中 学 数 学 教 学 参 考

2000年第3期

对中学数学课程改革的思考

江苏省六合县第一中学 刘 明

目前，我国正在进行数学课程标准的研制工作(详见文[1])．数学课程改革的方向如何，是每个数学教育工作者所关心的问题．笔者作为工作在教学第一线的一名中学数学教师，对中学数学课程的现状与未来有以下一些思考．

1．对平面几何的部分内容进行删减

数学教育要想适应时代进步的要求，首先在教学内容上需要不断更新：引入一些新的教学内容，摒弃一些陈旧的内容．在这一方面，新的高中数学教材，已作了较大改进，迈出可喜的一步：新增了向量、概率、微积分等内容，这些内容不仅是进一步学习的基础，而且也有着广泛的应用；删减了一些次要的、用处不大的内容，如指数方程、对数方程、部分三角函数的恒等变换、三角方程、极坐标、幂函数、反三角函数、参数方程、立体几何中面积与体积的计算；同时，也降低了某些内容的要求．而对于九年制义务教育的初中教学内容，改革的力度还不大，主要表现在平面几何方面，“欧氏几何”这一部分内容的去留争议颇大，但现在总的讲，还是趋向于保留其中精华部分，删减部分较难的和计算量较大的内容．这是因为“第一，几何研讨的对象，点、线及其基本关系非常简明，初中生对之已有实感，图形性质又直观具体，学生能主动进行观察、思考，易于对学生进行思维训练．第二，平面几何有一个适当规模(不完备的，扩大了的)较为明确的公理体系作为推理的出发点，较易使学生体会逻辑推理方式与逻辑严密性，在初中阶段大大有助于提高学生的思维水平．”[2]其次，从数学研究对象来看，“数学是研究现实中数量关系和空间形式的科学”，尽管这里的空间不一定指三维空间，也可以是n维空间及某些抽象空间，但是，从培养公民的最基本的素质而言，让学生学习一些几何(包括立体几何)知识，掌握几何中点、线、面的位置关系与数量关系，对他们今后面对客观世界(三维空间)，应该是大有裨益的．另外，笔者曾对初中三个年级学生进行调查，调查的主题是“你对几何课感兴趣吗？”结果如下：

年级	人数	很感兴趣		感兴趣		不感兴趣	
		人数	%	人数	%	人数	%
初一	50	40	80	8	16	2	4
初二	48	35	73	8	16.6	5	10.4
初三	51	37	72.5	6	11.8	8	15.2

从上表可以看出，低年级学生感兴趣率较高，但随着年级的升高感兴趣率反而降低．造成这一现象的原因是：(1)学生的新鲜感的逐步消失；(2)几何内容的难度逐渐加深而部分学生难以理解．但总的来说，学生对几何还是比较感兴趣的，其理由是：图形比较直观、“证题很有意思”等．

在保留平面几何的同时，又要加以适当删减，可以仿照《立体几何》的做法，删掉“相似形”中的部分内容及后面的内容，以降低几何的难度，减

少计算方面的内容．

2．重视数学应用能力培养，在教材中多选编一些应用题

1999 年 6 月 13 日，中共中央国务院作出了《中共中央国务院关于进一步深化教育改革全面推进素质教育的决定》，决定指出：素质教育的目的就是要“培养学生的创新能力与实践能力”．而应用能力的培养是实现创新能力与实践能力的重要途径．“数学应用是一种数学意识，一种基本观点和态度”，[3]这一观点目前已逐渐被广大数学教育工作者所接受，并在教学中得到重视．就目前的中学数学教材而言，应用题已不能适应教育改革与发展的要求，主要表现在：

(1)应用题所占的比例偏低．据有关资料的统计显示，人教版的九年义务教育初中数学教材中应用题只占总题量的 9.4%，高中教材中应用题所占比例在 10%左右，这样的比例显然已经不能适应目前改革的形势；

(2)现行教材的应用题过于陈旧，缺乏时代气息．

针对上述存在的问题，在今后的教材编写中，提出以下几点建议：

(1)适当提高应用题所占的比例，增加应用题的题量．笔者认为，应用题的比例在 20%到 30%之间为宜，也不能一下子将应用题的比例提得过高，避免在教学中出现新的不适应现象．

(2)在选编应用题时，还要“注意解决现实生活中的实际问题和数学中的非常规问题，注意到问题的开放性．”[4]因此，在选编应用题时，首先应该考虑到应用题的时代性、实用性及趣味性，如存款与货款问题、分期付款问题、线性规划问题、风险决策问题以及其他一些与现实生活密切相关的问题，都可以编入教材．这样，不但培养了学生的感性认识；同时，由于应用题与自己的生活息息相关，从而增强了解决数学应用题的趣味性，容易使学生充分享受到学习的乐趣，以增强学生的学习兴趣．另外，还要注意到应用题的开放性，有些问题，“不一定有终极的答案，各种不同水平的学生都可以由浅入深地作出回答”．[3]

3．重视对数学史的介绍，展示知识产生的过程

向学生进行数学史的介绍，不仅可以让学生理解知识产生的过程，“再现”数学家们当初“发现”数学的经过，理解数学的思想与方法，而且还可以揭示科学发现的一般规律，培养学生的创新能力．在现行的数学教材中，高中教材在这一方面完全是一片空白，初中教材中，共安排了 9 个“读一读”介绍了数学史的有关内容，这一个数字对于整个初中内容来说，也显然是太少了！因此，在这一方面希望作较大幅度的增加．另外，在现行初中教材中，有关数学史的内容，主要是为了进行爱国主义教育，共有6处(占总数$\frac{2}{3}$的)介绍了中国数学史的成就，都强调了“中国比外国早多少年”，在这一方面，应该“一视同仁地介绍各国的成就，其中包括本国成就．不应当搞狭隘的民族主义，更不能学阿 Q：‘我的祖上比你阔．’”[5]因此，建议在今后的教材编写中，多介绍一些世界各国的数学史知识，多介绍一些数学发现的过程，在培养学生创新能力的同时，提高学生的数学文化修养．

4．重视直觉思维，教学生猜想

多年来，我们一贯重视逻辑思维能力的训练和培养，而忽视了其他思维的训练(如直觉思维)，从而导致了学生数学能力片面发展及思维僵化与保

守，不利于数学活动中的创造发明．但这种状况在新的数学教学大纲中已得到转变：新大纲中，“逻辑思维能力”变成了“思维能力”．事实上，数学不全部是逻辑思维，“很多数学家很强调‘直觉能力’与‘直觉’．他们对一些问题提出著名的猜想，这反映了他们有很强的洞察力，能跨过错综复杂的性质和相互关系，一下子看到定理的正确性，然后再想法从逻辑上加以证明．证明虽然可能很难找到，但寻找证明的活动，推动了数学的发展．”[6]因此，在今后的教材中，应当重视直觉思维能力的培养，多安排一些猜想的问题，教会学生去“猜想”，以便于培养学生的创造能力．

5．在几何教材编写中应重视几何图形位置的变换

在现行的几何教材中，对图形位置的变换没有得到应有的重视，以人教版九年义务教育三年制初级中学教材《几何》第二册中“5．12 平行线分线段成比例定理”为例，本节(含课本练习)共有 12 幅图形，其中有 11 幅图形是比较‘规范’地将平行线画成水平位置,仅有 1 幅图形中平行线是竖直的.事实上，加强图形位置变换的训练，有利于学生更好地理解数学概念，掌握概念的本质属性．因此，建议在今后的几何教材编写中，增加图形变换的内容．

6．注意加强综合能力的培养

在教材编写中，还应该强化综合能力的培养与训练，充分考虑到学科内部的综合(如代数与几何的综合等)及学科之间的综合(数学与物理等学科的综合)，以适应教育改革的需要．

7．建议教材对一些含糊不清的问题作恰当的“规定”

在教学中常常会遇到一些没有明确答案的问题困扰着老师、“折磨”着学生，对于这样的问题，只要无碍大局，不妨给出一个“规定”．如二面角的平面角的范围是什么？我们是否可以约定在$(0,\pi)$？诸如此类的问题，在编写教材时，给予规定，以减轻师生的负担，“把数学变得容易一些”！

参考文献

1　数学课程标准研制小组．关于我国数学课程标准研制的初步设想．数学通报，1999，4

2　陈重穆等．21 世纪的平面几何．数学教育学报，1997，11

3　数学教育研究小组．数学素质教育设计要点．数学教学，1993，2

4　王延文等．“问题解决”及其研究综述．数学教育学报，1995，8

5　单墫．大纲、教材及其他．载：面向 21 世纪的中国数学教育，南京：江苏教育出版社，1994

6　梁之舜．“头脑编程”与数学教育．载：面向 21 世纪的中国数学教育，南京：江苏教育出版社．1994

化整为零，重点突破

——谈反函数的教学

四川省自贡市晨光化工研究院第二子弟学校 章明富

反函数是中学数学教学的难点，现行教材(人教版，下同)已将反函数的教学要求降到了最基本的程度．但从中学数学的整体结构看，反函数的基本思想方法在中学函数知识体系中却占有比较重要的地位．此外，由于反函数的思维具有明显的动态性和互逆性特征，因此，反函数又是训练学生思维灵活性和创造性的良好素材．

函数思维的主体是动态变量思维，学生的常量思维要发展成变量思维，必须发生质的转变．在学习函数之前，学生的代数思维是以数字思维和静态的形式化思维为主．学生通过初中函数的学习，已初步形成函数的数值对应动态思维，但思维方向是单一的．为分散反函数的教学难点，减小学生学习反函数的困难，可将反函数知识分解为一些基本的知识点，在教学中提前渗透一些具体的、直观的知识，重点突破抽象的、本质的内容．

1．通过由象求原象的思维训练，渗透对应互逆性

数值对应是函数研究的主要对象,中学生已具备数值对应的一般常识.数值对应分单值对应和多值对应，中学生比较熟悉单值对应在高中《代数》上册教材的映射教学中，将逆对应提前渗透，可为学生的单向变量思维向双向变量思维转变提供一个适应期，有利于学生对反函数的对应互逆性思想的理解．

例 1 已知映射 f：(x，y)→(x＋y，x－y)．求：(1)元素(2，1)的原象；(2)元素(a，b)的原象．

此题设计成两问，其目的是为了减缓学生逆向抽象思维的难度．由于原象不能直接求出，思路也并非一目了然，迫使学生对象和原象进行往复联想，自觉形成逆对应的潜意识，这对后来理解反函数 x＝ψ(y)的对应意义是很有帮助的．

2．揭示幂函数$y = x^{\frac{n}{m}}$和$y = x^{\frac{m}{n}}$的图象联系特征，渗透图象关于直线 y＝x 对称的本质特征

图象关于直线 y＝x 对称，是原函数和反函数图象的联系特征．在反函数之前，教材中隐含着这种对称思想，这就为提前渗透这种对称提供了条件．高中《代数》上册教材P．48的幂函数$y=x^3$、$y = x^2$、y＝x、$y = X^{\frac{1}{2}}$、$y=x^{\frac{1}{3}}$在同一坐标系中的图象，是渗透这种对称知识的好材料．教学时，可通过展示函数$y=x^3$和$y=x^{\frac{1}{3}}$(或$y=x^2$和$y=x^{\frac{1}{2}}$)的图象上某些关于直线y＝x对称的具体点的坐标，如(2，8)与(8，2)、$(\frac{1}{2}，\frac{1}{8})$与$(\frac{1}{8}，\frac{1}{2})$、$(\frac{3}{2}，\frac{27}{8})$与$(\frac{27}{8}，\frac{3}{2})$、……，让学生了解关于直线 y＝x 对称的对称点的两个坐标之间的联系特征，建立点关于直线 y＝x 对称的初步印象．

提前渗透图象关于直线 y＝x 对称，有助于学生对互为反函数的图象关于直线 y＝x 对称定理证明的理解．这是因为教材在定理的证明中，隐含着一种数学思想——完备性思想．完备性思想是高中生必须掌握的一种重要的数学思想，它是以后学习充要条件的认识基础．学生在学习“互为反函数的图象间的关系”一节时，若对图象关于直线 y＝x 对称不了解，思维就可能集中到直观的方面，忽视抽象知识的理解，影响对完备性思想的理解．

3．例析函数值域的求法，奠定求反函数定义域的基础

反函数的定义域一般都不是根据反函数的解析式来求，而是通过求原函数的值域得到．因此，会求函数的值域是掌握反函数知识的必备基础．教学中，可安排一次求函数值域的几种常用方式，为求反函数的定义域打下基础．

(1)用图象求值域．一次函数、反比例函数、二次函数、幂函数的图象学生在学习反函数时就比较熟悉了，通过这几类函数的图象相对于 y 轴的位置的观察，得出函数 y 的取值范围，是一种直观的求函数值域的方法．

(2)利用函数的单调性求值域．单调函数的值域，可利用基本的单调函数，采用复合的方法，运用不等式的性质求得．

例2　求函数$f(x)=\dfrac{2}{1-x^2}(x<-1)$的值域．

解析：由于幂函数$y=x^2$在$(-\infty,-1)$上是减函数，于是，当$x<-1$时，$x^2>(-1)2=1$，即$1-x^2<0$．

又由于反比例函数$h(t)=\dfrac{2}{t}$在$(-\infty,0)$上是减函数，当$1-x^2<0$时，

$-\infty<\dfrac{2}{1-x^2}<0$．

所以，$f(x)=\dfrac{2}{1-x^2}(x<-1)$的值域是$(-\infty,0)$．

(3)根据解析式求值域．当函数的定义域只受解析式制约时，值域也只受函数解析式的限制．先由解析式 y＝f(x)解出 x＝ψ(y)，再根据ψ(y)的结构，求得式子ψ(y)中 y 的取值范围，从而得出函数 y＝f(x)的值域，是求这类函数值域的常用方法．

例3 求函数$f(x)=\dfrac{6x+5}{x-1}$的值．

解析：由$y=\dfrac{6x+5}{x-1}$，得$x=\dfrac{y+5}{y-6}$．

因为，当$y-6\neq0$时，式子$\dfrac{y+5}{y-6}$有意义，所以，函数$f(x)=\dfrac{6x+5}{x-1}$的值域为 $\{y\mid y\neq6,y\in R\}$．

(4)运用判别式求值域．对于分子或分母是二次多项式的函数，一般都是运用判别式，通过解一个一元二次不等式，求得这类函数的值域．

例4 求函数$y=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$的值域．

解析：$\because x^2+x+1\neq0$，将解析式变形，得

$(y-1)x^2+(y-1)x+y=0$．　　①

当$y\neq 1$时，由于函数$y=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$的定义域不是空集，因此，关于 x 的方程①有解．

∴$\triangle=(y-1)^2-4y(y-1)\geq 0$成立．

解这个不等式，得$-\dfrac{1}{3}\leq y\leq 1$．

当$y=1$时，方程$1=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$无解．

∴函数$y=\dfrac{x^2+x}{x^2+x+1}$的定义域为$[-\dfrac{1}{3}，1]$．

4．突出反函数对应的单值性，掌握求解析函数的反函数的一般方法

通过提前渗透互逆对应，以及求函数值域的训练，学生对反函数的意义的理解难度就减小了很多．在反函数一节教学中，重点是使学生学会求函数的反函数的一般方法．为此，可在理解的基础上，引导学生将求反函数的一般步骤进行归纳：(1)从式子 $y=f(x)$中解出 $x=\psi(y)$；(2)结合原函数的定义域，分析由式子 $x=\psi(y)$确定的对应是否是单值对应，得出反函数式子 $x=f^{-1}(y)$；(3)求原函数 $y=f(x)$的值域，对调字母 x、y，得到反函数 $y=f^{-1}((x),$并写出定义域．教学实践表明：引导学生归纳求反函数的一般步骤，对中、差生掌握求函数的反函数的一般方法是很有帮助的．

在这一过程中，难点是求反函数的定义域．因此，在反函数教学之前，通过专题训练，使学生基本学会求函数的值域也就显得十分必要．

由于学生在求解 $x=\psi(y)$的过程中，易忽视原函数的定义域，因此，在求非单调函数的反函数时，可能得出的式子 $x=\psi(y)$不是唯一的，反函数也不是单值对应．比如，学生求出的函数$y=\sqrt{25-4x^2}$$(x\in[-\dfrac{5}{2}，0])$的反函数的解析式为$y=\dfrac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$或$y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{25-x^2}$，就是由于没有考虑原函数的定义域，以及对反函数对应的单值性理解不透彻造成的．关于这一点，教学中应给予足够的重视．为此，可增设求非单调函数的反函数的例题，突出反函数对应的单值性，加深学生对反函数意义的理解．

5．强调对应的互逆性，提高思维的灵活性

对反函数意义的理解，关键是对原函数与反函数的对应互逆性的理解．设函数 $y=f(x)$的定义域为 A，值域为 C．原函数与反函数的对应互逆性主要包含三层意义：一是原函数的对应法则为 $f：A\to C$，反函数的对应法则为 $f^{-1}：C\to A$；二是如果$x=a$有$f(a)=b$，那么当$x=b$时有$f^{-1}(b)=a$三是$f^{-1}(x)$是$f(x)$的反函数，$f(x)$也是$f^{-1}(x)$的反函数．

在反函数知识的应用教学中，有意识地设计一些能体现对应互逆性的例题，对学生进行互逆思维的训练，提高思维的灵活性，是反函数教学的一项基本任务．

例 5 已知函数 $f(x)$是 R 上的减函数，并且 $F(x)=f(x)-f(-x)$，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$．求

由于函数 $f(x)$的解析式未知，不能通过解析式求值，学生不得不从原函

数与反函数对应的互逆性方面思考．设$F^{-1}(-2)=a$，由对应互逆性，得 F(a)＝-2．因为 f(-1)－f(1)＝-2，于是-F(1)＝-2，思路由此转至F(x)是否是奇函数，经验证 F(x)的确是奇函数，于是 F(-1)＝$-F(1)=-2$．故$F^{-1}(-2)=-1$．

6．发掘反函数的“保质性”，提高知识的综合运用能力

一个函数的反函数，由于它的定义域和值域与原函数的定义域和值域正好相反，从自变量到函数的对应规则也就不同，原函数的某些性质就会改变．但是，由于原函数与反函数的对应值之间的“配对关系”并没有改变，原函数的某些性质也就得以保留下来，如原函数的单调性、增减性、原点对称性等．反函数的这一特性，为我们将反函数与其它知识进行整合，构建更加完美的知识结构提供了理论基础．比如，利用原函数与反函数的同单调性，对于单调函数$f(x)$，可以构建$x_1<x_2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$的知识结构．运用这一知识结构，就可以解决单调函数的函数值不等式问题．

例 6 已知奇函数 f(x)在定义域(－1，1)上是增函数，且$f(1-a)+f(1-a^2)<0$．求实数a的取值范围．

解析：∵$f(x)$是奇函数，且$f(1-a)+f(1-a^2)<0$，∴$f(1-a)<f(a^2-1)$．

又∵f(x)在(－1，1)上是增函数，

$$\therefore\begin{cases}1-a<a^2-1,\\ \therefore -1<1-a<1,\\ -1<1-a_2<1.\end{cases}$$

解这个不等式组，得$1<a<\sqrt{2}$，

∴a的取值范围是$(1，\sqrt{2})$．

“ 排列、组合 ”单元的教学体会

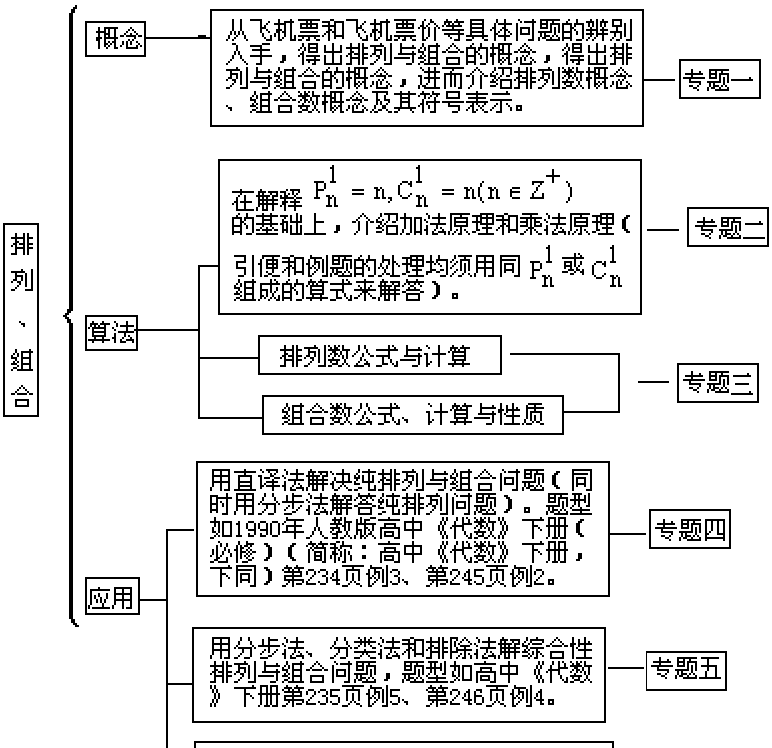
——优化和发展学生数学认知结构的再认识

湖南省衡东县职业中专 贺德光

1．调整教材内容顺序，加强认知结构的层级性

智慧技能的教学是学校教学的中心任务．著名认知心理学家加涅认为，智慧技能主要涉及概念和规则的掌握与运用，它由简单到复杂构成一个阶梯式的层级关系 概念(需要以辨别为先决条件)→规则(需要以概念为先决条件)→高级规则(需要以规则为先决条件)．因此，对于中学数学的每个单元，学生应该按照加涅关于智慧技能由简单到复杂构成的这个层级关系去学习，以便按照这个层级关系把所学的知识组织到大脑当中，形成具有良好层级性的认知结构．

据此，笔者在“ 排列、组合 ”单元的教学中，将教材内容的顺序进行了调整．调整后的结构如图 1 所示．



于是该单元的教学次序是：基本概念的形成(排列与组合的概念、排列数与组合数的概念)→基本算法规则的掌握(原理与公式)→概念和算法规则相结合的应用(这里是以解题规律为主线,把排列应用题和组合应用题一并按其解法由易到难分层次集中而对偶地解决的),完全符合加涅关于智慧技能的学习必须按从概念到规则，再到高级规则的层级顺序去进行的规律，理顺了学生学习排列、组合内容的认知层次，加强了该单元认知结构的层级性．

2．运用先行组织者，促成认知结构的稳定性

运用先行组织者以改进教材的组织与呈现方式，是提高教材可懂度，促进学生对教材知识的理解的重要技术之一．其目的是从外部影响学生的认知结构，促成认知结构的稳定性．

因为高中生首次面对排列、组合单元的学习任务时，其认知结构中缺乏适当的上位观念用来同化它们，因此，我们在该单元的入门课里，在没有正式学习具体内容之前，先呈现如图 2 所示的组织者，能起到使学生获得一个用来同化排列、组合内容的认知框架的作用．

值得一提的是，安排在本文的入门课——专题一中的飞机票和飞机票价等具体问题，以及安排在基本原理课题中的两个引例，它们也分别起到了学习相应内容的具体模型组织者的作用．

3．实行近距离对比，强化认知结构的可辨别性

如果排列概念和组合概念在学生头脑中的分离程度低，加法原理和乘法原理在学生头脑中的可辨别性差，则会造成学生对排列和组合的判定不清，对加法原理和乘法原理的使用不准，从而严重影响学生解排列、组合问题的正确性．因此，在教学中我们必须增强它们在学生头脑中的可辨别性，以达到促使学生形成良好的“排列、组合”认知结构之目的．

按调整后结构的顺序教学，很自然地实行了近距离对比，加大了排列与组合、加法原理和乘法原理的对比力度，从而强化了它们在学生头脑中的可辨别性．

(1)在入门课里，开篇就将排列概念和组合概念进行近距离对比，有利于引导学生得到并掌握排列和组合的判定标准：看实际效果与元素的顺序有无关系．

(2)专题二首次近距离比较加法原理和乘法原理,并运用其判定标准——是分类还是分步，去完成对实际问题的处理，以加强学生对它们的理解与辨别．

(3)专题四、五、六里，把排列、组合问题按其解法分层次对偶地解决，在没有单独占用课时的情况下，很自然地为排列和组合的近距离比较，为加法原理和乘法原理的运用对比，提供了切实而尽可能多的机会．

4．及时归纳总结，增强认知结构的整体性与概念性

我们知道，认知结构是人们头脑中的知识结构，也就是知识在人们头脑中的系统组织，它具有整体性和概括性．认知心理学认为，认知结构的整体性越强、概括水平越高，就越有利于学习的保持与迁移．因此，在每个单元的教学中，我们必须随着该单元教学进度的推进，及时归纳总结已学内容的规律，以促进学生认知结构概括水平的不断提高，最终促使学生高效高质地整体掌握该单元，从而形成整体性强、概括程度高的认知结构．

于是对于“排列、组合”单元，笔者就随着教学进度的深入，引导学生不断归纳、及时总结出以下各规律：

(1)排列与组合的判定标准(见前文)．

(2)加、乘两原理的判定标准(见前文)．

(3)排列数公式的特征(略).

(4)组合数与排列数的关系(略).

(5)解排列、组合问题的基本步骤与方法:

①仔细审清题意,找出符合题意的实际问题.

所有排列、组合问题,都含有一个“实际问题”,找出了这个实际问题,就找到了解题的入口.

②逐一分析题设条件,推求“问题”实际效果,采取合理处理策略.

处理排列、组合问题的常用策略有:正面入手;正难则反;调换角度;整、分结合;建立模型等.但不管采用哪个策略,我们都必须从问题的实际效果出发,都必须保证产生相同的实际效果.因此,实际问题的实际效果,就是我们解排列、组合问题的出发点和落脚点,因而也可以说是解排列、组合问题的一个关键.

③根据问题“实际效果”和所采取的“处理策略”,确定解题方法.

解排列、组合问题的方法,不同的提法很多,其实归根到底,不外乎以下五种:枚举法;直译法;分步法;分类法;排除法.如所谓插空法,推究起来也只不过是在调换角度考虑的策略下的分步法而已.

5.注意策略的教学与培养,增大认知结构的可利用性

智育的目标是:第一,通过记忆,获得语义知识,即关于世界的事实性知识,这是较简单的认知学习.第二,通过思维,获得程序性知识,即关于办事的方法与步骤的知识,这是较复杂的认知学习.第三,在上述学习的同时,获得策略知识,即控制自己的学习与认知过程的知识,学会如何学习,如何思维,这是更高级的认知学习,也是人类学习的根本目的.

所谓策略,指的就是认知策略的学习策略,认知策略是个人用以支配自己的心智加工过程的内部组织起来的技能,包括控制与调节自己的注意、记忆、思维和解决问题中的策略.学习策略是“在学习过程中用以提高学习效率的任何活动”,包括记忆术,建立新旧知识联系,建立新知识内部联系,做笔记、摘抄、写节段概括语和结构提纲,在书上评注、画线、加标题等促进学习的一切活动.

在中学生的数学学习中,如果学生的认知结构中缺乏策略或策略的水平不高,那么学生的学习效果就不好、学习效率就不高,特别是在解题过程中,就会造成不能利用已学的相关知识而找不到解题途径,或造成利用不好已学的相关知识而使解题思路受阻,或造成不能充分利用好已学的相关知识而使解题方法不佳,以致解题速度不快、解答过程繁冗、解答结果不准确等.因此,中学数学教学,必须重视策略的教学和培养,让学生学会如何学习和如何思维,以增大学生认知结构的可利用性.

为此,笔者在“排列、组合”单元的教学中,除注意一般性学习策略(如做笔记、画线、注记和写单元结构图等)的培养以外,更注重解排列、组合问题的培养和训练.

(1)在专题二、四、五、六里,对排列、组合问题解法的教学,始终按“仔细审清题意,找出符合题意的实际问题→逐一分析题设条件,推求问题实际效果,采取合理处理策略→根据问题实际效果和所采取的处理策略,确定解题方法”的基本步骤进行,以培养学生在解排列、组合问题时,有抓住“实际问题的实际效果”这个关键的策略意识和策略能力.

(2)重视一题多解和错解分析(多解的习题要有意讲评,例题讲解可故意

设错)．

一题多解能拓宽解题思路，让学生见识各种解题方法和处理策略．另外，一题多解又能通过比较各种解法的优劣，使学生在较多的思路和方法中优选．同时，因为解排列、组合问题，其结果(数值)往往较大，不便于检验结果的正确性，而一题多解可以通过各种解法所得结果的比较，来检验我们所作的解答是否合理、是否正确，从而起到检查、评价乃至调控我们对排列、组合问题的解答的作用．

错解分析能使学生注意到解答出错的原因所在，同时使学生体验到解题策略调节的必要性和方法，防止今后犯类似的错误，增强学生解题纠错力．

故意设错如高中《代数》下册第 246 页例 4 的第

(3)小题：如果 100 件产品中有两件次品，抽出的 3 件中至少有 1 件次品的抽法有多少种？

错解：由分步法得$C_2^1C_{99}^2=9702$(种)．

略析：像该题一样的“至少”问题最好莫用分步法，这里分步出现了重复计算(以上错解是学生易犯错误，教学中必须注意)．

参考文献

1　邵瑞珍主编．学与教的心理学．上海：华东师范大学出版社，1990

2　袁贤琼．优化和发展学生数学认知结构的认识与实践．中学数学，1991，1

3　陈学军．数学教学中学生学习策略的教学与培养．中学数学教学参考，1999，4

初中数学思想方法教学的基本原则

江苏省连云港市新海中学 孙朝仁

《九年义务教育全日制初级中学数学教学大纲》明确提出数学思想方法是数学基础知识的重要组成部分．数学教学如何才能有利于促进学生数学思想方法的形成和发展呢？笔者从 1993 年起参与江苏省教育科学“ 九五 ”规划项目“ 发展学生数学思想，提高学生数学素养 ”的教学实验研究，通过六年两轮的探索，认为进行数学思想方法教学，除了应遵循通常的数学教学的基本原则外，还应遵循以下五条基本原则：

1．目标性原则

既然数学思想方法被纳入数学基础知识的范畴，那么数学课堂教学应该有数学思想方法的教学目标，否则，数学思想方法的教学就得不到应有的保障，在数学课堂教学中亦无法落实．遵循数学思想方法教学的目标性原则，首先要明晰教材中所有数学思想方法，就目前共识的共有三大类 18 种，即策略思想方法，包括抽象概括、方程与函数、整体、化归、猜想：逻辑型思想方法，包括分类、类比、归纳、反证、演绎、特殊化；技巧型思想方法，包括换元、配方、待定系数、构造、参数、判别式．其次对某些重要的数学思想方法进行分解、细化，使之明朗化，具有层次性．如了解某种数学思想方法的含义及价值为第一层次：掌握某种数学思想方法的初步应用为第二层次；会应用该种数学思想方法指导思维活动，解决某些具体的数学问题为第三层次．第三，在具体的每一节课教学中，数学思想方法教学目标应与课堂教学结构的各个重要环节相匹配，形成知识目标与思想方法目标的有机整合，使之具有可操作性．

2．渗透性原则

数学思想方法教学依附于数学知识的教学,但又不同于数学知识教学.在数学思想方法教学中，应以数学知识为载体，挖掘教材中蕴含的数学思想方法，进行恰当的、适时的“ 渗透性 ”教学．遵循渗透性教学原则需做到以下两点：

(1)挖掘渗透内容　虽然数学思想方法纳入数学基础知识范畴,但数学思想方法是数学知识的精髓，它内隐于数学知识之中，需要从数学知识中挖掘、提炼．比如，在初一新学期开始的第一课，可以有目的地向学生渗透分类的数学思想方法：“ 新教材共分上下两册，上册分为四章，下册又分为三章，每章都有若干节…… ”，使学生刚接触到教材就受到分类思想的熏陶；又在寻找各种具体的有理数运算结果的规律中，渗透归纳、抽象概括的思想方法；在“ 两个相反数相加得零 ”写在“ 异号两数相加 ”的法则里，渗透特殊与一般的思想方法；有理数的大小比较借助于绝对值的概念转化为算术数的大小比较，有理数的减法(除法)运算借助于相反数(倒数)概念转化为加法(乘法)运算等多处渗透化归的数学思想方法．教师只有认真钻研教材，才能正确地挖掘出课本知识中所蕴含的数学思想方法，这是课堂教学中渗透数学思想方法的前提．

(2)把握渗透的方法　由于学生数学思想方法的形成和发展比数学知识的增长和积累需要更长的时间，花费更大的精力．因此，在教学中，有机地结合数学表层知识的传授，恰当地渗透其中的数学思想方法，让学生在“ 数

学知识的再发现”过程中享受“创造”或“发现”的愉悦，孕育数学发现的精神品质，这才是成功的渗透方法

3．层次性原则

数学思想方法的形成难于知识的理解和掌握，数学思想方法教学应与知识教学、学生认知水平相适应，数学思想方法教学应螺旋式上升、并遵循阶梯式的层次结构．在实验研究中，笔者认为数学思想方法教学一般要经过渗透孕育期、领悟形成期、应用发展期、巩固深化期四个层次．遵循层次性原则，达到螺旋上升的目的．下面以化归思想方法教学为例，简要说明．

(1)渗透孕育期　这一阶段为初一代数上册的教学.通过有理数的大小比较、有理数的四则运算、整式加减、一元一次方程的解法教学来反复孕育化归思想方法，使学生初步了解和体会到化归思想方法的意义和价值．

(2)领悟形成期　这一阶段为初一代数下册的教 学．主要是通过“二元一次方程组”、“一元一次不等式(组)”、“整式乘除”等内容的教学，从正面向学生介绍化归目标、确定化归方法，并通过引典故、举范例，深化学生对化归思想方法的认识，在此基础上应用它去探索分析问题，使学生初步形成化归思想方法的雏形．

(3)应用发展期　这一阶段为初二代数全册和初三代数“一元二次方程”的教学．通过教学引导学生参与知识发生过程，进一步揭示、概括、提炼化归思想方法，更高层次地领悟化归思想方法的涵义及其价值．在宏观上培养学生应用化归思想方法增强知识迁移的能力；在微观上，强化化归技能技巧的训练，使学生现有知识形态的化归思想方法逐渐内化为意识形态的化归思想方法．

(4)巩固深化期　这一阶段为初三代数“函数”、几何“圆”这两章的教学．特别在解几何问题时，引导学生把解决的几何问题作为化归对象，把基本图形作为化归目标，将复杂图形化归为基本图形等，通过不断地在新情景下应用化归方法，可使学生进一步巩固、深化对化归思想方法的理解，从而有意识尝试用数学思想方法指导自己的思维活动，形成独立探索问题的能力．

由于数学思想方法有浅显与深奥之别，学生的认知水平和数学思想方法的发展程度也不尽相同．因此，在不同数学思想方法的教学层次的划分也不一样，即使是同一种数学思想方法，它的四个发展期的确定也并不惟一，而应依据实际，作出较为合理的层次划分．

4．概括性原则

所谓概括就是将蕴含于数学知识体系中的思想方法归纳、提炼出来．在教学中，遵循概括性原则，将统摄知识的数学思想方法适时地概括出来，可以加强学生对数学思想方法的运用意识，也使其对运用数学思想方法解决问题的具体操作方式有更深入的了解，有利于活比所学知识，形成独立分析问题、解决问题的能力．

概括数学思想方法一般可分两步进行：一是揭示数学思想方法的内容、规律，即将数学对象共同具有的属性或关系抽取出来，这也就是“概”字的含义；二是明确数学思想方法与知识的联系，即将抽取出来的共性推广至同类的对象上去从而突出从特殊性认识上升为一般性认识．比如通过解方程

$(x-2)^2+(x-2)-2=0$与$\frac{x+1}{x-2}+\frac{x-2}{x+1}=2\frac{1}{2}$，发现都可用换元法求解，在此基础上推广至$x^2+2x-\sqrt{x^2+2x+1}=1$，也可用换元法求解．由此概括出换元法可以将复杂方程转化为简单方程，从而认识到化归思想方法是对换元法的高度概括，还可进一步认识到数学思想方法是数学的灵魂，它是对数学知识的高度概括．

5．实践性原则

学生数学思想方法的发展水平最终取决于自身参与数学活动的过程．数学思想方法教学既源于知识教学又高于知识教学．知识教学是认知结果的教学，是重记忆理解的静态型的教学，学生无独立思维活动过程，具有鲜明的个性特征的数学思想方法也无法形成．因此，遵循实践性原则，就是在实际教学中，教师要特别注重营造教学氛围，要给学生提供思想活动的素材、时机，悉心引导学生积极主动地参与到数学知识的发生过程中，在亲自的实践活动中，接受熏陶，不断提炼思想方法、活化思想方法，形成用思想方法指导思维活动，探索问题解答策略的良好习惯．数学思想方法也只有在需要该种思想方法的教学活动中才能形成．

参考文献

1 “MA”课题组．“发展学生数学思想，提高学生数学素养”教学实验研究报告．课程·教材·教法，1997，8

2 臧 雷．数学思想方法教学原则刍议．中学数学，1997，4

3 孙朝仁．初中数学思想方法教学的基本途径．中学数学教学参考，1998，11

如何用高数知识及其观点指导中数研究

湖北省武汉市第二中学 王池富

如何用高等数学及其观点指导中学数学研究和调控数学教学活动，这是值得广大一线数学教师积极参与研究的课题．指导与调控，并非狭义地指用高数知识解决初数习题，而应该包括：

(1)在备教材表述内容的同时,注意考察该数学知识在整个教学体系中的地位和作用：

(2)在设计暴露教学概念产生、形成、抽象概括的过程之前，注意了解该数学概念后续发展理论；

(3)在设计针对训练时，注意所训练的方法、技巧的方法论依据(含哲学背景、逻辑规律等)．

这样做的目的在于通过思考，不仅从方法上，而且从观念上充实自己，彻底打破“只会这样做，不知为什么要这样做”的经验型格局．本文通过若干例子阐述笔者是如何借助高数观点分析中数教材的，供同仁评鉴！

例 1 “集合”与“无穷观”．

无限的观点并非存在在极限概念中才涉及．实质上，高一入门阶段“集合”部分就渗透了无限观．如对有限集 A 和 B 之间的关系，当然可以通过一一查验集合中的元素确定其包含关系，但对无限集 A 和 B，则不可能如此操作．因此另辟蹊径，变有限集的操作查验凸(有限步)为定性描述(无限思想)。如$A\subseteq B \overset{\triangle}{=\!=} \forall_x$，则$x\in B$；$A=B \overset{\triangle}{=\!=} A\subseteq B$且$B\subseteq A$，并由此衍生出解决问题的归纳——演绎式探索法．比如探求集合 A＝{x｜x＝2k＋1，k∈Z}与 B＝{x｜x＝4n±1，n∈Z}之间的关系：第一步，特值观察；第二步，猜测归纳；第三步，数学论证(用集合相等的定义)．这也打破了非要等到高二学习数学归纳法之后才出现探索式问题的传统讲授格局．同时，也为高一学习立体几何“线面平行”、“面面平行”由定义(不便操作——不可能查验)到判定方法(方便操作——定性论证)，奠定了理论和方法基础．

例 2 “距离”与“测度观”．

距离问题师生非常熟悉，但细究发现教材只定义了点到直线的距离，而回避了点到射线、线段的距离．有的教师认为点到射线、线段的距离就是点到射线、线段所在直线的距离，这个观点正确与否？我们从距离的背景入手，分析中学阶段各类距离的定义(两点的距离→点到直线的距离→点到平面的距离→线线、线面、面面间距离→球面上两点的距离)即可发现，其基本特征是最短；距离的知识背景是距离公理：(1) ρ(x，y)≥0；(2) ρ(x，y)＝ρ(y，x)；(3) ρ(x，z)＋(z，y)≥ρ(x，y))．在测度论中对两个集合 A、B 间距离定义为$d=\inf\limits_{\substack{x\in A\\ x\in B}}\rho(x,\ y)$，由此观点自然明确了点到射线、线段、半平面的距离与点到射线、线段所在直线及半平面所在平面的距离不是同一概念．

例 3 “函数”与“赋范空间”．

函数是初等数学中的一个重要概念，深刻理解和掌握函数概念实质，不仅对学习初等数学本身,而且对进一步学习高等数学都会产生深远的影响.中

学阶段对函数曾有两种定义：

其一，如果在某变化过程中有两个变量 x、y，并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 是 x 的函数，……

其二，……当集合 A、B 都是非空的数的集合，且 B 的每一个元素都有原象时，这样的映射 $f：A\to B$ 就是定义域 A 到值域 B 上的函数(或 A、B 都是非空的数的集合，函数实质就是集 A 到集 B 的映射(必修教材))．如果从函数概念的发展线索来看，经历了以下几个阶段：

①研究具体的函数(如莱布尼兹)；

②研究变量与常量组成的函数(如贝努利)；

③研究函数的表示法(欧拉)；

④抓住对应实质研究函数(古典定义，如狄里赫莱)；

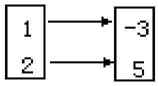
⑤借助集合用“关系”定义函数时期(如笛卡尔)；

⑥引进、提出 δ 函数时期；

⑦广义函数．

从这个角度分析，中学教材基本上采用了狄里赫莱的定义，其本质乃是对应思想．建立集合论以后，研究集合的结构固然重要，但建立和研究集合之间的映射更重要．现代数学的各个分支，实质就是研究具有不同数学结构的集合之间的各种映射关系(如同态、同构、可测函数等)．泛函分析中引入线性赋范空间概念后，可进一步研究左(右)逆映射、共轭映射等，这实质就是将实数域推广到了具有更一般数学结构的集合，将对应法则也推广到了更一般的情形．

概览函数概念发展的历程后，再回过头来看中学数学中有关函数的问题，

如函数究竟有几个要素？ $x^2(x\in R)$是不是函数？是不是函数？函数的定义域能否为空集？函数的图象是连续的曲线，还是视为有序数对的集合？由于观点理性化，所以必将摒弃模棱两可的认识．

例 4 “共轭”与“对偶”观．

初中阶段曾利用共轭根式将形如 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 的分式分母有理化，高中阶段引入了共轭复数、椭圆的共轭直径、共轭双曲线的概念，还有大量成对出现的表达式(如 $a+b$ 与 $a-b$，ab 与 $\dfrac{a}{b}$)和成对出现的结论(如 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ 等)，以及借助配对巧妙求值的算法(如 $A=\sin10°\sin30°\sin50°\sin70°$，$B=\cos10°\cos30°\cos50°\cos70°$，则 $A\cdot B=\dfrac{1}{16}\sin20°\sin60°\sin100°\sin140°=\dfrac{1}{16}B\Rightarrow A=\dfrac{1}{16}$ 尤其成对出现的命题，只需将其中一个的推理论证过程系统地予以改造即得另一个命题的证明．这些现象属于巧合，还是隐藏着必然规律？除了体现类比思维格式外，能否上升到定性的理论层次？事实上，射影几何中的对偶原理正好可看作上述对偶化方法的升格，或说上述现象正好是对偶原理在中学数学中的渗透．在射影平面上，视“点”与“直线”为对偶元素，“点在直线上”与“直线过点”、“两直线交于一点”与“两点连成一条直线”等基本关系称

为对偶关系，“通过一点作直线”与“在直线上取一点”叫对偶运算．当将命题中的基本元素换成对偶元素、基本关系换为对偶关系、各运算改为对偶运算时，即得一对对偶命题．如果其中一个命题正确，则另一个也必正确(如巴斯卡定理和布利安双定理)．同时，应该注意到，对欧氏几何虽有一些对偶命题成立，但欧氏几何中对偶原理不成立．在对偶观点指导下，可指导学生编撰、构造命题，一方面可激发兴趣和求知欲望，另一方面有利于培养创造性思维．

例 5 “貌合神离”与“数据拟合”．

学生提出的稀奇古怪的问题反映了学生的创新意识和思维水平，也可诱发教师作深层次的思考，可谓“教学相长”．一味讽刺学生“钻牛角尖”的老师实际上自己痛失了很多学习、钻研的课题和机会．比如有一次当我引导学生画正弦函数 $y=\sin x$ 的图象后，有几名学生突然“质问”： $y=\sin x$ 的图象好像是若干条抛物线对接起来的，为什么不用形如 $y=ax^2+bx+c$ 的解析式分段表示函数 $y=\sin x(x\in R)$ 呢？学习过《计算方法》的教师应该意识到，学生的怪问实质触及到了插值多项式理论及数据拟合知识．对 $y=\sin x(0\leq x\leq \pi)$，取 $x=0$，$\frac{\pi}{2}$，π，得 $y=0$，1，0，其相应的二次lagrange插值多项式为 $P(x)=\frac{4}{\pi^2}\cdot x(\pi-x)$，由此可近似计算出 $p(\frac{\pi}{4})=0.75$ $(\sin\frac{}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 0.71)$．为了控制误差，插值函数究竟选用一般的多项式，还是有理分式或三角多项式等，埃尔米特(Hermite)、傅里叶(Fourier)等专门进行过研究．现代数学分支——函数逼近论的基本思路就是研究用易于计算的表达式来研究函数．插值问题所求得的函数 $y=\psi(x)$ 在插值节点上满足 $y_i=\psi(x_i)$(即所求曲线通过点 (x_i, y_i))，数据拟合法则只求用近似曲线反映数据的变化趋势．有了上述理论保证，我们可以胸有成竹地回答学生：$y=\sin x(x\in[0,\pi])$ 的图象确实很像二次曲线，但不是二次曲线，根据需要可用二次曲线来进行拟合．

例 6 “大小关系”与“顺序关系”．

高中教材“复数”部分指出：两个复数，如果不全是实数，就不能比较它们的大小．仔细推敲，似乎有两层含义：其一，两个实数可以比较大小；其二，两个不全是实数的复数不能用两个实数大小关系来进行比较．追根求源，实数的大小关系指的是什么？两个复数可用别的“大小关系”来比较吗？
$a\prec a'$，$a=a'$，a' a 三者必且只居其一)及传递性(即 $\forall a$、a'、$a''\in A$，$a\prec a'$、$a'\prec a''\Rightarrow a\prec a''$)的关系，它满足五条公理(即(1) $x<y$，$y<z\Leftrightarrow x<z$，(2) $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x\Rightarrow x=y$，:
(3)三歧性，(4) $x\leqslant y\Rightarrow x+z\leqslant y+z$，(4) $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0\Rightarrow xy\geqslant 0$)，
由于实数的大小关系通常与运算相联系(如 2 大于 1 $\Leftrightarrow$ 2 − 1 是正数)，
所以当不涉及代数运算而仅涉及序关系时，复数还是可以比较“大小”的．由此可知，复数不能比较大小，实质是指在通常的大小关系下复数集不能成为有序域或全序集；复数可以比较“大小”，实质是指复数集可成为有序集．

例 7 “加减乘除”与“运算”

曾引起广泛讨论的“式子｜x｜”究竟是不是代数式，实质还是在于对运

算及运算符号的理解．初中教材定义“用运算符号将数及表示数的字母联结而成的式子叫代数式”，这里所指运算为加、减、乘、除、乘方、开方运算，即通常所说的代数运算．而｜x｜不属于代数运算，也非超越运算，因此可以说｜x｜既不是代数式，也不是超越式．为何会出现诸如｜x｜、集合运算、逻辑运算、极限运算等不隶属于代数运算及超越运算的情况呢？这必须从运算的产生、形成、发展来回答．

随着数的不断扩张，运算的对象和种类也在不断更新、增加，并逐步抽象化,后续抽象发展的运算概念当然不可能隶属于前期已形成的运算概念.具体地讲，在初等数学时期，由于仅限于对数、式、向量及一些几何图形，其相应的运算即为初等代数运算、初等超越运算和几何运算；到了变量数学时期，由于对变量、函数等实施运算，由此形成了无限运算——极限运算，进而产生了微分、积分运算；到了近代数学时期，由于对集合、命题等进行运算，因此形成了交、并、补等运算．即使同一种运算对象，运算内涵也在不断变迁，比如初等几何中对图形有平移、旋转、位似等变换，而现代分形学中对图形将研究其更精细的结构，如自相似性、维数等．由运算发展历程可知，所谓运算，实质就是一个映射；所谓代数运算，就是集合 A×B 到集 C 的映射．研究运算，首先要明确并非任何元素都可以进行某种运算，例如除法中零不可以做除数、对数运算中零和负数没有对数等；其次要考虑运算结果的唯一或多值性，例如 4 的平方根是＋2 和－2，由$\sin x=\frac{1}{2}$可得$x=k\pi+(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}(k\in Z)$等，运算的结果并非唯一的，而一般四则运算(0×( )＝0 除外)，其结果是唯一的；另外还要考虑运算的封闭性；最后还要研究相应的运算规律和结构性质．按此观点，中学阶段的运算，大部分可归结为代数运算，但也出现了无限运算、逻辑运算、向量运算．

例 8 “二面角的平面角”与“科学概念”．

每一个数学概念都好比一部史实，它记录了人类认识和改造客观世界的历程，也反应了不同时期人类思维的抽象概括的水平．每一个数学概念的提出都是为了直观、深刻地描述或刻划自然界的某种形式或关系，既要体现直观性，又要讲究科学性，其用于刻划的指标应存在且唯一．比如二面角的平面角，如果在二面角的棱上任取一点，分别在两个面内作与棱垂直的射线，根据空间等角定理知，两条射线所成的角与点在棱上的位置无关，且其数量唯一，因此符合科学性原则．但仔细探究，若以棱 a 上任意一点 O 为端点，在两个面内作与棱成等角θ′($0°<\theta'<90°$)的两条射线 OA′、OB′，由空间等角定理知，∠A′OB′也存在且唯一．为什么不用这样的角定义二面角的平面角？通过研究发现，记∠AOB＝θ，∠A′OB′＝ψ，当 OA′、OB′在平面 AOB 同侧时 θ＞ψ；当 OA′、OB′′在平面 AOB的异侧时θ＜ψ．另不难得出$\sin^2\theta'=\frac{\cos\varphi-1}{\cos\varphi-1}(*)$．即使限定 OA′、OB′在平面 AOB 的同侧，若用∠A′OB′＝ψ表示二面角的大小，则由(*)知，ψ与θ之间存在一个较复杂的数量关系，这将给表示，尤其是计算、应用带来不便；另外，若用∠A′OB′＝ψ表示二面角的大小，当平面α⊥平面β时ψ≠90°；当平面为α与半平面β在同一平面时，ψ＝2θ≠180°，这都与已有知识和经验不符，不能直观反映出两个相交平面的相

对位置关系．

除以上各例外，具有一定的高数背景、可利用高数及其发展的观点指导研究的还有：幂函数、指数函数、对数函数(公理化定义)、数学归纳法(皮亚诺公理)，数列(级数)等，本文不一一赘述．

参考文献

1 孙熙椿．从现代数学看中学数学．北京：中国林业出版社，1991

2 夏道行等．实变函数与泛函分析(上、下册)．北京：高等教育出版社，1985

3 王文林．现代中小学数学运算趣谈．上海：上海科普出版社，1991

4 徐萃薇．计算方法引论．北京：高等教育出版社，1985

5 王池富．关于立体几何的几点教学建议．中学数学(湖北)，

从几何直觉到代数证明

陕西师范大学　罗增儒

笔者是相信数学直觉的，并且还对数学直觉进行过有意识的积累与探索（见文［1］）．本文所提供的新案例，经历了从几何直觉到几何论证、并最终得出新代数证明的过程．

问题　设复数 $z=3\cos\theta+i\cdot 2\sin\theta$．求函数 $y=\theta-\arg z$ $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$的最大值以及对应的θ值．(1999年高考理科第(20)题)

这个问题有一个明显的几何意义(见文[2]),即复数 z 所对应的点是椭圆

$$\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=2\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$$

的第一象限部分(图 1)．

问题转化为求椭圆离心角θ与旋转角 argz 之差的最大值，也就是图 1 中∠MOA 的最大值．

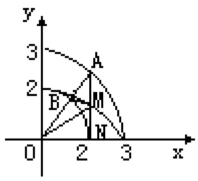


图 1

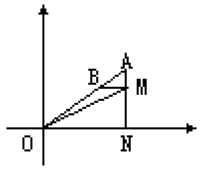


图 2

这个图形的线条稍嫌多了点，我们把表示角θ、argz 的线段留下，其余都擦去，于是图 2 向我们展示了一个似曾相识的情景，并立即引发几何直觉．下面分别介绍两个方面的直觉．

一、几何直觉——最大视觉

稍加回忆，我们就找到了熟知的“最大视角”问题，这样的几何结构，在 1986 年全国高考和 1991 年的上海高考出现过(见文[3])

如图 2，取 $M(3\cos\theta, 2\sin\theta)$，$A(3\cos\theta, 3\sin\theta)$，由圆周角大于圆外角知，当△AOM 的外接圆与 x 轴相切时，$\angle AOM=\theta-\arg z$ 最大，由弦切角定理得

$$\angle MON=\angle OAN，即 \arg z=\frac{\pi}{2}-\theta．\qquad ①$$

有 $\frac{2\sin\theta}{3\cos\theta}=\text{tg}(\arg z)=\text{tg}(\frac{\pi}{2}-\theta)=\text{ctg}\theta$，

得 $\text{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\theta=\text{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}$．

进而　$y=\theta-\arg z=2\theta-\dfrac{\pi}{2}$

$$=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\pi}{2}$$

此处，“当△AOM 的外接圆与 x 轴相切时，∠AOM 最大”是一个直觉．本例与“最大视角”有一个不同是：“最大视角”中的线段 AM 为定线段，O 为 x 轴上的动点；而本例中恰好相反，线段 AM 为动线段，O 为 x 轴上的定点．把这两者同等看待又源于一个直觉：从相对运动的观点看来，视 AM 为定线段后，将坐标系作平移或旋转．这些想法就是文[4]中此例处理的背景．

为了给数学直觉一个逻辑铺垫.我们首先找出了一个麻烦的几何说明.如图3，设△MOA的外接圆与x轴相切于O，又另取$\theta_1\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，记$A_1(3\cos\theta_1，3\sin\theta_1)$，$M_1(3\cos\theta_1，2\sin\theta_1)$，则$M_1$对应的复数为

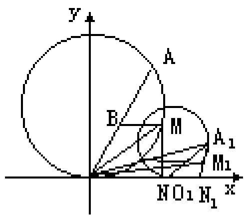


图　3

$z_1=3\cos\theta_1+i\cdot 2\sin\theta_1$，

且$\angle M_1OA_1=\theta_1-\arg z_1$.

过A_1作OA的平行线交x轴于O_1，连结O_1M_1，则$Rt\triangle A_1O_1N_1\backsim Rt\triangle AON$，有

$\dfrac{A_1N_1}{AN}=\dfrac{O_1A_1}{OA}=\dfrac{O_1N_1}{ON}=k$，其中k为比例系数.

由$\angle O_1A_1M_1=\angle OAM$，且

$\dfrac{A_1M_1}{AM}=\dfrac{3A_1M_1}{3AM}=\dfrac{A_1N_1}{AN}=\dfrac{O_1A_1}{OA}$，

得$\triangle M_1O_1A_1\backsim\triangle MOA$，从而

$\angle M_1O_1A_1=\angle MOA=\theta-\arg z$，

但由切割线定理知

$O_1N_1{}^2=(k\cdot ON)^2=k^2\cdot(NM\cdot NA)$

$\quad=(k\cdot NM)(k\cdot NA)=N_1M_1\cdot N_1A_1$.

可见，$\triangle M_1O_1A_1$也与x轴切于O_1，由圆周角大于圆外角知

$\angle M_1O_1A_1>\angle M_1OA_1$，

即$\angle MOA>\angle M_1OA_1$.

这就说明了，当△MOA 的外接圆与 x 轴相切时，∠MOA 最大，我们大跨度

的直觉没有搞错，但解释过程稍嫌麻烦．

二、几何直觉——切线角

本例与“最大视角”还有一个不同是，OA＝3，OB＝2，AB＝1 均为定值．这就使得点 M 在以 AB 为直径的半圆上，一个明显的几何直觉是：当 OM 与半圆相切时，∠MOA 最大(图 4)．

此时，连结半径 CM，在 Rt△COM 中，有

$\mathrm{CM}=\frac{1}{2}$，$\mathrm{OC}=\frac{5}{2}$，从而$\mathrm{OM}=\sqrt{6}$．

得∠MOA 的最大值为

$(\theta-\arg z)_{\max}=\mathrm{arctg}\frac{1}{2\sqrt{6}}$，或$(\theta-\arg z)_{\max}=\arcsin\frac{1}{5}$，或

$(\theta-\arg z)_{\max}=\arccos\frac{2\sqrt{6}}{5}$．

此时，由弦切角定理得$\angle\mathrm{MAO}=\angle\mathrm{BMO}$，但$\angle\mathrm{MAO}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{xOA}$，$\angle\mathrm{BMO}=\angle\mathrm{xOM}$，有$\frac{\pi}{2}-\theta=\arg z$．　　②

故得 $\frac{1}{2}\theta=1/2[(\theta+\arg z)+(\theta-\arg z)]$

$$=1/2\left(\frac{\pi}{2}+\mathrm{argtg}\frac{1}{2\sqrt{6}}\right).$$

为了给数学直觉一个逻辑铺垫，我们也可以找出一个几何说明．如图 5，M、M_1点对应的复数为

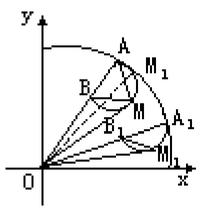


图 5

$z=3\cos\theta+i\cdot 2\sin\theta$，

$z_1=3\cos\theta_1+i\cdot 2\sin\theta_1$，

θ，$\theta 1\in(0,\frac{\pi}{2})$．其中OM为半圆AB＝1上的切线，$\mathrm{OM}_1$为半圆$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$＝1上的割线，作旋转，使OA1与OA重合，则半圆$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$与半圆AB也重合，$\mathrm{M}_1$点成为半圆AB上的点$\mathrm{M}_1{}'$，则割线OM1′在∠MOA内部，有$\angle\mathrm{MOA}>\angle\mathrm{M}_1{}'\mathrm{OA}=\angle\mathrm{M}_1\mathrm{OA}_1$．

这说明了，当 OM 与半圆 AB 相切时，∠MOA 最大，我们的直觉没有搞错．

三、从直觉到严格求解

上述两个直觉虽然视角稍有不同，但所洞察到的几何实质却是一样的，

式①、②表明，当$\theta+\arg z=\frac{\pi}{2}$时，$\theta-\arg z$取最大值，这促使我们去考虑$\theta-\arg z$与$\theta+\arg z$的联系．

另外，第二个几何直觉，将问题转化到△COM 的简单求解，也引起了我们的强烈兴趣，我们注意到

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}, \quad ③$$

$$\overrightarrow{OC}=\frac{5}{2}(\cos\theta+i\sin\theta),\ \overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}(\cos\theta-i\sin\theta).$$

突然，将③两边除以$\overrightarrow{OM}$的念头，使我们心花怒放，因为这会产生$\theta+\arg z$与$\theta-\arg z$，一个全新的解法到来了．

解：由$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$知，$3\cos\theta>0$，$2\sin\theta>0$，有$\arg z\in(0,\frac{\pi}{2})$，$|z|\in[2,3]$.

又 $z=|z|[\cos(\arg z)+i\sin(\arg z)]$

$$=3\cos\theta+i\cdot 2\sin\theta$$

$$=\frac{5}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{2}(\cos\theta-i\sin\theta),$$

有$2|z|=\dfrac{5(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)}{\cos(\arg z)+i\sin(\arg z)}$

$$=5[\cos(\theta-\arg z)+i\sin(\theta-\arg z)]$$

$$+[\cos(\theta+\arg z)-i\sin(\theta+\arg z)],$$

比较实部、虚部得

$$5\cos(\theta-\arg z)+\cos(\theta+\arg z)=2|z|, \quad ④$$

$$5\sin(\theta-\arg z)-\sin(\theta+\arg z)=0. \quad ⑤$$

可见，当$\theta+\arg z=\frac{\pi}{2}$ ⑥

时，$\sin(\theta-\arg z)$可以取到最大值，代入④、⑤

$$\begin{cases}\cos(\theta-\arg z)=\frac{2}{5}|z|>0,\\ \sin(\theta-\arg z)=\frac{1}{5}>0.\end{cases}$$

可见，$\theta-\arg z\in(0,\frac{\pi}{2})$，由反正弦函数的递增性，有

$$(\theta-\arg z)_{max}=\arcsin\frac{1}{5}. \quad ⑦$$

⑥＋⑦可求得$\theta=\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{5})$.

评析 这个纯代数的解法有明显的几何意义,首先是由复数加法的几何意义把 z 分解为两个复数之和(这有图 4 在作诱导)：

$z_1 = \frac{5}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)$，

若复数$z_2 = \frac{1}{2}(\cos\theta - i\sin\theta)$，

$z = z_1 + z_2$.

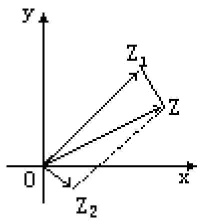


图 6

所对应的点(大写字母)满足平行四边形法则(图 6)然后变形比较实部、虚部．所得出的④式本质是射影定理，所得出的⑤式本质是正弦定理．

得出⑤式之后，已经没有什么实质性的困难了，换句话说，本题可以用正弦定理来求解．

不管人们对这个解法的繁简有何评价，我们自己确实对题目的几何结构获得了深层认识，并且经历了一个从直觉到严格的小小过程，相信读者也能从中获得启示．

参考文献

1 罗增儒，钟湘湖．直觉探索方法．郑州：大象出版社，1999

2 晨旭．稳中求进，注重考查能力——1999 年普高数学命题总结．数学通报，1999，7

3 张雪霖．两道同出一辙的高考试题及其几何解法．数学教学，1991，1

4 罗增儒．解题分析——1999 年高考题与学思维．中学数学

关于自然数平方和的几个模型

陕西省蒲城师范学校　曹红妍

自然数的平方和$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)$有多种证明方法，除了用数学归纳法、变换数学公式、组合恒等式等证明外，还可以构造模型来证明

模型1　分析求和数，$k^2(k=1, 2, \cdots, n$表示k个k之和$1^2+2^2+\cdots+n^2$形式整齐．作一等边三角形，将各边分成$n-1$等份过分点作另两边的平行线,可以得到$1+2+\Lambda+n=\frac{1}{2}n(n+1)$个分点o

将求和数摆到三角形各交点上，k^2摆在第k行的k个位置上，表示 k 个 k 之和(图 1(1)).旋转此三角形数阵得到另两个三角形数阵(图 1(2)、1(3))，每一线段上的数字顺序成等差数列，再重叠三个数阵，则每一点上的数字和为(2n＋1)．于是

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}n(n+1)\bullet(2n+1)$$

即 $$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)\bullet(2n+1)$$

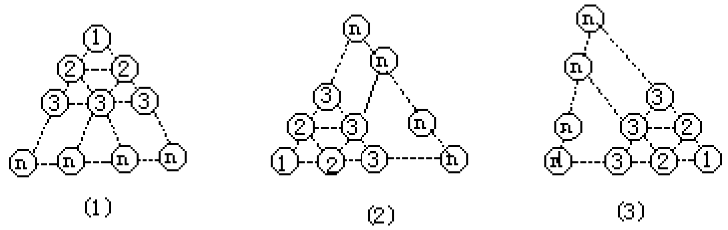


图 1

模型1应用了k^2的定义(k个k之和)与等差数列的性质，其中又渗透了运动的思想，动静结合，相得益彰．

模型2　$k^2(k=1,2,\cdots, n)$可表示为k^2个单位正方形的面积。这k^2个单位正方形排成$k^2\times1$的矩形．联想到求面积计算，就可利用图形割补、数形结合来证明．

分别构造$k^2=(1,2,\cdots, n)$个单位正方形(图2)，从上到下各层依次放k^2个，即求所有正方形面积之和．现利用单位正方形将此图形补成一个$n^2\times n$的矩形．先给前$n-1$层各补$(2n-1)$个单位正方形，共补(n－1)(2n－1)个单位正方形；再给前 n－2 层各补(2n－3)个单位正方形，共补(n－2)(2n－3)个；……，　最后给第一层补 3 个，这样添补的单位正

方形个数为$1\times3+2\times5+\cdots+(n-2)(2n-3)+(n-1)(2n-1)$．原有单位正方形$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$个．所以

$$\begin{aligned}n^2\times n&=\sum_{k=1}^{n}k^2+1\times3+2\times5+\Lambda+(n-2)(2n-3)+(n-1)(2n-1)\\&=\sum_{k=1}^{n}k^2+2[1^2+2^2+\Lambda+(n-1)^2]+[1+2+\Lambda+(n-1)]\\&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}n(n-1)-2n^2,\end{aligned}$$

即：$$\begin{aligned}3\sum_{k=1}^{n}k^2&=n^3+2n^2-\frac{1}{2}n(n-1)\\&=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1),\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

模型 2 数形结合，以形助数，比较直观．而应用映射方法将求和问题映射成几何上的求堆垒总数问题，再利用几何体的割补求和，也体现了化归思想．

模型3 用单位立方体作堆垒，以上到下第k层放k^2个，然后逐次把每层补足$(n+1)^2$个立方体，得到共n层的长方体，其体积为$n(n+1)^2$，而添补的立方体个数为 1×3＋2×5＋…＋n(2n＋1)，原有立方体个数为$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$个．所以

$$\begin{aligned}n(n+1)^2&=\sum_{k=1}^{n}k^2+1\times3+2\times5+\Lambda+n(2n+1)\\&=3\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k^2,\end{aligned}$$

即：$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^2&=\frac{1}{3}[n(n+1)^2-\frac{1}{2}n(n+1)]\\&=\frac{1}{6}n(n+1)\bullet(2n+1).\end{aligned}$$

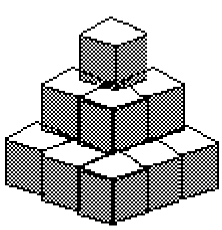


图　3

以上三个均属构造的数学模型，另外还可以构造物理模型，从物理意义

上进行探讨．

点作等边△A_1BC、分别过$A_2(2，0)$，$A_3(3，0)$，…，$A_{n-1}(n-1)$
,0作x轴的垂线，分别与A_1B、A_1C相交。在过A_1，A_2，…，An的
垂线段上分别等距离地放 1 个，2 个，…，n 个重量为 1 个单位的质点．则这些质点对原点的力矩

$$M=1\times1+2\times2+\cdots+n\times n$$
$$=1^2+2^2+\cdots+n^2.$$

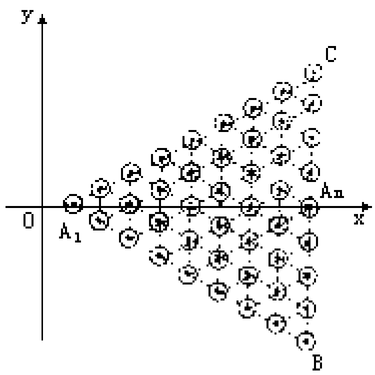


图 4

另一方面，所有质点的重心就是等边△A_1BC的重心，它到原点的距离为

$$\frac{2}{3}(n-1)+1=\frac{1}{3}(2n+1)$$

总重量$1+2+\Lambda+n=\frac{1}{2}n(n+1).$

所以$M=\frac{1}{3}(2n+1)\bullet\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

即$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

数学知识结构之间的相互联系，为我们解决问题提供了丰富的源泉．数学问题的模型是多样的．通过对不同模型的探讨，将有助于开阔我们的视野，有助于提高我们的分析问题和解决问题的能力．

参考文献

1　罗增儒．　数学解题学引论．西安：陕西师范大学出版社，1997
2　张奠宙，过伯祥．　数学方法论稿．上海：上海教育出版社，1996

“等”对“不等”的启示

江苏省张家港市教委教研室 顾树柏

对于解集非空的一元二次不等式的求解，我们常用“两根之间”、“两根之外”这类简缩语来说明其结果，同时也表明了它的解法．这是用“等”来解决“不等”的一个典型例子．从表面上看，“等”和“不等”是对立的，但如果着眼于“等”和“不等”的关系，会发现它们之间相互联系的另一面．设M、N是代数式，我们把等式M＝N叫做不等式M＜N，M≤N，M＞N、

M≥N相应的等式．我们把一个不等式与其相应的等式对比进行研究，发现“等”是“不等”的“界点”、是不等的特例，稍微深入一步，可以从“等”的解决来发现“不等”的解决思路、方法与技巧．本文通过几个常见的典型例题揭示“等”对于“不等”在问题解决上的启示．

1．否定特例，排除错解

解不等式的实践告诉我们,不等式的解区间的端点是它的相应等式(方程)的解或者是它的定义区间的端点(这里我们把＋∞、－∞也看作端点)．因此我们可以通过端点的验证，否定特例，排除错解，获得解决问题的启示．

例1 满足$\sin(x-\frac{\pi}{4})\geq\frac{1}{2}$的x的集合是_______．

( )

A．$\left\{x|2k\pi+\frac{5\pi}{12}\leq x\leq 2k\pi+\frac{13\pi}{12},k\in Z\right\}$

B．$\left\{x|2k\pi-\frac{\pi}{12}\leq x\leq 2k\pi+\frac{7\pi}{12},k\in Z\right\}$

C．$\left\{x|2k\pi+\frac{\pi}{6}\leq x\leq 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in Z\right\}$

D．$\left\{x|2k\pi\leq x\leq 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in Z\right\}$

分析：当$x=-\frac{\pi}{12}$、$x=\frac{\pi}{6}$、$x=0$时，$\sin(x-\frac{\pi}{4})<0,$因此排除B、C、D，故选A．

例2 不等式$\sqrt{4-x^2}+\frac{|x|}{x}\geq 0$的解集是______．

( )

A．$\{x|-2\leq x\leq 2\}$

B．$\{x|-\sqrt{3}\leq x<0$或$0<x\leq 2\}$

C．$\{x|-2\leq x<0$或$0<x\leq 2\}$

D．$\{x|-\sqrt{3}\leq x<0$或$0<x\leq\sqrt{3}\}$

分析：由x＝－2不是原不等式的解排除A、C，由x＝2是原不等式的一个解排除D，故选B．

这两道题若按部就班地解来，例1是易错题，例2有一定的运算量．上面的解法省时省力，但似有“投机取巧”之嫌．选择题给出了三误一正的答案，这是问题情景的一部分．而且是重要的一部分．我们利用“等”与“不等”之间的内在联系，把目光投向解区间的端点，化繁为简，体现了具体问题具体解决的朴素思想，这种“投机取巧”正是抓住了问题的特征，体现了数学思维的敏捷性和数学地解决问题的机智．在解不等式的解答题中，我们可以用这种方法来探索结果、验证结果或缩小探索的范围．

例3 解不等式 $\log_a(1-\frac{1}{x})>1$．(1996年全国高考试题)

分析：原不等式相应的等式——方程 $\log_a(1-\frac{1}{x})=1$ 的解为 $x=\frac{1}{1-a}$（$a\neq1$ 是隐含条件)．原不等式的定义域为(1，＋∞)∪(－∞，0)．当x→＋∞或x→－∞时，$\log_a(1-\frac{1}{x})\to0$，故解区间的端点只可能是0、1或 $\frac{1}{1-a}$．当0＜a＜1时，$\frac{1}{1-a}$，可猜测解区间是 $(1，\frac{1}{1-a})$；当a＞1时，＜0，可猜测解区间是 $(\frac{1}{1-a}，0)$．当然，猜测的时候要结合定义域考虑．

上面的分析，可以作为解题的探索，也可以作为解题后的回顾与检验．如果把原题重做一遍视为检验，那么一则费时，对考试来说无实用价值，对解题实践来说也失去检验所特有的意义；二则重做一遍往往可能重蹈错误思路、错误运算程序的复辙，费时而于事无补．因此，抓住端点探索或检验不等式的解，是一条实用、有效的解决问题的思路．

2．诱导猜想，发现思路

当我们证明不等式M≥N(或M＞N、M≤N、M＜N)时，可以先考察M＝N的条件，基本不等式都有等号成立的充要条件，而且这些充要条件都是若干个正变量相等，这就使我们的思考有了明确的目标，诱导猜想，从而发现证题思路．这种思想方法对于一些较难的不等式证明更能显示它的作用．

例4 设a、b、c为正数且满足abc＝1，试证：

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}.$$(第36届IMO第二题)

分析：容易猜想到a＝b＝c＝1时，原不等式的等号成立，这时 $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{1}{2}$..考虑到“≥”在基本不等式中表现为“和”向“积”的不等式变换，故想到给原不等式左边的每一项配上一个因式，这个因式的值当a＝b＝c＝1时等于 $\frac{1}{2}$，且能通过不等式变换的运算使原不等式的表达式得到简化．

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{b+c}{4bc}\geq\sqrt{\frac{1}{a^3bc}}=\frac{1}{a},$$

$$\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{c+a}{4ca}\geq=\frac{1}{b},$$

$$\frac{1}{c^3(a+b)}+\frac{a+b}{4ab}\geq=\frac{1}{c},$$

将这三个等式相加可得

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{4}(\frac{b+c}{bc}+\frac{c+a}{ca}+\frac{a+b}{ab})$$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=\frac{3}{2}$，从而原不等式获证．

这道题看似不难，当年却使参赛的 412 名选手中有 300 人得 0 分．上述凑等因子的思路源于由等号的成立条件而产生的猜想，使思路变得较为自然，所用的知识是一般高中生所熟知的．再举二例以说明这种方法有较大的适用范围．

例 5　设 a，b，c，d 是满足 ab＋bc＋cd＋da＝1 的正实数，求证：

$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$．(第31届IMO备选题)

证明：$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{a(b+c+d)}{9}\geq\frac{2}{3}a^2$

$$\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{b(a+c+d)}{9}\geq\frac{2}{3}b^2$$

$$\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{c(a+b+d)}{9}\geq\frac{2}{3}c^2$$

$$\frac{d^3}{a+b+c}+\frac{d(a+b+c)}{9}\geq\frac{2}{3}d^2$$

$$\therefore\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}$$

$$\geq\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)$$

$$=\frac{5}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)$$

$$\frac{1}{9}(a^2+c^2-2ac+b^2+d^2-2bd)$$

$$\geq\frac{5}{9}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)$$

$$\geq\frac{5}{9}(ab+bc+cd+da)-\frac{2}{9}(ab+bc+cd+da)$$

$$=\frac{1}{3}(ab+bc+cd+da)$$

$$=\frac{1}{3}$$

当$a=b=c=d=\frac{1}{2}$时，原不等式左边的四个项都等于$\frac{1}{12}$，由此出发凑“等因子”．对于某些中学数学中的常见问题也可用这种方法解决，降低问题解决对知识的要求．

例6 设a，b，c，d∈R^+，a＋b＋c＋d＝8，求$M=\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}$的最大值．

分析：猜想当a＝b＝c＝d＝2时M取得最大值，这时M中的4个项都等于3．要求M的最大值，需将M向“≤”的方向进行不等变换，由此可得$3\sqrt{4a+1}\le\frac{3+4a+1}{2}=2a+2$，$3\sqrt{4b+1}\le=2b+2$，$3\sqrt{4c+1}\le=2c+2$，$3\sqrt{4d+1}\le=2d+2$．于是$3M\le2(a+b+c+d)+8=24$，∴$M\le8$．当且仅当a＝b＝c＝d时等号成立，所以M的最大值为8．

当然，例6利用平方平均数不小于算术平均数是易于求解的，但需要高中数学教材外的知识．利用较少的知识解决较多的问题，是数学自身的追求，而且从教学上考虑，可以更好地培养学生的数学能力．先有猜想，后有设计，再有证法，也是数学地思考问题的基本特征．

3．引发矛盾，启迪探索

在利用基本不等式求最大值或最小值时，都必须考虑等号能否取得，这不仅是解题的规范要求，而且往往对问题的解决提供有益的启示．特别当解题的过程似乎顺理成章，但等号成立的条件却发生矛盾或并不一定成立．这一新的问题情景将启迪我们对问题的进一步探索．

例7 设a，b∈R^+，2a＋b＝1，则$2\sqrt{ab}-4a^2-b^2$有______．（　　）

A．最大值$\frac{1}{4}$．　　B．最小值$\frac{1}{4}$

C．最大值$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　D．最小值$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

分析：由$4a^2+b^2\ge4ab$，得原式$\le2\sqrt{ab}-4ab=-4(\sqrt{ab})^2+2\sqrt{ab}=-4(\sqrt{ab}-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$．若不对不等变换中等号成立的条件进行研究，似已完成解题任务，而且觉得解题过程颇为自然，但若研究一下等号成立的条件，则出现了矛盾：要使

$4a^2+b^2\geq 4ab$中的等号成立，则应有$2a=b=\dfrac{1}{2}$，这时$\sqrt{ab}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\neq\dfrac{1}{4}$，第二个“≤”中的等号不能成立．这一矛盾使我们感觉到解题过程的错误，促使我们另辟解题途径．事实上，原式＝$2\sqrt{ab}-(2a+b)^2+4ab$

$=4ab+2\sqrt{ab}-1$，而由$1=2a+b\geq 2\sqrt{ab}$得，$0<\sqrt{ab}\leq\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，$ab\leq\dfrac{1}{8}$

∴原式≤$\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}-1=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，故选C．

等号不一定成立而启迪我们对问题进一步探索的典型例子是 1997 年全国高考(理科)

例 8　甲、乙两地相距 S 千米(㎞)，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c 千米/小时(㎞/h)．已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v(千米/小时)的平方成正比，比例系数为 b，固定部分为 a 元．

Ⅰ．把全程运输成本 y(元)表示为速度 v(千米/小时)的函数，并指出这个函数的定义域；

Ⅱ．为了使全程运输成本最小，汽车应以多大的速度行驶？

分析：$y=\dfrac{aS}{v}+bSv$，$v\in(0，c]$，由$y\geq 2S\sqrt{ab}$当且仅当$\dfrac{aS}{v}$，即当)v$=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$时等号成立得，当$v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$时y有最小值．这是本题的正确答案吗？

那就得考虑$v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$是否一定成立．当$\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leq c$时可以，但$\sqrt{\dfrac{a}{b}}$是有可能大于 c 的．这就引发了我们进行分类讨论的动机，同时也获得分类的标准．

综上所述，“等”是不等式问题中一道特殊的风景，从“等”中寻找问题解决的思路，本质上是特殊化思想在解题中的应用．从教学上看，引导学生注视不等式问题中的“等”，是教会学生发现问题、提出问题，从而分析问题、解决问题的契机．

转移法求轨迹方程的新定义

江苏省宜兴市宜兴中学 史美初

波利亚指出：“如果你不能解决所提的问题，可尝试先去解决某个与此有关的辅助问题，一个更易着手的特殊问题，这正像小河当中正好有块合适的石头可作为临时的踏脚石，我们用两步过河一样．”

转移法求轨迹方程的根本策略就是寻找踏脚石，两步实现目的．

平时我们所熟悉的，在其他书上所定义的转移法是指：当生成轨迹的动点 P 随着另一动点 Q 的变动而有规律地变动，且 Q 又落在一给定的曲线 C 上时，根据条件去寻找表示 P、Q 两点间规律的表达式，然后将 Q 点的两个坐标分别用 P 点的坐标来表示，再把 Q 点的坐标代入曲线 C 的方程．这一方法的本质问题是代入！

如果我们把 Q 点称主动点，P 点称为从动点，那么上面这一定义可以理解成：求从动点的轨迹方程，只须用从动点的坐标来表示主动点的坐标，再把主动点代入已知曲线方程．我们把这种求从动点轨迹方程的方法定义为代入法．

本文定义的转移法是说：当生成轨迹的动点 P 的方程不易求得时，就改换目标，先去寻求与 P 有着密切关系的动点 Q 的曲线的方程(踏脚石！)，再转化为用代入法求 P 点的轨迹．

这一定义的中心问题是转移目标，寻求辅助曲线(或说中间曲线)．

代入法与转移法的本质区别是曲线 C 的已知与未知(待求)．因此，怎样去探求、寻找这辅助曲线(踏脚石！)便成了问题的焦点和中心了．

下面略举几例，希望能帮助读者从中寻到规律．

例 1　过原点的椭圆的一个焦点为 F(1，0)，长轴长为 4，求椭圆的中心 P 的轨迹方程．

解：设椭圆另一焦点的坐标为$Q(x_0，y_0)$，由椭圆定义$\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2}+1=4$，

∴Q点的轨迹方程为$x_0{}^2+y_0{}^2=9$．

设椭圆中心的坐标为$(a，b)$，由中点坐标公式有$x_0=2a-1$，$y_0=2b$，

代入上面Q点的轨迹方程，并以x代a，y代b，得$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{9}{4}$．

这就是椭圆中心的轨迹方程

例 2　设抛物线的准线为 y 轴，且过点 M(a，b)，求证当 M 在坐标平面上移动时，抛物线的顶点轨迹的离心率是一常数．

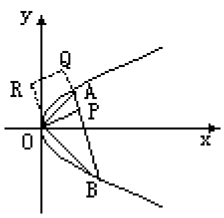
分析：当 M 变动时，抛物线的顶点轨迹是什么？给出了准线和抛物线上的点，焦点的轨迹便是举手之劳了．

解：设抛物线的焦点为$F(x_0，y_0)$，由抛物线的定义，有$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=a^2$．

若顶点的坐标为(x，y)，则 y0＝y，x0＝2x，于是得抛物线顶点的轨迹方程

$$\frac{(x-\frac{a}{2})^2}{\frac{a^2}{4}}+\frac{(y-b)^2}{a^2}=1$$，离记率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 3 如图所示，AB是抛物线 $y^2=2px$ 上的动弦，p为点O在AB上的射影．如果AB满足 $|OP|^2=|PA|\cdot|PB|$，求以OP为一边以∠OPA 为内角的正方形 OPQR 的顶点 R 的轨迹方程．



分析：直接求 R 的轨迹方程有困难．但是我们不难发现 R 随 P 的变化而变化，P 的运动的轨迹方程若能找到，R 的轨迹方程也就解决了．

用转移法！先求 P 的轨迹方程．

解：∵OP⊥AB，在 Rt△AOP 及 Rt△POB 中，

$OA^2=OP^2+AP^2$，$OB^2=OP^2+PB^2$

两式相加：$OA^2+OB^2=2OP^2+AP^2+PB^2$

$=AP^2+PB^2+2AP\cdot PB=AB^2$，

∴ △AOB 为直角三角形．

求 P 点的轨迹方程，方法颇多，有交轨法、参数法、极坐标法……，请读者推导：P点的轨迹方程为 $(x-p)^2+y^2=p^2$．

再求 R 的轨迹方程，由 OPQR 是正方形，最自然地联想到复平面上向量的旋转或极坐标．

我们选用极坐标系来解：

取O为极点，$\overrightarrow{Ox}$ 为极轴，则P点的极坐标方程为 $\rho=2p\cos\theta$，设R点的极坐标为 $(\rho_1,\ \theta_1)$，OP与OR的夹角为 $\frac{\pi}{2}$，∴ $\theta_1=\theta+\frac{\pi}{2}$，$\rho=\rho_1$，

∴ R 点的极坐标方程为 $\rho=-2p\sin\theta$．

注：选用极坐标系来求 R 的轨迹方程，确实简单，建议读者用复平面上向量的旋
转去试一试．