学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中学数学教学

2000年第1期

国家数学课程标准研制工作研讨会纪要*

国家数学课程标准研制工作小组

1999 年 10 月 8 日-10 日，受教育部基础教育司委托，国家数学课程标准研制工作小组在京召开了“ 国家数学课程标准研制工作研讨会 ”。会议特别邀请了国内知名的数学家姜伯驹院士、严士健教授、梁国平研究员、张尧庭教授，以及数学教育家张孝达、张奠宙、王长沛等先生。参加会议的有来自全国 24 个省、直辖市和自治区的教研员，30 余所高师院校的数学教育工作者，现行中小学教材的部分主编，国内较有影响的十几家中小学数学教育杂志的主编，20 余位来信、来稿的代表，以及国家数学课程标准研制工作小组的成员和在京的部分教育工作者，共计 180 多位同志汇聚一堂，结合“ 关于我国数学课程标准研制的初步设想（修改稿） ”和工作组前期的研究成果，就义务教育阶段“ 国家数学课程标准 ”研制工作中可能涉及到的问题进行了广泛而深入的讨论。

大会首先由教育部基础教育司朱慕菊副司长向与会代表介绍了新一轮国家课程改革的基本思路。随后 7 位知名数学家和数学教育家为大会作了精彩的报告。次日会议分四个小组进行了紧张而有序的讨论与交流。大会的最后一天，国家教委考试中心数学学科负责人任子朝同志介绍了高考改革的基本思路，分析了近几年高考的基本走向，特别指出高考改革将随着课程改革的深入而深入，即课程改革到哪一步，考试就会跟进到哪一步。教育部基础教育司李连宁司长向全体与会者传达了六月份召开的第三次全国教育工作会议的基本精神，以及基础教育司落实全教会精神的基本思路。李司长的讲话给与会代表以极大的鼓舞，大家对未来基础教育发展特别是数学课程改革充满了信心。

本次会议是工作组成立以来召开的规模最大的一次研讨会，受到了全国数学教育界的关注，有的一线教师是自筹资金参加会议。

这次会议是一次“ 集体会诊 ”的过程，代表们认真分析了我国数学教育的成绩与不足。普遍认为，解放后的 50 年，我国数学教育取得了巨大的成就，中小学生学习勤奋，基本功扎实，基础知识和基本技能熟练，优秀学生在国际数学奥林匹克竞赛中频频获奖，这些事实都是举世公认的。但是，更应该充分认识到，我们存在的问题也相当突出，主要表现为学生的创新精神、实践能力较差，数学学习方式单一、被动，数学学习的情感体验消极等。造成这些问题的原因是多方面的，有教育观念、教育管理体制、考试制度和社会用人制度等的原因，也有来自课程、教材和教师等方面的问题。面对 21 世纪的挑战，我们必须在适度保持优势的同时，尽快改革现行数学课程中存在的与时代要求不相适应的地方。新一轮课程标准的制订正预示着课程改革的开始，预示着我国数学教育的一次重大变革。

通过三天的讨论，代表们就以下问题达成了共识：

1.必须在对社会、数学和学生重新认识的基础上，建立旨在促进人的健康发展的新数学课程体系，这是一项十分重要而紧迫的任务。数学教育要从以获取知识为首要目标转变为首先关注人的发展，创造一个有利于学生生动活泼、主动发展的教育环境，提供给学生充分发展的时间与空间。义务教育阶段的数学课程应充分体现普及性、基础性和发展性，必须有助于人的情感、

态度、价值观和一般能力的发展，同时使学生获得作为一个公民所必须的基本数学知识和技能，为学生终身可持续发展打下良好的基础。

2.新课程标准的研制应该继承我国数学教育原有的优秀传统，对基础知识基本技能给予充分的关注，但不能被任意拔高要求。新数学课程要下决心删除既非数学本质，又对学生发展不利的内容，如乘数与被乘数的人为区分，过于繁杂的四则计算、算术应用题、恒等变形和几何证明难题，死记硬背的“口诀”等；增加密切联系生活，反映数学发展的新内容，如概率统计、线性规划等。

3.新课程标准要致力于弥补我国数学教育存在的不足。关注学生已有的生活经验和知识背景，关注学生的实践活动和直接经验，关注学生的自主探索和合作交流，关注学生的数学情感和情绪体验，使学生投入到丰富多彩、充满活力的数学学习过程中去，使数学学习具有价值，富于意义。新的课程要有利于学生通过主动参与、积极思考、与人合作交流和创新等过程，获得数学学习的自信心和兴趣，理解数学的基本思想和方法，体会数学的探索过程，体会数学与自然、社会和人类生活的联系，获得情感、能力、知识的全面发展。

4.新课程标准要充分重视新技术的运用。在义务教育阶段引入计算器已经得到了与会代表的广泛共识，大部分的同志认为学生可以在小学中、高年级使用计算器，用来处理繁杂的计算，解决数据较为复杂但对学生富有意义的实际问题，探索有关数字的规律。有的代表还提出将函数计算器和计算机列入到新的课程标准中，并在每学期设立相应的课题。

5.新课程标准在保证学生发展基本要求的基础上，应具有弹性。给学生学习提供充分的时间和空间，给教材编写、学校管理和教师教学留有充分的余地。

6.课程的实施过程非常重要。新课程的推进要像“滚雪球”一样，本着学校和教师自愿的原则设立实验区，并给实验教师一定的倾斜政策，在实验的基础上再逐步推广。目前可以逐步修改现有的教学大纲和教材，为新课程标准的推广奠定基础。同时，必须加大教师培训的力度，不仅包括对在职教师的培训，还包括高等师范院校未来师资的培养，使教师尽快转变观念，提高业务素质，适应并参与数学课程改革。

总之，新课程标准应促进中小学数学内容的现代化，增进数学与学生现实世界的联系，努力改善学生的学习方式，使学生参与到实践、探索、交流的主动学习的过程中，并在这个过程中，整合社会、时代、学科的要求，使学生在整个学习生涯中得到充分的发展。

与此同时，代表们还就一些存在争议的问题发表了一系列建设性的意见：

1.关于平面几何的改革。对于这一数学课程改革的焦点问题，刘兼同志在大会上就“初步设想”中对此的处理作了详细的阐述：首先，初中几何课程的首要目标是使学生更好地理解人类赖以生存的空间，发展学生的空间观念和几何直觉。作为逻辑推理的体系，几何也许是可以代替的，但作为一种直观、形象化的数学模型，几何是不可替代的。因此，新一轮数学课程的改革，几何的内容不但不会减少，反而将大大拓展，特别是有关三维空间的几何问题。第二，培养学生“说理有据”是十分重要的，它在数学的各个领域中都应该得到体现，不能仅仅局限于平面几何中。第三，对于义务教育阶段

的学生，体会证明的必要性比证明本身更为重要，没有感受到证明的必要性，是很难理解证明的意义和方法的。第四，公理化的思想是数学的本质之一，但不是数学的全部。同时，对绝大多数义务教育阶段的学生来说，理解这一思想体系是十分困难的。大量的教学实践表明，平面推理几何是一把“双刃剑”，一方面有大约 20%—30%的初中学生因为学习平面推理几何，从此走上了数学和科学研究之路；另一方面，有不少学生在遭遇平面推理几何之后，丧失了对数学的学习兴趣，乃至失去了对学校教育的信心。第五，理性精神是人类文明的重要体现，理性精神的基石是对客观事实的尊重和批判的精神，它决不等同于逻辑三段论。因此，对于义务教育阶段的学生，几何教学更重要的目标是培养空间观念、几何直觉和合情推理能力，同时通过对基本图形的基本性质的证明，进行有限而必要的论证训练，使学生把主要的精力用于理解证明的必要性，认识证明的前提，体会证明的思想，而不是证明的技巧和证明的速度。

2.代表们一致赞成大力精简远离生活的、技巧性过高的算术应用题，但对小学是否引入方程以帮助解决应用题存在着两种意见：一种意见认为小学生对方程的一套形式化语言很不适应，并且小学解方程的方法与初中的方法不一致，在小学学习解方程事倍功半。同时由于精简了算术应用题，小学引入方程又显示不出其优越性，因此，可以不在小学引入方程，当然，应渗透方程的思想。另一种意见则认为，20 多年来的教学改革，体现出小学数学内容现代化的举措之一就是引入了方程，如果不引入方程，将是一种倒退。能否在这两种意见中取得一种平衡，在引入方程的同时，减少不必要的形式化部分，还有待研究。

3.对一些具体内容的取舍，特别是在“度”的把握上，还需要进一步研究。如小学四则运算的速度和复杂度要求到什么程度：负数在何时引入；分式方程是否保留；计算机等新技术要求到什么程度；新内容（如概率统计等）应增加到什么程度以及课程的弹性如何体现等。

与会代表们一致表示，鉴于数学课程改革涉及的范围很大，应“有所为而有所不为”。对于看准的问题，应马上付诸行动，对于存在争议的问题，要尽快立项，在深入研究的基础上，提出改革方案，并组织试验。

这次会议是相当富有成效的，通过三天的讨论，与会代表们的感触很多。大家共同呼吁：课程的改革要适应社会和数学发展的要求，促进学生的发展；课程改革要纳入到规范化和法制化的轨道，形成良性循环，做到每 5－10 年有一次大的变化和调整；必须出台相应的配套措施，尤其是考试制度必须做出相应的改革，为课程发展服务；必须加大教师培养和培训的力度。

会后，国家数学课程标准研制工作小组的成员将带着本次会议的研究成果，集中一段时间进行标准的起草工作。按教育部的统一要求课程标准的初稿将于今年年底完成，2000 年上半年在全国大范围地征求意见，在此基础上于明年暑期完成修订稿。如果进程顺利，新的课程标准可望在明年下半年提交教育部批准并组织实验。鉴于新、老标准的差别较大，新标准将不采用一步到位的实施方式，而是从各省的课程改革试验区开始，由点到面，滚动发展，逐步推进，计划用 5－10 年的时间，完成新老标准的过渡。在此期间，考试方式也将采用“双轨制”，即新标准用新的考试方式，旧大纲用老的考试方式，以确保新老课程标准的衔接。在这里，我们数学课程标准研制工作小组的全体成员向所有与会代表和所有关心和支持这项事业的同行表示真诚

的感谢，并欢迎大家继续来信、来稿，为我国新课程标准的研制提出宝贵的意见和建议。让我们共同努力，为正在成长中的下一代提供更好的精神食粮！

“过程学习”教法实验简报

安徽省蚌埠市第二中学 肖 健 王学山（邮编：233000）

摘 要 “过程学习”是美国 80 年代提出的一种教学理论，由于这种教学方法有助于学生创造性思维和能力的培养，得到广大教学同行的认可，并广泛付之实施与实验。本文是蚌埠二中通过初中、高中两个阶段，五年对比实验的一份“过程学习”教法实验简报，就此项教法的理论与认识，实验情况与实验结果，作了较详尽的论述。

我们课题组从 1994 年开始在数学教学中进行“过程学习”的教法实验，五年来经过初中、高中两个阶段探索实践与对比实验，取得了不少体会和成果，现将实验状况简报如下：

1 “过程学习”教法实验的理论要点

美国教育家在 80 年代末提出了“过程学习”的理论，其理论要点是：“过程学习，就是要培养学生的创造性思维和各种能力，在教学过程中，不仅重视学习结果，更重视学习的过程，简单地讲，过程学习，就是方法学习”[1]。我们认为，过程学习的理论还应拓宽，“在重视学习的过程中”着重研究学生学习心理的变化——通过外显的认识，借以提高“方法学习”的效率。过程学习的程序、内涵也应拓宽，应将“结论过程的研讨——得出结论”这一学习过程加以延伸，在得出结论之后，还要将结论知识加以运用，在运用中加深对“过程”和“结论”的进一步理解。其模式可以概括为“结论过程的研讨——得出结论——融会贯通——加以运用——加深对过程研讨的理解”。

实验中我们深深感到“过程学习”教法应贯串整个教学过程，教师应在充分尊重学生是学习主体的前提下，竭力提高学生求知欲、求成欲、互助欲，把数学教学作为一种活动来进行，使学生在课堂上有自由活动的机会，处于积极参与、积极思维状态。

2 “过程学习”教法实验情况

在教师与学生水平均较接近的情况下，实验班用“过程学习”教法进行教学，对照班用一般方法进行教学。实验班与对照班的教材是统一的，进度是一致的，测试卷是相同的。

实验班的教学方法——“过程学习”教学法。在教学实施上大致分为六个环节：

设置情境——探索结果——归纳结论——引申拓宽——效果反馈——及时调节。

2.1 设置情境，激发学生参与意识

心理学研究表明：当一个人有强烈的、明确的学习动机时，就能产生坚定的意志，积极主动地投入学习过程完成学习任务。因此“过程”教学，教师首先要根据教材的重点和难点，选择突破口，运用学生的生活经验，从学生熟知的事物入手，设计成生动、切题的问题或活动，把重点放在如何使学生对所学知识产生浓厚的兴趣上。

2.2 重视过程学习，探索结论的形成

布鲁纳认为“探索是数学教学的生命线”。在学生求知欲正浓，探索欲正旺的时候，教师要不失时机地进一步引导学生有目的、有针对性的去探索

解决问题的方法，解决问题的理论根据，使学生思维始终处于高度活跃状态。在探索过程中可能遇到许多障碍，教师应及时给予指导，“架桥铺路”，让学生在探索过程中，逐步掌握学习方法，学会“学习”，这是“过程学习”的重要环节。由于我们重视学生数学学习过程中的学法指导，实验班学生思维灵活、新奇、求异，长期扎实的训练，他们能把孤立、游离状态下的知识、方法进行积累、归纳、串通、灵活地选择思维发散点，并掌握多种发散方式，数学素质提高较快，思维的灵活性、广阔性、深刻性进一步提高。

2.3 引申、拓宽，灵活运用所学知识

教师在备课过程中，应准备一些有梯度的习题，本着由易到难、由浅入深的原则，对某些习题进行适当的变化，引申或拓宽，培养学生以不变应万变的能力（即题目是千变万化的，但基础知识基本技能是不变的）。

同时，这可以通过学生自拟习题，互相出题，以检查学生对结论形成的过程是否明确，彻底改变那种重结论轻过程的教学方法。

2.4 归纳结论，使知识系统化

组织学生对探索的结果进行归纳整理，使之形成一般的结论。教师应在学生归纳的基础上进行必要的补充与完善，揭示所得结论在整个知识体系中的联系和作用，以便灵活地应用它去解决问题，为以后的学习奠定良好的基础。

2.5 反馈学习效果，更多了解学生

过程学习重视教学信息反馈，在教学中，要通过巡视、提问、检测来了解学生的学习效果，对学习中暴露出的问题，要及时组织学生进行互相质疑与解答，把一些隐蔽较深，不易被发现的问题或普遍易犯的错误通过质疑与反馈达到明确认识，引导同学走出误区。要充分利用电化教学手段对整个教学过程作最优化控制。

2.6 调节矫正，保证效果

在每一单元结束时，要及时进行“阶段过关”检测，对教学效果进行检查，以便教师对教法加以适当调节与改进，对已达到教学要求的学生，可进一步设计一些有一定难度的题目，让他们自己练习，对学有困难的学生要及时进行矫正性辅导，帮助他们过关。

以上六个环节，相互联结，互相促进，形成有机整体。教师在教学中应根据学生的具体情况以及教材特点有所侧重，体现学生的主体作用和发挥教师的主导作用，克服传统教学的弊端，发展学生的智力和提高学生的能力。

3“过程学习”教法的实验结果

3.1 提高了学生学习的兴趣

通过“过程学习”的教法实践，明显提高了学生的学习兴趣，问卷调查表明：实验前后，对数学不感兴趣的学生由 22.5%降到 5%，能主动参与学习的学生由 15%提高到 57.5%。实验班与对比班相比较，对数学兴趣浓的各占 97.5%与 86%。

3.2 提高了差生与学生总体的学习成绩

不少原来数学差的学生，究其原因多数是学习方法不当。现在，由于改进了学习方法，学有所得，增强了学好数学的信心，调动了学习积极性和主动性，逐步提高了成绩，克服了两极分化。据统计，1995 年中考数学成绩与 1998 年高考数学成绩，实验班及格率均为 100%；优秀率各为 82.5%与 88%（对比班中考、高考优秀率各为 58.4%与 67%，另一所市重点中学各为 29.2%与

39%）。

3.3 提高了学生的参与意识

不少以往“以听为主，力争听懂”的学生，通过这阶段实验，绝大多数学生有了主动参与的意识，真正发挥了“主体”作用，课堂气氛生动、活泼，成绩有了稳步提高，有的学生甚至成为数学的优等生。

3.4 有利于学生的思维发展和能力培养

随着实验的进行，过程学习使得很多学生都愿意充当小老师的角色，走上讲台，谈自己的见解；在解题中不满足于一种解法，争相寻求最优化的解法。主动阅读课外参考书，在省级竞赛中取得优异的成绩。1995 年省级初中数学竞赛，在实验班 40 名学生中，参赛人数为 20 人，获奖率达 80%（对比班获奖率为 22.5%）。1997 年考入少年班学生有 8 人。高中数学竞赛 6 人获奖。1998 年高考本科达线率为 94.3%，重点院校达线率为 91%。

3.5 实验班与对照班的学习成绩比较

“过程学习”教法通过教师引趣、设问、置疑，学生课堂反映有较明显差异，每节课结束后，学生常仍沉浸在问题的反思中。学习成绩也随之明显出现差异。以实验班与对比班的中考成绩相比，及格率各为 100%与 88%，优秀率则差别更大，各占 88%与 67%。

3.6 实验班与对照班的思维能力测试比较

中学数学着重培养学生创造性思维能力，即用新的思维活动创造新的思维产品，它包含聚合思维和发散思维的有机结合，从培养学生能力来讲，发散思维尤为重要。若数学教学光侧重于模式训练，会使学生思维僵化，学生将来无法面对 21 世纪复杂风云的竞争环境。而“过程学习”强化了学习过程中本质规律的探讨，让学生体验规律产生的思维过程，有利于培养学生利用规律产生探究作发散性思维。实验班与对比班思维发散能力调查表明、实验班也明显高于对比班。“过程学习”充分尊重学生的思维，同时也提高教师的课堂应变能力。

3.7 实验班与对照班视图能力的比较

一次测试表明：要求学生在原图形中构建不同题目，实验班可达 15 个，而对照班仅达 10 个。

3.8 学生解题过程中“从重”心理和潜能的比较

我们曾出了一个平面几何题给学生思考 3 分钟，然后各找班上公认数学“尖子”回答证题思路与正确解法。再让全体学生思考有无其他方法解题。结果实验班换位思考提出新方法的人约占 63%，而对比班仅占 36%。

学生对自己的数学潜能估价及数学成绩在班级中的位置是否满意、对竞争是否有兴趣，我们在实验班和对比班做了问卷调查。调查表明：对数学成绩目前在班中位置不满意的实验班占 52.6%，对比班占 34%。对竞争有兴趣的，实验班占 79%，对比班占 66%。说明实验班的竞争意识更强些。

4“过程学习”教法实验的体会

通过 5 年两个阶段的实验，我们认为“过程学习”教法是可行的、高效的，“过程学习”教法适合青少年心理特征与数学学科特点，具有可操作性与迁移性，实验成绩是显著的。

怎样提高学生主体参与的积极性，怎样通过课堂教学提高学生的数学素质，“过程学习”教法是一种有效手段，通过实验我们还有以下几点突出体会：

4.1 素质教育要求 中学数学课堂教学应适当渗透“建构”思想，而“过程学习”教法对训练学生建构数学模型是有力的、有效的。数学本身就是一个社会建构过程，其流程图是：物质世界形形色色问题，建立数学模型，产生数学知识应用，通过管理挂靠，完成知识到经济的转换。而“过程学习”教法的六个环节基本上能反映上述数学的本质。“过程学习”教法使学生明了建构就是创造，不少学生尝到这种成功的感受，有利于将来的发展。

4.2 中学数学课堂教学应完成三个转变 即由个人组合转为师生教学互动；由教师作为正确答案唯一权威转为以逻辑导引与数学验证为标准；学生由机械听记转为积极参与和思维创新。“过程学习”教法有利于数学课堂教学的上述三项转变。

4.3 数学教师在课堂中应当扮演一个怎样的角色？ 我们认为应是导游。应以清晰的思路、精炼的语言、得当的方法，将学生导入数学王国广阔天地。老师要导得艺术，学生要游得积极，充分体现课堂的“互动精神”。教师应该是“泵”而不是“滤器”。教师要对自己的教学实践不断反思、总结、创新。教师应积极投入教育科研洪流终身不断充电接受继续教育。

数学教育理论仍处在襁褓中，60 年代“新教”、70 年代“回归”、80 年代“能力”、90 年代“大众化数学”，新观点、新口号不断涌现，做为一名数学教师应不断反思、不断实践、开拓思维、改革教学结构，研究学生学习心理，积极投入到数学教育理论研究中去。

参考文献

1 冯克诚，西尔枭主编。实用课堂教学模式与方法改革全书。北京：中央编译出版社，1994。

2 青浦县数学教改实验小组。学会教学。北京：人民教育出版社，1991。

3 吴克明，翟大林，孙自珍编著。中小学教育科研方法。合肥：安徽教育出版社，1993。

4 卢元锴。当代美国中小学教育现状与趋势。

中学教育，1995（1）。

借助函数的性质证明不等式

安徽萧县中学 冯亚光 （邮编：235200）

不等式是中学数学中重要的基础知识，教材中有关不等式的证明重点介绍了比较法、综合法、分析法、数学归纳法及反证法，其实，函数作为中学数学的轴线，它与不等式更有着千丝万缕的联系，因此借助函数的性质证明不等式也是一种重要的思考途径。

1 运用二次函数的性质推证

当不等式含有某字母的二次项时可构造二次函数，利用二次函数的性质推证不等式。

例 1 设 A+B+C=π 且 x、y、z∈R，求证：

$x^2+y^2+z^2 \geq 2xy\cos C+2yz\cos B+2zx\cos A$。

证明 令 $F(x)=x^2+y^2+zy-2xy\cos C-2yz\cos B-2zx\cos A$

$=x^2-2(y\cos C+z\cos A)x+y^2+z^2-2yz\cos B$。

由 A+B+C=π，可知

cosB=-cos（A+C）=-cosAcosC+sinAsinC。

又 $\triangle=4(y\cos C+z\cos A)^2-4(y^2+z^2-2yz\cos B)$

$=4[y^2(\cos^2C-1)+z^2(\cos^2A-1)+2yz\mathrm{cs}A\cos C+2yz\cos B]$

$=-4[y^2\sin^2C+z^2\sin^2A-2yz\sin A\sin C$

$=-4(y\sin C-z\sin A)^2 \leq 0$

∴ F（x）≥0，

即 $x^2+y^2+z^2 \geq 2xy\cos C+2yz\cos B+2zx\cos A$。

注 高中代数（下册）第 15 页习题 7、8、9、10 均可利用二次函数性质推证。

例 2 设 $f(x)=\lg\dfrac{1+2^x+\Lambda+(n-1)^x+n^xa}{n}$

其中 a∈（0，1]，证明 2f（x）＜ f（ 2x），当 x≠0 时成立。

分析 根据不等式构成的特点，可构造二次函数证明。

证明 根据题意，要证 2f（x）＜f（2x），即要证 n≥2 时，有

$[1+2^x+\Lambda+(n-1)^x+n^xa]^2<n(1+2^{2x}+\Lambda+(n-1)^{2x}+n^{2x}a], a\in(0,1]$,

$x\neq 0$。

为此，可构造函数

$f(u)=(u-1)^2+(u-2^x+[u-(n-1)^x]^2+(u-n^xa)^2$

$=n\cdot u^2-2[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa]u+[1^2+2^{2x}+\cdots+($

$n-1)^{2x}+n^{2x}a^2]$。因为 $x\neq 0$，$u-1$，⋯ ，$u-n^xa$ 不能同时为零，所以有

f（u）≥0，又 n≥2，故函数 f（u）的图象为开口向上的抛物线，与 x 轴无交点。

所以△＜0，即

$\triangle=4\ [1+2^{x}+\cdots+\ (n-1)^{\ x}+n^{x}a]\ 2-4n\ [1+2^{2x}+\cdots+\ (n-1)^{\ 2x}$ $+\ n^{2x}a^{2}]<0$，整理，得

$[1+2^{x}+\cdots+\ (n-1)^{\ x}+n^{x}a]^{2}<n[1+2^{2x}+\cdots+\ (n-1)^{\ 2x}+n^{2x}a^{2}]$，

又$a\in(0，1]$，有$a^{2}<a$，$n^{2x}a^{2}\leq n^{2x}a$，所以$[1+2^{x}+\cdots+\ (n-1)^{\ x}+n^{x}a]^{2}<n[1+2^{2x}+\cdots+\ (n-1)^{\ 2x}+n^{2x}a]$。

即 2f（x）<f（2x），a∈（0，1]，x≠0。

2 运用一次函数的性质推证

当不等式含有某字母的一次式时，可考虑利用一次函数的性质推证。

例 3 设|a|<1，|b|<1，|c|<1，求证：

ab+bc+ca+1> 0。

证明 令 f（a）=（b+c）a+bc+1，-1<a<1。

∵|b|<1，|c|<1，

∴f（1）=b+c+bc+1=（b+1）（c+1）>0，

f（-1）=-（b+c）+bc+1=（c-1）（b-1）>0。

∴当|a|<1 时，f(a）>0，

即　　　ab+bc+ca+1> 0。

例 4 设 0≤a、b、c≤2，求证：

$4a+b^{2}+c^{2}+abc\geq 2ab+2bc+2ca$。`

证明 视 a 为自变量，构造一次函数

$f(a)=(bc-2b-2c+4)a+(b^{2}+c^{2}-2bc)$。

由 0≤a≤2，知 f（a）表示一条线段。

又 f（0）=（b-c）2≥0，

$f(2)=b^{2}+c^{2}-4b-4c+8=(b-2)2+(c-2)2\geq 0$。

可见上述线段在横轴及其上方，

∴ f（a）≥0，即

$4a+b^{2}+c^{2}+abc\geq 2ab+2bc+2ca$。

3 运用函数的单调性推证

例 5 已知：a>b>0，求证：

$$\frac{a-b}{a+b}<\frac{a^{2}-b^{2}}{a^{2}+b^{2}}$$

分析 考查函数 $f(x)=\dfrac{a^{x}-b^{x}}{a^{x}+b^{x}}$ （$a>b>0$），

$$f(x)=\frac{a^{x}-b^{x}}{a^{x}+b^{x}}=1-\frac{2b^{x}}{a^{x}+b^{x}}=1-\frac{2}{(a/b)^{x}+1}，$$

为R上的增函数，∴$\dfrac{a-b}{a+b}<\dfrac{a^{2}-b^{2}}{a^{2}+b^{2}}$。

例6 求证：$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\Lambda\dfrac{2n-1}{2n}\leq\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$。

证明 原不等式等价于

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\Lambda\ \frac{2n-1}{2n}\cdot\sqrt{3n+1}\leq 1$,

设 f（n） $=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\Lambda\ \frac{2n-1}{2n}\cdot\sqrt{3n+1}$。

现考查它的单调性

$\because\ (\frac{f(n+1)}{f(n)})^2=\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)^2}\cdot\frac{3n+4}{3n+1}$

$=\frac{12n^3+28n^2+19n+4}{12n^3+28n^2+20n+4}<1$，

∴{f（n）}是递减数列，有f（n）＜ f（1） $=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}=1$，即原不等式成立。

4 运用函数的奇偶性推证

例 7 求证：$\frac{x}{2}>\frac{x}{1-2^x}$ （x≠0）。

分析 此不等式变形后与偶函数相关，便联想到构造偶函数。

证明 设f（x） $=\frac{x}{2}-\frac{x}{1-2^x}=\frac{x(2^x+1)}{2(2^x-1)}$。

则f（-x） $=\frac{-x(2^{-x}+1)}{2(2^{-x}-1)}=\frac{x(2^x+1)}{2(2^x-1)}=f$（x），

f（x）为偶函数。

当x＞0时，2^x＞1，即f（x） $=\frac{x(^x+1)}{2(2^x-1)}$＞0；

又当 x＜0 时，有-x＞0，f（x）=f（-x）＞0；

综上恒有f（x）＞O，从而$\frac{x}{2}>\frac{x}{1-2^x}$。

5 运用函数的图象推证

例8 已知a∈R^+，b∈$[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，求证：

（b-a）^{2} + （$\sqrt{2-b^2}-\frac{9}{a}$）^{2}≥8。

分析 左边可看作点P（b，$\sqrt{2-b^2}$），Q（a，q/a）的距离的平方。又点 P可看作位于半圆 $x^2+y^2=2$（y≥0）上的点，点Q（a，q/a）可看作位于反比例函数 y=9/x 在第一象限内那一支的点，P、Q 间的最短距离应是直线y = x与半圆x^2＋y^2 = 2（y≥0）及函数y = q/x在第一象限内的一支的两交点的连线，此时有P（1，1）及 Q（3， 3），$|PQ|=2\sqrt{2}$，故命题成立。

小结　利用函数的性质推证不等式，在一般情况下，首先应根据所给不等式的特征，构造出一个具有所需性质的函数，再利用函数性质，作出简便证明，只要函数构造恰当，推证过程就会变得特别简捷明快。

浅议等差数列的基本性质

安徽省阜阳一中　袁永才（邮编：236034）

等差数列具有一系列基本性质，掌握这些特性对提高解题速度有着重要的作用。现总结如下，以供参考。

性质 1 有限项等差数列到首尾两项“等距离”的两项的和等于首尾两项的和。即：等差数列$\{a_n\}$共有n项，则 $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$。

性质 2 若$\{a_n\}$是等差数列，a_m、a_n、a_p、a_q分别是该数列的第m、n、p、q项，且$m+n=p+q$，则$a_m+a_n=a_p+a_q$。

利用等差数列的通项公式容易证得以上两个性质。

性质 3（性质 2 中的条件再加强些）在性质 2 的条件下并满足：①公差$d\neq0$；②$mn>pq$，则有$a_ma_n>a_pa_q$。

如：公差不为零的等差数列$\{an\}$的前100项为a_1，a_2，a_3，…，a_{100}，则有$a_1a_{100}<a_2a_{99}<a_3a_{98}<\cdots<a_{49}a_{51}<a_{50}^2$。

证明：设数列$\{a_n\}$首项为a_1，公差$d\neq0$，则由通项公式得：$a_m=a_1+(m-1)d$，$a_n=a_1+(n-1)d$，$a_p=a_1+(p-1)d$，$a_q=a_1+(q-1)d$，则 $a_ma_n=a_1^2+a_1(m+n-2)d+(m-1)(n-1)d^2$，

$a_pa_q=a_1^2+(p+q-2)a_1d+(p-1)(q-1)d^2$。

$\because p+q=m+n$，$mn>pq$，$\therefore a_ma_n-a_pa_q=(mn-pq)d^2>0$，即$a_ma_n>a_pa_q$，得证。

性质4 若$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=pa_n+q$（其中p，q为给定常数），则数列$\{b_n\}$也是等差数列，且公差为原来的p倍。

推广可得：

性质5 若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，$b_n=sa_{n+p}+ta_{n+q}$（s、t为给定常数，p、q为给定的正整数），则数列$\{b_n\}$也是等差数列，且公差为$(s+t)d$。

以上两个性质由等差数列的定义即可获证。

将性质 4 再加以推广可得：

性质6 若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，$b_n=pa_{kn}+q$（其中k为给定的正整数，则数列$\{b_n\}$也为等差数列且公差为 pkd。

证明 由$b_n=pa_{kn}+q$知：$b_{n+1}=pa_{k(n+1)}+q=pa_{kn+k}+q=p(a_{kn}+kd)+q=pa_{kn}+q+kpd=b_n+pkd$，$\therefore\{b_n\}$ 是等差数列且公差为 pkd。

将性质 5 与性质 6 结合起来加以推广可得：

性质7 若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，则$b_n=\sum_{i=1}^{r}s_i a_{k_i n}+p_i$（其中$s_i$为给定的常数，$k_i$，$p_i$为给定的自然数，$i=1$，$2$，…，$r$）仍为等差数列，其公差为（$\sum_{i=1}^{r}s_i k_i$）$d$。

此性质可直接由性质 5、性质 6 推得。

下面再看等差数列的前 n 项和的几条性质：

性质8 若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，S_n是其前n项和，则对一切自然数 n 均有

$S_{n+2}+S_n=2S_{n+1}+d$。

证 设$\{a_n\}$的首项为a_1，则由前n项和公式得：

$$S_{n+2}=(n+2)a_1+\frac{(n+2)(n+1)}{2}d,$$

$$S_{n+1}=(n+1)a_1+\frac{(n+1)n}{2}d,$$

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

$$\therefore S_{n+2}+S_n=2[(n+1)a_1+\frac{n(n+1)}{2}d]+d=2S_{n+1}+d。$$

将此条性质加以推广则有：

性质9 若$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，S_k，S_{2k}，…，S_{nk}，分别为其前 k 项，前 2k 项，…，前 nk 项的和（k 为给定的正整数），则对于一切自然数 n 均有

$S_{(n+2)k}+S_{nk}=2S_{(n+1)k}+k^2d$。

证 设$\{a_n\}$的首项为a_1，由其前n项和公式得：

$$S_{(n+2)k}=(n+2)ka_1+\frac{(n+2)k[(n+2)k-1]}{2}d,$$

$$S_{(n+1)_k}=(n+1)ka_1+\frac{(n+1)k[(n+1)k-1]}{2}d,$$

$$S_{nk}=nka_1+\frac{nk(nk-1)}{2}d,$$

$$\therefore S_{(n+2)k}+S_{nk}$$

$$=2(n+1)ka_1+2\cdot\frac{(n+1)k[(n+1)k-1]}{2}d+k^2d,$$

$$\therefore S_{(n+2)k}+S_{nk}=2S_{(n+1)k}+k^2d$$

性质10 若$\{a_n\}$是等差数列，S_{nk}（$n=1$，2，…）表示其前nk项的和（k 为给定的正整数），则数列

$\{S_{(n+1)k}-S_{nk}\}$**为等差数列。**

证 设数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，记

$b_n=S_{(n+1)k}-S_{nk}$，**则**$b_{n+1}=S_{(n+2)k}-S_{(n+1)k}$。

∴ $b_{n+1}-b_n=S_{(n+2)k}-S_{(n+1)k}-S_{(n+1)k}+S_{nk}=S_{(n+2)k}+S_{nk}-2S_{(n+1)k}$，

∴ 由性质 9 知 $b_{n+1}-b_n=k^2d$ 为常数。根据等差数列定义知数列$\{S_{(n+1)k}-S_{nk}\}$是公差为 kd^2 的等差数列。

除以上介绍性质外，等差数列还有以下优美的组合性质：

性质 若数列$\{a_n\}(n=0，1，\cdots)$为等差数列，则：

$C_n^0 a - C_n^1 a_1 + C_n^2 a_2 - \Lambda + (-1)^n C_n^n a_n = 0$对于一切$n \geq 3$的自然数均成立。

证（用数学归纳法）首先观察一下简单情况：若a_0，a_1，a_2成等差数列，则易知$a_0 - 2a_1 + a_2 = 0$；若a_0，a_1，a_2，a_3成等差数列，则易知 $a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3 = 0$；若 a_0，a_1，a_2，a_3，a_4成等差数列，则易知$a_0 - 4a_1 + 6a_2 - 4a_3 + a_4 = 0$成立。故当$n = 3$时，命题显然成立，且当$a_1$、$a_2$、$a_3$、$a_4$成等差数列时，有 $a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4 = 0$成立。

设 n=k 时猜想成立，则有：

$C_k^0 a_0 - C_k^1 a_1 + C_k^2 a_2 - \Lambda + (-1)^k C_k^k a_k = 0$①

$C_k^0 a_1 - C_k^1 a_2 + C_k^2 a_3 - \Lambda + (-1)^k C_k^k a_{k+1} = 0$②

成立，①-②得：

$C_k^0 a_0 - (C_k^1 + C_k^0) a_1 + (C_k^2 + C_k^1) a_2 - \Lambda + (-1)^{k-1}(C_k^k + C_k^{k-1}) a_k - (-1)^k C_k^k a_{k+1} = 0$

由组合式得$C_k^i + C_k^{i-1} = C_{k+1}^i$（$i = 1，\cdots k$），故得：

$C_{k+1}^0 a0 - C_{k+1}^1 a_1 + C_{k+1}^2 a_2 - \Lambda + (-1)^{k+1} C_{k+1}^{k+1} \cdot a_{k+1} = 0$，

即当 n=k+1 时猜想成立，综上所述当 n 为大于或等于 3 的自然数时命题均成立。

以上只是列举了等差数列一系列最基本的性质，当然远不止这些，希望读者再将这些问题加以推广，从而达到更深层地掌握等差数列，并能运用它来研究相关的其他数列的目的。

变换思想在代数中的应用

安徽教育学院 金永容 （邮编：230061）

中学几何课程改革的一种主要倾向是加强几何变换的观点，变换思想和变换法在几何证题和解题中的应用得到重视和加强，大家知道变换群在几何中扮演着重要角色，其实变换的思想和技巧在代数中的应用也很广泛，它解题的基本模式如下图：

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{A系统的问题}} \arrow[r, dashed, "\text{A系统中的运算}"] \arrow[d, "\text{变换 } f"] & \boxed{\text{A系统的结论}} \\
\boxed{\text{B系统的问题}} \arrow[r, "\text{B系统中的运算}"] & \boxed{\text{B系统的结论}} \arrow[u, "\text{逆变换 } f^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

现就其中较具代表性的部分作介绍：

例 1 证明任何 6 个人的聚会，其中总会有 3 个人互相认识或有 3 个人都不认识。

分析 在平面上取定 6 个点 A、B、C、D、E、F（任三点不共线）分别代表这6个人，将6个点两两连线，共得$C_6^2=15$条线。约定：两点连线涂以红色表示相对应代表的两人认识，两点连线涂以蓝色表示相对应代表的两人不认识。于是原问题等价于单色三角形问题：用红蓝两色涂边法去连接平面上任三点不共线的 6 个点，必然从中找到或者三边全红、或者三边全蓝的三角形。

证明 从顶点 A 出发，由 A 发出的 5 条线中必有三条同色，不妨设 AB、AC、AD 同红，再看 B、C、D 三点两两连线的三边中，若有一边涂红，比如 BC 涂红，则得三边全红的△ABC，否则△BCD 是三边全蓝的三角形。

例2 求不定方程$x_1+x_2+\cdots+x_m=n$（n、m∈N）的非负整数解的个数。

分析 设计模型；n 个不可辨别的球放入 m 个不同的盒子中。球的每一种放法对应着方程的一组解；反之，方程的每一组非负整数解对应着球在盒中的一种放法。

解 因为n个不可辨别的球放入m个不同的盒子中放法的总数为C_{n+m-1}^{n}，所以方程的非负整数解的个数为C_{n+m-1}^{n}。

例3 任给7个实数，证明其中必有两个数x、y满足$0\leq\frac{x-y}{1+xy}\leq\frac{\sqrt{3}}{3}$。

分析 建立区间（$-\infty$，$+\infty$）到区间（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$）的一一映射f：x→$\tan\alpha$，任给的7个实数一一对应于（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$）上的7个角弧度。问题转化为：必有两个角弧度a_1，$a_2\in$（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$），使$0\leq$

$$\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1+\tan\alpha_2}\leq\frac{\sqrt{3}}{3}。$$

证明 将区间（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$）分成6等分：（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$)，[$-\frac{\pi}{3}$，$-\frac{\pi}{6}$)，[$-\frac{\pi}{6}$，0)，[0，$-\frac{\pi}{6}$)，[$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$]，[$\frac{\pi}{3}$，$\frac{\pi}{2}$)，由抽屉原则必有两个角弧度（不妨设$a_1 \geq a_2$）落在同一小区间内，从而 $0 \leq a_1 - a_2 \leq \frac{\pi}{6}$，由正切函数的单调性：

$0 \leq \tan(a_1 - a_2) \leq \tan\frac{\pi}{6}$，

所以 $0 \leq \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$，

记$\tan a_1$、$\tan a_2$对应的实数分别为x、y，有$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$。

定义 设$\{a_n\}$为一给定的无穷数列，则形式幂级数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$称为数列$\{a_n\}$的母函数。

显然数列$\{a_n\}$与其母函数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$是一一对应的，于是对数列的研究可转化为对其相应的母函数的研究，一个数列的母函数一旦确定，则此数列的通项公式也随之被确定。

例4 求斐波那契数列$\{a_n\}$的通项。已知$a_0 = 1$，$a_1 = 1$，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$（$n \geq 2$）。

解 设数列$\{a_n\}$的母函数为：

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$，

$-xf(x) = -a_0x - a_1x^2 - \cdots - a_{n-1}x^n - \cdots$，

$-x^2f(x) = -a_0x^2 - a_1x^3 - \cdots - a_{n-2}x^n - \cdots$，

将以上三等式两边相加得：

$(1-x-x^2)f(x) = a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + \cdots + (a_n - a_{n-1} - a_{n-2})x^n + \cdots$，由已知条件得$(1-x-x^2)f(x) = 1$，

所以$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$

$$= \frac{-1}{\{x + [(1+\sqrt{5}/2)]\}\{x + [(1-\sqrt{5})/2]\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\frac{1}{x+[(1+\sqrt{5})/2]}-\frac{1}{x+[(1+\sqrt{5})/2]}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x)^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}x^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}x^n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]x^n,$$

从而通项$a=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$。

命题 没有 n 个不尽相异的元素：p_1 个 a_1，p_2 个 a_2，…，p_m 个 a_m，这里 $p_1+p_2+\cdots+p_m=n$，记这 n 个不尽相异元素的 r 元可重复组合的个数为 Fr，则函数

f（x）$=$（$1+x^2+\cdots+x^{p_1}$）（$1+x^2+\cdots+x^{p_2}$）$\cdots\cdot$（$1+x^2+\cdots+x^{p_m}$） ①

展开式中x^r项的系数就是Fr。

说明 f（x）的展开式中每一项x^r一定是这样构成：$x^{l_1}\cdot x^{l_2}\cdot\cdots\cdot x^{l_m}=x^r$，其中$l_1+l_2+\cdots+l_m=r$，$0\le l_i\le p_i$，$1\le i\le m$，这里$x^{l_1}$，$x^{l_2}$，…，$x^{l_m}$分别取自①式右端的第1、2、…、m个因式。令①中m个因式中的x依次对应a_1，a_2…，a_m。从第i个因式中取xli表示为“字母a_i被取了l_i次”。所以f（x）的展开式中每个x^r就对应一种a_1，a_2，…a_m的r元可重复取法，而每种r元可重复组合又对应于展开式中一个x^r，可见所求组合的种数就是f（x）的展开式中经合并同类项后的x^r的系数。

例 5 12 张卡片上分别写有 a，a，a，b，b，b，b，c，c，c，c，c，从中任取 5 张有多少种不同的取法？

分析 这里$p_1=3$，$p_2=4$，$p_3=5$，求F_5。

解 因为f（x）$=$（$1+x+x^2+x^3$）（$1+x+x^2+x^3+x^4$）（$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$）

$=$（$1+2x+3x^2+4x^3+4x^4+3x^5+2x^6+x^7$）（$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$）

$=1+3x+\cdots+14x^4+17x^5+\cdots+x^{12}$，

所以$F_5=17$，从中任取5张有17种不同的取法。

变换思想在中学数学中应用广泛，它可以是同一数学分支内部的变换，也可以是不同数学分支之间的变换，还可以是不同学科之间的变换，在学习中应注意去领会，并学着去应用。

教学论坛

促进学生数学思想方法形成初探

安徽省岳西中学 余文彪（邮编：246600）

数学思想是指现实世界的空间形式和数量关系反映到人的意识之中，经过思维活动而产生的结果，它是对数学事实与数学理论的本质认识，而数学方法是以数学为工具进行科学研究的方法。数学思想与数学方法是数学知识中奠基性成分，是学生获得数学能力必不可少的。数学思想方法的训练，是把知识型教学转化为能力型教学的关键，是实施素质教育的重要组成部分。

1 促进学生数学思想方法形成的意义

1.1 数学思想方法的形成是教师构建学生数学认知结构的重要一环

现代教育心理学认为，学生的数学学习不是一种被动“复制”活动，而是学习者认知结构主动建立过程，数学思想方法是数学认知结构中的精髓，因而数学教学过程，不仅仅是知识传授过程，更应是数学思想方法形成过程。在教学中注重分析数学思想方法发展的脉络，促进数学思想方法的形成，便成为构建学生数学认知结构的重要一环。任何数学问题的解决无不以数学思想为指导，以数学方法为手段，因而G.波利亚一贯主张要教会学生思考。对学生来说，具体的数学知识，可能会随时间的推移而遗忘，但数学的精神，思想、方法却可能长存，使其受用终生，数学思想方法的教学，正是这样一项有意义的工作。

1.2 促进数学思想方法的形成是数学教学贯彻素质教育的重要组成部分

从“应试教育”向“素质教育”转轨，素质教育要求数学教育过程应注重数学素质的培养。数学意识是数学素质的重要组成部分，数学意识包括两个方面：一是数学的概念、定理，数学思想方法等方面的知识，二是具有用数学的观点、心态和方法去处理现实世界中问题的意识。一个人的数学意识决定于他对数学思想方法掌握与领悟的程度，因此，要实施素质教育应大力促进学生数学思想方法的形成。

1.3 促进学生数学思想方法的形成是培养学生数学能力的关键

人的数学能力主要由三个方面构成：一是高度的数学抽象概括能力，二是数学符号的运算和推理能力，三是灵活的思维转换能力。高度的数学抽象与概括，就是对数学事实本质的认识，是数学思想的特征，运用数学符号的运算和推理也就是数学方法的运用。要发展学生思维，培养数学能力，就必须使学生了解数学知识的形成过程，明确其产生和发展的外部和内部的驱动力。数学事实的发现，数学理论的推导，数学概念的确立及数学知识的应用乃是数学的本质，它会对学生产生深刻而持久的影响，因此数学思想方法的教学是把知识型教学转化为能力型教学的关键，是培养创造型人才的良好手段。

2 数学教学应改进教法，促进学生数学思想方法的形成

2.1 数学思想方法教学的现状

我国的数学教学存在着重结论，轻过程；重形式，轻内容；重招术，轻思想；重解题，轻应用等弊端。在教学中，过于强调对定义、定理、法则、

公式的灌输与记忆，不注意这些概念与知识的发生、发展、应用过程的解释，不善于将这一过程中丰富的思维因素开掘出来，不善于将知识中蕴含的丰富的思想方法化隐为显地概括。长此下去，严重阻碍了学生创造力的发展与培养。因此，我们要改革教法，要以数学方法论为指导，进行课堂设计和课堂教学，既教给学生以知识，又教会学生思考，既教演绎证明，又教归纳和直觉，不断促进数学思想方法的形成。

2.2 中学数学中的基本的数学思想方法

中学阶段的基本数学方法按思维水平程度可分为三个层次：

(1) 数学基本方法。如消元法、待定系数法、换元法、配方法、割补法、公式法、坐标法、归纳法、反证法等，它们与知识并行同生，是数学中的通法。

(2) 数学思想方法。如代换、类比、分析、综合、抽象、概括等这些方法。不如基本方法可操作性强，有的难于给出具体步骤，只有加深领悟才能运用得手，是较高层次的。

(3) 数学思想：包括函数与方程的思想，数形结合思想，分类讨论思想，转化化归思想，符号化思想，极限思想等是全局性的更高层次的思想与观点，极具指导作用。

2.3 促进学生数学思想方法形成的途径

(1) 多次孕育，适时渗透数学思想方法

学生数学思想方法的形成是一个循序渐进过程，是一个多次孕育适时渗透的过程。渗透就是把某些抽象的数学思想逐渐融进具体的、实在的数学知识中，使学生对这些思想有一些初步的感知，但还没有从理性上开始认识它们。中学教材内容是由知识与数学思想方法组成的有机整体，其体系是沿知识的纵向展开的，而蕴含在知识中的思想方法是纵横交错，前后联系的，教学中不能急功近利，略去数学知识发生过程，而应把握好进行数学思想方法渗透的契机，如概念的形成过程，问题的被发现的过程，思路的探求过程，均为渗透数学思想方法的大好时机。教者应有“润物细无声”的境界，在知识生成与发展中让数学思想方法着地、生根、发芽。例如由小学的长方形、平行四边形面积计算到初中的三角形面积计算，再到高中的长方体、三棱锥体积的计算均应孕育与渗透等积变换思想和类比思想。

(2) 引进数学思想方法

渗透数学思想方法只是让学生对数学思想方法有初步的理解，而引进数学思想方法，就要求学生知道它的要素与特征和有哪些用途。前面提及的函数与方程的思想、数形结合的思想、化归思想等均需着重引进介绍。由于同一内容可表现为不同的数学思想方法，而同一数学思想方法又常常分布在许多不同的知识点里，因此，在单元小结或复习时，就应该整理出数学方法系统，例如在两角和与差的三角函数一章结束时，可用两角和的余弦公式，通过化归的方法，把十个公式推导出来。另外，根据数学思想方法的形成过程中的实际情况，适时开设专题讲座，讲清知识的来龙去脉，内涵外延，作用功能等，这也是把数学思想方法化隐为显的有效途径。

(3) 通过问题解决，力求突出思想方法的应用

有些基本思想方法，如数形结合、化归、函数与方程等是高层次的指导性的数学思想方法，它贯穿于整个中学阶段，对这些方法应经常地予以强调，并通过“问题解决”使学生达到灵活运用的层次。层次一是提供含有思想活

动的“问题”（素材），调动学生积极参与，在会解答的情况下，要求能揭示问题中蕴含的思想方法和使用价值，层次二是同一问题应从不同的角度去审视，根据不同的特征，可以用不同的思想方法解决，以强化方法使用背景和手段，达到灵活选择方法，活化、优化方法的目标。

数学问题的解决，实质上是问题不断转化和数学思想反复应用的过程，数学的思想方法存在于问题解决之中，数学问题的步步转化，无不遵循数学思想方法指示的方向。在教学中，我们还应充分重视开放性问题在培养数学思想方法中的作用，例如在讲了三角函数和差化积之后给出问题：“在半径为 R 圆心角为 60°的扇形铁皮中，截取一个面积最大的矩形”。这一问题的解决需要分类的思想，即考虑矩形有几个顶点在圆弧上；需要函数的思想，把矩形的面积表示为某个角的函数；需要化归思想，即利用三角函数的变形将三角函数式转化为一个角的三角函数的形式，以有利求函数最值等等。整个问题的解决过程都体现了利用数学工具解决实际问题的数学模型化方法。教师要不断钻研，提炼出反映数学思想方法的问题，通过问题的解决，展现数学思想方法的应用过程，使学生领会数学的本质，领略数学的内在美。由于数学思想方法有浅显与深奥、具体与抽象之分，因此，要在教学中有计划、有系统、有序、有机地促进学生数学思想方法的形成，以完成好这项使学生终生受益的教育工作。

（收稿日期 1999-05-10）

谈 1999 年高考数学应用题给与的启示

黑龙江大庆第十三中学　贾玉文　（邮编：163113）

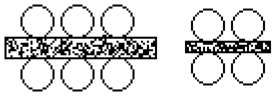
摘要　去年的高考应用题许多考生和教师都认为难，难在何处？它对我们的教学有何启示？文章就此进行了较深入的剖析。

去年高考应用题（理科 22 题，文 23 题），很多考生认为难做，很多教师也认为此题难，但是，与作为高考的压轴题相比难度又不够，且二者难在不同之处，压轴题难在应用知识点多及知识点的有机结合，需要的能力是多方面的，思想方法也是多样的，只不过这些东西考试前都曾使用过，而应用题难在对它的不熟悉上，许多学生不明白题目的意思，也不会正确地处理应用问题，由此影响了学生的解答。为什么产生这一现象呢？

我想谈一下对此情况的看法，探讨引起难做的原因，以便今后更好地改进数学教学工作。为了说明问题，我首先从这道题的解法谈起。

应用题的内容如下：

右图为一台冷轧机的示意图，冷轧机由若干对轧辊组成，带钢从一端输入，经过各对轧辊逐步减薄后输出。



（Ⅰ）输入带钢的厚度为α，输出带钢的厚度为β，若每对轧辊的减薄率不超过r_0，问冷轧机至少需要安装多少对轧辊？

$$\left(\text{一对轧辊减薄率}=\frac{\text{“输入该对的带钢厚度”减去从“该对输出的带钢厚度”}}{\text{输入该对的带钢厚度}}\right)$$

（Ⅱ）已知一台冷轧机共有 4 对减薄率为 20%的轧辊，所有轧辊周长均为 1600㎜，若第 k 对轧辊有缺陷，每滚动一周在带钢上压出一个疵点，在冷轧机输出的带钢上，疵点的间距为L_k。为了便于检修，请计算L_1、L_2、L_3并填入下表（轧钢过程中，带钢的宽度不变，且不考虑损耗）。

轧辊序号 k	1	2	3	4
疵点间距为 L_k（单位：㎜）				1600

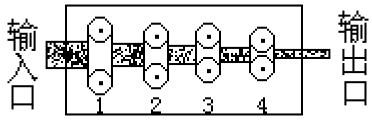
对于第一问，经过认真的阅读理解后，分析出要由所给的公式作为突破口，构建第一个数学模型，设一对轧辊减薄率为 r，输入该对的带钢厚度为 a，从该对输出的带钢厚度为 b，把所给的提示公式数学公式化，即为 r=$=\frac{a-b}{a}$，对公式变形为$b=(1-r)a$，即这是一个递减率的问题，分析“每

对轧辊的减薄率不超过r_0”及题问，可知r是变化的，每对轧辊的减薄率是不同的，经过n对轧辊的减薄，冷轧机输出带钢厚$b=(1-r_1)(1-r_2)\cdots\cdots(1-r_n)a$，这个式子是建立的第二个数学模型。再由“每对轧辊的减薄率不超过r_0”可知$0<r_i\le r_0<1$，$i=1$，…，n。由此建立第三个数学模型：

$\beta\ge\alpha(1-r_0)^n$。通过对数就可以解答第一问。

从这一问的解决过程来看，需要建立若干个数学模型，而模型应由简单到复杂，逐步修改完善，最终达到符合题意。分析上面解决问题的过程，可得出下面几个结论（1）数学建模的过程是从等式到不等式，是由简单到复杂的过程，符合人们的认知规律；（2）先对文字叙述的语言进行数学式子化，是用数学解决问题的前提；（3）在理解数学式子的含义基础上，对式子进行变化，最终解决问题，这是问题解决最常用的方法；（4）体现“问题解决”的一般过程：“理解问题；设计计划；执行计划；回顾全部过程”。

再来看第二问，应由第一问所提供的信息入手，对轧辊和冷轧机的输入输出进行仔细的分析，用示意图表示如下：



从图中可以看出：各对轧辊的输入与输出，冷轧机的输入与输出，第 k 对有缺陷的轧辊压钢带后出现疵点这三者进行分析，发现只需注意连续的两个疵点就可以了，结合所给的列表，不难发现冷轧机输出的疵点间距离L_k和轧辊输出的疵点间距离的关系，若轧辊 4 有缺陷，因其它 3 个轧辊没有压带钢的两个疵点，冷轧机输出的疵点间距离L_4就是轧辊4的周长；若轧辊3有缺陷，只有轧辊 4 压着带钢的两个疵点，但其它 2 个轧辊没有压带钢的两个疵点，冷轧机输出疵点的间距离L_3，就是轧辊3的周长的那段带钢经轧辊 4 减薄压延后的长；若轧辊 2 有缺陷，轧辊 3、4 压着带钢的两个疵后，但轧辊 1 没有压带钢的两个疵点，冷轧机输出的疵点间距离L_2，就是轧辊2的周长的那段带钢经轧辊3、4减薄压延后的长；若轧辊1有缺陷，轧辊2、3、4压着带钢的两个疵点，轧辊的疵点间距离L_1，就是轧

辊 1 的周长的那段带钢经轧辊 2，3，4 减薄压延后的长。这时修改问题的提出方法，使之更易建立数学模型，把有疵点的带钢看成一个长方体，疵点正好在长方体的宽边上，分别由轧辊 4、或 4、3 或 4、3、2 压过，冷轧机输出的长方体的长就分别是L_3、L_2、L_1，又由提示可知：在这个变化的过程中从轧辊和冷轧机的输入输出中体积始终保持不变，等量关系就在此，有了这个数学模型，上表中三个空就能顺利添上。（具体书写略）

在此，充分应用了问题解决的一些方法和技巧。（1）利用图和表分析，能画出图表，看懂（理解）它们；（2）数学建模要抓住不变量和变量及它们的关系；（3）把实际问题理想化也是数学分析的一种技巧。（4）把数学中的几何和代数结合起来去解决实际问题。

综合上面的解法，我们应该看到一个数学问题的解决过程：

1、要对问题进行仔细的阅读，收集问题所涉及的所有信息，理解问题中

与数学有关的内容，如问题中所提供的数字，描述数学关系的文字。

2、在理解问题基础上，要对问题进行数学抽象，有针对性地筛选信息，设计出一个计划，建立起数学模型；

3、执行计划，根据数学的理论，对问题作出一个明确、完整、符合数学逻辑的结论，否则就必须重复进行第一、第二两步，直到解决数学模型。

4、得出问题的一个解答后，问题解决并未完成，还要检查问题、模型及二者的关系，看是否符合要求，以期得到最后答案。

看到问题解决的步骤和高考题的解答，我们应该感到这次高考的数学试题并不象说的那样“难”，而到底“难”在何处？我认为是学生不会解实际应用问题，是学习内容和方法存在着不足，我们的学生只会解见过面的题型，生疏一些就不能应付，这正好反映了现行教学中存在的弊端，尽管我们提倡“素质教育”已经很长时间了，仍有许多人对此不甚理解，上课照样是“满堂灌”，搞“题海战术”，背离“素质教育”的要求。今年的高考情况再次提醒我们要注意数学教学中存在的问题，题应怎样做？教师的课该怎样上？学生的学又应如何进行？我感到在今天还是要从提高教师及全社会对“素质教育”的认识抓起，应大力提倡“素质教育”，有识之士应进一步完善素质教育理论，使之明确易懂，实践中便于操作，为教师和学生提供借鉴。

综观这次高考数学情况，对于教师应吸取以下教训：

1、全面推行“素质教育”，把能力培养作为教学的重点，特别是创造和创新能力，重视学生的理论联系实际的能力，使学生看到各类知识的作用和价值，提高学生的学习兴趣，使学生能积极有效地学习。

2、重视“过程”的教学。教会学生如何去认识和理解，怎样去发现和创新，又该怎样去解决和回答。现代的信息理论为我们在“认识”的操作上提供了很好的参考，那就是搜集信息按一定标准进行判断和选择，这是学习的第一过程；“理解”是在认识的基础上，根据已有的知识对信息进行加工、再认识，这是学习的第二过程；回顾历史上的发明发现，无不是在充分认识和理解的基础上进行的，对学生的“创造和创新”教育是学习最重要的过程；还要重视学习的应用，解决问题，回答问题是我们学习目标，这仍是一个过程。所以让学生体会学习“过程”，才能实现我们的教育目的。

3、加强学生对“问题解决”的认识。现在应把“问题解决”当作一项基本技能来看待，这不仅是具有选拔性的高考考试的要求，也是世界教育的潮流，更重要的是实际生活的需要。在数学教学中，应注意“问题解决”技巧的教学。比如，对图表的应用，教会学生“画图”，“列表”，理解“图表”，会用“图表”进行分析和解题。因为“图表”是实际问题的表现形式之一，是数学抽象的结果，有时通过图表就能解决问题。

4、教师要注意提高自身的素质，应有超前意识和精神，培养自己的各种能力，不断改进教学方法，才能做好教书育人的工作。从这次高考的情况来看，学生应该学会学习。不能只顾被动地做题，而应主动学习，大胆探索，提高对学习的认识。

对于今年的高考题，我个人认为是一套好题，因为它不但发挥出选拔优秀人才的作用，也对今后的教学工作有指导意义，确实反映出现行数学教育中教和学的问题，为此，我们应不断地改进教学工作，扎实地推行“素质教育”，培养出符合实际要求的跨世纪的人才。

注重培养学生的数学意识

湖北枝城市姚店中学　胡志红　（邮编：443300）

数学意识，又叫数学观念，简单地说，就是对数学的作用和运用的看法，指对“数学有用”的认识和“用数学”的程度，它是数学素质的一个重要组成部分，也是应试教育十分轻视，转向素质教育时又不易重视的方面，但又是必须重视的一个方面，主要原因有两个：①学生数学意识的强弱，直接影响了学生学习数学的动机和兴趣，从而影响到学生的数学双基、数学能力和数学品质；②数学已发展成为“数学技术”，“未来高科技的核心是数学技术”，而且随着我国和世界经济的发展，计算机的普及，数学与各行各业已息息相关，数学意识的强弱将直接影响和决定人们处理纷杂的经济事务、日常生活、科研科技的质量和效率。

那么我们如何重视和培养呢？我以为应从以下三个方面着手。

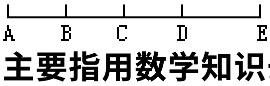
第一，作为数学教师，首先要热爱数学，增强自己的数学观念，真正透彻地理解数学作用和强大生命力。我们身边许多同学、同事，可能早已遗忘，但他们生活中的观察、想象、推理、直觉、比较，以及假设、图纸、计算等方式是否在用数学的思维和思想呢？无疑是在用，只不过许多时候他们在无意识地运用。早在一千多年前，华达哥拉斯就说过“万物皆数”，这固有其片面性，但确从另一侧面反映了世界万事万物与数学密不可分的关系。另一方面，要学会用数学的眼光去观察，用数学的知识去说明，用数学的方式去分析，用数学的思想去处理我们身边的生活事务，给学生做出榜样，起到身先士卒，或者说是潜移默化的作用。

第二，注重培养学生“数学有用”的意识

义务教材为我们提供了许多实例，如赵州桥的计算、温度计上的刻度、堤坝、燕尾槽的计算、塔高的测量、运送货物等等，都是我们身边的实际问题，充分发挥这些实例的作用，不仅是巩固复习知识方面的作用，而且包含数学意识方面的作用，这些对加强学生“数学有用”方面的认识很有好处的，象用“问题解决”或“实例引入”的方式就能很好地发挥他们数学意识方面的作用。其次，在课堂教学或是习题、考试中增加一些生活实例。比如学了增长率知识后，补充存款利息的计算、开水蒸发、国民产值翻两番的问题，学了圆的有关知识后，补充梳妆台圆镜、木制锅盖摔碎后的复制、铁丝制铁环等方面的问题，这些必然引起学生极大的兴趣，做过之后，学生感到数学确实可解决许多实际问题，“数学有用”的意识自然而生。

第三，注重培养学生“用数学”的意识，它应包含：用数学的眼光去观察，用数学的知识去说明，用数学的方式去分析，用数学的思想去处理，这四个方面的意识。

用数学的眼光去观察，包括变换观察、有序观察等，如数学中的数“线段条数”。图上有多少线段呢？先数单个的 AB、BC、CD、DE 共四条，再数中间有一个点的 AC、…，然后相加，生活中的数客人数目、一栋楼房的门窗数目；数学中的对应与我们的认字时的倒正都有本质的数学联系，只是我们平时在无意识地运用罢了。



用数学的知识去说明，主要指用数学知识去说明解释生活中的一些现

象，如屋顶人字架做成三角形、汽车保护拦成平行四边形、车轮成圆形等等，这固有其物理属性等原因，另一方面，也有数学原因，诸如用到三角形的稳定性、平行四边形的不稳定性、圆的旋转不变性，还有打台球的角度用到对称、聚光镜用到焦点等等。

用数学的方式去分析，这里数学的方式主要指推理的方式、建模的方式、假设反证的方式、计算的方式、增减条件的方式、比较想象的方式、直觉的方式等。例如：三峡大坝 175 米，到底多高呢？是我们旗杆的十七倍，这里既有比较，又有想象。又如，侦破案件的推理与数学中的证明，曹冲称象的方法改进与等量代换（人替换石头，替换大象），灯在水下能燃吗？与数学中的条件等式；建房图纸设计与建模；矛盾的故事与反证假设等等，也都有本质的联系。

用数学的思想主要指整体考虑的思想、方程的思想、函数的思想、实事求是的思想、优化的思想、灵活多变的思想。比如班干部处理班务工作的全局考虑与数学中的整体观念，处理学生纠纷时的调查与过程中的理论依据，体现了一个实事求是的观念，用清水清衣服方式选择与数学的简便方法，体现了优化的思想等。

培养这些“用”的意识，就要求我们一是运用正确科学的方法去处理数学知识，把这些意识本身用到传授数学知识上去，二是做好数学知识的迁移工作，不为教知识而教，为用知识和用获得知识的方式方法、为解决客观实际问题而教，三是加强数学与客观世界日常生活的联系，使之“数学化”。把身边的实际问题引进课堂，引入到数学之中去。

总之，在转向素质教育的今天，数学教师有责任，也有义务，全面培养学生的数学素质，而且应当注重培养易被忽视的学生的数学意识。

（收稿日期 1998-09-14）

f^{-1}[g（x）]与f[g（x）]的反函数

广东中山市中山纪念中学　沈伟忠　（邮编：528454）

已知$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$，函数$y=g(x)$的图象与$y=f^{-1}(x+1)$的图象关于直线 y=x 对称，则 g（3）等于（　　）

（A）3　　（B）7/2　　（C）9/2　　（D）11/3。

甲解：∵$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$，且由已知得$y=g(x)$与$y=f^{-1}(x+1)$互为反函数，

故 g（3）＝11/3。选（D）。

乙解：∵$g(x)$与$f^{-1}(x+1)$关于$y=x$对称，

∴$g(x)$与$f^{-1}(x+1)$互为反函数。

又∵$f^{-1}(x+1)$是$f(x)$的反函数，

∴$f(x)=g(x)=\frac{2x+3}{x-1}$，

故$g(3)=f(3)=\frac{2\times3+3}{3-1}=\frac{9}{2}$。选（C）。

丙解：∵$f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$，

∴$f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$，$f^{-1}(x+1)=\frac{x+4}{x-1}$，

由已知条件知$g(x)$与$f^{-1}(x+1)$互为反函数，

令$y=\frac{x+4}{x-1}$，由求反函数方法得

$f^{-1}(x+1)$的反函数为$g(x)=\frac{x+4}{x-1}$，故$g(3)=\frac{7}{2}$。选（B）。

以上三种不同解法得到三种不同的结果，我们分析求解过程可知，导致结果不同的根本原因是：$f^{-1}(x+1)$与$f(x+1)$是否互为反函数。丙的解法是正确的，他们认为 f（x+1）的反函数不是 f^{-1}（x+1），而是 y＝$\frac{x+4}{x-1}$。下面我们从三个方面加以分析（以下分析中假定反函数存在）：

1.从函数三要素的核心——对应法则上看：

$f(x+1)$与$f^{-1}(x+1)$对应法则并不互逆。因为$f(x+1)$是复合函数，其对应法则不仅与外函数对应法则 f 有关，而且与内函数 u（x）=x+1 的对应法则有关。而互为反函数的两个函数的对应法则一定互逆，因此，$f^{-1}(x+1)$不是$f(x+1)$的反函数。

2.从求解反函数过程上看：若设$y=f(x+1)$，则$f^{-1}(y)=x+1$，$x=f^{-1}(y)-1$，将x、y互换即得$y=f(x+1)$的反函数为$y=f^{-1}(x)-1$，此函数与$f^{-1}(x+1)$显然不同。

3.从图象变换过程上看：y=f（x+1）的反函数可由 y=f（x）经过如下

变换而得：$y=f(x) \xrightarrow{\text{图象向左平移1个单位}} y=f(x+1) \xrightarrow{\text{作关于}y=x\text{对称变换}} y=f(x+1)$的反函数（*）

而$y=f^{-1}(x+1)$的图象可由$y=f(x)$经过如下变换而得：

法（一）：$y=f(x) \xrightarrow{\text{作关于}y=x\text{对称变换}} y=f^{-1}(x) \xrightarrow{\text{图象向左平移1个单位}} y=f^{-1}(x+1)$的图象。

法（二）$y=f(x) \xrightarrow{\text{图象向下平移1个单位}} y=f(x)-1 \xrightarrow{\text{作关于}y=x\text{对称变换}} y=f^{-1}(x+1)$的图象

尤其是法（二）与变换过程（*）比较，有明显不同，所得结果显然不同。

从以上三个方面我们可以得出$y=f(x+1)$的反函数不是$y=f^{-1}(x+1)$。

那么，一般情况下，函数$y=f[g(x)]$和函数$y=f^{-1}[g(x)]$究竟分别与谁互为反函数呢？假若所需要的反函数均存在，我们可作如下求解：

$y=f[g(x)] \to f^{-1}(y)=g(x) \to g^{-1}[f^{-1}(y)]=x$，

故$y=f[g(x)]$的反函数是$y=g^{-1}[f^{-1}(x)]$。

$y=f^{-1}[g(x)] \to f(x)=g(x) \to g^{-1}[f(y)]=x$，

故$y=f^{-1}[g(x)]$的反函数是$y=g^{-1}[f(x)]$。

从上述求解中，不难发现：求反函数的过程实质上体现了一种非常重要的数学思想——函数与方程思想。

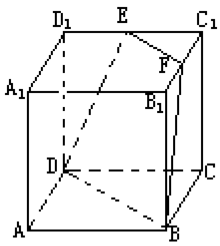
改编陈题须慎重

江苏如皋白蒲高级中学　陈军　张云飞　（邮编：226511）

高考命题的途径之一是改编陈题，近几年的高考几乎每年都有改编自课本习题、历年高考题、竞赛试题的题目，因此，改编陈题的能力是每位数学教师的基本能力。改编陈题的方式有多种多样，如特殊化、一般化、交换陈题的条件和结论等等，但不管以何种方式改编陈题，有一条是最基本的，那就是改编陈题须慎重，否则稍不注意便会出错。

例1 如右图，立方体AC_1中，$EC_1=2ED_1$，$FC_1=FB_1$，试求$V_{EFC_1\text{-}DBC}$。

这是某数学刊物中的一道例题。该文作者紧紧围绕例 1 展开教与学，充分体现了以教师为主导，学生为主体的教学原则，在充分暴露学生的思维过程中让学生明白产生错误的原因，从错误中汲取教训，为如何上好一堂习题课树立了良好的榜样，但可能令该文作者也始料不及的是：例 1 是一道错题！



为求$V_{EFC_1\text{-}DBC}$，该文作者引导学生连接EB等，把几何体EFC_1-DBC分割成三个三棱锥：$E-C_1CF$，$E-BCF$，$E-BDC$，得

$$V_{EFC\text{-}DBC}=V_{E\text{-}C1CF}+V_{E\text{-}BCF}+V_{E\text{-}BDC}$$

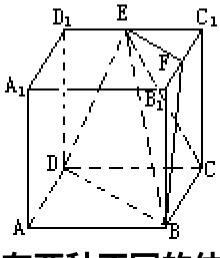
$$=(\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6})a^3$$

$$=\frac{1}{3}a^3。$$

但若连接 DF 等，把几何体 EFG－DBC 分割成三个三棱锥 $E\text{-}C_1CF$，E-DCF，D-BCF（如右图），则得

$$V_{EFC_1\text{-}DBC}=V_{E\text{-}C_1CF}+V_{E\text{-}DCF}+V_{D\text{-}BCF}$$

$$=\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)a^3=\frac{11}{36}a^3。$$



从而就得出同一个几何体有两种不同的体积！

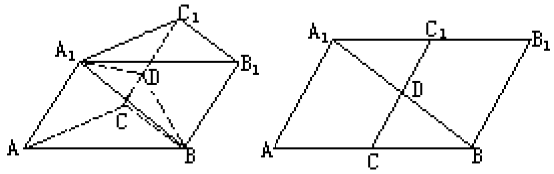
错在哪里？

事实上，由于D、B、F、E四点不共面，例1中的几何体EFC_1-DBC是

不确定的，若分别以 BE 或 CF 为棱，可得到两个不同的六面体，无法定出其体积，即例 1 是一道错题！

据笔者分析，本题可能是源出于以下陈题：在正方体AC_1中，E、F分别是C_1D_1、B_1C_1的中点，求几何体EFC_1-DBC的体积。该文作者为检验学生对台体、拟柱体及立几中切割补形等数学思想方法的掌握程度，把E为D_1C_1中点改为D_1C_1的$1/3$等分点。但就是这么随便一改，却改出了一道错题。

例2 如下左图，在斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，



$AA_1=AC=BC=a$，$\angle A_1AC=60°$，二面角$A-CC_1-B$为$120°$，求三棱柱的侧面积。

略解：把侧面AC_1与侧面BC_1展开摊平在一个平面内，如上右图所示，连A_1B，在$\triangle ABA_1$内，$\angle A_1AB=60°$，$AA_1=a$，$AB=AC+CB=2a$，$\therefore \angle AA_1B=90°$，即$A_1B\perp AA_1$。$\because CC_1\parallel AA_1$，

$\therefore A_1B\perp CC_1$，即$A_1D\perp CC_1$且$BD\perp CC_1$，

回到立体图中，作$A_1D\perp CC_1$于D，连BD，则$BD\perp CC_1$，$\therefore \angle A_1DB=120°$，容易求得$A_1D=BD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，由余弦定理得$A_1B=\frac{3}{2}a$，则三棱锥的侧面积为$S_{侧}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{3}{2}a\right)a=\frac{1}{2}(3+2\sqrt{3})a^2$。

以上解法错了，错在哪里？错在把侧面 AC_1 与侧面 BC_1 展开摊平在一个平面内，误认为得到一个平行四边形 ABB_1A_1。实际上，只有当$\angle C_1CB=60°$时图形 ABB_1A_1 才是平行四边形。也就是说，以上例题是一道错题。为什么会产生错误呢？笔者以为是改编陈题时不慎所致，据分析本题可能源出自以下陈题：已知平行四边形 ABCD 中，$\angle A=60°$，AD＝a，AB＝2a，M、N 分别是 DC、AB 的中点，沿 MN 翻折四边形 ABCD 构成二面角 A-MN-B，问这个二面角多大时，三棱锥 ABN-DCM 的体积最大，并求出最大值。

从以上陈题及例 2 的比较可以看到，命题者误以为陈题从平行四边形翻折得三棱柱，反之将三棱柱侧面展开也得一个平行四边形，这是改编陈题中想当然。

从以上过程明显地看到：只要在例 2 中加上条件“$\angle C_1CB=60°$”便知例 2 是一道不可多得的好题。