学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

数学教学

2000年第1期

BOOK

数学发展的现状与中小学数学教育

周青

编者按：周青教授原是华东师范大学的一位年轻数学教授，现在在国家自然科学基金会数理学部担任领导职务，本文中高屋建瓴地提出了一些值得深思的问题，数学教育需要数学家的参与，希望本文能引起读者的关注。

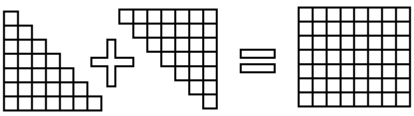
对数学来说，过去的半个世纪是它发展的黄金时代，取得了非常大的成就.特别在最近的三十年中,数学各个分支之间出现了一些有活力的相互交叉和相互渗透，越来越展现出一种内在的统一性；与此同时，数学在外部的应用也表现出了越来越高的自觉性，这种应用的自觉性不仅体现在已有的数学知识的运用上,也体现在一些数学的最新发展中.这两个特征很好地体现了数学作为一门科学的活力.

近年来的所有数学上的重大突破，绝大多数都反映了各主要学科中许多思想日趋统一和各个分支的相互交叉和渗透.这使得数学的整体观念又重新出现了,不同领域的数学家们又重新意识到他们是在从事着一项共同的事业.

另一方面，我们的社会越来越离不开数学.从网络计算、信息安全和生物医学技术到计算机软件,通讯和投资政策都需要数学.这种依赖性不仅表现在依赖于那些已经有的数学理论和方法,而且也依赖于数学的最新突破.一些数学的最新发展很快渗透到应用之中，通过应用又将其它领域中的观念引入数学本身，刺激数学的进一步发展.待别是数学与计算机技术的紧密结合，产生了可直接应用的数学技术，成为许多高新技术的核心.作为一个例子，在波音 777 设计过程中，数学模型和强有力的模拟技术代替了许多实验，加速了设计的速度.

数学发展表现出来的这种内在的统一性和在外部应用中的自觉性还将在下个世纪中继续下去.这样的发展现状对我们的数学教育提出了什么样的要求呢？首先在教育中数学应该被当作一个整体来看待，要强调数学各个分支学科之间的联系；其次要注意加强培养灵活运用数学的能力和综合应用能力，注意数学与其它学科之间的联系.而这两点是相辅相成的，数学的整体观念的建立可以帮助理解数学，加强数学综合应用能力；反之，综合应用能力的加强可以帮助我们加深对数学的整体性的认识.

数学应该被当作一个整体来对待.从历史上看，数学原来就是一个整体.在古希腊的时候,几何就是全部的数学.我们现在代数中的一些命题在那时候都是用几何语言来叙述的，而后来工程技术的需要又曾经使代数成为整个数学的主体.现在我们讲的求和公式 $1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$ 在古希腊的时候是用下面的图来表达的，而三角形的两边之和大于第三边讲的就是算术平均大于几何平均，至于几何作图与二次方程的求解的关系就更加密切了.



直到十九世纪中叶的时候,数学的分工还不是那么的明确.现在我们还时常赞叹那时候的数学家怎么懂得那么多,曾经在那么多的领域中做出过贡献.二十世纪初叶起数学被人为地划分成众多的分支学科是数学发展的一个阶段，这

使得数学的研究范围大大地扩大了,发展速度也大大地加快了.但是数学还是一个整体.几十年过去以后人们又回头重新建立这种整体的观念.数学教育中要讲一点历史.通常历史的发展与认识论的规律符合得很好,也与逻辑上的先后符合，这对于帮助建立数学的整体观念是有很大好处的.

我们现在在基础教育中遇到的数学内容，所研究的对象都是从我们能看见的现实世界中抽象出来的，在不少地方数学各分支学科的差别仅仅是从不同的角度去看.因为是从不同的角度去看同一件事情,这样数学的各分支学科中就必然有一些自然的联系.看清楚这些联系.会帮助我们领会数学的精髓，知道数学讲的到底是什么.数学的一个重要任务是为其他科学提供语言、观念和工具，无论是代数的方法还是几何的方法，关键是要能够解决问题.

讲到数学的综合应用能力,绝对不是指那些人为编造出来的难题.我们所处的世界是那么的复杂，我们所遇到的多数问题也不可能仅仅是一个二次方程就能解决的问题，所以再将二次方程的题目分成若干类型的做法对数学来讲是毫无意义的.综合应用能力指的应该是利用数学手段来解决现实世界中可能出现的问题的能力，而无论最后解决问题时用的是代数的还是几何的或者是综合了两者的方法.通过一些典型问题,了解数学的想法是怎样被用来解决实际问题的.这样的做法可以让我们了解数学到底讲的是什么.在了解数学的同时，了解其他学科，运用数学的手段帮助理解其他学科，这是数学的真谛.我以为所有的数学工作者都有义务帮助加强数学和数学以外的学科的交流.

恐怕读者会问基础教育的对象不一定将来都成为数学家，为什么数学教育要与数学的发展联系起来呢？数学的发展体现了社会对数学的需要，有时也是为了满足数学自身的某种需要，而这种自身的需要反映的往往是社会的更深层次的需要.从数学的发展趋势来看数学教育,在某种程度上会反映社会对数学的这种需求.特别是数学现在发展的这种趋势,非常好地反映了现代社会的要求.数学的综合应用能力是现代社会中人人需要的能力,学习数学的目的是使用数学.这是为什么我们要强调数学综合应用能力的原因,而建立数学的整体观念的确可以很好地帮助我们加强数学的综合应用能力.

除了数学发展的趋势以外，数学本身也有一些特征是在数学教育中需要特别注意的.数学是一种文化.我经常用来说明这一点而举的一个例子是国际象棋的发明者索要的奖励的传说.发明者要求国王奖励一些米,在棋盘的第一个格子里放一粒米，以后的每一个格子里放上前一个格子里的两倍，这样米粒的总数是$2^{64}-1$.愚蠢的国王对这个很大的数字没有概念，居然很爽快地答应了.当然国王的承诺是无法兑现的.国王犯的错误与我们平时写文章时用的错别字没有什么区别,在这种意义下说数学也是一种修养.实际上数学作为一种文化，还有更深层次的含义，它在人们认识世界改造世界的过程中起很重要的作用.采用很大的数字使我们在实际上无法完成某种任务的想法现在就被用于信息安全领域,被用来设计银行的密码.另外数学教育对提高分析与决策能力,推理与创造能力至关重要.特别是在现在提倡我们民族的创新精神的年代里，数学教育肩负着一个尤其重要的任务.

众所周知 数学教育改革的关键是教师.建立数学的整体观念和提高数学的综合应用能力都与教师的个人素质有关.教师本人对数学的认识甚至对数学以外的一些学科的了解将直接影响到我们所实施的教育的质量.中小学教师是基础教育的实施者，当然是改善我们的基础教育的关键.不仅如此，因为

师范教育和师资培训是大学教育的任务，所以各个大学数学教育的质量也与改善我们的基础教育密切相关.现在我们讲得比较多的是教育制度的改革.制度的改革固然也是重要的,但是将什么都归罪于制度不是很公平.如果不是太功利主义的话,就不需要完全跟着考试的指挥棒跑,那还有什么事情改不了？所以就我个人的理解，改革的关键还在于我们教师.

在迈进二十一世纪的时候，希望我们大家可以把握住数学发展的脉搏，使我们数学的基础教育变得更加理想一些.

学生提问式教学模式在教学中的应用

331300 江西省新干县金川中学 黄桂如

如何提高学生的综合解题能力和创造性能力是目前高中数学教育迫切需要研究的一个课题.本人在教学实践中总结出“学生提问式”教学模式.现将此教学模式简介如下，与同仁共同探讨.

一、模式简介

长期以来，受应试教育的影响，在教学过程中重结论轻过程、重模仿轻创造、重记忆轻能力，其中削弱和减轻的是使学生长期受益的数学思想方法和对学习能力的培养.因此更新教学观念，改革教学方法，提高学生提出问题、分析问题和解决问题的能力就成了当务之急.

按照波利亚的“探索法”理论和布鲁纳的“发现法”理论，为了培养学生的探究精神和创造性，笔者结合自己的教学实际，总结出“学生提问式教学模式”，这模式的基本程序是：

创造情景 → 观察实验 → 分析研究 → 提出问题 → 验证反思

这一模式的主要特点是注重知识的形成过程，让学生通过独立观察和思考，自己动手动脑去发现知识、掌握技能，自己进行概括和作出结论.

二、具体做法

我所任课的两个班分别作为试验班和对比班，分别用“学生提问式教学模式”和“讲授模式”进行教学.

教学试验时分三个阶段来进行

1.教师提出问题，给学生以示范（适应阶段）.

试验前学生们普遍觉得上课听得懂，习题也做得出，但让他们讲上节课所涉及的概念、例题是怎样想出来的？做习题时是怎样思考得到解题方法的？就会感到茫然.为此试验开始时，我先让学生阅读课本，然后提出问题供学生解答.

如：讲 1.4：“含有绝对值的不等式的解法”，学生阅读课文时，我提出如下问题：

（1）由 $|x|=2$ 的解是 $x=2$ 或 $x=-2$，能否得到 $|x|=a$ 的解是 $x=a$ 或 $x=-a$？为什么？

（2）$|x|<2$ 的解集 $\{x|-2<x<2\}$ 是怎样得到的？$|x|<a$ 有类似的结论吗？

（3）$|x|>a$（$a>0$）的解集是 $\{x|x>a$ 或 $x<-a\}$，为什么要用“或”字连结？能用“且”字吗？两个字分别在何时使用？有何区别？

（4）例 1 中，若得到“$-5\le 500-x\le 5$”可以吗？解不等式时要注意什么？

学生们通过对以上四个问题的回答，加深了对“绝对值概念”、“绝对值的几何意义”、“集合的交集、并集概念”、“不等式的性质”及解不等

式等方面知识的理解.

经过适当阶段的训练，学生们不仅可以回答老师提出的问题，而且还可以自己提出一些问题.

2.学生提出问题，培养思维能力（实施阶段）.

学生开始时由于考虑不周，问题提得不太确切，由老师引导学生讨论，学生补充完整，直到满意为止.

如：讲“指数函数的图象和性质”的第一课时，学生阅读课文后提出下列问题：

（1）由图象知，函数$y=2^x$和$y=2^{-x}$的图象关于y轴对称，怎样证明？

（2）性质（4）怎样证明？

我让一名学生来证，两题均不会证.我就让全班学生讨论，并注意加以引导，最后由一位学生总结发言，给予补充：

（3）性质（4）有什么作用？

（4）性质（3）有什么作用？

在学生讨论的基础上，让两个学生分别证明（1）、（2），证明过程中不确切之处再由学生补充.并指出：性质（4）是解（指数）不等式、比较大小的依据.性质（3）：$a^0=1$可引伸为$a^{f(x)}=1f(x)=0$，再推广为：$a^{f(x)}=a^{g(x)}$ $a^{f(x)-g(x)}=f(x)-g(x)=0$，即$f(x)=g(x)$，实现了由超越方程向代数方程的转化，实际上性质(3)是解指数方程的理论依据.这样学生们对指数函数的性质和作用的理解就更深刻了，为下节课讲指数函数性质的应用铺平了道路.

3.学生分解例题，提高解题能力（提高阶段）.

学生们经过第二阶段较长时间的提问题训练，提出的问题有一定的深度.我有意识地引导他们对例题进行分析，提出问题，将其分解为若干个小问题，以降低题目的难度并找出解题方法和途径.

如：求证：方程$x^2+x+q=0$的两根为一个直角三角形的两个锐角的正弦的条件是：$p^2-q=1$，$p<0$，$0<q\leq\frac{1}{2}$.

我让学生用10分钟时间来审题，思考题中涉及的知识，并考虑解题的方法和步骤.学生们发表各自的看法并提出问题.最后我整理归纳出下列问题：

（1）题中涉及充要条件， A、B各指什么？

（2）证充分性时，由“方程$x^2+x+q=0$的两根为…锐角的正弦”可得到下列问题：

①方程有两实根应满足什么条件？

②方程有两正根应满足什么条件？

③怎样证明两根x_1、$x_2\in(0,1)$？

④方程两根的平方和怎样求？

⑤x_1、x_2是一个直角三角形两锐角的正弦吗？怎样证明？

（3）怎样证充分性和必要性？

学生解答了以上几个小题后,再经过适当地组合就可以证得本题.这样学生认识到了一个难题实际上是几个容易题的集合体，能化解问题就能使难交易，就能逐步提高解题能力.

三、试验结果及体会

1.两班初中升学（全地区统一）数学成绩一览表（注：数学科总分为 120 分）：

班级	平均分	110-120	100-110	90-100	80-90	70-80	60-70	60 分以下
试验班(55 人)	91.7	4	6	18	20	7	0	0
对比班(56 人)	92.2	4	5	19	22	6	0	0

2.两班高二上学期期终考试数学成绩一览表（注：①期终试卷为两省一市统一试卷.②总分 120 分，含附加题 20 分）：

班级	平均分	110-120	100-110	90-100	80-90	70-80	60-70	60 分以下
试验班(55 人)	95.2	6	12	20	10	7	0	0
对比班(56 人)	85.4	2	5	15	17	13	4	0

我体会到要运用好“学生提问式教学模式”必须做到以下几点：

1.要认真备课，注意知识的内在联系和学生的实际水平，在课堂上要注意学生的反应，必要时随时修改自己的教学计划.

2.充分发挥教师的主导作用，体现学生的主体地位，引导学生积极参与到课堂教学的过程中来，学会数学的思维方法，靠他们主动的思维活动去获取知识.

3.指导学生不断系统地总结知识、解题方法，思维方法.

4.充分发挥学生的积极主动性和非智力因素的作用，注意学法指导.

5.针对教学实际，灵活地运用各种教学模式（如讲授模式、自学模式等），吸收其他模式的优势，开拓创新，逐渐形成自己的教学优势和风格.

科学的教学方法是保证教学质量的重要措施，发展地选择教学模式是提高学生能力、培养学生素质的途径.

本文得到江西省吉安地区教研室李承业主任的指导，谨致谢意！

关于整式的乘除的教育调查报告

528403 中山市中区教研室 周俊 中山市中区烟墩中学 宁林宝

整式的乘除是整式加减的发展和深化，又是中学代数中研究式与式的关系的重要内容,更是后继课程的基础.因而整式的乘除这一章内容为中学代数课中起承上启下作用的重要内容之一.本教学调查是为了探究学生掌握整式的乘除的计算技能是否具有一定到达度，是否练习越多越好.

一、教学调查的提出

（一）整式的乘除教学目标简析

一般说来，该章有以下几点教学目标：

①使学生掌握正整数幂的运算性质（同底数幂的乘法、幂的乘方、积的乘方），会用它们熟练地进行运算.

②使学生掌握单项式与单项式、单项式与多项式、多项式与多项式相乘的法则，会用它们进行运算.

③灵活运用五个乘法公式进行运算（直接用公式不超过三次）.

（二）教学调查的提出

从上面对整式乘除教学目标的简析可以看出，形成整式乘除的计算技能是中心目标，而技能的形成是操作性的训练，因为这章内容的重要性，所以历来为数学教学所重视，正是因为这种“重视”，长时间来，在我国数学教学中加强计算能力的要求下，占用了较多的教学时间，采取了要求过繁的重复性训练.似乎练习题越繁复，练习时间越长，计算技能越强，教学效果就越好.这是很值得探讨的.我们既然认为计算技能是一种操作性训练，那么这种技能的形成必然受着主观和客观条件的制约.这里所说的主观条件主要是指学生的知识基础和他们的心理条件，在班级授课制中，这种条件在一定的年龄阶段有一定的相对稳定性，体现在知识和形成技能上应有一定的相对水平，这种相对水平虽然有可能受客观教学条件的影响有所摆动，但没有根据认为学生某种技能的形成会超越他们的身心发展水平和知识基础而直线上升或总是递增，这就促使笔者思考以下问题，一定年龄阶段的学生，形成整式乘除计算技能是否具有一定的到达度？当学生接近这一限度时，再进行重复性训练是否还有教学效果.

二、教学调查的程序和方法

笔者在本校初一（1）班进行教学调查.

程序如下：

第Ⅰ学习→第Ⅰ测验→第Ⅱ学习→第Ⅱ测验→统计分析→心理分析→初步评价→讨论.

调查方法：

第Ⅰ、Ⅱ学习完成后，通过测验取得相关数据，进行对比分析作出评价.

三、教学调查的过程和结果

（一）第Ⅰ学习、第Ⅰ测验

用20课时进行教学（含两节复习课）后，进行学习成绩总结测验，以观察第Ⅰ学习的学习效果，测验题如下：

1.填空题（每空3分，共60分）

（1）$10^5 = 0^2 \cdot$ ________.

$5^3 \cdot =$ ________ $=$ ________.

（2）$5x^2 \cdot x =$ ________.

$-3x \cdot 8x^3 =$ ________.

（3）$(-3a^3b)^2 =$ ________.

$(-3a^3b)^3 =$ ________.

（4）$-5x(2x-x^2+^3)$ ________.

（5）$(2x+y)(-2x+y) =$ ________.

$(3+2x)^2 =$ ________.

（6）$(xy)^4 \div y =$ ________.

$x^{y+2} \div x^2 =$ ________..

（7）$-15a^2b^3c \div 3ab^2c =$ ________.

$(-3a^2b)^2 \div a2b =$ ________.

（8）x^2（________）$= x3-3x4+8x5$.

（9）$2^{2n} \cdot 4 =$ ________.

$(15ab+5x) \div 2 =$ ________.

$(12m^3-m^2)(-4m^2)$ ________.

（10）$(x+5)$（________）$= x^3+25$.

$(3-2x)$（________）$= 27-8x^3$.

2.计算题（每题5分，共40分）

（11）先化简再求值$x(x^2-1)-2(3x+3)$其中$x=4$.

（12）$(x-1)(x+2)-2(x^2-1)$.

（13）$x(x-1)^2-(x^2+x+1)(x-1)$.

（14）$(x-2y)^2-5x(1-x)\div 5x$.

（15）$2(x-2)^2-(x+1)^2$.

（16）$(x+2y)(x^2+3x-5)$.

（17）$(7x^2y-14xy+35)\div(-7)$.

（18）解方程组：

$$\begin{cases} (x-1)(y+3)-xy=0 \\ x-y=3. \end{cases}$$

（二）第Ⅱ学习、第Ⅱ测验

在第Ⅰ学习和第Ⅰ测验之后，为了调查重复性训练对形成整式乘除计算技能的影响，组织第Ⅱ学习—八节练习课，重点是式的混合训练，目的如下：

①计算技能若有提高，提高的程度如何？

②计算技能若无提高，其原因何在？

③计算技能若有“下降”，原因是什么？

为了考察上述第Ⅰ学习的效果，在第Ⅱ学习之后，组织第Ⅱ测验，其难度与第Ⅰ测验相当，试题如下：

1.填空题（每空 3 分，共 60 分）

（1）$5^7=5^2\cdot$ ______.

$10^6\cdot 10^2=$ ______.

（2）$3x^2\cdot 8x=$ ______.

$-4x\cdot 7x^4=$ ______.

（3）$(-2a^3b^2c)^2=$ ______.

（4）$-5x^2(2x+x^2-x^3)=$ ______.

$-6xy(3x^2-2y)=$ ______.

（5）$(3a+b)(-3a+b)=$ ______.

$(3a+2b)2=$ ______.

（6）$(xy)^5\div xy=$ ______.

$x^{m+n+2}\div x^2=$ ______.

（7）$-18a^3b^4c^2\div 4ab^2c=$ ______.

$(-3a^2b^2)2\div a^2b=$ ______.

（8）x^3（______）$=x^4-3x^5+8x^6$.

（9）$3^{2n}\cdot 9=$ ______.

$(20ab+5x)\div 4=$ ______.

$(16m^3-8m^2)\div(-2m)=$ ______.

（10）$(-5y)$（______）$=-125y^3$.

$(2x+4y)$（______）$=8x^3+64y^3$.

2.计算题（每小题 5 分，共 40 分）

（11）先化简，再求值$y(y^2-3)-4(3y-2)$其中$y=3$.

（12）$(x-3)(x+2)-2(x^2-2)$.

（13）$x(x-3)^2-(x^2+2x+4)(x-2)$.

（14）$(2x-3y)^2-6x(1-x)\div 6x$.

（15）$3(x+2)^2-2(x-4)^2$.

（16）$(x+3y)(x^2+3x-5)$.

（17）$(8x^2y-16xy+40)\div(-8)$.

（18）解方程组：

$$\begin{cases}(x-2)(y+3)-xy=0\\(x-y)^2+x^2-y^2=0.\end{cases}$$

（三）调查结果（直观分析）

为了宏观地了解由第Ⅰ学习到第Ⅱ学习所引起的计算技能的变化，首先对两测验作个直观分析.

1.第Ⅰ测验各分数段得分人数分布表1：

	①	②	③	④	⑤	⑥
分数段	59以下	60—69	70—79	80—89	90—99	100
人数	3	8	6	5	21	2

2.第Ⅱ测验各分数段得分人数分布表2：

	①	②	③	④	⑤	⑥
分数段	59以下	60—69	70—79	80—89	90—99	100
人数	1	8	7	6	20	3

3.观察上面两表：可以看到，低分数段①的人数由表1的3人下降到表2的1人；高分数段⑤、⑥的人数由表1的23到表2的23人没有变化，中间分数段②、③、④的人数由表1的19人上升到表2的21人.

4.两次测验的平均分、合格率、优良率.

第一次测验和第二次测验的平均分、合格率、优良率分别列表如下：

	人数	总分	平均分	合格率	优良率
第Ⅰ测验	45	3786	84.13	93.33％	62.22％
第Ⅱ测验	45	3814	84.75	97.78％	64.44％

5.直观分析：

从上述三种表格中可直接看出一些情况，似乎可以直观地得出结论，随着训练时间的增加，整式的乘除的计算技能略有提高，但由两次测验被试对应得分的变化看，第Ⅱ测验比第Ⅰ测验分数上升者有18人，分数下降者10人，并非全升、全降、全同，而是出现一定的得分随机性，显然从均分上看略有增加，但这种稍小的增加是否是由第Ⅱ学习所造成的显著性效果呢？也就是说平均分84.13和 84.75是否具有显著性差异呢？从两次测验得分出现

的随机性看，似乎没有什么本质差异．

（四）调查的初步评价

对一定年龄阶段的学生，进行整式乘除的技能训练，学习效果是有相应限度的，当学生的计算技能达到相应的一定到达度后，再进行重复性训练，对提高学生的计算技能不发生显著性影响．如果认为："计算技能与计算时间（或计算次数）成正比"，那是不合乎实际的．因此，不加分析地加大习题量和复杂性的教学有一定的盲目性．

关于变题策略和变题技巧

226001 江苏省南通市第一中学 黄坪

以问题为出发点的解题教学，已使广大数学教师从题海中解脱了出来，形成了生动活泼的以某一典型问题为中心、变题手段为形式、提高思维素质为目的的新型教学模式.以一胜多、举一反三的变式训练，给数学教学注入了生机和活力.娴熟的变题技巧，高超的变题艺术，似色彩纷呈的万花筒，变幻出多姿多彩的数学问题,为数学教学实施素质教育提供了丰富的素材.本文着重从变题策略和变题技巧两个方面，谈谈中学数学教学中进行变式训练的一些做法.

一、变题策略

数学教学围绕着问题展开，每一问题都有独特的背景和相互之间的联系，如果教师认识不到这一点，而将这些问题割裂开来，不仅会增加学生学习数学的负担，而且会使学生丧失学习数学的兴趣，从而使数学教学陷入困境，举步维艰.教学中教师根据教学目的精心地挑选问题、重组问题、演变问题，开辟了数学教学的一块崭新的领域.根据存同求异的教学原则，又从问题题设与结论的相似程度上进行划分，大致可从以下三个方面做出变题.

1.形相似，质类同

这是一般层次上进行的变题，大多在新授教学中予以展开，以形成学生学习的正迁移，学牢基础知识，巩固基本思想方法.

例 1 m 是什么实数的时候，方程

$$x^2-(m+2)x+4=0$$

有实根？（代数必修本上册 25 页例 6）

（m≤-6 或 m≥2）

变题1 m是什么实数的时候，一元二次不等式$x^2-(m+2)x+4>0$在x∈R 上恒成立？（-6<m<2）

变题2 m是什么实数的时候，一元二次函数$y=x^2-(m+2)x+4$的图象（或顶点）恒在 x 轴的上方？（-6＜m＜2）

变题3 m是什么实数的时候，一元二次不等式$x^2-(m+2)x+4>0$的解集为 {x｜x≠2，x∈R} ？（m=2）

变题4 m是什么实数的时候，一元二次不等式$x^2-(m+2)x+4>0$的解集为 {x｜x≠-2，x∈R} ？（m=-6）

四道变题均围绕着相同的二次三项式，从一元二次方程、一元二次不等式、一元二次函数三个角度作出变题，并且都利用一元二次方程根的判别式进行求解，从判别式大于零、小于零、等于零三种情况设置变题，可谓形式相似，实质类同.

2.形相似，质不同

这是从较高层次上进行的变题，用貌似学生熟悉的问题情景作为前提，演变出实质不同的新问题，以加深学生对知识的理解，防止产生学习的负迁移现象.这类变题，可在阶段复习和总复习中予以推出.这种变题训练在思维

训练上属于同中求异的方式．

例 2 设非空集合 A＝ $\{x\mid -1\le x\le a\}$ ，求符合下列条件的实数 a．

（1）若 $B=\{x\mid y=x+1,\ x\in A\}$ ，$C=\{x\mid y=x^2,\ x\in A\}$ ．且 $B\cap C\neq\varnothing$．（$a\geq-1$）

（2）若 $B=\{(x,y)\mid y=x+1,\ x\in A\}$ ，$C=\{(x,y)\mid y=x^2,\ x\in A\}$ ．且 $B\cap C\neq\varnothing$．

$(a=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2})$

（3）若 $B=\{y\mid y=x+1,\ x\in A\}$ ，$C=\{y\mid y=x^2,\ x\in A\}$ ．且 $B=C$．（$a=0$，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$）

（4）若 $B=\{y\mid y=x+1\ x\in A\}$ $C=\{y\mid y=x^2,\ x\in A\}$ ．且 $B\supseteq C$．

（$0\leq a\leq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$）

（5）若 $B=\{y\mid y=x+1,\ x\in A\}$ ，$C=\{y\mid y=x^2,\ x\in A\}$ ．且 $B\subseteq C$．

（$a\geq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$）

五个问题，都从 $B\cap C\neq\varnothing$ 的角度作出演变，且 B、C 集合中的解析式相同，可谓形影相似，但由于集合中所指元素一般形式的不同，因而使得问题求解的实质发生了变化．

第（1）小题中，B、C 是数集，从图象角度来看，可看作抛物线与射线在 x 轴上的射影；第（2）小题中，B、C 是点集，可看作抛物线与射线的交点；第（3）、（4）、（5）小题中，B、C 也是数集，可看作抛物线与射线在 y 轴上的射影．

通过变式对比，加深了学生对集合知识的认识，避免了生搬硬套、张冠李戴的错误做法．

3．形相异，质相同

这也是从较高层次上进行的变题，不过难度较大，从外表不相同的问题中，发现它们相同的实质，需要独具慧眼的识别能力和条分缕析的归纳能力．通过这类变题，可以增强学生的数学能力，从而使学生产生数学知识的广泛迁移．在思维训练上属于异中求同的方式．

例3（1）求函数 $y=x^2-2x+3$ 在 $[0,1]$ 上的最值．（最大值为 3，最小值为 2）

（2）已知三角方程 $\cos^2\theta-2\cos\theta+3-m=0$，$\theta\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 有实数解，求 m 的取值范围．（$2\leq m\leq3$）

（3）已知集合 A= $\{(x,y)\mid y=x^2+3\}$ ，集合 $B=\{(x,y)\mid y=2x+m,\ x\in[0,1]\}$ ，若 $A\cap B\neq\varnothing$，求 m 的取值范围．（$2\leq m\leq3$）

（4）已知 $2x^2+y^2-2x=0$，求 $3-x^2-y^2$ 的最值．（最大值为 3，最小值为 2）

（5）已知椭圆的参数方程是：

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta \end{cases}$$（θ为参数，θ∈R）

求椭圆上的点到原点的最远和最近的距离.（最远的距离为 1，最近的距离为 0）

这五个问题，虽然表述形式迥异，但结论如同一辙，实际上是一类题的演变，只是从不同的知识角度予以不同表达形式而已.题（2）是在题（1）的基础上做了三角代换；题（3）是从图象的角度，并用集合的语言表达的；题（4）将区间[0，1]作了隐含处理；题（5）是对题（4）的几何解释.

二、变题技巧

下面我们着重从问题演变的方法上总结出十种变题技巧，以供教学时参考.

1.解法多变

根据某一问题的多种解法，将问题的某一方面侧重化，更能突出这一解法的优越性，而展开变式训练.这种训练能有效地突出解题思想方法，使学生掌握知识的同时，更牢固地掌握方法.

例 4 已知二次函数的图象经过点（0，-2）和（2，0），对称轴方程为$x=\frac{1}{2}$，求二次函数的解析式.（$f(x)=x^2-x-2$）

分析：二次函数的解析式有三种表达形式，即一般式、顶点式、两根式.本题采用两根式求解较方便.已知一根为$x_1=2$，设另一根为x_2，则$x_2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-2$，$x_2=-1$，然后求解只要假设一个待定的字母.又由于已知对称轴方程，假设顶点式也是常用的方法，不过要假设两个待定的字母.若采用一般式，则需假设三个待定的字母.通过分析，可作变题训练：若只将题设中其中一点（2，0）改为（-2，4），则问题利用顶点式较方便；若将题设改为已知三点（0，-2）、（2，0）、（-2，4），则用一般式较方便.

2.逆向演变

将命题中的题设与结论对调，探讨逆命题是否成立，而展开的变式训练.这在概念教学中尤其值得推广，使学生不仅从问题的正面，而且从问题的侧面、反面去认识，以帮助学生对原问题有比较透彻的理解.这也是教学中惯用的技巧之一.

例 5 设抛物线顶点 O，经过焦点垂直于轴的直线和抛物线交于 B、 C 两点，经过抛物线上一点 P 垂直于轴的直线和轴相交于点 Q，求证：线段｜PQ｜是｜BC｜和｜OQ｜的比例中项（证明略）

在完成了这道题求解之后，可引导学生作逆向演变.

变题 1　设抛物线顶点 O，经过焦点垂直于轴的直线和抛物线交于 B、C 两点，经过抛物线另一点（不在抛物线的轴上）作垂直于轴的直线和轴相交于点 Q，若线段｜PQ｜是｜BC｜和｜OQ｜的比例中项，则 P 点在抛物线上.

经证明逆命题是成立的.

接着又可启发学生，逆命题还有没有别的表述呢？

变题 2 设抛物线顶点 O，经过抛物线轴上 F 作垂直于轴的直线和抛物线交于 B、C 两点，经过抛物线异于 B、C 的点 P 作垂直于轴的直线和轴相交于点 Q，已知线段｜PQ｜是｜BC｜和｜OQ｜的比例中项，求 F 点的坐标.

经计算，F 点是抛物线的焦点.

3.引参求变

解几中通过引进参数，建立直线系或曲线系方程，然后根据条件待定出参数的方程，我们称之为设参求参的方法.有时设参后未必求参，而是通过消参的办法来求解，称之为设参消参的方法.参数的引进，使静止不变的常量数学进入了运动转化的变量数学的新境地.因此我们在教学中，要树立参数意识，引参求变.

例6 求二次函数$y=x^2-2x+1$在[-3，2]上的最大值.（最大值为16）

变题1 求二次函数$y=x^2-2x+a$在[-3，2]上的最大值.（最大值为 15＋a）.

变题2 求二次函数$y=x^2-2ax+1$在[-3，2]上的最大值.（当$a=-\frac{1}{2}$时，最大值为7；当$a>-\frac{1}{2}$时，最大值为$10+6a$；当$a<-\frac{1}{2}$时，最大值为$5-4a$.

变项3 求二次函数$y=ax^2-2x+1$在[-3，2]上的最大值.（当$a>0$时，最大值为$9a+7$；当$a<0$时，最大值为$1-\frac{1}{a}$）

三道变题分别对常数项、一次项、二次项系数的引参求变，将原来静止不动的抛物线变成了动态的抛物线,并将最值问题的求解步步推向高潮.从变题 1 的开口方向定和对称轴定到变题 2 的开口方向定而对称轴不定，再到变题 3 的开口方向和对称轴都不定，这三个层次的推进，达到了不同层次思维训练的目的.

4.变动图形

在中学数学中，常常要进行图象的平移和旋转，或将图象进行翻折变换，讨论变动的图形在新的情景中有关量的关系.这类问题具有宽阔的变化空间，对于培养学生思维能力和空间想象能力有很大的帮助.

例 7 矩形 ABCD 中， AB＝3，BC＝4，沿对角线 AC 将三角形折起，使点B在平面 ADC的射影恰好落在 AD上，求BD的长.（$\sqrt{7}$）

变题 1 矩形 ABCD 中，AB＝3，BC＝4，沿对角线 AC 将三角形折起，使它与平面ADC成直二面角，求BD的长.（$\frac{\sqrt{377}}{5}$）

变题 2 矩形 ABCD 中，AB＝3，BC＝4，沿对角线 AC 将三角形折起，使它与平面ADC成60°的二面角，求BD的长.（$\frac{\sqrt{193}}{5}$）

在变题中始终求 BD 的距离，因为我们发现 BD 的距离与二面角的大小有着直接的变化关系.另外本题中，我们还可以进一步设问在上述各种情况下，异面直线 AB 与 CD 所成的角和距离.通过图形的变动，使学生把点、线、面之

间的关系真正弄懂弄清楚.

5.变更条件

变动图形是变更条件的一种特殊情况，将题设中的关系按照某种规则进行变式，看看它对结论有何影响，可演变出许多新的问题.例6、例7是两个典型的例子，限于篇幅，不再举例.

6.变弱命题

放宽题设中的条件，并作出一般性的推广，是一种抽象思维过程，是对特殊情况的归纳.这种抽象和概括的过程，实际上就是变题过程.

例8 已知：a、b∈R^+，a+b＝1，求证：$(1+\frac{1}{a})$ $(1+\frac{1}{b})\geq 9$.

变题1 已知：a、b、c ∈R^+，a＋b＋c＝1，求证：$(1+\frac{1}{a})$ $(1+\frac{1}{b})$ $(1+\frac{1}{c})\geq 64$.

变题2 已知：a_1、a_2、…、a_n∈R^+，$a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求证：

$(1+\frac{1}{a_1})$ $(1+\frac{1}{a_2})\cdots(1+\frac{1}{a_n})\geq(1+n)^n$ $(n\in N)$.

7.三角变换

利用三角代换可以沟通代数和几何之间的联系，从三角变换的角度来说，任何区间上的实数，都可以用三角进行代换，化作三角问题进行处理.

例9 求$y=\frac{2\sin x-1}{\cos x+1}$的最大值.

（最大值为$\frac{3}{2}$）

设$\frac{2\sin x-1}{\cos x+1}=m$，

变题1 若 $2\sin x-m\cos x-m-1=0$有解，求m的取值范围.（$m\leq\frac{3}{2}$）

设$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$，则原函数可化简为

$y=-\frac{t^2}{2}+2t-\frac{1}{2}$.

变题2 求二次函数 $y=-\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+2\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$的最值.（最大值为$\frac{3}{2}$，无最小值）

表面上来看，两题毫不相干，实质上是同一题的变式，归根结底在于三角变换所起的独特作用.

8.等价变形

等价变形就是恒等变形，用等价的命题改变问题的呈现形式，可演变出许多形相异，质相同的问题.

例10 设z_1、z_2、z_3为互不相等的复数，且$z_1+z_2+z_3=0$，z_1、z_2、z_3对应的点分别为Z_1、Z_2、Z_3，求证：$\triangle Z_1Z_2Z_3$是正三角形.

变题1 设z_1、z_2、z_3为互不相等的复数，且$z_1+z_2\omega+z_3\omega^2=0$，$z_1$、$z_2$、$z_3$所对应的点分别为$Z_1$、$Z_2$、$Z_3$，求证：$\triangle Z_1Z_2Z_3$是正三角形.（ω为 1 的三次虚根）

变题2 设z_1、z_2、z_3为互不相等的复数，且$z_2^1+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1$，$z_1$、$z_2$、$z_3$所对应的点分别为$Z_1$、$Z_2$、$Z_3$，求证：

$\triangle Z_1Z_2Z_3$是正三角形.

变题中题设的条件均为等价变形的结果.

9.类比变通

类比是特殊到特殊的一种变换，类比变通即根据问题在某一方面的相似性作出变题.

如例 9，根据分式的外显形式，似乎与解几中斜率公式相类似，故设 k= $\dfrac{\sin x-\frac{1}{2}}{\cos x+1}$看成（cosx，sinx）与（-1，$\frac{1}{2}$）两点的斜率.

变题：过点（-1，$\frac{1}{2}$）的直线与单位圆相交，求直线斜率的最大值.

10.随机应变

教学中的变题，不是随心所欲，信手拿来就可使用的，要根据教学目标和学生的学习实际来确定，当出现与学生的思路不相一致时，教师要作出随机应变的答复，以体现一切为学生而教的思想.这是教学中的应变艺术，它是变题艺术的一个方面.因此随机应变不仅要求教师有丰富的知识功底,更要有明确的教育指导思想.

变题策略和变题技巧都强调一种变换意识，要求我们在平时的教学中，寓变于不变的知识之中，将学生的思维激活起来，重建新的问题结构.这种变化是有章可循的,其中隐含了万变不离其宗的变换思想和变换方法.如寻找不变量、基本量的思想方法.教学中我们向学生渗透的数学思想方法，就是存在于知识之中，又游离于知识之外的不变因素.

让我们在变幻无穷的数学问题中，寻找到不变的数学真理.