数学通报

2000年第2期

数学能力研究的问题与方向①

朱文芳(首都师范大学数学系　100037)

本世纪以来，心理学家、数学家与数学教育家一直致力于数学能力的研究．但二者的研究目的、观察角度、感兴趣的侧重点有所不同，前者是希望借此来揭示智力的机制，后者是想为数学教育的改革提供依据．为了促进数学能力的研究，本文在对数学能力研究现状分析的基础上，提出进一步研究的方向．

1　数学能力研究的基本问题

综观数学能力的研究，我们认为它主要涉及三个基本问题：

1．1　数学能力的实质

探讨数学能力是作为一种特殊形式存在，与一般智力范畴不同，还是一般心理过程中人格品质的特殊化？即智力是与数学能力一起发展的吗？换言之，数学能力是否就是智力加上对数学的兴趣和学习数学的倾向性呢？

对这一问题的看法不一，心理学家克鲁切茨基、数学家庞加莱、阿达玛等倾向于承认数学能力是一种特殊能力．但是，心理学家斯皮尔曼指出，不存在一种在一般因素以外，适于从低级到高级的各个数学领域的特殊数学能力[1]．我国学者林崇德(1978)、曹才翰(1990)、丁尔升(1994)等认为数学能力是智力的一种概括化形式．

1．2 数学能力的组成成分及其结构

数学能力作为一种复杂的心理形式,其构成是单一性的(不可再分的独立存在)，还是综合性的？若是综合性的复合物，其组成成分是什么？以怎样的方式组织？即其结构是什么？

据不完全统计，目前提出的数学能力已达上百种之多．这表明大多数学者认为数学能力是一种综合性的复合物．但在“其组成成分是什么？”的问题上，有很大分歧．

例如，桑代克认为数学能力是算术与代数能力．魏德林认为数学能力是理解、记忆，以及解决问题的能力．克鲁切茨基认为数学能力包括：获得数学信息；数学信息加工；数学信息保持；一般综合性等组成成分[2]．

林崇德认为数学能力是以数学概括为基础的运算能力、空间想象能力和逻辑思维能力，与思维的深刻性、灵活性、独创性、批判性和敏捷性品质相互交叉构成的统一整体[3]．王梓坤认为数学能力应包括“直观思维、逻辑推理、精确计算和准确判断．”[4]

1．3 数学能力的形成与发展

数学能力是如何形成的呢？遗传、生理成熟与环境、教育对数学能力的形成与发展究竟起什么作用？数学能力形成与发展的量变与质变规律是什么？

这些问题的核心是：生理成熟、遗传和环境、教育对数学能力形成与发展所起的作用．我们对这一问题的看法是，生理成熟、遗传是学生数学能力形成与发展的物质基础(生物前提)，它们提供了学生发展的可能性；而环境、教育则把这种可能性变成了现实性，它们在学生数学能力的形成与发展过程中起决定作用．尤其是教育占有主导地位，因为它决定着学生发展的方向、水平、速度、范围，甚至会影响与改造学生智力发展的遗传素质．

许多学者的研究，如皮亚杰、范·海勒夫妇，以及当代许多研究者的研究[5][6]也支持这一论断．

2 当前数学能力研究中存在的问题

2．1 从研究结论上看

对什么是数学能力？数学能力的组成成分及其结构是什么？数学能力是怎样形成和发展的这些基本问题的研究，目前并未有一个明确答案．造成这种局面的原因主要有：

(1)心理学家主要对初等数学感兴趣，如：计算、数字、分数、比例、初等几何等．虽然也有心理学家使用现代数学中的一些术语，可是他们所谈的拓扑空间、射影空间、映射、变换群等术语的意义，常与数学上的本意相差很大．

许多人只研究了儿童早期的计算能力，初步的数概念和一些朴素的空间观念，就来建构儿童的数学认知结构，描述数学能力发展的一般规律，进一步地推断数学能力的实质．这种研究“实质上是在最低层次上”所展开的研究．例如第尼斯(Dienes)认为“6～12 岁的儿童可以掌握二次方程、有限群、同构，以及模等”概念，而这实质上不过是儿童的游戏．把这种“在最低层次上通过操作对概念进行运算”所得到的研究结论，推广到一般的数学能力研究问题上是缺乏说服力的．

事实上，大多数比较复杂的数学概念，并未从心理学角度加以充分的研究．例如：人类所形成的用字母表示数的概念，方程的概念等，表明了代数方法代替算术方法的思维改向；人类所形成的函数、微积分的概念，使得人类的思维找到了驾驭变量、无限的工具，数学也因此实现了由常量数学向变量数学发展时期的转变．象这些曾在数学发展过程中具有里程碑意义，使得人类思维发生重大转折的关键性概念，个体是怎样形成与发展的？个体获得了这些概念之后，是否导致其数学能力发展质的飞跃？等等，对这些问题我们还未给予全面深入的研究，因此目前“对数学领域中高级能力的发展的重要意义，至今还没有很明确的描述”[2]，是非常自然的．

(2)虽然我们都承认对数学能力的组成成分及其结构的分析,有助于探究数学能力的实质，但这种研究结论的众说纷纭，莫衷一是，难以达成共识的结果，应使我们反思这种“模式”研究的意义所在．因为这种研究要么是假设的结构，主观的推测；要么是通过因素分析得到的，而因素分析的实质在于从各种测验结果的相关中找出共同因素，它通过相关系数的计算，揭示了不能即刻明了的和以隐蔽形式存在的测验分数之间的相互依赖关系．但对于这些共同因素是如何产生的？单凭因素分析是不能解释的．

也就是说，对数学能力的组成成分及其结构的研究，不能说明不同的数学心理过程所导致相同结果的原因．特别是，为进行数量化的分析研究，人为地将数学活动这一有目的、有意义的整体结构，分解为许多孤立的元素的做法，应当引起我们对其研究结论有效性的思考，应用这些结论时应考虑到它的局限性．通过这种研究，我们究竟能否揭示出数学能力的本质？

(3)对数学能力的形成与发展的研究，主要是由心理学家来进行的．由于其目的是想揭示智力发展的机制，因此为了控制无关变量，研究者往往将研究对象局限于年幼儿童，特别重视对儿童数学能力发生过程的研究．

例如，皮亚杰等人主要针对 11～12 岁以前的儿童进行了大量研究，对 11～12 岁以后的学生有代表性的研究则很少．林崇德等所进行的中小学生心

理能力发展与培养的研究，涉及到中小学生数学能力的发展问题，但对中学生数学能力发展的研究，还需要做大量精细的工作．

2．2 从研究方法上看

概括各种数学能力的研究方法，主要分为两类：

(1)采用实验法、测验法、统计分析等手段，来证实某种理论存在的定量分析研究．对数学能力组成成分及其结构的研究，多是采用此类方法．这种研究追求可证实性与精确性．研究者认为只有定量化的、可证实的经验事实才具有科学价值；认为数学能力可以根据其外在的表现来测定和度量，即可通过量上的分析来把握质的特征．

这种研究将人的数学活动分解为许多要素，特别重视研究完成特定任务的结果，忽略得到结果的过程的描述．它的致命弱点是“不分析过程”，因而“就没有希望发现测验结果的心理本质，也就无法描述各种能力的质的特征．”[2]

(2)采用谈话法、个案法、口头报告法,以及考察传记、文献等历史方法.研究者通过对自己或他人解决问题思维过程的心理观察和实验性内省分析，对其进行特定的解释，这种研究属于定性分析研究．

这种研究把假设经验作为研究对象，强调如实描述经验，强调数学活动的整体性，认为质的分析应先于量的分析，但它们的研究结论具有较大的主观随意性，缺乏一致性和严格性，因而存在难以保证材料的真实性、可靠性，以及结论的客观性和普遍性的不足．

3 数学能力未来研究的方向

通过上述分析，不难看到数学能力研究的未来，仍是对上述三个基本问题(数学能力的实质 数学能力的组成成分及其结构 数学能力的形成与发展)的研究．特别地，考虑到要为数学教学提供理论依据，我们认为对数学能力形成与发展的研究意义更加重大．为此我们提出未来数学能力研究的方向应是：

3．1 从研究角度上看

未来的研究应该：扩大研究的视角——既要研究数学能力活动的结果，也要分析数学能力活动的过程．因为活动是主客观间的相互作用，如果我们不分析学生是如何进行数学活动的，就不可能认识学生数学能力发展的全貌．

例如，如果我们只研究学生解数学题的结果，那么就无法发现学生解题过程中的思考、对各种不同可能性的比较、选择等环节上的差异．学生获得相同的结果，但其心理过程是极不相同的情形是经常发生的．显然，这样的学生数学能力的发展是有差异的．但是，我们如何来解释导致这一现象的原因呢？看来，只有深入研究数学能力活动的过程，才能揭示出数学能力这种复杂心理现象的质上的特征．

3．2 从研究对象上看

未来的研究应该：扩大研究的对象——要研究所有儿童和青少年，特别是年龄较大的(11～12 岁以上)学生的数学能力发展的规律．

因为大多数人的数学能力都不是“自然”形成的，而是通过环境和教育来实现的．“由学校教学实际所引发的”学生数学能力的培养问题，越来越迫切地要求我们要研究学生数学能力的发展规律．这不仅仅是为数学教学提供依据，而且也是探讨数学能力的实质，以及进行数学能力形成与发展研究

所不可缺少的．因为只有这样，我们才能避免从不完整的、局部的信息得出的结论的肆意推广；才能更深入地解释数学能力的形成与发展性问题；按照有利于学生数学能力发展的方式来完善数学教学．

3．3 从研究内容上看

未来的研究应该：扩大研究的内容——要从初等的数学概念扩大到较复杂的、关键性数学概念．我们要深入研究像函数、概率、组合、极限、无穷等这些更高层次的数学概念，是怎样被学生个体所认识的？研究学生对数学概念的认知过程，是否等同于人类数学思维的发展模式？研究学生通过一些关键性数学概念的形成与掌握，能否引发其思维水平上质的飞跃？等等．只有这样，我们才能对数学能力的组成成分及其结构有更清晰的认识；才能用已经积累起来的大量事实材料，为更准确地揭示数学能力的实质作出更有价值的分析和说明．

3．4 从研究方法上看

现代科技(特别是计算机)的发展，对各种研究方法在数学能力研究中所起的作用都产生了深刻的影响．过去用相关分析、因素分析等统计方法进行定量分析研究时，遇到的庞大繁杂的、非人力所及的计算，今天可以由计算机来完成；缺乏客观、严格的指标，缺乏量化的定性分析研究，也可以借助于计算机科学的发展，开辟一个新领域，如用信息加工方法来研究数学认知过程．

不仅如此,现代科技的发展还为定量与定性分析相结合提供了可能性.我们未来对数学能力的研究，需要对事实进行观察和描述、为理论的建立积累材料的定量分析，但决不应局限于把整体的数学活动分解为所谓“适于研究”的元素，而片面追求证实，尤其是证实别人的结论．我们未来的研究应该寻求发现，追求创建，探索关于数学能力问题的一般性理论框架．要做到这一点，未来的研究必须要运用定性分析的研究方法．因为“积累了如此庞大数量的实证的知识材料”，必须要依据其内在的联系，将它们加以系统地整理，而“建立各个知识领域相互间的正确联系，……只有理论思维才能有所帮助．”[8]

所以，未来对数学能力的研究，应该既有定性分析的理论探讨，也要有不可缺少的定量分析．只有这样，我们才能更全面、更深入地把握数学能力的性质，真正为数学教育改革提供心理学上的依据．同时，又能通过对数学能力问题的研究，阐明智力的形成机制，为智力心理学的理论建设作出贡献．

参考文献

1 陈琦，D．B．Kaye，V．L．Bonnefil．论数能力的研究与认知理论的关系．心理学报，1984，3．

2 克鲁切茨基著．中小学数学能力心理学．北京：教育科学出版社，1984．

3 林崇德著．学习与发展．北京：北京教育出版社，1992．

4 王梓坤．今日数学及其应用．数学通报，1994，7．

5 皮亚杰著．儿童是怎样形成数学概念的．心理学文选．北京：人民教育出版社．1986．

6 理查德·莱什，玛莎·兰多著．数学概念和程序的获得．济南：山东教育出版社，1991．

7 弗赖登塔尔著．作为教育任务的数学．上海：上海教育出版社，1995

8 马克思恩格斯选集．第二卷．北京：人民出版社，1972．

中学平面几何课的地位　作用与教学目的

翁凯庆 邓安邦　（四川师大数学系　610066）

为了搞清楚中学平面几何课的教学目的，我们必须对这门课程在中学教育中的地位和作用有一个清晰的认识．回顾数学教育的历史可以注意到，每当中学数学课程有较大变革时，传统的几何教育的地位和作用便受到怀疑，课程内容的变动也往往以几何内容的变动入手．随着时代的变迁，对几何教学内容作必要的调整、变动是无可非议的，但问题的现状是时至今日，如何看待平面几何教育的地位和作用尚没有统一的认识，其中对现行中学平面几何教学内容处理的看法也大相径庭．我们认为，从我国的国情出发，现实、客观、公允地看待平面几何教育的地位和作用，既不夸大，也不贬低，才能使之在基础教育中发挥应有的作用．对此，我们必须明确下面几点：

第一，中学平面几何课所涉及的基础知识，无论是对进一步学习，或是直接参加生产，或是作为一个现代社会的基本公民的一般素养，都是完全必要的．对此，一般都没有异议．无论国内外，平面几何在历史长河发展中所沉积的文化特性，对学生文化素质的提高所起的积极作用，都是其他学科教育难以超越的．

第二，中学平面几何课的价值，主要在于发展学生的逻辑思维，培养他们的推理能力．王元教授说：“几何的学习不是说学完了这些知识有什么用，而是针对它的逻辑推导能力和严密的证明．而这一点对一个人成为一个科学家，甚至成为社会上素质很好的公民都是非常重要的，而这个能力若能在中学里得到训练，会终身受益无穷．”因此，一般人都认为，中学平面几何的课程内容，是培养学生逻辑思维能力的最好材料．

爱因斯坦曾说：“单凭传统的逻辑思维而想有所发现是困难的甚或是不可能的；但是，假如认为不必借助于逻辑思维而想有所发现，这同样是不可思议的事情．”爱国斯坦的这段话不仅深刻地指出了逻辑思维的重要性，也同时指出了逻辑思维的不足之处．平面几何课的价值是否仅限于逻辑思维的培养呢？

第三，中学平面几何课的主要价值，是能对学生进行较全面的思维训练，而不仅在于发展学生的演绎证明的能力．对于思维训练的作用，项武义教授曾说：“数学基础当然十分有用，十分重要，但是，认识问题，解决问题的思维训练实在更加有用，更加重要．在传统的许多基础数学课本中，往往注重前者而未能足够地重视后者．我们觉得这是今后的基础数学课程发展中应力求改正之点，至于某些知识点的增与减倒是不必斤斤计较的次要问题．”

为什么说平面几何课程能对学生进行较全面的思维训练呢？这可以从如下两方面来理解和看待．

首先，平面几何的教学离不开数学直观．在平面几何教学过程中，总是先对几何图形作观察分析，在此基础上展开想象，直觉地或逻辑地对问题解决提出一些设想、联想或猜想，以此为线索初步勾画出解决问题的方案，再经精细的逻辑加工得出问题的完整解答．

现代生理学和心理学的研究表明，人的左右半脑在思维上是分工合作的．左半脑主管逻辑思维，右半脑主管形象思维．几何问题的解决，一方面借助右半脑的功能，发现新苗头，提出新的设想、联想或猜想，再借助左半

脑的功能，将问题进行逻辑整理、加工，去粗取精，去伪存真，将问题的最终解决落实在严密的逻辑论证的基础之上．其结果是使学生逻辑思维能力、创造性思维能力都得到发展．我国数学家吴文俊教授告诫人们：“ 几何会给人以数学直观，不能把几何等同于逻辑推理．应该训练学生的逻辑推理能力，但也应适可而止．只会推理，缺乏数学直觉，是不会有创造性的． ”

这里应当指出的是，就是逻辑思维能力，也不仅指演绎证明．作为逻辑的核心，不应当是证明，而应当是推理过程，即是解题思路的探索，是“ 分析 ”过程．而所谓“ 分析 ”又是分析法与综合法两种推理形式的综合运用．在“ 分析 ”过程中要强调的是对问题解决的整体的宏观把握，而对形式证明的细节先不作过多的考究，以免学生拘泥于细节而失去最终的目标．解决这一问题的一

椭圆几何性质教学设计

张国坤　(云南会泽二中　654211)

人们对事物的认识多是从直观到抽象，从感性到理性，中学生的数学学习过程更是如此．现行《解析几何》教材对椭圆(双曲线)几何性质的编排，缺乏感性的铺垫，一开始就严格遵循“用方程研究曲线性质”的解析思想，这就不太符合学生认知发展的先后顺序，学生学起来感到“突然”，不能自然流畅．从直观和感性的角度入手考虑问题时，多数同学首先注意到椭圆的对称性而不是它的范围，其次是椭圆的“扁圆”程度，最后在位置、大小的比较之下注意到椭圆的范围．笔者按着这样的认知顺序设计了如下“观察——判断——证明(或反驳)、定义”的教学程序，执教实践表明，改进后的教学既能使学生更好地掌握椭圆的几何性质、领会解析几何思想，又能培养学生自己发现问题、解决问题的能力．以下是笔者的教学设计．

教师开始就声明：我们上节课学习了椭圆的定义和标准方程，本节课要寻找椭圆的几何性质．

1 对称性的发现与证明

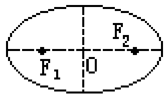


图 1

问题：你能发现这个椭圆有

什么美妙的性质吗？

一般学生都能发现椭圆的轴对称性,稍作提示容易发现其中心对称性(若有其它发现也要给予肯定)，焦点 F_1、F_2 所在直线及线段 F_1F_2 的垂直平分线都是椭圆的对称轴，线段 F_1F_2 的中点 0 是椭圆的对称中心．

(2)提醒学生：凭观察作出的判断准确吗？怎样证明你的判断？

师生讨论后，确定用椭圆标准方程证明它的对称性，然后投影显示(与图 1 复合)：

建立如图的坐标系，则椭圆标准方程是 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，怎样用这个方程证明

它的曲线(椭圆)的轴对称性和中心对称性呢？

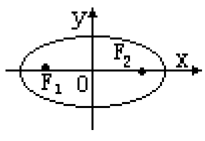


图 1′

为了证明椭圆的对称性，先作如下两条铺垫(由学生回顾讨论后投影显示)：

①曲线C的方程是 $f(x,y)=0$，则点在曲线上 $\Leftrightarrow$ 点的坐标满足曲线的方程。

②曲线 C 关于直线 l 呈轴对称是指 C 上任一点 M 关于直线 l 的对称点 M′仍在曲线 C 上；曲线 C 关于点 O 呈中心对称是指：C 上任一点 M 关于点 O 的对称点 M″仍在曲线 C 上．

然后指导学生亲自动手作出证明．证明略．

教师指出：我们通过建立坐标系，以方程为工具，研究曲线的几何性质，这就是重要的解析几何的思想，今后要不断地使用．

(3)投影显示图 2 及问题：

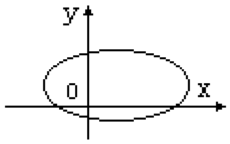


图 2

问题：图 2 中的椭圆有没有对称轴和对称中心？

指导学生思考讨论后获取共识：坐标系是用来研究曲线的重要工具，而椭圆的对称性是椭圆自身固有的性质，不因坐标系的变化而变化．〔注：这样做可进一步明确解析几何的思想，又为后面研究坐标平移埋下伏笔〕．

2 顶点的发现与确定

投影显示图 3 及问题：

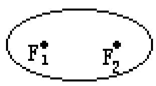


图 3

问题：椭圆曲线上存在着比较突出的点吗？怎样确定？

由学生观察发现，椭圆上存在着四个比较突出的点，这四点就是椭圆和它的对称轴的交点．启发学生与二次函数图象(抛物线)的顶点作类比，自己作出定义：椭圆与它的对称轴的交点叫做椭圆的顶点．再以标准方程为工具进行具体讨论：

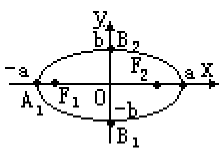


图 3′

对于方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 表示的椭圆，对称轴方程为 $y=0$、$x=0$，令 $y=0$ 解得 x=±a，令 x=0 解得 y=±b，于是得到了四个顶点坐标：$A_1(-a,0)$、$A_2(a,0)$，$B_1(0,-b)$，$B_2(0,b)$(用复合投影显示如图 3′)．$|A_1A_2|=2a$，$|B_1B_2|=2b$，$|A_1A_2|>|B_1B_2|$，再定义：线段 A_1A_2、B_1B_2 分别叫做椭圆的长轴、短轴，a、b 分别叫做长半轴的长、短半轴的长．

3 离心率

投影显示图 4 及问题：

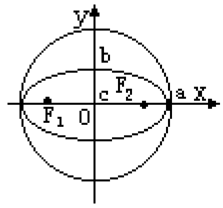


图 4

问题：与圆作比较，椭圆有什么显著特点？比值$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{a}$、$\frac{c}{b}$的变化会引起椭圆的怎样的变化？

学生极易发现，椭圆比圆要扁一些.稍作提示，学生再发现：比值越$\frac{b}{a}$小，椭圆越扁；比值$\frac{b}{a}$越大，椭圆越趋于圆；当$a=b$时，$c=0$，两个焦点焦点重合于原点 0，椭圆变成了圆.

再思考：椭圆的形状与 c 有关吗？由学生发现：

$b^2=a^2-c^2, \frac{b}{a}=\sqrt{1-(\frac{c}{a})^2}, 0<\frac{c}{a}<1, \frac{c}{a}$越小，$\frac{b}{a}$就越大，椭圆越趋向于圆；$\frac{c}{a}$越大，$\frac{b}{a}$就越小，椭圆越扁.

$\frac{b}{a}=\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}}=1/\sqrt{1+(\frac{c}{a})^2}, \frac{c}{b}$越小，$\frac{b}{a}$ 就越大，椭圆越趋向于圆；$\frac{c}{b}$越大，$\frac{b}{a}$就越小，椭圆越扁。

教师指出：比值$\frac{b}{a}$、$\frac{c}{a}$、$\frac{c}{b}$的大小都反映了椭圆的扁圆程度，在后面的学习中，$\frac{c}{a}$还有更重要的几何意义，我们把比值$\frac{c}{a}$叫做椭圆的离心率，记作$e=\frac{c}{a}$，$0<e<1$，e的大小反映了椭圆的扁圆程度。

4 椭圆的大小与范围

椭圆有大有小、还有位置的不同．那么怎样判断它的大小和位置呢？指导 学生用标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$来研究，容易得出$-a\le x\le a$，$-b\le y\le b$，讨论发现，a、b 越大椭圆越大，并且椭圆位于 x=±a、y=±b 四条直线围成的矩形之内，并且与矩形四条边在四个顶点处相切(投影显示图 5)．

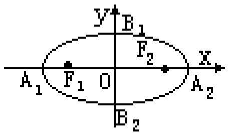


图 5

师生针对图4总结回顾椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的四条性质后，由学生四人一组讨论方程$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$表示的椭圆的几何性质，之后用投影显示结论(投影略)。

小结：本节课通过观察，发现了椭圆的四条几何性质(对称性、顶点、离心率与范围)，并且用方程及 a、b、c 等参数准确地研究了这些性质，这种用方程研究曲线性质的思想就是很重要的解析思想．

〔注：性质应用的例题、练习、作业等省略．本节课的改革，不是淡化而是强化了“用方程研究曲线”的解析思想，重视过程教学，深化了直观与感性、抽象与理性两个层面的教学，更符合学生的认知规律．〕

发挥一题多解对培养思维品质的作用

苏志清(浙江省泰顺县第一中学 325500)

发展思维能力是数学教学的一项中心任务，也是素质教育的要求．思维品质的培养是发展学生思维能力的突破口．在教学中适时安排一题多解的教学，对培养学生的思维品质很有效果．现试举一例对此略作说明．

例 已知$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，求证$x-y=y-z$。

分析 1　利用差异分析法．首先将目标信息转化成 x+z-2y=0，易与已知信息比较．通过观察看到，它们所含字母 x、y、z 相同而次数不同．由此联想到通过降次达到目标，这样就确定了总体方向．于是，可集中精力思考采用何种办法达到目标．

思路 1　展开、合并、整理，得

$$0=(z-x)^2-4(x-y)(y-z)$$

$$=z^2-2zx+x^2+4zx-4xy-4yz+4y^2$$

这时，因上面最后一个多项式各项次数相同，且多字母、多项数，如何才能抓住实质，排除干扰？采用主元观点，将展开式看成某字母的二次三项式，其余字母看成系数，就能排除干扰，走出困境，从而培养思维的深刻性和敏捷性．

若以 y 为主元，则

$Z^2-2zx+x^2+4zx-4xy-4yz+4y^2=(2y-z-x)^2$。

得 2y-z-x=0，即 x-y=y-z．

思路 2 在方程观点之下，若以 x 为未知数，则原等式变为 $x^2-2(2y-z)x+(2y-z)^2=0$，可采用因式分解法，求根公式法和换元法来解之.如果把$(2y-z)$看成未知数，则可写成$(2y-z)^2-2x(2y-z)+x^2=0$。现以换元法为例解之．

设 2y-z=t，则原方程变为

$t^2-2xt+x^2=0.$

$(t-x)^2=0$，

$t=x$，

即 2y-z=x，

∴ x-y=y-z．

通过以上解题体验和分析，扩大了思维空间，培养了学生的方程观点以及对一元二次方程的解法理解的深刻性，同时体现了思维的灵活性和敏捷性．

分析 2 以上求解过程中发现“先展开，后合并，再分解因式”遇到了“同次数、多项数、多字母”的干扰，那么能否避开干扰，直接分解因式呢？通过观察试验发现(x-y)+(y-z)=x-z，所以可采用能够化繁为简的换元法解之．

思路3　设$x-y=t_1$，$y-z=t_2$，则$t_1+t_2=x-z.$

所以，原等式变为$(t_1-t_2)^2=0.$

∴$t_1=t_2$，

即 x-y=y-z．

这就揭示了本题已知与结论的本质联系，训练了思维的灵活性．

思路 4 受思路 3 的启发，应用“如果一元二次方程的判别式为 0，则两根相等”，就可以得出此题最本质的解法．

以 x-y，y-z 为根的一元二次方程为

$t_2+(z-x)t+(x-y)(y-z)=0$，(t为未知数).

由$\triangle=(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，

所以，方程有两个相等的实数根，即

x-y=y-z．

此解法训练了思维的独创性．

思路 5　由已知信息与目标信息比较，我们又可以联想到利用比例性质来解之．

由$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$，得

$$\frac{z-x}{2(x-y)}=\frac{2(y-x)}{z-x}. \qquad ①$$

由等比性质得

$$\frac{z-x}{2(x-y)}=\frac{2(y-x)}{z-x}=\frac{-x-z+2y}{x+z-2y}=-1$$

化简得 z-x=-2(x-y)，

∴x-y=y-z．

表面上看，这种解法显得简洁，但它忽视两个重要条件：比例后项不能为 0，等比性质中要求比例后项之和不为 0．所以该解法是错误的．

(1)式①中，若 x-y=0，或 z-x=0，则比例式无意义．但分别讨论可知此时命题成立．

若 x-y≠0 且 z-x≠0 时，则原等式可变为

$$\frac{z-x}{2(x-y)}=\frac{2(y-x)}{z-x}.$$

由合比性质，得

$$\frac{z-x-2(x-y)}{2(x-y)}=\frac{2(y-x)-(z-x)}{z-x}$$

化简、整理得

$$(x-2y+z)^2=0，$$

∴x-2y+z=0．

∵x-y=y-z．

(2)用等比性质要求 x-2y+z≠0，但结论正是 x-2y+z=0，因此，本题不能使用等比性质来解．

用这种解法，学生容易误入“陷阱”，若能洞察这些“陷阱”，就能训练思维的批判性．

在解题教学中，只要我们综观全局，引导学生采用多种分析、多种思路、多种方法来分析问题、解决问题，有针对性地对学生进行思维品质的训练，充分挖掘题目中蕴含的数学思想和方法，长期坚持下去，就能达到提高学生数学素质的目的．

参考文献

1　林崇德，辛涛．智力的培养．杭州：浙江人民出版社，1996，11．
2　罗增儒．数学的领悟．郑州：河南科学技术出版，1997，1．

一类含三角函数的初等函数取值范围问题的图象解法

陈军 （江苏省如皋市白蒲中学 226511）

一类求在给定条件下三角函数式的取值范围问题,已有多篇文章论及(参见文[1][2][3])，但美中不足的是文中未给出如何揭示隐含条件以避免误解．笔者发现这类问题通过构造合适的直线或圆锥曲线能充分揭示隐含条件，正确求解．

例 1 已知 $\sin\alpha+2\cos\beta=2$，求 $2\sin\alpha+\cos\beta$ 的取值范围．

解设 $x=\sin\alpha$，$y=\cos\beta$，$t=2\sin\alpha+\cos\beta$ 则有 $x+2y=2$，$2x+y=t(|x|\le1,\ |y|\le1)$．t 的取值范围即线段 $x+2y=2$ 与平行线段 $2x+y=t(0\le x\le1,\ \frac{1}{2}\le y\le1)$ 相交时，$2x+y=t$ 在 y 轴上截距的取值范围。由图(1)易得

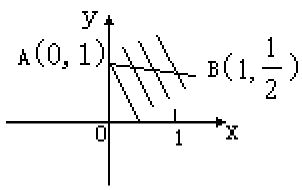


图 1

当 $2x+y=t$ 通过点 $B(1,\frac{1}{2})$ 时，$t_{max}=\frac{5}{2}$。

当 $2x+y=t$ 通过点 $A(0,1)$ 时，$t_{min}=1$．

所以 $2\sin\alpha+\cos\beta$ 的取值范围是 $[1,\frac{5}{2}]$。

例2 已知 $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}$，求 $\cos\alpha\cdot\sin\beta$ 的取值范围。

解设 $t=\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\therefore \sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\cos\alpha\cdot\sin\beta=t$，

$\because \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]=\frac{1}{2}$，

$\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]=t.$

即 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=1$，

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2t$．

令 $x=\sin(\alpha+\beta)$，$y=\sin(\alpha-\beta)$，则有 $x+y=1$，$x-y=2t(|x|\le1,\ |y|\le1)$．t 的取值范围即线段 $x+y=1$，$x-y=2t(|x|\le1,\ |y|\le1)$ 相交时，$x-y=2t$ 在 y 轴上截距的相反数一半的取值范围．

如图(2)

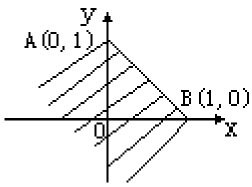


图 2

当$x-y=2t$通过点$A(0，1)$时，$t_{min}=-\frac{1}{2}$。

当$x-y=2t$通过点$B(1，0)$，$t_{max}=\frac{1}{2}$。

所以$\cos\alpha\cdot\sin\beta$的取值范围是〔$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$〕o

例 3 已知 sinα+sinβ=a(-2＜a＜2)，求 cosα＋cosβ的取值范围.

解 如图(3)，设角α、β的终边与单位圆分别交于 A、B 两点，那么 A、B 两点的坐标分别为 $A(\cos\alpha，\sin\alpha)$，$B(\cos\beta，\sin\beta)$，设弦AB的中点为$P(x_0，y_0)$，则

$$x_0=\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2},$$

$$y_0=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}=\frac{a}{2},$$

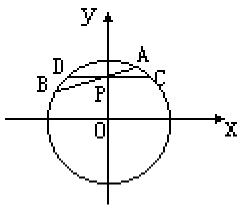


图 3

显然，当α、β变化时，弦 AB 的中点轨迹为弦 CD：

$$y=\frac{a}{2}\left(-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\right)$$

即$x_0\in\left[-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}，\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}\right]$o

$\therefore\cos\alpha+\cos\beta\in[-\sqrt{4-a^2}，\sqrt{4-a^2}]$o

例 4 已知 sinα+sinβ=a(-2＜a＜2)，求 sin(α+β)的取值范围.

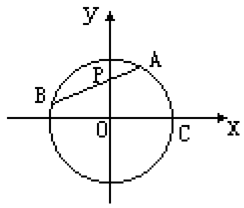


图 4

解　如图(4)设角α、β的终边与单位圆分别交于A、B两点，那么A、B两点的坐标分别为 A(cosα，sinα)，B(cosβ，sinβ)，设弦 AB 的中点为$P(x_0，y_0)$，由例3知$x_0\in〔-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2},\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}〕$。

$$\because tg\frac{\alpha+\beta}{}=tg\angle COP=\frac{y_0}{x_2},$$

$$\because \sin(\alpha+\beta)=\frac{2tg+\frac{\alpha+\beta}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2x_0y_0}{x_0^2+y_0^2}=\frac{x_0a}{x_0^2+\frac{a^2}{4}}$$

令$f(x)=\frac{xa}{x^2+\frac{a^2}{4}}$

(1)当 a＞0 时，f(x)的示意图如图(5).

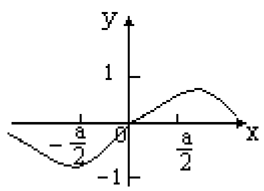


图　5

(Ⅰ)若$\sqrt{2}<a<2$，则$\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}〈\frac{a}{2}$，在$[-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2},\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}]$上$f(x)$是增函数，$x=-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$时，$f(x)$取最大值，最大值为$\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}$；$x=-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$时，$f(x)$取最小值，最小值为$-\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}$。所以$\sin(\alpha+\beta)$的范围为

$[-\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2},\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}]$o

(Ⅱ)若$0<a\le\sqrt{2}$，则$\frac{a}{2}\le\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$，在$[-\frac{\sqrt{4-a^2}}{2},\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}]$上，$x=\frac{a}{2}$时，$f(x)$取最大值，最大值为$1$；$x=-\frac{a}{2}$时，

f(x)取最小值，最小值为-1．所以sin(α+β)的范围是[-1，1]．

(2)当 a=0，f(x)=0．

(3)当 a<0，仿(1)讨论得：

(Ⅰ)若$-2<a<-\sqrt{2}$，$\sin(\alpha+\beta)$的范围是$[\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2},-\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}$。

(Ⅱ)若$-\sqrt{2}\le a<0$，$\sin(\alpha+\beta)$的范围是$[-1，1]$。

综上所述，当$-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$时，$\sin(\alpha+\beta)$的取值范围是$[-1，1]$；

当$-2<a<-\sqrt{2}$或$\sqrt{2}<a<2$时，$\sin(\alpha+\beta)$的取值范围是

$[-\frac{\sqrt{4a^2-a^4}}{2},\frac{\sqrt{4a^2-a^4}}{2}]$。

例5 已知$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=2\sin\alpha$，求$\sin^2\alpha+\sin^2\beta$的取值范围。

解设$x=\sin\alpha$，$y=\sin\beta$则有$3x^2+2y^2=2x(\,|x|\le1，|y|\le1)$，

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=x^2+y^2$。$\sin^2\alpha+\sin^2\beta$的取值范围即为椭圆

$3x^2+2y^2=2x$上的任意一点P到原点距离平方的取值范围。

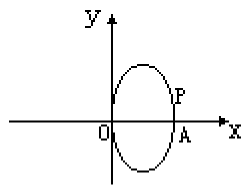


图 6

如图(6)：当点 P 运动到点 A、O 时 P 到原点的距离最大和最小，其最大值、最小值分别为$\frac{2}{3}$、0，所以$\sin^2\alpha+\sin^2\beta$的范围为〔0，$\frac{4}{9}$〕。

由此可见，构造图形能揭示变量间的相互制约关系，达到充分挖掘隐含条件的目的，这种解法具有统一、直观、化难为易的特点，是求解这类问题的有效途径．

参考文献

1 岳建良，张冉存．对一道求范围的三角题的剖析．中学教学(湖北)，1996，5．

2 徐云贵．三角函数取值范围误解剖析．中学生理科应试，1998，2．

3 鞠九新，钱军先．妙用消去法，巧解三角题．数理化学习，1997，14．

数学课堂教学中“有益的提问”的方式

马岷兴　(四川师大数学系 610066)

数学课堂教学离不开“问”，“问题是数学的心脏”．一方面是老师问学生，另一方面是启发学生问老师，前者是提问，后者是所谓激“问”．而激“问”又常常需要教师先用提问的方式去激活学生思维．因此，数学教师的提问艺术显得比其他任何学科教师更为重要．

当前，数学课堂教学中存在不少“徒劳的提问”．表现在：(1)目的不明确；(2)零碎不系统；(3)忽视对学生思维过程的考查；(4)无视学生的年龄特征、个性差异和能力大小；(5)不给学生思考的余地，没有间隔停顿；(6)用语不妥，意思不明，甚至随口而发不计后果．最典型的莫过于那种满堂充斥的脱口而出的“是不是”？“对不对”？之类的问题，学生也只是简单地答“是——”、“不对——”．课堂貌似热闹非凡，气氛活跃，实则提问和思维的质量低下，流于形式．

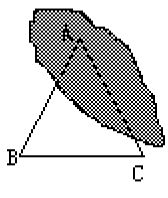
我们提倡“有益的提问”．其特点是：(1)表现出教师对教材的深入研究；(2)与学生的智力和知识水平的发展相适应；(3)能诱发学习欲望；(4)能有助于实现教学过程中的各个具体目标；(5)富于启发性，能使学生自省；(6)有一定难度，具有探索性，能促进思维发展．其作用体现在[①]：促进学习、评价学生；检查效果、调控教学；体现学生的主体地位；启发式教学的重要形式．

我们认为，采用以下几种方式可望实现有益的提问．

1　激趣性提问

这是为了创造生动愉悦的情境，令学生由于心生疑窦而造成悬念，产生学习的内驱力，形成理想的教学氛围，使学生带着浓厚的兴趣开始积极探索思考的提问．这类提问在实践中涌现甚多，举不胜举．如：

(1)△ABC 原是一个等腰三角形，AB=AC，不幸被墨水涂没了一部分，只留下底边 BC 和腰 AB 的一段(用纸板遮挡)．想一想，用什么办法可以画出原来的三角形？并列出等腰三角形的判定方法．



(2)为什么射击时用手托住枪杆(枪杆、手臂与胸部构成三角形)能保持稳定，而银行的铁栅门多用多条窄钢板交叉成许多平行四边形就能拉开与关闭？——说明三角形的稳定性．

如此种种，听似闲言，却能使课堂气氛活跃．

2　迁移性提问

不少数学知识在内容和形式上有类似之处，其间有密切联系．教师可在

[①] [注] 罗增儒.课堂提问的作用.数学教师，1998，1.

提问或学生回顾旧知识的基础上过渡到对新知识的提问，将学生已掌握的知识和思维方法迁移到新内容中去．

比如在讲“分式的约分”这一内容时，可直接出示题目由学生约分，目的是让学生将小学关于分数约分的概念和方法迁移到分式．

在学生根据独立练习所悟，对比分数约分，尝试性地对知识和方法进行迁移后，再回答教师的迁移性提问：

(1)什么叫分式约分？

(2)分式约分的依据是什么？

(3)对约分的最终结果有什么要求？

(4)对分子、分母不含公因式的分式可以怎样取名？

3　铺垫性提问

在新知识的学习过程中，为了降低思维难度，并给学生解决问题指出方向，可以铺垫性地提问道出转化的途径或指向．如讲梯形中位线定理时可先提问：“三角形中位线定理的内容是什么？”当提出梯形中位线定理后再问：“从三角形中位线定理中能得到什么启迪？”这样一来，怎样引辅助浅的难点就很容易被突破．

4　探究性提问

仍以梯形中位线定理的教学为例，在提问三角形中位线定理的内容后即可问：“梯形的中位线又有什么性质呢？”问题就象一块石头投入平静的湖面，激起学生急于探究奥秘的好奇和好胜心理的涟漪．问题也同时隐含着与三角形中位线的类比，引起联想或猜测——(1)与底边有关；(2)利用三角形的中位线性质．这类问题如放开让学生探索，课堂将呈现勃勃生机．

5　发散性提问

发散性思维是创造性思维的基础．教师在教学中提出激发学生发散思维的问题，引导学生从正面、反面、侧面多途径思考，纵横联想所学知识方法，以沟通不同部分教学内容的联系，对于提高探索能力、培养思维能力颇有好处．这类提问难度较大，必须考虑和较准确地把握学生的知识能力水平．一题多解、题目引伸推广等都属于这一类型．

将“求证：抛物线$y=(m^2+1)x^2-2mx+(m^2+4)$与x轴没有交点．”一题分别改编成关于一元二次方程的无解问题，一元二次不等式的求解问题，二次三项式的恒等问题，二次三项式的因式分解问题，从而沟通它们之间的联系．

6　设“陷”性提问

教学中恰当地设置“陷阱”，制造思维冲突，训练学生明察秋毫、明辨是非的本领，促使学生思维严密，强化教学效果．

下面的课题教学设计，展示了课堂设“陷”、质疑、辨疑的简略过程．

课题　圆的一般方程

(1)复习提问：写出圆的标准方程并说明其几何意义.$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$。

其中圆心坐标(a，b)，半径 r，r＞0．

(2)请将①展开并整理成为右端为 0，左端为多项式的一般形式(学生动手，教师设出 D、E、F)：

$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$　　　　②

(3)提问：由①化为②你能得出什么结论？

结论：任何一个圆一定可表为形②的方程．

(4)教师设“陷”：因此，凡是形②的方程一定是圆的方程(停顿，意在让学生发现问题．学生窃窃私语，争议质疑)．

辨疑：原命题成立不保证逆命题成立．

(5)点题：研究形②的方程表示圆的条件．

(6)任给形②的方程，你能转化为形①的方程吗？(学生动手，对困难者提示用配方法)

$$(x+\frac{D}{2})^2+(y+\frac{E}{2})^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4} \qquad ③$$

(7)教师设“陷”：既然任给形②的方程都能转化为形③的方程，形③又同形①，因此形②总能表示一个圆(停顿，给学生质疑机会)．

(8)辨疑：形③与形①有差异，形①中，r＞0；形③中，$\frac{D^2+E^2-4F}{4}$未必大于0，因此，“③总表示圆”有错。

(9)引出对D^2+E^2-4F的讨论。

7　巩固性提问

在授完新课之后，教师再针对本课的重点或难点变换角度提出问题，以达到巩固知识、加深理解的目的．例如，在讲完“二次三项式因式分解”一节后提问：“在$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$中，a、$x_1$、$x_2$各表示什么？”使学生对各字母表示的意义有进一步的认识，提醒学生，分解式中的 a 不能漏掉．又如，在学完反比例函数一节后还可以问：“在一个函数关系中，如果自变量 x 缩小时函数值 y 反而增大；自变量 x 增大时函数值反而缩小，这样的函数是反比例函数吗？”从而让学生抓住反比例函数的本质，巩固对反比例函数的定义的掌握．

8　激疑性提问

宋代理学家朱熹说：“于无疑处生疑，方是进矣”，“读书无疑者，须教有疑．有疑者无疑，至此方是长进．”教师若能在其似通非通，似懂非懂时及时提出问题，然后与学生共同释疑，可收到事半功倍的效果．

例如，平行线的定义学生不难理解，学生也提不出什么问题．教师可反过来问学生：“为什么要限定在同一平面内呢？”学生的思维就会向空间扩展，搜寻或想像出反例，从而加强空间观念和对平行线的理解．

又如，在复习相似三角形的判定时不妨提出问题：

若两个三角形各有 5 个元素(边、角)分别相等，这两个三角形全等吗？

起初，几乎所有学生会认为 5 个元素中必然含有边的相等，所以两个三角形全等．

这时教师可提出“对应相等”与“分别相等”有无区别的问题让学生思考．于是，学生开始“无疑处生疑”，动脑筋思索，直至构造出反例：

△ABC 中，a=27，b=36，c=48

△A′B′C′中，a′=36，b′=48，c′=64

由于对应边成比例，两三角形相似，且 A=

A′，B=B′，C=C′，然而，a≠a′，b≠b′，c≠c′．显然，两三角形不全等，但各有 5 个元素分别相等．

从而，学生对于“ 对应 ”会有更深的了解．

总之，提问是数学课堂教学中一个不可或缺的教学组成，提问的艺术与策略直接影响教学质量、教学效果．教无定法，教学有方，有益的提问方式还待我们在实践中不断总结、探索、创新与完善．

参考文献

1　朱志嘉，马岷兴．数学思维教学概论．四川教育出版社，1994．
2　贾振堂，刘梦其．课堂提问的目的及最佳方法．数学教师．