学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中 学 数 学

2000年第2期

我的教育教学教研观

361003　福建省厦门双十中学　任　勇

1　我的教育观

教育是一项育人的伟大的事业，作为一名数学教师，不仅要教好数学，成为“经师”，而且更要成为学生成长和身心健康发展的指导者，成为“人师”.

“无德”不能为人师；“无能”也不能为人师．这就是人们常说的“打铁先得自身硬”.

素质教育要求我们培养学生的“创新精神”，“创新精神”是人类进步的灵魂”．这首先就要求教师有创新意识，并能在教学实践中不断提高自身的创新能力.

在教学三角公式时，我们导出三倍角的正弦公式$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$之后，引导学生又导出三倍角余弦、正切公式$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$，$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}$．不少学生说：“这三个公式易混，难记”．学生对结论的不满意。表明学生对知识有新的追求,想进行新的探索,这是一种创造的萌动.抓住这一有利时机，我要求学生探索，并和学生一起研讨：“这三个公式是否能化得整齐些，是否有更和谐的形式”？

经过师生共同探索，最后我们得到：

$\sin 3\alpha = 4\sin(60° - \alpha)\sin\alpha\sin(60° + \alpha)$，

$\cos 3\alpha = 4\cos(60° - \alpha)\cos\alpha\cos(60° + \alpha)$，

$\mathrm{tg}3\alpha = \mathrm{tg}(60° - \alpha)\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}(60° + \alpha)$．

当三个整齐、和谐的公式导出时，学生报以热烈的掌声．这掌声是对创新追求的赏赐，是对自己创造性劳动的赞美.

要培养学生的创新精神，首先就应在日常教学中注重培养学生的创造性的思维习惯．例如，在解题教学中，有意识地开发和诱导他们的求异思维.

题目：已知锐角α、β满足$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} = 2$，

求证：$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

多数同学是从最一般的思路入手：

$$0 = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} - 2$$
$$= \frac{\cos\alpha - \sin\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta - \sin\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \Lambda\ \Lambda$$

$= 2\sin(\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2})$．

$[\frac{\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin\beta}+\frac{\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2})}{\sin\alpha}]$．

至此，目标已明，只须证上面方括号内的三角式不等于 0，而这是不难的．然而上面的三角变换对某些同学颇为“吓人”．能不能另辟路径呢？很快有学生提出了以下两种证法：

证法 1　依题设条件，不妨设

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \geq 1，\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \leq 1．$$

∵ α、$\beta \in$（0，$\frac{\pi}{2}$），

$$\therefore \begin{cases}\cos\alpha \geq \sin\beta \\ \cos\beta \leq \sin\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) \geq \sin\beta \\ \sin(\frac{\pi}{2}-\beta) \leq \sin\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\pi}{2}-\alpha \geq \beta \\ \frac{\pi}{2}-\beta \leq \alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha+\beta \leq \frac{\pi}{2} \\ \alpha+\beta \geq \frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$．

证法2　假设 $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$，则

$$\alpha > \frac{\pi}{2} - \beta，\beta > \frac{\pi}{2} - \alpha．$$

∵ α、β、$\frac{\pi}{2} - \alpha$、$\frac{\pi}{2} - \beta \in$（$0$，$\frac{\pi}{2}$），

∴ $\cos\alpha < \cos(\frac{\pi}{2} - \beta) = \sin\beta$，

$\cos\beta < \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$．

从而 $2 = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} < \frac{\sin\beta}{\sin\beta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = 2$，矛盾，故 $\alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2}$．同理可证 $\alpha + \beta \geq \frac{\pi}{2}$．

综上，有 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$．

我们的教学直接面对学生，面对学生上数学课就要有激情，就要最大限度地挖掘学生的情感潜能，融氛围美、数学美、探索美于数学教学之中．让学生感到数学学习不是一种苦役、一种负担，而是一种需要、一种享受．

例如，我在教复数时，顺便给出欧拉公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x，$$

令 $x = \pi$，得 $e^{i\pi} + 1 = 0$．

奇巧而有趣的是，数学中的“五朵金花”——中性数 0、基数 1、虚数单

位 i、圆周率π、自然对数的底数 e 竟能组成一个重要的“最美的等式”，不可谓不绝！学生在“意料之外”与“令人震惊”之中，又一次体验到了数学之美．

2　我的教学观

“教需有法，教无定法．大法必依，小法必活”．这是人们已达成的共识．但在现实的数学教学中，大多数教师仍采用：由教师给定义，推公式，讲例题，再由学生解题，教师评判的教学模式．这势必禁锢了学生的思维，扼杀了学生主动发展的积极性．因此，教师应树立新的教法观，让学生主动探索主动发展，不断提高数学素质．在这方面，我有以下实践．

主体参与．内因是变化的根本，外因是变化的条件．真正认识到学生是学习的主人，是学习的主体，学习是学生个体的自主行动．在教学过程中，只有充分调动学生认知的、心理的、生理的、情感的、行为的、价值的等各方面的因素，参与到学习活动中去，让学生进入一种全新的学习境界，就能充分发挥学生各自的主观能动性，融自己的主见于主动发展之中．

分层优化．一个班的学生，由于学习基础和认识水平的差异，发展总是不平衡的．对于不同程度的学生，可通过多种渠道，如指导预习和复习、适当提问、分层次完成作业，同学帮助、教师辅导等，让他们在原有的水平上得到提高．只有真正树立为学生服务的观点，给予不同层次学生以良好的期望，就能提高各类学生的数学素质．

“成片开发”．数学概念、命题（公理、定理、性质、公式）．解题等，常常是可以“成片开发”的．我在教学中，以单元结构教学法为主，辅以其他教学方法，整体推进．注重数学知识的纵横联系，揭示其本质属性，让学生整体把握数学知识．在解题教学中，引导学生考虑一题多解，让问题由点构成线；引导学生一题多变，让问题由线构成面；引导学生一题多用，让问题由面构成体．这样，学生就可以多层次、广视角、全方位地认识数学问题．

过程教学．现代数学教学的一条原则叫“过程教学”，就是让学生参与和经历整节课的思维过程，充分体现知识发生、形成的过程，充分挖掘解题的思维价值．其特征是“自主性+思维性”．仅举一例：

（1）游戏引入：①全班学生每人任意写下一个真分数；②分子、分母分别加上一个正数；③新分数与原分数大小关系怎样？

（2）得出结论：一个真分数的分子和分母分别加上一个正数后其值增大．

（3）引出问题：《高中代数（下册）》第 12 页例 7．

已知：a、b、$m\in R^+$，且$a<b$，求证：$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$．

（4）一题多解的教学价值：师生共同探索了分析法、综合法、求差比较法、求商比较法、反证法、构造函数法、定比分点法共七种证法，学生在探索后两种证法时进一步体会到数学知识之间的联系，获证时，全班学生笑声四起，他们明白了巧解的奥妙与真谛．

（5）一题多变的教学价值：师生共同探索“变式”，层层深入，共变出八个新的命题，最后一个是：

若a_i、$b_i \in R^+$，$i=1$，2，$\cdots$，n.

且$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\Lambda<\frac{a_n}{b_n}$，则$\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}<\Lambda\ \frac{a_1+a_2+\Lambda+a_n}{b_1+b_2+\Lambda+b_n}$

$<\frac{a_2+a_3+\Lambda+a_n}{b_2+b_3+\Lambda+b_n}<\Lambda<\frac{a_{n-1}+a_n}{b_{n-1}+b_n}<\frac{a_n}{b_n}$.

“真过瘾！”这是学生们用换元法（有的用增量法）证得“猜想”成立时发出的感叹。

（6）一题多用的教学价值：利用本题的结论，“借题发挥”，可解决多个数学问题，其中包括 1998 年高考“压轴题”所要证明的不等式：

$$(1+1)\ (1+\frac{1}{3})\ (1+\frac{1}{5})\cdots(1+\frac{1}{2n-1})>\sqrt{2n+1}\ (n\in N,\ n\geq 2).$$

当学生得知，他们无意中解决了高考压轴题时，他们先是惊得目瞪口呆，继而发出会心的微笑．他们感到了自身的力量，进一步增强了学好数学的信心．

方法渗透．数学不仅是一种知识，而且具有丰富的思想和方法．我在教学中十分重视数学思想方法的渗透，因为数学学习不仅是数学知识的学习，而且也是数学思想方法的学习．只有注意数学思想方法的分析，才能把数学课讲懂、讲活、讲深，才能使学生的头脑形成一个具有“活性”的数学知识结构，促进学生数学能力的发展．

3　我的教研观

加强教育科研，是推动学校教育改革和发展的需要，是全面提高学校教育教学质量的需要，也是提高教师素质的需要．一所学校，只有坚持不断提高教育科研品位，才能有长远的发展；一个教师，也只有走教学与教研相结合之路，才能将教育教学工作提高到一个新的境界．

我国中小学教师不少是教学能手，但教学能力大都还是停留在有娴熟的教学基本功阶段．教师要实现最终的事业成熟，还必须学会在研究状态下工作，成为一个教育教学的研究者．

那么，怎样才能成为一个教育教学的研究者？

一要打破神秘感，保持自信心．研究并不是高不可攀，研究需要第一手活生生的教育资料，这是中小学教师的优势．1984 年，我写了篇论文（今天看来只能算“经验文章”）入选全国数学教学年会，接触了许多数学教育名家，读了许多高质量的数学教育论文，当时深感自己十分渺小、水平很有限，但我没有打退堂鼓，而是认真向名家请教、学习，后来我修改了那篇论文，当年 8 月发表于湖北大学《中学数学》上．同年我的另一篇论文发表在华东师大的杂志上，我感到激动、兴奋，也看到了自己的潜力，觉得自己在教育科学领域里还是大有发展前景．教学促教研，教研促教学，16 年来，我探索不止，不知不觉发表论文及教学经验文章达 528 篇，还编著或参与编著了近 50 部著作，应邀讲学百余场，自身素质也在各种学术活动中得到很大的提高．

二要有强烈的“研究意识”，把教育教学工作自觉地纳入研究的轨道．每个学生都是你研究的对象，你的班级、年级、学校（甚至更大范围），都可以是你的“实验田”，你可以在里面不断地耕耘、收获．只要树立“研究意

识”，并亲自“下田”实践，就一定会取得教育研究成果．这些年，我在所教的班里进行了数学学习指导、初中数学引趣、高中数学引深、数学作业再生、数学多维教育等实践，在所带的数学奥赛班里进行了数学超常教育实践，均取得显著效果，写成论文后均发表在各类学术期刊上．

三要重视教育科学理论的学习．数学教育教学研究离不开理论的指导，而这正是中小学教师的不足之处．教师若没有行之有效的教育理论作指导，是很难进行研究的．学习理论，除了师范教育、继续教育、各类进修外，还应抓住各种学习机会，随时随地学习，做学习的有心人．其中很重要的一个途径就是向书本、杂志学习．一个教师，没有一定数量的教育、科学、文化书籍和杂志是不可思议的．就我来说，从教二十年来，东买西购，已有 7000 余册数学、教育、文化方面的书籍，订阅了所有能订到的中学数学杂志和许多教育杂志．在书海中获知与启智，在书海中探索与创新．

四要掌握教育科研的方法．不懂教育科研方法，是造成中小学教师研究难以深入进行的原因之一．一些基本的教育科研方法是从事研究的基本条件，教师应很好地掌握．如怎样选定研究课题，制订研究计划，实施研究课题，整理研究资料，撰写研究论文等．

五是要及时了解教育动态．创新是科学研究的基本特征．要创新，就要了解、掌握教育教学的新信息、新动态、新趋势，选择具有独创性和新颖性的课题进行研究．我以为，克服困难争取参加有关学术会议、听学术报告和及时阅读数学教育期刊，是了解教育动态的主要途径．

常架“两法”之桥　促进能力提高

226511　江苏省白蒲高级中学　张云飞

随着高考改革的深入，在人才的选拔上愈来愈侧重于对能力的考查．因此，把对学生能力的培养放在教学的首位似已成为不争的事实．

数学解题教学中如何把对学生能力的培养落到实处？笔者以为：经常引导学生从错误解法到正确解法、经常引导学生进行几何解法与代数解法的转换、经常引导学生从通法到特技、从繁解到简解，即常架“两法”之桥是促进学生能力提高的一条行之有效的途径．

1　在错误解法同正确解法的转化中培养学生的纠错能力

虽然我们谁也不愿意在解题中发生错误，但解题出错的现象却时有发生．当纠正过的错误学生再错，你在抱怨学生没记性、马虎、“笨”的同时可曾想到教师的责任！纠错是解题教学的一项重要内容，纠错能力是解题能力的一个重要组成部分．我们以为：当学生解题出错时，教师不仅要指出错误原因，给出正确解法，而且应尽可能地挖掘学生“错解”中的“闪光点”，引导学生从错误解法走向正确解法，同时着力研究如何避免类似错误的发生．

例1　已知α、β是实系数方程$x^2+x+P=0$的两个虚根，且$|\alpha-\beta|=3$，求P的值．

错解　根据韦达定理$\begin{cases}\alpha+\beta=-1 & ①\\ \alpha\beta=p & ②\end{cases}$

于是　$9=|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2$

$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-1)^2-4p$，

解得$p=-2$．

显然，若$P=-2$，则原方程有实根，与所设矛盾．

产生错误的原因：$x\in R$时有$|x|^2=x^2$，但当$z\notin R$时，$|z|^2\neq z^2$，因而

$|\alpha-\beta|^2\neq(\alpha-\beta)^2$．

以下给出正确解法：

设$\alpha=a+bi$，$\beta=a-bi$（$b>0$）代入　①

得　$2a=-1$，$a=-\frac{1}{2}$　③

代入$|\alpha-\beta|=3$得$|2bi|=3$，$b=\frac{3}{2}$．　④

由③、④得$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，$\beta=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$，

$p=\alpha\beta=(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i)(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i)$

$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$．

评析　以上纠错指出了错因，也给出了正确解法，但笔者以为：上述纠错方法不是最佳的纠错方法．因为以上纠错中还存在下列几个问题：

（i）遇到一元二次方程的根与系数的问题，特别是题目中含有两根之差的条件时，想到通过公式$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$实现解题目的，即想到通过“平方”解题的想法应该是常规思路，上述错解错在误用了$|z|^2=z^2$．能用学生上述错解中“平方”的思想实现解题目的吗？

（ii）上述正确解法似给人一种感觉：遇到复数问题都要设z=a＋bi（a、b∈R）化“复”为“实”，是这样吗？

笔者引导学生分析上述错误的过程，发现：（1）尽管在复数集中$|z|^2\neq z^2$，但却有$|z|^2=|z^2|$，能否利用这种“平方”关系解题呢？(2)错解中漏用一条件“α、β为实系数方程$x^2+x+p=0$的两个虚根”，而错解中的“$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1-4P$”又正好是判别式△，由α、β为虚根知$1-4P<0$，从而有：

∵α、β为实系数方程$x^2+x+p=0$的两虚根，

∴$\triangle=1-4p<0$，

$9=|\alpha-\beta|^2=|(\alpha-\beta)^2|$

$=|(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta|=|1-4p|=4p-1$．

∴　$P=\frac{5}{2}$．

这就实现了用错解中“平方”的思想获得问题的正确解法，同时也说明遇到复数问题时不一定都要化“复”为“实”！

学生为什么会误用$|z|^2=z^2$？在复数集中一般地$|z|^2\neq z^2$，那么，复数z^2与$|z|^2$有没有相等关系，如有，有怎样的相等关系？

其实，复数的三角形式

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

（通常此处的|z|用r表示）就明明白白地给出了复数z与|z|的关系，由此易得

$$z^2=|z|^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$$

这就是复数z^2与$|z|^2$的一个“肯定”的关系式（此处的“肯定”相对于$|z|^2\neq z^2$中的“否定”而言）．

当　$\begin{cases}\cos2\theta=1\\ \sin2\theta=0\end{cases}$

即　$\begin{cases}\cos\theta=1\\ \sin\theta=0\end{cases}$　或　$\begin{cases}\cos\theta=-1\\ \sin\theta=0\end{cases}$

即　z为实数时，$|z|^2=z^2$；

当z为虚数时，$|z|^2\neq z^2$，而是

$$z^2=|z|^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)．$$

笔者的教学实践表明：学生一旦明白了以上z^2与$|z|^2$的关系后，再遇到z^2与$|z|^2$的关系时就不会再犯错解中的那种错误了．

通过举例说明$|z|^2\neq z^2$，用“堵”的办法给出$|z|^2$与z^2关系“治标不治本”，通过研究z^2与$|z|^2$的内在关系（其实也不需要多少时间！）给出$|z|^2$与z^2的关系$z^2=|z|^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)$“治标又治本”．

同样，纠错教学中指出解法错误而另起炉灶去纠错也是“治标不治本”，善于捕捉错解中的“闪光点”，引导学生从错解到正解才是“治标又治本”．

思考：如把例 1 中“虚”字去掉将怎样？

2　在数与形的转换中培养学生的能力

我们以为对代数解法和几何解法的关系应形成以下两点意识：

2.1　既然数与形是客观世界的两种不同表 现形式，我们以为：一个问题如有其简洁的代数（几何）解法，一般地，它应有其不太繁杂的几何（代数）解法．这是我们在有了一个问题的代数（几何）解法后充满信心地寻找它的几何（代数）解法的基础（依据）．当然，对于一个问题，人们可以早已有了它的简洁的代数（几何）解法，但却没有它的相应简洁的几何（代数）解法，对此现象我们认为：一般不是没有相应的解法，而是人们对此问题的认识还不太深刻，一时没有找到相应的解法．

例 2　求证：

$$\frac{(a^2+b^2+ac)^2+(a^2+b^2+bc)^2}{a^2+b^2}\geq(a+b+c)^2.$$

多篇文章以为本题采用代数证法较难，进而给出下列借助点到直线距离公式求解的几何解法．

观察不等式的结构，将其变形为：

$$\frac{(a^2+b^2+ac)^2+(a^2+b^2+bc)^2}{(a^2+b^2)^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2},$$

即

$$\sqrt{\left(1+\frac{ac}{a^2+b^2}\right)^2+\left(1+\frac{bc}{a^2+b^2}\right)^2}\geq\frac{|a+b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.\qquad(*)$$

不等式（*）的几何意义是明显的：左边的点 P（1，1）与点 M（$-\frac{ac}{a^2+b^2}$，$-\frac{bc}{a^2+b^2}$）间的距离；右边是点P到直线l：$ax+by+c=0$的距离．易知，点M在直线l上，因此，从几何上看不等式（*）成立，于是，可证原不等式成立．

以上从几何的角度思考的方法是正确的，但由原不等式到（*）的变形等却是较为困难的．由题目的结构特征易联想到柯西不等式，而柯西不等式的一个几何意义正是点到直线的垂线段最短．把原不等式变形为

$$(a^2+b^2+ac)^2+(a^2+b^2+bc)^2$$

$$\geq(a^2+b^2)\cdot(a+b+c)^2,$$

借助柯西不等式的特例

$$\sqrt{A^2+B^2}\geq\frac{|A+B|}{\sqrt{2}}$$

运用差异分析法（比照式子右边的特点对左边进行展开整理）有下列较为简洁的代数解法：

$$(a^2+b^2+ac)^2+(a^2+b^2+bc)^2$$

$$=[(a^2+b^2)^2+2ac(a^2+b^2)+a^2c^2]+[(a^2+b^2)^2+2bc(a^2+b^2)+b^2c^2]$$

$$=(a^2+b^2)[2(a^2+b^2)+2c(a+b)+c^2]$$

$$\geq(a^2+b^2)[(a+b)^2+2c(a+b)+c^2]$$

$$=(a^2+b^2)(a+b+c)^2.$$

2.2　华罗庚教授说得好“数缺形时少直观，形缺数时难入微”．我们在平时的解题教学中，应既研究一个问题的代数解法又研究一个问题的几何解法，充分发挥“形”对“数”的直观作用．“数”对“形”的入微作用，在对两法的转换、比较中，加深对问题的深入理解，促进学生能力的提高．

例 3　正数 a、b、c、A、B、C 满足条件

$a+A=b+B=c+C=k$.

求证：$aB+bC+cA<k^2$.

(1981 年第 21 届全苏数学竞赛题)

本题有一个很精美的几何解法 如图 1,作一个边长为 k 的正三角形 PQR，分别在各边上取 QL=A，LR=a，RM=B，MP=b，PN=C，NQ=c，

则有面积关系：$S_{\triangle LRM}+S_{\triangle MPN}+S_{\triangle NQL}<S_{\triangle PQR}$，即

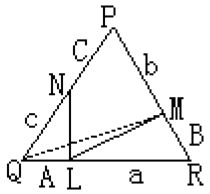

图　1

$$\frac{1}{2}aB\sin60°+\frac{1}{2}bC\sin60°+\frac{1}{2}cA\sin60°<\frac{1}{2}k^2\sin60°.$$

得 $aB+bC+cA<k^2$.

以上解法确实精美，常常作为数形结合的典型范例出现在多种杂志上，以至于很少有人去想它的代数解法．

这个问题有简单的代数解法吗？还是让我们来分析以上几何解法．这个精美的解法精美之处在于运用了一个很平凡的事实：“部分小于全体”，就是“3 个三角形之和小于 4 个三角形之和”．罗增儒教授巧妙地把这一事实换一种形式表示，法 b≥A 的连 QM，则

$$S_{\triangle LRM}<S_{\triangle MQR},$$

$$S_{\triangle MPN}+S_{\triangle NQL}<S_{\triangle MPN}+S_{\triangle NQM}=S_{\triangle MPQ}.$$

经过这一分离，新的形式提供了新的机会，即摆脱图形直接用代数放缩法证明．

不妨设 b 为 a、b、c、A、B、C 中的最大值，有 aB＜kB，bC+cA≤bC+cb=kb．

相加，$aB+bC+cA<k(B+b)=k^2$.

得到一个甚至比几何证法更为精美的证法．这个证法没有一点几何痕迹，但它确实是由几何证法“翻译”过来的．

3　在对通法与特技、繁解与简解的辩证认识、演变中促进学生能力的提高

3.1　通法与特技并重

我们以为：应辩证地看待通法与特技之间的关系：(1)某种方法称为通法，是指相对于一类问题普遍适用的方法，如把问题的范围改变，这种通法就可能变为特技，即通法与特技具有相对性．(2)任何一个可解决的数学问题，其结构(个性特征)与解决它的方法之间必然存着其和谐的、令人觉得赏心悦目的内在联系，更何况作为一位解题者谁不想自己的解法既巧又简？一个问题的一种巧解妙证往往可能是它的本质解法，即有可能是这类问题的本质解法．

例 4　三棱锥 P-ABC 中，PA=a，AB＝AC=2a，∠PAB＝∠PAC＝∠BAC＝60°，求三棱锥 P-ABC 的体积．

解法 1　如图 2，设 P 在底面 ABC 上的射影为 0，依题意计算得△PAB 中AB边上的高$PE=\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha$，进而求得$PO=\frac{\sqrt{6}}{2}\alpha$．

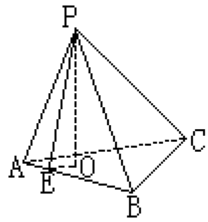

图　2

$\therefore V_{P\text{-}ABC}=\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha^2$．

解法 2　在△PAB 中，

$\because PA=a$，$AB=2a$，$\angle PAB=60°$，由余弦定理得$PB=\sqrt{3}$，

∴∠APB=90°，同理∠APC=90°．

∴AP⊥平面 PBC．

$\because S_{\triangle PBC}=\sqrt{2}\alpha^2$，

$\therefore V_{P\text{-}ABC}=V_{A\text{-}PBC}=\frac{1}{3}\sqrt{2}\alpha^2\cdot AP=\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha^3$．

一般以为，解法 1 是本题的通性通法(求底面积和高)，解法 2 是巧解特技(理由是一般问题中并不一定有 AP⊥平面 PBC)，但我们认为：解法 1 是机械使用体积公式的解法；解法 2 则是在对问题有了本质理解基础上的通性通法，因为它体现了对体积问题的本质认识；Sh 的本质是线面垂直．解法 2 是对求解体积问题形成了一个自然、流畅的思维链“V=Sh—底面积·高—直线和平面垂直—线线垂直”后的自然产物，学生一旦对体积问题有了以上深刻认识，处理体积问题时就有了明确的解题方向．

3.2　在解题教学中，应坚特由繁解到简解的训练，在繁解到简解的转换中促进学生能力提高．

例 5　试证明：

$$\text{arctg}\frac{1}{3}+\text{arctg}\frac{1}{7}+\Lambda+\text{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}=\text{arctg}(n+1)-\frac{\pi}{4}．$$

证法1 $\Theta\ \mathrm{arctg}\dfrac{1}{1+n+n^2}=\mathrm{arctg}\dfrac{(n+1)-n}{1+n(n+1)}=\mathrm{arctg}(n+1)-\mathrm{arctg}n$， (*)

$\therefore$ 令$n=1$，2，Λ ，n并把各式相加便得$\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3}+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{7}+\Lambda+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{1+n+n^2}$

$=\mathrm{arctg}(n+1)-\dfrac{\pi}{4}$.

证法 1 简洁、精炼，然而学生在敬佩之余却弄不明白你是怎样想到(*)式而我为什么想不到，久而久之，在学生的心目中留下一个数学神秘、难学的印象．其实，我们很容易在该题的数学归纳法的证明中发现(*)式．

证法 2　(数学归纳法)n=1 时，命题显然成立；

设 n=k 时有

$$\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{7}+\Lambda+\mathrm{arctg}\frac{1}{1+k+k^2}=\mathrm{arctg}(k+1)-\frac{\pi}{4}.$$

当$n=k+1$时，由归纳假设有

$$\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{7}+\Lambda+\mathrm{arctg}\frac{1}{1+k+k^2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{1+(1+k)+(1+k^2)}$$

$$=\mathrm{arctg}(k+1)-\frac{\pi}{4}+\mathrm{arctg}\frac{1}{1+(1+k)+(1+k)^2}.$$

从而要证

$$\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{7}+\Lambda+\mathrm{arctg}\frac{1}{1+k+k^2}+\mathrm{arctg}\frac{1}{1+(1+k)+(1+k)^2}$$

$$=\mathrm{arctg}(k+2)-\frac{\pi}{4}.$$

只要证　$\mathrm{arctg}(k+1)-\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{arctg}\dfrac{1}{1+(1+k)+(1+k)^2}=\mathrm{arctg}(k+2)-\dfrac{\pi}{4}$.

即　$\mathrm{arctg}(k+2)-\mathrm{arctg}(k+1)=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{1+(1+k)+(1+k)^2}$.

这只要两边取正切并利用正切函数的单调性易证．此式就是(*)式．

综上，原命题对一切自然数 n 都成立．

如果先讲证法 2(常规解法，繁解)，在对证法 2 的分析中抽取关键的一步((*)式)到证法 1(特殊解法，简解)则学生会觉得自然、流畅．笔者的教学实践表明：如果用这种方式在高二时向学生介绍数列求和的裂项抵消法，效果奇佳．

4　在多种解法的相互转换、综合运用中促进学生能力的提高

一般地，在处理一个具体问题时，并不一定局限于上面介绍的各类“两法”中的一类情形，常常可以多法并用．值得注意的是：此处的“多法并用”区别于一般意义下的一题多解，我们认为：“多法并用”指在多种方法的相互转换、相互变通、综合运用中有效地促进学生能力提高的多法并用(举例略)．

“发现”思维训练的若干途径

311400　浙江省富阳中学　高春龙

研究、探索客观存在的、尚未被认识或掌握的事物、性质或规律的学习活动，是发现与创新的学习活动的特征．它具有激励学生思维，培养创新意识的效果．但在数学课堂教学中，进行“发现”思维训练往往存在一定困难，一是要花费较多的时间；二是“发现”过程是否符合教学内容自身形成的规律、是否符合学生头脑中认识变化发展的过程，都不容易掌握．在较短的课堂教学时间内，如何进行“发现”思维训练，使学生完成由朦胧意识——清晰认识——精确表达的发现过程，这是值得研究的一个课题．本文将对“发现”思维训练教学设计的若干途径和方法作一粗略介绍，供大家参考．

1　通过类比、归纳法进行“发现”思维训练

类比法是一种从个别到个别(或特殊到特殊)的思维方法．它是在甲、乙两个(或两类)事物之间进行对比，从它们的某些类似或相同(相异)的属性出发，根据甲具有某一种属性，推出乙可能也有与之类似或相同(相异)的另一属性．

归纳法是通过对一个或几个具体的、特殊的问题研究，探索并发现其共性或一般规律的发现方法．

由于类比和归纳发现法都可以使学生从对一类事物(或个别事物)的认识推移(推广)到对另一类事物(或一般事物)的认识，扩大了认识的领域，是创造思维的一种形式．因此，它是进行“发现”思维训练的一种行之有效的途径．

如在立体几何和数列教学中，我们经常可采用类比、归纳发现法设计教学，进行“发现”思维训练．鼓励学生大胆类比、尝试、猜想，不但可以发现新的知识，而且还可以从类比对象的解决方案中得到启发，从而悟出解决新问题的方法和途径，或从个别情形入手，归纳发现一般结论．

例 1　给出平面几何命题：“正三角形 ABC 内任一点 P 到各边距离之和是一定值，且定值为此三角形的高．”试完成下列问题：

(1)通过类比，写出相应的立体几何命题．

(2)从以上平面几何问题的解法中,探索出相应的立体几何命题的证明方法．

分析　正三角形与正四面体类比，即得相对应的立体几何命题为：“正四面体 ABCD 内任一点 P 到各个面的距离之和是一定值,且定值为此四面体的高．”以上平面几何命题的证明方法是“面积分割法”．因此，此立体几何命题的证明可采用“体积分割法”进行尝试，并获得证明．

例2　试通过数列 $\{n\}$ 的部分和S_n，探求数列 $\{n^2\}$ 的部分和S_n'．

分析　个别尝试，完成下表：

n	1	2	3	4	5	…
$1^2+2^2+\cdots+n^2$	1	5	14	30	55	…
$1+2+\cdots+n$	1	3	6	10	15	…

通过上表，寻求规律：

n	1	2	3	4	5	…
$\dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}$	$\dfrac{3}{3}$	$\dfrac{5}{3}$	$\dfrac{7}{3}$	$\dfrac{9}{3}$	$\dfrac{11}{3}$	…

激励学生，发现规律：即数列$\left\{\dfrac{S'_n}{S_n}\right\}$是首项为1，公差为$\dfrac{2}{3}$的等差数列，从而

$$\frac{S'_n}{S_n}=1+(n-1)\frac{2}{3}=\frac{1}{3}(2n+1),$$

得 $Sn'=\dfrac{1}{3}(2n+1)\cdot S_n$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

通过以上这样的“发现”思维训练设计，不但可以激发学生的思维，也提高了他们学习数学的兴趣和信心，使他们尝到了探索问题和发现问题的乐趣，从培养创造力的角度看，其效果要比那种传统的封闭式教学方法好得多.

2　通过联想、比较法进行“发现”思维训练

联想、比较法是指从一事物的现象或本质、功能、结构出发，通过广泛的联想和比较，发现与创新事物联系的创造思维方法．借助联想、比较，人们可以扩大感知认识领域，把以前认识过的事物与所要发明创造的新事物联系，克服两个概念在意义上的差距，甚至使之“风马牛相及”．因此，启迪学生合理联想和比较也是进行“发现”思维训练的一种途径.

例 3　设$P_1(x)=x^2-2$，$P_k(x)=P_1[P_{k-1}(x)](k=2，3，\cdots)$．求证：对于任意正整数n，方程$P_n(x)=x$的根都是不同的实根.

分析　根据题设条件，$P_k(x)=P_1[P_{k-1}(x)]=[P_{k-1}(x)]^2-2$，即$\dfrac{1}{2}P_k(x)=2[\dfrac{1}{2}P_{k-1}(x)]^2-1$．(*)根据(*)式的结构特征，启迪学生灵活地从记忆中提取需要的表象进行联想，将(*)式与公式$\cos 2^k\theta=2\cos 2^{k-1}\theta-1$作比较，猜想$P_n(x)=2\cos 2^n\theta(n\in N)$，利用变换$x=2\cos\theta(|x|\le 2)$，将方程“$P_n(x)=x$”转化为三角方程“$2\cos 2^n\theta=2\cos\theta$”，从而获得证明的思路.

例4　证明：三个分式$\dfrac{a-b}{1+ab}$、$\dfrac{b-c}{1+bc}$、$\dfrac{c-a}{1+ca}$(a、b、c ∈ R)之和等于其积.

分析　如果按照一般的思考方法，解题过程将相当繁琐，也达不到思维训练的目的．若能启发学生从三个分式的结构联想两角差的正切公式，设 $tg\alpha=a$，$tg\beta=b$，$tg\gamma=c$，则$tg(\alpha-\beta)=\dfrac{a-b}{1+ab}$，$tg(\beta-\gamma)=\dfrac{b-c}{1+bc}$，$tg(\gamma-\alpha)=\dfrac{c-a}{1+ca}$，故只需证明：

$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)$

$=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)$，而这个恒等式是我们所熟悉的．

客观事物以各种不同的表象形式储存在人们的大脑中，一旦需要，就从相关的事物表象的排列、组合、比较中，建立各种方式的联系，产生广泛的联想．这就要求我们必须具备丰富的知识，只有这样，才能灵活、准确地从大脑记忆中提取需要的表象知识，并获得应用，且不会枯竭．

3　通过映射、变换法进行“发现”思维训练

数学中，常将某一变量看作另一变量的函数(从简单到复杂)；反过来，把问题中的复杂的解析式当作单一字母(从复杂到简单)处理，这就是变量变换，也就是某种特定的映射．通过映射，可使问题从未知领域向已知领域转化，从而不断发现新的知识．因此，映射、变换法也成为我们进行“发现”思维训练的一种有效手段．

例 5　设 A、B、C 是△ABC 的三个内角，则有恒等式(或不等式)：

$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C$，　①

$0<\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$，　②

试问：你能从这些熟知的恒等式(不等式)中，导出关于$\frac{A}{2}$、$\frac{B}{2}$、$\frac{C}{2}$的新的恒等式(或不等式)吗？

分析　通过变换：$A'=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$，$B'=\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}$，$C'=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$，由题设条件可知，$A'$、$B'$、$C'$均为锐角，且$A'+B'+C'=\pi$，故$A'$、$B'$、$C'$是一个三角形的三内角，由恒等式①得：

$\operatorname{tg}A'+\operatorname{tg}B'+\operatorname{tg}C'=\operatorname{tg}A'\operatorname{tg}B'\operatorname{tg}C'$，

即有

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}\qquad ③$$

同理，从不等式②可得

$$0<\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.\qquad ④$$

从上述变换启发学生发现结论：“如果对于△ABC 的三内角 A、B、C 的三角恒等式(或不等式)成立，则其半角的余函数所对应的恒等式(或不等式)也成立”．

这一变换(映射)手段，巧妙地从已知定理发现了新的定理，简直象魔术师手中的魔棍，变幻无穷，妙不可言，令学生惊叹不已．

4　通过移植、渗透法进行“发现”思维训练

移植、渗透法就是人们把某一事物、学科或系统已有的原理、方法有意识地转用到其他有关事物、学科或系统，为创造发明或解决问题提供启示和借鉴的创造性思维方法．

法国数学家、哲学家 R·笛卡尔把代数方法移植于几何学，产生了解析几何学，创立了一种新的数学方法．近代科学飞速发展，交叉学科不断产生，

移植、渗透法已成为极具活力的创造性思维方法．因此，在中学数学教学中，教师应充分利用这一方法和途径，加强各学科间原理、方法的相互移植和渗透的“发现”思维训练，培养学生的创新意识．

例 6　求证：

$$\sum_{k=0}^{1999}\cos\frac{k\pi}{1000}=\sum_{k=0}^{1999}\sin\frac{k\pi}{1000}=0.$$

分析　此题表面上看是一个三角求和问题，照常规解法，过程冗繁．若能引导学生，将点$A_k(\cos\frac{k\pi}{1000}，\sin\frac{k\pi}{1000})(k=0，1，2\cdots，1999)$视为均匀分布在单位圆上的 2000 个质点，且共点于正 2000 边形中心的力系，由物理学中的力学知识可知其合力为零而获证．

以上通过一个简单的物理学原理的移植、渗透，非常简洁、新颖和具有创造性地解决了这一数学问题．

5　通过实验、观察法进行“发现”思维训练

实验、观察法就是利用作图、演示教具、放映教学幻灯片和多媒体教学等数学实验手段，通过观察，感性地发现数学问题的特征、内在联系或规律的创造性思维方法．

长期以来，利用数学实验这一形象直观的教学手段，进行“发现”思维训练，没有引起数学教学工作者的足够重视，似乎实验、观察法仅仅是物理、化学等学科的专利．而事实上，如能充分利用这种直观教学手段，引导学生细心观察，借助形象直觉思维，有时恰恰能获得出奇制胜的效果．

例 7　过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一定点P(不在长轴上)的弦$PA_k$、$PB_k$ $(k=1，2，3，\cdots，n)$与长轴分别交于M_k、N_k两点，若$|PM_k|=|PN_k|$，则得到n条直线$A_kB_k(k=1，2，3，\cdots，n)$．试问：这n条直线的位置关系如何？

分析　若定点 P 在椭圆的短轴上时，由椭圆的对称性，通过作图演示，容易发现这 n 条直线是一组平行直线．那么当 P 点不在椭圆的短轴上时，情形又会怎样呢？师生一起共同作图、操作、演示，直观发现这 n 条直线仍然是一组平行直线(如图 1)，进一步观察其变化规律，找出变与不变的因素，即这些直线的斜率相等为一定值，从而提供了解决这个问题的根本思路．若设

P点坐标为$(a\cos\theta，b\sin\theta)$，经计算可得直线$A_kB_k$的斜率为$\frac{b}{a}\mathrm{ctg}\theta$(定值)．

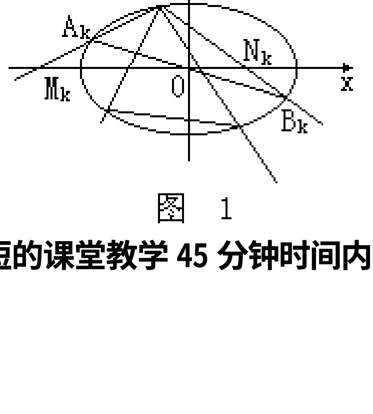

图　1

总而言之，要在短短的课堂教学 45 分钟时间内，进行“发现”思维训练，

并取得较好的效果，关键在于选择科学的训练途径，精心设计教学．

以上仅仅是笔者在教学实践中的一些具体做法，随着教学观念和教学手段的不断更新，相信这种“发现”思维训练方法会越来越引起广大教学工作者的重视．

让学生在求异中创新

213014　江苏省常州市第八中学　刘林才

近年来，培养学生的创新意识与创新能力已成为基础教育教学改革研究的一个热点．但是，现行数学教材中所涉及的命题大都是由条件寻求结论，或给出条件和结论，让学生去判断、推理、证明，这无疑给学生创新能力的培养带来了一定的限制．因此，教师应不拘泥于课本，而应在紧扣课本注重命题教学的同时，善于提出具有挑战性的新问题，为学生留下尽可能多的思维空间．实践证明，教学中力求引导学生在求异中创新，是一条培养学生创新能力的有效途径．本文就怎样处理数学教材中的有关命题，让学生在求异中创新，谈谈本人的肤浅做法．

1　在命题条件求异中创新

即给出命题的结论，从多方向上追溯使结论成立的条件，以有助于学生在把握命题结构的同时，激发创新意识．

问题1　试寻求确定圆$x^2+y^2-6x=0$的条件．(根据高中课本《平面解析几何》(必修)P67 练习 2(1)改编)

评注　只要引导学生抓住圆的方程得出圆心为(3，0)，半径为 3，以及其与 y 轴相切，再结合直线方程等知识，即可得到若干个确定此圆的充分条件．

下面便是笔者教学中，学生经过思考、讨论得出的几个答案：

(1)圆心为(3，0)，半径为 3；

(2)圆心为(3，0)，且与 y 轴相切；

(3)圆心在 x 轴正半轴上，且与 y 轴、直线 y=3 都相切；

(4)过点(3，3)，圆心是两直线 2x-3y=6 和 3x＋2y=9 的交点．

2　在命题结论求异中创新

即从同一条件出发，进行多方位地联想、判断，追索尽可能多的答案的思维过程和方法．这样做无疑有助于增进学生创新意识的形成，培养学生的创新能力．

问题 2　根据数列的前四项 1，2，1，2 写出其一个通项公式．(根据高中课本《代数》下册(必修)P36 例 4 改编)

评注　可引导学生抓住项数为偶数的项是 2 这一规律，联系熟知的分段函数、指数函数、对数函数、三角函数等知识，去追溯不同答案．

具体教学中，学生得出了如下几种答案：

$$a_n=\begin{cases}1，n\text{为奇数}\\2，n\text{为偶数}\end{cases}$$

$$a_n=1+\frac{1+(-1)^n}{2}；$$

$$a_n=1+\log_3[2+(-1)^n]；$$

$$a_n=1+\left|\cos\frac{n\pi}{2}\right|；$$

$$a_n=1+\mathrm{tg}\frac{1+(-1)^n}{8}\pi．$$

3　在命题延伸求异中创新

在学生熟知某个命题后，将此命题条件或结论进一步推广而成新命题，再作推断，以有助于培养学生思维的深刻性和发散性思维能力，进而可增强学生的创新能力．

问题3　已知a、b、c是不全相等的正数，求证：$a+b+c>\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$．(高中课本《代数》下册(必修)P11练习1(2))

评注　教者只要抓住命题的条件和结论，以及由一般到特殊、从特殊到一般等数学思想，就可将其进行延伸．

下面是学生得出的几个答案：

(1)削弱命题条件，可将其延伸如下：

已知 a、b、c 是不全相等的实数，求证：

$a^2+b^2+c^2>ah+bc+ca$．

(2)保留条件，结论中a、b、c分别以$\frac{bc}{a}$、$\frac{ca}{b}$、$\frac{ab}{c}$代入可延伸如下：

已知 a、b、c 为不全相等的正数，求证：

$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}>a+b+c$．

(3)采用由一般到特殊的数学思想，令 c=1，有：

已知 a、b 为两个不相等的正数，求证：

$a+b+1>\sqrt{ab}+\sqrt{a}+\sqrt{b}$．

(4)采用由特殊到一般的数学思想，可将原命题推广如下：

已知a_1，a_2，…，a_n为不全相等的正数，求证：$a_1+a_2+\cdots+a_n>\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\Lambda+\sqrt{a_{n-1}a_n}+\sqrt{a_na_1}$．

4　在命题构造求异中创新

即依据所给条件，多角度地构造出符合此条件的真命题．这样做，不仅能调动全体学生敢想、善思、有识、敢于“标新立异”的积极性，还为学生提供了一个发现、创新的环境和机会，而且也为教师提供了一条培养学生创新能力的极为有效的途径．

问题 4　如图 1，从甲地到乙地有 2 条路可通．从乙地到丙地有 3 条路可通；从甲地到丁地有 4 条路可通，从丁地到丙地有 2 条路可通．从甲地到丙地共有多少种不同的走法？(高中课本《代数》下册(必修)P226 练习第 5 题)

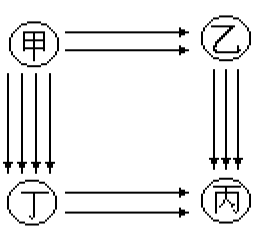

图　1

评注　由加法、乘法原理易得其结果为 2×3+4×2=14(种)．为使学生加深对两个基本原理的理解，教师应引导学生将此命题深化，要求学生先据此

等式(或变形后的式子)多角度地构造出可利用加法、乘法原理解决的排列组合命题，再去联想、判断．

下面是学生自行构造出的几个真命题：

(1)由 $6+4\times2=14$ 可构造出如下命题：

从甲地到乙地，若走水路，有 6 条不同航线；若走公路，必须经过丙地，而甲地到丙地有 4 条公路可通，丙地到乙地有 2 条公路可通．则从甲地到乙地共有 14 种不同走法．

(2)由 $2\times3+2\times4=14$ 可构造出如下命题：

某工厂生产某种产品可有两类办法．第一类办法须经过两道工序：第一道工序有 2 种不同加工办法，第二道工序有 3 种不同加工办法；第二类办法也经两道工序：第一道工序有 2 种不同加工办法，第二道工序有 4 种不同加工办法．则生产这种产品共有 14 种不同办法．

(3)由 $(3+4)\times2=14$ 可构造出如下命题：

若下山有 2 条路可走；上山若步行有 3 条路可走，若乘车有 4 条路可走．则翻过这座山共有 14 种不同走法．

最后，有必要指出的是，平时数学教学中，教师应力求让学生紧扣教材创造性地提出自己的数学问题．否则，学生只会做别人提出的问题，而没有自己的问题，就谈不上创新．