石破裂几何形状也显示出较好的分形结构。当标度为 0. 625—10 公里时，北伊豆半岛断层系（分支断层）的分维为 1. 49。当标度为 10-1 到 10-2 米的量级时，岩石破裂几何形状的分维约为 1.49—1.61。岩石破裂几何形状分维的上限约为 1.6，该值可由岩石实际破裂几何形状的分维估计而得，此值可作为模拟岩石断裂和破碎过程中的限制条件。

金（G. King）、萨多夫斯基（M. A Sadovskiy）、和黑拉塔（T. Hirata）[34～36]等人的研究表明，地表的断层线具有分形性质。吴汝山和安艺敬一（K. Aki）[37]利用地震波散射资料证明，岩石圈的三维

非均匀体也是分形的。这些不均匀体可以由不同的因素造成，如差应力较高地区出现的张开型裂纹，可以使该区域成为非均匀体。因此，研究地下非均匀体的结构特征（分形和分维数）以及该特征随时间的变化，对地震区的划分、寻求地震前兆及地下矿床的勘探开发都是有意义的。正如前所述，地面断层线的分维数最大值为 1.5—1.6，它将随地区的不同而变化。奥库博和安艺敬一（P.Okubo，K.Aki）[38]、肖尔茨和阿维勒斯（C. H.Scholz，C.A.Aviles）[39]沿圣安德列斯断层进行地面测量，其结果与上述估值一致。安艺敬一等发现，当尺度小于 300m 或 1km 时，分维为 1.2，而当尺度变大时，分维为 1。肖尔茨等对另一段断层测量得到的分维数为 1.4—1.6，当尺度大于 20km 时，分维为 1.1。这些地面结果与吴汝山等利用地震波推测地下结构的结论是大体一致的。

在地球科学中经常遇到各种复杂的形态和构造，他们往往具有分形的特征和分形维数。因而这些形态和构造包含了自然界的组织原则。

断层、裂缝及地下存在的许多非均匀体，看起来是非常不规则的，但他们存在着分形结构。因而，运用分形理论，我们就可以对这些复杂无规的形态给出较好的描述。近年来，本书的作者对四川碳酸盐岩地区的断层、裂缝的分形分布规律进行了较系统的研究，获得了一些新的认识[40]。四川的石油、天然气尤其是天然气主要储藏于碳酸盐岩中。碳酸盐岩储集层由于在其沉积环境、成岩和构造应力作用下，其断层、裂缝和孔洞的分布呈各向异性、极不均质等强非线性特征，因此，其缝洞体在储集层中的分布极不规则、非均匀性十分显著。这使得裂缝发育带的精确预测非常困难。这样，研究断层与裂缝发育的关系、裂缝发育和分布的规律，对裂缝性储集空间油气资源的勘探开发具有重要的实际意义。研究表明，裂缝方向和岩石层理方向之间存在一定的规律。一种意见认为，裂缝产生于褶皱过程中及进一步的构造变形运动中；而另一种意见认为，裂缝和局部褶皱的形态以及变形运动之间没有任何联系；还有一些学者认为，成岩和构造两种类型的裂缝随着时间的推移而融合在一起。由此，在没有任何构造因素的影响下，岩石中产生的次生变化也可以形成裂缝。这样关于裂缝的成因有三种不同的假说：褶皱前产生的裂缝、与褶皱同时产生的裂缝以及在褶皱后产生的裂缝。现代观测资料和研究结果表明：从全球性的大规模构造和人造地球卫星拍摄到的大地裂缝到各种不同的断层、裂缝乃至只有在显微镜下才能看到的微破裂，其结构上都存在着自相似性。这可能是由于在构造应力或地质作用下，在褶皱的形成过程中，产生各种不同的断带、裂纹而且向各个方向扩展的结果。因此，断层与裂缝系统的分形结构表明，裂缝与褶皱同时产生这一假说似乎更为合理。裂缝系统产生和扩展的机理及自相似结构可用拉普拉斯分形理论描述并通过裂缝扩展指数或扩展几率来计算裂缝网络的分维。而裂缝扩展几率又可以和裂缝参数如裂缝体积密度、面积密度、线密度、裂缝张开度、裂缝率等联系起来。裂缝空间的方位也可以和拉普拉斯分形模型联系起来。这样就得到了研究裂缝形成、扩展及分布规律的一种新方法。

在外成力作用下岩石内部性质发生变化形成的非构造缝，在层理面上形成多边形网格、并形成分支状的分形网络。因此，在极短的距离内，裂缝方向就发生变化，这类裂缝包括成岩缝和收缩缝。另一类为构造缝，

分为张裂缝和剪切裂缝，分别是正应力和切应力作用的结果。按照时间演化，可将裂缝分为：成岩缝、构造缝和风化裂缝。而按照尺度范围，大致可划分为层裂缝（不超出相同岩性地层范围）、局部缝（切割了不同岩性地层）、区域缝（超出局部构造范围）；从空间分布看，某些不同方向的裂缝组系组合在一起，给人的表观印象似乎是无序（几何混沌）的。实际上，岩石裂缝具有自组织性。无论是在时间尺度上还是在空间尺度上，都具有一致的几何形态。在通常情况下，裂缝网络由两组方向互相垂直的正交于层理面的主要裂缝组系组成。在个别情况下，可能由一组平行于层理面的水平裂缝组系（如薄层）和三组垂直裂缝组系（如泥灰岩）组成。不仅宏观的断层系如前面介绍的日本断层系、圣安德列斯断层具有自相似结构，而且微破裂如大理石的微观断裂也具有分形结构[41] 。裂缝和断层虽有尺度上的差异，但在几何结构上具有一致性。广义地，断层也可归结为裂缝。即岩石裂缝包括了地壳中大小及成因极为不同的各种断裂变形。

断层与裂缝系统具有分形分布。地面观察和岩芯取样分析的结果表明，地表露头上的裂缝组系与地下深处的裂缝具有相似性。地下深处有效裂缝密度最大的地方也就是上部地层或天然露头上的裂缝强烈发育带。地下深处岩石裂缝强烈发育带与地表的相似性，对碳酸盐岩地区的油气资源勘探具有实际意义。地表广泛发育的河谷水文网方向与裂缝方向一致，大规模融岩的形成与裂缝延伸方向一致而且经常沿裂缝发育。这不仅说明了岩石裂缝与地质构造有关而且说明了其分布上的分形规律即自组织性。有些学者认为，岩石裂缝可分为两类，一类的方向及形成机理与局部褶皱作用有关，而另一类则与褶皱和地层产状要素无关。后者具有构成地壳的分形网络结构，这种结构具有全球性特点，在从大到小的多种尺度上具有分形分布规律。不同地区、不同地层中的裂缝组系具有统计自相似性，裂缝发育的方向也有类似的性质。例如数量上，正交裂缝组系占优势而斜交组系次之。不连续裂缝的分布也有类似性质，它分布于不同尺度范围之内。考虑到断层裂缝分布的统计自相似性和非均匀性，在研究断层裂缝系统时，较合理的是选用多重分形模型描述裂缝的分布规律。把实际的断层裂缝系统划分成粗的均匀网格，根据裂缝密度或裂缝率求出每一网格内的裂纹生长几率，并对网格进行细化，可求得定量表征非均匀分布的广义维数谱或奇异谱。

图 3.2 是四川丹凤场气田阳新统断层分布图。阳新统是四川盆地碳酸岩盐地区主要油气产层，具有低孔隙、低渗透的特点[16] 。研究其断层分布的规律对认识地下受力强弱、连通性好坏、裂缝发育情况乃至勘探开发，都具有重要意义。

在三维常规时间剖面上，仅能查到丹凤场气田阳新统的 37 条大断层。运用瞬时振幅、瞬时频率和瞬时相位资料，寻找到 P_1 层内部未断开标准层面、落差小于 50m 的小断层 485 条，它们在空间的分布如图 3.2 所示。为了研究该断层分布是否具有分形的规律，取标度 $r=0.2cm-3cm$ 的 9 种不同标度的正方形（盒子）组成的坐标网来覆盖 1：100 000 的断层平面图。对标度

图 3.2　阳新统断层分布图

r，定义计数函数 C_i（r）

$$C_i(r)=\begin{cases}1 & 若第i盒子有断层\\ 0 & 否则\end{cases} \qquad (3.3-1)$$

对每一标度 r，计算出含有断层的盒子总数

$$C(r)=\sum_i C_i(r) \qquad (3.3-2)$$

对不同标度 r，C（r）的计算结果如表 3.1 所示。

表 3.1r 与 C（r）的函数关系

R(cm)	3	2	1	0.8	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1
C(r)	13	26	93	138	209	280	423	591	793

在不同标度范围内，对（1nr，1nC（r））的值用最小二乘法作线性回归，结果如表 3.2 所示。

表 3.2 不同标度范围内（1nr，1nC（r））的回归结果

标度范围	DB（盒维数）	R（相关系数）
R=0.2-3cm	1.5845	0.9938
R=0.3-2cm	1.6567	0.9981
R=0.4-1cm	1.6201	0.9991

由表 3.2 可求得盒维数

$$D_B=1.62\pm0.029 \qquad (3.3–3)$$

由于在双对数坐标系中，1nr 与 1nC（r）之间有显著的线性关系，因此，在统计意义下，断层的分布在尺度上满足非线性规律

$$C（r）=ar^{-(1.62\pm0.029)}（a 为常数） \qquad (3.3–4)$$

上述研究结果说明，在统计意义下，断层的分布在 200–30 000m 这一无标度区间内具有分形的规律。（由于计算时要受到图形的比例和分辨率的限制，所以实际的无标度区间可能更宽）。由于断层分布的维数为非整数，说明断层分布具有非均匀和各向异性的特征。它反映了储集空间内所受应力的非均匀性，从而裂缝的发育和分布也是非均匀的。这正是寻找裂缝发育带的困难之所在，也是借助非线性科学方法解决问题的希望之所在。事实上，对这种非均匀性的更细致的刻画可以应用多重分形模型，定量描述断层分布的密集区和稀疏区，由此确定地下连通性的好坏，并对其渗透性能作出适当的评价。

岩石破碎的剖面线也有分形的特征，分维可以较好地描述节理岩体的粗糙度。事实上，它和节理岩体的粗糙度系数之间存在着密切的关系。节理岩体的粗糙度系数（JRC）是岩体变形、破坏过程力学分析中的一个非常重要的参数。在确定岩体结构面抗剪强度时，结构面粗糙度往往是影响其大小的基本因素，这种程度可用巴顿提出的 JRC 分级来表示。巴顿根据现场调查将节理面的粗糙度分为十级。在实际工程中，需依靠节理面的大致形态、起伏程度，并凭一定的经验确定 JRC 值，这既不便取值又不利于估计误差，从而大大限制了巴顿抗剪强度公式的实用性。而根据节理岩体的分形特征，对 JRC 进行定量化分析，就能弥补现场岩体抗剪试验的困难，利用室内试验结合 JRC 估算节理岩体的抗剪强度。

谷拴成对巴顿提出的标准粗糙度剖面线进行了分维测量。任取一条剖面线，用长度为 r 的线段去测量，测得的结果即测量步数记为 N（r）。在无标度区间内 N（r）与 r 之间存在着分形幂律关系

$$N(r)=Kr^{-D_f} \qquad (3.3\text{–}5)$$

式中 K 为常数，Df 就是测量得到的分维，是描述节理剖面线粗糙程度的一个重要参数。在双对数坐标系中对测量所得的点（logr，logN（r））作线性回归就可得到 Df 的估计值。其结果如表 3.3 所示。

表 3.3　不同级别节理岩体标准粗糙度剖面线的分维测量值

巴顿的 JRC	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
	12-14	14-16	16-18	18-20		
分维 Df	1.0004	1.0015	1.0029	1.0040	1.0043	1.0054
	1.0070	1.0079	1.0092	1.0133		

对上表中的数据作统计回归可得到下述方程

$$JRC=-75246.2131D_f^2+153011.410D_f-77766.060 \qquad (3.3\text{–}6)$$

该方程表示了巴顿的 JRC 和分维 D_f 之间的统计关系。

在实际应用中，传统的方法是先测量节理壁面抗压强度和基本磨擦角，再根据巴顿公式反算出 JRC 值。现在有了分维计算的方法，就可以先测量节理粗糙度剖面线的分维 D_f，再运用公式（3.3–6）计算 JRC。谷拴成以花岗闪长岩岩体的室内实验为例，分别用传统方法和分维方法计算了 JRC 值，结果说明利用分维研究节理粗糙度的 JRC 值与试验反算值能较好地吻合。其结果如表 3.4 所示。

表 3.4　利用分维和试验反算的 JRC 值的比较

试验节 理组号	节理分维（Df）	得用 D 计算的 JRC 值	试验反算出的 JRC 值
第一组（A-1）	1.0028	5.69	5.67
第一组（A-2）	1.0029	5.80	5.77
第二组（B-1）	1.0031	6.28	6.29
第二组（B-2）	1.0033	6.51	6.48
第三组（C-1）	1.0023	4.68	4.66
第三组（C-2）	1.0024	4.72	4.70

3.3.2　地震分布的分形特征

地震是地球内部岩石脆断或位错所引起的地动现象。地震能产生断裂，地震本身又与地层中的断裂有关。地震中的断裂有各种不同大小的尺度，同时又与能量的传播有关。

地震在强度分布上存在着分形的规律。地震越大，发生的次数越少。在地震震级与地震频率之间有一个著名的古登堡–理希特（即 G–R）公式

$$\log NT=a-bM \qquad (3.3\text{–}7)$$

其中 M 为震级，N_T 为震级在 M 以上的地震总数，a 与 b 是系数。其中 b 值是一个重要参数，反映了岩石所承受的平均应力和岩石内部平均强度的大小。金曾于 1983 年发表文章指出 b 值的几何意义。他认为，b 值是在某种几何条件制约下长期均匀有限变形的结果，也是断裂分形的必然

结果，不需要从应力方面去考察。1981 年，安艺敬一证明了（3.3–7）式与地震分形分布的定义等价。

地震矩（能量）可用下式定义

$$E=\mu\delta A \qquad (3.3–8)$$

式中μ为剪切模量、A 为断层破裂的面积、δ为断层破裂的平均位移。震级 M 和地震波能量 E 之间有如下关系

$$\log E=C+1.5M \qquad (3.3–9)$$

式中 C 为常数。当 E 以焦耳为单位时，C＝4.8。把（3.3–7）和（3.3–9）结合起来，就得到

$$N_T\propto E^{-b/1.5}\propto E^{-De} \qquad (3.3–10)$$

式中 D_e 为能量分维。由此可见，地震次数是随着能量的减小而增加的，二者有分形幂律关系。如果把能量 E 视为标度，则能量分维 D_e 为

$$D_e=b/1.5$$

此式揭示了地震 b 值与分维之间的深刻内在联系。

如果把断层破裂的线度作为尺度，则

$$E=ar^3 \qquad (3.3–11)$$

是一个很好的近似[43]。式中 $r=A^{1/2}$ 是断层破裂的线性尺度。由（3.3–7）、（3.3–9）和（3.3–11）可以得到

$$\log N_T=-2b\log r+\beta \qquad (3.3–12)$$

式中

$$\beta=bc/(1.5)+a-b\log a/1.5 \qquad (3.3–13)$$

（3.3–12）可以改写为

$$N_T\propto r^{-2b} \qquad (3.3–14)$$

由分形分布的定义 $N_T\propto r^{-D}$ 知，震级大于 M 的地震数目 NT 的分形分布的分维 D＝2b。代表了区域性或世界性地震活动的分维。

作为区域频度–震级分布的一个例子，梅恩和布尔顿（I.G.Main，P.W.Burton）总结了南加利福尼亚州的地震活动性。他们用 1932 年至 1972 年的地震资料给出了震级大于 M 的年地震数目 NT 与 M 的函数关系。他们得到，在 4.25＜M＜6.5 的震级范围内，地震活动的分维 D＝1.78。在（3.3–9）和（3.3–11）中取 C＝16，a＝3.27×107 达因/（厘米）2，相应的 r 取值范围为 0.9km＜r＜12km。对较小振幅的地震（M＜4.25），估计其资料也会满足这一关系，只是在大区域范围，仪器的控制能力往往不足。

大于 6.5 级地震的资料偏离了这种分形关系，其原因可能有两条。其一，6.5 级以上的地震数目太少，因此做这样的统计难以得出有意义的结果。其二，加利福尼亚州的地震孕震深度大致在地下 12 公里处，而且大地震可能具有非对称的断层破裂。因此，那种几何上的自相似性就不再适用于震源深度大于 12 公里的地震。

对圣安得烈斯断层南段，当 M＝8.05 时，其地震数目 $NT=0.006a^{-1}$（重复时间 163 年）。通过对区域地震活动的分形关系的外推，似乎可对圣安得烈斯断层该段上的大地震作出一个合理的预测。

据观测，b 值接近于 1，通常不低于 0.7 或高于 1.3。因此，能量分维在 $0.47\leqslant D_f\leqslant 0.87$ 之间。研究发现地震 b 值所反映的分形规律跨越了

很大的尺度。其无标度区的上限可到 7 级以上，其下限很可能在 0 级，其能量至少跨越了 10 个数量级。其原因可能在于断层系统具有很好的自相似性。

人们发现，b 值随时间、空间均有变化。特别是大地震发生之前，根据中、小地震计算出来的值往往有明显的变化。例如 1964 年 1 月 22 日，发生在日本本州北部的一次 3.3 级地震，高灵敏度的地震仪记录了前震共 25 次，余震 173 次，求得前震 b ＝0.35，余震 b＝0.76。又如 1960 年 5 月 22 日，发生在智利的 8.9 级大地震，观测结果，前震 53 次，余震 186 次，求得前震 b＝0. 55，余震 b＝1. 33。由此可见，地震前后 b 值不同，通常是震后的 b 值大于震前的值。因此，测定 b 值可作为预报地震的一种方法。根据 b 值和能量分维 D_e 的关系，分维 D_e 也有可能成为预报地震的新参数。109

值得强调指出的是，在用分形关系作为大地震的预报因子时应审慎行事。其原因正如如上所述，尽管一个特定区域内的 b 值几乎可以保持为常数，但其地震活动水平可能随时间变化，致使任何外推都可能产生较大的误差。例如，如果一次大震的发生降低了大区域的应力水平，那么在大震后的地震活动水平也会相应下降。此外，每个区域里都会发生一次最大的特征地震。该地震的大小与当地的区域构造有关，地震的灾害与这一最大地震的震级密切相关。然而，我们没有理由认为地震的大小与分形分布的其它特征有关。金和图尔科特提出用构造来解释地震活动性的分形分布。一个例子是每一断层都发生一次特征地震。他们认为，如果果真如此，则地震活动性的分形分布就意味着断层的分形分布。

地震在时间轴上的分布也有分形的特征。研究表明，地震在时间轴上的分布是类似于康托尘集的离散点集。因此，就使人们想到用分形理论来研究地震的时间分布。用不同标度的定长时段△t 来测量地震的时间分布，分别统计出“有震时段数”N，然后在双对数坐标系中回归点（log△t，logN），就可从直线段的斜率来求出时间分维 D_t。洪时中[42]等考察了四川西部 1970—1985 年间地震活动的时间分布，求得时间分维为 0.48。

地震的空间分布也具有分形的规律。在不考虑震源的体积与震源深度的差别时，可把地震视为三维空间中的一个点。于是，与星际中星球的分布类似，地震“震中”的分布也有某种程度的自相似性。如果把整个区域划分成为大小相等的若干格子，格子的边长为 ε 。当格子的大小 ε 不同时，分别统计出“有震格子数”N，在 log ε —logN 图上找到无标度区间，在此区间内对（loge，logN）作线性回归，其直线段的斜率就是地震空间分布的分维 D_s。我国学者安镇文等人对地震空间分布的分维进行了探讨。结果发现，我国几次 7 级大地震前，中、小地震的时间分维 D_t 和空间分维 D_s 明显偏低。这是一个很有意义的发现，说明地震的时间分维和空间分维有可能成为预报地震的实用手段之一。地震活动的分形特征有多种表现形式，有的还可能具有多重分形的特征，因此所得到的分维也有不同的形式。地震的分维研究虽然历史并不悠久，但已取得了一批有实际意义的成果，使人们看到了用分维来预报地震的一线曙光。值得注意的是，目前在实际计算地震的时间、空间分维时，碰到的一个具体问题是它们的无标度区间很窄，因此对计算的精度带来一些影

响。如何提高计算精度，并把地震的机制如震源模式、地震波的传播、地层和岩石的断裂与分维联系起来考虑，使分维在地震预报和震区的划分中产生更大的作用，仍是值得研究的课题。

3.4　地质构造的分形特征与矿产资源的勘探开发

早在 1967 年，曼德尔布罗特就把分形的概念引入到了地质科学中。图尔科特（D.L.Turcotte）指出[43]，标度不变性是地质学中的一个普遍现象。不仅海岸线、岛屿、地震、碎片具有分形的特征，矿床、油田的频度一尺度分布也常常满足这一关系。

矿品位（含量）达到某一特征值以上的矿石吨位的统计关系是估计矿物储量的基础。德.威吉斯（De　Wijs）在研究岩石中矿物的含量时发现，矿物分布可用下述模型近似描述。设一块岩石中某矿物的总量为 M。把这块岩石分成 2 等份，每块岩石分别含有 aM 和（1—a）M 的矿物。第二步把上一次的两块小岩石中的每一块分为两等份，即有 4 个岩石碎片，它们分别含有 a^2M，a（1—a）M，a（1—a）M，（1—a）^{2}M 的矿物。当 a＝0.5 时，矿物的分布是均匀的。但实际上的 a 并不是 0.5 且是不依赖于分割次数的一个常数。研究表明，这种分布的极限是分形，其分维可用下式计算

$$D=-\{a\log_2 a+(1-a)\log_2(1-a)\} \qquad (3.4\text{—}1)$$

上述模型对应于如下的数学描述：假设在 I＝[0，1]上分布着一个测度 M。把区间 I＝[0，1]分成 2 等份，每一个闭区间的长度为 2^{-1}。在[0，1/2]上的测度为 aM，在[1/2，1]上的测度为（1－a）M。第二步将上一次的每个子区间二等分，在[0，1/4]上的测度为 a2M，在[1/4，1/2]上为（1－a）aM，在[1/2，3/4]上为 a（1－a）M，在[3/4，1]上为（1－a）^{2}M；将上述的二等分每个子区间和类似的测度分配过程继续进行下去，可得

$$\rho\alpha=M \qquad (3.4-2)$$

$$\rho\alpha 1=\begin{cases}\alpha M & x\in[0,1/2]\\ (1-\alpha)M & x\in[1/2,1]\end{cases} \qquad (3.4-3)$$

$$\rho\alpha 2=\begin{cases}\alpha^2 M & x\in[0,1/4]\\ (1-\alpha)\alpha M & x\in[1/4,1/2]\\ \alpha(1-\alpha)M & x\in[1/2,3/4]\\ (1-\alpha)^2 M & x\in[3/4,1]\end{cases} \qquad (3.4-4)$$

用ρa（x）表示上述极限分布，它就是德・威吉斯分布。ρa（x）的曲线如图 3.3

图 3.3　德・威吉斯分布

ρa（x）的积分

$$M(x)=\int_0^x \rho a(t)\,dt \qquad (3.4\text{-}5)$$

表示德・威吉斯分布的矿物含量，如图 3.4 所示。

由此可见，德・威吉斯分布的矿物含量的曲线类似于魔鬼的阶梯，

是典型的分形曲线。由（3.4—1）可见，当 a＝0.5 时，D＝1；a＝0.5 时恒有 D＜1；特别当 a＝1 或 a＝0 时，D＝0。这种分布的非均匀性，更细致地，可采用多重分形来刻画，通过广义维数谱和奇异谱可以定量地表示矿物分布的富集区和稀疏区。

上述模型也可以在三维空间中表示出来。取一个线性尺度为 ι 的立方体（称为小盒），将其每边 2 等分得到 8 个边长为 ι /2

图 3.4 德·威吉斯分布的矿物含量 M（x）

的小立方单元（称为一阶小盒）。设 p 为单元立方体中的矿物含量与线度为 ι 的立方体中矿物含量的比。第二步把线度为 ι /2 的一阶小盒都等分成线度为 ι /4 的 8 个二阶小盒，二阶小盒与一阶小盒中矿物含量的比仍为 p，即矿物的集中度与标度无关，则其极限分布也是一个分形，其分维由下式给出

$$D=3\log(8p)/\log 8 \qquad (3.4\text{—}6)$$

有人应用这一分形特征研究了墨西哥湾油田的分布[44]。设 N_i 表示 i 阶油田数目，研究发现有 $N_{i-1}=1.67N_i$。由于 i 阶油田的体积是两个大于 i－1 阶油田体积的一个因子，所以其关系等价于一个分形分布且求得分维 D＝2.22。

图尔科特还用更简单的幂律关系来表示岩石中矿物的分布。他发现，如果 M 是具有平均品位<C>的矿物吨位且满足下述关系

$$\langle C\rangle \propto M^{-D/3} \qquad (3.4\text{—}7)$$

则矿物分布就具有分形规律。卡吉尔（S.M.Cargill）等[45]用矿的累积吨位划分了在某一特定日期之前开采的美国水银矿的累积吨位，其目的是要取得累积平均（重量）品位，他们以 5 年时间为间隔对数据进行回归，在双对数坐标系中矿品位与吨位之间有很好的线性关系并求得分维 D＝2.01。他们还对美国铜生产中矿品位对吨位的对数依赖关系进行了研究，发现了相似的规律并求得分维 D＝1.16。

对基岩中流体的流动速率或流动方式作出预测，对石油的开采是至关重要的。对多孔介质，目前已作了较多的研究。卡梵和汤普森（A.J.Katz，A.N.Thompson）[46]等指出，沙岩的孔隙率具有分形分布，这对于具有两相流动性质的扩散现象可能产生相当大的影响。洛尔特（D.D.Nolte）等人[47]对岩石内部天然破裂中流径的分形与渗流进行了探讨。他们发现石英二长岩中单一天然破裂的接触面积分布具有分形特征，在无标度区内，岩样的分维是应力的函数。当垂直于破裂的应力由 3MPa 上升到 85MPa 时，相应的分维值由 D＝2.00 下降到 D＝1.96 左右。他们还使用相同岩样研究了应力对流体流动的影响。结果发现，流体在破裂中的流动取决于破裂孔隙空间几何形状的两个性质即孔隙裂开度和流径弯曲度，它们可由接触面积的分布来确定。在应力作用下，上述每一量值均发生变化，从而导致流动速率的改变。他们建立了一个相关连续渗透的分形模型来定量重现流径的几何形状。将用此模型计算的分维值与实测的分维值进行拟合发现，天然裂隙的流径面积的百分比具有分形性质。他们声称，分维不仅是一描述性的量，而且可用于评价天然裂隙中流体流动的物理特征。

上述研究说明，裂缝性岩石具有不同于孔隙性介质的渗流特性。例

如，四川丹凤场气田，是一个多产层的典型的裂缝性气藏[16]。主产层 P1 层为质纯碳酸盐岩，致密坚硬，平均孔隙度小于 1％–5％，渗透率小于 0.01 毫达西，储集性能很差。但是当构造裂缝和溶蚀孔洞发育时，可具备储集和渗透能力。可见裂缝性储集空间的渗流，主要取决于构造裂缝的发育状况及其性质，即下述裂缝参数：表征发育程度或岩石破裂程度的裂缝体（面、线）密度；裂缝在空间的倾斜方位和裂缝张开度。如前所述，构造裂缝连接成组系，在几何形态上形成比较规则的网格形。在一般情况下，裂缝几何网由二组方向互相垂直的对地层而言正交的主要裂缝组系组成，构造裂缝为垂直缝。例如对地台区，主要发育的是对地层而言的垂直裂缝。其结构具有分形特征，因此可用正方形点阵来建立离散渗流模型。首先，在裂缝几何网上建立一个正方形基点阵。在基点阵中，当四个格点均占有张裂缝时，对基点阵作一次粗视化（即标度变换）后的格点仍占有张裂缝。在碳酸盐岩中，裂缝张开度随深度增加而降低，连通裂缝的宽度在 1mm 以上的可能性很小。因为产层总要承受上覆岩层的重量，因而水平裂缝壁就必然紧紧地相连接。在致密岩层中，因为侧向压力大大小于垂直压力，垂直裂缝可能没有闭合，这些没有闭合的裂缝应当具有很高的渗透性。因此，如果基点阵中在三个格点上含有张裂缝，经一次粗视化后的格点仍含有张裂缝，这时有四种组态；如果纵向上的两个格点含有张裂缝，则粗视化后的格点仍含有张裂缝，有二种组态；横向或对角线上的两个格点含有张裂缝时，粗视化后的格点不含张裂缝。设点阵中每个格点占有张裂缝的概率为尸，粗视化后的格点占有张裂缝的概率为尸，根据重正化群理论，下述方程成立

$$P' = T_2(P) = P^4 + 4P^3(1-P) + 2P^2(1-P)^2 \quad (3.4\text{–}8)$$

上式决定了非线性重正化变换 T_2。设临界点为 P_c，不动点为 P^*，由重正化群理论的不动点存在定理，有

$$P^* = T_2(P^*) = P^{*4} + 4P^{*3}(1-P^*) + 2P^{*2}(1+P^*)^2 \quad (3.4\text{–}9)$$

化简上述方程，求得其四个解为

$P^*_1 = 0$，$P^*_2 = 1$，$P^*_3 \approx -1.6163$，$P^*_4 \approx 0.6182$

由于 P 表示概率，故有意义的不动点只有 $P^*_4 = 0.6182$，从而临界值为 $P_c = P^*_4 = 0.6182$。在临界点，格点含裂缝的期望值是

$$N_c = [4P_c^4 + 12P_c^3(1-P_c) + 4P_c^2(1-P_c)^2]/P_c \approx 3.0567 \quad (3.4\text{–}10)$$

粗视化后的格点标度与原格点标度之比为 1/2，根据分形理论，在渗流临界点 Pc＝0.6182 处，渗流集团的分维为

$$D = \log N_c / \log 2 = 1.612$$

在褶皱区，由于斜交裂缝组系的发育程度和垂直于地层的裂缝组系相同，因此，当对角顶点含有张裂缝时，粗视化后的格点仍含有张裂缝，共 2 种组态。其余情况和地台区相同。这时，对应于（3.4–8）和（3.4–9）的方程为

$$P' = T_2(P) = P^4 + 4P^3(1-P) + 4P^2(1-P)^2 \quad (3.4\text{–}11)$$

$$P = P^{*4} + 4P^{*3}(1-P^*) + 4^{p*2}(1-P^*)^2 \quad (3.4\text{–}12)$$

化简（3.4–12）并求得其解为

$$P_1^*=0，P_2^*\approx 3.16，P_3^*=P_4^*\approx 0.42$$

因此，临界值 $P_c=0.42$。同理可求得临界期望值 $N_c=2.6545$，渗流集团的分维为 $D=1.41$。

由模型的建立过程可见，上述两种情形求出的临界渗流集团的分维实质上也是能形成渗流的张裂缝分布的分维。在实际应用中，概率 P 可用点阵含有张裂缝的频率代替，而 P 本身也可看成一种新的裂缝密度参数。上述结果说明，地台区形成渗流的裂缝密度大于褶皱区。

上述理论可运用于油气田的开发地震研究之中。例如，丹凤场气田只有一组垂直构造缝，其裂缝分布模型可用（3.4–8）描述。这里用重正化群理论计算的分维与 3.3 节中对断层系统实测的分维一致，这说明裂缝与断层在分布上具有相似性。过去，关于岩石裂缝与断层的看法不一。现代观点认为，构造缝与断裂之间不是质的区别而是量的区别，断裂形成过程和构造缝的产生极为相似。这里的研究结果支持这一论断。同时，根据这一相似性，可通过地震资料查找大小断层的分布，并根据断层分布预测裂缝发育带。断层分布的分维接近于临界渗流集团的分维，说明在大小断层分布较密集的区域，储集层的连通性和渗透性好，有利于油气资源的勘探开发。这解决了过去在地震资料解释时认识上存在的疑难。例如，丹凤场气田的 W1 井位于较大的异常块中但产储量低，这是由于该区断层少、连通性和渗透性差故不能获高产；而位于异常块边沿的 W9 井却为高产气井，其原因在于该区断层密集、连通性和渗透性好故获高产。另外，断层和裂缝分布的分形特征还为从已知断层信息模拟裂缝发育带提供了理论依据，后面我们将介绍有关模拟结果。

在地震勘探中，地表所观察到的地震反射信号是地震子波和反映地质的反射序列的褶积。在沉积剖面中产生的反射序列，由于地下各层中岩石声阻抗的明显差异，使得地表记录到的地震反射信号常常是相当复杂而难以解释的。反射序列是否具有标度不变性，也就是是否具有分形的特征，在地震记录的反褶积中是很有价值的，在油气检测中也很有意义。我们在这方面做了一些探索，下面予以介绍。

首先，我们对四川丹凤场气田联井Ⅱ测线地震道的 CDP 记录的时间波形进行了观察。从一条地震道曲线中取一部分放大，并和整条曲线进行比较，发现其在变化趋势上有一定的相似性，并对多道地震波曲线观察到类似的结果。由此，地震反射信号在统计意义下存在分形的规律[48]。进一步，我们考察了地震道反射记录的二维相图。设地震道反射的 CDP 记录为｛x（k）：k＝1，2，…，N｝。将其动态写作

$$x(n+k)=f(x(n))，n=1，2，…，N-k$$

我们取 k＝1，对四川丹凤场气田联井Ⅱ测线的 270 条地震道曲线作随机采样进行数值研究，通过计算机屏幕慢显示跟踪观察发现，从前一时刻系统的状态不能准确预测系统下一时刻的状态，但是系统最终都将达到动态稳定，即相图收敛于（x（n），x（n＋1））平面上的一个有界区域，如图 3.5 所示。

系统轨道的嵌套与折叠，表现出奇怪吸引子的几何形态。这可能是由于地下凹凸不平的界面、纵横交错的断裂（肖尔茨称

图 3.5　地震道曲线的二维相图

（a）干井区一条地震道的相图

（b）气井区一条地震道的相图

为“分裂层”）及含油气岩石构造中的细小孔隙、孔洞和微裂缝等引起地震波反射序列的非周期性变化而造成的。它可能还反映“分裂层”中存在着分形结构，而这种结构又控制作地层中的流体—水流、油流和天然气流的渗流运动。另外，油气区和非油气区地震道的相图既有相似之处，又存在着差异。系统的这种差异可用吸引子的关联维数定量刻画。这为运用分形和混沌理论处理碳酸岩盐地区地震勘探信息和提取新的参数进行油气预测提供了可能性。

汪富泉、罗朝盛等对 G—P 算法进行了改进，提出了识别无标度区间的准则[8]，并运用这一算法对碳酸盐岩中裂缝性储集层的地震勘探资料进行了分维研究[12]。方法是：将每一条地震道的时间序列嵌入到 d 维相空间中，用 G—P 算法计算关联积分 C（r），用文献[8]中的方法识别无标度区间。通过相关系数检验发现，在无标度区间内，数据间有显著的线性关系，一般相关系数 R≥0.96，作最小二乘法拟合得到关联维数 D_2。改变相空间的维数 d 重复上述过程，当关联维数 D_2 的标准差 S≤0.03 时认为关联维数达到稳定。将计算关联积分、无标度区、相关系数、标准差、关联维等参数的算法编制成 FORTRAN 软件在 PC 机上运行，计算了多条测线的叠偏剖面，对四川丹凤场气田联井Ⅱ测线的 270 条地震道曲线的数据进行处理后，获得如下结果。

（1）无标度区识别结果对绝大多数道地震数据，识别出的无标度区间较宽，极少数地震道的无标度区间较窄。相关系数检验结果，对每条地震道，标度 r 和关联积分 C（r）在双对数坐标系中都有极显著的线性关系。图 3.6 示出了地震道曲线的无标度区识别及关联维数计算结果。

由图 3.6 可见，在含油气区，地震道的无标度区下限为 i_1＝5，上限为 i_2＝11，相关系数为 R＝0.995，分维 D_2＝3.214，而

图 3.6　地震道曲线的无标度区与关联维数计算结果

（a）含油气区　　（b）不含油气区

不含油气区的分维为 1.01±0.02，两者有比较显著的差别。

（2）分维计算结果计算选用的是四川丹凤场气田联井Ⅱ测线的 270 条地震道叠偏时间剖面（第 50—320CDP 号）。该剖面长约 12km，是一套厚约 350m 的碳酸盐岩，储集空间主要是由构造作用、溶蚀作用所产生的缝洞发育带，如图 3.7 所示。该剖面上有 8 口已知钻井，它们位于 60—300CDP 号内（W18′ 井偏离测线，与 W18 投影在同一位置上）。将关联维计算结果绘成一条曲线，如图 3.8 所示。

图 3.7 丹凤场气田联井Ⅱ测线时间剖面

图 3.8 关联维与地震道的关系曲线

（0）代表实钻为干井或显示井（1）代表实钻为产气井

由计算结果可知，碳酸盐岩层中存在着分形结构。关联维曲线反映了该套碳酸盐岩层的地质构造是极其复杂和极不均匀的，裂缝与孔洞的

分布具有随机性。另外还发现 D2 的高值区具有一定的稳定性，它可能和含油气构造有关，而且稳定的范围越大越好。这可能是地质构造越复杂，地震反射序列越复杂。当其含有油气时，产层顶底会出现反射异常，导致含油气区出现升维现象。

根据计算结果，把各已知钻井的关联维数据分成两个样本组：

样本 A：1.6120，1.7249，2.2131，1.5388，1.5623

样本 B：2.5597，2.6509，2.5157，3.2144

A、B 分别代表不含油气和含油气样本。两组样本的均值和标准差分别为

$m_A=1.726662$，　　$m_B=2.735175$

$S_A=0.2551348$，　　$S_B=0.280943$

对两组样本作 F 检验：

$$F=\max\{S_A^2, S_B^2\}/\min\{S_A^2, S_B^2\}=1.21274$$

查表得 $F_{0.05}(4,3)=6.59$，因 $1.21247<F_{0.05}(4,3)$，这说明在置信水平 $a=0.05$ 下，两总体的方差没有显著性差异，即具有方差齐性，因而可对两组样本进行 t 检验。

$$|t|=|m_A-m_B|/[(n_AS_A^2+n_BS_B^2)(1/n_A+1/n_B)/(n_A+n_B-2)]^{1/2}=4.967649$$

查双侧 t 检验表得 $t_{0.05}(7)=2.37$，因此两样本的总体均值在显著性水平 $a=0.05$ 下存在显著性差异。由此可求出含油气裂缝发育带的临界分维值。两组样本的频率加权临界值和方差加权临界值分别为：

$$C_f=(n_Am_A+n_Bm_B)/(n_A+n_B)=2.172843$$

$$C_d=(m_AS_A^2+m_BS_B^2)/(S_A^2+S_B^2)=2.277846$$

把 C_f 和 C_d 的算术平均值 $C=(C_f+C_d)/2$ 作为判别裂缝 T 发育带是否含油气的判别准则：$D>C$ 的区域为含油气区，$D<C$ 的区域为不含油气区。从图 3.8 所示的关联维与地震道的关系曲线可见，曲线的波动起伏十分频繁，在此图上作出临界直线 $D=2.22534$ 来判别含油气区很不方便。此分维曲线的复杂性一方面是地质结构、裂缝分布复杂性的反映，另一方面可能还带有实验数据的随机误差。为检测方便起见，运用 5 点 3 次平滑算法将图 3.8 中的曲线平滑 2 次得到图 3.9，再在图上作出临界直线 $D=2.22534$，图中涂黑的部分为预测的含油气裂缝发育带。

综上所述，我们将各已知钻井区地震道的关联维数、预测结果和实钻结果汇于表 3.4。

图 3.9　关联维数曲线的平滑曲线与油气预测结果

表 3.4　丹凤场气田联井Ⅱ测线关联维数与油气预测结果

井　号	W1	W2	W6	W9	W11	W12	W18	W19
预测结果	有	有	无	有	无	无	无	?
实钻结果	有	有	无	有	无	无	无	无

表中“无”表示干井或显示井，“有”表示气井，而“？”表示该井的分维值与临界值十分接近，用关联维数不能确定该区是否为含油气区，需利用地质资料和其它参数综合判定。从图 3.9 和表 4.1 可见，地震波时间序列的吸引子维数即关联维数可作为油气预测的一个值得参考

的指标。

值得指出的是 D2 的高值区未必一定是含油气区，因为地质构造的异常、断层等也可能使反射增强导致 D_2 升高。实际上，在裂缝性储集层中双相（甚至多相）介质使地震波的传播十分复杂。因此，充分利用地质资料和分维及多种参数预测，会收到更理想的效果。

频谱分析是地震信息处理中一项十分重要的工作。反射波与干扰波的频谱差异在野外施工中可以用来选择合适的激发条件，室内处理中可用来选择合适的滤波手段压制干扰、提高信噪比。频谱中包含的与地质构造和地层岩性有关的信息，可用于地震资料的地质解释。我们认为，频谱中还包含着更为丰富的信息，如介质的振动特性、地质结构的非均质性、孔隙与孔洞体的分布等等。这些特性可运用混沌理论和分形维数来予以研究。事实上，如果地震信号的功率谱是连续的并展示出宽峰和噪声背景，则信号随时间的变化具有混沌特征，其相图就具有分形的结构。因而可求出其分维来定量表征这类信号。实际上，这类信号的分维可从其功率谱中求出。

汪富泉、罗朝盛用维尔斯特拉斯—曼德尔布罗特函数和分数布朗运动模拟了油气勘探中的人工地震信号[13]。考虑 CDP 记录增量调 $X(t+\tau)-X(t)$ 的变化。根据地层岩性变化的随机性，可设 $X(t)$ 为一随机变量，其分布满足

$$P\{[X(t+\tau)-X(t)]/\tau^{H}<x'\}=F(x') \qquad (3.4\text{—}13)$$

这里 τ 为时间延迟，$0<H<1$ 为赫斯特指数。这就是信号的分数布朗运动模型，它也可以刻画信号的混沌特征和分形自仿射性。

欲从信号推导出分形维数，就得推导谱能量对于频率或波数的幂律依赖关系。根据标度不变性

$$P(r)=r^{d-D} \qquad (3.4\text{—}14)$$

d 为信号所在欧氏空间的维数，对地震波 CDP 记录曲线 $X(t)$ 本身，$d=2$；对于地震波能量，$d=3$。因 τ 是时间域上信号的标度，因此上式又可写成

$$P(\tau)\ \tau^{d-D} \qquad (3.4\text{—}15)$$

与（3.4—14）比较知，$H=d-D$。随机变量 $X(t)$ 的均方值记为

$$V(\tau)=\langle|X(t+\tau)-X(t)|^{2}\rangle \qquad (3.4\text{—}16)$$

则由（3.4—13），（3.4—15），（3.4—16）得

$$V(\tau)\propto\tau^{2H}=\tau^{2(d-D)} \qquad (3.4\text{—}17)$$

当 $0<t<\tau$ 时，定义 $X(t)$ 的傅氏变换

$$X^{\wedge}(f,\tau)=\int_{i=0}^{\tau}X(t)\exp(2\pi ift)dt/\tau \qquad (3.418)$$

频谱能量密度为 $A(f)$，则

$$A(f)\propto\tau X^{\wedge 2}(f,\tau) \qquad (3.4\text{—}19)$$

对高斯白噪声，$A(f)=$常数，在其它情形下，频谱能量密度具有幂律关系（即分形关系）

$$A(f)\propto f^{-a} \qquad (3.4\text{—}20)$$

从而得到

$A(f)\propto f^{-a}\propto\tau^{a}\propto\tau V\propto\tau^{2H+1}=\tau^{-2(d-D)+1}$ （3.4—21）比较上述两

式得

$a=2(d-D)+1 \quad D=(2d-a+1)/2$ （3.4–22）

考虑地震波能量的变化时，取 d＝3，则 1≤a≤3，1≤D≤3，它们反映了地震波振幅（或能量）的变化情况和标度不变性质。根据不同地震道 a 值和 D 值的变化，可对储集空间中孔隙、裂缝和孔洞的发育带或油气富集区做预测。

为了应用上述理论做油气预测，仍然选择已完钻的四川丹凤场气田联井Ⅱ测线的地震道曲线的数据进行处理。这里只处理了第 60–300CDP 号的 240 道地震记录数据。在每条地震道曲线上选择位于碳酸盐岩层中的 60 个数据作离散快速傅氏变换

$$X(n/NT)=\sum_{i=0}^{N=1} x(kT)\exp(-i\pi 2nk/N) \quad n=0,1,2,\cdots,N-1 \qquad (3\cdot4–23)$$

对计算结果进行回归表明，功率谱近似有以下关系

$G=\|X(n/NT)\|^2=cf^{-a}$ c 为常数 （3.4–24）

式中 a 称为功率谱指数。在双对数坐标系中用最小二乘法拟合，即可求出 a。

设 D_f 表示地震波传播中的能量分维，则 D_f 与功率谱指数 a 的关系为

$$D_f=(7-a)/2$$

D_f 刻画了地震波传播过程中振幅（或能量）的衰减特性，包含了地质和油气构造的信息，可作为预测的一个参数。

对每条地震波曲线计算一个 D_f 值，以地震道号作为横坐标，D_f 作为纵坐标绘成一条曲线。然后用五点三次平滑算法对曲线作两次平滑处理，结果如图 3.10 所示。

图 3.10 地震道与 D_f 关系曲线与油气预测结果

根据井旁地震道的 D_f 计算值，将 D_f 划分为有油气和无油气两个样本组 A，B：

样本 A：2.9134，2.7975，2.86，2.8448，2.7688

样本 B：3.0375，2.976，3.0318

分别计算出两组样本的均值和标准差，作 F 检验，结果两组样本的方差具有齐性，从而作 t 检验，发现两组样本的均值具有显著差异。由此求出预测的临界值为 2.8966。从而得到判别准则：$D_f>2.8966$ 的区域可能为含油气裂缝发育带。预测结果与实钻结果如表 3.5。

表 3.5 预测结果与实钻结果的比较

井　号	W1	W2	W6	W9	W11	W12	W18	W19
预测结果	有	有	有	有	无	无	无	无
实钻结果	有	有	无	有	无	无	无	无

预测结果与实钻结果比较，其中被误判的井为 W6，该井井旁地震道 D_f 为 2.9134，在临界值以上，被判为有气，而实钻结果为干井。其原因可能在于该井下部近邻有一巨大硬盘，导致反射增强，能量维数升高。

从表 3.5 可见，该剖面上已完钻的 8 口井仅 3 口气井，而另外 5 口井为干井或显示井。说明以前在钻前检测上的精度不高，布井和开发决

策也有误。碳酸盐岩地区的钻井造价极高，每钻一口井将花费数百万元乃至上千万元，井位选择的失误将造成极大的经济损失。过去的布井决策主要以地质构造异常为依据。但是，碳酸盐岩的地质构造十分复杂、极不均质，缝洞体的分布呈各向异性和强非线性特征，井位的选择稍有差异，就可能钻遇极不相同的效果。例如，W18′ 井与 W18 井垂直测线方位相距 290m，投影在剖面上同一位置，实钻结果 W18 井为显示井，酸化未见气，而 W18′ 井为高产气井。因此，仅以地质构造异常为依据决定井位是很不够的。在作出决策之前，应采用多种方法、多个参数并结合地质资料作好钻前预测，提高井位选择的准确性，以免造成经济损失。

从预测结果可见，分维 D_f 的预测精度较高，是钻前预测和布井决策的一个重要参考指标。当然，D_f 并不是唯一的判据，D_f 的高值区也未必一定含气，如 W6 井下近邻的硬盘也使 D_f 升高。但是，它毕竟从一个新的角度提供了很有意义的信息。它可以和前面介绍的 CDP 记录的关联维数预测的结果互补。另外，D_f 变化频繁，曲线复杂，也说明了地下岩石结构非均匀性十分显著，缝洞体的分布很不规则。在一些未获气的已知钻井邻近，也出现 D_f 的高值区，但井位与 D_f 高值区有偏差，如 W12，W18。这些结果为决策者提供的启示是：应改变只钻直眼井的决策，而采取钻丛式井、斜井、水平井、巨能压裂等开发决策，做老井的复活工作，增加或气可能。

汪富泉、罗朝盛等还进一步研究了地震波传播过程中的分数布朗运动特性。计算了地震信号 CDP 记录的赫斯特指数和容量维数并进行了油气检测[15]。分数布朗运动，简记为 FBM，是随机过程和分形理论相结合的产物，由分形理论创始人曼德尔布罗特从普通布朗运动推广而来。它不仅可以刻画粒子的随机运动，而且揭示了粒子振动的位移增量与时间增量的标度性质，其标度律的指数 H（赫斯特指数）刻画了运动的前后相关性。该指数由统计学家赫斯特提出，并给出了由时间序列计算这一指数的简便算法和该指数满足的幂律关系，二者统称为 R/S 分析即极差、标准差比分析。曼德尔布罗特把分形理论和统计结果结合起来，将赫斯特的经验公式推广为分形幂律关系，使 FBM 和 R/S 分析成为处理很多分形时间记录的有效方法。前面的研究已经表明，虽然地震 CDP 记录的时间序列具有一定的随机性，但又蕴含了分形的规律。因此，可运用 FBM 和 R/S 分析来处理地震信息，并求出其特征参数用于油气预测。

由于碳酸盐岩介质的非均匀性，其地震波反射记录（CDP 记录）的振荡呈现出一定的随机性，而且又具有分形的内在规律。另一方面，根据地震子波的传播特性，介质中质点振动时的前后位移是相关的，这些特性可用 FBM 来表述，即将波的传播取为随机函数 $B_H(t)$。它的增量 $B_H(t)-B_H(0)$ 具有自仿射的分形性质，即

$$B_H(bt)-B_H(0)=b^H[B_H(t)-B_H(0)] \qquad (3.4\text{—}25)$$

在上式中令 t=1，△t=bt，即可得到 $B_H(t)-B_H(0)$ 的标度性质

$$B_H(\triangle t)-B_H(0)=\triangle t^H[B_H(1)-B_H(0)] \qquad (3.4\text{—}26)$$

$B_H(t)$ 的相关函数为

$$C(t)=\langle -B_H(-t)B_H(t)\rangle/\langle B_H(t)\rangle=2^{2H-1}-1 \qquad (3.4\text{—}27)$$

对普通布朗运动，H=1/2，C（t）=0；而对 FBM，有 C（t）≠0。由此可以推断，质点振动时位移或振幅的前后相关特性为：H＞1/2 时呈正相关；H＜1/2 时为负相关。

对 FBM，增量 B_H（t）-B_H（0）的均值为零，即

$$\langle B_H(t)-B_H(0)\rangle=0 \qquad (3.4\text{–}28)$$

由式（3.4–26）知，增量方差由下式给出，即

$$V(\triangle t)=\langle[B_H(\triangle t)-B_H(0)]^2\rangle \propto |\triangle t|^{2H} \qquad (3.4\text{–}29)$$

上式亦可记作

$$V(\tau)\propto\tau^{2H} \qquad (3.4\text{–}30)$$

在步长τ下，可计算出方差 V（τ），由上式可拟合出 H 值。在实际应用中，对于给定的时间序列，采用 R/S 分析算法更为方便。

设 CDP 记录的时间序列为｛x_1，x_2，…，x_N｝，则τ步长下的均值为

$$\langle x\rangle\tau=\sum_{i=1}^{\tau}xi/\tau,\quad \tau=2,3\cdots N \qquad (3.4\text{-}31)$$

累积离差为

$$X(i,\tau)=\sum_{t=1}^{i}(x_t-\langle x\rangle\tau)\quad 1\leqslant i\leqslant\tau,\quad \tau,=2,3\cdots,N \qquad (3.4\text{–}32)$$

极差为

$$R(\tau)=\max_{1\leqslant i\leqslant\tau}X(i,\tau)-\min_{1\leqslant i\leqslant\tau}X(i,\tau) \qquad (3.4\text{-}33)$$

标准差为

$$S(\tau)=[\sum_{t=1}^{\tau}(x\tau-\langle x\rangle\tau)^2/\tau]^{1/2} \qquad (3.4\text{-}34)$$

从式（3.4–26）可得如下标度律

$$B_H(\triangle t)\propto|\triangle t|^H \qquad (3.4\text{–}35)$$

曼德尔布罗特证明，极差 R（τ）是步长τ的函数而且具有标度性质

$$R(\tau)\propto\tau^H \qquad (3.4\text{–}36)$$

对于正规的分数布朗函数，真实标准差 S=1，但样本标准差 S≈1，因此 R/S 分析的结果是

$$R(\tau)/S(\tau)\propto\tau^H \qquad (3.4\text{–}37)$$

上式即赫斯特经验律在分形意义下的推广。从时间序列计算出 R（τ）/S（τ）的值，根据式（3.4–37），在双对数坐标系中对点（logτ，log（R（τ）/S（τ）））按文献[8]的算法识别出无标度区，并对无标度区内的点作线性回归，回归出的直线斜率即为 H。

地震波的传播及反射特性与地质构造和油气有关。对于 CDP 记录计算出来的赫斯特指数 H，由于它反映了地震波传播过程中前后时刻的相关性及其分形特征，因此也包含了地质及油气的信息。根据分形理论，这些特征也可用另一参数，即 CDP 曲线的容量维 D_0 来刻画。事实上，它们满足关系

$$D_0=2-H$$

此处，容量维 D_0 是地震波曲线本身的维数，反映了曲线的复杂程度和地震波振幅的变化。因此，D_0 和 H 均包含了地层和油气的有关信息，可作为油气预测的参数。但两者只有一个是独立的，知道其中一个。就可求

出另一个。由于地质构造包括油气构造和异常构造如断层、裂缝等，那么，地震波的振幅将因此而产生较大变化，使反射记录的复杂程度增加，其容量维将增大（H 指数减小），所以，容量维数较大（或 H 较小）的地震道可能是地层含油气的指示，故选择容量维数作油气预测更为方便。

在文献[15]中，对四川丹凤场气田联井Ⅱ测线的 CDP 记录共 240 道地震道曲线的数据进行了处理。每道上尸选择了位于碳酸盐岩地层中的 60 个数据，即时间序列长度 N=60，其剖面如图 3.7 所示。经对点（log τ，log（R（τ）/S（τ））作线性回归和相关系数检验，每道均有十分显著的线性关系。以地震道号作为横坐标，DO 作纵坐标，将该测线的计算结果绘成一条曲线。该曲线的起伏反映了该剖面上地质构造的变化，或作为含油气的标志，由此对可能含有油气的区域作出预测，如图 3.11 所示。为方便起见，这里用五点三次平滑算法对计算结果进行了两次平滑处理。

图 3.11 丹凤场气田联井Ⅱ测线容量维与
地震道关系曲线及油气预测结果

图中涂黑部分为预测含油气裂缝发育带。预测临界值的计算方法是：根据计算结果，将已知钻井井旁地震道的容量维分成两个样本组，即含油气样本 A 和不含油气样本 B。

样本 A：1.03，1.01，1.02，1.05，1.21

样本 B：1.24，1.19，1.27

分别计算出它们的均值和标准差，通过 F 检验知道两组样本具有方差齐性。再作 t 检验知道这两组样本的均值具有显著性差异，从而求得临界值为 D_0=1.112。

根据上述临界值，可对各钻井进行预测。预测结果和实钻结果的比较如表 3.6

表 3.6　丹凤场气田联井Ⅱ测线各并油气预测与实钻结果的比较

井　号	W1	W2	W6	W9	W11	W12	W18	W19
预测结果	有	有	无	有	有	无	无	无
实钻结果	有	有	无	有	无	无	无	无

鉴于碳酸盐岩地质构造的复杂性，把这里的方法和前面的关联维数 D_2，振幅谱指数和能量维数 D_f 结合起来，再结合其它参数和地质构造情况综合预测，可能会获得更好的结果。例如，用地震波的吸引子维数预测时，W19 井的情况很难判定，而这里的容量维的预测结果给于了重要补充。这里用 D_0 将 W11 井误判为有油气，而吸引子维数预测为无油气。用振幅谱指数和能量维数对该剖面进行预测时，W11 井亦不含油气。由此可见，综合运用多种参数和多种方法进行钻前预测，是提高钻井准确性和避免不必要经济损失的有力措施。

第四章　地貌和地质构造的分形模拟

大自然的艺术构造中隐含着自然界的组织原则，分形是其特征之一，我们在上一章中已经看到了若干实例。如果我们看看用各种分形方法模拟的地表形态，它们与自然界的真实地形是多么地相似，就可以更深刻地理解这一点。

4.1　地貌的分形模拟

借助计算机和分形方法，可以创造出各种各样的、以假乱真的模拟地貌。通过分析模拟地貌与真实地貌之间的差异和模拟地貌产生的机制，可以揭示某些地质构造对地貌影响的规律。

模拟表面的方法很多，其中之一是中点移位随机分形算法。其大致思想如下（如图 4.1 所示）：先在平面上取一个三角形（a），用线段将三角形各边上的中点连接起来，这样就制作出 4 个较小的三角形，按照某一随机选定的量将每一个中点向上或向下移动，使其置于该图象平面之外（b）。将上述相同的过程应用于每一个小三角形，并无限地重复这一过程，经过反复迭代，一个越来越详细的表面开始形成。中点移位过程中，由一种分配律分配中点的移位量，因而限定出该分形地形的不平度，然后通过计算机绘图程序用适当的明暗色填满这些三角形（c），在迭代的次数相当大时，所产生的结果与真实的山谷十分相似（d）。

前面已经提到，在中点移位算法中，中点上升或下降的随机量由一种分配律加以控制。为了使模拟的表面更为逼真，可以对随机量进行调节。如果要模拟一种比较平滑的表面，例如浅丘地形，变换时所采用的规则应该使得中点位移量在几次迭代以后就变得非常小。这一规则仅仅将一些细小的突出部分添加到整个轮廓线上。而为了模拟一种比较粗糙的表面（例如山脉的外形），就应该让这些位移量随每一次迭代缓慢地减小以得到满意的效果。

上述构造方法的实质与第一章讨论过的随机科契曲线的构造是类似的，一是给定一个源多边形，那里是直线段或三角形，这里为三角形；二是给出生成元，两种情形都是用折线段代替直线段；三是引入随机变量；四是作多次迭代。在极限情形就得到所要的图形，它们分别类似于海岸线或地表曲面。

上述制作表面的方法在地貌形态的研究中有许多应用，例

图 4.1 用中点移位算法生成的地表曲面

如，用这种方法建立土壤侵蚀过程的模型和分析地震模式，以便了解断裂带的变化情况。美国 IBM 研究中心的俄斯（R.Voss）已经采用这一方法来制作行星、月亮、云层和山脉的图象，它们看起来极为真实。

在费德（J.Feder）的《分形几何》[26]一书中介绍了一些生成地表曲面的方法，通过计算机模拟生成的表面看起来和自然地形十分相似。用这种方法模拟地形的大致思路如下。由于人们只能看到地形的一个局部区域，这就定义了长度标度的一个上界 L_{max}；另外由于人眼的分辨率

有限，又确定了一个最小的长度标度 L_{min}。再选择一个适当的正弦函数来产生起伏的地形。该正弦函数为

$$Z(x, y) = C_f \sin(fx) \qquad (4.1\text{–}1)$$

其中 C_f 是振幅，f 是空间频率，且 $f_{min} oc 1/L_{max}$，$f_{max} oc 1/L_{min}$。定义频率谱

$$f_j = f_{j-1}^{a} = f_0^{aj} \quad j = 1, 2, \cdots \qquad (4.1\text{-}2)$$

上述频谱是离散的且定义了指数 a 和基频 f_0。这里，基频 f_0 必须大于 f_{min}。参数 a 控制着地形的类型，一般选择 0.7≤a≤1.4。较低的 a 值产生高山地形，而较高的 a 值产生较光滑的地形。由于将频率视为标度，因而（4.1–2）使用了迭代的形式。

一般，地形在低频处有最大振幅，因此可假设振幅有如下形式

$$C_f oc f^{-\beta} \qquad (4.1\text{–}3)$$

为了得到看起来像自然地形一样的模拟地形，通常把β的范围控制在 1.05～1.4 之内。这一振幅谱公式可产生一条自相似曲线。为了得到地形高度值，作如下复的傅氏变换

$$Z(x) = \sum_j C_{fj} \exp(2\pi i f j x) \qquad (4.1\text{-}4)$$

为了使剖面线 Z（x）能产生平移表面，令

$$z(x, y \mid \psi) = z' \cos\psi + z'' \sin\psi \qquad (4.1\text{-}5)$$

其中，ψ是在 0–2π之间随机选择的一个角度，z′ 和 z″ 分别是 Z（x）的实部和虚部。

把上述高度剖面沿一个随机选定的方向移动几次就得到一个模拟地形。模拟结果如图 4.2 和 4.3 所示。

图 4.2　模拟地形　参数α=1.1，β=1.1

图 4.3 中，由于参数α较大，所以得到比较光滑的模拟地形。如果减小α就可以得到比较粗糙的模拟地形，如图 4.4 所

图 4.3 具有远景和曲率的模拟地形α=1.4，β=1.1

示。

应用维尔斯特拉斯-曼德尔布罗特函数可以模拟具有海岸线的地形。这时只须把频谱满足的公式（4.1-1）改为下式

$$f_j = b f_{j-1}, \quad j=1, 2, \cdots \qquad (4.1\text{–}6)$$

其中 $f_0=1$。如果选择振幅谱指数为β=（2-D），这时对应于（4.1-4）的函数 Z（x）即为维尔斯特拉斯-曼德尔布罗特函数

$$W(x) = \sum_{n=-oo}^{oo} (1 - e^{ibnx}) e_n^{i\varphi} / b^{(2-D)n} \qquad (4.1\text{-}7)$$

其中参数b＞1，1＜D＜2，φ_n为相位，如果φ_n取不同的值则对应了不同的特殊函数 W（x）。如果选择空间基频为 $f_0=b=4.7$，

图 4.4 具有海岸线的分形地形α=0.8，β=2.0，海岸线分维 D=1.15

振幅谱指数取为β=0.59，则可得到一个相当不规则的模拟分形地形，如

图 4.5 所示。求得其海岸线的分维为 D≈1.35。

在巴昂斯勒（M.F.Baransley）的《处处是分形》[49]一书中，介绍了用线性迭代函数系统来生成地表曲面的方法。用这一方法，可以模拟山区的轮廓、云彩；还可以模拟许多卡斯特地貌，如悬挂钟乳石的溶洞顶盖等等，如图 4.6 所示。

产生迭代函数系统的方法称为分形内插法。其定义如下：

给定一组初始数据｛（x_i，y_i）：i＝0，1，……，N｝，$x_i \in [x_0, x_N]$且满足

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_N$$

设内插函数 f：$[x_0, x_N] \to R$ 是一个连续函数且满足

$$y_i = f(x_i) \quad i=0, 1, \cdots\cdots, N \qquad (4.1\text{–}8)$$

点（x_i，y_i）称为内插点，如果函数 f 的图（用 G 表示）通过了这些内插点，则称 f 内插了这些数据。给定了内插数据（（x_i，y_i）：i=0，1，…，N｝，就可以构造平面上的一个迭代函数系统 IFS，使得该 IFS 的吸引子就是 G。巴昂斯勒给出的 IFS 是一组特殊的仿射映射

$$W_n \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e_n \\ f_n \end{Bmatrix} \qquad (4.1\text{-}9)$$

、上述迭代函数系统满足内插条件

$$W_n \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{Bmatrix} n = 1, 2, \cdots, N \qquad (4.1\text{-}10)$$

$$W_n \begin{Bmatrix} x_N \\ y_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix}$$

图 4.5　维尔斯特拉斯-曼德尔布罗特地形

b=4.7，β=0.59，海岸线分维 D≈1.35。

图 4.6 用线性迭代函数系统生成的卡斯特地貌-悬挂钟乳石的溶洞顶盖。

其中，把 d_n 作为自由参数，则可把其它参数表为

$$\alpha_n = (x_n - x_{n-1}) / (x_N - x_0)$$

$$e_n = (x_N x_{n-1} - x_0 x_n) / (x_N - x_0) \qquad (4.1\text{–}11)$$

$$C_n = (y_n - y_{n-1}) / (x_N - x_0) - d_n (y_N - y_0) / (x_N - x_0)$$

$$f_n = (x_N y_{n-1} - x_0 y_n) / (x_N - x_0) - d_n (x_N y_0 - x_0 y_N) / (x_N - x_0)$$

在 IFS 中，自由参数 d_n 称为垂直标度因子，满足$-1 < d_n < 1$，n=1，2，…，N。插值函数的图即 IFS 的吸引子的形状由 d_n 控制。当 d_n 较大时，所产生的地形较粗糙，分维也较大。当 d_n 较小时，所产生的地形粗糙度较小。

用线性迭代函数系统来模拟地表曲面，虽然较简单，但也存在着一些问题。其中的主要问题是：其地表曲面的剖面线有明显的周期性和断裂现象，其原因主要是迭代函数系统有着严格的自相似性。为了克服这一问题，赵乃良等引入了均匀 B–样条上的分形内插。样条上的插值是光滑插值，而线性分形内插曲线在一定的参数下是处处连续而不可微的。

它们相互结合产生的插值既不是简单光滑的插值又不是简单的线性插值，得到的曲线可以较好地模拟地表的剖面线。再运用 4 点细分方法并引入张量参数，就可以很好地模拟出一些自然风景，例如山和云，如图 4.7 所示。

图 4.7　用样条上的分形内插方法模拟的自然风景
——山和云彩（本图由赵乃良先生赠送）

为了模拟更广泛的地表剖面线，我们提出了非均匀 B—样条上的分形内插，给出了三阶和四阶非均匀 B—样条上的分形内插的算法并证明了三阶非均匀 B—样条上的分形内插的收敛性。与均匀 B—样条的情形一样，非均匀 B—样样条上的分形内插也可用来模拟各种不同的地表形态。限于篇幅，故不赘述。

可用于地貌模拟的数学工具还有分数布朗运动，例如，用下述函数

$$B_H(t) = \int_{-oo}^{t} (t-t')^{H-1/2} dB(t') / \Gamma(H+1/2) \qquad (4.1\text{—}12)$$

其中 Γ（x）是嘎玛函数。

乔木函数也是地表模拟中常用的函数。该函数可写为

$$f(x, y) = \sum_n bn\psi(2^{n-1}x, 2^{n-1}y) \qquad (4, 1\text{-}13)$$

式中 1/2＜b＜1，0＜x＜1，0＜y＜1。函数 ψ 为生成函数，由两个函数构成。例如

$$\psi(x, y) = |2x-\mathrm{int}[2x]\| 2y-\mathrm{int}[2y]| \qquad (4.1\text{—}14)$$

其中 int[x]表示取 x 的整数部分。由乔木函数产生的图形的分维 D=In（8b）　/In2。当 b=0.5 时，D=2；当 b=1 时，D=3。可见这是描述山形的一种有用函数。

近几年来，由于新技术的使用，使得所绘制的海底地图的分辨率日益提高。即使在最大标度之下，这些地图都能清楚地显示出海底测深所揭示的结构远比由热学和力学模型所揭示的结构细致而复杂，也远比能合理解释这一现象的其它模型所揭示的结构复杂得多。除了包含受控于板块模型的最大构造尺度特征之外，这些深度剖面的最明显特征在于其包含了各种不同标度下的特征。分辨率的提高将会显著地增加越来越多的难以解释的细小结构[50]。

为了探索海底地形是否具有标度不变性，一些作者运用迭代函数系统 IFS 对海底地形进行了分形重建（模拟）。巴伦布拉特（G.1. Barenblatt）等人[51]对北大西洋的海底测深剖面进行了分析，并确定了它们的豪斯道夫维数。依据离开洋脊的距离将测深剖面分段，结果发现从洋脊峰顶到离洋脊 2000 公里之外的豪斯道夫维数的变化范围为 1.46—1.05。

研究表明，傅氏分析是求出在给定标度下的地形特征与其波长关系的一种逼近方法。对海底地形的频谱计算表明，在 10^{-5} 公里到 10^{-1} 公里的波数范围内，振幅谱与波数呈反比且这一关系并不完全各向同性，而是随地貌区域的不同而不同。由此，一些研究人员认为，傅氏振幅谱包含了海底地貌的所有重要信息，并有可能揭示出海底地形的形成过程。由此，马内斯卡尔（J.C.Mareschal）[50]利用前面介绍的巴昂斯勒的分

形插值法（IFS），通过合成海底地形来说明海底的分形特征。他从海底测深剖面中选择了几个能反映剖面大致特征的数据，对原测深剖面作分形重建。通过对跨越东太平洋马斯麦提辛（Mathe-matician）洋脊所测数据的插值处理，计算并绘制了合成测深剖面，合成剖面与实测剖面的比较如图 4.8 所示。

在处理过程中，数据点的选择经过精心考虑，使之非平均分布。为了使所得的合成剖面与实测剖面更为相似，需对不同的垂直标度因子 d_n 进行试验。结果发现，如以获得实测剖面的总体特征，则数据的选择对插值结果影响不大。另一方面，垂直标度因子 dn 的选择对插值结果却有很大的影响，垂直标度因子 d_n 的取值越大，在较小的标度下所得特征就越粗糙。通过图 4.9 所示的两个剖面的傅氏振幅谱的比较，很好地说明了两个剖面之间的统计相似性。在双对数坐标系中，两振幅谱都具有在斜率为-1 的线性趋势上的随机波动叠加特性（即振幅谱以 1/k 递减，同时加上一些随机的变化）。由于波数对频谱中的最

图 4.8 跨越马斯麦提辛洋脊的实测深度剖面与合成剖面的比较。合成深度剖面是从实测深度剖面中选择 15 个数据点（标以“。”）通过插值处理得到的。插值算法中垂直标度因子 dn 的选取范围为-0.5～0.5。

小波数作了归一化，振幅也对相应于频谱中的最小波数的振幅作了归一化，因此只能比较两者的斜率。

马内斯卡尔还对跨越加利福尼亚莫洛凯（Molokai）破裂带附近海底地形剖面进行了插值处理。图 4.10 是实测剖面和分形重建剖面的比较。只要对数据点和垂直标度因子 d_n 作适当选择，就可使重建剖面与实测剖面非常相似。

通过频谱分析知，两个剖面有与图 4.9 一样的频谱特征，如

图 4.9、图 4.8 所示的实测深度剖面与合成深度剖面的傅氏频谱的比较。坐标系为双对数。两频谱的斜率接近-1。

图 4.11 所示。

上述研究说明，在通常情况下，所得的分形内插曲线具有和海底实测深度剖面相同的傅氏振幅谱。而且，如果内插参数 d_n 选择适当，则重建剖面与实测剖面的形态特征极为相似。

这种方法也可用于深度剖面间的面内插。据研究，海底地形可以用单位面积上与随机行走实验有关的密度函数来表征。这就表明，海底地形具有分形特征。虽然这一结果只在统计意义下成立，并且不够完善，但其积极意义是不容低估的。马内斯卡尔认为，海底地形分形重建法的成功使得有可能用某一尺度下测量的资料来外推较小尺度下的海底特征。如果这一论断成立，那么就有可能由离散数据以及其它附加信息资料通过近似计算，从海底面的大尺度特征中确定其完全功率谱。这对确定洋底反射系数，具有更重要的实际应用价值。

图 4.10　跨越加利福尼亚莫洛凯破裂带的实测深度剖面与合成深度剖面的比较。合成深度剖面由实测

剖面中的 14 个点（由“。”标出）经插值处理得到。

垂直标度因子 d_n 的取值范围为-0.4～0；4。

另一很有意义的问题是，海底地形的这种分形特征或标度不变性是否与海底面形成的物理过程有关？关系如何？不少研究人员对这一问题进行了探索并作出了一些推测性的解释。有关转换断层规模和频率数据的汇编工作表明，在可以测量和观测的范围内，转换断层呈双对数分布。由于转换断层的分布决定破裂带的地貌形状，因此，海底的分形特征也与断层的分布有关。金认为多尺度破裂是几何自相似的自然结果，而断层的

图 4.11 跨越加利福尼亚莫洛凯破裂带上实测和合成深度剖面的傅氏频谱。

分布则由空间自相似来确定。曼德尔布罗特认为，分形特征是潜在物理现象的结果并可应用重正化群方法来描述。图尔科特研究了破碎和断裂过程，认为应用重正化群方法可以获得分维特性。斯迈勒等曾引入重正化群理论来解释断层的粘滑形状，结果表明，标度不变性是物理现象的自然结果。在活动区域，海底地貌主要由诸如断裂和火山的活动过程来确定。因此，马内斯卡尔认为，引入标度不变性就有可能阐明海底的形成过程，其地形分维也可能得到一定的解释。

海底地形的分形描述并不是唯一的方法，马理维洛（A. Maliverno）[52]把洋底看作一非平稳随机过程。应用随机模型，输入非相关零均值噪声，经噪声时间序列的相关处理，并将相关噪声合成可绘制出类似于地形图的海底地形图，它是对非平稳随机粗糙表面的描述。为便于比较，他选择了两个模型[52]，一个模型是分数布朗运动 FBM（分形）模型，另一个是一阶自回归模型 ARIMA（1，1，0）。在前一模型中，噪声即使在很远的距离也彼此相关；而对于后者，噪声的相关性急剧减小。此外，两类模型具有 FGN（分数高斯噪声）和 AR（1）的白噪以及 FBM 和 ARIMA（1，1，0）的随机行走。用这两个模型来模拟海底地形剖面，并将样本的自相关、功率谱和方差图与理论预测作相应比较。结果表明，自回归模型和分形模型均能较合理地与观测结果相吻合，而分形模型能更好地模拟剖面，特别是更适合于样本自相关与方差图的研究。但是，对长波（量级为 1000 公里）而言，由非平稳分形模型预测的振幅显得不合理地偏大。对洋底地形而言，非平稳分形模型或自回归模型仅适用于波长量级约为 100 公里或更小的情形，如火山活动、断层以及质量消减等产生的随机海底地形。

地貌具有分形特征，其分维的计算也有多种方法，其中较常用的有谱分析法和高差统计法。

设 H 是地貌的高度，它是沿某个方向距离的函数。测量一系列 $H(x_i)$ 值后，可构造相关函数。$c(x')=\langle H(x+x')H(x)\rangle$。对 $c(x')$ 进行傅氏变换可求出功率谱 $G(f)$。对各向异性的地貌，有 $G(f)\propto f^{-2H-1}$，分维 $D=3-H$。这种方法常用于测定地貌轮廓的分维。

对于实际地貌，高度 H 是 x、y 的函数，即 $H=f(x,y)$，多采用高差统计法。设 $f(x,y)$ 是各态历经的，或分数步朗运动函数。高差的平均值 $A_f(\triangle x,\triangle y)=c\varepsilon^H$，这里 $\varepsilon=\max(\triangle x,\triangle y)$，c 是与 ε 无关的

常数，H 是霍德尔（H■lder）指数（H=3-D）。则分维

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} (3 - \mathrm{In}A_f (\triangle x, \triangle y) / \mathrm{In}\,\varepsilon)$$

高差统计法容易操作，应用很广泛。但也有两点不足：一是假定 f（x，y）是各态历经的，有失一般性；二是当 f（x，y）呈各向异性时，△x、△y 的不同选择可能导致不同的结果。

由杜布克（B.Dubuc）等人[53]引入的表面分维测定的变分法，显示出了很好的应用前景，比高差统计法更为可靠和切合实际。

总之，地貌学中的分形现象到处可见。分形不仅是大自然的一种构造与属性，而且是深刻认识自然的一种途径与手段。尽管目前建立分形地貌学的准备尚不充分，但是探索地貌的分形机制，努力沟通地貌分维与地质构造及其有关动力学因素之间的联系，确是十分有价值的。

4.2　地质构造的分形模拟

运用迭代函数系统的思想，我们建立了一个分形迭代算法。运用这一算法可以模拟平面上的确定性或随机性分形图形，因而可以模拟某些地质构造如断层裂缝系统等[54]。现在我们以二维情形为例介绍这一算法。在此算法中，初始函数以数据矩阵的形式给出，在平面上它对应于一个点阵 A。该点阵可根据用户的需要自行设定，也可以从实际问题中提取。对 A 进行迭代，即得 W^1（A），W^2（A），…，Wn（A），此处 W^n（A）= W（W^{n-1}（A））。若有平面点集 G 满足 G=W^n（G），G 即为最终输出结果。具体算法如下。

设给定初始数据矩阵 P^0 是一个 m×n 阶矩阵

$$P^0 = (P_{ij})_{m\times n} \qquad (4.2\text{–}1)$$

这里 P_{ij}∈[0，1]，i=1，2，…，m；j=1，2，…，n，因此称 p^0 为概率测度矩阵。在平面上，取一个正方形[0，1]×［0，1]，将其划分成 m×n 个边长为 1/n，1/m 的矩形，p_{ij} 就位于这 m×n 个矩形格子中。pij 所在矩形的一对对角顶点的坐标为（（j-1）/n，（m-i＋1）/m）和（j/n，（m-1）/m）。如图 4.12 所示。

图 4.12 阴影部分为 pij 所在的矩形，
一对对角顶点为 P，Q,其坐标为 P（（j-1）/n，
（m-i＋1）/m），Q（j/n，（m- i）/m）

现在对矩阵 P^0=（p_{ij}）$_{m\times m}$ 作迭代运算。第一步，将每个边长为 1/n 和 1/m 的矩形等分成 m×n 个小矩形，对 P^0 作一次迭代运算得到一个 $m^2 \times n^2$ 阶概率测度矩阵 P^1=（p^1_{kl}）$m^2\times n^2$，它是矩阵 P^0 与自身的克罗内克尔（L.Kronecker）积，即

$$P^1 = (p^1_{kl})m^2 \times n^2 = \begin{Bmatrix} P_{11} & P_{12} \cdots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} \cdots & P_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ P_{m1} & P_{m2} & P_{mn} \end{Bmatrix} * P^0 \qquad (4.2-2)$$

上式中“*”表示矩阵的克罗内克尔积，即用 P^0 中的每个元素乘以矩阵 P^0。这样，P^1 由 m×n 个 m×n 阶分块矩阵组成，例如其第（i，j）个分块矩阵为

$$P_{ij}P^0=\begin{Bmatrix} P_{ij}P_{11} & P_{ij}P_{12}\cdots P_{ij}P_{1n} \\ P_{ij}P_{21} & P_{ij}P_{22}\cdots P_{ij}P_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{ij}P_{m1} & P_{ij}P_{m2}P_{ij}P_{mn} \end{Bmatrix} \qquad (4.2-3)$$

P^1 的元素可写作

$p^1_{kl}=p_{ij}P_{ab}$，a，i=1，2，…，m；b，j=1，2，…，n

k=1，2…，m^2，l=1，2，…，n^2（4.2–4）

p^1_{kl} 所在矩形的一对对角顶点的坐标为（（l-1）/n^2，（m^2-k＋1）/m^2）和（l/n^2，（m^2-k）/m^2）。重复上述过程，即将迭代继续进行。第 N 步，将得到一个 $m^{N+1}\times n^{N+1}$ 阶矩阵 p^N=（p^N_{st}）$_m{}^{N+1}\times_n{}^{N+1}$，它是矩阵 P^0 与矩阵 P^{N-1} 的克罗内克尔积或 P^0 与自身的 N 次克罗内克尔积，即

$$P^N=(P^N_{st})_m{}^{N+1}\times_n{}^{N+1}=P^0*P^0*\cdots*P^0=P^0*P^{N-1}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{11} & P_{12}\cdots P_{1n} \\ P_{21} & P_{22}\cdots P_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{m1} & P_{m1}\cdots P_{mn} \end{Bmatrix}*P^{N-1} \qquad (4.2-5)$$

即 p^N 由 m×n 个 $m^N\times n^N$ 阶的分块矩阵组成，其第（i，j）个分块矩阵为

$$P_{ij}P^{N-1}=\begin{Bmatrix} P_{ij}P_{11}{}^{N-1} & P_{ij}P_{12}{}^{N-1}\cdots P_{ij}P_{1v}{}^{N-1} \\ P_{ij}P_{21}{}^{N-1} & P_{ij}P_{22}{}^{N-1}\cdots P_{ij}P_{2v}{}^{N-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_{ij}P_{u1}{}^{N-1} & P_{ij}P_{u2}{}^{N-1}\cdots P_{ij}P_{uv}{}^{N-1} \end{Bmatrix} \quad (4.2-6)$$

因此，P^N 的元素可写作

$$p^N_{st}=p_{ab}p_{uv}{}^{N-1}，a=1，\cdots，m；b=1，\cdots，n；$$

$$u=1，\cdots m^N$$

$$v=1，\cdots，n^N；s=1，\cdots，m^{N+1}；t=1，\cdots，n^{N+1}$$

（4.2–7）

在这一步，单位正方形被划分成 $m^{N+1}\times n^{N+1}$ 个边长为 $1/n^{N+1}$ 和 $1/m^{N+1}$ 的矩形。$p_{st}{}^N$ 所在矩形的一对对角顶点的坐标为（（t-1）/n^{N+1}，（m^{N+1}-s＋1）/m^{N+1}），（t/n^{N+1}，（m^{N+1}-s）/m^{N+1}）。

设迭代运算进行至第 N 步为止；取一个充分小的常数 ε，它可根据用户需要自行设定，也可根据实际问题来确定。规定当 pNst≥ε 时，在第（s，t）个矩形内画点，否则该矩形为空格。这样可得到平面上的一个多重分形分布。

从绘图的角度看，迭代过程应进行到迭代结果不随迭代次数改变为止，即得到迭代的不变集。理论上，迭代的运算过程可以进行到无穷多

次，但在计算机绘图时，由于要受到分辨率的限制，迭代几次以后就会收敛到一不变集。一般说来，该不变集是一个确定性的多重分形。

若需考虑点的随机分布，可令

$$p_{st}^{*N} = \text{rand}(.)\, p_{st}^{N},\ s=1,\cdots,m^{N+1};\ t=1,\cdots,m^{N+1} \tag{4.2-8}$$

其中 rand （.）是通过一个子程序产生的[0，1]区间的随机数。由此将产生一个随机的多重分形分布。

概括起来，该算法可以产生如下类型的平面分形图。

（1）在初始概率矩阵中，p_{ij} 只取 0 或 1 两个数字，并取 ε =1，将产生有规分形。

1）若 m=n，结果得到只有一个标度的自相似分形集。例如取 m=n=3，$p_{11}=p_{13}=p_{22}=p_{31}=p_{33}=1$，其余 $p_{ij}=0$，则得到单标度雪花分形，其分维 D=log5/log3≈l.465。

2）m≠n 时，将得到具有两个标度的自仿射分形集。

（2）若 $P_{ij}\in[0,1]$，最终结果由 P_{st}^{N} 决定，即得到一个确定性的多重分形。

（3）$P_{ij}\in[0,1]$，最终结果由 P_{st}^{*N} 决定，即得到一个随机多重分形。它可以模拟分形渗流现象。下面我们将把该算法和线性分形内插算法结合起来模拟断层系统在平面上的分布。

正如上一章中分析断层和裂缝系统的分形性质时所述，碳酸盐岩中的裂缝性油气藏，地质结构十分复杂，要开发这类油气藏，仅仅依据构造形态是很不够的。只有找到了缝洞体的具体分布，才能找到这些油气藏。由于其缝洞体分布很不规则，非均匀性十分显著。因此，不仅需要运用系统动力学信息开展裂缝发育带预测，而且应研究断层分布，揭示地下受力强弱和连通性好坏，对储集层做出评价。为此，我们对断层分布进行了模拟。四川丹凤场气田是典型的裂缝性气藏，阳新统断层的分布很不规则，在三维地震常规时间剖面上，只能查到 37 条大断层。我们首先运用上一节介绍的线性分形内插算法模拟了大断层的迹线。即输入大断层的少量特征数据，由分形内插算法作内插处理，计算结果表明，迭代 4 次就得到了不变曲线，即大断层的轮廓线。然后，将此迹线的平面图置于一单位正方形之内，根据断层分布的特点，我们令 m=n=4。根据每个小正方形包含断层的情况给每个小正方形一个概率值 P，含正方形多的方格 P 值较大，反之较小。经过试算，我们给出如下的初始数据矩阵

$$P^{0} = (P_{ij})_{4\times4} = \begin{Bmatrix} 0 & 0.1 & 0.18 & 0.22 \\ 0.15 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.32 & 0.28 & 0.24 \\ 0.2 & 0.23 & 0.22 & 0.18 \end{Bmatrix}$$

运用随机多重分形迭代算法迭代 4 次，并令 ε =0.001，得到的最终结果如图 4.13 所示。

把该图和利用三瞬资料整理的断层图 3.2 比较可见，模拟结果和利用三瞬资料整理的结果基本吻合。通过模拟可得到如下启示。

（1）断层的分布虽然是随机的，很不均匀，但具有内在的规律性，即统计意义下的自相似性或分形性。因此，露头断层密集的区域可能暗示着地下的断层分布较密集甚至可能成为油气构造，在进行地质资料详查时可列为详查对象。

（2）大断层分布较密集的地方，分布着较多的小断层，这些地方很可能为裂缝或孔洞发育的区域，其地下连通性和渗透性可能较好，有利于油气资源开发。因而，可结合地震动力学信息、波阻抗资料、声波测井资料进行油气综合预测，以便作出正确的勘探开发决策。

由此可见，断层模拟可提供有用的信息，在油气资源勘探开发中是一项很有意义的工作。值得指出的是，初始数据矩阵的选取对模拟结果有较大的影响。如何把这些数据和断层数目、区域地质构造情况和受力强弱等因素联系起来，以得到更好的模拟结果，仍是值得研究的一个重要问题。

图 4.13　丹凤场阳新统断层及裂缝展布的计算机模拟结果

研究表明，地震波曲线和声波测井曲线具有统计自相似或自仿射的分形性质。从这些曲线中可以观察到标度级别不同的现象。即在某一标度的特征之上叠加着许多更为细小的特征。因此，可用模拟的方法来探讨这些随着标度变小而伴随着复杂结构出现的系统。对这些系统，测量标度的每次改变都将会有新的结构出现，而测量仪器不可能把任意细节都记录下来。但是，通过仪器在大标度下的记录结果，可用分形的方法去外推小标度下的细节。拟测井曲线是从地震勘探 CDP 记录得到的地层的波阻抗曲线，反映地层段的大致结构。它远比不上声波测井曲线的分辨率，因此难得到地层的丰富信息。可以认为，拟测井曲线是大标度下的结果，而声波测井曲线则反映了相应小标度下的结果，这是因为地震勘探的地震波频率低，一般为几十 Hz，而声波测井的频率可高达几十 kHz。能否根据拟测井数据的标度性质求出其分维 D，根据 D 值和已知数据建立一个迭代函数系统，运用这个迭代函数系统对已知数据进行分形内插来模拟测井曲线呢？在[55] 中，运用前面的分形内插公式（4.1—9）—（4.1—11）对四川丹凤场气田联井Ⅱ测线剖面上的七口井和南海油田的三口井进行了模拟分析。所使用的控制参数（即垂直标度因子）dn 由下式确定

$$
\begin{aligned}
d_n &= [(V_n - V_{n-1})/(V_n + V_{n+1})]\,\mathrm{rand}(.) \\
&= [(Z_n - Z_{n-1})/(Z_n + Z_{n+1})]\,\mathrm{rand}(.) \\
&= R_n\,\mathrm{rand}(.) \qquad (4.2\text{-}9)
\end{aligned}
$$

其中 $R_n=(Z_n-Z_{n-1})/(Z_n+Z_{n+1})$ 为地层反射系数，V_n 为声速，Z_n 为波阻抗，rand（.）是[0，1]区间上的随机数，这样选择的目的是使 d_n 包含地层反射强弱和地层构造分布上的随机性。垂直标度因子 d_n 的取值范围为—1 到 1。

运用上述算法，对丹凤场和南海十口井的十条拟恻井曲线进行了分形内插模拟。为了研究拟测井曲线、模拟曲线和原测井曲线的相互关系，进行了相关性分析，结果如表 4.1 所示。

表 4.1 丹凤场和南海油气田部分钻井的拟测井曲线、

分形模拟曲线和原测井曲线的相关性分析结果

井　号		原拟测井曲线与声波测井曲线的相关系数	分形模拟曲线与声波测井曲线的相关系数
	W11	0.2034	0.6971
丹	W12	0.3614	0.8519
	W14	0.3142	0.8034
凤	W18	0.2956	0.7168
	W19	0.3238	0.7817
场	W2	0.3526	0.8231
W1		0.2904	0.693
南	LH1	0.4831	0.8286
	LH2	0.4021	0.7892
海	LH4	0.3225	0.7014

由此可见，拟测井曲线和实际声波测井曲线的相关系数较小，两者差别甚大。经过分形内插处理以后，模拟曲线（即声波测井曲线的分形重构曲线）与原测井曲线的相关系数显著提高，与实测井曲线很接近。

图 4.14（a）给出了四川丹凤场 W12＃的拟测井曲线，（b）是（a）的线性分形内插曲线，（c）是把（b）平滑处理以后得到的曲线，它就是实测井曲线的分形模拟，（d）是声波实测井曲线。分形模拟曲线和实测井曲线的相关系数为 0.8519，

图 4.14 四川丹凤场 W12 井拟测井曲线、
分形模拟曲线和声波实测井曲线的比较

两条曲线十分相似。

拟测井曲线即波阻抗曲线，很容易从 CDP 记录中得到。而声波测井曲线则需要通过钻井、测井才能得到，而钻井、测井都需消耗巨资。因而，如何从 CDP 记录中去寻找更细致的地层信息，是一个很重要的研究课题，分形模拟提供了一个很有意义的新思路、新方法。

第五章　物理与化学中的分形构造

在第二章，我们介绍了宇宙的分形构造；第三、四两章介绍了地表形态和地质断裂构造的分形特征。它们体现了大自然在宇观和宏观尺度上的组织原则。在中观或微观尺度上是否也有这种巧夺天工的构造艺术呢？凯依在《分形漫步》[24] 一书中，介绍了麦达利阿（A，　Medalia）拍摄的碳黑聚集体的高分辨电镜照片，如图 5.1 所示。

麦达利阿还拍摄了大量的碳黑微细颗粒照片。凯依对其详细研究发现，碳黑聚集体和碳黑微细颗粒的边界是复杂的分形曲线，有各种奇妙的形态和不同的分数维数。进一步研究发现，碳黑颗粒表面是粗糙不平的分形表面。据研究，其它一些物体表面、化学活

图 5.1 碳黑聚集体的高分辨电镜照片

性表面及其它聚集体也有分形特征。在物理、化学中，材料断裂、放电式样、高分子凝胶、合金薄膜相变、晶体生长的分形现象也逐一被揭示出来。本章中，我们将讨论这些问题。

5.1 固体与化学活性表面的分形特征

就像地表形态或其它星球如月球表面一样，许多固体表面具有分形特征。统计研究表明，75％以上的各种固体在几人至几百 A 左右的范围内有分形结构[2]。过去人们常把表面看成二维形体。分形理论诞生以后，人们的认识发生了很大的变化。事实上，在大标度下看来比较光滑的表面（如化学活性的固体表面），如果在小尺度下仔细观察，就会发现其粗糙与起伏不平的复杂结构，分形表面的维数介于 2 和 3 之间。分维越大，表面的复杂程度越高，表面有越多和越精细的凹凸、皱招和缺陷。极限情况下，表面的分维可达到 3。换句话说，在这种表面上的一个单层已不能再视为一个薄膜，而应视为占有“体积”。这是因为它具有极其丰富的孔隙、极其复杂的皱招，其结构犹如迷宫一般地反复卷曲，所以一般几何学的概念已不再适用。

按照上述观点，表面过程被看成是吸附质或反应物在固体（吸附剂、催化剂等）表面形成固态溶液的过程。以气固两相催化反应为例，催化剂不再是把反应物束缚其上，从而阻止其热运动，而是把它们“溶解”于其中。作为“溶质”的各反应物分子以及作为“溶剂”的催化剂和载体，在其处于“溶液”态的条件下，共同为反应的进行做出贡献。

由于表面分维是量度表面复杂程度的一个综合参数，所以催化的有效成分负载在载体上形成的催化剂，其性质会受到载体本身分维的影响，而如此形成的催化剂本身的分维又会影响它在催化反应中的性能。为了探讨载体与催化剂的表面分维与其催化性能之间的关系，就涉及到催化剂表面分维的测定。

表面分维的测定都与吸附有关，因而其分维都是通过吸附来进行的。首先，把直径为已知的球状分子吸附在物体表面，然后测定吸附分子的克分子数。现以化学活性固体表面为例来说

明表面分形的测定方法。为叙述方便，把被测的化学活性表面称为

吸附剂，用来进行吸附的气体称为吸附质。测定方法有两种。

（1）用不同截面的吸附质对同一吸附剂进行吸附

如果对一个理想的、完全平坦的固体吸附剂表面吸附一吸附质（单层吸附），则吸附剂的总表面积等于该吸附质的截面与被吸附的吸附质的数目的乘积。如果更换另一种吸附质，由于吸附剂表面是平坦的，吸附质完全紧贴着吸附剂布满整个表面，所以吸附剂的总表面积仍等于这种新的吸附质的截面与被吸附的数目之积。在这种情况下，固体吸附剂的比表面（单位质量吸附剂的表面积）是一个常数。

化学活性的固体表面，在分子尺度上存在着凹凸不平。在这种情况下，用小截面的吸附质分子进行吸附时，吸附质能较紧地贴于吸附剂的表面，而用大截面的吸附质分子进行吸附时，在吸附质和吸附剂间就会出现较多空隙。因此，用不同截面大小的吸附质进行吸附时，所获得的比表面数值不同。比表面值随吸附质分子截面的减小而增大。吸附剂比表面关于吸附质分子截面的变化率，与表面分维相关。事实上，设吸附剂所吸附的吸附质分子数为 N，吸附质分子截面半径为 ε 。则 N 和 ε 有下述幂律关系

$$N \propto \varepsilon^{-D} \qquad (5.1\text{-}1)$$

式中 D 为吸附剂表面的分维。设在吸附质系列中，每个成员分子的吸附截面 σ 与截面半径 ε 的比值相同，即

$$\varepsilon^2/\sigma = C \qquad (5.1\text{-}2)$$

式中 C 为常数，则可得到如下关系

$$N = K\sigma^{-D/2} \qquad (5.1\text{-}3)$$

本方法就是用这一关系式来测定分维的。用芳香族碳氢化合物及氮作为吸附质对碳黑表面进行吸附，测定出不同吸附质的 N，σ 数据，根据上式，在双对数坐标系中回归这些数据，所得分维为 D=2.25±0.09。

（2）用相同吸附质对不同颗粒大小的吸附剂进行吸附。

运用第一种方法时，需要寻求具有不同截面大小的吸附质系列，但这往往是比较困难的。因此人们提出了用同一种吸附质来测定吸附剂表面分维的方法。但这需要把吸附剂制成不同大小的颗粒，分别进行吸附测定。

考虑一个半径为 R_0 的吸附剂颗粒，若用半径为 ε_0 的吸附质分子进行吸附，则相当于用 ε_0 为单位对该吸附剂进行测量。若改用另一种吸附质分子，设其半径为 ε ，这意味着使用 ε 为单位对该吸附剂进行测量。按此单位，吸附剂颗粒半径的数值也应改变，设为 R，则如下关系成立

$$R = (\varepsilon_0/\varepsilon) R_0 \qquad (5.1\text{-}4)$$

将其中的 ε 解出并代入（5.1–1）中得

$$N \propto R^D \qquad (5.1\text{-}5)$$

上式指出了覆盖一个吸附剂颗粒表面所需的吸附质分子数 N 与吸附剂颗粒的半径 R 间的关系。若有一组吸附剂试样，它们的总体积相同，但各组试样所含的吸附剂颗粒大小不同。因为试样中的颗粒数 M 反比于各颗粒的体积，所以，为覆盖一个试样中半径为 R 的全部吸附剂颗粒所需的吸附质分子数 n 有关系

$$n = mN \propto R^{D-3} \qquad (5.1\text{-}6)$$

运用这种方法，用氮为吸附质吸附具有不同半径的 AEROSIL 硅胶颗粒，

求得这种硅胶表面的分维为 D＝2.02±0.06，此结果说明这种硅胶表面基本上是光滑的。

用以上方法测定表面分维，要求同一尺度的式样内部各吸附剂颗粒的大小相同，这在实验中是很难做到的。实际上各式样内部的吸附剂颗粒半径服从某种统计分布。假设半径为 R 到 R＋dR 之间的颗粒数为

$$dm=mf(R)dR \qquad (5.1\text{-}7)$$

式中 f（R）为颗粒半径分布的概率密度函数，李后强[11]导出了以下公式

$$\Omega_i(D) = Ai\int_{a_i}^{b_i} R^3 f_i(R)dR \Big/ \int_{a_i}^{b_i} R^D f_i(R)dR \qquad (5.1\text{-}8)$$

式中 A_i、f_i（R）以及 a_i、b_i 皆可由实验测得。用此公式对于每一个编号为 i 的式样均可得到一条 Ω_i（D）曲线，诸曲线交点处的 D 值即为所求分维。李后强用文献数据和实验测定数据对这种改进方法进行验证，结果十分理想。

通过对各种物质表面分维的测定发现，大多数物质表面都有分形特征，但不同物质表面分维的值很不一样。例如，在美国伊利诺斯州的握太华发现的一种特别光滑而坚硬的沙子，在许多粒度表征中用作标准物料，其表面分维 D＝2.02。石英沙的表面分维为 D＝2.21[24]。浦菲弗（P.Pfeifer）、法林（D.Farin）和阿乌尼（D.Avnir）测定了尼加拉瓜岩石颗粒和冰洲石颗粒的表面分维，分别为 D＝2.58 和 D＝2.16[24]。[2]中报道了用醇和氮作为吸附质，用方法一测量另一硅胶表面的分维结果：D＝2.97±0.02。

因为化学反应发生在表面，所以表面的分形特征对化学反应有较大影响。如果表面分维值较大，那么以较小的体积就能得到较大的表面积，从而可以提高反应效率。例如，作为脱臭剂用的活性碳和干燥剂用的硅胶，表面分维的维数几乎为 3，因而能吸附有气味的分子和水分子的表面积相对于体积都很大。因此，用较少的物质就能获得较好的效果。将固体溶于溶液时，如果固体的表面是分形，溶化速度也会明显加快。例如，在咖啡中放冰糖，溶化速度很慢，而方糖却溶化得很快，其原因就在于方糖内充满了裂缝和空隙，其表面积相对于体积很大的缘故。

5.2　材料断裂的分形性质

当金属材料受到的拉力和冲击力超过某个临界值时就会发生断裂。断裂表面是粗糙和不规则的，断裂边界也是很复杂的。在某些情况下，它们具有分形特征。裂纹周边的复杂程度可用分维来量度。

假设用大小为 r 的码尺去测量断裂的边界，所测得的结果为 N（r），则 r 和 N（r）满足形如（5.1–1）的关系式。美国学者特莫里亚（Y.Termonia）和米金（P.Meakin）研究了分子水平上材料的断裂动力学，求得 r 在一定范围内，分维 D＝1.27±0.02。

材料断裂的分形结构按对象划分，可分为断口分形结构和组织的分形结构。张军等[10] 将球墨铸铁的组织结构在扫描电镜下获得“立体照片”，再利用计算机图象处理技术测得组织结构的分维 D，然后对冲击样品做多次冲击试验，得到冲击次数 N 与分维 D 之间的关系近似为一具有

负斜率的直线。

材料的力学行为可划分为材料韧性、断裂韧性与强度。1984 年，曼德尔布罗特等[56]首先报道了冲击断口的分维与冲击功 J 的实验结果，引起了材料科学工作者的极大兴趣。谢和平等研究了岩石断口的分形结构与分维，并探讨了岩石裂纹的临界扩展力和分维的关系。实验研究得到的结果表明，裂纹临界扩展力 G 随 D—1 的增加而线性地减小。穆在勤等测定了超高强度钢断口的分维。实验研究表明，临界扩展力的对数与分维成线性函数关系。但是，理论分析的结果与实验结果明显不符。进一步，他们测量了平行和垂直于裂纹扩展方向两个剖面线的分维值 D_1，D_2 并假定单位厚度断裂表面的面积近似地等于 L_1L_2，其中 L_1 与 L_2 分别是平行与垂直于裂纹扩展方向剖面科契曲线欧氏长度的测量值，结果求得

$$\mathrm{Log}K_{IC} \propto \alpha\,[2-(D_1+D_2)]$$

其中 $\alpha=-0.5\log\varepsilon_0$，$\varepsilon_0$ 是裂纹扩展的最小步且 $\varepsilon_0<1$。他们认为，理论分析结果与实验结果是一致的。潘德等（C.S.Pande）研究了动态撕裂能与断口分维之间的关系。昂德伍德（E.E.Underwood）等研究了断裂韧性与分形维数之间的关系。他们认为实验结果与常识不符。

董连科在他的著作[10]中，对上面所述的中外学者关于材料的分形结构与材料性能关系的部分研究成果进行了归纳、分析与总结。他认为，在分形理论中，由于测度观的转变，与常识不符的反常现象，也有可能是分形更深刻地反应了问题的实质。把分形用于材料力学行为的研究，问题在于塑性形变上。产生分形结构的物理机制是系统中必然存在耗散，因此将分形用于断裂韧性研究时，相对于弹性形变而言，塑性形变扮演着耗散的作用。这就是说，用分形研究断裂韧性，至少应对应于小范围屈服的断裂过程。由于断裂机制不同，力学量的选择也不同。他和合作者们根据裂纹稳态扩展的物理机制建立了数学模型，通过材料破坏后的断口表面所能提供的信息反求材料的韧性规律，但是不宜用起始扩展条件来建立理论模型。他们研究了小范围屈服的临界扩展力 DIC 和分形维数的关系，通过理论分析和实验研究后指出，基于波动方程满足标度不变性，采用标度变换寻求断裂过程中的标度律，是分形用于材料力学行为研究的可行方法。除此而外，根据分形中测度观的转变，进行量纲分析也是行之有效的。另一方面，应用分形研究材料的弹塑性断裂，应将断口的分形结构看成是裂纹扩展过程的产物，同时也要用裂纹稳态扩展过程来描述断口的分形结构。

由此可见，在某些情况下，材料断裂损伤过程中的分形现象是客观存在的，因而，对其分形规律的描述也是必不可少的。在材料断裂过程中，不仅断口具有分形形态，碎块的大小和频度分布也有类似的分形规律。图尔科特[43]指出，一种材料有多种破碎方式。例如，岩石可因风化作用而破碎，碎片尺度的分布可能与岩石中的节理及原有脆弱面的分布有关。此外，爆破、碰撞等外力作用也可产生破碎。统计研究表明，碎片尺度分布主要表现为对数正态分布和幂律分布。而幂律分布可和分形分布对等。就是说，材料在破碎尺度一频度分布上存在分形特征。一些作者曾对破碎煤块尺度一频度分布、在地下 475 米花岗岩内进行的核爆破试验使爆炸源上部一座烟囱破坏后碎片尺度一频度分布及弹头高速冲击玄武岩形成的碎片尺度一频度分布进行了研究。在这些例子中，分

布的分维大致为 D＝2.5。表 5.1 中给出了材料破碎后尺度—频度分布分维的更多例子。**表 5.1 各种材料破碎后的分维**

材　料	出　处	分　维
铅弹头产生的辉长岩破碎	Lange et.al(1984)	1.44
钢弹头产生的辉长岩破碎	Lange et.al(1984)	1.71
陨星（大草原网资料）	Mecrosky(1968)	1.86
人工压碎的石英	Hartmann(1969)	1.89
崩解片麻岩	Hartmann(1969)	2.13
崩解花岗岩	Hartmann(1969)	2.22
化学爆炸（当量 0.2 千吨）	Schoutens(1979)	2.42
核爆炸（当量 6.2 万吨）	Shoutens(1979)	2.50
破碎煤块	Bennett(1936)	2.50
星际粒子	Mathis(1979)	2.50
石英石的抛射破碎	Curran et.al(1977)	2.55
玄武岩的抛射破碎	Fujiwara(1977)	2.56
沙粘土	Hartmann(1969)	2.61
阶地砂砾	Hartmann(1969)	2.82
冰渍物	Hartmann(1969)	2.88
陨星	Hawkins(1960)	3.00
小行星	Donnison et.al(1984)	3.05
火山灰与浮石	Hartmann(1969)	3.54

5．3　分形凝聚体

细微粒子如果凝聚成像尘土那样的块体也会产生分形形态。自然界中有许多这样的分形凝聚体。比如悬浮于气体中的固体颗粒或液体颗粒的凝聚，溶液中金属离子在电极上的沉积，某些似分形晶体从液相的析出以及准晶体的生成等。这些物质、现象和过程大大丰富了分形的研究内容。为了对这些现象进行模拟，人们提出了 DLA 和 KCA 模型。它们在分形凝聚现象的研究中起着重要的作用。

5.3.1　DLA 模型和 KCA 模型

DLA 模型是美国密执安大学的威特恩（T.A.Witten）和桑德尔（L.M.Sander）针对悬浮在大气中的煤灰、烟尘或金属粉末的扩散凝聚过程而提出的。由于模型很简单，易于在计算机上实现，而且可以用来解释自然界一大类分形的形成过程，因此受到人们的普遍关注。

该模型的思路是：取二维欧氏空间的一个正方形，将它分割成许多小方块，形成一个方形点阵。在点阵中央附近的格点上，放置一个静止的微粒作种子微粒。在距种子微粒较远处随机地产生一个微粒，令此微粒在各格点上作类似于布朗运动的随机行走。最终将产生两种结果：一是与种子微粒相碰，这时令该微粒附着于种子微粒之上，与之结合形成集团；二是行走到点阵的边界，此时令该微粒被吸收而消失。接着再随

机地产生第二个微粒，并重复以上步骤，直至附着于凝聚集团或被边界吸收。将上述过程继续重复进行，最终将得到以种子微粒为中心的不断增长的凝聚集团。用计算机模拟这种凝聚集团，结果呈枝状。如图 5.2 所示。

DLA 模型形成的凝聚集团具有分形特征。其大小不同的分枝的产生，部分原因可能在于粒子的随机运动轨迹非常曲折，集团外部伸出的分枝获取粒子的概率较大，妨碍了微粒向内部侵入。这种屏蔽效应使得集团按照向外伸展分枝的构造方式不断生长。这类分形集的维数可按 1.2.6 中的密度相关函数法计算，此处不再赘述。

米金认为，DLA 模型中有一个不动的核心，在模拟某些现象时与实际情况不符，因此通过对 DLA 模型进行修正，他提出了动力学集团凝聚模型，简称为 KCA 模型。它与 DLA 模型不同的是：让所有微粒都进入点阵作随机运动。当两个微粒相遇后就结成集团，集团也作随机运动，因而可和其它粒子或集团结合，生成更大的集团。这样不断进行下去就得到一个分形结构。描述这一分形的特征量，除了分维以外，还应当考虑标度指数[11]。

图 5.2　DLA 模型——计算机模拟结果

米金对 KCA 模型进行了计算机模拟。在一个 400×400 的方形点阵上分别放进 N＝10000 个粒子，这相当于每个格点占有粒子数密度 P＝0.625，N＝15　000 个粒子（ρ＝0.09375），N=20 000 个粒子（ρ＝0.125）和 N= 25　000 个粒子（ρ= 0.15625）作了模拟，结果如图 5.3 所示。

DLA 模型和 KCA 模型都有较广泛的应用。DLA 模型可用来预测某些实际随机凝聚的生长速率与时间的关系，以及它们的机制和输运性质。在缩聚反应凝胶化和生物分子的凝聚性质等方面、电介质的放电击穿、草坪上落雷烧焦的痕迹周边，都

图 5.3　KCA 模型——计算机模拟结果

与 DLA 模型有关。自然界中也有许多自然现象与 KCA 模型相符，例如墙角尘絮、河口淤泥、金属超微粒子聚集体等各种分散粒子的不可逆凝聚等。

5.3.2　金属叶与全属树的分形特征

某些金属在其盐溶液中电解析出于阴极附近，能形成枝状分形形态，称为金属叶或金属树。这种结构的形成可通过简单的实验来完成。首先将 $ZnSO_4$ 水溶液注入圆柱形玻璃容器中，小心加入正丁基醋酸酯制成界面。用一碳棒做阴极，使阴极尖端刚刚接触到两种液体的分界面。用锌片做阳极，阳极做成圆筒状，直径略小于容器直径，并使其圆心和容器圆心重合。在阴极和阳极之间加上 5 伏左右的电压，由于锌离子只存在于 $ZnSO_4$ 中，而阴极却只有尖端触及此溶液层，故金属锌就会在阴极尖端凝聚（电沉积），并在界面上形成由小逐渐变大的金属叶（锌叶）。这种凝聚过程可以用 DLA 模型来模拟，实际沉积结果与模拟结果十分一致，其形状与图 5.2 所示结果相似。把实验装置改为电解槽，如图 5.4

所示，所用试剂、药品和电极与前面的相同。这时，由于锌沿着两种液体的界面在一个线性阴极上析出，因而形成由许多锌树组成的锌树林。拍摄下实验过程中不同时刻的照片，可以观察到锌树林随时间变化的不断增长过程如图 5.5 所示。图 5.6 是一个典型的锌树林，它与用 DLA 模型进行计算机模拟得到的结果是一致的。

图 5.4 锌树林生长的实验装置

图 5.5 锌树林生长的过程

图 5.6 曲型的锌树林

计算表明，金属树的分维约为 1.7。如果使金属树在三维空间中成长，则其分维可达到 2.5 左右。

5.3.3 粘性指进

粘性指进是指两种具有不同粘性的流体相遇时，在其界面形成的奇特形状。例如，把粘性很小的流体（例如水）塞入粘性很大的流体中，将形成一种类似于树枝状的结构。在一定标度范围内，这种形状具有分形结构。

粘性指进和石油开采率密切相关。采油时通常要在地面画适当大小的正方形，在正方形的各顶点和中心共挖 5 个孔。给中心孔吹入二氧化碳（或水），从周围 4 个孔中汲取石油。在这一过程中，就会产生粘性指进现象。此时若不及时改变外界压力条件，类似于 DLA 集团的分形将迅速增长，二氧化碳或水将迅速掺入到油层中去，不能形成一个完整的界面将油推向井口，采油效率将明显降低。

石油工业中的这种现象也可在简单的实验中再现，实验装置为海利肖箱[11]。不同的是，实验中要尽量使粘性指进现象明显表现出来。要达到这一目的，就要尽量使表面张力和流体间的扩散变小。由于流体间的粘性比越大粘性指进表现得越清楚，所以若选用粘性小的液体如水作为一种流体，另一种流体可选择高糖类的高分子水溶液。这种流体的粘性为水的 1000 至 10000 倍左右。也可向高粘性液体中吹入空气来做这一实验。帕特逊（L.Paterson）从海利肖箱中央孔向甘油中注射空气观察所发生的现象。开始，空气泡是一个小圆点，随着空气泡的增大，界面变得不稳定。然后气泡演化成有分岔叶瓣的花朵状。如图 5.7 所示。向浓玉米糖浆中吹入空气，油气界面形成一系列短小的指凸，如图 5.8 所示。

图 5.7 在甘油中吹入空气时产生的粘性指进

图 5.8 在浓玉米糖浆中吹入空气时产生的粘性指进

一个更有趣的实验是，打一个鸡蛋在碗里，然后把牛奶从碗边慢慢倒进去，不多久就会在牛奶和蛋白的界面处产生凹凸并可观察到具有分形结构的粘性指进的形成过程。

5.3.4 放电式样

自然界的闪电是瞬间现象，通过对拍摄下来的闪电进行观察，发现它具有像河流那样复杂的分岔和弯曲，从而也可能具有分形的特征。对实验室中的放电式样已有详细研究。在表面皿那样的圆玻璃极之间注入 SF_6 气体，然后如金属叶实验一样，在中心和玻璃板周围放上电极再加上高压电压。如果从上面摄影，就会得到平面上的放电式样，所得结果类似于 DLA 模型产生的形态，已被确认为分形，分维约为 1.7[2]。

5.3.5 似分形晶体的生长[11]

1986 年，日本学者本庄（H.Honjo）等，第一次在过饱和 NH_4CL 溶液中观察到似分形（DLA）晶体的生长。晶体的生长是在一个特制的晶体生长箱中进行的，该箱由两个平行玻璃板构成。上面一块玻璃板的表面涂有导电膜以控制温度，两玻璃板的问距为 25.0μm，NH_4CL 水溶液密封于其间。在过饱和条件下首先生成一个种子晶核，然后种子晶核不断生长。用显微镜和磁带录像机摄下这个不断生长的晶体形态，并用计算机进行分析。若底面玻璃在实验中采用无规粗糙的表面，其粗糙的特征长度大约为 7.5μm。这个粗糙性起着随机扰动晶体生长的作用。这时，晶体生长的典型模式如图 5.9 所示。界面曲线是对录像带用计算机图象处理技术处理后得到的。它具有类似分形的结构。它生长的特征是尖端增殖分裂，同时生长的尖端部分逐渐变宽。图 5.10 所示的是每隔 20 秒钟拍摄的重叠图象。从图中可以清楚地看出屏蔽效应。图 5.11 示出了在晶体生长中，晶体的面积 N 和回转半径 R_g 的关系。由此可以得出分维为 D=1. 671±0.002，与二维 DLA 模型的模拟结果吻合。这说明结晶过程是受限扩散的。在这种情况下，平均尖端曲率半径或平均尖端宽度与底板的粗糙度（∝7.5μm）相近。若在实验中底面玻璃采用光滑表面，则所得的图形如图 5.12 所示，其界面曲线也是经过图象处理后得到的。这个模型常常作为有规枝状分形的典型。

研究表明，似分形晶体结构的形成与结晶时是否各向异性有关。通常条件下生成的晶体，因有很强的晶格各向异性的影

图 5.9 在无规粗糙表面上的似分 NH_4CL 晶体
（经图象处理后的结果）

图 5.10 似 DLA 晶体生长照片的重叠（每隔 20 秒拍摄一次）。
只有分裂的尖端向外生长，其交界面生长不明显。

图 5.11 似 DLA 晶体生长中的晶体面积 N 与
回转半径 R_g 的关系

图 5.12 光滑平整表面上有规 NH_4Cl

枝状晶体（经图象处理后的结果）

响，所以观察不到似分形结构。要得到似分形晶体，必须减弱各向异性。当无规粗糙表面的粗糙度与枝状晶体尖端的平均曲率半径匹配时，能造成对结晶生成界面的无规扰动，从而可以有效地削弱各向异性。

5.3.6 准晶体的分形结构

1984 年，谢克特曼（D. Shechtman）等人在微米级的铝一锰合金颗粒上发现了一种具有长程有序和没有平移对称的新相，这种新相称为准晶体[11、57]。此后，又在铝一铁、铝一铬等合金上发现了这种晶体。这些准晶体是亚稳定的，是在急冷条件下形成的。据认为，准晶体是一种介于玻璃和晶体之间的新的物质凝聚态且具有分形结构。彭志忠提出的准晶体分形模型被认为是各种准晶模型中较好和较有意义的，与实验结果也很吻合。

在研究含有五次对称准晶格的结构中，发现有两个原理在起作用，即 20 面体原理和黄金中值原理。根据这两个原理，可以推导出准晶体的理想格子。图 5.13 是作为推导开始所用的五角形。图中每个点代表一个配位 20 面体，沿 ABCD 可按裴波那契数列向两边递推，在 EF 之间增加一个黄金分割点 G，即 EG=a，GF=b，而 A/b=0.618…或 a/b=1.618…。按对称原则求

图 5.13 准晶格的推导

出 H、J、J、各点。沿各线方向又可按裴波那契数列向两边递推，如此下去，就可推出整个格子。

彭志忠等按以上原则推导出四种准晶格：等轴晶系 20 面体准晶格，等轴晶系正五角十二面体准晶格，五方晶系五边形准晶格和十方晶系十边形准晶格。其中五方晶系五边形准晶格的投影如图 5.14 所示。

根据二十面体原理、黄金中值原理和上面推导的准晶格，就可导出准晶体的分形结构模型。这种分形结构可以理解为结构的重复周期在尺度上有变化，在维轴上周期的尺度增加时，相邻重复周期有一定比值，在准晶体中为黄金中值 1.618…（或其倒数 0.618…）。在三个维轴上都有这种情况。作为主图 5.14 五方晶系准晶体的模型，则各级二十面体有共同格投影图的中心。由中心出发向外，对应的二十面体棱长按 1.618^n 递增。从投影图可以看出，这一图形放大或缩小 1.7618^{2n} 时，整个图形实质上是不变的，这正是分形体的典型特征。

沈步明根据彭志忠的模型计算了准晶体结构的相似维数[57]。计算公式为

$$D=\log N/\log r$$

式中 r 是图形自相似比例因子，即将原来图形的每个独立方向缩小 1/r 的图形作为基本单元，N 是原来图形包含基本单元的个数。在准晶体结构中，$r=1.618^2$。因为 N 与空间维数有关，所以，在三维空间中，一个二十面体经一级放大以后，增加 12 个二十面体，加上中心的二十面体共 13 个，即 N＝13，其维数

$$D=\log 13/\log 1.618^2=2.6652\cdots$$

很有意义的是，上式恰好表示了彭志忠提出的准晶体结构的两个构造原理，即二十面体原理和黄金中值原理。在二维空间中，N＝5，可求得准晶体结构的相似维数为 D=1.672，与 DLA 模型基本一致。这可能预示着上述模式的准晶体的形成与受限扩散凝聚有关，这是对认识准晶体的形成机理的一个重要启示。

5.4　相变点附近的分形结构

相变是自然界中普遍存在的一类现象，是量变转化为质变的典型表现之一。日常生活中，沸水由液态变为蒸气；樟脑直接由固体变为气体；铁磁体当温度升高超过某一限度（临界点）时，磁性突然消失；钡、钇、铜氧化物当温度降低到某一限度（如 93K）时，电阻突然消失等等，都是相变的例子。

相变的起因错综复杂，表现形式五彩缤纷。但是各种物质在相变点附近的行为极为相似。在相变临界点附近，各种宏观物理量如比热、密度等是和临界点的温度有关的服从幂定律的物理量。人们还从热力学的研究中得知，各种相变在相互转变的两相有相同的化学势。由此，自然界中千差万别的相变可按化学势及其导数来进行分类，如一级相变、二级相变等等[11]。物理学家们描绘了相变的基本物理图象。以铁磁相变为例，在绝对零度时，磁矩都按一个方向排列，有序度最高。随着温度升高，逐渐出现一些磁矩的反向区域，称为“花斑”，如图 5.15 所示。

图 5.15　连续相变中的花斑和自相似性

（A）花斑（B）任取一部分放大

由上图可见，这种花斑与作为一级相变的液固相变中所形成的晶核不同，晶核有比较确定的位置和边界，随温度降低而长大。而这里的花斑在系统中各处出现的概率相同，且彼此嵌套出现，没有明确的边界。它的平均尺寸称为关联长度，用 ξ 表示。花斑的存在可用光、中子散射或超声波吸收等实验验证。当温度逐渐接近相变温度时，ξ 逐渐增大直至达到宏观长度。此时体系是一个自相似结构。就是说，这时的体系具有标度不变性，即测量尺度变化时，体系的性质不变。这是因为关联长度趋于无穷，不管你用什么微观尺度去测量，结果仍为无穷。这时的分维可通过关联函数法表示

$$G(r) \propto r^{D_f - d}$$

上式中 r 是尺度，G（r）称为关联函数，反映了两个相距为 r 的自旋涨落之间的关联（制约、依存）情况，d 是欧氏空间维数。

在这种临界现象的临界点附近，近似的标度不变性还可以用一套临界指数来描述，就像用分维描述分形一样。同时，通过标度不变性，还可以导出临界指数间的各种关系，它们被统称为标度律[11]，并由此产生了标度理论。

渗流是引起相变的最简单的例子，通过实验结果不难验证相变的分形结构。合金薄膜的结构相变就是一例。早在 70 年代初期，人们就在 α－Ge/Au 双层膜的晶化过程中观察到了与 DLA 图形非常相似的缩聚区域。1987 年，段建中等人在有中间相存在的 Pd—Si 合金薄膜中发现并计算了

这种缩聚区的分维。随着 Pd—Si 合金薄膜的成分的变化，分维从 1.78 改变到 1.55。1988 年，侯建国和吴自勤用透射电子显微镜观察了 a—Ge/Au 双层膜在不同退火温度后出现的分形区域，他们还用不同方法计算了缩聚分形区的分维，如表 5.1。

表 5.1　用翼德波科斯方法和相关函数方法计算的不同温度缩聚区的分维

温度（℃）	桑德波科斯方法		相关函数方法		
	分维 D_f	相关系数	分维 D_f	相关系数	相关长度
100	1.785±0.01	0.999	1.789±0.014	0.981	6≤r≤40
200	1.808±0.008	0.999	1.816±0.016	0.990	4≤r≤25
300	1.980±0.017	0.999			

所谓桑德波科斯（Sandbox）方法，即先取一系列边长为 L（最大值 L_{max} 于缩聚区的最大直径）的正方形，然后计算出这些正方形内不为零的格点数 N，在双对数坐标系中回归（logL，logN），直线段部分的斜率即为分维 D_f。

1988 年，黄立基等人报导了研究 Ni—Mo，Ni—Al 及 Au—Ti 非晶薄膜合金相变分形行为的工作。实验中，他们用透射电子显微镜观察到的渗流集团的半径的典型大小为 Lmm。把所拍摄的照片输入图象处理计算机，结果发现，在 10^{-5}mm～10^{-1}mm 的无标度区间内，集团具有分形结构，求出的分维 D_f＝1.88±0.07，渗流阀值 P_c＝0.58。根据同样原理，改变实验条件，求得 Ni—Al 及 Au—Ti 非晶薄膜合金相变体系的分维 D_f＝1.90±0.02，渗流阀值 P_c＝0.60。

5.5　湍流的分形行为

湍流是物理学中一个历史悠久的难题。困难的根源，部分地在于它同时存在着许多长度标度，因而没有单一的特征长度。但是，这正好说明了湍流的分形特征。这从湍流的直观图象就可以看出，它是大、中、小、微不同尺度上的漩涡互相嵌套和互相贯穿而交织在一起的。湍流的形成与流体流动雷诺数有关。例如水和空气这样的流体，当雷诺数较小时是稳定的，而当雷诺数较大时，流动场就会不稳定而呈现湍流状态。我们经常看到的水和空气的流动几乎都是湍流，甚至在静室中观察到的香烟的烟雾也是湍流的实例。

研究表明[2]，在雷诺数相当大和各向相同的 3 维湍流中，能量散逸区域为分形构造。且能量散逸区域的分维 D＝3－μ。其中 0，2＜μ＜0.5 描述速度场空间变化的激烈程度。当速度场的空间变化相同时，则μ＝0，D＝3。

地球的大气流动，靠云才能看见。由于大气流动是湍流，所以云的形状和运动非常复杂。据研究认为，云的形状具有分形特征[2]。把气象卫星和雷达照片上的各种不同大小的云的面积和周长的关系绘在双对数坐标系上，在无标度区间内，求得分维为 1.35。十分有趣的是在文献[2]中，高安秀树介绍了水墨画也可作为湍流的例子，并且具有分数维数。

他说："对放入洗脸盆大小容器中的水进行搅拌后掉点墨进去使其形成墨画，然后来测量水墨画的分数维维数，测定结果约为 1.3，与云的维数大约相一致。大气这样的大流动与洗脸盆中的小流动具有极为相似的性质，这也可说是流体的普遍性质的表现吧（在咖啡中放点牛奶进去所形成的花纹也是一种水墨画）。"与湍流类比的水墨画的图形请参考文献[2]。

5.6　高分子的分形特征

高分子又称为大分子，它们的特征是分子量高（至少大于 10^3），有类似于细绳一样的长链。它们可以分成两类，一类是生物大分子，另一类是合成大分子。本节介绍合成大分子的分形结构。在下一章将介绍生物大分子如生物体中的蛋白质、核酸、酶和多糖等的分形特征。

5.6.1　大分子的结构特征与分子链的分维

大分子的结构可从两方面考察，一是其化学组成，二是其链的形态。其分形结构的研究主要是考察其链的形态。大分子是由小分子聚合而成的，日常生活中经常用到的"聚乙烯"塑料就是由乙烯这种小分子聚合起来的大分子。不过，聚乙烯是一种组成最简单的大分子，比它复杂的大分子大量存在。单体可以是一种或多种。只要单体问发生有规律的聚合，人们就可以从它们的结构上找出"链节"，并求出相应的聚合度 n。

由于大分子有长长的柔软的链，所以它在空间中就会有不同的摆布方式。大分子在空间的摆布方式称为构象。描述大分子的空间构象有两种著名的数学模型：普通无规行走（NRW）和自避无规行走（SAW）。前者把大分子链看成一条随机分形曲线，与布朗粒子运动的轨迹类似，分维 D＝2；而后者考虑了链节之间的相互作用，原来走过的路径不能再行走，有"记忆效应"。后一模型更接近于真实的大分子链，但在数学上的难度较大，通常采用数值方法。

从大分子本身的结构来看，可分为线性链、支化链和网状链。如果用树来作比喻，线性链就是没有树枝的树干；支化链就是有大大小小树枝的树；网状链就好像各棵树的树枝之间发生了连结，从而形成了一个网状整体，就像鱼网或纱窗一样。这种链结构具有凝胶的特点。

在大分子链中，可以划分出"链段"。链段往往包含着多个链节，其大小介于链节和大分子整链之间。它的大小和形态随环境条件的改变而有所变化，从统计上看，链段的形态与整链相似，是整链的缩影，就是说，大分子的局部与整体之间存在着统计自相似性，因而，大分子链是一种分形。

大分子链在空间有不同的构象，如果把链两末端之间的距离 R 称为末端距[11]，R 可看成相似比的倒数，而前面所定义的聚合度 n 可看成生成物数 N，由此可得到计算分维的公式

$$N \propto R_f^D \text{或} R \propto N^v \qquad (5.6-1)$$

其中

$$V＝1/Df$$

对支化大分子来说，随着支化类型和支化程度的不同，一个分子将有数目不等的端点。这样未端距的含义就不明确了。这时，可用另一个参数——回转半径来表征分子的尺寸。从分子的质量中心到分子中各链段的质量中心的距离称为回转半径，记为 R_g。一般说来，$R_g \propto R$。所以，在不考虑比例系数的情况下，二者可以通用。由此可以得到

$$R_g \propto N^v \qquad (5.6\text{–}2)$$

进一步分析可得[11]

$$R_g^{d+2} = V_a{}^2 N^3 \qquad (5.63)$$

其中 V 是衡量链节之间相互作用的一个参数，称为排斥体积；a 是链节的尺寸；d 是大分子所在欧氏空间的维数。比较（5.6–2）与（5.6–3），有

$$V = 3/(d+2) \qquad (5.6\text{—}4)$$

由此可见，当 d＝3 时，D_f＝5/3。可见大分子链的维数介于线和平面之间。溶液中真实大分子链的分维（Df=5/3）小于 NRW 链的分维（D_f=2）。这反映出一个事实，即有限制的 SAW 要比无限制的 NRW 要“驯服”一些，形状上的不规则性要小些。同时，指数 v 和分维 D_f 只与空间维数有关，反映了大分子链的普适性。

人们还可以计算一条大分子单链的某一部分的分维，称为局域分维，记为 D_{fl}。其计算方法如下：从一条由 N_o 个链节构成的大分子链中取出含有 N 个链节的一个链段，它的未端距的均方距为

$$< R_N^2 > N_0 = \sum_{i=1}^{N_0-N-1} i < R_i{}^2, i+n > N_0 / (N - N_0 - 1) \qquad (5.6-5)$$

这里$<R_i{}^2$，$i+n>N_0$ 是链中第 i 个链节和第 i＋N 个链节之间的方均距。另一方面，由于大分子链有自相似性，因此，若长度为 a_o 的链段中链节数为 b_0，而长度为 a_1 的链段中链节数为 b_1，则有

$$b_1/b_0 = (a_1/a_0)^D \qquad (5.6\text{—}6)$$

当在某一标度范围内，D 不依赖于（a_1/a_0）时，D 是大分子在此范围内的分维 D_{fl}，这就是局域分维的意义。从（5.6–5）和（5.6–6）两式出发经演算可得

$$D_{N0}(N) = \mathrm{Log}[(N+1)/N]/\mathrm{Log}\,[<R_{N+-1}{}^2>N_0/(R_N{}^2>N_0] \qquad (5.6\text{–}7)$$

这里脚注“N_0”强调的是有限大分子。值得注意的是，如果 DN_0（N）＝D_{fl} 与 N 无关，那么式（5.6–5）等价于

$$[(<R^2_N>N_0)^{1/2}]^{Dfl} = AN \qquad (5.6\text{–}8)$$

式中 A 是一个比例常数。上式也可作为局域分维 D_{fl} 的定义式。通过 logN 与 log（$<R_N{}^2>N_0$）$^{1/2}$ 作图，自斜率可求得 D_{fl}。

哈佛林（S.Havlin）等采用蒙特卡罗方法研究二维方形点阵上的自避行走（SAW），获得了大分子链的分维。如图 5.16

图 5.16　DN_0（N）与（N/N_0）的关系曲线

①N_0=100

②N_0=200

③N_0=400

图 5.　17 单链的局域分维 N0=400

和图 5.17 所示。

图 5.16 表示 DN_0（N）与（N/N_0）的函数关系。图中显示出两个典型的区域，它们对应着不同的标度范围。第一个区域是 DN_0（N）几乎为常数的主区域。另一个是 N 与 N_0 接近的末端区域，此处 Dfl　（N）陡增，大分子在主区域有一个稳定的 DN_0（N）值。这是大分子链自相似的直接证明。

图 5.17 表示的是链段长度（N）的选择对分维的影响。在链段的长度 $N \leqslant N_0/2$ 时，分维基本上保持一个稳定值。当链段的长度 $N > N_0/2$ 时，分维值的波动较大，通常都是在保持 $N \leqslant N_0/2$ 的条件下计算大分子链的分维。这样得到的局域分维 D_{fl} 与大分子链的平均分维 Df 相差很小，并且这种差异随大分子链长的增加而减小。

前面介绍了线性大分子的分维。下面介绍亨兹克尔（A. G. E. Hentsche1）从受限扩散模型（DLA）出发，借助弗洛里方法计算支化高分子链分维的基本思路。

DLA 集团是由小到大逐步生长的，集团外表结构对将要凝聚上来的粒子有屏蔽阻碍作用。设屏蔽长度为 l ，此长度相当于粒子进入集团区内的深度，并随集团的生长而变化。如果没有屏蔽，那么粒子会无限制地凝聚到集团上，并浸入集团内部的任意深度。这样就得不到分形结构，而是紧密堆积的欧氏结构。因而其分形结构的形成是屏蔽效应的结果。设 d_w 是随机行走轨迹的维数，通过估计屏蔽长度、集团的弹性自由能、排斥能与回转半径、集团内粒子数的关系，可得到计算支化高分子链的分维公式 D_f（d，d_w）=[$4d_w$+2（$2d_w$-4）十 $5d^2$]/（$5d_w$-4+5d）

（5.6—9）

理论计算结果和计算机模拟结果示于表 5.2 中。

表 5.2　理论计算的分维和计算机模拟的比较

D	Dw	Df(模拟)	Df（计算）
2	1	≈1.95	2.00
2	4/3	≈1.86	1.79
2	5/3	≈1.83	1.77
2	→2	≈1.75	1.75
2	2	≈1.71	
2	2	1.67±0.05	
3	2	2.49±0.05	2.52
4	2	3.34±0.10	3.38
5	2	4.20±0.10	4.29
6	2	4.90±0.6	5.00

对于通常的 DLA 模型（d_w=2），有

D_f（d）=（8 十 $5d^2$）/（6 十 5d）　　（5.6—10）

推导（5.6—9）的方法，只能在某一个临界维数 $d_c(d_w)$ 下才成立。通过 $d=d_c$（d_w）的代换，得

$$d_c^2-(4-d_w)d_c-8d_w=0 \qquad (5.6—11)$$

由上式可见，d_c 满足一个与 d_w 有关的一元二次方程，当 $d_w=2$ 时，求得

$$d_c=1\pm\sqrt{17}$$

取正根才有意义，即 $d_c\approx5.1$，这是分维的上界。根据米金的研究，其分维的下界 $D_f=(d-d_w)$。

值得指出的是，前面的结果都只能在 $1<d_w<d$ 时才成立。$d_w=1$ 和 $d=d_w$ 是特殊情况，必须另外处理。

5.6.2 大分子溶液的粘度性质与分维

大分子溶液的粘度与大分子的尺寸、形态有关。通过粘度的研究，可以为大分子的表征、加工和应用提供许多重要信息。80 年代初期，人们把分形概念引入了这一领域。据研究，分维可以把有关溶液粘度的一些重要量联系到一起。事实上，可以导出著名的马克一侯威克（Mark—Houwink）方程

$$[\eta]\propto M^{(3/Df-1)}\propto M^{\alpha} \qquad (5.6—12)$$

其中，M 为分子量，[η]悬浮液或胶体分散体的特性粘数，a 为粘性指数

$$\alpha=(3/D_f-1)=(3v—1) \qquad (5.6—13)$$

上式具有重要的理论和实践意义。首先，可以用它从实验上直接测定分维，检验理论是否正确。a 值的测定十分简单，是大分子表征中的一个传统的常规方法。只需对同一种大分子的几个不同分子量的样品测定特性粘数，然后作 log[η]—logM 曲线图，由直线段部分的斜率即可求出 a 值，由（5.6—13）式立即求出分维 D_f。其二，分形理论中已有不少计算分维的成功方法。因此，用式（5.6—13）有可能从理论上直接计算某些大分子——溶液体系的α值（表 5.3 和表 5.4）。**表 5.3 模型大分子溶剂体系的粘性指数α和分维 D_f**

大 分 子 模 型	α值	D_f
刚性球	0	3.0
长棒（长度直径比≥1000）	1.8	1.07
薄圆盘（直径厚度比≥100）	1.0	1.5
无规线团	0.5～0.8	2.0～1.67
无扰无规线团	0.5	2.0

表 5.4 几种体系的粘性指数和分维的计算值

大分子	ΔP	溶剂	Δs	D_f	α（计算）	α（实验）
氯醇橡胶	9.6	THF	9.9	1.677	0.79	0.79～0.82
丁苯橡胶	8.3	甲苯	8.9	1.708	0.756	0.75～0.78
丁二稀	8.1～8.6	环乙烷	8.2	1.669	0.79	0.70～0.77
	平均 8.35	苯	9.15	1.740	0.72	0.70～0.78
		甲苯	8.9	1.702	0.76	0.62～0.653
聚丙稀酸甲酯	9.7	丙酮	10.0	1.676	0.78	0.52～0.77
		苯	9.15	1.701	0.76	0.71～0.85
		丁酮	9.3	1.685	0.78	0.67～0.81
		醋酸丁酯	8.7	1.782	0.68	0.69
		甲苯	8.9	1.740	0.72	0.697
聚甲基丙稀酸甲酯	9.3	丙酮	10.0	1.723	0.74	0.69～0.80
		苯	9.15	1.669	0.79	0.70～0.79
		氯仿	9.3	1.667	0.80	0.79～0.83
		1.2-二氯乙烷	9.8	1.695	0.775	0.68～0.77
		甲基丙烯酸甲酯	8.7	1.708	0.756	0.72
聚醋酸乙烯酯	9.4	丙酮	10.0	1.708	0.756	0.67～0.74
		二■烷	10.0	1.708	0.756	0.74～0.75
聚丙烯睛	12.7～15.4	二甲亚砜	13.4	1．725	0．75	0.75～0.758
	平均 14.05					
硝酸纤维素	8.5～11.5	丙酮	10.0	1.667	0.80	0.795
	平均 10.0					
聚丙烯	9.2～9.4	苯	9.15	1.694	0.79	0.67～0.71
	平均 9.3	甲苯	8.9	1.695	0.77	0.725

1985 年美国麻省理工学院的马思库马（M. Muthkumar）也用分形理论研究了支化大分子溶液的粘度性质。他考虑了分子间、分子内的流体力学相互作用和排斥体积效应，通过求解不同情况下的线性纳维一斯托克斯方程而获得了不同浓度和频率下粘度增量与分维的关系。

5.7 凝胶化与渗流的分形行为

前面讨论了溶液中线性和支化大分子的分形特征与分维。这里我们将讨论网状大分子的分形性质。由于网状大分子一般都是凝胶，其形成和结构与渗流很相似。所以，可以比较方便地借助渗流的理论和方法来研究凝胶的特性。事实上，传统的弗洛里–斯托克迈那理论（简称 FS 理论）是物理化学中描写溶胶– 凝胶转变以及伴随发生的分子大小分布的“标准理论”。其基本假设是：凝胶化可以用分支过程来模拟。FS 理论本质上是树枝状聚合的理论，它等价于贝塞尔点阵上的渗流问题的严格解。

经典的 FS 理论可以看成是三维凝胶化的一个重要的一级近似。它的假设是不存在封闭的环。这个假设一方面使理论可以严格求解，另一方

面也限制了理论的真实性和对实验的应用范围。不存在封闭的回路或闭合键环，在聚合反映的初期也许能够满足，但在后期阶段必然出现问题，因为凝胶巨型分子本身就是有大量环的网络结构。因此，经典理论中的这种“树状假定”很难符合凝胶点附近或其后的聚合过程。此外，点渗流模型也有自身的缺陷，因为它实际上是一种没有溶剂的凝胶化模型。考虑了溶剂分子的更为真实的模型应为“点一键渗流模型”，它是常规渗流模型的一种推广，但其临界指数和通常渗流的相同。

5.7.1 凝胶的标度（分形）性质

凝胶的出现，标志着分形的诞生，因此标度不变性也随之而至。当我们用分形理论的观点来考察凝胶及凝胶化的性质时，就会发现一些我们过去不曾知道的新规律。

（1）凝胶点以下的大集团

所谓“大集团”是指尚未形成“渗流的无限集团”。定量地表述即对应于渗流概率 P 略小于临界值 PC 的情况。设这时集团的重均聚合度为 NW，当△P（=｜P-P_C｜）趋于零时，N_w趋于无穷大，因此

$$N_w \propto \triangle P^{-r} \qquad (5.7\text{–}1)$$

在三维空间中，r=1.8。式（5.7–1）具有普适性，与点阵的性质及单体的形态细节无关。其正确性已用光散射实验进行了验证。

另一个问题是集团分子量的分布。设 C_n 为单体在集团（由几个单体组成）中的浓度，有如下归一化性质

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = C$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} nC_n = CN_W$$

如果体系正好处于临界点（P=P_c）上，则 C_n 为

$$C_n \propto a^{-3} n^{-[(r+2\beta)/(r+\beta)]} \qquad (5.7\text{–}2)$$

式中 a 为链节的大小。这里β是另一个特征指数（β=0.39）。因此，在临界点时重均分布以 n-1.2 形式下降。

如果 P 稍低于临界值 Pc，则分布关系要改变。主要是引入聚合度截止值

$$N_e \propto \triangle P^{-r-\beta} \propto \triangle P^{-2.1} \qquad (5.7\text{–}3)$$

实际上，许多物理测试中所得到的就是这个截止值（而不是 NW）。在研究一个集团的平均尺寸时，我们必须谨慎地定义其大小。因为含有 N 个链节集团的大小 R（n）与 N 有如下幂次律关系

$$R(n) \propto an^{v/y+\beta} \qquad (5.7\text{–}4)$$

这里 v 也为一指数（v=0.85）。截止值（n=N_e）时的尺寸称为关联长度ξ（△P），标度关系为

$$\xi(\triangle P) = R(N_e) = a(\triangle P)^{-v} \qquad (5.7\text{–}5)$$

可见 R（n）和ξ（△P）分别随 n 和△P 而变化。

（2）稍高于阈值 Pc 时的凝胶性质

令 $P=P_c+\triangle P$（$\triangle P>0$ 但$\triangle P$ 很小）。这时我们面临的是一个无限集团和某些有限集团之和的总体系。基本性质如下：

a.凝胶分数 S_∞（属于无限集团的单体的分数），随$\triangle P$ 迅速增长

$$S_\infty \propto (\triangle P)^{\beta} \qquad (5.7\text{–}6)$$

这里的$\beta=0.39$。

b.凝胶的弹性模量 E 随$\triangle P$ 缓慢增加

$$E \propto (\triangle P)^{t} \qquad (5.7\text{–}7)$$

当 $d=3$ 时，t 的值在 1.7～1.9 左右。

为什么 t 远大于β呢？原因在于无限集团中的悬挂链。它们对凝胶分数有贡献，但对弹性模量无贡献。这个问题已被许多高分子学家所注意并进行了许多讨论，从渗流模型导出的标度律与经典的树近似法差异很大，实验表明，渗流模型能更好地模拟凝胶的性质，而树近似法则偏离实验结果较远。

从上一节的讨论我们知道，当维数大于 4 时，线性链变成了理想链。有趣的是，在支化链中也有类似的性质。不过，由于支化链比线性链稠密，要“开放”到理想链的程度，则需要更高的维数。根据金斯堡处理相变的思想和近年来对溶胶—凝胶转变的研究，当 $d>6$ 时凝胶在临界点附近的涨落不严重，树近似法有效。这说明临界维数 $d_c=6$。低于此维数时，树近似法失效。实际上，我们生活的空间维数（$d=3$）远小于 d_c，因此树近似法在实际应用中很不理想。

5.7.2 凝胶集团的分维

凝胶网络具有自相似性。许多人用不同的方法计算过它们的分维。1983 年，费米利(F. Family)用计算机模拟法研究了不同自由基浓度(C_i)时，凝胶点上无限凝胶集团的自相似性和分维。他发现在二维点阵上凝胶的分维 D_f 与浓度 C_i 有关。在高浓度极限时，D_f 与渗流集团的分维值($D_f\approx1.89$）接近。实验表明，在主要浓度区间，凝胶集团相似于渗流。

1984 年英国剑桥大学的庞德（R.B.Panday）根据弗洛里方法研究了支化大分子的不可逆动力学凝胶化。求得了凝胶集团分维的一个近似公式

$$D_f=[d(4x-d)+4x]/(4x-d+2) \qquad 4x-d>0 \qquad (5.7\text{–}8)$$

式中 x 为单体数指数。若 N 为凝胶点时凝胶网络的单体数，（它们也是 t 时刻后随机行走者访问的格点数），则 $N\propto t^x$。$d=1$ 时，$x=1/2$，$D_f=1$；$d=3$ 时，$x=1$，$D_f=2.3$。式（5.7–8）是一个近似公式，因为没有考虑凝胶体系中各部分之间的关联作用。此外，它也无法精确计算 $d=2$ 时的分维。

在 $d=2$ 的欧氏空间中，情况很复杂，因为在 t 时刻的单体数有对数依赖关系性。

$$N\propto t/\ln t \quad (d=2) \qquad (5.7\text{–}9)$$

经过分析计算知，此时的分维 $D_f=(2-\varepsilon)$，“ε”是一个改正量，大约在 0.2～0.4 之间，但还不能给出其精确计算值。

在近似分析的基础上，还可以给出凝胶网络的定性图象（图 5.18）。网络由强烈相互渗透的“珠子”（链段、圈）构成，

图 5.18 凝胶网络示意图

每个“珠子”内部有强烈的排斥作用。因此，“珠子”内网络的密度较小，在“珠子”相交处密度很大。与 DLA 集团对照，DLA 对扩散剂是“拒绝的”，而凝胶集团对扩散剂是“放行的”。因此，凝胶网络中可以存在小分子（溶剂），本身可以发生溶胀，这对生命体有重要意义。

如前所述，支化链成为理想链的临界维数 d_c＝6。那么当 d＝4，5 时，会出现什么情况呢？简（N. Jan）等人用大晶包蒙特卡罗位置空间重正化群求出了高维（d＝4，5，6）渗流系统的分维和渗流指数。例如，d＝4 时，D_f＝3.12±0.02，v＝0.64±0.02；d＝5 时，D_f＝3.69，v＝0.51±0.05；d＝6 时，D_f＝4，v＝0.5。

第六章　生物体的分形特征

生物体内部各层次之间存在什么关系？说得具体一些，就是生物大分子、细胞、组织、器官和整体之间存在什么关系？这些关系对生物体的生物化学组织、生理、病理和形态等有什么影响？这些关系对农业、林业、医药卫生和临床诊断有何指导意义？以上这些问题正是生物体的分形理论——分形生物学所要回答的问题。

生物体的分形现象表现在不同的层次和不同的方面。其中最核心的概念是“生物分形元”，简称 BFU。简单地说，生物分形元就是生物体上具有分形特性的相对独立的部分。相对独立部分是指在结构和功能上有相对的内部完整性，并与其周围的部分有着相对明确的边界的局部。例如，一根树枝、一粒玉米、一个土豆，或水母的一片横纹肌，都是 BFU。细胞是最典型的 BFU。这里需要强调指出的是，生物体上相对独立的部分不一定都是生物分形元。生物分形元必须有分形特性，它包含着生物整体的基本信息和功能，在一定程度上是整体的缩影。

6.1　分形植物

6.1.1　植物的分岔构造与分维

只要亲眼观察一下大自然的植物，就可以发现，自然界的大多数树木和花草的分岔构造都具有分形性质。照一张树木的照片，然后把照片分割成正方形的方框，计算含树枝的方框的数目。改变方框的大小再重复这一过程。把边长为 r 的方框内的树枝的数目 N（r）和 r 在双对数坐标系下作图，如果在一定的尺度范围内，其点的分布靠近一直线段，则所考察的树木具有统计自相似的分形特征，其直线段的斜率就是所求的分维。在文献[1]中，郝柏林院士列举了一幅郝灯在曲阜孔庙中仰视拍摄的一株古柏树分叉的照片，估计分数维在 1.67 左右。研究结果证明，任何植物都是近似的分形体。例如，美国长春藤分维值大约为 1.28，车轮藤（蔷薇科的矮树）的分维值近似为 1.79。其它植物的分维值介于 1.28 和 1.79 之间。树木的平均分维约为 1.5 左右。换句话说，树枝是分维数大约为 1.5 的分形体。

6.1.2　分形植物的计算机模拟

生物体的分形性为计算机在生物构造、组成研究中提供了可能性。细胞自动机数学模型的提出，旨在模拟生物系统中的某些自组织现象。1983 年，沃尔夫兰（S.Wolfram）指出，植物的生长是由最简单的组元构成的，计算机可以从生物的遗传密码开始，跟踪其发育的每一步，去模拟多样化的生物组织形式。事实上，只要看看植物的计算机仿真结果，就不难理解植物的分形构造了。目前已有运用计算机模拟各种各样的树等植物的算法与例子。最早和最典型的例子大概是巴昂斯勒（M.E.Barnsley）等[49]用计算机模拟生成的分形树、羊齿叶（一种蕨类植物）等。尤金斯（（H.J 黦ens）等[58]用一台虚构的多级缩小图象

复制机说明了其生成机制。只要进行一些细小的重新构形就能产生一些完全不同的极限图象：一株分形树或一种叶状分形。这种极限图形取决于一定的缩小和位移规则。这些规则就是平面上的一组仿射线性压缩变换。它们把直线仍变为直线，只改变其位置、长度和方向并可由一组变换函数（f_1，f_2，…，f_n）加以描述。对羊齿叶来说，每次变换使原来的图象缩小四次并移位四次。其中有一种缩小变换可完成一次特别迅速的缩小，使该图象挤压成一条垂线，这条垂线便形成主干。

如果人们从一个矩形出发，那么每迭代一次，矩形的数目要增加四倍，经过 m 次变换后总数将达到 4^m。经四次迭代以后初始图形（矩形）仍可以很清楚地加以识别。为了使这些矩形变得足够小以便其极限图象（羊齿叶）能够显现出来，必须完成大约 50 次迭代运算因而需要计算并绘出 4^{50} 个炬形。这项工作将超出现有的任何一种计算机的能力。为了解决这一困难，巴昂斯勒和德门科（S.Demko）提出了一种称之为混饨对策的算法。其大致思想是：在平面上任意选择一个点作为初始点，然后投掷一个四面体骰子，该四面体骰子的每一面均与产生羊齿叶图形的四项变换中的每一次变换相对应。滚动这个骰子即可任意地从这些变换函数（f_1，f_2，f_3，f_4）中取出一个函数，然后用它来对标记点进行变换，使其移动到该平面的一个新点上。再投掷一次骰子又选择出另一个变换函数，将它用来对先前所获得的新点再作变换，以此类推。连续投掷这个四面体骰子所产生的这些点不久就固定下来并且密密麻麻地填满该极限图象。但是，如果用这种方法进行模拟，为了获得极限图象，可能要花极长的时间。其原因在于，投掷骰子时为每一个函数 f_i，$i=1，2，3，4$ 提供了相等的概率。如果给每一个 f_i 都规定一个概率 P_i，以概率 p_i 使 f_i 出现于混沌对策中，以便使某些 f_i 比另一些 f_i 具有更大的可能，那么就能更快地获得极限图象。给缩小倍数最大的一些函数赋予最大的概率，就能最快地形成一幅图象。因为这种变换使得混沌对策以相同的频率命中极限图象的每一点，所以该图象的各部分均同样迅速地填满。其结果如图 6.1 所示。

由此可见这类植物的自相似性。显然，下面两片叶子的形态与整个图象相似。当下方叶子去掉时所剩下的蕨类植物上面部分亦是如此。用同样的方法可以产生典型的分形树。

如果使用六个线性仿射压缩变换，用同样的方法可以得到自然界的青草的模拟结果。它是六个仿射压缩变换的不变集（即极限图象）。如图 6.2 所示。

图 6.1 分形植物（羊齿叶）及其生成过程
（a）初始矩形（b）～（d）第一至第三次迭代结果
（e）羊齿叶——迭代的极限图形

自然界多姿多彩的植物深深地吸引着许许多多的数学家和计算机科学家，他们通过分形理论提供的数学规则对自然界的花、草、树、叶等植物的造型和生长进行计算机模拟。近年来，齐东旭教授及其学生们在分形图象及其计算机生成方面获得了丰富的研究成果。他的研究生王方石运用 L 系统的理论框架和植物形态及构造上的自相似性模拟了二维、三维空间中的树和花束，与自然界的真实形态十分相似，几可达到以假

乱真的程度[59]。

L 系统是美国生物学家林登迈耶（A.Lindenmayer）针对植物的进化和造型提出的数学理论。计算机科学家们把 L 系统引入到计算机图形学中，为计算机模拟自然界的真实植物提供了有力的工具。实际上，L 系统的基本思想就是迭代或递归。粗略地说来，它由两个系统联合生成，一个是代数系统，在一个由有限个不同符号组成的集合上生成一族符号序列。这族符号序列是根据一组“改写”规则或产生式依次替换一个简单的初始物的每一部分而得到的。例如

图 6.2　用计算机模拟的青草它是六个线性
仿射压缩变换的极限图象

ω：ab	（初始物）
P_1：a→ab	（产生式 1）
P_2：b→C	（产生式 2）

根据产生式去替换初始字符串中的每个字符，并把这一过程迭代下去，就得到一个符号序列

ab→aba→abaab→abaababa→…

第二个系统相当于一个几何系统。因为 L 系统中的公理和产生式均是由符号序列描述的，要把 L 系统和图形联系起来，就要给 L 系统中的每个字母一个特定的图形含义，也就是给 L 一系统以图形说明。例如龟形说明。一个三元素集合（x，y，a）的称为一个龟形。其中（x，y）是笛卡尔坐标，表示龟形的位置，a 是方向角，表示龟形的方向。设角增量为δ，步长为 d，龟形对应下列命令：

F（d）：向前移一步，步长为 d，龟形状态变为（x′，y′，a），其中 x′＝x＋dcosa，y′＝y＋dsina，在点（x，y）和（x′，y′）之间画一直线段

十（δ）：向左转δ，龟形的下一状态为（x，y，a＋δ），角的正向为逆时针方向一（δ）：向右转δ，龟形的下一状态为（x，y，a—δ）

给定一个字符串（符号序列）V，龟形的初始状态（x_0，y_0，a）以及固定参数 d 和δ，V 的龟形说明就是由与 V 相应的龟形画出的图形。这个过程实际上就是把第一步得到的符号序列嵌入到二维或三维欧氏空间之中，其中每个符号对应一个向量，然后按照符号在序列中的顺序首尾相接，得到空间中的两个图形。一个是初始图形如正方形、三角形、折线等。例如，著名的科契雪花曲线的初始图形为一正三角形，而树木花草的初始图形由折线组合而成。另一个是生成元，它是由 N 个边长均为 r 的开的有向折线组成的。因此，构造的每个阶段都从折线开始，用生成元代替每个直线段，压缩生成元，并把它们放在与原来直线段有相同端点的位置上。它和代数系统的迭代过程相对应，因此极限图形（或迭代的不变集）就是所要的模拟结果。例如

δ＝22.5°

ω：F（20）

P：F（d）→F（d/2）F（d/2）—（δ）[—（δ）F（d/2）＋（δ）F（d/2）＋（δ）F（d/2）]＋（δ）[（δ）F（d/2）—（δ）F（d/2）—（δ）F（d/2）]

用上述 L 系统模拟的雾冰藜植株如图 6.3 所示。

图 6.3　用 L 系统模拟的雾冰藜植株（该图选自常杰等“植物形态的分形重构”一文，出处同文献[59]）

把二维龟形命令扩展到三维空间上，还可以模拟出三维的树和花束。如图 6.4 和 6.5 所示。

图 6.4　计算机模拟的三维空间中的树（选自文献[59]）

植物的计算机模拟的逼真性充分说明了植物在构造形态上

图 6.5 计算机模拟的三维空间中的花束

的某种规则性及其组织上的艺术性。

6.1.3　植物叶序的分形性质

在自然界中，不难看到植物叶的左右对称、花的旋转对称、松果上鳞片的螺旋排列。这些都可归结为叶序问题。所谓叶序，简单地说就是植物的叶、花、果实上的鳞片的排列顺序。表面看来，排列似乎是随机的，但是在这杂乱的表面现象中却隐藏着数学常量[60]。向日葵是叶序现象的一个理想的例子。其中的数学奥妙就隐匿在花盘上那一朵朵小花所展示出的螺旋形模式之中。当小花枯萎脱落以后，葵花籽组成两族螺线沿两个方向卷绕。更令人惊奇的是，每一族螺线的数目几乎都是 13，21，34，55，　89 和 144 等数目中的一个。据报道，一百多年以前，曾在英国牛津观察到一个直径为 56cm 的巨大葵花盘，具有 144/233 条螺线。植物学家通常称这种螺线为斜列线。人们观察到，球果也具有这种结构，其斜列线数目是 2，3，5，8，　13 等。菠萝表面的鳞片为六边形，因而一般有三族螺线。人们通过长期的观察发现，其数目也是 5，8，13，21 和 34，具体数目取决于果实的大小。一般地，观察植物的顶端或者它的横断面，可以看到由叶原基（未来的叶或鳞片）形成的两族螺线（称为靠接或明显斜列线），一族由左向上，而另一族却由右向上盘旋。任取一个叶枝做下列实验：用一条细线系在靠近基部的一片叶子的叶柄上，沿着最短的路径一片一片地向上缠，直到一片看上去恰好是在开始叶片的正上方为止。在大多数情况下，绕茎圈数与所遇到过的叶片数之比（不包括第一片叶）是下列分数序列中的一个：

1/2，1/3，2/5，3/8，5/13，……

它的分子和分母都是裴波那契数列中的项。一般说来，叶序现象有以下特征：（1）两族斜列线的数目 n 和 m 几乎全部是裴波那契数列 1，1，2，3，8，13，21，……的相邻两项；（2）两个相继出现的叶原基之间的夹角为$2\pi\cdot\varphi-2\approx137.51^\circ$，这里$\varphi=(\sqrt{5}+1)/2\approx1.618$。这个序列为什么会出现在所观察到的两族螺线上？这就是叶序问题。

叶序现象在植物形态发生中具有重要地位。著名生物数学家罗森（R.Rosen）认为“认识叶序很有可能找到解开生命世界中形态模式的产生这一千古之迷的钥匙”[60]。植物学家科勒（E.J.H.Corner）说：“我们必须研究叶序。叶序是植物学中的一怪，如此简单，却又那么深奥费

解。”著名生物数学家杰恩（R.V.Jean）教授在其叶序研究的划时代著作[60]中对一百余年来关于叶序研究的成果进行了仔细的归纳、总结与评价并提出了自己的整体的、系统的观点。

我们认为，叶序现象中的很多问题与分形有关。现在我们对这些问题作一些初步的探讨，这仅仅是一些尝试。当准晶体发现以后，准晶体研究者们在雏菊上观察到过渡带的准晶体性质，在这个过渡带观察到叶序从一对裴波那契数到下一对数的升级，由此准晶体术语也渗透到叶序研究领域。由上一章的讨论知道，准晶体的结构具有分形特征，因此就不难理解叶序现象中的分形特征了。事实上，叶序中涉及的裴波那契数列可以通过正五边形和五角星的嵌套表示出来，而这种互相嵌套的结构具有自相似性。另一方面，裴波那契数列又可以通过螺旋线表示出来。众所周知，螺旋线是分形曲线，它的分形特征可以用布利于维数表征［6］。

如前节所述，生物体的某些构造存在着明显的自相似性并显露于外表。生物大分子如 DNA、蛋白质等是螺旋结构。在细胞层次上，细胞微管呈螺旋状。凡由微管组成的纤毛、中心体以及植物输导组织中的导管、管胞也是螺旋状。在生物体的外表，如植物的萝、藤等都是螺旋形的。因而，叶序呈螺旋线排列是生物分形外显性的结果。

6.1.4　植物的分形外显性

过去的生物学忽略了两个重要问题。其一是注重生物整体和细胞以下宏观和微观乃至超微层次结构的研究，而忽略了介子生物整体与细胞之间的中观层次（生物分形元）的研究；其二是在研究生物体的个体发育时，重视细胞分化的问题而忽略了细胞所具有的在亲体本体上向着新整体自主发育的过程。例如，白菜在自然储存条件下，在其基部常常长出小植株；春天，冬珊瑚的老枝上长出新芽，每一嫩绿的幼芽实际上可以看成一个小植株；阳台上种植的某些花草，摘下一片叶来插在花盆里，不久又会长出一株新的花草；等等。对这样一些司空见惯的现象，传统的生物学无法给出解释。这些现象正是生物体具有分形性质的结果。分形生物学指出，生物体体细胞的全能性不一定要在离体培养的条件下（即在人工配制的培养基上）或在核移植时才能得到体现。生物体体细胞的全能性在个体本体上，在自然条件下也有所表现。正是由于体细胞在生物体本体这样的“天然培养基”上的自主发育，才使得生物分形元体现出是整体缩影这样的自相似性质。植物的生物分形元发育成新整体的外在显现，称为分形外显性。植物的分形外显性有丰富的实例。例如，人工分株、扦插、压条等繁殖新整株的方法，就是植物分形外显性的最常见的应用实例。这些方法可以使分形元与主体发生隔离，从而摆脱整体对分形元的抑制作用，使分形元打开“基因锁”，沿着自己的发育道路继续发育下去，最终成为一株完整的新植株。

柑桔、桃树的嫁接，是以天然的异体为培养基的“组织培养”，使接穗或芽这样的分形元发育成为一株新的植株。只不过新植株没有自己的根系，由贴木的根系所代替。然而，自然界中最普遍最一般的分形外显性的表现形式是以天然的亲体本体为培养基的组织“培养”。分形生

物学所强调和揭示的主要是这种分形外显性。生物分形元在亲体本体上，可以有不同程度的发育水平，有时分形元甚至成为小植株。例如，草毒可以借匍匐基繁殖，每一个小植株都是一个高度发育的分形元，分形元之间以匍匐基相连。此外，幌菊、鹿蹄草、鞭打绣球等植物也有类似特征。可见，人工培养基中的组织培养仅是一种特殊情况。

6.1.5　植物分形的广义证据

植物的分形性质不仅仅是上面所说的外显性，同时还表现在生物化学、生理学、遗传学、形态学和病理学等方面。把生物体的部分与整体的映射部位的性质相似称为对应相似关系。如图 6.6 所示，其中有四个相互嵌套的不规则多边形 h，i，j，k 在形态上彼此相似，相当于发育程度不同的生物分形元。Ah，Ai，Aj，Ak 之间，Bh，Bi，Bi，Bk 之间，Ch，Ci，Cj，Ck 之间，称为映射部位或对应部位，它们在生物学特征上相似程度较大。但是，这种相似性是统计意义上的。尽管如此，它在生物学上仍具有重要的实际意义。

上述生物分形原理揭示了相关部位在整体及各个分形元上有序的分形分布规律，指出了这种相关性的广泛意义如生化、生理、病理和遗传等生物学特性上的相关性。下面根据张颖清等人[61]和李后强等人[11]的研究工作，简要介绍几例。

（1）生物化学

由生物分形原理可知，生物分形元在不同程度上是整体的再现。因此，分形元上某一部位（如图 6.6 中的 Ai）的生物化学组成与整体的映射部位（图 6.6 中的 Ak　）的生物化学组成的相似程度比非映射部位（图 6.6 中的 Ck）大。这种对应相似关系在植物中尤其突出。植物的枝、叶、果、花、茎、根等，都是生物分形元。高粱中氰酸的含量分布显示出这种对应关系。全株上部的叶中氰酸含量较高，下部的叶中氰酸含量较低。在一叶中，也是上部氰酸含量较高，下部氰酸含量较低，叶下部的鞘中氰酸的含量最低。高粱主茎上部的节间氰酸含量较高，从主茎上部的节衍生出来的叶的氰酸含量在总体上又比主茎下部的节衍生出来的叶的氰酸含量高。

图 6.6　对应相似示意图

生物分形原理对药用植物的药用部位的选择具有重要的指导意义，并对传统的选择提出了质疑。例如，自古以来人参被药用其根。根中主要成分是人参皂甙，它几乎具有人参根的全部生理活性。但是，实验证实，在人参的其它器官如花、果、叶和茎中，均有和根相同的人参皂甙，而且含量比根还高。事实上，整个人参植株中，各器官内人参皂甙的含量从大到小依次是花、果、茎、叶和根。研究表明，三七的根不仅含有和人参相同的皂甙，而且花、果、叶和茎中的皂甙含量也大于根。因此，花、果、叶和茎具有不可忽视的药用价值。这是生物分形性质给我们提供的宝贵启示。根据生物分形原理，可以找到药用植物有效成分含量最高的部位，扩大药用选择范围。

（2）生理学

对应相似关系在植物生理学上也有明显表现。例如，棉花落蕾铃率在全株是从上部向下递减的。水稻的开花次序在全株是最上部的枝梗先开花，最下部的最后开花。在一个小穗上也是最上部的先开花，最下部的最后开。棉花开花的时间顺序则与水稻相反，在整体是最下部的花先开，最上部的花最后开。而在一技上，也显示了相同的开花顺序，最下部的最先开，最上部的最后开。但是，植物生理上的分形受外界环境和人工刺激的影响较大。有时并不完全遵从对应相似关系。

（3）遗传学

在同一多细胞生物体内，虽然不同部位的细胞有相同的一套基因，但不同部位细胞内的基因活性是有差异的。当取用有高活性基因的细胞群或组织（如种子、芽、外植体等）来繁殖后代时，与其它部位相比，它在发育和活化程度上都处于优势，因而会产生优良的遗传效果。这种遗传性状如果是人类所希望的，则称为希望性状。研究表明，这种性状也符合生物分形的原理，并称为遗传分形性。它在作物的定域选种方面具有重要的指导作用。例如，玉米在全株是中下部结籽粒。根据分形原理，一个整穗的中下部对应于整株的结籽区。用玉米穗轴的中下部的籽粒作种，比用其它部位的籽粒作种产量高。据张颖清实验，穗轴中下部的籽粒作种比上部籽粒作种可增产 35.47％。高粱的果穗是高粱全株的缩影。高粱上部籽粒早熟、饱满，对于结实形状具有较强的遗传优势。因此，用上部籽粒作种比用中下部籽粒作种能获得较高产量。遗传分形性的应用范围很广，除定域选种外，还有定域选外植体和定域选插条、定域选芽等。

（4）形态学

如前所述，生物体自身的分形性能显示于外表。如植物的枝、叶、果等是相对独立的部分，与植株整体有一定程度的相似性。叶或果的上、中、下部分别对应着枝的上、中、下部或植株整体的上、中、下部。如全枝或全株的叶生于枝顶或株顶，植株的枝下部或植株整体下部无叶或少叶，则相应地叶的上部有较多的叶物质，使叶的外部形态表现为上部较宽、下部较窄的倒卵形、倒披针形、倒三角形等。这类植物有菱叶海桐、玉兰、美艳杜鹃、榄仁树、海南紫荆木等。如果叶在全株上部较少或较小，则叶的形态为卵形、披针形或心形等。这类植物有甘青虎尔草、千花葵、扶桑、彩叶草等。果也是一个生物分形元。如花在植株上部，而果主要结于株顶或枝顶，则果物质在果上端分布也较多，果的形状为倒卵形，如无花果、鸭梨、番木瓜等。相反，如果果主要结于枝的中部，在枝上部急减，则果物质在一个果上端也要急减，从而果顶端成为尖嘴形，例如桃。微生物的形态也表现出明显的分形特征。例如，木霉属的主干为三分枝，从主干上生出的初生小梗为三分枝，从初生小梗上生出的次生小梗仍为三分枝。在链毛包属，真菌的营养菌丝上，也可发现类似的分形现象。

6.2　动物的分形特征

6.2.1　动物的分形外显性

在许多动物中也存在着分形外显性。从最低等的原生动物门到最高等的脊锥动物门都可以看到。在原生动物中，可以由独立性较强的分形元组成群体性个体。某些群体鞭毛虫，其中个别未分化细胞能够发育成新的群体性整体。海绵动物的大多数类型是群体性动物，从群体内分离出的分形元都可以继续发育成一个新的群体性整体。淡水水螅在出芽生殖时在母体上由体细胞发育形成的每一个幼年水螅个体就是一个明显的分形元。从形态上，这种分形元已经可以看成是一个小个体了。在扁形动物门，涡虫通过横裂的方式进行分裂，新个体在还没有与母体分开时就可以看成是一个高度发育的分形元了。在环节动物，每一体节都是一个自主的生殖、排泄单位（分形元）。有时可以在某些裂虫科动物的侧面观察到出芽生殖现象，结果形成有趣的多体丛。在这里分形外显性是直观可见的。

动物的某些构造在不同层次上存在着明显的自相似性并显露于外表。DNA、蛋白质等生物大分子呈螺旋结构，在细胞层次上，某些细胞器呈螺旋状。在动物的外表，如蜗牛的螺壳、反刍动物的角、人的指纹、流感病毒、腮腺炎病毒等等也是呈螺旋形的。螺旋是圆的连续形态。细胞具有近似于圆球的多面体结构，生物体是多层次圆形结构的复合体。人与动物的卵、胚胎、血管、五官、躯干等都是趋圆结构。在病变中，各种脓肿、丘疹、斑癣、鸡眼等，反映了病理的圆形损伤。

6.2.2　人体生理结构中的分形[62、23]

肺从气管尖端成倍地反复分叉，使末端的表面积变得非常大。据研究，典型的人肺表面展开后比网球场还大，动物吸收氧气的本领大致比例于肺的表面积。作为生理需要，呼吸系统必须把最大可能的表面积装进最小的空间，因而肺就不得不设计得像谢尔品斯基海绵那样，折叠嵌套并充满孔洞，因而就不得不成为分形。

支气管分支的标准“指数式”模型预言气管的平均半径呈指数式衰减，但这一描述在精细结构处失效。经典标度模型所预测的特征长度也未被发现。按照分形模型，则不需要一个特征长度标度，而只要求一个标度长度分布，并且每个标度长度具有不同的概率。平均半径的衰减应当遵从幂定律而不是指数式衰减。

支气管的分形描述与数据相符并揭示了其分层次的多变化结构特征。用一个重正化函数 F（z）＝F（bz）/a 作为支气管结构第 z 个层次的半径，则参数 b 表征了对半径变化有贡献的标度区间的测度，而 a 表示某个特征标度的权重。与经典的单个标度不同的是，分形模型是由一个序列的多个标度构成的，每个标度具有一个小于其近邻的参数 b，而与参数 bn 相应的权重系数为 1/an。从而第 n 个层次的平均半径为

$$r(z)=A(z)z^{-D} \qquad (6.3\text{-}1)$$

式中 D 是一个与支气管半径变化有关的分形维数，A（z）是一个周期函数。研究发现，人肺的分维大约为 2.17。因此，这一模型预示了平均支气管半径的分层次减小遵从一个周期变量调制的幂律。如图 6.7 所示。

上述分形模型反映了肺部支气管构造的某些特征：一个特定的生理程序加上内在的随机作用构成了一个分层次的复合体。同样的规律在狗

和鼠的肺部结构中也被观察到。

图 6.7　肺部支气管的分形模型

血管分支再分支的结构是一种分形，心脏血管如图 6.8 所示。由此可见大血管分叉成小血管，小血管分叉成更小的血管，显示出精细的分形结构。假定直径为 d 的血管在直径为 d1 和 d2 的血管上分叉，则

$$d^r = d_1^r + d_2^r \qquad (6.2-2)$$

实际上，血管大致在第 8 层到 30 层上分叉时 r 为一定值，即 r＝2.7。人们还发现蝙蝠翅膀的血管直径分布满足 $N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D}$，其中 ε 为血管直径。N（ε）为直径大于 ε 的血管数。实验测得 D＝2.3。可见，血管在各种意义上都具有分形性质。之所以具有这种结构，原因可能在于血管要把溶于血液中的氧输送到全身各个角落的细胞中。体内血液是昂贵的，空间也必须珍惜，循环系统只得在有限的体积中形成分形分布。研究表明，在多数组织中，永远没有一个细胞与血管的距离超过 3–4 个细胞之远，但血管和血液只占用了不超过人体 5％的空间。

图 6.8 心脏血管的分形模型

（下图是上图中部一个小方框内血管的放大）

理论生物学家们发现，分形组织控制着贯穿全身的结构。除肺和血管外，动物体中还有不少组织和器官具有分形结构。消化道里，组织表现出波纹夹着波纹。泌尿系统是分形系统；肝脏里的胆管也是；心脏中输送电流脉冲到收缩肌肉的特殊纤维也是；还有神经网络、肾脏、大脑等。人脑表面有各种不同大小的皱纹，它们是分维在 2.73～2.79 之间的分形表面。图 6.9 是控制心跳的神经网络图。在心脏外表面布满了分叉的血管。而在心室内，心肌纤维、联结各瓣膜的组织均成分叉状，因而可用分形模型描述。

6.2.3　生理结构中的分形时间

人体内的分形结构产生于胚胎发育与进化的缓慢动态过程。这些过程和产生分形的其它过程一样都展示出一种确定性混沌。因此对于它们的正确描述需要动力学模型。这种模型将回答生理形态的发生过程是否基于自相似原理。研究表明，健康人的心率即使在静止状态下也有很大的波动。心率的时间序列曲线显示出凸凹不平、不规则的形状，看起来似乎是完全随机的。但是，如果按几个不同的时间长度绘出这种变化图，则可看出心率数据中存在一定的规律性。如果观察几个小时的时间序列图，那么就会发现一些较快的波动其范围和顺序看起来和更长时间范围的时间序列图相似，如果考察几十分钟或者几分钟，可以发现一些更快的波动，它也同样类似于较长时间内的时间序列图。就是说，不同时间范围内的心率波动显示出自相似性。如图 6.10 所示。

美国哈佛医学院哥德伯格（A.L.Goldberger）等进一步在频率域和相空间考虑心率变化的特性，发现了如下结果：心脏停跳前 13 小时观察的心率其时间波形波动较小，频率变化也较平坦，相空间中的吸引子为不动点，说明心率是近似恒定的；心脏猝死 8 天前的心率，其时间波形

呈周期性变化，频率

图 6.9 心脏的分形模型（a）分形神经网络
（b）血管网络（c）心房

图 6.　10 人的心率（每分钟跳动次数）变化的自相似性

谱有一个明显的尖峰，相空间轨道的吸引子表现为噪声极限环，表明了心率的高度周期性；而健康的心率的时间波形看起来像噪声似的，具有连续型频率谱和宽峰，相空间中的轨道收敛到奇怪吸引子上，表现出分形特征。于是他们断言：体内功能的混沌标志着健康，而周期性行为却可能预示着疾病。对其他生理过程如神经元的电活动，神经网络几何结构与心电图间关系的分析表明，调制不同复杂生理系统随时间变化的过程受制于一个自相似的分形标度律。

6.3　生物大分子的分形特征

在前面两节，我们主要从宏观和中观层次上讨论了生物体的分形构造，现在我们再深入到微观和超微层次来说明生物体构造的分形艺术。

6.3.1　DNA 复制的分形性质

DNA 的复制过程符合通向混沌的倍周期规律。

$$N=2^n \quad n=0，1，2\cdots\cdots$$

其中 N 是在某复制阶段 n 时的 DNA 数目，n 是复制级数或分叉级数。复制过程形成的分叉树在直线上的投影是一个典型的康托集，其分维 $D_f=0.631$。

从信息和功能分形的观点来看，DNA 是一个分形体，内部包含着不同层次的“DNA”。复制仅是信息和功能分形的显现，相当于把一个具有无穷层次的 DNA 分形体进行“分解”或“放大”。信息分形的含义是体系的局部包含着整体的主要信息。而功能分形意味着体系的一个相对独立部分的功能与整体的功能基本相似。DNA 复制形成的分形树，具有良好的自相似性。从其中任取一独立的小枝来观察，其形态和功能都与整体相似。因此，DNA 的复制是生物体分形的基本原因。

基因是 DNA 分子长链中的一个片段，包括许多对核苷酸。研究表明，在一个基因区段里，还可划分出若干个亚单位，而亚单位也有一定程度的独立性。从功能和信息的角度来看，DNA、基因和亚单位之间存在着许多的共性。基本组成并不复杂的 DNA 却能显现复杂的性质，这正是分形体的奇特之处和具有诱惑力的地方。

细胞也有和 DNA 相似的复制特性。无论是有丝分裂还是减数分裂，最初都是“一分为二”的，由此而形成分叉树。细胞的这种分裂，为生物体的分形提供了条件和保障，使得 DNA 复制上升到高一级层次并向整体过渡。这里，细胞的全能性起着重要作用。所谓细胞的全能性是指单个分化细胞在适宜的条件下表达全部遗传信息并发育成为完好无缺和充分分化的有机体的能力。自从 1958 年用胡萝卜的单个体细胞和小细胞团

在离体组织培养时获得新植株以来，迄今已有二百多种植物在组织培养中诱导分化成植株。动物细胞的全能性研究也取得了一些可喜的成就。人类的一个受精卵在母体乃至试管中可以发育成一个完整的人；将青蛙肠上的皮细胞移植到去核的受精卵中发育成了正常的青蛙；从水母的伞上只取小片横纹肌（无其它组织的细胞混入），在 22℃下进行离体培养，7 旧后形成垂管一水母的性与摄食器官，从横纹肌再生出来的垂管，几乎含有构成水母的所有类型的细胞，而且各类细胞的排列井然有序。这说明横纹肌细胞具有和受精卵细胞差不多的发育能力。因此，从分形的定义来看，细胞的全能性就是分形性，生物体是由细胞这种分形元构成的分形体。

6.3.2　蛋白质与核酸的分形结构与分维

核酸是一种生物大分子化合物，它具有构象、构型分布，其大分子单链可用分维表征。　1986 年，加拿大学者盖茨（M.A.Gates）研究了某些核酸的分形性质并计算了它们的分维。1987 年，罗辽复等也报道了核酸分维的研究结果。他们把核酸序列分成 15 类，计算了约 100 个核酸序列的分维。用$\langle D_f \rangle$表示平均分维，$\langle X \rangle$表示核酸的平均信息指标，它可作为生物进化的参数。计算表明，线粒体的分维约为 1.2，病毒及其宿主—原核和真核的分维为 1.4～1.5，哺乳类及免疫球蛋白分维约为 1.7。他们发现平均分维$\langle D_f \rangle$与平均信息指标$\langle X \rangle$有很好的一致性，据此认为分维与分子进化水平有关：分维随分子进化有明显增大的趋势。原因可能在于，$\langle D_f \rangle$越大，体系的复杂程度越高。随着分子进化，遗传语言的词汇结构会逐渐向复杂化方向发展，这是词汇组成逐渐丰富的表征，因此分维会逐渐升高。此外，分维$\langle D_f \rangle$的大小不仅反应遗传语言词汇结构的变化，而且反应遗传语言语法关系的清晰程度，即序列中碱基的相关程度，关联作用会使$\langle D_f \rangle$增大。在$\langle D_f \rangle$小于 2 的区间内，遗传语言结构的丰富化和语法关系的清晰化两种倾向都使$\langle D_f \rangle$增加，这就是$\langle D_f \rangle$具有进化指标作用的原因。

蛋白质也具有分形性质。1980 年，斯塔普里通（H.J.Staple-ton）等在低温拉曼电子自旋豫弛实验中，发现一些含铁蛋白质的自旋豫弛时间 T1 与温度 T 之间有如下“异常”关系：

$$1/T_1 \propto T^n = T^{3+2Df} \qquad (6.3\text{—}1)$$

进一步的实验证实，这一关系有一定普适性。由上式容易求出分维 D_f，它表征蛋白质链的构象。1985 年，瓦格纳（G.C.Wag-ner）等指出，蛋白质链的分维 D_f 介于 1 和 2 之间，其值的大小反应了高级结构的差异。这个观点得到计算机模拟实验的支持。不过，这里的分维最可能是谱维数。李后强、汪富泉[63]计算了 10 种蛋白质的谱维数，它们的值分布于 1.503 到 1.739 之间，在豪斯道夫维数的取值范围之内（二维空间中的分形体的豪斯道夫维数在 1 与 2 之间）且和瓦格纳等人的计算结果基本一致。蛋白质的谱维数主要反映蛋白质的振动性质和某些结构特征。在蛋白质分形体上，根据局部电子的发散或吸收态，量子高频振动将导致豫弛，豫弛率可用概率密度来计算。蛋白质的振动与温度有关，因此可用 ESR

方法来计算蛋白质的谱维数。由有效介质算法可知，谱维数与蛋白质链中的氢键数有关，氢键越多，谱维数越小；反之，氢键越少，谱维数越大。此外，谱维数还可以刻画蛋白质或酶的动态特征。

由于生物大分子具有统计自相似性，所以其结构性质可以用关联维数 D_2 描述。为此，李后强、汪富泉[64]从蛋白质数据库中选择了 30 种蛋白质分子计算了它们的关联维数 D_2。结果发现，a 类结构的 D_2 值最大，原因可能在于 a 类中只存在 a 螺旋结构的缘故。我们还研究了羧肽酶 A 的 $q-D_q$ 谱，发现了两个不连续点 $q_c=-1$ 和 $q_c=2.5$，分别对应于长程和短程相互作用。

最近，李后强、汪富泉、赵华明[65]研究了酶反应中的分形几何效应。通过模拟探讨了催化中的表面标度关系。假设“聚集态酶”有 DLA 形态，每个酶分子作为逾渗集团中的一个分形体，则酶表面的活性点几率分布为 $D_{As}(a, M) \infty \exp\{-(A/\ln M)[a-a_0(M)]^2\}$，分维为

$$D_R=\ln[(b-\theta)(b-\theta+1)/(2+2\theta)]/\ln b$$

这里 M 是定域质量，$a_0(M)=B\ln M$，A、B 是常数，b 是回转半径，θ 是酶集团表面“空位”数。通过模拟知，“中毒”时间 T_p、酶集团大小（L）、边缘分维（D_p）之间有关系：$T_p \infty L^z D_p^{\beta}$，这里 $z=1.96\pm0.02$，$\beta=1.5$。同时讨论了底物浓度、反应时间对催化反应的影响。

李后强等对蛋白质链的构象进行了分形分析[66]，对蛋白质链的分形结构和构象熵进行了探讨[67]，进而研究了蛋白质和酶表面的胖分形和多重分形特征[68]。鉴于蛋白质和酶分子及其表面具有分形特征，其催化动力学可用分形语言加以表述，李后强等提出了化学分形动力学，得到了反应级数与谱维数之间的关系。在文献[69]中，提出了酶变构效应的分形机制。得到：一步构象变化时，赫尔（Hill）系数 $h=1+n/D$，多步构象变化时，$h_a=(1+2/d_s)$（$z<<1$），$h_b=(2+2/d_s)$（$z>>1$）。这里，n 为极化作用参数，ds 是谱维数，D 为豪斯道夫维数。作者从分形理论的角度解释了赫尔系数 h 为什么是非整数和如何从理论上计算出 Hill 系数等重要问题。通过对复杂酶催化反应的势能曲线的研究发现：标度变化对动力学参数有影响，并给出了米察理-门登（Michaelis-Menten）方程的一种分形修正。李后强等在蛋白质和酶的分形方面做了较多较深入的研究，限于篇幅，就此打住。对此有兴趣的读者可参阅作者最近的新著[70]。

参 考 文 献

[1] 郝柏林·分形与分维.科学， 1985， 38 （1）：9～17

[2] （日）高安秀树著·分数维.沈步明等译.北京：地震出版社，1989

[3]Mandelbrot B B. Fractal：Form， Chance and Dimensions，w.H.Freeman and Company，1977

[4] 文志英，井竹君.分形几何与分维数简介.数学的实践与认识，1995（4）：20～34

[5] （英）法尔科内 KJ 著.分形几何——数学基础及其应用.曾文曲等译.沈阳：东北工学院出版社， 1992

[6] 汪富泉，李后强.分形几何与动力系统.哈尔滨：黑龙江教育出版社， 1993

[7] 蒲保明，蒋继光，胡淑礼编.拓扑学.北京：高等教育出版社，1985

[8] 汪富泉，罗朝盛等，G—P 算法的改进及其应用.计算物理，1993，10（3）：345～351

[9] 李后强，汪富泉.分形理论及其在分子科学中的应用.北京：科学出版社， 1993

[10] 董连科.分形理论及其应用.沈阳：辽宁科学技术出版社，1991

[11] 李后强，程光钺.分形与分维.成都： 四川教育出版社，1990

[12] 汪富泉，罗朝盛等.关联维数在油气勘探中的应用.中国海上油气（地质）， 1992，6 （6）： 60～67

[13] 汪富泉，罗朝盛，混沌理论在油气预测与布井决策中的应用.运筹学杂志， 1995， 14 （1）： 43～47

[14] 汪富泉，罗朝盛.非均匀介质中地震波能量的分形分析.见：胡尊国等编。全国第一届地质科学与分形学术讨论会论文集.武汉：中国地质大学出版社， 1993.60～66

[15] 汪富泉，罗朝盛等.Hurst 指数与容量维在油气检测中的应用.石油地球物理勘探. 1996， 31（2）： 184～189

[16] 汪富泉.阳新统油气储集与渗流结构的分维研究.见：周衡孟等编.中国青年科技论文精选.北京：中国科学技术出版社，1994.535～538

[17]Grassberger P,Procaccia.Measuring the Stranges ofStrange Attractors. Physica, 1983，7D，189～208

[18] 汪富泉，李后强.一类分形集及其刻划.应用数学， 1994，7（1）：60～64[19] 汪富泉，李后强.有面积的曲线的性质及高维推广.数学研究与评论， 1994， 14 （4）： 579～584

[20] Bahcall N A.Ann.Rev.Astron，Astrophys.1988（26）： 631

[21] Fang L Z，MO H J，Bj H G.Selfaffinity of thf 1arge scalestructure of the universe，Modern Phys. Letters A，1987，

2（7）：473～478
[22] 夏晓阳，邓祖淦，邹振隆， IRAS 星系大尺度分布的分维.中国科学 A， 1991 （8）： 867～875
[23]（美）格莱克 J 著.混沌开创新科学.张淑誉译.上海：上海译文出版社， 1990
[24]（加）凯依 BH 著.分形漫步.徐新阳等译.沈阳：东北大学出版社， 1994
[25] Mandelbrot B B.Science，1967，155：636
[26] Fedor J.Fractals.P1enum，1988
[27] 李后强，艾南山.分形地貌学及地貌发育的分形模型.自然杂志， 1992 （7）： 516～519
[28] 励强等.地理学报， 1990，45 （11）： 110
[29] Ohta S，Honjo H.Phys.Rev.Lett.，1988，60：611
[30] 高鹏.小流域地貌的分形研究.兰州大学硕士论文.1993
[31] 艾南山，侯文贵.流域演化动力学的初步研究.中国地质灾害防治学报，1993 （2）
[32] Denis N，Steve S.PAGEOPH，1989，131（1/2）： 55
[33] TakayuKi H.PAGEOPH，1989，131（1/2）：107
[34] King G.PAGEOPH，1983，121：761～815
[35] Sadovskiy M A. Izvestiya.Earth Phys.，1984，20：87～96
[36] Hjrata T，Satoh T， Ita K.Geophys.J.Roy.Astr.Soc.，1987，90：369～374
[37] wu R S，AKi K.PAGEOPH，1985，123：805～818
[38] Okubo P，Aki K.EOS，1987，64：766
[39] SChOlz C H，Aviles C A.Earthquakes Notes，1985，326：20
[40] 汪富泉.断层与裂缝系统的分形结构研究，见：辛厚文编：分形理论及其应用.合肥：中国科学技术大学出版社，1993，307～309
[41] 谢和平.大理石微观断裂的分形（fractal）模型研究.科学通报， 1989 （5）： 365～368
[42] 洪时中，洪时明，地学领域中的分维研究：水系、地震及其它.大自然探索.1988 （2）： 33
[43] Turcotte D L.PAGEOPH，1989，131（1/2）：117[44] Drew L J，Schuenemeyer J H，Bawiec w J.U.S.Geol.Survey Prof.Paper 1982（26）：1252
[45] Cargill S M，Root DH，Bailey E H.Econ.Geol.，1981，76：1081～1095
[46] Kate A J，Thompson A H.Phys.Rev.Lett.1985（54）：1325～1328
[47] Nolte D D，Pyrak-Nolte L J，Cook G w.PAGEOPH，1989，131（1/2）：77
[48] 汪富泉，罗朝盛等.油气预测的新方法研究.见：王荫清等编.运筹与决策.成都：成都科技大学出版社， 1992，1830～1836[49]

Barnsley M F.Fractals Everywhere.Orlando FL：Academic Press，1988
[50] Mareschal JC.PAGEOPH，1989，131（1/2）：136
[51] BarenblattGl， et a1. Oceanology，1984，24：695～697
[52] Malinverno A.PAGEOPH，1989，131（1/2）：96
[53] DubucB，et al.Proc.R.Soc.Lond.A，1989，425：113
[54] Wang FQ，LiHQ.The Study of Sefl-organization andPercolating Gritia1 State on Fault and Fissure System.in：Chen M Y ed.Proc.of SCI’94，Vol.2.wuhan：Huazhong University of Science and Technology Press.1995，1192～1195[55] 罗朝盛，汪富泉.用分形技术重建声测井曲线的算法及其应用. 四川师范学院学报（自然科学版）， 1995， 16 （4）：303～307
[56] Mandelrot B B，et al.Nature，1984，308：721[57] 沈步明.准晶体晶格的数学表达式及其分数维结构维数计算.科学通报.1989（5）： 362～364
[58]（美）尤金斯H等.分形语言.科学（中译本）， 1990， 263（2）：24～32
[59] 王方石。L-系统在分形中的应用.见：辛厚文编：分形理论及其应用.合肥：中国科学技术出版社， 1993， 90～93
[60] （加）杰恩RV著，植物生长模式与形态的数理研究方法. 王本楠等译.北京：学术书刊出版社， 1990
[61] 张颖清.生物全息诊疗法.济南：山东大学出版社， 1987
[62] 黄立基，李后强.分形.见：魏宏森等编著.开创复杂性研究的新学科，成都： 四川教育出版社， 1991， 562～642
[63] 李后强，汪富泉.蛋白质的谱维数.科学通报， 1993（8）：705～707
[64] Li N Q， wang FQ， ZhaO HM.Fractal Reactions onEnzvmeSurfaces.Chin.J.Chem.Phys.1995，8（2）：162～169
[65] Li H Q，Wang FQ. Structural entropy and correlationdimension for a biological macromoleCule.Chem.Phys. Lett.，1994，229：257～261
[66]LiHQ， Li Y， Zhao H M， Fractal analysis of protein chainconformation.Int.J.Biol. Macromol.1990，12（1）：6～8[67] Li HQ， Chen S H， Zhao H M. Fractal structrue and con-formation entropy of Protein chain.Int.J.Biol，Macro-mol.1990，12（6）：374～378
[68] Li HQ，Chen S H，Zhao H M. Fat fractal and multifractalsfor protein and enzyme surfaces.Int.J.Biol.Macromol.1991，13（4）：210～216
[69] Li HQ， Li Y ， Zhao H M. Fractal mechanisms for theallosteric effects of Proteins and enzymes，Biophys.J，，1990，58（11）：1313～1320
[70] Li HQ，Wang FQ. Protein Conformation and

EnzymaticKinetics. in ：lannaccone P ed. Fractal Geometry in Biologi-cal Systems.Boca Raton FL：CRC Press INC，1996
[71] 李后强，张国祺，汪富泉.分形理论的哲学发初.成都：四川大学出版社.1993

后　　记

本书参考了国内外众多专家学者的研究成果，部分室员资料是国内外学者赠送的，因而它是集体智慧的结晶。由于另方面原因，其中一部分文献未能收录于参考文献之中，我们已尽力在书中反映出原作者的工作，并在此向各位编、著、译者和馈赠资料的朋友门表示衷心的感谢。

四川联合大学艾南山教授、丁晶教授，清华大学曾国屏教授，北京大学刘华杰博士，四川师范学院蔡择昌教授、唐孝奎副教授，对作者的工作给予了极大的关心写支持，在此谨向他们表示要心的感谢。

作者非常感谢梅雪珍、汤忆玲女士。她们不辞辛劳，乐于奉献，使作者有大量时间从事本书写作。她们还在资料准备、书稿打印与校对等工作中付出了辛勤的劳动。没有她们的奉献，本书是难以在较短时间内完成的。

四川师范学院数学系微机室程国忠、谭代伦、尚明生、万俊、陈强等老师在书稿打印过程中给予了多方面的热情帮助，在此逢向他们表示衷心的感谢。

作者 1996 年 6 月