

学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

小学数学教育改革文集



前 言

本书是笔者近十多年来参加小学数学教科书编辑工作中学习和研究的文章汇集，其中绝大部分已在刊物上或会议上发表过。为了便于查阅，把汇集的文章分编为下面三部分；

- （一）有关小学数学课程、教材、教法的论述；
- （二）有关小学数学教材和教学心理的实验研究；
- （三）有关外国小学数学教育改革的介绍文章。

经过几十年的工作、学习和研究，深深体会到小学数学教育改革是一项艰巨的科学研究，是一个广阔的探索领域。这项研究和探索是无止境的，是随着我国社会的发展以及数学教育科学的发展不断发展变化的，而且不是少数的教师、教研人员和教科书编者所能完成的。本书汇集出版的目的，就在于和广大教师、教研人员、教科书编者共同交流、探讨小学数学教育改革方面的问题，抛砖引玉，希望有更多更深入的研究成果问世，为提高我国小学数学教学质量和科研水平做出贡献。

限于笔者水平，难免有错误和不妥之处，敬请指正。

曹飞羽

1994年11月

序

和曹飞羽同志朝夕相处已逾四十年。他长我一岁，先我一年调入人民教育出版社，一直从事小学数学教材研究和编写工作。现在他已年过古稀，近两年来身体又时有不适，但仍为我国小学数学教育深化改革钻研不息，笔耕不止。最近，他把近十多年来研究所得写成的文章汇集成册，取名《小学数学教育改革文集》。“文集”贯穿着改革精神，凝聚着他四十多年来研究课程、教材和教法的心血。献给广大读者，意在和广大教师、教研人员和教科书编者共同交流、探讨我国小学数学教育改革，希望有更多的研究成果问世，为提高我国小学数学教学质量，共同做出贡献。我想，这不是他自谦，而是他的真诚愿望。

小学数学教育，简而言之，要解决好为什么教、教什么和怎样教的问题。它涉及到课程的发展方向，建立科学的教材结构，采用得当的教学方法等诸多方面的问题。这是一项艰苦的科学研究。“文集”根据教育和教学理论、科学实验取得的宝贵材料，以及儿童学习心理和认知规律，围绕小学数学课程改革的发展方向、建立数学学科特点与儿童认知规律相结合的教材结构，以及知、情、意、行和谐发展的教学方法等进行研究和探讨，并从理论和实践相结合的高度，对课程，教材和教法所涉及到的带有方向性的问题，以及在教学中值得探讨的若干问题，一个问题一个问题进行讨论，一层一层进行分析。“文集”选入的近四十篇文章，其基本思想是：作为基础教育的小学数学课程、教材和教法都不是一成不变的。它要根据国家经济和社会发展的需要、数学和其他科学技术的发展，以及学生认识能力的发展和提高，不断进行改革。而这种改革必须建立在科学研究的基础上。由于社会不断发展和前进，这项改革是无止境的。

科学实验，是研究课程、教材和教法不可缺少的重要组成部分。它对建立数学学科体系，改革教学方法，尤显得十分重要。“文集”根据科学实验所取得的成果，遵循儿童的认知特点和学习心理的规律，对建立科学的小学数学编排体系和利于发展学生智力、培养能力的教学方法进行了探讨和研究，并运用现代教学论和心理学规律，结合科学实验，对小学数学教学中的概念教学、能力培养、解答应用题教学等进行较详尽的论述和科学分析。理论与实际相结合的基本观点，在“文集”中得到充分反映。

研究国外数学教育改革的经验和发展趋势，是研究我国数学课程，教材、教法改革不可缺少的环节。“文集”对国外一些国家的小学数学课程、教材、教法改革的经验和发展趋势作了较详尽的介绍，然后综合起来就可借鉴的经验，作了分析和探讨。“文集”的立足点是：研究国外的数学教育理论和实践经验要注意分析，结合我国实际情况，吸收其中有益的东西，寻求其中有益的启示，避免照搬。这是历史经验总结，也是作为教学和研究工作者应有的科学态度。

四十多年来，曹飞羽同志在小学数学教育这块土地上，辛勤耕耘，对小学数学课程、教材和教法的研究下过很大力气，进行过一些深入的探索和创新。文章兼具理论性和实践性，重质而无文饰，能让读者在思想上受到教益，在教学艺术上得到启迪。希望“文集”出版，有助于促进小学数学教育改革。

四十多年来，同飞羽同志就小学数学课程、教材和教法改革问题经常交换意见，尤其在小学数学课程教材几次大的变革过程中，谈得更多些。“文

集”汇编过程中，我们还就面向 21 世纪小学数学教育改革问题交换过意见。“文集”脱稿后，飞羽同志约我写序，并将原稿交我看过。我仅简要地谈了上面这些，算作看过原稿的一些感想吧！

张玺恩

1994 年 12 月于北京

小学数学教育改革文集

第一部分 小学数学课程教材教法论述

学校数学教育要适应社会发展的需要

研究数学教育与社会的关系，既是一个理论性问题，又是一个实践性问题。弄清这个问题，对于今后的数学教育应该朝着什么方向发展，具有十分重要的现实意义。

一 数学教育与社会的关系

简要地回顾一下历史，我们就能发现，数学教育是在人类社会发展的需要下，特别是在生产发展的需要下产生和发展起来的。反过来，数学教育又为一定的社会延续和发展而服务。早期的数学教育只传授给极少数人，而且教学内容也比较简单。随着数学本身和社会的发展，特别是工商业的发展，需要更多的人掌握较多的数学知识，数学教育也随着发展起来。到了现代，随着科学技术的高度发展，数学本身也在急速发展，它的应用也日益广泛。数学逐渐成为每个社会公民必须掌握的工具，而且对每个公民必须具有的数学水平提出了更高的要求。60年代开展起来的数学教育现代化运动不是偶然的现象，而是现代科学技术发展的需要的必然产物。

历史的经验表明，数学教育的目的、内容和教法都不是一成不变的，是随着社会的发展而变化的。但是它不是自然而然地随着社会的发展而变化的。学校的数学教育无论在课程、内容和教法方面比较来说是相对的稳定，而且往往是落后于社会的发展的。这一方面是由于社会的生产和科学技术的发展较快，只有到数学教育严重地不相适应时，才会引起人们的重视；另一方面也由于人们的传统的数学教育思想和习惯了的教學方法是很不容易改变的。但是这种落后的情况，在现代社会条件下，并不是不可改变的。只要我们发挥主观能动性，正确运用现代教育科学理论进行深入研究，就能使数学教育不断适应现代社会发展的需要。

新中国成立以后，进行了多次数学教育改革，以适应社会主义建设发展的需要。例如，50年代，为了适应农村小学毕业生中大多数参加生产劳动的需要，曾在小学算术中增加了农业生产合作社的简单簿记，并加强了珠算。50年代末至60年代初，为了更好地适应我国社会主义建设发展的需要，提高了中小学数学的程度。小学教完全部算术内容，中学增设解析几何。1977年，为了适应我国社会主义现代化建设的需要，进一步改革了中小学数学教学内容。主要措施是：精简传统的内容，在小学适当增加一些代数、几何的初步知识，在中学增加微积分以及概率统计、逻辑代数等初步知识；适当渗透集合、对应等数学思想。此外，在教学目的要求上加强了培养学生的逻辑思维能力。

二 调查研究社会发展对数学教育的需要是改革数学教育的首要任务

要使数学教育改革符合实际需要，首先要了解社会发展有哪些需要。社会需要是多种多样的，它们之间的关系也是错综复杂的。这就要求我们对调

查的材料认真地进行分析，并理清各种需要之间的关系。根据我国的实践经验，要着重弄清以下几种关系。

（一）近期需要与长远需要的关系

其中特别要弄清传统的数学内容和现代的数学内容之间的关系。要根据社会发展的水平，确定好传统的数学内容和现代的数学内容所占的比例。从长远的需要看，要多注意学生思维能力的培养；而从近期的需要看，培养学生运用所学的数学知识解决一些简单的实际问题的能力也不容忽视。

（二）共同需要与不同需要的关系

首先，必须把共同需要的数学知识选作中小学的数学教学内容。但是即使在一个国家里，各个地区之间也会存在着经济、文化、科学技术的发展不平衡。因此学校的数学教育既要有一定的统一性，又要有某些弹性。

（三）社会需要与个人需要的关系

从现代社会的科学技术发展的需要来看，要求每个成员必须掌握一定的数学基础知识和技能，使数学成为每个人的生活、工作的有用工具。但是也要注意，个人对数学的需要还有差异的一面。而且，不同的学生对数学的兴趣和爱好也有一定的差异。因此，在确定数学教学内容时，统一要求的内容不能过多，要留有余地，以便有可能满足学生的不同需求。例如，准备就业的学生，在学完统一要求的内容以后，可以选学一些实际应用较多的数学知识；而准备升学的学生，可以选学一些有助于进一步提高的数学知识，以充分发挥他们的数学才能。

（四）需要与可能的关系

只有既清楚地了解社会发展的需要，又清楚地了解学生能力的发展水平，教师的条件以及设备等，才能使数学教育逐步地适应社会发展的需要。任何设计方案，如果超越了客观条件，必然导致失败。

三 学校数学教育必须进行全面的改革才能适应社会发展的需要

根据我国的实践经验，要使数学教育适应社会发展的需要，必需从以下几方面进行改革。

（一）改革不适应社会发展需要的教育思想

转变教育思想是数学教育能否顺利改革的重要前提。我国的经验表明，有了正确的教育思想，才能有正确的教育方向，并选用合适的教材教法来实现既定的目标。否则，不可能编出好的教材，即使编出较好的教材，教师不能正确地使用它们，仍然不会收到好的教学效果。为此，要使每个数学教育工作者知道未来的社会需要培养出什么样的人，要求数学教育达到哪些目标，并弄清数学知识的教学与发展学生能力之间的关系。这样每个数学教育工作者就能自觉地为培养符合现代社会需要的人才而努力工作。

（二）改革不适应社会发展需要的课程和教学内容

这是解决数学教育与社会发展需要不相适应的关键问题。长期的实践使我们体会到，这是一项非常复杂艰巨的工作。在进行改革时必须采取慎重的态度。此外，除了在充分调查研究社会需要的基础上注意处理好前面所述的几个关系之外，还要注意以下几点：

1. 要切实从本国的生产和科学技术发展的现状和趋向对培养人才的需要出发，进行可行性的改革。在改革中，对于外国的经验只能作为改革的借鉴，

不能简单地模仿和照搬。

2. 从大多数学生和教师水平以及设备条件出发，恰当地拟订各阶段的数学教育目标、课程设置和教学内容。要充分考虑普及教育的特点，防止要求偏高，以免造成学生的过重负担。

3. 为了提高教学效率，培养学生能力，要努力研究良好的数学教材结构，优化的数学教学顺序，以及合理的练习作业。

4. 加强数学同实际的联系，使数学切实成为每个现代社会公民所掌握的有用工具，能用以解决生产和工作中简单的实际问题。

（三）改革不适应社会发展需要的教学方法

这是使数学教育改革的目的是得以实现的重要保证。我国的经验证明，教学方法的改革，必须与数学课程和内容的改革同步进行。特别是要实现数学为所有的人，充实先进的数学内容和加强能力培养等新的要求，必须有数学教师采取适当的教学方法。要着重帮助一些教师改变注入式的助长学生死记硬背的教学方法，而学会运用有助于发挥学生学习积极性和发展他们的智力的教学方法。还要相应地改革考查和评价学生数学成绩的方法。

四为适应 90 年代中国社会主义现代化建设的需要，在数学教育改革方面正在进行的几项工作

（一）调查研究中国经济和社会的发展对数学基础知识和技能的需要，当前中小学数学教育的情况以及改进的意见

第一项调查是 1984 年开始的，进行了两年。在这两年中，课程教材研究所会同中国教育学会数学教学研究会和一部分省市的教学研究单位调查了工业、农业、商业等 16 个行业，高等学校各专业，以及 76 种杂志。结果表明，近几年来，由于我国的现代科学技术和现代化生产的发展，普通劳动者和工作人员对数学知识的需求发生了一定的变化。有些传统的初等数学内容，如复数、几何中较难的论证、数学用表和计算尺等，需求量已经很少。而对一些可以直接应用的知识技能，如视图、概率初步知识等，需求量增加了。另外，对于一些近代和现代数学内容，如集合、对应和线性规划等的初步知识的需求有所增加；对于向量、矩阵等的初步知识也开始成为多数行业的需要。

第二项调查也是从 1984 年开始，进行了 2 年。调查的主要对象是教师和教研人员。通过调查，基本上弄清了当前大多数学校和教师的数学教学水平。此外还了解了现行数学课程和教学大纲中存在的主要问题。

完成这两项调查研究，就为改革数学课程和教学内容提供了比较可靠的依据。

（二）拟订 90 年代小学和初中的数学教学大纲（草案）

在上述两项调查研究的基础上，草拟了数学教学大纲（草案），以便于普及九年义务教育，提高全民族的素质，为培养各级各类人才打好数学基础。具体采取以下几项重要措施。

1. 进一步删减不必要的和繁杂的内容。例如，在小学删减一些数目较大的计算和步数较多的四则混合运算等；在初中删减多项式除以多项式，常用对数等。

2. 增加进一步学习和生产、生活中有广泛应用的内容。例如，增加估算、射影及计算器的使用。

3.加强能力的培养。除了培养学生分析、综合、比较、抽象、概括、判断、推理等能力外，还强调数学方法的掌握以及培养思维的敏捷性和灵活性。

4.加强良好道德和习惯的培养。例如，强调通过数学学习培养顽强的学习毅力，独立思考和勇于创新的精神。

5.注意面向全体，因材施教。在大纲（草案）中一方面规定了使所有学生必须达到的基本要求，另一方面留出一定时间安排一些选学内容。

（三）着手研究和编写适应不同地区不同水平的中小学数学教科书及其他辅助材料

根据中国各地发展不平衡的特点，初步计划编写几套教科书，其中有适应全国大多数地区具有一般发展水平的，有适应沿海较发达地区的，有适应农村学校的，还有适应少数民族地区的。

（四）开展小范围的科学实验，探索提高数学教学效率的有效途径和方法

目前在中国，中小学数学教学的改革实验已经广泛地开展起来。课程教材研究所已从1984年秋季起，先在两所小学进行实验。在此基础上，于1986年秋在全国一百多所小学（农村、城市约各占一半）进行实验。这些实验已取得较好的效果，受到许多教育行政部门、学校及家长的拥护和支持。

参考资料

南京师范大学教育系《教育学》，人民教育出版社，1984年版。

[苏]A·A 斯托利亚尔《数学教育学》中译本，人民教育出版社，1984年版。

[日]小仓金之助《现代数学教育史》，1957年版。

课程教材研究所数学室及中国教育学会数学教学研究会《社需》课题组：我国经济和社会的发展对数学基础知识和技能的需要的调查研究，1987年。

曹飞羽等《小学数学基础理论和教法》第二册，人民教育出版社，1982年版。

（本文是1988年在第六届国际数学教育会议数学教育与社会专题研讨会上宣读的论文，原载于联合国教科文组织出版的《Mathematics, Education and Society》，1989。）

学习义务教育小学数学教学大纲的几点体会

《九年义务教育全日制小学数学教学大纲（试用）》（以下简称《新大纲》）已由国家教委审查通过，并将于1993年秋在全国小学一年级开始实行。这部新大纲是经过长期的调查研究，多方面征求意见和多次修改才确定的。它是进行义务教育小学数学教学的指导性文件，将作为编写小学数学教材，进行教学、考试的依据。因此，无论是小学数学教科书编者、小学教育行政人员，还是学校领导、教师，都要认真学习《新大纲》，领会大纲的精神，掌握大纲的内容和要求，并在实际工作中加以贯彻。

一 明确小学数学在义务教育中的地位和作用

《新大纲》首先明确指出，“数学是学习现代科学技术必不可少的基础和工具”。它同语文一样，同属工具学科。它在日常生活、生产建设和科学研究中，有着广泛的应用，随着现代社会和科学技术的发展，它的应用将越来越广泛。正是由于这个原因，《新大纲》指出，“掌握一定的数学基础知识和基本技能，是我国公民应当具备的文化素养之一”。

《新大纲》进一步指出了小学数学在义务教育中的地位：“小学数学是义务教育的一门重要学科。”那么，每个适龄儿童和少年要接受义务教育，就必须学习数学，并且学好数学。小学是义务教育的初级阶段，它把数学作为一门重要学科，目的是给学生从小打好数学的初步基础，发展思维能力，进行思想品德教育和培养良好的学习习惯，而这些“对于贯彻德、智、体全面发展的教育方针，培养有理想、有道德、有文化、有纪律的社会主义公民，提高全民族的素质，具有十分重要的意义”。

也许有老师会提出这样的问题：过去和现在小学一直有数学课，它与义务教育的小学数学课有什么不同呢？我体会有以下两个不同点。

第一，义务教育强调全民性，即每个适龄儿童和少年都要受到9年的学校教育。作为义务教育初级阶段的小学数学课，要给所有的学生打好数学基础，不能采取淘汰的办法。

第二，义务教育强调素质教育，提高全民族的素质，其中包括提高科学文化素质、思想品德素质和身体素质等。为此，小学数学教学必须把过去片面的应试教育转变为素质教育，贯彻德、智、体、美、劳全面发展的方针，以促进少年儿童整体素质的提高。

从这两方面看，现行的小学数学教学大纲、教材和教学都还存在不足之处，需要加以改进。这也正是《新大纲》所要解决的问题之一。

二 明确小学数学教学改革的指导思想

《新大纲》是一部深化小学数学教学改革的大纲，是适应我国社会主义现代化建设需要的大纲。要进行深入的改革，就要明确改革的指导思想。

《新大纲》前言中首先指出小学数学教学改革的总的指导思想，即“以唯物辩证法为指导，改革教育思想、教学内容和教学方法”。这是根据1985年《中共中央关于教育体制改革的决定》的精神提出来的。这部文件中强调的“要改革同社会主义现代化不相适应的教育思想、教育内容和教育方法”，

不仅是对教师提的，也是对教材编写者、教育行政领导者和教研人员提出的。

任何改革都必须以唯物辩证法为指导。唯物辩证法不仅是科学的世界观，而且是科学的方法论。以它为指导来研究和处理工作，才能使工作沿着正确的方向前进，使改革获得成功。小学数学教学改革中问题很多，归结起来是三个方面：教育思想、教学内容和教学方法。其中改革教育思想是首要的、根本的、起决定作用的。教学目的（培养什么人的问题）、教学内容和教学方法，都是受一定的教育思想支配的。教育思想解决了，教学内容和教学方法就容易解决。例如，在过去的小学数学教学中，往往在不同程度上受应试教育思想的影响，片面追求升学率，结果增加一些超过大纲、课本的内容和难、深的题目，加重了学生的负担，不利于学生德、智、体等方面都得到较好的发展。现在实行义务教育，强调素质教育，首先就有个转变教育思想的问题，然后要适应素质教育的需要，改革教学内容和教学方法。

在上述总的指导思想下，《新大纲》进一步结合小学数学中的问题，提出较为具体的改革指导思想，即“要正确处理好智育与德育、知识与能力、理论与实际、教与学、面向全体学生与因材施教的关系，充分调动学生学习的积极性和主动性，使学生在掌握基础知识的同时，智力得到发展，能力得到提高，并受到思想品德教育”。其中处理好这五个关系十分重要。因为它们每个关系的两个方面都体现着辩证的统一，具有相辅相成的作用。如果我们编写教材和进行教学时处理不好它们之间的关系，强调了一个方面而忽视另一个方面，都会给教学造成损失，不能很好地完成小学数学的教学任务。例如，在处理智育与德育的关系时，要重视数学基础知识的教学，同时还要重视进行思想品德教育。这是提高民族素质，为培养社会主义人才打好基础的一个重要方面，各学科都担负着这一方面的任务，不能有所忽视。但是只有根据数学学科的特点，紧密结合数学基础知识的教学来进行，才能收到好的教学效果。在智育方面，既要重视数学基础知识的教学，又要注意培养学生能力。但是也要使两者紧密结合，相辅相成、互相促进。如果只重视数学基础知识的教学，忽视发展智力，培养能力，数学知识就不可能较快地掌握；反过来，片面地着重能力的培养，忽视数学基础知识的掌握，能力培养也会落空。又如，教学是师生的双边活动，教与学是辩证的统一，如果小学数学课只注意教师教，忽视引导学生学，就不能充分发挥学生学习的积极性和主动性，不利于培养学生能力；但是反过来只强调学生学，忽视教师的主导作用，也不可能有效地提高教学质量。至于处理面向全体学生和因材施教的关系，一直是小学数学教学中没有重视的问题。长期以来教学内容“一刀切”，不利于更好更多地为培养人才打好基础。因此，进行义务教育小学数学教学，只有处理好上述几个关系，才能做到充分调动学生学习的积极性，使学生在掌握好数学基础知识的同时，能力得到培养，并受到思想品德教育，使民族素质得到整体提高。

三 进一步明确小学数学教学的目的要求

《新大纲》把小学数学教学目的明确分为三条：第一条是关于基础知识方面的；第二条是关于能力方面的；第三条是关于思想品德教育方面的。这比现行大纲明确。三条并列，体现对能力培养和思想品德教育的重视。这三方面是相辅相成、相互促进的，缺少或忽视哪一方面，都不能很好地完成教

学任务。

关于教学要求，新大纲也比现行大纲全面、明确、具体。它在具体要求中不仅对数学知识和计算能力作了说明，而且对培养学生初步的逻辑思维能力、发展空间观念以及思想品德教育做了说明。

《新大纲》对数学知识，根据其不同的地位和作用，提出了不同层次的要求。如对整数、小数、分数、百分数、比例的要求是：要使学生获得基础知识，就是说在小学要打好基础，初中一般不再提要求了。而对简易方程、量与计量、简单几何图形、统计等的要求是：使学生获得初步知识，进入中学还要进一步扩展和提高。对于计算能力，也根据其在实际生活和进一步学习中的作用，提出适当的要求：首先强调正确，对其中一些基本的计算，要求达到一定的熟练程度，并逐步做到计算方法合理、灵活。这在各年级教学要求中分别加以具体说明。

《新大纲》对培养初步的逻辑思维能力的内容和要求作了具体说明，主要是“培养学生进行初步的分析、综合、比较、抽象、概括，对简单的问题进行判断、推理，逐步学会有条理、有根据地思考问题”。这是非常适当的。首先从数学本身来看，数学的特点之一就是它具有抽象性、逻辑严密性。数学知识本身是由若干判断组成的一定体系，后面的判断都是由前面的判断推导出来的。小学数学知识虽然简单，不能要求很严密，但是它在很大程度上体现了逻辑系统性强这一特点。因此学习数学的过程为发展学生逻辑思维能力提供了有利的条件。其次从小学生的思维发展来看，小学生的思维正处在从具体形象思维向抽象思维过渡的阶段，此时正是培养学生逻辑思维能力的有利时机。当然在小学还只是培养初步逻辑思维能力，进入中学后还要进一步培养。《新大纲》还重视要求培养学生思维的敏捷和灵活，这属于培养思维品质的问题，是为适应社会主义现代化建设发展的需要提出来的，对于提高民族的素质有很大好处。《新大纲》增加有关培养初步逻辑思维能力的具体要求的说明，不仅有助于澄清一些模糊的认识，而且会促进教学中学生能力的培养。

《新大纲》对发展空间观念的要求做了具体说明。心理学的研究表明，儿童空间能力的发展，大体经过三个阶段。幼儿期（学前期）主要是发展儿童的空间知觉。所谓空间知觉是反映事物的立体状态及其在三维空间的位置关系的知觉，其中包括形状、大小、距离、深度、方位等知觉。小学则主要是发展空间观念。空间观念与空间知觉不同之处在于它要在学生头脑中形成有关物体的形状、大小、距离等表象，也就是说，离开具体的物体或模型，学生的头脑中仍保存着它们的形象，甚至带有一定的概括性。而且当说出几何形体的名称时能再现它们的形象，并且能说出它们的一些特征。至于中学阶段，除了进一步发展空间观念外，还需进一步发展空间想象力。当然，小学阶段在发展空间观念的同时，也带有一定的发展空间想象力的因素。例如，给出长方体的长、宽、高，学生能想象出长方体的形状、各个面的长和宽。

《新大纲》增加了有关发展空间观念的具体要求的说明，将有助于在几何初步知识的教学中改变以求积为重点的教学，重视学生空间观念的发展。

《新大纲》还对培养学生运用所学的数学知识解决简单的实际问题的能力提出了较为具体的要求。特别强调培养学生观察、认识周围事物的数量关系和形体特征的兴趣和意识，这一点很重要。要使学生在实际生活中能够运用数学这个工具，很重要的一个条件是培养学生经常从数学的角度去观察和

认识周围事物的兴趣和意识，并善于把所遇到的问题与所学的数学知识联系起来。为此，《新大纲》十分强调数学教学要紧联系实际，加强学生的实践活动。

《新大纲》对于思想品德教育也提出较具体的要求，即根据数学的学科特点，主要分成四个方面：学习目的的教育，爱祖国、爱社会主义、爱科学的教育，辩证唯物主义观点的启蒙教育，良好的学习习惯和作风品质教育。这在各年级的教学要求中结合有关内容提得更为具体，并且在教学应注意的几个问题中也作了较详细的说明。

四 适当调整教学内容和教学要求

根据义务教育的性质和小学阶段课程计划中规定的培养目标，《新大纲》对数学教学内容和教学要求做了适当的调整。

（一）选择和确定教学内容的原则

《新大纲》在第三部分“教学内容的确定和安排”的开头，明确提出了选择和确定教学内容的原则，概括地说可以分为三条：第一，符合义务教育的性质和任务，有利于大面积提高教学质量。因为义务教育是每个适龄儿童和少年必须接受的教育，其基本任务是使儿童、少年在德、智、体等方面都得到很好的发展，所以小学数学教学内容不能过多，教学要求不能过高，应使全国大多数学校绝大多数学生打好必要的数学基础，而且负担不重。第二，要适应现代科学技术发展的趋势和社会需要，选择日常生活和进一步学习所必需的。同时是学生能够接受的最基础的数学知识。这里特别强调适应现代科技发展的趋势很重要，因为义务教育是为培养 21 世纪人才打基础的，其所选择的教学内容就要保证是进一步学习现代科技所必需的，以不致落后于形势的发展。例如，随着现代计算工具的广泛使用，就应该精简大数目的计算和比较复杂的四则混合运算；随着科技和社会主义市场经济的发展，应适当加强百分数的实际应用。第三，注意统一性和灵活性相结合。《新大纲》明确提出，“考虑到我国各地区发展不平衡和学校条件的不同，在确定必须教学的最基础内容的同时，适当安排一些选学内容。”这是小学数学的一项重要改革，既便于使全国大多数小学生都较好地掌握所学的数学基础知识，又有利于充分发挥条件较好的学校或班级学生学习数学的积极性，为培养现代化建设人才打下更好的基础。

此外，选择教学内容时还注意了义务教育的整体性，使小学和初中既有分工又能很好地衔接。

（二）选择和调整教学内容的具体情况

主要有以下几点：

1. 精简大数目的计算和四则混合运算。如笔算加减法强调以三、四位数的为主，一般不超过五位数；笔算乘、除法以乘数、除数是两位数的为主，一般不超过三位数乘三位数和相应的除法；珠算只学加减法，中、高年级适当加强口算。四则混合运算以二、三步的为主，一般不超过四步。降低笔算的要求，加强口算，以及在较高年级教学现代计算工具的使用，已成为世界各国小学数学教学的发展趋势。《新大纲》在这方面的措施与国际改革的趋势是基本一致的。

2. 删去一些不十分必要的或者比较难的内容。例如，求三个数的最大公

约数用处不大，学会求两个数的最大公约数，能解决约分问题就可以了；三角形的内角和初中还要学习，小学可以不教；组合图形的面积、体积较难，初中也只出现很简单的，也可以不教；繁分数用处不大，计算比较复杂，而且中学已删去繁分式，故也可删掉。

3. 有些内容适当降低要求，或只列知识点，不作基本要求。例如，循环小数实际用处不大，主要是为初中学习有理数做些准备，积的变化主要是为学习小数乘法做好准备。这些《新大纲》都只列知识点，不作基本要求，也不作考试内容。此外，在低年级教学一些简单图形的直观认识，目的在于发展学生空间观念，激发学习几何初步知识的兴趣，因为后面还要进一步学习，所以也只列知识点，没列入教学要求。

4. 简化应用题，加强与实际的联系。现行大纲和教材中教学的应用题比较复杂，步数也较多，教学用的时间也较多。为了使学生容易接受，适当减轻学生负担，《新大纲》中规定，整数、小数应用题不超过三步，分数应用题以一、两步计算的为主，最多三步（只限比较容易的）。其次，强调培养一般的解题能力，通过1—3步应用题的教学，使学生掌握常见的数量关系，学会应用题的分析、解答以及检验的方法。这样，即使学生遇到未见过的不大复杂的问题也能解决。此外还强调，应用题应注意联系实际，培养学生运用所学数学知识解决简单的实际问题的能力。

5. 适当安排选学内容。主要安排有以下几项：

（1）乘除计算的简单估算。估算在日常生活中有较广泛的应用，有时还可以用来检验笔算和用工具算的结果，看大数目是否有错误。近年来许多国家的小学数学增加了估算的内容。

（2）三角形的内角和。

（3）组合图形的面积（只限两个图形的组合）。

（4）比较容易的四步应用题。

（5）球和球的半径、直径的初步认识。球是生活中常见的形体，增加球的初步认识可以更好地发展学生的空间观念，也为学习其他学科（如初中自然地理中的认识地球）做一些准备。

（6）使用珠算较多的地区，也可以多学一些珠算。

《新大纲》中在选学内容的前面都标有“*”，并说明不作共同要求，也不作考试内容。

五 对教学应注意的问题提得更明确，有针对性

现行大纲的第四部分对教学中应注意的问题已做了较有指导作用的说明。《新大纲》总结了近年来教改经验，在现行大纲的基础上进一步修改、充实，使之更加明确，有针对性。特别是注意根据义务教育的性质和任务提出了要求和建议。下面就这部分内容中改动较大的几点谈一些体会。

（一）突出发展智力，培养能力。这一点现行大纲只是在第三条中，结合发展初步逻辑思维能力和空间观念提了一句。《新大纲》中第一条仍提重视基础知识的教学，第二条则专门讲重视发展智力、培养能力的问题，体现了基础知识的教学与发展智力、培养能力的教学并重，正确处理好两者关系的思想。

发展智力、培养能力是国际数学教育发展的共同趋势。从我国义务教育

要求提高全民族的素质来看，要提高科学文化素质，不仅要把必需的基础知识掌握好，还要在能力方面有所发展。否则培养出的人才难以适应社会主义现代化建设发展的需要。结合小学数学的特点，发展智力、培养能力包括以下四个方面：计算能力，初步的逻辑思维能力，初步的空间观念，以及运用所学知识解决简单实际问题的能力。这四个方面在《新大纲》的目的要求中已经明确提出来，在教学应注意的几个问题中进一步对如何培养提出了一些指导性意见。归纳起来，强调以下几点：

1. 把发展智力和培养能力贯穿在各年级教学的始终。这就是说，教学每个内容，上每一节课，每节课的每个环节，都要注意发展学生智力，培养能力。《新大纲》特别强调在加强基础知识的同时，注意发展智力、培养能力。因为二者是紧密联系的，相互促进的。只重视基础知识的教学，忽视能力的培养，学生不仅能力得不到很好的发展，就是基础知识也不可能很好地掌握。因此教学每一部分知识时，既要考虑让学生掌握哪些知识点，还要结合知识的特点，考虑培养哪些能力。例如教学“9加几”时，要使学生掌握“凑十”的口算方法，能够比较熟练地计算“9加几”，同时结合教学“凑十”的口算方法，还要有意识地培养学生初步的分析、综合、推理等能力。为了培养这些能力，教学时就不能简单地告诉学生怎样“凑十”，而要启发引导学生怎样想。教学8加几、7加几……的时候，再引导学生把已学的口算方法运用到新的情况中去。这样，又培养了学生初步的迁移类推能力。

2. 强调遵循儿童的认知规律。这一点在现行大纲中虽然也有些体现，但是没有明确地把它作为一个应该遵循的原则提出来。这一原则很重要。因为教学的对象是儿童，只有了解儿童的认知规律，教学时符合儿童的认知规律，才能收到好的效果。儿童的认知规律很多，最基本的一条可以概括为：动作、感知、表象、概念、规律。儿童心理学家研究发现，早期儿童是在动作中思维的，从幼儿到小学低年级，虽然发展到具体形象思维阶段，但是往往离不开动作。因此加强操作在低年级数学教学中具有十分重要的意义。就是到高年级，学生的抽象思维有了发展，遇到比较抽象难理解的数学概念或法则，也往往需要通过操作来帮助形成表象。因此，《新大纲》强调要“通过操作、观察，引导学生进行比较、分析、综合，在感性材料的基础上加以抽象、概括，进行简单的判断、推理”。但这并不是说教学任何知识都必须从动作、感知开始，《新大纲》也指出，“对于与旧知识联系紧密的新知识，可以启发学生在已有知识的基础上推导出来”。例如，教学“用三位数乘”就可以在复习“用两位数乘”的基础上启发学生推想出来。

3. 重视思维过程。这一点在现行大纲中已经提出，但是没有具体地讲。《新大纲》对这一点更加重视，并进一步具体化。传统的数学教学往往强调套公式，重视思维的结果，这对发展学生思维能力很不利。《新大纲》强调要重视学生获取知识的思维过程，体现了既重视思维过程，也重视思维结果的思想。首先是加强算理的教学。例如，《新大纲》讲到口算时，强调“要引导学生在理解的基础上掌握基本的口算方法”；讲到笔算时，强调“要引导学生理解算理”。其次，强调启发学生思考，鼓励学生质疑，提出自己的独立见解，逐步培养学生能够有条理有根据地进行思考，比较完整地叙述思考过程的能力。这对培养学生勇于思考、善于思考很有好处。

4. 重视思维品质的培养。如上所述，《新大纲》不仅重视培养学生思维的逻辑性，如有条理有根据地进行思考，还重视培养学生思维的敏捷性和灵

活性。在小学重视这方面的培养，就便于将来在工作中善于根据不同情况灵活地解决问题，并注意提高效率。为此，《新大纲》强调要鼓励学生运用学过的简便算法，合理、灵活地进行计算。“在解题和计算时，要鼓励学生根据具体情况选用简便解法或算法。”这些都有利于培养学生思维的敏捷性和灵活性。

（二）强调结合学科特点，进行思想品德教育。《新大纲》对思想品德教育比现行大纲更为重视。这是素质教育的一个重要方面，它涉及到能否把学生培养成为德、智、体全面发展，有理想、有道德、有文化、有纪律的社会主义公民问题。为此，《新大纲》十分强调“思想品德教育是小学数学教学必须完成的一项重要任务”。对于小学数学课如何进行思想品德教育提出以下两点。

1. 要从一年级起贯穿在各年级的教学中。强调经常性，上每一节课都考虑着重进行哪些思想品德教育，特别是良好学习习惯的培养。如书写整洁。只有每个年级每一节课都注意坚持培养和训练，才能逐渐形成良好的习惯。

2. 要根据学科特点，结合教学内容，并且符合学生的年龄特征和接受能力。这是一条很重要的原则。小学各学科都担负着思想品德教育的任务，在培养目标上是一致的。但是各学科有不同的特点，有不同的教学内容，从而进行思想品德教育的内容和方式也不可能完全相同。因此必须根据数学学科的特点，结合数学内容恰当地进行思想品德教育。否则不仅不能收到好的教育效果，还有可能削弱学生对数学基础知识的掌握以及能力的培养。在这方面是有过历史经验教训的。此外，《新大纲》强调符合学生的年龄特点和接受能力这一点很重要。例如，在低年级结合某些具体的数学内容可以渗透一些辩证唯物主义思想，给学生积累一些感性材料。但是如果给学生抽象地讲唯物辩证法的原理，就超过了学生的接受程度，学生不理解，收不到好的效果，还浪费了教学时间。

3. 根据学科特点和数学教学内容，提出思想品德教育的四个方面以及进行的方式。第一，进行学习目的的教育。主要通过阐明数学在日常生活和生产建设中的广泛应用来进行。可以结合所学内容举一些实例向学生说明，必要时还可以进行一些参观访问。第二，进行爱祖国、爱社会主义、爱科学的思想教育。主要通过一些有说服力的数据、结合教材以及一些数学史料来进行。第三，进行辩证唯物主义观点的启蒙教育。主要通过数学知识自身的发展及内在联系来进行。这里提启蒙教育很重要，只是给学生积累一些感性材料，不能抽象地讲唯物辩证法原理。第四，培养良好的学习态度、工作作风和学习习惯。这是结合数学的学科特点提出的培养重点，主要是通过课堂学习和课外作业来进行。

（三）处理好面向全体学生和因材施教的关系。关于这一点，现行大纲中只讲了一句。而《新大纲》把它单独列为一条，说明对这个问题的重视。这也是针对小学数学实际存在的问题提出来的。因为长期以来，大纲和教学都存在着“一刀切”的思想，很少注意处理好这方面的关系。从义务教育的角度来说，小学数学教学必须面向全体学生，使他们经过努力都达到规定的基本要求。但是学生之间在生理、家庭条件、环境以及教育基础等方面又是有差异的。要使差生达到基本要求，不是很容易做到的，这就需要根据学生的特点因材施教，特别要“热情关怀，循循善诱，加强个别辅导”。而另一方面有些优生很容易达到基本要求，还学有余力，对他们也要适当因材施教，

可以让他们做一些综合运用知识和富有思考性的题目，以利于提高他们的数学能力。此外，还可以通过课外活动发展他们的数学才能。这对于为国家培养更多更好的人才打好基础会起到重要的作用。

（四）改革教学方法，提高教学效率。这是提高小学数学教学质量，减轻学生学习负担的重要途径之一。《新大纲》在这一条中虽然文字不多，但是包含着丰富的内容。下面就几个主要问题谈一点体会。

1. 强调了解学生学习数学的特点，注意研究学生的学习过程和方法。教学的对象是小学生，如果不了解小学生学习数学的特点，不研究小学生的学习过程和方法，确定教学要求、教学内容和教学方法，就失去重要依据，也就不能有针对性、有效地进行教学。研究小学生学习数学的特点，不仅要了解和研究小学生一般的认知规律，而且要了解和研究不同年级学习不同数学内容的特点。这就需要在教学中随时注意积累资料，经常进行分析研究，作为拟定教学计划，改进教学方法的参考和依据。

2. 强调认真备课，钻研教材。这是上好一节数学课的重要前提之一。备课时一方面要很好地了解学生，另一方面就是要深入地了解教材。正如《新大纲》所指出的，要“弄清教材的重点和难点，以及知识之间的联系，切实把握好教学要求”。只有在弄清教学内容和要求，以及学生的基础和学习特点之后，才能选择适当的教学方法进行教学。

3. 强调灵活运用教学方法。这一点在现行大纲中也讲到，但比较简单。《新大纲》进一步强调“要根据教学内容和学生的具体情况，灵活运用教学方法，不要生搬硬套”。这是符合现代教学理论的，因为任何一种教学方法都不是万能的，必须根据教学要求、教学内容和学生条件选择合适的教学方法。但是不论采用什么教学方法，都必须遵守一个共同的原则，即《新大纲》所指出的，要“充分发挥教师的主导作用和学生学习的积极性、主动性。要坚持启发式，反对注入式”。因为学生是学习的主体，教师的主导作用主要体现在创设学习情境，激发学生的学习动机，引导学生思考上。只有这样，才便于使学生既获得数学基础知识，又发展能力。

4. 有效地组织练习和复习。这一点实际上也是改革小学数学教学方法的一个重要组成部分。《新大纲》把它单列一条，以示其在小学数学教学中的重要作用。在这一条中强调练习要紧扣教学要求，目的明确，练习题数量要适当，难易适度，安排有层次、有坡度，合理分配练习时间，讲究练习方式，提高练习效率，对练习作业及时检查，认真批改，以及重视整理和复习等，都具有重要的指导意义。

5. 注意提高课堂教学效率。《新大纲》明确提出，“教学要讲究实效，注意提高课堂教学效率”。在现行大纲中只提到“要讲求实效，有利于提高教学效果”。提高教学效率和提高教学效果是两个不同的概念。教学效率高有两个标准，一是教学效果好，二是时间消耗少。教学效果好而时间消耗多的，不能认为教学效率高。按照义务教育小学课程计划，数学课时有所减少，又要求课上负担适当，不给学生加重课外作业，这就要求我们必须提高课堂教学效率。提高课堂教学效率是一个复杂的受多方面制约的系统工程。但是只要按照《新大纲》的指导性意见做，注意教学要求全面、适当，教学内容的份量和编排顺序合适，抓住重点、难点，课堂教学结构合理，教学方法适当，时间分配合理，并注意节约时间，讲求实效，就能够有效地完成小学数学的教学任务。

（五）改进成绩的考查和评定。小学数学成绩的考查和评定在小学数学教学中具有重要作用。通过考查和评定，不仅能使教师清楚地了解学生掌握和应用数学基础知识的情况及能力的发展情况，发现教学中存在的问题，以利于教学，而且能使学生了解自己的进步情况和不足之处，进一步调动学生学习数学的积极性，更好地提高学生的数学水平。《新大纲》根据义务教育的性质，结合当前的教学实际，提出几点原则性的指导意见。其中有的在现行大纲的基础上修改得更确切。如强调成绩的考查和评定要以大纲规定的教学目的和基本要求为依据；既要考查学生理解和掌握数学基础知识的情况，又要适当考查能力。也有的是新增加的。如强调考查可以采用多种方式，重视平时考查等。这些对改革考查方法，促进教学质量的提高，都具有重要的指导意义。

（本文原载于《黑龙江教育》1993年第3、4期）

四十年来小学数学通用教材的改革

四十年来，小学数学通用教材经过不断改革，质量不断提高，在改革中积累了一些经验，也走过一些弯路。现在作一简要的回顾，对于今后小学数学教材的改革与发展是有益的。

一 着手教材改革，确定选用课本

中央人民政府教育部成立后，十分重视教材的改革。1949年12月马叙伦部长在第一次全国教育工作会议上就提出：“全国教育的制度，各级学校的课程、教材、教学方法、师资等等，都要求一个彻底的，同时是有计划有步骤的变革和解决。”会议决定加强教科书编审工作的具体计划，并确定新教育的方针为“以老解放区新教育经验为基础，吸收旧教育有用经验，借助苏联经验。”

1950年7月，教育部制订了《小学课程暂行标准(草案)》，其中的《小学算术课程暂行标准(草案)》规定了小学算术的培养目标，五个学年的笔算和珠算内容，以及教学要点。这份《暂行标准(草案)》基本体现了新教育的方针。首先，用五年的时间学完原来六年的小学算术内容，这本身就是一次重大改革，这样就便于使劳动人民的子女受到完全的初等教育。其次，在培养目标中增加“训练儿童善于运用思考、推理、分析、综合和钻研问题的方法和习惯，”以及“培养儿童爱国主义思想，并加强爱科学、爱护公共财物等的国民公德。”说明《暂行标准(草案)》不仅重视算术知识的教学，还重视培养能力和进行思想品德教育。此外在内容的编排上注意循序渐进，每学期各有重点，加强心算，为笔算打好基础，文字应用题适当推迟出现，并且强调内容要和新社会工农生活的实际情况和迫切需要相符合，也都体现了改革的精神。随后在北京市组织人力编写了实验教材。1951年秋在北京市6所小学进行实验，初步取得较好的效果。

新中国成立之初，就全国范围说，没有统一的算术教材。在老解放区，如西北、东北、华北等大区，40年代末已经分别编辑出版了初小和高小算术课本，继续在本区使用。新解放地区大部分临时选用原大东书局出版的俞子夷编写的初小和高小算术课本。1950年7月，中央教育部决定从秋季起全国选用两套算术课本，一套为刘松涛等编写的由华北人民政府审定的老解放区课本，另一套为俞子夷编写的原大东书局出版的课本。1951年4月，教育部决定秋季全部换用俞子夷编写的课本。但这套课本因为是旧课本，存在着编排不够系统，应用题联系实际不够等缺点，1952年决定对这套课本加以修改。高小1—4册由俞子夷修改，初小5—8册由人民教育出版社组织力量修改。在修改中都吸收了苏联算术课本中的一些经验。这样就忽视了老解放区的教育经验和华北大区算术课本的优点，偏离了第一次全国教育工作会议上确定的教育方针。

二 以苏联教材为蓝本编写新教材

1951年10月，政务院颁布了《关于改革学制的决定》，正式确定小学实行五年一贯制。随后教育部决定，1952年秋季从小学一年级改起。1952

年7月，教育部组织人力起草小学算术教学大纲，确定参考苏联小学算术教学大纲，根据我国具体情况，适当加以改编。1952年12月，教育部颁布了《小学算术教学大纲（草案）》和《小学珠算教学大纲（草案）》。这部大纲的颁布，使全国小学算术课有了统一的教学依据和教学要求。《大纲（草案）》同《暂行标准（草案）》比较，在以下几方面有所改革：1.加强口算教学，不仅是低年级，整个算术课程都应强调重视口算练习。2.重视应用题教学，不仅对各年级应用题教学的内容作了系统的安排，而且明确规定了对各年级学生解答应用题的要求。3.重视在算术教学中发展逻辑思维和进行思想品德教育，并且提出了比较具体的要求。这些带有方向性的变化为后来的进一步改革奠定了基础。但是这部《大纲（草案）》也存在着严重的缺点。主要是脱离当时我国的实际，违背了我国改革学制的基本精神和基本要求，机械地照搬外国经验，把苏联小学四年的教学内容拉成五年，致使分数、小数、百分数等内容没有学全，降低了小学算术的程度；而另一些内容，如应用题、和差积商的变化等又要求偏高。这样就不能使五年一贯制小学毕业生受到完全小学所应受的数学教育。

新学制颁布后不久，教育部先是邀请专家，以后又改由人民教育出版社组织力量编写五年制小学算术课本。当时确定编写的原则是以苏联教科书为蓝本，进行改编。从1952年秋季起，陆续编辑出版了第一、二、三册课本。这些课本的进度和要求是按照《小学算术教学大纲（草案）》来编写的，但是编排系统和编写形式则参照苏联小学一、二年级算术课本。主要有以下几个特点：1.重视口算，100以内的加减法只教口算，不教笔算。2.提早教学应用题，第一册最后出现简单的加减两步应用题，第二册出现乘法和加减法复合的两步应用题，第三册出现简单的三步应用题；应用题比较联系儿童实际。3.数学知识的安排比较系统，组织比较严密。4.采用习题汇编的形式，即不分教师讲的例题和学生做的练习题，按照教学的顺序统一编上题号。

1953年11月，政务院发出指示，由于师资教材等条件准备不足，五年一贯制暂行停止推行，小学学制仍沿用四二制（即初小四年，高小二年）。与此同时，各地反映已经出版的五年一贯制算术课本第一、二、三册内容多，分量重。1953年秋教育部指示，一、二年级放慢进度。基本上是把原来三册课本的内容拉长为两年教完。在这之后继续编写三至六年级的算术课本，把原来五年一贯制大纲中后三年半的内容拉长为四年教完，只增加一些几何初步知识（如平行四边形和三角形的面积）、百分数的应用、简单统计图表和农业社的简单簿记。到1955年全套算术课本（包括珠算）编完。这套新编课本同旧的算术课本比较，有以下几点改进：1.教材的系统性比较强，组织比较严密，不仅体现在计算知识方面，而且体现在应用题方面。2.加强了口算，不仅是低年级，中高年级也注意安排一定的口算。3.比较重视概念和规律性知识的教学，如重视四则运算的意义，运算间的关系，小数和分数的概念间的联系，几何形体的特征等；解答应用题重视分析数量关系。4.应用题比较注意联系儿童实际和生产实际，并渗透思想政治教育。但是这套课本也存在一些严重的缺点：1.六年所教学的算术知识基本相当苏联小学四年的内容，分数、小数、百分数等没有学全，降低了小学算术的程度；而另一方面，口算要求偏高，应用题过于复杂；严重地脱离我国的社会实际需要和儿童的接受能力。2.教材编排过细，重复较多，特别是整数部分循环圈多，如20以内还安排乘法，没有必要。3.课本继续采用习题汇编的形式，教师讲授的和

学生练习的不易分清，课时也不易划分，给教学造成很多不便。

1956年，教育部编订了《小学算术教学大纲（修订草案）》。这部大纲是在原五年一贯制《小学算术教学大纲（草案）》的基础上，参考苏联新修订的小学算术教学大纲，并总结新编四二制小学算术课本使用的经验，修改而成的。这样，就把小学六年基本上教学苏联小学四年的内容进一步用大纲的形式固定下来。在当时，我国大多数小学毕业生不能升入初中，而要参加生产劳动，但掌握的算术知识却很少，造成严重的脱离实际。

三 初中算术逐步下放到小学，编写暂用教材

随着我国社会主义革命和社会主义建设的发展，越来越反映出小学算术的教学内容不能适应实际的需要，严重妨碍小学毕业生更好地参加生产劳动。1957年1月1日《教师报》社论中就指出，“教学计划、教学大纲和教材还不够切合实际”；“必须认真克服学习外国先进经验中的教条主义。”1958年6月17日《教师报》发表了题为《改革小学算术教学》的社论，明确指出，“我们的中小学一共十二年的时间，所学习的数学知识只相当于苏联中小学生的十年数学教学内容。”“目前改革中小学数学教学，必须从小学算术教学的改革做起。”“只要经过一、二年的准备和过渡，就可能把现行初中数学教材的算术部分全部移到小学去教。”为了较快地改变小学算术脱离实际的缺点，教育部研究了缩短过渡时间的办法，即把各年级原教材内容适当精简，然后进行必要的补充，争取在三年内逐步补完。1958年9月，教育部发出“关于小学算术课本临时措施问题的通知”以及《小学各年级算术教材精简和补充纲要》。同时人民教育出版社编辑出版了一至五年级上学期补充教材和高小课本算术第三册（暂用本），供1958年秋季使用。随后编辑出版了各册的暂用本。至1961年春，高小算术第四册出版，就把初中算术的基本内容（包括比例）全部讲完。

这套暂用本虽然是临时性的，却是小学算术教学改革的重要转折点。首先，把初中算术下放到小学，提高了小学毕业生的数学水平，初步克服了学习外国经验中的教条主义的错误和小学算术教学严重脱离实际的缺点。其次，在全国城乡使用这套暂用教材，初步证明了小学6年学完全部算术基本内容是可能的，从而解除了一些同志对小学教完算术能否保证质量的担心和疑虑，结束了长期以来初中设一年算术课的做法。这在中小学数学课程内容的改革方面前进了一步。第三，改进了教材的编写形式，把讲解的内容和练习题分开，比较便于教师研究教材和进行教学。此外，还精简了一些不必要的内容，如繁难的应用题；对编排系统作了一些改进，如初小增加了几何初步知识。由于这套暂用教材带有临时性，主要解决初中算术内容移放到小学的问题，对内容的精选和编排还来不及深入研究，因此还存在一些问题，特别是还没有完全克服学习外国经验时结合中国国情不够的缺点。

四 进行改革实验，编写新教材

1958年9月，中共中央、国务院发出《关于教育工作的指示》。指出现行的学制需要积极地、妥当地加以改革，各省、市、自治区的党委和政府有权对新的学制积极进行典型实验，并组织力量编写中小学教科书。随后，各

地开展了缩短学制改革教材的实验。与此同时，对暂用本提出了不少批评，主要认为有些内容陈旧、重复、繁琐，知识之间缺乏联系。1960年，人民教育出版社根据各地的意见对暂用本的内容做了一些删减工作。

各地进行学制和教材的改革实验发展很快，到1960年上半年已有15个省市进行小学五年一贯制实验，此外还有其他的实验，如北师大的中小学九年一贯制实验。有些省、市或大学编出了小学数学教材，在大胆改革方面，做了一些有益的尝试。但是存在着“程度偏高，内容偏深，在结合实际和政治方面有片面性，……”1960年10月，教育部根据中央文教小组的指示，决定编写十年制中小学教材。确定编写时“坚决贯彻党的总路线和教育方针，”“在程度上要达到现行十二年制的水平。”人民教育出版社在总结建国以来编写数学教材的经验教训，进行社会调查以及研究各地改革实验等的基础上，拟定了《十年制学校数学教材的编写方案（草稿）》。确定在不提高程度、不改变课程体系的原则下，小学用5年的时间学完四二制小学的算术内容。1961年上半年编出《十年制学校小学课本算术（试用本）》共十册和珠算（试用本）一册。在这套新课本中进行了以下一些改革：1. 根据参加生产劳动和进一步学习的需要对教学内容作了一些调整，如简化市制计量单位，结合公制单位出现少数常用的市制单位，删去繁难的应用题等，增加循环小数、比例分配等。2. 运用辩证唯物主义观点分析和改进教材的编排体系。例如，减少整数的循环，根据我国的计数特点划分为“20以内”、“百以内”、“万以内”、“万以上”4个段落，每个段落各有重点；提早几何初步知识的教学，从第四册起，每册适当安排一些几何内容，并且注意与计算的适当联系；笔算与口算适当结合，20以内加减法以口算为主，100以内加减法以笔算为主，结合笔算学习简单的口算。3. 教学概念和法则时注意从实际引入。4. 去掉繁琐，注意突出重点，抓住关键，解决难点，总结规律，以便于学生举一反三。

这套新课本于1961年秋季出版供少数学校试用。同时编辑人员到试用小学校了解情况，总结经验。后来根据教师的意见做了必要的修改，主要是充实个别内容，补充一些练习题。这套课本一直用到1966年十年动乱开始。从试用的情况看，这套课本的教学效果是比较好的，改革的方向基本是正确的。1963年7月，教育部在《关于坚持进行中小学校教学改革实验工作的通知》中指出，“现在可以看出，五年一贯制小学完成六年制小学的教学任务比较有把握。”1964年6月，教育部发出通知，要求在秋季，大中城市要适当增加实验班，还要选择一两所二部制学校和几所县镇完全小学进行实验。十年动乱中这套试用本虽然停用，但是有些地区编写的教材仍参考了这套课本。通过这套课本的编写，编辑人员提高了认识，明确认识算术教材改革必须走自己的路，要注意总结本国的好经验，学习外国经验必须结合本国实际。进行算术教学改革必须运用辩证唯物主义观点分析问题，解决问题。任何改革都要经过实验，由点逐步推广到面，才可以避免出现大的失误。十年制学校小学算术试用本的编成，不仅为缩短学制创造了有利条件，而且为以后的算术教学改革开辟了道路，提供了有益的经验。

在完成十年制学校算术新课本的编写任务以后，根据教育部指示，人民教育出版社立即着手重新编写十二年制学校算术课本，同时参加了小学算术教学大纲的起草工作。这次重新编写课本的原则，主要有：“贯彻党的教育方针，结合我国教育的优良传统和当前社会主义建设的实际”；“合理地吸

收外国的对我有用的东西”，“加强基础知识的教学和基本技能的训练”，“适当提高程度”。为了贯彻上述编辑原则，人民教育出版社编辑人员进一步开展了调查研究，着重对解放后小学算术教学同解放前以及一些外国的小学算术教学进行比较，并征求数学家的意见，作为编写时的参考。同时总结了十年制学校小学算术课本的编写经验，以此为基础编写十二年制学校小学算术课本。1962年先陆续编出各册的试教本，从秋季开始在少数学校试教。经过修改后从1963年秋开始在全国供应初小算术第一册。同年，教育部颁发了六年制的《全日制小学算术教学大纲（草案）》。这部大纲和课本主要进行了以下一些改革：1.加强基础知识，提高了程度。对暂用本或十年制学校试用本中删减不适当的内容，如运算定律和运算性质，最大公约数的求法，圆锥的体积等，重新编入。此外，增加了棱柱棱锥的体积、复比例、一些典型应用题和记帐初步知识。2.编排方面，在十年制学校算术试用本的基础上，根据十二年制学校小学六年的特点作了一些调整，并确定“以四则计算为中心，其他各方面的内容，配合着四则计算进行安排。”考虑到初小高小适当分段的特点，在初小把整数分为“20以内”、“百以内”、“万以内”、“亿以内”4个段落，五年级再加以概括和提高；分数、小数各划分为两段，初小只限于初步认识，高小再系统讲授。3.加强数学知识的科学性、系统性、严密性。4.加强基本技能的训练，安排的练习题比较多。这套大纲课本的编成，不仅对提高60年代小学算术教学质量起了重要作用，而且对后来的改革产生了重要的影响。但是这套大纲课本也存在一些缺点，主要是程度偏高，增加了一些并不十分必要的传统内容，有些计算和应用题又偏于繁难，因而分量比较重。另外，对思想品德教育，大纲中未提，课本中也有所削弱。正式本只发行了前四册就停止出版。

1963年，人民教育出版社参照这套大纲和课本的精神，对当时全国正在使用的小学算术（暂用本）又进行一次修改。主要补充了原来不适当地删掉的一些内容，如运算定律和运算性质，最大公约数的求法，一些应用题；增加了循环小数、比例分配；对编排顺序作了一些必要的小的调整，如初小八册增加小数的简单计算；原来讲得过于简单和练习题较少的又适当加以补充。修改后的暂用本在程度和分量上比较合适，受到教师们的欢迎。随后，按照同样的精神对十年制学校小学算术（试用本）也做了修改。

在十二年制学校小学算术（试教本）停止实验后，为了继续研究算术教材改革的问题，编辑人员在修改课本的同时继续进行一些小规模的改革实验。例如，关于10以内加减法的编排问题，一年级在100以内加减法之后是继续教学较大数的加减法还是教学乘除法的问题，二年级提早教学珠算，使珠算与笔算更好地配合问题等。这些实验研究，对于后来的改革也提供了一些有益的经验。

五 适应社会主义现代化建设的需要，重新编写教材

1966年至1976年十年动乱期间，小学算术通用教材停用，改由各地编写课本。由于“四人帮”的干扰破坏和“左”的影响，小学算术基础知识和基本技能被削弱，教学质量严重下降。粉碎“四人帮”以后，各地纷纷要求编写全国统一的中小学教材。当时对如何解决急需的数学教材问题，曾有两种意见。一种意见认为，1963年课本是比较好的，只要重印或做小修改就可

以继续使用。另一种意见认为，随着科学技术的飞速发展，我国面临着社会主义现代化建设的任务，需要重新编写一套适应当前社会发展需要的中小学数学课本。

1977年在教育部直接领导下，组织力量重新起草十年制学校小学数学教学大纲，编写小学数学课本。这次起草大纲和编写课本有以下几个特点：1.认真分析和总结过去特别是60年代改革的经验和教训，仔细研究了十年动乱期间各地编写的教材，深入研究了最近一段时间外国小学数学教学改革的情况和经验，广泛征集各个产业领导部门、专家和教师的意见，在这些工作的基础上拟订编写方案。2.明确编写的指导思想：小学数学教学必须为社会主义现代化建设培养人才切实打好数学基础；遵循邓小平同志关于教材要“按照中小学生所能接受的程度，用先进的科学知识充实中小学的教育内容”的指示，选择学习现代科学技术所必需的数学基础知识作为教学内容；用唯物辩证法处理和阐述教材，注意理论联系实际；在进行知识教育的同时注意发展学生智力，培养能力，并对学生进行思想教育。考虑到这几点也是教师进行教学的指导思想，因此都反映在《小学数学教学大纲（试行草案）》中。3.坚持在已有的基础上进行改革，同时注意从当时我国的实际出发，既要积极，又要稳妥；对国外的改革，特别是数学教育现代化运动的经验，要慎重对待，防止重犯盲目照搬的错误；对国内的改革经验也必须是成熟的而有把握的才加以吸收。4.继续坚持一切改革要经过实验。

这次起草新大纲和编写新课本主要有以下一些改革：1.适当更新教学内容。采取了“精选、增加、渗透”六字方针。首先，精选传统的算术内容。对其中仍是学习现代科学技术所必需的基础知识和基本技能予以保留，而且保证学好；从发展上看学习意义不大的，如过繁的四则计算，繁杂的应用题，繁杂的名数化法和聚法，珠算三位数乘法和珠算除法等，予以删减。其次，适当增加代数、几何初步知识。其中包括用字母表示数，简易方程，简单的正负数计算，三角形内角和，轴对称，扇形等。第三，适当渗透集合、函数、统计等数学思想，但不作为正式讲授内容。这样改革的结果，传统的算术内容约占95%，新增加的内容仅占5%，比较切实可行，不致给教学带来很大困难。2.根据数学知识间的联系和学生的认识规律合理编排内容。首先比过去更重视遵循由易到难、循序渐进的原则。吸收了十年制学校小学算术试用本的经验，仍把整数分为四个段落，同时吸收了十二年制学校小学算术试教本的经验，把分数、小数也各分成两段。由于增加了列方程解应用题，也把应用题教学适当划分阶段，一至四年级上学期教学用算术方法解，四年级第二学期起教学用方程解，同时继续练习用算术方法解，并注意灵活运用。其次，注意知识间的联系。例如，加强概念与计算间的联系，10以内认数和计算、加法和减法分别穿插编排；加强作为笔算基础的口算，在笔算的基础上进一步提高口算；把珠算作为一种计算方式，不再单编一本，以加强珠算与口算、笔算的配合；提早几何初步知识的教学，并加强数和形的联系等。第三，渗透现代数学思想分散在各年级与有关的教学内容结合着进行。3.改进某些内容的讲法和教学要求。例如，精简公制计量单位的复名数四则计算，改为化成小数再计算；学过简易方程以后，一些逆向思考的应用题和分数除法应用题改用方程解；正、反比例概念的定义改成与中学代数的一致，正、反比例的问题改用方程解，以降低难度等。4.在加强基础知识教学的同时，注意发展学生智力，培养能力。例如，加强口算的教学，每种计算的教学，

注意在讲清算理的基础上通过练习使学生逐步达到熟练，适当加强简便算法的教学，以提高学生的计算能力。教学新知识时，加强直观，以便引导学生观察、分析、比较、综合、抽象、概括，有时提出问题，启发学生思考推理；教学应用题时，一般不再出现概括性的结语，而着重指出分析思路；中高年级编入一些有不同解法的和一些稍有难度的题目，以利于培养学生逻辑思维能力。此外还适当编入一些思考题，以培养学生肯于钻研的精神和善于灵活地思考的能力，但不作为共同要求。在几何教学中，注意安排实际观察、操作、制作、测量、画图等活动，以利于发展学生空间观念。5.在排版上有所改进。一方面增加插图，便于理解新知识，并激发学生学习的兴趣；另一方面改用双色版印刷，突出基本知识和重点内容，以增强教学效果。

1977年秋季起陆续编出试教本，先在少数学校试教。1978年2月，教育部颁发了《全日制十年制学校小学数学教学大纲（试行草案）》。同年秋季，《全日制十年制学校小学课本数学》第一册（试用本）出版，在全国开始使用。其他各册也陆续出版，到1983年全套课本出齐。这套大纲和课本出版以后，各地教育行政部门极为重视，积极组织教师学习大纲，钻研课本。但是也有一些同志对这次改革不甚理解，提出一些批评。例如，有的认为小学增加代数初步知识没有必要；有的不赞成课本中渗透集合、函数等数学思想；有的不赞成比例的处理方法；还有的反映教材分量重。如何对待这些意见？教育部领导和课本编辑人员没有采取60年代的做法，急于修改教材，而是加强宣传新大纲、新课本的特点，推广试教的经验，同时加强调查研究，了解课本使用情况，协助解决教学中的困难。1979年和1980年，教育部先后召开了两次中小学数学教材改革座谈会。在座谈会上，各地代表肯定了这套教材“对加强基础知识教学和能力的培养比较重视，在内容上适合儿童的特点，”“在提高教学质量方面已经取得了可喜的成果”。认为“作适当修改后，就可以作为正式本发行。”会上也提出对部分内容的调整意见，如二年级下学期删去小数乘除法，中高年级删去数目偏大的计算题，五年级删去正负数。还一致建议“试用本需要保持相对稳定”。

1981年，教育部颁发了《全日制五年制小学教学计划（修订草案）》。同年，人民教育出版社根据修订的教学计划，以及各地反映的意见（如三年级坡度较大，四年级分量偏重，发展智力培养能力措施不够有力等），对试用本做了如下修改：1.适当调整各册的分量。例如，第四册删去简单的小数乘、除法，三年级适当简化数目较大的计算，第十册删去正负数，从第七册起适当移一部分内容到下一册。2.加强知识间的联系。例如，教学“小数和复名数”时，增加计量单位间的进率的系统复习，加强分数运算意义与整数运算意义的联系，教了乘法分配律以后把它同长方形周长的简便算法联系起来等。3.在发展智力培养能力方面有所加强。例如，加强直观和学生动手操作，以便更好地引导学生分析、比较、综合、抽象、概括。教学某些新知识时增加了启发思考的问题。如教学三位数乘法，先启发学生联系两位数乘法来思考该怎样计算；教学圆的认识时，让学生想一想它是不是对称图形，哪是它的对称轴。还增加判断推理的练习，适当增加了思考题。修改后的课本改称《五年制小学课本数学》，从1981年陆续出版，到1984年全部出齐，一直使用到现在。目前这套课本，有的省城乡全部使用，有的省大部分地区使用，成为40年来质量最高、使用时间最长、最稳定的一套小学数学课本。

1980年以后，有少数省市改行小学六年制，以后教育部确定“小学学制

为五年、六年并存”。为了适应一些地区实行六年制的需要，人民教育出版社编辑出版了一套《六年制小学课本数学》，共 12 册。在程度上与五年制课本相同。只在编排上，为适应六年制小学的特点，做了一些小的调整，以便使各册分量比较均匀，又各有重点。另外练习稍有增加。从 1984 年开始出版供应，到 1985 年全部出齐。

1986 年 12 月，国家教育委员会颁布了《全日制小学数学教学大纲》。这部大纲是在 1978 年《大纲（试行草案）》的基础上，根据中央有关文件精神，总结八年来教学实践经验修订而成的。由于这部大纲照顾到现行教材的稳定，在教学内容的安排上（包括五年制和六年制）不做大的变动。但是在以下几方面改得更加明确具体：1. 突出小学数学在义务教育中的作用；2. 强调结合数学教学内容对学生进行思想品德教育，培养良好学习习惯；3. 强调在加强基础知识教学的同时，更重视发展智力，培养能力；4. 根据进一步学习的需要和学生接受能力修改各年级的教学要求；5. 强调改革教学方法。这部大纲的颁布，对指导现阶段小学数学教学改革，提高小学数学教学质量，具有十分重要的意义。

六 深入进行改革实验研究，为编写 90 年代教材做准备

现行小学数学通用教材虽然做了一些较大改革，质量比过去的有较大提高，基本上适合我国的国情，但是限于当时的条件和编辑水平，也还存在一些缺点。随着我国社会主义现代化建设的逐步发展，国内外数学教学改革的逐步深入，日益显现出教材有些地方与形势发展的要求不相适应。90 年代在全国将要实行九年义务教育，对小学数学教材提出了更高的要求。为了探讨小学数学教材如何进一步改革，以适应提高全民族的素质，为培养社会主义现代化建设人才切实打好基础的需要，从 1984 年开始新的改革实验研究。这次改革实验着重研究以下几个问题：1. 如何进一步精选小学数学教学内容以适应我国社会发展和进一步学习的需要；2. 如何建立合理的教材结构；采取哪些具体措施，使学生既能较快地掌握基础知识，智力和能力又得到较好的发展；3. 如何在教材中做到既有统一要求又便于因材施教；4. 如何使教法改革与教材改革相配合。为了把这项实验切实建立在科学研究的基础上，首先进行了一系列的调查研究，然后确定改革的指导思想，拟订改革实验方案，编写实验教材。实验选点采取从少到多逐步扩大试点的方法。在实验过程中深入试点班听课研究，加强实验效果的检测与评价。目前已经完成第一轮两个班的实验工作，获得比较好的效果。1986 年秋季在全国 100 多所学校 200 个班进行的实验，也取得较好的效果。现在实验的班数还在扩大。这项改革实验工作的开展，不仅为编写 90 年代实行义务教育用的小学数学教材做了准备，还为各地培养了一些骨干教师，从而为大面积使用新的数学教材做了较好的准备。

七 结束语

从回顾中可以看出，四十年来小学数学通用教材，从无到有，从质量较低到质量较高，经历了一个十分曲折的改革和发展的过程。这是因为编写具有我国社会主义特色的小学数学教材，是前人没有经历过的，需要我们亲自

去探索编写的规律，逐步积累和总结编写的经验。从四十年来正反两方面的经验中，我们受到的教育和启示，可以归纳为以下几点。

（一）坚持从中国的实际出发，走自己的路。这是小学数学教学改革中最深刻的一条经验教训。追溯到清末民初，小学算术教材先学日本的，20年代开始改学美国的，50年代又改学苏联的，都因忽视结合中国实际，没有收到好的效果。邓小平同志在党的十二大上说：“无论是革命还是建设，都要注意学习和借鉴外国经验。但是，照抄照搬别国经验、别国模式，从来不能得到成功。”60年代以后，由于端正了学习外国经验的态度，重视从中国的社会主义建设需要出发，才使得我们的教材改革工作逐步获得较大的发展。

（二）必须坚持以唯物辩证法作指导。编写小学数学教材是数学教育科学的一个重要组成部分，进行数学教育科学研究，必须有正确的研究方法。和其他科学研究一样，它的一般方法论基础就是唯物辩证法。50年代初，除了编写方针方面存在问题以外，编辑人员还不懂得如何运用唯物辩证法来分析和处理小学数学教材编写中的问题，给小学数学教材改革工作造成一定损失。60年代初，开始学习运用唯物辩证法分析和解决小学数学教材中的问题，如整数内容的分段问题，处理知识间的关系问题，突出重点和揭示规律问题等，收到了初步的效果。十年动乱以后，逐步提高了运用唯物辩证法分析和解决问题的自觉性，如处理口算和笔算的关系，简易方程的安排，渗透集合、函数等数学思想，改进比例的讲法等，经过实践证明，都收到较好的效果。

（三）明确小学数学教材改革的长期性和分阶段性。小学数学教学是为一定的社会的政治、经济和科技发展的需要服务的。由于社会总是不断地发展变化，小学数学教材也就不能一成不变，要随着社会发展需要而变化。50年代，由于小学数学教材机械地学习外国经验，降低了程度，落后于社会发展的要求，是个很大的错误。但是，也不能超越社会发展的客观条件和要求。例如，63年新编六年制小学算术教材过多地增加内容，试图提高程度，超过了教师和学生的承受能力，是值得记取的经验教训。另外一个经验教训是，教材改动过于频繁，使教师无所适从，也给教学带来很大困难。实践表明，改革是一个长期的不断的过程，但是必须分阶段进行，在一定时期应保持教材的相对稳定。十年动乱以后，由于正确处理小学数学教材的不断改革和相对稳定的关系，得到教师们的拥护，便于教师积累教学经验，促进了小学数学教学质量的提高。

（四）教材改革必须经过实验。实验是进行科学研究不可缺少的方法。50年代，一方面受客观条件的限制，另一方面对进行实验的意义认识不足，编写的教材除了个别内容如农业生产合作社简单簿记外，都没有进行实验。60年代进行改革，通过实验不仅解决了教材编写中的一些困难问题，而且编辑思想有了较大提高。十年动乱以后，坚持把实验工作作为编写新教材的一个重要环节，解决了编写中把握不大的问题，如100以内口算、笔算的安排，简易方程，分数除法应用题和比例的讲法等，提高了开展科学实验的自觉性。

（五）编辑人员必须不断学习，提高自己的水平。这是进行小学数学教材改革工作的关键。编写小学数学教材是一项科学研究，需要综合运用教育学、心理学、逻辑学等对数学内容进行教学方法的加工。这就需要编辑人员具有较高的业务知识水平，如前所述，还必须具有较高的辩证唯物主义思想水平以及正确掌握党的方针政策的水平。此外，还需要有一定的小学数学教

学经验。要达到上述条件，就必须不断学习，不但要向书本学习，还要向有实践经验的教师学习。而且随着现代科学技术的发展，对编辑人员的学习不断提出更新更高的要求。我们虽然参加小学数学教材编辑工作多年，但是同上述条件和要求还有一定差距。在庆祝新中国成立四十周年之际，我们深愿继续学习，提高自己，为完成小学数学教材的进一步改革任务而努力奋斗。

（本文原载于《课程·教材·教法》1989年第10期，与李润泉合写。）

小学数学教材体系问题的探讨

小学数学教材体系是小学数学教材研究中的一个重要问题。小学数学教学内容确定以后，在组织和编排上是否合理，直接关系到能否使学生顺利地掌握数学基础知识，有效地培养学生的能力。

一 历史上关于小学数学教材体系的变革情况

早期的小学算术教学，不研究教学内容的合理组织，基本上是按照成人学习算术的顺序，采取直线前进的编排方式。17世纪，J.A.夸美纽斯提出了教材编排要有系统性，强调教学内容的分配应与年龄阶段相适应。18世纪，J.H.裴斯特洛齐进一步提出算术的具体教学顺序，如先教一位数，再教两位数，强调从心算开始。以后一些教育家发展了他的思想，对整数采取圆周式排列。这样就形成了整数教材编排系统的雏形，而且一直沿用到20世纪。

20世纪初，以美国J.杜威为代表的实验主义教育兴起，强调教育从儿童的兴趣出发，课程应该心理化。他们提出按生活单元编排教材，把算术内容分别组织在各个单元之内。由于这种编排方式不能使学生获得系统的算术知识，结果造成学生的算术成绩下降。以后，人们开始提出，采用论理的组织教材的方法和心理的组织教材的方法，不可偏废；但是强调低年级宜用心理的组织方法，高年级宜用论理的组织方法。1949年以前中国的小学算术课程标准中规定低年级算术课采取随机教学就是这个道理。

40年代末50年代初，苏联A.C.普乔柯提出，小学算术教材的编排要反映算术发展的逻辑性，同时也要照顾到学生年龄的心理特征。他强调把两者适当结合起来考虑的观点，在建立小学数学教材体系的原则方面前进了一步。他的这种观点对新中国算术教材的编排体系有很大的影响。

60年代兴起的数学教育现代化运动，小学算术的教学内容发生很大变化。从此学科的名称改为“小学数学”，相应地教材体系也有了很大改变。一方面由于数学本身的发展，趋向于研究数学的结构，把数学各分支组成统一的整体，从而一些数学家提出，小学也要体现现代数学思想，注意培养学生用演绎的方法进行逻辑推理的能力；另一方面一些心理学家也提出学习要注重理解学科的基本结构。在这些思想的影响下，小学数学教材改为主要按数学的逻辑顺序来编排，结果给教学带来很大困难。70年代末80年代初，一些按照上述原则编写的课本，都做了修改。在中国，由于注意吸取其他课本的经验教训，在小学数学教材编排方面避免了走弯路。

二 建立合理的小学数学教材体系应遵循的基本原则

简要地回顾历史可以看出，小学数学教材体系的变革经历了一个曲折的发展过程。变革的中心问题是如何看待和处理数学的逻辑顺序和儿童的心理发展顺序之间的关系。即使到现在，在这个问题上也存在着一定的分歧。因此进一步分析研究这个问题，对于改进小学数学教材的体系和提高小学数学教材的质量是有益的。

首先，分析一下数学的逻辑顺序在小学数学教学中的作用。数学的主要特点是它具有抽象性和逻辑严密性。小学数学是由算术、代数初步知识和几

何初步知识等综合构建而成的一个学科，必须尽可能反映数学的逻辑系统性，使前面的内容成为后面的学习基础，使后面的内容在前面的基础上扩展和提高。这样才便于学生掌握数学的概念和法则，并有助于发展学生的逻辑思维。

其次，分析一下儿童的心理发展顺序在小学数学教学中的作用。小学生的认知特点是由近及远，由局部到整体，由浅入深，经历多种水平才达到比较完全的认识；其思维特点是由具体形象思维逐步向抽象逻辑思维过渡。要使抽象的数学内容容易为小学生所接受，就不能完全按照数学的逻辑顺序来编排，而要适应小学生的认知发展特点，对数学内容进行教育学、心理学的加工，使数学教材的编排顺序与学生的年龄特点相符合。也只有这样才能切实地逐步地发展学生的抽象逻辑思维能力。

因此，为要建立合理的小学数学教材体系，必须遵循这样一条基本原则，即把适当反映数学的逻辑系统性和适应儿童的认知发展规律恰当地结合起来。具体怎样贯彻这一基本原则呢？根据我们的实践经验有以下几点体会。

（一）正确地分析每一数学知识的要素以及各要素之间的联系，清楚地了解儿童学习每一数学知识的心理特点。这是贯彻好上述原则的重要前提。这样的分析研究可以为编排教材提供可靠的依据。

（二）要把数学的逻辑系统性与儿童的认知发展规律的恰当结合看作是一个动态的变化的过程。因为儿童的思维和所形成的认知结构是在不断发展的，所以小学数学内容的逻辑系统性的水平也要随着逐步改变和提高。一般地说，在低年级要较多地考虑儿童的认知发展特点，同时适当注意数学内容的逻辑系统性；在高年级可以较多地注意数学内容的逻辑系统性，但是也要注意根据内容的抽象程度和儿童的认知特点对数学的教学顺序做适当的调整。

（三）编排教材的方式是多种多样的，具体如何编排要根据教学内容的难易和学生的年龄特点而定。例如，低年级或较难的内容多采用螺旋式排列，高年级或较易的内容多采用直线式排列。

（四）遵循上述基本原则，有些内容可能安排在不同年级或有不同的编排顺序，这就需要通过对比实验找出安排的最佳期或最佳顺序。

三 建立小学数学教材体系值得研究的几个问题

要建立合理的小学数学教材体系，除了贯彻上述基本原则以外，还需要解决好一些较为具体的问题。本文着重研究以下几个问题。

（一）加强各部分知识间的联系，建立小学数学的整体结构

D. 希尔伯特指出过，数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正在于各部分之间的联系。小学数学虽然是一个学科，但也必须注意数学知识间的联系，使各部分知识形成一个有机整体。这样才便于学生理解和掌握，有利于给学生建立良好的认知结构。为此，要注意分析各部分知识间的联系，处理好它们之间的关系。

在小学数学中，算术知识仍然是核心的内容，是最基础的知识，因此必须先教学，而且要放在重要的位置。代数初步知识主要包括用字母表示数，简易方程等，比算术知识抽象，宜于在学生掌握一定的算术知识的基础上进行教学。在编排时可以使它和算术知识适当配合。计量的初步知识，特别是

单位间的进率和名数的变换，也需要一定的算术知识做基础，因此编排时必须考虑到学生认数和所学的计算范围。图形知识本来和数有着密切的联系，因此编排时也要注意与数的计算密切配合。简单统计知识更是离不开数和数的运算。至于应用题，它反映了各部分知识如何应用于实际，与各部分知识都有密切联系，但是首先也是与数和数的运算的联系。由上面分析可以看出，在考虑小学数学教材的整体结构时，要以数和数的运算为主线，其它各部分知识适当与其联系和配合，同时也要适当注意各部分知识的内在联系和逻辑系统。

（二）小学数学教学内容的分段问题

从一些教科书的编排情况可以看出，在这个问题上还存在一些分歧。分歧的实质是采用圆周式编排还是采用直线式编排。对于整数内容，都采用圆周式编排，即划分几个阶段，意见比较一致。对于其它一些内容，在编排上则有不同的处理。例如小数或简易方程，有些课本采用了直线式编排。因此有必要从数学的发展和儿童的认知发展进行一些分析研究。首先，数学概念的发展是一个不断反映现实世界数量关系的矛盾和不断解决这些矛盾的过程。这就要求小学数学教学内容尽量反映数学概念的逐步发展的过程。其次，儿童的认知发展也是一个由浅入深经历多种水平或阶段的渐进过程，不可能一次完成。因此安排小学数学教学内容时，宜于适当划分阶段。这一原则不仅适用于整数，也适用于其他的内容。至于每部分内容划分几个阶段合适，要根据各部分内容的分量、难易程度以及教学对象的年龄而定。当然，在采用分段教学时，要注意各阶段有不同的重点，并体现循序渐进，逐步提高；同时注意防止把知识分得过于细碎，或出现一些不必要的重复。

（三）突出数学的基本概念和基本规律

现代心理学家认为，无论教什么学科，务必使学生理解该学科的基本结构。小学数学要建立良好的教材体系，也要处理好本学科的结构问题。为此，必须突出数学的基本概念和基本规律。这个问题处理好，既便于学生掌握数学基础知识，又有利于发展学生的思维能力，还可以节省教学时间。要做到这一点，有以下几点值得考虑：

1. 按照基本概念之间和基本规律之间的内在联系，并根据小学生的可接受性，建立概念的和规律性知识的系统。例如，教学小数的初步认识宜于放在分数的初步认识之后，以便建立小数与分数间的联系；教学平面图形的认识要按照图形之间的内在联系来编排。

2. 以基本规律为主线，循序渐进地安排每一部分教学内容。例如，20以内的进位加法，为了突出“凑十加”的计算规律，宜于按照9加几、8加几……的顺序来编排。

3. 每一部分数学知识，注意突出基本的、关键性的内容。例如，除数是两位数的除法，关键是解决商一位数的试商方法，就要根据两位数除的试商特点来编排。

4. 注意加强知识的联系对比，以便于学生分清基本概念和基本规律，防止发生混淆。

（四）小学数学与其它学科的配合

学校中任何一个学科的教学都不能孤立地进行。特别是作为工具性学科的数学，更要注意与其它学科的联系和配合。一方面小学数学需要其它学科做基础。如语文课给学生打下初步的识字、阅读基础，才便于安排解答应用

题。另一方面，安排数学教学内容时，要尽量注意适应其它学科的需要。如语文、常识课需用的一些计量单位，在不给学生增加学习困难的前提下，应尽量提早安排。

参考资料

曹孚《外国教育史》，人民教育出版社，1962年版。

.B.赞可夫《论小学教学》，教育科学出版社，1982年版。

J.S.布鲁纳《教育过程》，文化教育出版社，1982年版。

C.F.Green《Elementary School Mathematics》，D.C.Heath and Company，1974。

曹飞羽、李润泉《课程·教材·教法》1989年第10期，“四十年来小学数学通用教材的改革”。

（本文是1990年向课程发展与进步国际研讨会提交的论文，原载于《课程发展与社会进步——国际研讨会论文选》，1992年。）

运用心理规律 改革教材教法

课程教材研究所编写的《小学实验课本数学》的实验工作，从 1986 年秋开始，到 1991 年暑假，已经圆满结束。五年的实验取得了很大成绩，比较普遍地提高了小学数学教学质量，不仅提高了及格率，而且学生的能力得到较好的发展，培养了一些数学能力较强的优秀生；提高了学生学习数学的兴趣，为进一步学习打下了较好的基础。我们当初的一些改革设想，经过实验现在需要认真地分析和总结，一方面把好的经验加以整理，坚持下去，另一方面把不很成功的地方加以分析，找出原因，然后加以改进。我们实验获得成功的原因很多，有各地领导的支持，有教研人员深入实际的工作和指导，有教师的认真钻研和辛勤的教学实践，也有实验教材的改进。这里着重谈谈怎样在教材和教学中运用心理规律的问题。教育的基本目的是促进人的身心的全面发展，而要做到这一点，就必须考虑学生身心发展的特点，遵循学生身心发展的客观规律。学生身心发展的规律涉及到心理学的许多分支学科，而且规律是很多的。有些还在进一步探索中。这里只能选择一些对小学数学教学有重大影响的规律，结合实验教材和教学实践，谈一些体会。

一 建立比较合理的教材结构

小学数学教学实验要取得较好的效果，很重要的一点就是要建立比较合理的教材结构。而这一点与较好地运用现代教学论和心理学规律有密切的联系。什么是教材结构？目前还没有完满的定义，一般认为，一个学科的教材结构首先要反映这门学科的知识结构。而一门学科的知识结构，按照心理学家布鲁纳的说法，就是学科的基本概念、基本原理、基本方法以及它们之间的相互联系。他强调学生懂得了学科的基本结构，就可以理解和掌握整个学科的基本内容，并能够促进迁移。要搞好小学数学教学，就要弄清教给学生哪些基本概念、基本原理，它们之间的联系是怎样的。例如，从较大的范围说，掌握了整数计算法则就便于学习小数计算法则；掌握了整数运算定律，就容易推广到小数和分数。从较小的范围说，两位数除法的基本结构是用两位数除两、三位数商一位数的除法，这部分知识学好了，商多位数就没什么困难，进一步学习三位数除法也比较容易；解答一步应用题是解答两步应用题的基础，如果在解答一步应用题时合理地组织教材，重视分析数量关系和选择运算方法，教学解答两步应用题时注意与一步应用题的联系，并注意突出两步应用题的结构，学生也是不难掌握的。因此，一个学科的教材结构必须是能反映这个学科的各要素、各成分（包括知识、技能、智能、思想观点等）之间合乎规律的组织形式。

但是一个学科的教材结构，不是简单地反映这个学科的知识结构就行了，它还受着学生心理特点的制约。一个学科的基础知识要能为学生所掌握，它的组织形式必须考虑学生的认知心理特点和认知的方法，便于使学科的知识结构转化为学生的认知结构。所谓认知结构，概要地说，就是学习者在头脑中形成的知识经验和组织系统。只有当教材的结构既较好地反映学科的知识结构，又较好地适应学生的认知心理特点时，才能在学生的头脑中形成有关一个学科知识的正确的认知结构。

历史上关于小学数学教材的组织有过不同的处理。大致来说，早期的小

学算术，基本上是按照成人学习算术的顺序，采取直线前进的编排方式。这对初学的儿童是比较困难的。17世纪以后，一些教育家提出教学内容的分配应与年龄阶段相适应，小学算术教材开始对整数采取圆周式（或称螺旋式）编排方式。这样就形成了整数教材编排系统的雏形，而且一直沿用到20世纪。本世纪初，以美国教育家杜威为代表提出的儿童中心论，强调教育要从儿童的兴趣出发，课程应该心理化。随后有人提倡“单元教学”，按生活单元组织教材，把算术内容分别组织在各个生活单元之内。这样编排虽然比较适合儿童的年龄特点，但是不能使学生获得系统的算术知识。针对上述编排的弊病，有的教育家提出，采用论理的组织方法与心理的组织方法不可偏废。但是强调低年级宜用心理的组织方法，高年级用论理的组织方法。60年代数学教育现代化运动，一些教育家、心理学家强调注重理解学科的基本结构，小学数学教材又改为主要按照数学的逻辑顺序来编，结果给教学带来很大困难。从历史上可以看出，小学算术（或数学）教材的结构尽管多次改变，有一点是共同的，即把数学的系统性与儿童的心理特点割裂开来。现代教学论趋向于把学科的逻辑顺序与儿童的心理发展顺序适当结合起来。这就为我们编写实验教材考虑建立合理的教材结构指明了方向。但是要贯彻好这一原则并不是轻而易举的。安排教材时既要正确地分析每一数学知识的要素以及各要素之间的联系，又要考虑学习这一知识的儿童的年龄心理特点。例如整数和整数四则运算，长期以来根据儿童的年龄特点采用螺旋式编排，这是正确的。但是根据我国的计数制度和学生的学习心理特点，划分几个阶段更为合适，就需要认真研究。现行五年制三年级认数从万一直扩展到千亿，不仅教学多位数四则运算，而且教学四则运算的意义和定律，从数学的逻辑系统看是可以的，但是从儿童的年龄特点，特别是从三年级儿童的抽象逻辑思维发展水平还较低这一点来看，就不合适了。这也就是导致三年级学生数学成绩出现“马鞍形”的重要原因之一。为此，实验教材把三年级认数的范围先扩展到亿，理论知识只限于四则运算各部分之间的关系，而把亿以上数的认识、四则运算的意义和定律移到四年级，效果就比较好。再举一个例子，现行五年制二年级出现小数的初步认识，由于结合元、角、分的认识来讲，学生还是可以接受的。但是从数学逻辑系统性来考虑就不够理想。这样教学，学生对小数的概念不清楚，对进一步学习小数不能很好地发挥打基础的作用。实验教材把小数的初步认识后移，放在分数的初步认识之后，加强两者的联系，并且采取小步子，先教学一位小数，再教学两位小数，这样编排，既符合数学的逻辑系统性，又适合儿童的年龄特点。实验表明，这样教学，学生获得比较清楚的小数的初步概念，为进一步学习分数、小数打下较好的基础。

由此可见，建立合理的小学数学教材结构，不仅是一个数学问题，在很大程度上还是一个心理学问题，是一个如何处理好两者的关系的问题。这个关系处理得好，不仅使学生容易掌握数学基础知识，而且有助于培养能力。

二 遵循儿童的认知规律

按照一些心理学家的看法，学生的学习是认知活动，尤其是思维活动的概念化或类型化过程。人的认知活动是有它的客观规律的。如布鲁纳把人的学习分为动作的、映象的和符号的三种表现，或称三个发展阶段。加里培林

则提出人的智力活动形成过程有 5 个阶段：1. 活动（动作）的定向阶段；2. 物质的（指操作）或物质化的（指模型、图解、标本等）阶段，并指出这是“完备的智力活动的源泉”；3. 出声的外部言语活动阶段，即用言语表达活动，实际是形成表象；4. 不出声的外部言语阶段，这是向智力水平转化的开始；5. 内部言语阶段，即概括的、简化的表述。尽管这些心理学家所用的术语和划分的阶段不同，但是在认知或智力活动的顺序上有共同之点。一般可简单地概括为：动作、感知 表象 概念、规律 符号。其中对动作阶段都十分重视，特别是对儿童来说非常重要。有些儿童心理学家研究表明，早期的儿童是在动作中思考的，儿童的心理活动是在实践活动中形成的。皮亚杰的研究认为，儿童认知发展的第一阶段主要是靠感觉和动作探索周围世界。柳布林斯卡娅则指出，这种“用手思维”的形式不会随着更高级的形式，即逻辑思维的发展而消失。由此可见，这一认知规律在整个小学阶段都具有普遍性。

根据这一规律，我们在实验教材中增加了操作，加强了直观。不仅在低年级，就是在高年级遇到比较抽象难以理解的数学概念或法则，也注意利用操作。例如，教学约数和倍数这一单元，实验班老师配合教材增加了操作，收到很好的效果。不仅在教学认数和计算时，充分运用操作，就是在教学简单应用题时，也通过操作引导学生分析数量关系，确定运算方法的选择。例如，教学求两数相差多少的应用题时，让学生摆 6 朵红花，4 朵黄花，引导学生说出红花可以分成哪两部分，理解从 6 朵红花中去掉和黄花朵数黄花同样多的部分，剩下的部分就是红花比黄花多的朵数，因此要用减法计算。由于通过操作和分析，在学生的头脑中形成关于这种应用题中较大数与较小数的数量关系的表象，理解为什么要用减法算，而不是死记应用题类型和解法公式，有效地提高了学生正确解答应用题的能力。实验班教师在实践中创造和积累了大量的有关操作的经验。例如，设计和制作合适的操作作用的学具；有计划有步骤地引导学生操作，并且注意节省教学时间；根据心理学中智力活动形成的过程，表象与感知、思维的联系以及思维与语言的联系，把操作、思维与用言语表达紧密结合起来。有些教研人员和学校领导还把实验班的经验介绍到其他学校、班级，也收到了较好的效果。

三 按照学习心理学的规律呈现教材

这次编写实验教材力求在这方面有所改进，以便于教师基本上按照课本的顺序进行教学，能收到较好的教学效果。学习心理学的规律很多，实验教材中着重在以下几点力求有所体现。

（一）激发学习的动机，提高学生学习的兴趣

学习动机是直接推动学生学习的一种内部动力，是提高学习效果的重要条件。教材中如果在这方面处理得好，就便于教师更好地调动学生学习的积极性。实验教材中在这方面做了一些努力，根据教学内容的不同情况来引起学生的学习动机。例如，第三册第 11 页，“除法要算得又对又快，就要学会用口诀求商。”使学生明确学习的目的性。第八册开头，“我们学过计算长方形的面积，平行四边形的面积该怎样计算呢？”用提出问题的方式，激发学生的求知欲。在实验中有不少老师非常重视这一点，往往在一节课内不断地提出启发性问题，引导学生思考，充分调动学生学习数学的积极性。有的

老师还总结了这方面的经验。

（二）加强算理的教学

教育心理学十分强调整解在学习知识中的作用，“只有通过理解才能迅速地占有前人的认识成果”。有的心理学家提倡有意义学习，避免机械学习，并用实验结果说明前者优于后者。实验教材比现行教材在这方面有所加强，特别是通过操作、直观加强算理的教学，比较符合儿童的年龄特点。例如，教学乘法口诀，注意通过操作使学生理解口诀的来源，而且教给学生当忘记某一句口诀时如何利用其他口诀推导出来。教学一位数除两、三位数，一方面从已学的口算引入，帮助理解笔算除法的过程，另一方面加强直观，说明每次除的是几个百或几个十，商是几个百或几个十，余下的是几个百或几个十，怎样和低级单位的数合并再除。学生明白算理就比较容易掌握除的顺序和商的位置。

（三）加强学习的反馈

反馈原理是控制论的一条重要原理，现在广泛应用到心理学。心理学家认为，加强学习的反馈是有效的教学原则之一。教育心理学上的所谓反馈，是使学生知道自己的学习结果，当然与此同时教师也获得学生学习情况的信息，以便及时采取措施，调整教学。心理学家通过实验证明，学习结果的反馈对学生的动机有很大的激励作用，有利于学习成绩的提高。根据这一原理，实验教材中每教学一部分新知识，都安排“做一做”练习，藉以使师生都能及时看到对新知识的理解和掌握的情况。此外还注意通过多种练习形式来加强反馈的效应。不少实验教师根据这一原理，在课堂教学中运用适当的手段，及时收集反馈信息，特别注意了解后进生掌握新知识的情况，并及时采取措施，予以补救。这样做，不仅激发了学生学习数学的积极性，而且提高了课堂教学效率。

（四）重视学习结果的保持

学习结果的保持是学习过程中的重要一环，如果边学边忘，那就一无所得。因此它是心理学家研究的重要课题之一。心理学家研究的遗忘和保持的一般规律，增进记忆与保持的效果的重要条件，对于小学数学教学有重大的指导意义。在实验教材中力求根据学习心理学的研究成果，改进编写方式。主要有以下几点：

1. 重视有意义学习，加强算理教学，以便好记，记得牢。

2. 加强知识的联系和对比，既促进联想，又防止混淆。实验班老师根据教材精神，也加强这方面的教学，反映效果很好，并且积累了很多好的经验。

3. 每部分知识都注意按照心理学关于练习的效应的研究来安排练习，一方面适当分散练习，另一方面加强混合练习，防止单打一；并且经常带着复习已学的，而且随着学习时间的延长，复习重现的间隔也适当加大。

4. 每单元最后加强整理和复习，通过整理复习使学科的知识结构更便于转化为学生的认知结构。教育心理学强调复习的合理组织，特别是把新的信息“嵌入”业已形成的认知结构之中，是保持学习效果的一个重要条件。

由于采取以上一些措施，实验班教师反映，使用实验教材，不需要过多的集中复习，只要注意平时的复习整理，即使遇到事先无准备的检测，也能取得较好的成绩。

（五）重视学习结果的评价

教育心理学十分重视学习结果的评价。按照信息论的观点，评定成绩具

有反馈的功能：1. 促进学生学习的进步，巩固所学的知识技能，更明确努力学习的目标；2. 促进教师的教学改革，调整教师的教学工作；3. 促进课程、教材的改进，这一点对我们编写实验教材来说非常重要；4. 向家长、学校、行政反映情况，作为采取措施的重要依据。五年来我们坚持有计划、有目的的评价，每学年除了定期的成绩测试外，还请教师和教研员填写教材意见表，还有数学能力测试以及其他必要的专项测试，最后还请学生、教师、教研员、学校领导填写教材评价表。这些都是进行实验不可缺少的工作。我们收到评价结果的材料后，及时进行统计，并把结果反馈给各实验点，以便充分发挥其反馈功能。

关于学生成绩的评定方法，教育心理学一般都是介绍非标准化测验和标准化测验，分析其各自的优、缺点。另外就是介绍布卢姆的目标分类检测。近年来国外对标准化测验提出较多的批评，指出标准化的选择题不能充分反映考试者的水平，应选用多种形式的考试去测量教育的效果。至于布卢姆的目标分类检测，国内外也有一些评论。有的认为对提高教学效果有一定作用，但是也有人（如美国的格罗夫）认为，把目标分成几个细小的目标，是把教学目标这一复杂的行为简单化。在目标的分类中各种行为是有联系的，特别是把记忆信息或知识作为第一水平，容易导致机械的记忆。此外布卢姆的检测方法基本上是与标准化测验联系着的。而美国近来对这种标准化测验批评很强烈。根据近年来数学成绩评定方法的改革趋势，我们采取了另一种试验，吸收各种评定方法的优点。对每单元或课题除了提出教学目标外，还就小学数学几个主要部分提出单元末的、期末的量化指标。这种指标是一般学生经过努力大都可以达到的，经过试验发现指标不合适再适当加以调整。在测试时加强了分项测试，以便全面考查学生的知识能力。例如口算，每学期都有一定量的测试题，以利于逐步提高学生的口算能力。每学期的测试题还混有少量已学的，以利于巩固和提高已掌握的知识技能。另外，加强基础知识和基础技能的考查，同时避免出死记硬背的题目，而注意适当灵活，以考查学生的能力发展情况。经过几年来的试验，效果是比较好的。一方面及格率比较高，而另一方面满分率不高。这反映出大面积学生达到了基本要求，同时又比较容易区分出学生在能力上的差异。这样，通过成绩的考查和评定，促进了全体学生学习数学的积极性。许多地区在总结性测验和本地统一考试时，把实验班与普通班进行了对比，大多数实验班成绩优于普通班。

四 重视培养能力

这次实验强调紧密结合数学基础知识的教学，注意培养学生能力。我们根据教育心理学和能力心理学，着重研究结合数学的特点，在小学数学教学中主要培养哪些能力，以及如何有效地加以培养。我们认为，主要有以下三个方面。

（一）计算能力

在这个问题上一些心理学家是有不同看法的。例如，前苏联的克鲁捷茨基认为，计算不能说是能力，只能说是技能。但美国的施莱辛格和格特曼认为，计算能力是三种基本能力之一（另外两种是言语能力，形状和空间能力）。我们倾向于后一种看法。根据心理学的研究，技能有两种。一种是操作技能，它是由一系列外部动作构成的，主要是通过骨骼肌肉的动作来实现的，如打

字、骑自行车等。另一种是智力技能，是在头脑中借助于内部言语进行活动的，如默读、计算等。它们是智力发展和能力形成的重要因素。另外，能力心理学也承认，能力除了一般能力（也可统称智力）外，还有符合某种专业活动要求的一些特殊能力。从小学数学教学要求来看，计算不只是简单地机械地按照一定规则进行操作，得到正确结果就行了，还要求迅速、合理、灵活，而这些同思维的敏捷性、逻辑性、灵活性有密切的联系。学生要善于根据不同的情况采用简便的算法，善于简缩思维过程。根据以上分析，计算应该看作是一种特殊能力。

为了较好地培养计算能力，实验教材加强了口算和简便算法，增加了估算；加强算理的教学；一道式题有多种算法的，鼓励学生想出不同的算法，并且找出简便的算法，提出正确、迅速的试行量化指标；并且根据教育心理学关于运算技能的形成安排练习。初步实验效果是比较好的，很多实验班教师积累了不少好的经验。

（二）初步的空间观念

很多心理学家认为，空间能力是基本能力之一。这一点在前边也提到了。空间能力是什么？据心理学家研究，儿童的空间能力是逐步发展的，大体有三个层次。首先是空间知觉，是反映物体的主体状态及其在三维空间的关系的知觉，其中包括物体的形状、大小、距离、深度、方位等的知觉。它们是形成空间观念和空间想象力的基础。学前儿童主要是发展空间知觉。到6、7岁时儿童开始理解图形的特征，在头脑中逐步形成几何形体的形状、大小、相互位置关系等的表象，通常称为空间观念。小学阶段主要是发展初步空间观念，初中还要继续发展。空间想象力是空间能力发展的高级阶段，是中学几何教学的一项重要任务。所谓空间想象力主要是指：1. 根据所给图形的名称能画出图形，在头脑中能分析图形的基本元素之间的度量和位置关系（如平行、相交、垂直等）；2. 借助图形想象出客观物体的空间形状及位置关系，并用言语或式子表达；3. 能从复杂的图形中区分出基本图形，并分析它们之间的关系。可以明显地看出，小学几何初步知识的教学也包含上述的某些因素，当然还是比较初步的。根据上面的研究，我们认为，在小学虽以发展空间观念为主，但其中也渗透一些发展初步空间想象力的因素，它是发展空间能力的一个重要组成部分。

为了达到上述目的，实验教材从一年级起就有计划地安排几何初步知识的教学，适当减少求积计算的难度，加强操作、观察、制作、测量、画图等活动，结合一些内容还适当渗透一些变换几何的思想。这些措施不仅促进了学生空间观念的发展，而且提高了求积计算的正确率，还增加了学生学习几何初步知识的兴趣。

（三）初步的逻辑思维能力

这个问题在现行小学数学教学大纲中提得很明确。但是过去有一个时期在某些报刊上出现了一些不同的提法，这就使我们在进行实验时不得不再加以研究。我们根据数学学科特点和小学生思维特点，考虑在小学主要是发展学生的初步逻辑思维能力，它符合能力心理学关于能力发展的关键期的原则。我们根据思维心理学的一些研究，考虑在实验教材中除了着重发展学生的分析、综合、比较、抽象、概括、判断、推理等能力外，在可能的条件下结合某些内容也适当渗透辩证思维因素，并重视思维品质的发展。结合数学特点看思维品质的发展主要是培养学生思维的敏捷性、灵活性和初步的创造

性。

关于逻辑思维能力的培养，我们在各册实验课本中都采取了一些措施，并且在各册教学参考书中作了介绍，还在实验工作会议和实验简报上对某些问题根据心理学的原理进一步做了说明。这里再概要地阐述几点：

1. 培养学生思维能力要贯穿在小学数学教学过程的始终，每一部分内容、每节课、每个环节都要考虑如何发展学生思维能力。

2. 紧密结合数学知识的教学，有意识、有目的地发展思维能力。不能为了发展思维，教学超过大纲范围的知识，或者出一些难题。

3. 加强基本概念和基本规律的教学，注意培养学生迁移类推的能力。例如教学 9 加几、8 加几，通过操作、直观逐步引导学生总结规律，以后 7 加几、6 加几等引导学生迁移类推。

4. 根据学生年龄特点，提出不同的教学要求和不同的教学方法。例如低年级多利用操作、直观，并且教师多加引导学生思考；随着年级的增高，适当减少对操作、直观的依赖，以利于培养学生抽象思维；并且要更多的放手，鼓励学生质疑问难，以利于培养学生思维的独立性。此外，还要结合一些内容适当教学生分析推理的方法以及某些数学方法，并加强练习，以提高学生思维的能力。

5. 在教学中重视思维过程，同时也不忽视思维的结果。

6. 重视思维品质的培养，注意引导学生简缩思维，适当进行发散思维。对于一些有多种解法的题目，鼓励学生想出不同的解法，但是同时注意找出简便的解法。

7. 强调教师的示范作用和引导作用，注意纠正学生思维过程中的逻辑错误。

在实验中经过教师的努力，初步取得一些效果。一些实验班进行数学能力对比测试的结果表明，大多数好于普通班。

五 适应学生心理的个别差异

无论儿童心理学或教育心理学都重视研究学生心理的个别差异问题，认为由于先天、教育和社会生活条件等的影响，个人具有不同的心理特点。主要反映在以下几方面：

1. 性格差异 如有的学生守纪律、学习主动、有毅力，而另外一些学生意志薄弱，也有的自制力差，易冲动。

2. 兴趣差异 如有的学生对各学科都感兴趣，有的对某种学科有特殊兴趣；有的学生对事物的兴趣发生很快，但容易转换，另外一些学生则较稳定持久。

3. 能力差异 一般能力，如注意、记忆、观察等，都有强弱不同；思维、想象能力的差异就更大。在思维的品质方面也都存在差异。

为此，教育心理学特别强调教学要注意适应个别差异，以便有针对性地加以指导，使学生都得到较好的发展。

一般地说，很多教师比较注意适应学生的个别差异。但是数学教材过去没有重视，教学参考书有时谈到一点，也比较少。这次编写实验教材，开始重视这个问题，并根据心理学的研究，初步提出几项措施：

1. 提出的教学要求，尽量使后进生经过努力也能够达到。强调对后进生

的辅导，针对他们的具体情况做好转化工作，力争使他们达到教学的基本要求。

2. 强调允许后进生在理解和掌握数学基础知识方面有一个比其他学生更长的过程。教师在教学中要心中有数，力求缩短这个过程。

3. 在实验教材中加强操作，多提供直观经验，适当增加有趣的练习和数学游戏，以利于后进生理解和掌握数学基础知识和培养能力，并提高他们学习数学的兴趣。

4. 在实验教材中安排不同层次的练习题，有“*”号的题只供学有余力的学生做，还在思考题中适当扩充知识面，给较好的学生开阔视野，开拓思路，更好地发挥他们的数学才能。

经过实验，初步看到一些效果。很多实验班消灭了不及格，另一方面培养出一批数学能力强的学生，在多项数学比赛中获奖。不少实验班教师在辅导后进生培养优生方面总结出好的经验。

综上所述，我们在实验中运用心理学规律编写教材，改革教法已收到一些好的效果，取得一些经验，但是还很不够，还有不少问题需要进一步探索或加以完善。欢迎大家共同来研究，把我国的小学数学教材和教法的水平再提高一步，为更好地实施九年义务教育做出更大贡献。

（本文是 1991 年在课程教材研究所小学数学实验工作总结会议上的发言，原载于《小学数学教师》1992 年第 4、5 期。）

从现代教学论观点看小学数学教学方法的改革

近年来，国内外为了提高小学数学教学质量，越来越重视教学方法的改革。不仅出现了很多新的教学方法，而且进一步从教学理论上加以探讨。因此就提出一系列的问题：哪些教学方法是好的？如何从现代教学论的观点去判别它们？从现代教学论的发展趋势看，小学数学教学方法的改革方向如何？本文想围绕这几个问题介绍一点情况，并谈一些粗浅的看法。

一 改革小学数学教学方法的指导思想

我们研究小学数学教学方法的改革，不能孤立地进行。教学方法是教学论的一个重要组成部分。小学数学教学方法是一般教学方法在小学数学教学中的具体运用，因此它要服从于一般教学论的原则指导；但是它又必须体现数学学科的特点。

教学理论不是一成不变的。特别是近二十多年来，科学技术迅猛发展，社会不断变化，一方面不断向教育和教学提出新的要求，另一方面人们对教学客观规律的认识日益深化，教学理论其中包括教学方法的研究有了很大发展，这对小学数学教学方法的改革产生着积极的影响。因此小学数学教学方法必须随着现代教学理论的发展不断地改革。

按照教学论的观点，教学方法是同教学目的、教学内容、教学对象的心理特点、教学手段和教学组织形式密切联系着的。研究小学数学教学方法的改革，必须紧密结合小学数学的教学目的和教学内容，适应小学生的年龄特点，并且联系小学数学教学手段和教学组织形式的改革，才能取得良好的效果。

二 现代教学论的发展趋势及其对小学数学教学方法改革的影响

（一）在教学目的的任务上，改变了传统的单纯传授知识，而更注意发展智力，培养能力。

例如，美国布鲁纳在谈到教育的一般目标时指出，“不仅要教育成绩优良的学生，而且也要帮助每个学生获得最好的智力发展。”苏联伏尔科夫指出，以前，教育系统供应的是“执行者”，现在“要求教育系统供应创造者，……教育系统应当成为生产具有独特思想的聪明人的‘工场’。”赞科夫更明确地提出，教学不是单纯地传授知识，教学论的核心是：教学过程要使学生的一般发展取得成效。他批评过去的教学理论，把发展学生智力和逻辑思维作为“副产品”，如学习算术自然而然地变成逻辑练习。西德根舍因也强调不仅使学生掌握科学知识，还要训练学生的独立思考和判断力。我国近几年来为实现四个现代化培养人才的需要，也强调在教学中发展智力培养能力的重要性。

由于教学目的的改变，以传授知识为主的传统的教学方法显然不能适应新的要求。为此陆续出现了一些新的教学方法，如发现法、探索问题法、研讨法、独立作业法等。有些教育心理学家还同传统的教学方法做了对比实验，结果表明，探索发现式的学习对启发思维、促进学习的迁移很有好处。由于这些方法更多地发挥学生的学习主动性，在获得知识的同时不同程度地学到

获得知识的方法，就有利于发展学生的智力，培养学生独立获取知识的能力，从而受到教育工作者的重视。

新教学方法出现以后，是不是要废弃传统的教学方法呢？在国外，有一段时间曾经有过对传统的教学方法采取完全否定的态度，但是近年来发生了一些变化。一方面，人们看到新的教学方法并不是完美无缺的，也不是到处都可以用的。如发现法，连布鲁纳自己也说“消耗的时间可能太多”，“有些人却轻易地采纳这种‘发现法’思想，好象一个人甚至应能发现一群星星的名称！”另一方面，传统的教学方法也不是一无长处。美国肯尼斯·汉森谈到讲授法时说，“尽管它受到当代教育家们的许多批评，但仍幸存了这么多年，这足以证明讲授法具有某些独特的长处。”他认为采用这种方法“能够有效地介绍和总结课堂上所提到的主要概念”，但对激发兴趣、提高创造能力很难奏效。因此要少用，特别是学习能力较差的班级或低年级，讲的时间要短，并建议同讨论相结合，以获得更好的效果。可以看出，对传统的教学方法，趋向于有条件地保留使用。

目前国外小学数学教学法也有同样的趋势，即在提倡重视使用新教学方法的同时，有条件地保留传统的教学方法。例如，美国恩德希尔在《小学数学教学》中提倡使用有引导的发现法之后也指出，概念的名称，如何列方程，如何用竖式解问题等还需要教师讲给学生，在学生发现概念和作出一般概括之后，还要适当使用讲解法指出其特点，探讨其细节。苏联莫罗等著《小学数学教学法》中也强调，“对那些能够促进调动学生认识活动积极性的教学方法要给以更大的注意，同时也应当合理地评价那些跟教师以现成的形式传授知识有关的方法（口头讲解等）在数学教学中的作用。”作者还把讲解法加以改进，使它更富于激发学生思维的积极性。

几年来，我国有不少教师明确地认识到小学数学的教学目的，在教学方法上做了相应的改革，注意采用富启发性的有助于发展学生智力的教学方法，取得了较好的效果。但是也有些教师对小学数学教学的目的缺乏明确的认识，还不善于运用促进智力发展的教学方法，在一定程度上还采用着注入式，教学生死记硬背一些术语、公式。这种情况亟待改变。但另一方面，在小学数学教学中，为要发展学生智力，对讲解法也不能一概排斥，可以少用单纯的讲解法，多与其他方法如演示、问答、练习等方法配合着使用，讲解时注意提启发性问题，引导学生思考，以便使小学生既获得明确的数学概念，又发展了智力。

（二）强调学生是学习的主体，教师的主导作用必须与学生的主体作用相结合。

传统的教学论，强调教师的主导作用，忽视学生在学习中的主体作用。与此相适应，提倡教学时采用讲授法。如凯洛夫主编的《教育学》中明确地说，“在教学过程中，讲授起主导的作用。”而现代的教学论有了很大的改变，强调学生是学习的主体。例如，布鲁纳把儿童看作“主动参加知识获得过程的人”，教师是“主要辅导者”。苏联教育学中也明确提出，“儿童是教育的主体”，“孩子永远是教育过程的积极参加者；”“学生的认识活动是主要的”，“教师的任务在于为提高学生的一般认识积极性创造条件，形成积极的学习态度，培养独立性和工作能力”。看教师的主导作用，不再是只看教师的讲授水平如何，更重要的是看他在教学过程中是否充分发挥学生的主体作用，调动学生学习的积极性，引导学生思考，指导学生逐步学会独

立获取知识的方法。这种看法符合唯物辩证法关于内因和外因的关系的观点。从这一基本观点出发，研究教学方法，不再是仅仅研究教师讲授的方法，更重要的是研究激发学生的学习积极性和引导学生学习、探索的方法。讲授法的缺点就是没有充分发挥学生的积极主动性，也不能有效地使学生掌握学习的方法，培养起独立获得知识的能力，而某些新的教学方法的优点就在于比较能够促进学生积极主动地学习，培养学生独立获取知识的能力。当然也要看到，有些新方法在发挥学生的积极主动性方面体现得比较充分，而在发挥教师的主导作用方面却显得不够。发现法就是一例。这也正是国外某些教育家、心理学家提出异议的一个重要原因。如美国心理学家加涅就强调应给学生最充分的指导，使学生沿着仔细规定的学习程序进行学习；有人还针对纯发现法的缺点提出有引导的发现法，教师可以作为促进者，适当予以提示和帮助，以便有效地控制学生的学习活动，保证达到预期的目的。

在我国，有些小学数学教师也已经开始试用一些新的教学方法，以调动学生学习的积极性和主动性，培养学生探索和独立获取知识的能力，并且收到了一定的效果。但是也仍有一些教师对发挥教师的主导作用同学生的主体作用相结合认识不够，或者虽然有了一些认识，却缺少办法。为了很好地解决这个问题，在改革小学数学教学方法时有以下几点值得注意：

1. 教师要善于说明学习的意义，创设问题的情境，揭示矛盾，引起学生的学习动机。使学生感到有学习和探索的需要和兴趣，就会积极地学习。

2. 教师要努力创造活跃思维的条件，引导学生去思考。只有学生主动地去思考问题才能算是真正发挥了学生的积极性和主动性。有些提问（如计算某个算式的结果）可以具有求同思维的性质，有些提问可以具有求异思维的性质（如一道题要想出不同的解答方法），这样可以更激发学生去积极思维，并发展他们的思维灵活性和创造性。还要鼓励学生提问质疑，但要让全班同学来解决，促进每个学生独立思考。

3. 教师要适当放手让学生进行实践活动。这在我国小学数学教学中还是一个薄弱的环节。学生既然是学习的主体，就应当有计划地多组织活动，让学生进行观察、操作、实验、独立思考和练习等，在多种活动中理解和掌握数学知识，并逐步掌握学习的方法，培养独立获取知识的能力。这也符合心理学从动作、感知到表象再到抽象符号的认识规律。学生在实践活动中充分积累了感性经验，就便于正确地抽象出数学概念的本质特征，概括出完整的计算法则，并且印象深刻，易于保持。

4. 教师要适当变换数学作业的形式。这一方面可以激发学生对数学的兴趣，不断提高学生的学习积极性，另一方面可以加深对所学数学知识的理解。

5. 教师在课堂上要善于利用学习的反馈信息，搞好检查与评价，加强反馈的效应。反馈的信息，无论是对学生或是对教师都很重要。正反馈信息可以使学生的正确认识 and 教师的好教法得到加强，负反馈信息可使学生的错误认识 and 教师的不适当的教法得到改正。教师如果只重视讲授而忽视学生的反应，或重视课外批改作业而忽视课内作业的检查，就会使学生不能及时看到自己的进步，又不能及时改正计算中的错误，不利于发挥学生的学习积极性。而且由于教师不能当堂发现问题，及时解决问题，还可能造成课内不足课外补的恶性循环，不利于减轻学生的学习负担。这一点很值得我们重视。当然，加强课上的信息反馈，也并不意味着把所有的作业都放在课内批改，这两者还是有区别的，要妥善处理。

要做到以上几点，关键是了解学生，弄清学生的年龄特点、学习基础和学习潜力，使教师组织学生的认知活动建立在可靠的科学依据之上。

（三）在教学方法上，强调多种方法的交叉使用和互相配合。

传统的教学往往采用固定的教学方法，形成一套模式。现代教学论有了较大的改变。由于教学方法日益增多，对教学方法的本质研究日益深入，教育家越来越认识到教学方法是多种多样的，没有一种万能的教学方法。如苏联巴班斯基就指出，不存在“教学法上的‘百宝箱’”。美国教学法工作者富兰克尔也说，“不存在任何情况下，对任何学生都行之有效的唯一的‘最佳方法’”。把某种教学方法绝对化，也不符合唯物辩证法关于具体事物具体分析，用不同的方法解决不同的矛盾这一原则。因此现代教学论趋向于根据教学目的、内容和学生选用不同的方法，并把几种教学方法配合起来使用。

这一新的教学论观点在小学数学教学法中也得到反映。如苏联《小学数学教学法》强调，教学方法跟教学目的、内容、手段和组织形式有密切关系，正是这些关系决定着每一个别情况所用方法的选择；“不可能有据以拟定出任何课的结构现成的药方。”美国 C·芮代瑟尔在《小学数学教学》一书中也强调，教学方法因数学课题、所教的儿童以及教师的风格而有不同；教学方法也不是“单一的”，可以有不同的组合。

我们对小学数学教学方法的研究有些是符合现代教学论观点的。如有些同志提出“教学有法但无定法”，强调根据不同情况采用不同的方法。有经验的教师即使教同一年级不同的班，教法也不完全相同。但是也有的同志与上述原则相反，想搞一个普遍适用的教学方法，也有的同志想推广某一个教学方法或某一个课堂教学结构于各个年级，使每一节课都按照同样的模式进行教学，这种做法不符合唯物辩证法，还容易束缚教师的手脚，限制教师的创造性，因而不利于更好地提高小学数学教学质量。

（四）在教学组织形式上，灵活运用多种形式，以适应学生的差异。

几个世纪以来，广泛使用的教学组织形式一直是班级教学制。它的特点是拉平取齐、整齐划一，其优点是一个教师同时可以教较多的学生，缺点是不能适应个别差异。特别是教学目的有了改变，强调使每个学生都得到发展，班级教学制的缺点愈来愈显得突出。若干年来曾提出不少批评，甚至有人要取消班级教学制。但是根据各种试验的结果，趋向于把班级教学、分组教学和个别教学结合起来，这样既能面向全体，也能注意到个别差异。

目前国外小学数学教学中也提倡这样的教学组织形式。如在苏联《小学数学教学法》中强调集体作业、小组作业和个人作业的各种形式结合。适应这种形式，印制几套类型相同、难度不同的作业题。美国恩德希尔在《小学数学教学》中也设计了大组、小组和个人相结合的教学范型，根据理解和掌握的情况，分别采取充实提高、练习或补授，以便使优等生获得更大的发展和提高，差等生也能达到基本的教学要求。

我国小学数学教学中，有些教师注意到面向全体，因材施教，也采取了相应的措施；但是也还有很多教师不注意适应不同程度的需要，而采取“一刀切”，也有些教师在课上注意提问较好的学生，而对较差的学生辅导不够。我们要提高全体人民的科学文化水平，在小学给每个学生打好数学基础，很需要尽快改进教学组织形式，总结在这方面做得较好的教师的经验。如何提供不同的作业，供教师选用，也值得研究。

（五）教学过程实现最优化，提高教学效率。

近年来，由于系统论、信息论和控制论引入教学论的研究，有人把教学过程看作由教师和学生组成的一个信息传输和交换的系统，研究对教学过程进行最佳控制，以达到良好的教学效果。苏联巴班斯基就是一个代表。他提出教学过程最优化的基本标准，第一是效果，第二是时间。他强调花费较少的时间、精力以达到最大的教学效果。为此，在教学任务、教学结构、教学内容、教学方法、教学形式、教学手段、教学进度、家庭作业都要实行最佳的、合理的选择。他把这看作对现代课堂教学的最重要要求之一。

目前国外小学数学教学也十分强调这一要求。苏联《小学数学教学法》强调要选择最适合具体教学条件的教学方法，认为在苏联教学法问题当中，居首位的仍是避免儿童的课业负担过重的方法问题，而提高教学效果的主要潜力基本上应当在改进每一节课的质量方面来找。美国全国数学教师联合会关于八十年代《行动计划》，也提出必须把既讲效果又讲效率的严格标准应用于数学教学。

近几年在我国已有一些小学数学教师开始注意提高教学效率问题。如有的教师提出“向40分钟要质量”，“充分利用每一分钟”，并采取了一些措施。也有少数教师提出要制定最佳教案。但是总的来看，这方面改革的经验还不多，有待进一步加强。例如，第一，如何确定目的要求，突出重点，把有限的教学时间用在刀刃上；第二，如何充分估计学生的学习基础和潜力，尽量在已学的基础上引导学生类推，既调动学生的积极性，培养能力，又节省时间；第三，如何根据目的要求、知识的难易以及学生的基础恰当地确定作业的质和量，做到有针对性；第四，如何尽量组织全体学生进行各种活动和练习；第五，如何加强对学生的了解和检查，充分利用教学过程中教学反馈信息的作用，及时调控教学过程，以便以最合适的方式和速度进行有效的教学；第六，如何根据所教的课题和学生从不同教案的比较中选择最佳教案，避免教学中搬用参考资料上的教案等。这些问题都值得很好研究，总结经验。

三 结束语

越来越多的实践说明，要提高小学数学教学质量，除了改革教材外，还必须相应地改革教学方法。要做好这项工作，首先必须学习，要以辩证唯物论作为基本的指导思想，从现代教学论的观点搞清楚改革的方向，联系我们教学中的主要问题，发挥教师的主动性和创造性，不断试验和总结经验，我们就能够较快地把小学数学教学方法的改革工作推向前进。

（本文是1984年在小学数学、自然课教材教法讨论会上的发言，原载于《课程·教材·教法》1984年第5期。）

优化教学过程提高小学数学教学效率

提高教学效率问题，近十多年来才被人们重视，并加以研究。长期以来，无论是国内或国外，教师采用传统的教学方法，对学生缺少合理的学习方法的指导，结果大都形成死记硬背，浪费时间，课业负担重。这样的教学结果，不仅不能适应现代科学技术发展的需要，而且造成人力和物力的极大浪费。随着现代教学论的研究和发展，有些教育家提出优化教学过程，提高课堂教学效率，要求教师不仅做一个好的教师，而且要做一個有效率的教师。此后，一些数学教育工作者也针对数学教学中存在的问题提出要求。例如，1980年美国全国数学教师协会拟定的《80年代行动计划》，第四条提出“必须把既讲效果又讲效率的严格标准应用于数学教学”。前苏联教育部在80年代初关于中学（五至十年级）数学教学的一份文件中也讲到提高课堂教学效率，强调“不能容许把学生应当在课堂上完成的作业安排为家庭作业，以致造成学生负担过重。”近年来我国也开始重视提高小学数学教学效率问题。义务教育小学数学教学大纲中指出，“教学要讲求实效，注意提高课堂教学效率。”解决好这个问题，不仅对于我国顺利地推行义务教育，全面地提高民族素质，具有重要的现实意义，而且对于培养21世纪人才打好基础具有深远的历史意义。

优化教学过程，提高小学数学教学效率，是一个巨大的复杂的系统工程，涉及的面很广，其中有理论问题，也有实践问题。教学过程优化和教学效率高的标准可以概括为两条：一是教学效果好，二是时间消耗少。下面从小学数学教学过程的几个基本成份如何优化，以促进小学数学教学整体质量的提高，谈一些看法。

一 教学目标和要求要全面、适当

教学目标和教学要求非常重要。它不仅体现国家和社会对小学数学教学的要求，而且是备课和上课需要明确的首要问题。它决定着一个学期、一个单元、一节课的教学内容、结构、教学方法和教学组织形式，起着小学数学教学的导向作用。

（一）教学目标和要求要全面

进行小学数学课堂教学，不仅要考虑数学基础知识方面的目标和要求，还要考虑结合本节课的数学基础知识培养哪些能力，结合本节的内容进行哪些思想品德教育和培养哪些良好的学习习惯。此外还要重视情感方面的要求，如培养学生学习数学的兴趣，对数学学习的积极态度等。这样可以使几方面的教学任务起到相辅相成的作用。

（二）教学目标和要求要适当

这是优化教学目标和要求的重要方面。教学目标和要求过高或过低，或者主次分不清楚，都会影响一节课圆满地完成教学任务。

1. 要根据所教教材的地位、前后编排的顺序以及学生的接受程度提出适当的目标和要求。

从一个单元来说，如10以内数的认识和加、减法，主要是使学生对10以内数的概念和数的组成有清楚的认识，会写数字，初步知道加、减法的含义，能比较熟练地计算10以内的加、减法。至于应用题教学还处于准备阶段，

只出现一些用图画表示的应用题。要求学生能看图按教师的问话回答：图里告诉了什么，求什么，怎样计算。如果要求学生能独立口编完整的应用题，很多学生就会感到困难，势必要占用大量时间，反而削弱了 10 以内加、减法的基本训练。

从一节课来说，如教学 9 加几第一节课，主要要求学生能掌握凑十的方法，正确地算出 9 加几的得数。不宜要求学生计算迅速，更不宜比赛谁算得快。这样会使后进生心理紧张，本来能做对的也会做错。应该在后继课中学生已掌握方法和计算正确的基础上逐步提高计算速度的要求。即使这样，在速度上也不能要求过高，如第一学期末绝大多数学生达到每分钟做 10 道题（只写得数）就可以了。

2. 教学目标和要求要符合儿童认知的规律和发展水平。

根据心理学家研究，儿童的一个重要的认知规律是从动作、感知 表象概念、规律，而且不同年龄的儿童有不同的认知水平。例如，低年级学生以具体形象思维占优势，抽象概括能力发展的水平还比较低。教学应用题时，主要是通过操作、直观来理解题意和分析数量关系，不宜教给学生抽象概括的术语和解题公式。否则，学生不理解，不仅增加学习的困难，浪费时间，还容易形成死记硬套的不良习惯。又例如，中、高年级教学整数、小数、分数四则混合运算，不宜过繁。随着现代计算工具的发展，不仅没有必要做笔算步数过多的混合运算式题，而且实践表明，每增多一步运算，学生的计算错误增加很多，要达到比较熟练，需要花费很多的时间。义务教育小学数学教学大纲规定，四则混合运算以二、三步的为主，一般不超过四步，是比较适当的。

3. 教学目标和要求要根据数学内容的特点和教育心理规律适当划分层次。

据教育心理学研究，知识的学习基本上是按照以下的顺序进行的：理解、保持和应用。这里的理解，在不同的学习阶段，可以有不同的程度、不同的水平。一般地说，要经历一个从低水平的简单理解（也可以说初步认识）到高水平的复杂的理解的过程。然后在理解的基础上，经过一些练习和复习使学得的知识保持下来。进一步再应用所学的知识去解问题。有的心理学家把学习阶段分得更细一些，如美国的加涅分成 8 个阶段，顺序与前述的基本相同。这一教学规律基本上适合小学数学的学习，但是也有其自己的特点。这主要是知识的理解和保持都与练习密不可分。美国格林在《小学数学——教学活动和材料》一书中就指出，“熟练，特别是牢记，只有在相当多的练习之后才能达到。”“……认为如果学生充分理解了一种计算方法，熟练就会自动地产生。现也已证明这是不恰当的观点。”“应当用练习作为加强已经理解了的概念的手段。”这说明，无论理解或牢记小学数学知识都有一个逐步发展的过程，而这个过程是同练习紧密联系着的。因此在划分小学数学教学目标和要求的层次时既要符合教育心理规律，又要考虑小学数学的学习特点。义务教育小学数学教学大纲中对知识的教学要求分为知道、理解、掌握、应用四个层次，对技能的教学要求分为会、比较熟练、熟练三个层次是比较合适的。有些地区对知识的教学目标的第一个层次定为“识记”，这样

美国布鲁姆拟订的认知领域的教学目标的第一个层次为“knowledge”，意思是知道、认识、了解、知识，远比“识记”的含义广泛。

的提法值得研究。它不符合教育心理的学习阶段的划分，也不符合数学的学习特点，还容易引导学生死记硬背概念的定义、法则、公式，不利于提高小学数学教学质量。

4. 教学目标和要求注意适应学生的个别差异。

据心理学研究，儿童由于先天、环境、教育等方面条件的不同，在能力、性格和兴趣等方面都存在着差异。表现在数学的学习上，不仅理解和掌握数学知识的过程有快有慢，而且在计算和解题的能力上也有高有低。因此在拟订教学目标和要求时，一方面按照义务教育小学数学教学大纲提出共同的基本要求；另一方面注意适当有些弹性，以适应学生的个别差异。例如，对较差的学生，在共同的基本要求不变的情况下，要允许他们比一般学生经过较多的课时的学习逐步达到教学基本要求。特别是有些较难的知识，要求一节新授课 100% 的学生都能理解和掌握，是比较困难的。教师可以根据知识的难易以及学生的具体情况，提出不同的要求。同时在教学中注意了解差生的学习情况，做到心中有数，并适当给以帮助、辅导，力求缩短与一般学生的差距，逐步达到共同的基本要求。对于学有余力的学生，还可以适当提高一些要求。例如，教学这样的应用题：“小华有 5 本故事书，小明的故事书的本数是小华的 3 倍，两人一共有多少本书？”讲了一般解答方法，进行练习时，可以让学有余力的学生想一想，还有什么不同的解法。这样根据学生的差异，适当提出不同的要求，有利于调动全体学生学习数学的积极性，从而可以用较少的时间较好地完成教学任务。

二 合理地确定和组织教学内容

在确定适当的教学目标和要求之后，合理地确定和组织教学内容就成为优化教学过程的一个重要问题。小学数学教材已经提供了每单元和每节课的基本教学内容，但是教师教学前需要深入钻研和领会教材是如何体现教学目标和要求的，明确教学要点有哪些，教学的顺序是怎样安排的等，此外往往还要根据本班的具体情况做一些必要的调整或补充，使课堂教学的内容更符合实际，从而促进教学过程的优化。

（一）合理地确定教学内容的广度和深度

所谓教学内容的广度，是指知识的范围或知识的量。从信息论的角度说就是一节课传输给学生的信息量。一节课的信息量过大，知识点过多，学生难以接受；而一节课的信息量过少，知识点过少，也会浪费时间，不利于调动学生学习的积极性。教学内容的广度要确定得合理，与知识的难易和学生的条件有密切关系，一般来说，难理解的知识要少一点，容易理解的知识可适当多一些；对低年级学生教学的步子要小一点，对高年级学生教学的步子要大一点。例如，低年级教学连减的两步应用题，一节课要使学生掌握两种解法就比较紧，有的学生往往分不清两种解法，如果分成两节课来教学，效果就好一些。中年级教学分数的初步认识，对学生来说新概念比较难建立，也可以步子小一点，第一节课教学几分之一，第二节课再教学几分之几，以利于通过较多的操作、直观给学生形成分数的正确表象。到了高年级再讲分数概念，学生已经有了一定基础，进行抽象概括时可以适当加快进度。有些教学内容，从知识点上看并不一定难，但是所选的数目大小往往会影响到知识的难易。例如，在中年级教学四则混合运算，如果数目过大，步数过多，就

会增加知识的难度。高年级教学最大公约数和最小公倍数，如果数目比较大，也会增加知识的难度。因此，大纲、教材中对上述内容的教学都限定数目的大小和运算步数的多少，是非常必要的。

教学内容的深度一般是指知识的抽象概括的水平。同样的教学内容可以有不同的深度，选择什么样的深度往往是根据学生的思维发展水平来确定的。例如，低年级教学加、减法的认识，只要通过操作、直观使学生了解，把两个数合并在一起求一共是多少，用加法算；从一个数里去掉一部分求剩下的是多少，用减法算。到高年级教学加、减法就可以采用定义的形式说明加、减法的意义。又例如，中年级教学简单的同分母分数加、减法，主要通过操作、直观使学生初步学会同分母分数的加、减法，如

$\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ ，要想1个 $\frac{1}{5}$ 加上2个 $\frac{1}{5}$ 是3个 $\frac{1}{5}$ ，得 $\frac{3}{5}$ 。这时还不给学生概括出同分母分数加、减法的法则。这样做一方面符合学生的思维发展水平，另一方面有助于加深学生对分数意义的理解。

（二）明确教学的重点、难点和关键

当一节课的教学内容有几个知识点时，往往需要确定哪些是重点，哪些是难点，以免在教学时抓不住主要的基本的内容，而在次要的或者学生容易接受的内容上多花时间，或者面面俱到平均使用力量，影响重点、难点的理解和掌握，而达不到预定的教学效果。例如，一年级教学5的认识，由于学生入学前一般都能按实物点数，就不宜在主题画上用过多的时间去练习数数，而应把5的组成和写数字5作为教学的重点。一般地说，数学的基本概念、法则、公式、性质都是教学的重点，学生必须掌握好这些基础知识。但是其中也有主从的关系，而弄清主从关系，教学时可以更好地发挥学习的迁移作用，从而能节省教学时间，提高教学效率。例如，教过除数是整数的小数除法，再教学除数是小数的小数除法时，引导学生应用除法商不变的性质和小数点移动引起小数大小的变化等知识把它转化为除数是整数的小数除法，就不难解决。这样可以着重做一些把除数的小数点移动位置，使它变成整数，再把被除数的小数向右移动相同位数的练习。

有时一部分知识或一个知识点需要弄清教学的关键，它对所学的知识能否掌握好起着决定性的作用。例如，教学用两位数除，关键是使学生掌握用两位数除两、三位数商一位数的试商方法，至于商多位数的可以依此类推。又例如，教学长方体的表面积，关键在于通过操作、直观使学生弄清一个长方体有哪3组相对的长方形面，根据长方体的长、宽、高确定每组长方形面的长、宽各是多少。这是发展学生空间观念的问题。有些教师抓住这个关键，收到很好的教学效果。如果采取另外的方法，如通过例子给学生总结各种不同情况的计算表面积的公式，而忽视学生空间观念的发展，教学效果就比较差，教学时间也用得多。

这里还要着重谈一点，教学时要十分重视教学内容的科学性，要保证教给学生的数学概念、法则、规律是正确的，同时使学生对这些数学概念、法则、规律的理解也是正确的。从信息论的角度来说，在教学过程中，教师传输给学生的教学信息，往往发生变异和损耗。发生的原因，有时是教师教漏了或者教错了；有时是教师教对了，而学生没有理解或理解错了；有时可能两种原因都有。但是一般地说，学生出现错误往往与教师抓不住重点、关键等有关系。例如，在一个班里，教学用两位数乘两位数，学后测试结果，

全班学生 38 人，全对的占 39.5%，两部分积算对而未加的占 23.7%，两部分积加错的占 15.8%，两部分积乘错的占 21%。其中大部分错误是由于对乘的顺序和对位的算理不理解而产生的，而这些错误又是与教师教学时算理不突出有密切联系。由此可见，教给学生一个概念或计算法则，不仅概念、法则的叙述是正确的，还要算理清楚，才能保证学生顺利地、正确地理解和掌握。

（三）合理地安排教学顺序

这一点也很重要。美国心理学家布鲁纳十分强调教学要详细规定所出示的教材的最有效的序列。他认为这样的序列是由多种因素决定的，学生过去的学习基础，发展的阶段，教材的性质和个别差异等。前苏联教育家斯卡特金认为，课程的教学顺序，不仅要以相应的科学的逻辑为根据，而且要以学生形成概念和一般发展的规律性为根据。就小学数学教学来说，就是要把数学知识的逻辑顺序与小学生的认知发展顺序恰当地结合起来。

关于小学数学的教学顺序，一般在教材中已经有所安排。但是教材中设计的教学顺序是最基本的，不能太细，教师教学时往往还需要根据教材的内在联系和学生的具体情况做更细致的安排。例如，一位老师教学面积的概念时在教材设计的教学顺序的基础上做了以下几点补充：1. 教学面积的意义以后，补充几个图形，让学生识别哪几个是用线段围成的平面图形。2. 教学比较长方形面积大小的时候，先让学生把两个不同的长方形纸重叠起来，当学生感到不好比时，再让学生用小正方形分别去量两个长方形的面，说明用这种方法不仅可以找出哪个图形的面积大，而且知道大多少。3. 让两个学生用不是同样大的小正方形量同一个长方形的面积，结果得到不同的数量，说明必须用统一的正方形去量，从而引出统一的面积单位。由于教师做了以上的补充，使学生更清楚地理解面积的概念、面积单位的作用和确定统一的面积单位的必要性。当然在补充讲解的内容时，要考虑是十分必要的，防止步骤过于细碎，失去应有坡度，结果不能调动学生学习的积极性，反而浪费时间。

有时一部分知识可能有不同的教学顺序，这时要考虑哪种顺序更便于学生理解和掌握。例如，现行教材讲正、反比例，一般是先出正比例概念，然后出用正比例解应用题，再出反比例概念和用反比例解应用题。有的教师改为先教学正、反比例概念，再教学用正、反比例解应用题。这样便于联系对比，使学生加深对概念的理解，加强解应用题时对数量关系的分析和判断，不仅教学效果好，而且减少了教学时间，还为教材的改革提供了实践依据。

（四）加强知识间的联系，重视知识的系统化

加强知识间的联系对于学生掌握知识的结构具有十分重要的意义。布鲁纳指出，“学习结构就是学习事物是怎样相互关联的。”他还说，“获得的知识，如果没有完满的结构把它联在一起，那是一种多半会被遗忘的知识。”通过知识的联系和系统整理可以使学生所获得的知识在头脑中形成完整的认知结构。

小学数学知识的特点是系统性强，前后联系密切。但是由于学生思维发展水平和接受能力的限制，有些知识的教学往往分几节课或分几个学期来完成，这样难免在不同程度上削弱知识间的联系。因此，就更需要有意识地注意知识间的联系和系统化，以便收到良好的教学效果。

1. 教学后面的新知识，注意与前面有关的旧知识的联系。美国奥苏贝尔认为，在教学过程中学习活动是否有效，主要看新的学习内容能否与学习者

认知结构中原有的适当的知识系统建立实质性的联系。因此教学前要及时唤起与当前新知识有关联的旧知识，特别是要抓住新旧知识的连接点。例如，教学三位数的乘法，可以在复习用两位数乘的基础上引导学生类推，着重研究乘数百位上的数怎样去乘被乘数，积的末位应写在什么地方，这样学生很容易掌握，还可节省教学时间。又例如，教学两步应用题，由复习有关的一步应用题开始，使学生容易看到两步应用题与一步应用题的结构有什么不同，在分析数量关系和解答步骤上又有什么联系和不同点，从而较快地掌握两步应用题的分析和解答方法。

2. 加强某些概念之间或法则之间的联系和比较，可以使学生加深对概念、法则的理解，并且防止混淆。如长方形的周长与面积，通过联系、比较，使学生分别在概念上、计算方法上和使用的计量单位上弄清它们有什么不同点。

3. 对一些有联系的概念或法则，到一定阶段进行系统的整理，使学生在头脑中建立起知识的网络，形成良好的认知结构。例如，有的教师教过 100 以内的加减口算，通过复习整理，不仅使学生对所学的口算（ $25+3$ ， $25+8$ ， $25+30$ ， $38-3$ ， $38-9$ ， $38-20$ ）的计算方法弄得更清楚，而且探讨怎样算得快，简缩思维过程，进一步提高了口算能力。又如教学长方形、正方形、平行四边形、梯形之后，把几种四边形加以整理，使之系统化，可以使学生加深理解每种图形的特征以及图形之间的关系。

三 合理地组织课堂教学

优化教学过程，除了优化教学目标和教学内容外，优化教学组织是一个十分重要的方面。教学是通过一定的组织形式来进行的。当前，无论在国内或国外，课堂教学是教学的基本组织形式。要提高小学数学教学质量，从组织课堂教学来看，主要有以下两个问题。

（一）选择适当的课堂教学结构

课堂教学结构主要是指一节课的组成部分和各组成部分进行的顺序以及时间的分配。一节数学课主要有以下几个组成部分：检查复习，教学新知识，巩固新知识和练习，质疑和研讨，小结本课内容，检查和评价，布置家庭作业等。但是每节数学课不一定包括上述所有的组成部分，可以根据课的主要教学任务，划分课的类型，选择一些必要的组成部分。从优化教学过程考虑，选择课的类型和教学结构要注意以下几点：

1. 课的类型和教学结构应根据教学目的要求、教学内容和学生具体情况而定，不宜固定化、模式化。

前苏联莫罗著《小学数学教学法》中指出，“不可能有据以订出任何课的结构现成的药方。”不仅是不同教学任务（如以教学新知识为主或以练习为主）的课，它们的结构不可能相同，就是具有相同教学任务的课的结构也不一定都相同。例如，同是教学新知识的课，对低年级学生，需要步子小一些，练习要与教学的新知识点配合得更紧密些，而且要从教师指导下的练习逐步过渡到独立练习。而对高年级学生，教学的步子可以大一些，练习可以集中一些，更放手一些。另外，教学内容的难易，新的教学信息量的多少，也都在不同程度上影响着教学步骤的安排。例如，教学小数的意义的课，新知识点较多，练习可以适当分散与新知识的教学密切配合；而教学小数乘以

整数，比较容易理解，教学新知识后可以集中进行练习。

2. 无论哪一种课都要安排一定的练习。

这是数学课的一个重要特点。特别是低年级，要尽量在课堂上多安排一些练习。一年级的练习按照规定要完全在课内进行。这样有助于在教师的指导下提高练习的效果，减轻学生课外作业负担。还要注意复习经常化。有经验的老师注意分散练习不断线，在一节课内以旧知识为基础的技能训练和新知识的巩固、新技能的培养适当配合进行，不仅加强新旧知识的联系，而且促进所学知识技能的巩固和提高。当然，与练习相伴随的就是要重视练习的反馈，根据反馈信息，一方面对有进步的予以鼓励，另一方面对出现的错误及时指导学生改正，从而进一步调动学生学习数学的积极性。

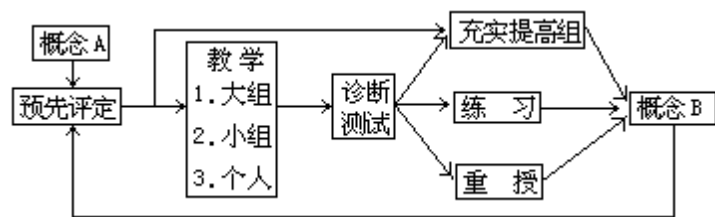
3. 合理地分配教学时间，并注意节约时间。

这不仅是组织课堂教学的一个必要步骤，而且是优化教学过程，提高课堂教学效率的一个重要标准。前苏联教育家巴班斯基谈到优化教学过程的标准，就强调不仅要看教学效果，还要看教师和学生的时间和精力消耗是否是最优值。美国数学教师协会在八十年代《行动计划》中也强调，“教学时间是非常宝贵的，必须合理使用。教师必须按照课的重要性分配教学时间。”由此可见，课堂教学是否优化，不能单看教学效果好不好，还要看教学时间是不是符合规定的标准或低于标准。我国有些教师已经注意到这个问题，如提出“向40分钟要质量”，并且已经积累一些经验。首先要根据目的要求，内容多少，重点难点，学生的条件，以及教学设备等，合理地分配教学时间。其次，要注意节省时间，特别是在讲授新知识时，要抓住重点，不能企图一下讲深讲透。要安排一定的练习时间。通过练习的反馈，再采取必要的讲解或补充练习。再次，要注意尽量安排全班学生的活动，如操作、口算、笔算练习，解应用题等，避免由少数人代替全班学生的思维活动，使大多数学生成为旁观者。要注意在一节课内提高学生的平均做题率。此外，还要注意选择有效的练习方式和收集反馈信息的方式，以便节约教学时间，并能及时发现问题，解决问题。

(二) 选择适当的教学组织形式

上面谈到，课堂教学是教学的基本组织形式。但它并不是唯一的教学组织形式。小学数学教学绝大部分是要在课堂内进行的。但是有些教学内容，如测量，要想收到好的教学效果，就要让学生到操场或校外进行实际观察和测量活动。还有些教学内容，如利息和保险的计算，有的教师组织学生到银行、信用社、保险公司去访问、调查。把数学教学活动社会化，虽然多花一些时间，但是能收到很好的教育效果。

即使是课堂教学，教学组织形式也不应是一成不变的。目前课堂教学一般都采取班级授课制，其特点是拉平取齐，按照统一进度教学，容易忽视学生的个别差异，从而不能使每个学生得到充分发展。为了克服这一缺点，现代教学论提出加强分组教学和个别教学。前苏联《小学数学教学法》强调把班级教学、小组教学和个别教学紧密结合起来。美国恩德希尔在《小学数学教学》一书中还设计了一个大组(全班)、小组和个人相结合的教学示意图，(如下图)。



近年来我国也有些教师根据本班的具体情况采取适当分组教学。例如，有的教师把全班按照数学水平分为甲、乙、丙3组。对甲组学生鼓励独立学习，在达到大纲要求的基础上适当做一些带有综合性、富有思考性的题目。对乙组学生要求掌握好大纲规定的基础知识和基本技能，对有困难的适当予以帮助。对丙组学生则多加辅导，使他们逐步达到大纲规定的基本要求。这样教学的结果，全班的数学水平得到了整体的提高。由此可见，改进教学组织形式，对于提高教学效率，起着重要的作用。

四 选择适当的教学方法

选择合适的教学方法，对于提高课堂教学效率也起着十分重要的作用。巴班斯基认为，“选择对某节课最有效的教学方法，是教学过程最优化的核心问题之一。”近些年来，无论在国外或国内研究新的教学方法很多。怎样选择好呢？下面谈几点看法。

（一）要选择有助于调动学生认识活动的积极性和发展能力的教学方法

前苏联莫罗著《小学数学教学法》一书中就强调，“对那些促进调动学生认识活动积极性的教学方法要给予更大的注意。”现代教学论认为，学生是学习的主体，教师要发挥主导作用，不再是向学生传授知识，而是为提高学生认识活动的积极性创造条件，培养学生独立的工作能力。具体地说，就是教师要着重创设问题情境，组织学习过程，掌握学习方向，帮助学生探究。要做到这一点，就要慎重地选择教学方法。例如，在小学数学课上，选用讲解、说明等方法，教师的活动较多，而学生的活动较少，就不如采用问答、研讨、探究、引导发现等方法。后几种方法，学生的活动在不同程度上有所增加，能较好地调动学生学习的积极性，并促进学生思维的发展。但是也不能排斥使用讲解、说明等方法。例如，在较高年级教学统计图表的制作方法时就可以使用。现代教学论认为，任何一种教学方法都不是万能的，要根据不同内容、不同年级、不同条件来选择适当的教学方法。义务教育小学数学教学大纲（试用）中也强调，“要根据教学内容和学生的具体情况，灵活运用教学方法，不要生搬硬套。”即使是同一个教学内容，由于班级学生情况不同，教学方法也不一定完全一样。例如，在学生独立活动能力较强的班上，可以更多地放手让学生去探究；而在学生独立活动能力较差的班上，就需要教师多给以启发、引导。有时在一节课内还可以把几种教学方法配合起来，以弥补单一的教学方法的不足。例如，教学长方形面积的计算，可以通过操作，采用引导发现法，然后再辅以教师的概要的讲解。

（二）无论采用哪种教学方法，都要重视激发学生的学习动机

这是推动学生学习，提高教学效果的重要条件。上面谈到有些教学方法本身就容易调动学生学习的积极性，但是也有激发学习动机的问题。有些教学方法，如讲解法，相对地说在调动学生学习的积极性方面较差，就更需要重视这个问题。另外，在低年级学生学习的自觉性还比较差的情况下，也需

要注意不断地激发学生学习的动机。很多教师在这方面积累了不少经验。例如，说明学习新知识的目的，通过直观激发学习兴趣，创设情境引起学生思考，精心设疑促使学生探究等。

（三）无论采用哪种教学方法，都要遵循儿童认知规律

前面研究教学目标时谈到了儿童认知规律。在选用教学方法时也要认真考虑这个问题。这是提高教学效果的一个重要方面。按照这一规律，教学某些内容时要组织学生进行适当的操作。特别是遇到数学知识比较抽象，而学生又缺少感性经验的时候，更要注意通过操作，给学生建立表象，激发学生思考，促进对抽象的概念、法则的理解。例如，教学 20 以内的进位加法，要通过操作使学生掌握凑十的方法。教学长方形、正方形的认识时，要通过实际量它们的边长，用三角板的直角比量它们的角，并且进行一些拼、摆活动，来认识它们的特征。教学简单应用题时，也可以通过操作来分析数量关系。例如下图，通过摆学具，使学生理解白圆片比黑圆片多，白圆片可以分成两部分，一部分是跟黑圆片同样多的，另一部分是比黑圆片多的；从 8 个白圆片里去掉跟黑圆片同样多的 5 个，剩下的 3 个就是比黑圆片多的，所以要用减法计算。不仅在低年级要注意操作，在高年级教学一些抽象难理解的知识，如质数、合数、分解质因数、最大公约数、最小公倍数，也要重视操作。为了提高教学效果，进行操作时要注意以下几点：



1. 要选择最容易揭示所学概念或法则本质特征的学具，使学生操作简便省时。课前要设计好操作的步骤。

2. 进行操作要同思维和言语表达紧密结合起来。例如，教学 $34+2$ 和 $34+20$ ，要通过摆小棒，引导学生思考，从整捆的和整捆的相加，单根和单根的相加，抽象概括出要几个十和几个十相加，几个一和几个一相加。如果只用操作来验证一下计算的结果是不是正确，那就失掉操作的重要意义。但是也要明确这样一点，操作、直观是认识概念和理解法则的手段，教学时要注意逐步脱离操作、直观，以利于发展学生的抽象思维能力。

3. 重视操作、直观，并不意味着教学任何内容都从操作、直观开始。有些新知识学生可以在已学的基础上类推的，就要引导学生应用已学的知识迁移类推。

（四）无论采用哪种教学方法，都要注意启发学生思考，有计划有步骤地培养学生逻辑思维能力

这是有效教学的一个重要目标。另外，在教学中处理好知识和能力的关系，学生的思维得到发展，学会思考问题，就为进一步顺利地学习新知识创造了有利的条件。选用好的教学方法可以促进学生思维的发展，但是还需要教师在有计划有步骤地发展学生思维方面做出努力。为了顺利而有效地发展学生思维，以下几点值得注意：

1. 发展思维、培养能力，要贯穿在全部教学过程中。义务教育小学数学教学大纲（试行）强调要“贯穿在各年级教学的始终。”就是说每节课每个环节都要考虑如何发展学生思维。

2. 紧密结合教学内容来发展思维能力。为此，教学每一个概念、法则、应用题时都要分析其发展思维的有利因素，根据其特点有侧重地发展思维的某些方面。例如，结合教学 100 以内的数，加、减、乘、除法的意义，可以

侧重培养学生初步的抽象、概括能力；结合两位数加、减一位数的口算，两位数乘法的笔算以及应用题的教学，可以侧重培养学生初步的分析、推理能力；结合运算定律的教学，可以侧重培养学生初步的判断和归纳、演绎推理能力。还可以结合一些内容教给学生一些常用的思考方法。例如，结合除数是小数的除法可以教学转化的思考方法，即把新知识转化为已学的旧知识；结合计算和应用题的解答教给学生检验的方法等。

3. 适应学生思维发展的年龄特点，重视思维过程。小学生正处在从具体形象思维向抽象逻辑思维逐步过渡的阶段。不同年龄的学生有其不同的思维特点，教学时要根据学生思维发展特点有意识有计划地培养思维能力，才能收到良好的效果。例如，低年级学生年龄小，生活经验少，具体形象思维仍占优势，抽象思维能力还很弱，往往不能分出事物的本质特征，解答应用题时往往不能说出自己是怎么想的，或者不能完整地表述解题思路。教学时就要多结合操作、直观，提出启发性问题，引导学生一步一步地分析、比较，找出规律性知识或解题的方法。学生有时不会正确地表述，教师要适当给以帮助，解答应用题时要教给学生分析解题的思路。课堂上要多给学生叙述自己思考过程的机会。还可以组织学生分组说，通过互相说给同学听，便于培养学生检查和调节自己思维的能力，从而使思维和言语表达能力得到较快的发展。随着年级的增高，学生抽象思维的发展，可以更多地放手让学生独立思考，互相评价，发表不同意见，活跃思路，并且注意培养学生有条理有根据地思维。例如，中年级教学 $x + 5 = 12$ ，学生算出“ $x = 12 - 5$ ， $x = 7$ ”以后，可以提问，“你根据什么这样算？”教学 $25 \times 13 \times 4$ ，要求学生不仅能说出简便算法，还要能说出根据。还要注意学生判断的逻辑严密性。例如，高年级教学约数和倍数时可以提问，“12能被3整除，我们就说12是倍数，3是约数。这个判断对不对？”学生回答后要说明理由。总之，教学时要重视学生的思维过程，但是又要根据学生的年龄特点提出不同的要求，逐步提高学生的思维能力。

4. 重视思维品质的培养。这也是发展学生思维能力的一个重要方面。巴班斯基研究证明，思维品质与思维能力有很高的相关度。良好的思维品质对于培养创造型人才打好基础起着重要的作用。学生思维敏捷、灵活等也是课堂教学效率高的一个重要标志。义务教育小学数学教学大纲（试用）明确提出了这方面的要求。

思维的敏捷性从低年级起就要注意培养。如教学口算时要逐步提出适当的速度要求。教给学生一种计算方法，经过一定练习后要引导学生简缩思维过程，以便于进一步提高计算的速度。例如，教9加几、8加几后，可以引导学生观察、比较，找出得数与第二个加数有什么变化规律，在此基础上想一想怎样能很快算出得数。培养思维敏捷性，要注意要求适当，向学生提问要留给学生思考的时间，不能使学生过分紧张。

思维的灵活性也要从低年级起有意识地加以培养。可以采取以下一些途径：（1）对于一些有联系又有区别的知识，可以加强对比练习和混合练习。例如，加强两位数加、减一位数和整十数的对比练习，使学生能够随着数目和运算符号的变化迅速地确定解题的方向。（2）加强变式练习，既可加深学生对概念、法则的正确理解，又有助于培养学生思维的灵活性。例如，低年级教学长方形的认识，要出现摆放的位置不同的长方形；中年级教学分数的初步认识，要有把不同的图形平均分成几份的情况，还要有一些不均分的情

况。(3)引导学生探寻规律的练习,如低年级让学生找出加法表、减法表、100以内数目表的排列规律,有助于培养学生从一个角度迅速转向另一个角度观察、分析问题的能力。(4)鼓励学生想出不同的解题方法。如教学20以内退位减法时,教师教给某一种计算方法,同时也鼓励学生说出或使用自己的算法。有些应用题,鼓励学生想出不同的解法,并且比较哪种简便。有些题还可以让学生找出多个答案,如 $5 + () < 9$ 。这些练习在不同程度上具有发散思维的成分,不仅有助于培养学生思维的灵活性,还培养了学生思维的创造性。但是教学时要注意把发散思维与集中思维恰当地结合起来,不必要求学生举全,而要弄清和掌握基本的、简便的方法,否则会浪费时间,反而得不到好的教学效果。

(五) 选择教学方法要注意适应面向全体和因材施教的不同需要

巴班斯基指出,教学效果最优化的第一个标准,是每个学生在该时期内的学生成绩、教育和发展程度上,达到实际可能达到的水平。这就是说,要使每个学生都得到充分的发展。但是学生之间是存在着差异的,要达到上述要求,除了前边谈到教学目标定得适当,教学组织形式选得合适外,还要考虑选择适当的教学方法。因为学生间的差异是多方面的,不仅有生活经验和数学基础的差异,还有智力、认知方式以及性格等的差异,所以,教学方法也不能千篇一律。当面向全体进行教学时要根据大多数学生水平选择教学方法,而因材施教时就要针对不同学生的特点选择适当的教学方法。如对后进生要更多地运用操作、直观帮助他们理解新知识,一般不能采用独立活动强的教学方法。进行练习时也要多加检查与辅导。但是对于独立思考差的依赖型的学生,也要注意适当引导学生学习独立思考,避免都直接告诉学生怎样想,怎样做,以便逐步提高他们的学习能力。对于数学基础较好和思维能力较强的学生,则要更多地放手,不断提高他们独立思考和学习的能

五 积极创设良好的教学条件

创设良好的教学条件,是提高教学效率必不可少的因素之一。

(一) 创设良好的物质条件

巴班斯基认为,“创设必要的教学物质基础,显然是有效地和高质量地发挥教学教育过程作用的条件。”特别是使用教具、学具、电化教学手段,不仅增加学生的感性经验,有助于理解和巩固所学的概念、法则,而且激发学生思考,提高学生学习的兴趣。研究表明,只采用教师口授学生耳听,教学后3小时能记得60%,教学后3天能记得15%;而采用视、听结合的方法,教学后3小时能记得91%,教学后3天能记得75%。由此可以看出教学效果有显著的差异。如果增加学生的亲手操作,由于多种感官参加活动,教学效果更好。义务教育小学数学教学大纲(试用)特别强调“在教学中要重视运用教具、学具和电化教学手段。”为了创造良好的物质条件,教学时一方面充分利用学校已有的教学设备,如挂图、教具、投影仪等,另一方面要注意根据教学内容,收集和制作一些必要的教具、学具、幻灯片等。提倡就地取材,利用废物,尽量少花钱,讲实效。有条件的学校还可以适当利用计算机进行辅助教学。

(二) 创设良好的精神心理条件

这是提高课堂教学效率的一个很重要的条件。近年来现代教学论、教育

心理学以及教育社会学都重视这方面的研究。过去研究教学过程往往看重在认识活动方面，即研究它的认识功能。实际上教学过程还有其社会功能。从社会学的观点看，一个班就是一个小社会。因此，教学过程有两个侧面：一个是与掌握学习内容有关的主体活动（认识活动）过程，另一个是与掌握学习内容有关的社会活动（人际交往）过程。教学过程中的人际交往是多方面的，多层次的。一般可分为师生间的交往和学生间的交往两种。

1. 师生间的交往

师生间的交往包括教师与学生群体的交往和教师与学生个体的交往。从社会学的观点看，教师是学生个体社会化的承担者，要使学生的身心朝着与社会要求相一致的方向发展。结合小学数学教学来看，要使上述要求得到顺利的发展，有以下几点值得注意：

（1）教师要有正确的导向。在教学过程中教师要发挥主导作用，不仅在智育方面有正确导向，使学生获得大纲中规定的数学基础知识和数学基本技能，发展智力，培养能力，而且要注意培养良好的思想品德和学习习惯。

（2）建立良好的师生关系。在课堂教学中，要让学生学好数学，创设良好的精神心理气氛，使学生在轻松愉快的环境中学习非常重要。这就要求教师重视处理好师生间关系。首先是教师要树立良好的人格，如热情、和蔼、诚实、谦逊、守信等，使学生对教师产生信任感。其次要热爱学生，尊重学生，耐心帮助学生，对学生以朋友相待。特别是对一些后进生、回答错误或作业中出现错误的学生，要注意提高他们的自尊心和自信心。第三要正确运用评价手段。评价公正是非常重要的。对学生一次评价不公正往往会打击学生学习数学的积极性，降低学生学习数学的兴趣，同时还会丧失教师的威信。此外还应注意评价的时机要适当，评价的场合要适宜，评价的方式要合适，评价的强度要适中。

（3）采用合理的控制方式。从社会学的观点来看，教师对学生的教学工作是一种社会控制。控制的方式可以有两种：一种是显形控制方式，即直接向学生提出明确要求，明言规定不准做什么，往往采用批评、指责等方法来处理出现的问题。另一种是隐形控制方式，即用间接引导、诱发学生的学习积极性的活动，如提问、组织比赛等来限制和消灭某些不良的习惯或活动，并且多采用鼓励、表扬等方法。有经验的教师往往采取两者相结合的方式，收到较好的教学效果。例如，一位教师对一个原来数学基础较差而学习数学不够认真的学生，一方面提出要求，另一方面发现有进步就给以表扬，使这个学生逐步提高学习数学的自信心，达到了中等水平。另一位教师对一个数学基础较差的学生，虽然注意给以辅导，但是往往不耐心，有时甚至加以训斥，结果使得这个学生上数学课心情紧张，丧失学好数学的信心，以致成绩反而下降。

2. 学生间的交往

课堂教学是师生共同的集体活动，不断地进行着频繁的信息交流活动，不仅教师和学生之间在交流，学生与学生之间也在交流，其中包括学生个体与学生个体间的交流和学生个体与学生集体间的交流。传统的课堂教学不重视学生相互间的交流，致使课堂的气氛沉闷，学生的思维的积极性不能充分发挥。实验研究表明，加强小组活动，有助于在学生之间增加交往、沟通，为学生提供更多的参与机会；通过小组讨论，互相启发，可以把个人独立思考的成果转化为全组共同的认识成果；通过组内帮助，往往可以纠正教师无

法——纠正的错误；通过小组活动还有助于培养学生参与、尊重他人、合作等社会意识，自我观察、监督、控制、评价等自我意识，理解、表达、协作等社会能力，以及友谊感、集体荣誉感等社会情感。总之，通过加强学生间的交往，使全班学生为一个共同目标互相协作，互相帮助，互相影响，才能把班级组成一个有效的学习集体，从而普遍地提高学生的学习成绩，并有效地提高学生的社会化水平。

近年来我国有些教师在小学数学课上注意加强学生间的交往，适当安排一些小组活动，如操作、实验、讨论、质疑释疑等，收到较好的效果。还有的教研人员在这方面进行专门研究，在一些学校的数学课上进行人际交往的实验，也初步收到较好的效果，促进了课堂教学效率的提高。

六 重视数学教学评价

教学评价是教学过程中的一个必不可少的组成部分。它调节、控制着整个教学过程，使教学能朝着预定的目标前进，最终达到教学目标。

教学评价的范围较广：狭义的只限于学生学习效果的评价，广义的还包括教师教学质量的评价和课程、教材的评价。从优化教学过程来看，至少要进行前两方面的评价。而这两方面又有密切的联系。

（一）教师教学质量的评价

过去比较重视学生学习结果的评价，而对教师教学质量的评价往往有所忽视。实际上，在教学过程中，教师起着重要作用，学生的学习动机、学习方法以及学习效果，都与教师的课堂教学质量有密切的关系。因此，通过教师教学质量的评价，可以使教师了解课堂教学的水平、优缺点、实现教学目标的程度，为进一步改进教学提供依据。近几年我国已有一些地区开始制订小学数学教学课堂教学质量的评价标准，这对优化教学过程，提高小学数学教学质量能起一定的促进作用。

制订正确的评价标准是十分重要的，它起着导向的作用。要以现代教学论、教育心理学、教育社会学理论作指导，还要结合数学学科的特点，使它切实有利于促进小学数学教学效率的提高。根据一些教学评价专家的看法，可着重在以下几个项目进行评价：

1. 课堂教学的各个环节是否适当：其中包括目的要求是否全面、适当；教学内容的科学性和教学顺序是否合适；教学方法是否适当并充分调动学生学习的积极性；教学组织是否合适，是否处理好面向全体和因材施教的关系；教师的教态以及和学生的关系如何，是否创设良好的课堂学习气氛等。

2. 教学的效果如何：其中包括达到目的要求到什么程度；多少学生掌握所学的数学基础知识和基本技能；学生的能力发展如何；学生学习数学的兴趣是否增加等。

3. 教学的效率如何：其中包括时间的分配是否适当，有无时间浪费；学生的作业量如何，有无增加学生课外负担；教学活动是不是低成本的等。

评价时要有一些量化材料来说明。评价可以由同事、领导来做，还可以让学生参加评价。但是更多的课还是由教师自己评价。因此，不断提高教师自我评价的能力是非常重要的。

（二）学生学习结果的评价

评价学生学习数学的结果，主要有两方面作用：一是使教师了解学生学

习数学已取得的成绩和存在的问题，作为改进以后教学的参考。二是评定学生在一定阶段完了，掌握数学知识的程度和能力发展水平，便于学生、家长或其他人员了解学习的进步情况。

对学生学习数学结果的评价与考试的意义不完全相同。考试只是评价的方式之一，此外还可以采用平时观察、学生作业记录、平时考查（或单元练习）、交谈等方式。另外评价的范围也比考试的范围广，不仅重视认知方面，还重视情感（如对学习数学的兴趣）、操作技能等方面。如何做好学生学习数学结果的评价，目前还是一个有待研究、探讨的问题。从优化教学过程，提高小学数学教学效率来看，提出以下几点意见，供参考。

1. 注意全面评价：不仅考查数学基础知识，还要适当考查能力，注意评价数学教学对学生思想品德和良好学习习惯的培养方面的作用和影响，学生学习数学的兴趣是否有所提高。

2. 考查方式多样化，义务教育小学数学教学大纲（试用）提出，除笔试外，还可以口试，实际操作，还可以根据内容、目的要求，采取分项考查。例如，口算不仅要考查计算正确，还要注意速度。而考查测量、画图、制作统计图表就要实际操作。

3. 严格按照大纲的要求：考查时不能超过或低于大纲的教学要求。但是大纲中的教学要求是就一学年讲的，因此不能设想几节课或单元末就都达到规定的教学要求。特别是有些后进生基础差，难免理解和掌握慢一些，要使学生逐步达到规定的教学要求。在评价时要考虑到这一点。

4. 重视平时考查和学前评估：平时考查也可以说是形成性评价，主要目的在于了解学生每个单元或阶段掌握所学数学知识的情况，及时发现问题，及时解决。而学前评估带有诊断性，着重了解教学某部分知识前学生已有的基础、达到的水平和缺陷，使教学时更有针对性，从而进行更为有效的教学。是否进行学前评估要根据内容和需要来定，有时可以结合复习来进行。

5. 重视学习结果的分析：这无论对教师或者对学生，都很重要。分析成绩好的原因，可以巩固已有的好经验；分析出现错误的原因，以便找出改进的适当途径。不仅教师进行分析，还要鼓励学生参加分析，从而增进学生自我了解的能力。教师宜以鼓励为主，指出学生的进步情况，同时指出努力的方向，以调动学生学习的积极性，提高学生学习数学的自信心，避免使学生感到挫折、焦虑。按分数多少排名次的办法，从教育学、心理学的角度说，有损一些学生的自尊心，而且过分强调竞争，还容易导致集体道德的削弱或破坏，不宜采用。

（本文原是 1992 年在全国小学数学第五届年会上作的学术报告，后整理发表于《中国小学数学教育》1993 年第 1—4 期。）

加强实际操作与小学数学教学

近些年来，加强实际操作成为人们越来越重视的一种教学活动。最近修订的《全日制小学数学教学大纲》也十分重视这一点，提出，“要通过直观教学和实际操作，引导学生在感性材料的基础上，理解数学概念，进行简单的判断推理，掌握数学最基础的知识，逐步发展学生初步的逻辑思维。”为什么要加强实际操作，如何在小学数学教学中加强实际操作？下面谈谈个人的一点看法。

一 实际操作在小学数学教学中的作用

根据教育心理学家、儿童心理学家等的研究，实际操作对于儿童的发展和教育起着十分重要的作用。归纳起来有以下几点。

（一）实际操作是儿童智力活动的源泉

前苏联心理学家加里培林在论智力形成的几个基本阶段时说，“只有物质的（或物质化的）活动形式才是完备的智力活动的源泉。”这就是说，儿童的智力活动是在对物体（或物体的代替物，如模型、标本等）的动作中形成的。其他心理学家如瑞士皮亚杰的研究也表明，儿童的智力活动是与他周围物体的作用密切联系在一起的，也就是说，儿童的理解来自他们作用于物体的活动。小学数学的学习是一项重要智力活动，也不例外。特别是数学具有高度的抽象性，而小学生往往缺乏感性经验，只有通过亲自操作，获得直接的经验，才便于在此基础上进行正确的抽象和概括，形成数学的概念和法则。这在教学实践中的例子很多。例如，一年级教学元、角、分的认识，由于学生缺乏实践经验，长期以来是个难点。由于加强了实际操作，学生对元、角、分的进率就很清楚。中年级教学周长和面积时往往容易混淆，加强实际操作以后，学生对两个概念获得明确的表象，弄清两者的区别，计算错误也大大减少。高年级教学约数和倍数这一单元时，概念多术语也多，学生容易弄混。有些教师使用奎逊耐木条或计数板，引导学生进行操作，大大减少学习的难度，弄清概念的正确含义和求最大公约数、最小公倍数的方法。因此，无论从理论上或从实践上看，加强实际操作都是十分必要的。可以说，加强实际操作是现代的数学教学和传统的数学教学重要区别之一。正如皮亚杰所指出的，传统教学的缺点，就在于往往是用口头讲解，而不是从实际操作开始数学教学。只有加强实际操作，才能体现智力活动源泉这一基本思想。

（二）加强实际操作有助于发展学生思维能力

操作不是单纯的身体动作，是与大脑的思维活动紧密联系着的。儿童心理学的研究表明，早期儿童是在动作中思考的，而且只能在动作中思考，不能在动作之外思考。所以早期儿童的思维是直观动作思维，也称作“用手思维”。到了学前期儿童进入具体形象思维阶段，到了小学、中学以至成人逐步进入抽象逻辑思维阶段，仍有很多学习需要借助实际操作。正如心理学家所说，这种“用手思维”的形式并不会随着更高级的思维形式（即逻辑思维）的发展而消失。赞科夫也说过，有实际对象的活动（即指实际操作），不仅具有运动的技能和技巧本身的特点，其中也以一定方式反映出感觉、空间观念和思维活动。教学实践也表明，在实际操作中，学生要观察、分析、比较所操作的对象的不同点、相同点，然后进行抽象、概括。例如，教学20以内

进位加法，学生通过摆小棒或圆片，逐步总结出凑十加的方法。又如教学长方形面积的计算，通过有计划有步骤地摆小正方形，很多学生就概括出长方形面积的计算公式。可见学生操作的过程，同时也是发展思维的过程。由于实际操作是在现代教学论的思想指导下进行的，把学生看作学习的主体，引导学生通过操作发现规律性知识，因此在发展学生思维的同时，也培养了学生独立获取知识的能力。

（三）加强实际操作可以促进学生的全面发展

这里有两层意思。首先，加强实际操作可以培养学生动手操作能力。这是现代教学论十分强调的一个方面。例如赞可夫在进行小学教学新体系的研究时，把发展实际操作能力作为培养三种重要能力之一（另外两种是观察能力和思维能力）。在欧美等国家十分重视培养学生的操作能力。我国的教育方针也强调使学生在德智体美劳五个方面都得到发展。在小学数学中加强实际动手操作，让学生摆、拼、剪、制作、测量、画图等，有助于学生操作能力的培养，从而促进五育的全面发展。其次，加强实际操作可以促进大脑两半球的协调发展。这一点与前一点有密切的联系。操作能力弱也反映了大脑两半球协调发展不够。最近生理学的研究表明，大脑的左右两半球各有不同的功能占优势。左脑以语言、理解、科学、计算和逻辑思维等活动占优势，而右脑以形象的感知、记忆、时间概念、空间定位、音乐、想象和情绪等活动占优势。大脑的功能具有整体性，只有左右两半球相互配合，协调发展，人的智力发展才能获得最佳效果。如果某方面功能长期受到抑制就会衰退。例如，如果过多发展记忆，则思维判断能力就受到抑制。如果在儿童少年期只注意语言、抽象思维活动，长期下去就会使左脑负担过重，而右脑的功能得不到发展。使用直观的教学材料，由于其具有形象的特点，再加上儿童实际动手操作，就会促使左右两半球的协调发展，从而也促进智力的更好发展。

二 国内外小学数学教学中加强实际操作的情况

（一）重视小学数学教学材料的研究和推广。为了加强实际操作，很多国家都十分重视小学数学教学材料的研究和推广。例如，美国一般学校的教室里都放置大量的教具和学具。现在提倡有条件的学校建立专门的数学实验室，准备各种各样的教学材料，以便于学习和研究数学时使用。此外在实验室中还提供应用数学解决问题的情境。一般每个城市都设有教学手段中心或教学资料中心，为教师和学生提供各种教学材料；还准备各种工具和原材料，以便于教师自制。日本早在 60 年代就规定了小学需要装备的数学教具达 60 种，其中包括教具、仪器、模型和教学挂图等。近些年也注意生产和使用操作性的材料。如特为一年级学生准备一盒操作用具，内有方木块、数字卡片、计算卡片、小棒、钉子板、几何图形、钟表模型、塑料钱币等。近年来发展中国家也开始重视实际操作。1978 年亚太地区曾召开会议，研究推广使用低价的教学材料，其中包括各科的。1984 年又专门召开了亚太地区发展小学数学教学材料研讨会，选定了 9 个重点课题可以使用的教学材料 28 种，以后又补充 19 种。其中很多是用于学生操作的。还提出了鼓励使用教学材料的建议 20 条。

我国近年来也开始重视在小学数学教学中加强操作。有的地区或单位专门制作了学具袋或学具卡片，供学生操作用。有的出版单位还出版了如何加

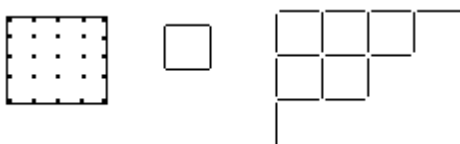
强操作教学的书籍供教学参考。各地教研部门也加强对操作教学的宣传和指导，收到较好的效果。

(二) 提倡取自周围环境的或低价的物品作为教具、学具。例如，美国一位数学教育工作者在对数学实验室应制备的教学材料的目录中，就列有石子、豆子、木片、扣子、自制 1 米长的棍子等，供数数或计量长度时用。日本一位数学教师曾介绍用家用的小厨柜（上面有几排抽屉）来教学乘法的认识和运算定律。亚太地区发展小学数学教学材料研讨会更是针对本地区发展中国家的特点，提倡选取周围环境的低价的物品作教学材料。

(三) 注意研制一种学具多种用途。例如，在国外广泛使用的奎逊耐木条，是分别由长 1 至 10 厘米、宽高各 1 厘米的木条制成的，依次分别涂上白、红、浅绿、紫、黄、深绿、黑、蓝、棕、橙等颜色。这种学生操作用具可用来认识自然数、计算加、减、乘、除、分解质因数、求最大公约数和最小公倍数以及认识分数等。目前国内一些学校也开始使用，取得了较好的效果。还有一种广泛用于几何初步知识教学的学具——几何板（也称钉子板），上面钉有 5×5 或 6×6 个无头钉，可以用橡皮筋在上面围学过的图形，用来认识几何图形、计算图形的周长和面积。在日本，有专门为学生制作的 20 以内加法练习转盘，乘法练习转盘，便于学生熟练加法表和乘法表。在菲律宾，教师即使制作一个式题卡片，也注意使其有多种用途。方法是在式题卡片上加一个可移动的纸套。例如：

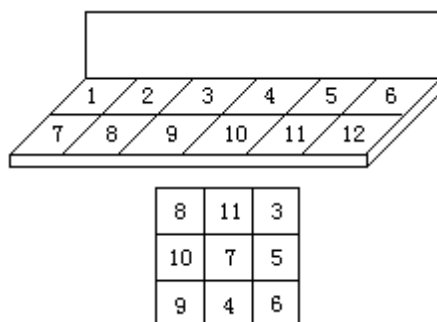
$$\boxed{14 - 4 = \square} \quad \boxed{14 - \square = 10} \quad \boxed{\square - 4 = 10}$$

(四) 注意结合操作发展思维。无论在国外或国内都十分注意通过某种学具的操作发展学生的思维，培养学生的创造力。例如，在钉子上围成像下页左面的正方形，让学生把它分成两个完全相同的图形，想想有几种分法。又例如，我国传统的玩具七巧板，过去常常只用来照一些现成的图案来摆。现在国内教师则研究出让学生摆某一种图形，如梯形，看有多少种不同的摆法，这样大大促进了学生思维的发展。在日本，还注意利用学具的操作发现解问题的方法，既发展学生思维，又培养解问题的能力。例如，用 4 根牙签摆一个小正方形，如果要摆 10×10 个小正方形（如右下图），需要多少根牙签？学生要通过实际操作，寻找解题规律，列出算式，并找出解法公式。还可以找出不同的解法，比较哪种简便。



(五) 注意操作的趣味性。加强操作本身已能激发学生的学习兴趣，此外还注意操作的教学材料的有趣性、游戏性。例如，德国制成一种计算盒子。上面分别写着得数 1—12 的卡片，另外有 12 道式题，每题的题号 1—12 分别写在正方形硬纸板上，大小与盒子里写着得数的正方形相同。学生每做一题，就把题号与得数对应地放在一起。全部做完后，把题号翻过来，如果都放得对，将组成一个规则的图案，学生会感到很有趣。在国外广泛流行着各种数学游戏。例如，美国有一种游戏叫做“加法连成线”。先做 1—10 的点子卡片各两张，然后做 20 以内的数目表若干张（如右图），每张上的数目要有些变化。一个学生翻出两张点子卡片，算出它们的和，如果数目表上有这个数

就用圆片把这个数盖住。第二个学生也照这样做。这样轮流做下去。最后看谁先把某一直行或斜行的3个数盖住为胜。(点子卡片还可以改做数字卡片,另外也可以把数目表中的数改成每两个数的积,来做乘法练习。)



三 在小学数学教学中加强实际操作应注意的问题

加强实际操作是小学数学教学方法上的一个重大改革。要改得好,需要解决好操作中遇到的一些问题。主要有以下几点。

(一) 克服思想中的障碍,大胆实践

克服思想中的障碍有两个方面:一是从理论上提高对实际操作的重要性的认识,这一点在前面已经分析过。还有一方面是要解决实际操作中的具体的思想问题。例如,有些教师认为,一个班学生多,怕摆弄学具费时间,影响教学进度。实践表明,有计划有步骤地安排操作,并不费很多时间。开始学生操作,手不灵活,经过一段时间的训练,学生形成习惯和技巧,只要组织得好,边操作、边思考、边讲述,并不多费时间。也有的教师认为制备操作的材料需要花钱,缺少经费。实践也证明,就地取材,废物利用,如用工厂的下脚料,农村用石子、小棍等,可以做到不花钱或少花钱,同样收到操作的效果。总之,关键是克服思想的障碍,大胆实践,就会想出很多解决的办法,尝到实际操作的甜头。

(二) 有目的、有计划地进行操作

操作不是在任何情况下都进行的。要根据教学的目的、内容和学生的基础有计划地安排操作活动。一般教学新的概念、法则,学生缺乏感性经验或难于理解的,宜于从操作开始。遇到学生较为熟悉的或者能从已学的知识中推导出来的新知识,就不一定也从操作开始。例如,开始教20以内进位加法,为了使学理解和掌握凑十的方法,可以引导学生用小棒或圆片进行操作。教到6加几、5加几时,学生已经有了基础,也可不再进行操作。学生独立操作的程度也要随着内容和学生的程度而定。例如,在低年级或教学不熟悉的内容,往往先由教师做出示范,说明如何操作,再让学生独立操作;在较高年级,如计算长方形面积,教师可只说明操作的方法和步骤,然后让学生自己操作,教师加以巡视,以了解学生操作的情况。无论怎样进行操作,教师在课前都要做好细致的准备和周密的设计,以期收到良好的效果。

(三) 把操作、思维和言语表达紧密结合起来

在小学数学中操作主要是作为一种手段,最终要达到理解数学基础知识和发展思维的目的。因此教学时不能为操作而操作,使操作流于形式。这就要求教师把操作和思维结合起来,通过操作揭示数学知识的要点和基本规律。例如教学 $34+2$,用小棒操作时不是简单地证明 $34+2$ 等于36,重要的是

通过操作来说明其计算的方法和步骤。因为 34 要用 3 捆小棒和 4 根小棒来表示，加上 2 要用添 2 根小棒来表示，使学生看到先把单根的小棒加在一起，也就是 4 个一和 2 个一相加得 6 个一；再把整捆的小棒和单根的小棒合并，也就是 3 个十和 6 个一加在一起。使学生从操作中逐步抽象概括出两位数加一位数的方法，即先把几个一相加，再和整十数合并起来。这样从操作的过程反映出思维的过程。为要使学生切实理解和掌握这个过程，还要让学生用言语表达出来。开始可以在教师的帮助下进行，以后逐步让学生独立说。还可以让同桌的学生互相说一说，以增加学生用言语表达的机会。通过言语表达，既加深学生对数学知识的理解，又培养学生的思维能力和言语表达能力。

（本文是一篇讲稿）

小学数学概念的教学

数学概念是小学数学知识的基本要素。小学数学是由许多概念、法则、性质等组成的确定体系。每一个法则、性质等实际上都是一个判断，而且离不开概念。可以说，判断是概念与概念的联合。因此，要使小学生掌握所学的数学知识和计算技能，并且能够实际应用，首先要使他们掌握好所学的数学概念。在中国编写小学数学课本时十分重视数学概念的教学。

一 数学概念的确定

在小学如何确定或选择应教的数学概念，是一个复杂的问题。根据我们的经验，在选定数学概念时既要考虑到需要，又要考虑到学生的接受能力。

(一) 选择数学概念时应适应各方面的需要。

1. 社会的需要：主要是指选择日常生活、生产和工作中有广泛应用的数学概念。绝大部分的数、量和形的概念是具有广泛应用的。但是社会的需要不是一成不变的，而是常常变化的。因此小学的数学概念也应随着社会的发展适当有所变化。例如，1991年我国采用法定计量单位后，原来采用的市制计量单位就不再教学了。

2. 进一步学习的需要：有些数学概念在实际中并不是广泛应用的，但是对于进一步学习是重要的。例如质数、合数、分解质因数、最大公约数和最小公倍数等，不仅是学习分数的必要基础，而且是学习代数的重要基础，必须使学生掌握，并把它们作为小学数学的基础知识。

3. 发展的需要：这里主要是指有利于发展儿童的身心的需要。例如，引入简易方程及其解法，不仅有助于学生灵活的解题能力，减少解题的困难程度，而且有助于发展学生抽象思维的能力。在我国的小学数学中，教学方程产生了很好的效果。小学生不仅能用方程解两三步的问题，而且能根据问题的具体情况选择适当的解答方法。这里举一个例子。

要求五年级的一个实验班的38名学生（年龄10.5—11.5岁）解下面两道题：

(1) 工人修一条路。第一天修了全路的 $\frac{1}{5}$ ，第二天修了 $\frac{3}{4}$ 千米，还剩 $2\frac{1}{20}$ 千米没有修。这条路有多长？

学生能用两种方法解：算术解法和方程解法。用每种方法解题的正确率都是91.7%。下面是两个学生的解法。

一个中等生的解法：

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} + 2\frac{1}{20} &= \frac{15}{20} + 2\frac{1}{20} \\ &= 2\frac{16}{20} = 2\frac{4}{5} \text{ (千米)} \end{aligned}$$

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \frac{14}{5} \div \frac{4}{5} &= \frac{14}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{4} \\ &= 3\frac{1}{2} \text{ (千米)} \end{aligned}$$

$$x - \frac{1}{5}x = \frac{3}{4} + 2\frac{1}{20}$$

$$\frac{4}{5}x = \frac{14}{5}$$

$$x = \frac{14}{5} \times \frac{5}{4}$$

$$x = 3\frac{1}{2}$$

答：这条路有 $3\frac{1}{2}$ 千米。

一个下等生的解法：

$$2\frac{1}{20} + \frac{3}{4} = 2\frac{4}{5} \text{ (千米)}$$

$$\frac{4}{5} \div (1 - \frac{1}{5})$$

$$= \frac{14}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{4}$$

$$= 3\frac{1}{2} \text{ (千米)}$$

答：这条路有 $3\frac{1}{2}$ 千米。

$$(1 - \frac{1}{5})x = 2\frac{1}{20} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{5}x = \frac{14}{5}$$

$$x = \frac{14}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{4}$$

$$x = 3\frac{1}{2}$$

答：这条路有 $3\frac{1}{2}$ 千米。

(2) 妈妈买 $7\frac{1}{5}$ 米花布，比买的蓝布的 $\frac{3}{4}$ 多0.9米。买的花布比蓝布少多少米？

这道题是比较难的，学生没有遇到过。结果很有趣。58.3%的学生用方程解，41.7%的学生用算术方法解。而用方程解的正确率比用算术方法解的高22%。

下面是两个学生的解法。

一个优等生用算术方法解：

$$\begin{aligned} &(7\frac{1}{5} - 0.9) \div \frac{3}{4} - 7\frac{1}{5} \\ &= (7\frac{2}{10} - \frac{9}{10}) \div \frac{3}{4} - 7\frac{1}{5} \\ &= \frac{21}{10} \times \frac{4}{3} - 7\frac{1}{5} \\ &= \frac{42}{5} - 7\frac{1}{5} \\ &= 8\frac{2}{5} - 7\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$=1\frac{1}{5} \text{ (米)}$$

答：买的花布比蓝布少 $1\frac{1}{5}$ 米。

一个中等生用方程解：

解：设买来蓝布 x 米

$$\frac{3}{4}x + 0.9 = 7\frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{4}x = 7\frac{1}{5} - 0.9$$

$$\frac{3}{4}x = 6.3$$

$$x = 6.3 \div 1.75$$

$$x = 8.4$$

$$8.4 - 7\frac{1}{5} = 8\frac{2}{5} - 7\frac{1}{5}$$

$$= 1\frac{1}{5} \text{ (米)}$$

答：买的花布比蓝布少 $1\frac{1}{5}$ 米。

(二) 选择数学概念时还应考虑学生的接受能力。小学生的思维特点是从具体形象思维向抽象逻辑思维过渡。一般地说，数学概念具有不同程度的抽象水平。在确定教学某一概念的必要性的前提下还应考虑其抽象水平是否适合学生的思维水平。为此，根据不同的情况可以采取以下几种不同的措施：

1. 学生容易理解的一些概念，可以采取定义的方式出现。例如，在四五年级教学四则运算的概念时，可以教给四则运算的定义，使学生深刻理解四则运算的意义以及运算间的关系。而且使学生能区分在分数范围内运算的意义是否比在整数范围内有了扩展，以便他们能在实际计算中正确地加以应用。此外，通过概念的定義的教学还可以使学生的逻辑思维得到发展，并为中学的进一步学习打下较好的基础。

2. 当有些概念以定义的方式出现时，学生不好理解，可以采取描述它们的基本特征的方式出现。例如，在高年级讲圆的认识时，采取揭示圆的基本特征的方式比较好：(1) 它是由曲线围成的平面图形；(2) 它有一个中心，从中心到圆上的所有各点的距离都相等。这样学生既获得了概念的直观的表象，又获得了其基本特征，从而为中学进一步提高概念的抽象水平做较好的准备。

3. 当有些概念不易描述其基本特征时，可以采取举例说明其含义或基本特征的方法。例如，在教学“量”这概念时，可以说明长度、重量、时间、面积等都是量。对“平面”这个概念可以通过某些物体的平展的表面给以直观的说明。

二 数学概念的编排

数学概念的编排，在一定程度上可以看作是各年级对数学概念的选择和出现顺序。数学概念的合理编排不仅有助于学生很好地掌握，而且便于学生掌握运算、解答应用题以及其他内容。根据教学论 和我们的实践经验，数学概念的编排应当符合下述原则：既适当考虑数学概念的逻辑系统性又适当考虑学生认知的年龄特点。为了贯彻这一原则，必须考虑以下几点。

（一）采取圆周排列：这一点不仅反映人类的认知过程，而且符合儿童的认知特点。如众所周知的，自然数的认识范围要逐渐地扩大，“分数”概念的意义也要逐步的予以完善。

（二）注意概念之间的关系：例如，小数的初步认识宜于放在分数的初步认识之后，以便于学生理解小数可以看作分母是 10、100、1000……的分数的特殊形式。把比的认识放在分数除法之后教学，会有助于学生理解比和分数的联系。

（三）概念的抽象水平要符合学生的接受能力：例如，在低年级教学减法的含义，是通过操作和观察使学生理解从一个数里去掉一部分求剩下的部分是多少。而在高年级教学时，宜于通过实际例子给出减法的定义。在低年级教学平行四边形时，只要说明其边和角的特征而不教平行线的认识。但在高年级就宜于先介绍平行线，再给出平行四边形的定义。

（四）注意数学概念与其他学科的配合：数学作为一个工具与其他学科有较多的联系。有些数学概念，如计量单位、比例尺等在学习语文和常识中常用到，在学生能够接受的情况下可以提早教学。

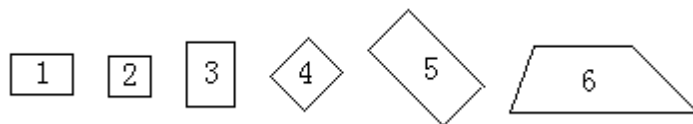
三 小学生数学概念的形成

小学生的数学概念的形成是一个复杂的过程。特别是一些较难的数学概念，教学时需要一个深入细致的工作的长过程。根据数学的特点和儿童的认知特点，教学时要注意以下几点。

（一）遵循儿童的认知规律，引导学生抽象、概括出所学概念的本质特征。例如，在低年级教学“乘法”这个概念时，可以引导学生摆几组圆形，每组的圆形同样多，并让学生先用加法再用乘法计算圆形的总数。通过比较引导学生总结出乘法是求几个相同加数和的简便算法。教学长方形时，先引导学生测量它的边和角，然后抽象、概括出长方形的特征。这样教学有助于学生形成所学的概念并发展他们的逻辑思维。

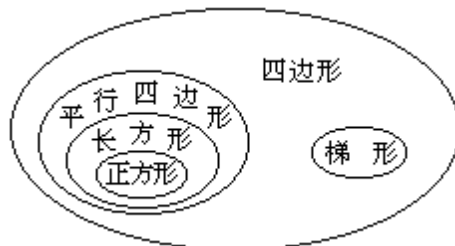
（二）注意正确地理解所学的概念。教学经验表明，学生对某一概念的理解常常显示出不同的水平，尽管他们都参加同样的活动如操作、比较、抽象和概括等。有些学生甚至可能完全没有理解概念的本质特征。这就需要检查所有的学生是否理解所学的概念。检查的方法是多样的，其中之一是把概念具体化。例如，给出一个乘法算式，如 3×4 ，让学生摆出圆形来说明它表示每组有几个圆形，有几组。另一种方法是给出所学概念的几个变式，让学生来识别。例如，下图中有几个长方形摆放的方向不同，让学生把长方形挑选出来。

M.H.斯卡特金（苏）《现代教学论问题》中译本，人民教育出版社，1982年版，第34页。陈侠《课程论》人民教育出版社，1989年版，第320页，逻辑系统与心理系统的关系。



此外，还可以让学生举实例说明某一概念的意义，如举例说明分数、正比例的意义。

(三) 掌握概念间的联系和区别。比较所学的概念并弄清它们的区别，可以使学生深刻地理解这些概念，并消除彼此间的混淆。例如，应使学生能够区分质数与互质数，长方形的周长和面积，正比例和反比例等。在教过有联系的概念之后，可以让学生把它们系统地加以整理，以说明它们之间的关系。例如，四边形、正方形、长方形、平行四边形和梯形可以通过下图加以系统整理，以说明它们的关系。



通过概念的系统整理使学生在头脑中对这些概念形成良好的认知结构。

(四) 重视概念的应用。学习概念的应用有助于学生进一步加深理解所学的概念，把数学知识同实际联系起来，并且发展学生的逻辑思维。例如，学过长方体以后，可以让学生找出周围环境中哪些物体的形状是长方体。学过质数概念以后可以让学生找出能整除 60 的质数。

我们的实验表明，由于采取了上述的措施，学生对概念的理解的正确率有较明显的提高。下面是 1989 年进行的一次测验中有关学生掌握数学概念的测试结果。

测试的概念	答案正确率	
	实验班 (81 人)	对照班 (77 人)
比 2 小的整数只有 1。 (对或不对)	96.2 %	92.2 %
0 的倒数是 0。(对或不对)	80.2 %	48 %
0、 $\frac{1}{27}$ 、27.2% 和 $\frac{2}{7}$ 这 3 个数， 最大的是 ()，最小的是 ()。	98.1 %	94.8 %
三角形的面积一定，它的底和 高成反比例。(对或不对)	93.8 %	77.9 %
画一个半径是 2.5 厘米、圆心 角是 120° 的扇形。	90.1 %	80.5 %

注：1. 两个实验班都是五年级，年龄是 11—12 岁。一个对照班是五年制五年级，另一个是六年制六年级。

2. 1991 年用同一测验测试全国约 200 个实验班，也得到较好的结果。

上面的测试结果表明，实验班学生学习数学概念的成绩，在认数、几何

图形，特别是在学习倒数、比例和扇形方面都优于对照班的学生。最后一项测试结果还表明，实验班学生在发展空间观念和作图能力方面优于对照班学生。

四 结 论

在小学加强数学概念的教学对于提高学生的数学概念的认知水平具有重要的意义。

在小学如何确定教学的数学概念是一个重要的复杂的问题。在选定概念时，既要很好地考虑需要，又要很好地考虑学生的接受能力。

合理地安排数学概念对于学生掌握他们有很大帮助。在编排概念时，既要充分考虑所教概念的逻辑系统性，又要照顾到不同年龄的学生的认知特点。

教学的策略对于形成学生的数学概念起着重要的作用。在教学概念时教师应当遵循儿童的认知规律和激发学生思考的原则，并且注意使学生正确理解概念的意义，掌握概念间的联系和区别，并在实际中应用所学的概念。

（本文是 1992 年向第七届国际数学教育会议提交的论文，曾在大会第一研讨组上宣读。）

谈小学数学教学中培养学生解答应用题的能力

一 培养学生解答应用题能力的重要性

关于培养学生解答应用题能力,《九年义务教育全日制小学数学教学大纲(试用)》中没有明确提出,但是在教学目的中讲到了使学生“能够运用所学的知识解决简单的实际问题”,这实质上包含了培养学生解答应用题的能力,当然在小学还是初步的。可以说,培养学生解答应用题的能力是使学生能够运用所学数学知识解决简单的实际问题的基本内容和重要途径。因为应用题反映了周围环境中常见的数量关系和各种各样的实际问题,需要用到不同的数学知识来解决。通过解答应用题,促使学生把所学的数学知识同实际生活和一些简单的科学技术知识联系起来,从而使学生既了解数学的实际应用,又初步培养了运用所学的数学知识解决实际问题的能力。另外数学作为一门工具学科,也应该把它用于解决实际问题作为教学的一个重点。这一点越来越多地被各国数学教育工作者所认识。例如,美国在80年代初就提出“解问题是80年代学校数学的重点;”在为90年代拟订的中小学数学课程标准中,再一次强调数学教育的目标之一是使学生成为“具有解数学问题能力的人”,“有效地应用数学方法解决问题的人”。当然,培养学生解应用题能力的重要意义远不止于此,还可以发展学生的逻辑思维能力,培养学生良好的思维品质(如思维的灵活性、创造性)和道德品质等。而这些都是作为现代社会中具有较高的文化素养的公民所必须具备的能力和品质。

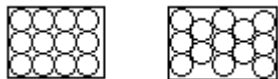
长期以来,我国的小学数学,无论从教材或从教学来说,对应用题教学是重视的,但是也存在不少问题,主要是偏重内容的教学,轻视能力的培养,加之教材的选择和编排不尽合理,教学的方法不尽适当,以致花的力气很大,收的效果较小。因此,如何提高学生解应用题能力,又使学生负担较轻,是一个值得认真研究探讨的问题。

二 解答应用题教学的改革趋势

近年来,国内外一些数学教育工作者和有经验的教师对解答应用题的教学,特别是如何培养能力进行了一些改革的尝试,取得了一些有益的经验。主要有以下几个发展趋势。

(一) 应用题的内容趋于扩大

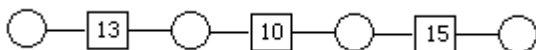
首先是加强联系实际的问题。不仅限于课本中编好的现成应用题,而是从实际生活中收集材料和数据,进行一些计算。例如,美国在进行加减计算时,让学生分类收集一些数字材料,然后进行统计和计算。英国在教学时给学生一张火车时刻表,不仅让学生能看懂某次车始发和到达的时刻,而且进行各种计算。通过一些实际作业使学生知道数学的概念和思想就存在于人们的活动当中,并且能够运用数学知识解决生活中的实际问题。我国有些教师也很注意实际生活中的数学问题。例如,一位教师出了这样一个题目:“某车间用一块长90分米、宽60分米的铁皮剪成半径是10分米的圆形铁片,该怎样下料才能使铁皮的利用率最高?”结果多数学生列成下式: $90 \times 60 \div (3.14 \times 10^2) = 17$ 个;部分学生通过画图(左下图)得到答案是12个;还有一部分学生通过操作(如右下图)



得到答案是 13 个。通过讨论，使学生认识到最后一种下料方法利用率高，而第一种计算方法是脱离了这块铁皮的实际的。通过这样的问题使学生初步体会到在解决实际问题时绝不能生搬硬套所学的数学知识，还要注意对实际问题进行具体分析。

其次，运用数学知识所解的问题不限于实际生活中遇到的，还包括一些有助于培养学生运用数学知识进行探究能力的问题。例如，在下面的 里填上合适的数，使每相邻两个 里的数的和等于它们中间 里的数。让学生不仅写出不同的答案，而且找出填写的规律，并回答出能不能使开头和末尾的

里的数相同。由于解题的范围较广，很多国家不用“应用题”这个名称，直接叫做“问题”，日本原来叫做“应用题”，现改称“文章题”，以体现其范围的扩展。



（二）应用题的难度趋于降低

这个问题在多数国家已经得到解决。如日、美、英等国，解问题的面较广，较联系实际，但是难度较小。如日本课本中的文章题大多是两步计算的。有少数国家，如俄罗斯，原来应用题的难度较大，步数较多，后来难度已有所降低或适当后移。特别是在把小学三年制改为四年制以后，随着算术内容教学时间的延长，相应地应用题的教学时间也拉长了，应用题的难度也进一步降低。香港地区编订的《数学科学习目标》中规定整数四则应用题，“每题运算次数不超过两次”，分数、小数限解简易应用题。许多国家或地区采取这些措施，使应用题教学更适合小学生的年龄特点，无疑会有利于减轻学生的学习负担，更好地激发学生对解应用题的兴趣和积极性。我国在解应用题方面一直存在着偏难偏多的问题，特别是升学考试为了便于择优录取，往往出现超过大纲、课本范围的题目，给教学带来很大的压力和负担。近年来实施义务教育以后，强调全面提高民族素质，应用题教学开始注意适当降低难度，是一个可喜的现象。

（三）重视培养学生掌握解题的一般策略

这是培养学生解应用题能力的重要条件之一。它与应用题的教学目的和作用紧密联系着的。长期以来，无论在国内或国外，都或多或少地把在小学数学课中要教会学生解答某些类型的应用题作为教学的最终目的。从这一看法出发，把教给学生应用题类型，记结语或公式作为基础知识。结果形成学生套公式的习惯，没有真正培养起解题能力。近些年来，越来越多的数学教育工作者认识到，应用题教学的最终目的，应是通过一些有代表性的问题的解答，使学生掌握解问题的一般策略或方法，从而达到真正培养学生解决简单的实际问题的能力。例如，日本伊藤武说过，过去解应用题，安于形式地机械地进行，把应用题分成若干类型，每一个类型都有一种确定的解法，结果容易使学生对确定的一些问题会解，而没学过的应用题就不会解了。前苏联弗利德曼著《中小学数学教学心理学原理》中说：“形成和发展学生解任何数学题（包括实用题）的一般技能，这是数学教学的基本职能之一”。1988 年第六届国际数学教育会议也强调教学生学会使用解题的一般策略。有的代表指出，传统的教学解问题的方法往往是由教师给出一个范例，让学生

模仿；教师不仅没有给学生准备真实的问题情境，也没有教给学生一般的解题策略，这样既不能提高学生解决问题的能力，也不能提高他们解决问题的积极性。有代表提出解数学问题的一般策略有：联系、分析、分类、想象、选择、作计划、预测、推论、检验、评价等。美国新拟订的《中小学数学课程和评价标准》中，每个学段的第一条标准就是学习和应用解决问题的策略，只是要求的水平不同，体现逐步提高。目前美国的小学数学课本大都编入解题的一般策略，作为正式的教学内容。例如，一本五年级课本中出现以下一些内容：用图解，检验，有多余条件或缺少条件的，编题，多步题的解题步骤，估算得数，用表解。

近年来，我国一些数学教研人员和教师也开始注意研究如何教给学生一般的解题思路和方法，特别重视分析题里的数量关系。有的实验教材中也加强理解题意，摘录应用题条件，补充应用题的条件，检验应用题的解答等的训练。这对于提高学生解答应用题能力有很大的帮助。

（四）加强方程解法使之与算术解法相辅相成

从 60~70 年代的数学教育现代化运动开始，许多国家的小学数学增加了简易方程和列方程解应用题。但是列方程解应用题教学的起始期以及深度、广度，差异很大。例如，前苏联教学方程解法从小学二年级就开始了，而且有两步的应用题要求用方程解。这就涉及算术解法与方程解法之间的关系问题。近年来逐渐趋于一致。一方面，较多的国家或地区，如日本、俄罗斯、香港等，小学教学列方程解应用题限两、三步计算的，另一方面是在用算术方法解应用题有了一定基础再逐步出现列方程解应用题，这样可以使两种解法起到相辅相成的作用。

在我国，自 80 年代初小学开始增加列方程解应用题，一直有不同的看法。十多年的实践表明，增加简易方程和列方程解应用题，的确有助于发展学生的抽象思维，减少解应用题的难度，培养学生灵活解题的能力，并有利于中小学数学的衔接。但是在实际教学时还存在着不同的处理方法。特别是涉及分数除法应用题的教学，很多教师把用方程解作为向算术解法的过渡，最后还是强调算术解法，忽视方程解法。这样仍不能达到降低难度减轻学生负担的目的。近年来有些改革实验，强调算术解法与方程解法并重，相辅相成，取得较好的效果。例如，据《小学数学教师》1989 年第 3 期载上海虹口区教育学院等按上述方法试验情况，第一次测试，试验班与控制班差异不明显，第二年年秋追踪到中学进行测试，结果试验班成绩明显优于控制班，只学算术解法的学生到了中学产生了负迁移。另据《小学数学教师》1992 年第 2 期载无锡市教委教研室等使用课程教材研究所编的实验教材，也取得类似的结果。两个实验班采取加强算术解法与方程解法的联系，并且两者并重，而两个对照班仍教给解题模式。结果单元教学完了，测试实验班和对照班成绩没有显著差异，但是寒假后再测试差异明显，实验班和对照班的成绩分别为 87.3 分和 78.7 分。但是根据北京一所小学的实验，单元教学完了在测试 3 步题和灵活解应用题时，实验班和普通班的成绩就出现明显差异。

三 义务教育《小学数学教学大纲（试用）》对提高解应用题能力采取的措施

《九年义务教育小学数学教学大纲（试用）》为了适应义务教育的性质

和需要，切实提高小学生解答应用题的能力，根据国内外应用题教学改革的发展趋势，结合我国的实际情况，采取以下一些具体的改革措施。

（一）降低应用题的难度

《大纲（试用）》明确规定：整数、小数应用题最多不超过三步；分数、百分数应用题以一、两步计算的为主，最多不超过三步（只限比较容易的）。删去了原大纲中的稍复杂的应用题以及综合性的不太繁难的应用题。由于全国各地的条件不平衡，作为义务教育，提出的统一要求不能太高，这样修改就使全国大多数学校大多数学生经过努力都能达到规定的要求，而且有利于学生的全面发展，为升入初中打下更好的基础。考虑到各地的条件不平衡，《大纲（试用）》中也注意有些弹性，规定四步应用题（比较容易的）作为选学内容，以便使少数条件较好的学校能充分发挥学生的积极性，更好地提高解题能力。

（二）加强联系实际

这比原大纲有明显加强。一方面增加了联系实际的内容，如百分数的应用中明确提出利息的计算，把求平均数问题与统计紧密结合起来等。另一方面在说明中强调“要引导学生了解数学知识的实际应用，从当地实际出发，进行调查，收集数据，在教师的帮助和指导下，编成数学问题，进行计算、解答，或作一些简单的统计，逐步培养学生这方面的兴趣、意识和解决实际问题的能力”。这对于培养学生具有自觉地把数学应用于实际的意识和态度，使数学真正成为学生手中的有用的工具，起着重要的作用。

（三）注意体现教给学生解题的一般策略

在《大纲（试用）》的说明中提出：“要引导学生分析数量关系，掌握解题思路。”这实际体现了培养学生掌握解题的一般策略。为了使之更加落实，在各年级的教学要求中还明确提出分阶段要求。例如，在五年制一年级要求学生知道题目中的条件和问题，二年级要求初步学会口述应用题的条件和问题，三年级把常见的数量关系作为知识点列入大纲，要求初步学会口述解题思路，进一步培养检查和验算的习惯，四年级要求掌握解应用题的一般步骤，五年级要求会有条理地说明解题思路。这样安排要求，有利于循序渐进地培养学生掌握解题的一般策略，逐步提高学生解应用题的能力。与此同时，《大纲（试用）》中还注意适当让学生掌握解题的特殊策略或方法。例如，说明和教学要求中都提到会按照题目的具体情况选用简便的解答方法。这样有利于培养学生思维的敏捷性和灵活性。

（四）适当加强方程解应用题及其与算术解法的联系

首先，在教学简易方程时增加了 $ax \pm bx = c$ 这一类型，相应地扩展了用方程解应用题的范围。这不仅可以用来解答较多的整数、小数应用题，而且可以用来解答一些分数、百分数应用题（需用逆思考的）。这样还降低了所解的分数、百分数应用题的难度。例如，“饲养小组养白兔和黑兔共 18 只，

其中黑兔的只数是白兔的 $\frac{1}{5}$ 。白兔和黑兔各有多少只？”过去求白兔的只

数强调列方程 $(1 + \frac{1}{5})x = 18$ ，学过 $ax \pm bx = c$ 这类方程的解法并解过 a、b

是分数的方程之后，就可以列出 $x + \frac{1}{5}x = 18$ 。这样列方程，解题思路容易为

学生接受，而且符合代数列方程解应用题的一般思路，从而为初中的学习做更好的准备。其次，《大纲（试用）》中强调五年级进一步提高用算术方法和用方程解应用题的能力，体现了加强两者间的联系以及灵活合理地运用两种解法。如上面的例子，如果列出方程 $x + \frac{1}{5}x = 18$ ，把它变形为 $(1 + \frac{1}{5})x = 18$ ，进一步计算可以得 $x = 18 \div (1 + \frac{1}{5})$ ，这样就得到了算术解法。从而使学生知道方程解法和算术解法是密切联系着的，不是各自孤立的。也只有这样教学才能提高学生用两种方法解应用题的能力，从而进步发展学生在解题中的思维的灵活性和创造性。

四 对培养学生解答应用题能力的几点教学建议

下面根据近年来国内外改革的经验以及个人参加实验工作中的体会，对培养学生解答应用题能力提几点教学建议。

（一）抓好简单应用题的教学

大家都知道，解简单应用题是解复合应用题的基础，无论整数应用题或分数应用题都是一样，它们有共同的教学规律。打好整数、分数简单应用题的基础就为解复合应用题做好了准备。

怎么叫做打好解答简单应用题的基础？个人体会主要是使学生初步理解和掌握四则运算的意义，会分析简单应用题里的数量关系，然后能根据题里的数量关系正确选择运算方法，并养成检验的良好习惯。下面做一些具体的分析。

1. 初步理解和掌握四则运算的意义。这是学习解答一切应用题的重要基础。正像有的教师所讲的，虽然应用题的内容是千变万化的，但都是四则运算在实际中的应用。往往有些学生不理解四则运算的意义，解答简单应用题时乱猜算法，或者根据题里的某个词语选定运算方法，这样是不能真正培养起解答应用题的能力的。关于四则运算的意义，要根据儿童不同年龄的认知特点分成不同的层次来教学。低年级要通过操作直观使学生理解每种运算的含义。例如减法，只要通过摆物品和图画等使学生懂得是从一个数里去掉一部分求剩下的部分是多少；高年级再进一步抽象，使学生懂得减法是已知两数和与其中一个加数求另一个加数是多少。高年级教学分数除法也是从乘法的逆运算的角度来理解的，这样就便于在解应用题时实际应用。

2. 使学生学会分析数量关系。这是解答应用题的一项基本功。即使是简单应用题也存在着一定的数量关系，绝不能因为应用题简单而忽视对数量关系的分析。分析清楚题里已知条件和问题之间存在着什么样的数量关系，才好确定解决问题的方法。有些简单应用题的数量关系是明显的，学生容易弄清的。例如，“有5只黑兔，又跑来3只白兔，一共有几只兔？”学生很容易弄清，把原有的5只和跑来的3只合并起来，就可以知道一共有几只兔。但是有些简单应用题，学生分析数量关系就困难一些。例如，“有5只黑兔，白兔比黑兔多3只，白兔有多少只？”有些学生往往不清楚题里的数量关系，简单地看到“多3只”就判断用加法，结果与遇到求白兔比黑兔多几只的题发生混淆。因此，教学时最好通过操作、直观使学生弄清题里的数量关系。如下图，引导学生根据题里的条件分析出：白兔的只数多，可以分成两部分，

一部分是和黑兔同样多的 5 只，另一部分是比较黑兔多的 3 只，要求白兔的只数就要把这两部分合并起来，从而要用加法计算。由于通过操作和直观，在学生的头脑中对所学的应用题的数量关系形成了表象，经过多次练习，就能初步形成概括性的规律性的认识。这样教学，学生对每种应用题的数量关系都有一定的分析思路，就不容易发生混淆，也就不需要再教什么计算公式。



还可以举一道分数应用题。例如，“果园里有梨树 480 棵，占果树总棵数的 $\frac{2}{5}$ ，果园里有果树多少棵？”在分析分数应用题的数量关系时，还有一个判断哪个量是单位 1 的问题。通过线段图，学生容易理解，梨树的棵数占总棵数的 $\frac{2}{5}$ ，就是把总棵数平均分成 5 份，梨树占其中的 2 份，因此要把总棵数看作单位 1。进一步再分析，题里没有告诉总棵数是多少，知道总棵数的 $\frac{2}{5}$ 是 480，从而可以求果树的总棵数。这样分析，学生容易弄清应用题的数量关系，并且可以防止学生根据一些关键词来机械地判断单位 1 和套用数量关系式。

3. 紧密联系运算的意义来选择运算方法。在分析数量关系的基础上紧密联系运算的意义（或含义），把对运算的意义（或含义）的理解与应用直接联系起来，很容易确定运算方法。例如，当学生分析出要把两个数合并（结合应用题内容具体分析，如上面求白兔的只数的应用题），就联想到用加法；当分析出要从一个数里去掉一部分，就联想到用减法；当分析出要求几个几是多少，就联想到用乘法；当分析出要把一个数平均分成几份求一份是多少或者求一个数里有几个另一个数，就联想到用除法。对于分数应用题也是一样，当分析出要求一个数的几分之几是多少，联想到一个数乘以分数的意义，可以确定用乘法；反过来当分析出一个数（未知数）的几分之几等于多少（已知），要求未知的数（如上面求果树的总棵数的应用题），联想到可直接列方程解，或联想到分数除法的意义，可确定用除法。由于运算的意义（或含义）与分析应用题的数量关系建立起直接联系，学生在解答应用题的过程中一方面加深对运算意义（或含义）的理解，一方面学会应用运算的意义（或含义）来解题，从而提高学生自觉地应用所学的数学知识正确地解决实际问题的能力。

4. 培养检验的良好习惯。解答简单应用题同进行四则计算一样，也要注意培养检验的习惯，这样一方面可以提高解题的正确率，另一方面可以为培养检验复合应用题的能力打下初步基础。检验应用题要比检验四则计算复杂一些，首先要重新读题，分析已知条件和所求的问题之间的关系是否正确，然后再看列式、计算、答案是否正确。较高年级还可以通过改编应用题并解答来进行检验。通过检验还可培养学生思维的深刻性，对解答结果的负责态度和自信心。

实践表明，很多城乡的教师按照上述原则和方法教学，收到良好的效果，学生容易接受，解题的正确率高，灵活应用知识的能力较强。但是也有一些

教师采用另一种教学方法，即教给学生区分应用题类型，运用解题公式，结果给学生增加了学习难度，出现死记硬套的现象。目前对这个问题还有争论，下面谈谈个人的一点看法：

(1)从数学本身看，把简单应用题划分的类型以及概括的解题公式是否科学，还值得研究。简单应用题的内容范围很广，从科学的角度说，研究它的分类是完全可以的，实际上美、日等国也有些数学教育工作者对简单应用题进行分类。但是如何分类差异较大，目前国内流行的分类也不完全一致，因此这还是一个有待深入研究的问题。例如现代数学用笛卡尔积定义乘法，有些实际问题就不好区分被乘数和乘数。而这类问题就没有包括在目前流行的分类之中。把求一个数的几分之几是多少作为一个类型题也欠妥当，因为一个数乘以分数的意义就是求一个数的几分之几是多少，这样的应用题不过是分数乘法的意义的直接应用，根本没有什么分类型的问题。至于有些解题公式是否正确地全面地反映实际也值得研究。例如，所谓“标准量 \times 分率=部分量”，容易使学生误解“部分量”都是小于“标准量”的，从而导致判断哪个量是“标准量”的错误。而且遇到这样的问题只要应用一个数乘以分数的意义就能解决，因此这种公式是多余的。

(2)从唯物辩证观点来看，应用题的数量关系是有内在联系的，分类型、套公式，往往把本来有联系的问题人为地割裂开来，不利于学生掌握。例如，有这样两道应用题：“食堂每天吃20千克面粉，3天吃多少千克面粉？”“食堂每天吃20千克面粉，吃的大米是面粉的3倍，每天吃大米多少千克？”如果分析两题的数量关系，都是求3个20千克是多少，因此要用乘法算。如果要把它们划分为两种不同类型的题，就割断了它们在数量关系上的内在联系，从而不利于学生以简驭繁地掌握应用题的分析和解答方法。

(3)从学生的认知特点来看，也值得研究。低年级学生的认知特点是以具体形象思维为主，教学解应用题同教学其它数学知识一样，也应结合操作、直观，使学生掌握应用题的分析和解答方法，而不宜教给抽象类型、公式，否则学生不理解，就容易死记硬套。在教学实践中常常看到，学生会解答一道应用题，却说不出是“部分数+部分数=总数”，还是“总数-部分数=部分数”。遇到两步应用题就更加困难。例如，“同学们做了30件玩具，自己留下6件，剩下的平均送给幼儿园的3个班，每班分得几件？”第一步是“总数-部分数=部分数”，有些好学生还能说出，而第二步就很难说出“求出的部分数变成了总数”。这些违反儿童认知规律的做法给学生增加了不必要的学习负担。

(4)从现代数学论的原则看，要教学生理解基本概念、基本原理，才能实现最大迁移；强调思维过程，要从以记忆为主的教学方法转到以思维为主的教学方法；注意发挥学生的主体作用，培养学生探究能力。而以教分类型、记公式为主的教学方法正好与上述的原则相违背，妨碍学生对数学基本概念、基本原理的理解和掌握，束缚学生的思维。

当然，提出简单应用题教学不宜分类型记公式的问题，并不意味着在任何情况下都不能教给学生公式。对某些内容在适当的时候教给学生必要的公式，如面积、体积计算公式等，还是可以的，但教学时也要注意使学生理解公式的来源，防止机械的记忆。

总之，简单应用题教学生分类型记公式，涉及培养什么人的问题以及如何提高民族素质的问题，从理论和实践上进行一些深入的探讨，是十分必要

的。

关于抓好简单应用题教学还有其它一些问题，将在下面论述。

(二) 加强应用题之间的联系

从实质上说，这是应用题的组织结构问题。应用题的组织是否合理，结构是否恰当，对于培养学生的解题能力具有十分重要的意义。过去的数学课本，由于对这个问题处理得不够好，给应用题教学造成一定的困难，直接妨碍学生解题能力的提高。经过近年来的实验研究，比较深刻地认识到，应用题的内容和解法虽然千变万化，但其内在联系十分紧密。只要根据应用题的内在联系，合理地组织教学，可以使学生较好地理解应用题的结构，较快地掌握应用题的分析和解答方法。

1. 简单应用题的内在联系。即使简单应用题之间，也有着紧密的联系。下面以两组加减法简单应用题为例加以分析。

有 5 只黑兔，8 只白兔，一共有多少只兔？	黑兔和白兔一共有 13 只，有 5 只黑兔，有多少只白兔？	黑兔和白兔一共有 13 只，有 8 只白兔，有多少只黑兔？
有 5 只黑兔，白兔比黑兔多 3 只，有多少只白兔？	有 5 只黑兔，8 只白兔，白兔比黑兔多几只？	有 8 只白兔，黑兔比白兔少 3 只，有多少只黑兔？

从上面 6 道题中，很容易看出 为一组，是原型题，是 的逆思考； 为一组，是原型题，是 的逆思考。同时第一组题与第二组题也有联系。例如， 的条件和问题虽不相同，但分析数量关系时却要把两个已知数合并，从而要用加法解答。 的条件都相同，但问题不同，数量关系不同，解答方法也不同。编写教材和教学时，不宜把重点放在分类型上，而要逐步地揭示它们的内在联系和区别，使学生更好地掌握题里的数量关系和解答方法。

分数应用题之间、分数应用题与整数应用题之间也有其内在联系。例如，教学分数乘、除法应用题之后，可与整数应用题进行联系。

有 12 只鸭，4 只鹅，鸭的只数是鹅的几倍？	有 4 只鹅，鸭的只数是鹅的 3 倍，有多少只鸭？	有 12 只鸭，鸭的只数是鹅的 3 倍，有多少只鹅？
有 12 只鸭，4 只鹅，鹅的只数是鸭的几分之几？	有 12 只鸭，鹅的只数是鸭的 $\frac{1}{3}$ ，有多少只鹅？	有 4 只鹅，鹅的只数是鸭的 $\frac{1}{3}$ ，有多少只鸭？

通过联系对比，可以看出 是一组整数应用题，是原型题； 是一组分数应用题，是原型题。分数应用题分别与整数应用题相对应，数量关系相反，但解答方法是一致的，因为分数乘法的意义扩展了。教学时如能引导学生发现和总结规律，就会加深对两组应用题的理解。

2. 复合应用题与简单应用题之间的联系。一般地说，复合应用题都是由几个简单应用题组合而成的，或者说是在简单应用题的基础上扩展起来的。因此它们之间有着密切的联系。但从简单应用题扩展到复合应用题又是个质的飞跃。以两步应用题为例，它们同简单应用题比较，不仅是已知条件增多，而且数量关系也复杂了。一般地说，简单应用题的问题是和两个已知条件直接联系和相对应着的，从两个已知条件可以判断所求的问题就是题里的问

题；反过来，问题所需要的条件就是题里所给的条件。而在两步应用题中，问题是和题里所有的已知条件联系着的，是对所有的条件提出来的。这样就形成了问题和所需要的直接条件之间的“分离”现象，也可以说一个直接条件被隐藏起来，而需要根据问题和已知条件的关系把这个所需的条件找出来。从解答的角度说就是要提出一个中间问题。而要解答这个中间问题还要正确地选择已知条件。因此这比解答简单应用题需要较为复杂的分析和综合，需要进行间接的推理（即从两个判断推出一个新的判断）。

例如，两步应用题，“小明画 5 张画，小华比小明多画 3 张，他们一共画多少张？”要求两人一共画多少张，必须先知道小明和小华各画多少张，而题里没有直接告诉小华画多少张，所以要先求小华画多少张。这样的分析、推理显然比简单应用题复杂。

至于三步或更多步数的应用题，已知条件就更多，数量关系更复杂，分析推理的步骤也就更多。但分析推理的方法与两步应用题的基本相同。下面着重谈教学两步应用题如何加强与简单应用题的联系。主要有以下两点：

（1）解答一些连续两问的应用题。为了给学习两步应用题做好准备，除了打好简单应用题的基础（包括提问题、填条件）外，适当出现一些连续两问的应用题很有好处。这种应用题在向两步应用题过渡方面起着桥梁的作用。在这样的应用题中，关键在第二问，有时缺少一个已知条件，需要到前面的简单应用题里去找，往往正好是前面一题的计算结果；有时第二问中一个已知条件也没有，都要到前面一题里去找。例如，“学校里有 8 棵杨树，柳树比杨树多 3 棵，有多少棵柳树？两种树一共有多少棵？”第二问所需的两个已知条件，一个是前面一题的一个已知条件，另一个是前面一题的计算结果。由于适当进行这样的练习，就为两步应用题的分析和解答做了一定准备。

（2）教学两步应用题时由简单应用题引入，然后把它扩展成两步应用题。例如，“学校买来 20 张颜色纸，用去 14 张，还剩多少张？学校买来 12 张红色纸和 8 张黄色纸，用去 14 张，还剩多少张？”通过比较，使学生看出两步应用题与简单应用题的联系和区别，从而初步体会到两步应用题的结构，明确解答两步应用题必须分两步计算，先提出一个问题，进行计算，再解答原题里的问题。这样学生不仅容易掌握，还有利于激发学生的思考，培养学生分析问题的能力。以后还要经常做一些对比练习。

3. 复合应用题之间的联系。这一点更为重要。通过复合应用题间的联系对比，可以加深学生对新学的应用题的结构、分析推理方法等的理解，从而较快地掌握复合应用题的解答方法，产生迁移的效果。复合应用题间的联系是多种多样的，需要进行认真的分析，选取适当的联系的途径，才能收到良好的效果。下面举出加强联系的几个方面的例子。

（1）纵向联系的：有些应用题是由已学的步数较少的应用题扩展而成的。教学时由已学的应用题引入，通过联系比较，很容易看出新的应用题的条件或问题有哪些变化，如何在已学的基础上进一步分析推理，获得新的应用题的解答方法。例如，“汽车从甲地开往乙地，3 小时行 135 千米。照这样计算，一共行了 5 小时，甲乙两地相距多少千米？汽车从甲地开往乙地，3 小时行 135 千米，照这样计算，还要行 2 小时才能到达乙地，甲乙两地相距多少千米？”

（2）横向联系的：有些应用题基本数量关系相同，只是已知条件有些变

化，学生容易在已学的基础上类推出来，不需要作为新内容来讲，这样既调动学生思维的积极性，又可减少教学时间，收到举一反三的效果。例如，“学校先买 10 瓶墨水，又买来 8 瓶。用去 14 瓶，还剩多少瓶？ 学校买来 3 盒墨水，每盒 6 瓶。用去 14 瓶，还剩多少瓶？”

(3) 联系对比的：有些应用题的条件问题相似，解法容易混淆，可以通过联系对比使学生区分它们的异同，从而提高解题的正确率。例如，“

商店运来 160 千克苹果，运来的梨比苹果重 $\frac{1}{4}$ ，运来多少千克梨？ 商店运

来 160 千克苹果，比运来的梨重 $\frac{1}{4}$ 。运来多少千克梨？”

(三) 重视教学解题的一般策略

这是培养学生解题能力的关键性问题。正如前边所讲的，会解答所学的应用题并不是最终的教学目的，而是通过所学的有代表性的应用题达到使学生掌握解题的一般策略。这在现今的信息社会尤为重要，要使学生成为能够处理信息的人，通过解答应用题培养学生解题的一般策略是一个重要途径。关于解题的一般策略，主要有以下几个方面：

1. 条件和问题的收集。

为了解一道题首先要弄清楚题里给了哪些已知条件，要求解决什么问题。识别或收集条件和问题的过程也就是收集信息的过程，也是理解信息的过程。在低年级往往要求学生口述已知条件和问题，到高年级也可以教给学生用图（如线段图）或表解来表示已知条件和问题。学生清楚地表述和表示一道题的已知条件和问题是解题的重要前提。一般地说，题里的问题和所需的已知条件都已直接给出。但是为了更好地培养学生正确收集必要的信息的能力，在适当年级也可适当出现信息不完全的题目。例如有的题目可以缺少问题或一两个已知条件，让学生从实际中收集，加以补充；也可以适当出现一些有多余信息的题目，使学生能在较多的已知条件中，正确选择有用的和必需的来进行计算。实验表明，有能力的学生看到题很快指出不需要的数据，而能力较差的学生则需要教师的帮助，有的甚至在教师的帮助下也很难找到多余的数据。经常练习对于培养学生这方面的能力很有好处。

2. 分析数量关系。

这是对所收集的信息进行加工的开始，也是解题的一个重要步骤。无论解简单应用题或复合应用题，都要认真分析题里的已知条件和已知条件之间，已知条件和问题之间的数量关系，才好确定解答的方法。分析数量关系一般有两种方法：一种是从条件入手，通称综合法；另一种是从问话入手，通称分析法。综合法比较容易掌握，但其缺点是学生往往看到前面相邻的两个已知条件就进行计算，而忽略后面的已知条件，未从整体考虑。提出的中间问题不一定是解这道题所需要的。从问话入手稍难一些，但能使从整体出发，根据所解的问题提出所需的条件，从而较正确地确定中间问题。实验表明，开始教学解两步应用题，宜于从条件入手，即使采取了这种分析的方法，也还会有部分中、差生难以提出中间问题，需要经过一段训练逐步掌握。但是逐步要转到训练学生从问话入手，这对提高学生解多步应用题的分析能力很有帮助。至于学生自己解题时用哪种方法分析，不必加以限制。考虑到进行分析需要一定的训练时间，课堂上解应用题时要给学生口头分析的机会，除了教师指定某个学生分析外，要让同桌的学生互相练习分析。不宜

过早地让学生书面分析，这样费时间，会减少解答应用题的数量。学生有了口头分析的基础，可在课外安排少量的书面分析作业。此外，订正时也要重视让学生进行口头分析。

3. 拟订解答计划。

这是对信息进行加工的继续。就解决一般的问题来说，它是必不可少的步骤。但在小学数学中，解答简单应用题时则没有必要，只在解答复合应用题时才有必要，而且有时边分析边拟订解答计划边解答，往往与上一步的分析数量关系或下一步的解答合并起来。从掌握解题的一般策略来说，还是单把它划为一个阶段为好。拟订解答计划是在理解题意、分析数量关系的基础上确定解答需要分成几步，每步要解答什么问题。这是分析、推理的直接成果。正确地拟订解答计划，表明学生对所解的题目有了整体上的理解，同时又对解决问题的具体步骤做出了合乎逻辑的规划。能否在解答之前正确地拟订解答计划也是考察学生能力的重要的标志之一。实验表明，好的学生一般能在解答之前订好解答计划，而较差的学生往往能正确解答，却不一定能正确地提出每一步所要解决的问题。因此，教学时在这方面适当加以训练，对培养学生的逻辑思维有一定的好处。

4. 解答。

这是对信息进行加工的最后阶段。如果说前面各阶段主要是思维的过程，那么这个阶段要产生思维的结果。当然这个阶段也是有思维过程的。例如解答每一步要选择哪两个已知数，进行哪种运算，如何使计算正确等，都要深思熟虑，这样才能达到最终的正确结果。教学的任务就是要引导学生既重视思维的过程，也重视思维的结果，达到正确解答应用题的目的。这里需要提出的是，往往学生把算法选对了，但把得数算错了；或者竖式里的得数算对了，最后抄错了数。因此这个阶段特别要注意培养细心认真的良好习惯。

5. 检验与评价。

对应用题的解答的检验与评价实质上是对信息的检验与评价。这一步教学不仅对提高应用题解答的正确率有帮助，而且有助于培养学生良好的检验习惯，对信息的正确评价的能力。有经验的教师对这方面的教学比较重视，收到较好的效果。但是也常常遇到教师虽然重视了，但有少数学生仍没有养成良好的检验习惯，甚至有少数好的学生做得很快，但是检查不出错误。因此在培养检验习惯的同时，还要适当教以检验的方法。检验方法有多种，通常低年级只要教学生从审题到解答逐一检查。中、高年级有些题可以逐步教给学生用不同解法来检验。例如，原来应用题是用连减计算的，检验时可以把两个减数相加，再从被减数里减，去，看两次算得的结果是否相同。以后还可以适当教学生把求得的结果作为已知条件，把另一个已知的量作为未知的，然后倒推求出结果看是否与已知的相符。这只作为一种检验方法教给学生在解答中练习应用，不宜作为考试要求。通过检验要培养学生对自己的解答具有负责态度和自信心。检验之后还要能对自己的解答进行评价。为了培养学生评价能力，可以开展相互评价，或教师给学生一些案例让学生练习评价。有条件的话，还可以教给学生估算得数。

解题的一般策略除上述几方面外，还有预测、解释等。这里从略。总之，今后应用题教学要真正做到培养学生的解题能力，不是在加深应用题的难度上下功夫，而是要通过有代表性的又为学生容易接受的题目，着重培养学生解题的一般策略，使学生能够产生迁移，这样即使遇到一些未解过的题目，

学生经过自己的分析、推理也能找出解答的方法。

(四) 重视变式练习

练习在培养解答应用题能力中起着重要的作用。但是练习要合理地组织，才能收到良好的效果。其中特别是适当安排一些变式练习，对于克服简单的机械重复，提高解题效率，培养灵活的解题能力，具有十分重要的意义。实验表明，通过变式练习，很多学生能够排除应用题中非本质特征的干扰，正确地分析题里的数量关系和选择运算方法，求得正确的答案。应用题的变式练习从低年级起就要做一些安排。主要有以下几个方面：

1. 改变叙述的顺序。例如，乘法应用题，第一个已知条件不仅有需做被乘数的，还要有需做乘数的。复合应用题，有些相邻的两个已知条件可以进行计算的，也要有些不可以进行计算的，使学生能在真正理解题里的数量关系的基础上正确地选配已知数进行计算。

2. 改变叙述的方式。例如，加法应用题，不宜每题的问题都出现“一共”，已知条件中也可以出“飞走”“跑掉”等词语，以防学生简单地根据个别词语错误地判断运算方法。在高年级教学分数应用题更要注意适当变化叙述方式。例如，“小华家养鸭24只，它的 $\frac{1}{3}$ 相当于鹅的只数，小华家养鹅多少只？”这样可以防止学生死记“相当于”后面就是“单位1”，而加强分析数量关系。

3. 有多余的条件。在解题的一般策略中已经谈过。也可以把它看作是一种变式练习。由于有多余的条件，对原来所解的正常的题目来说，在内容和形式上都有了一些非本质的变化，这就促使学生更认真地分析数量关系，正确地选择已知数和运算方法，而不受这些非本质特点的干扰，从而有利于发展学生的思维。例如，教学两步应用题后出现这样的应用题：“同学们做了8朵红花，7朵黄花。送给幼儿园3个班，一共送了10朵，还剩多少朵？”实验表明，如果去掉“3个班”，绝大多数学生都能做对；加上“3个班”后，出现了各种各样的错误，其中按三步计算的达30%。

4. 改变个别已知条件或问题，使其具有不同的或特殊的解法。例如，教学正比例之后出现这样的应用题，“果园里有梨树100棵，桃树与梨树的棵数比是4:5，有桃树多少棵？”学生很容易用比例解答出来。如果把第二个已知条件改成“桃树的棵数比梨树少 $\frac{1}{5}$ ”，就要根据这个条件先求出两种棵数的比才能用比例解答。又例如，“玩具厂原计划每天生产玩具42件，8天完成。实际只用6天。实际每天比原计划多生产多少件？”学生一般都能列成算式： $42 \times 8 \div 6 - 42$ 。如果把“6天”改为“7天”，虽然仍可照上面方法列式解答，但是还有特殊解法，有的学生会列成简便算式： $42 \div 7$ 。因此它有利于发展学生的直觉思维。

解答应用题的变式练习是多种多样的，这里只选常见的有代表性的几个方面举例说明。由此也能看出它们在提高学生灵活的解题能力，发展学生思维方面的作用。

(五) 适当增加探究性的题目

如前所述，国外应用题教学改革的一个趋势是扩展应用题的范围，其中增加探究性的题目又是重点。我国应用题教学要进行改革，也应突破传统的应用题的范围，适当增加探究性的题目，以利于提高学生的解题能力，发展

学生思维的创造性。初步考虑，可以注意以下几个方面：

1. 适当出一些开放性的题目。

所谓开放性的题目就是题目的答案可以有多个。长期以来我们教学应用题的答案都是唯一的，这样把学生的思维束缚得很死，不利于培养学生的探究能力，如前面第二部分所举在 里填数的题目就是一个开放性的题目。第一个 里可以填不同的数，但是也有一定的范围限制。即最小是 3，最大是 13。又例如，周长是 12 厘米的长方形，长和宽都是整数，它的长、宽可能各是多少厘米？

2. 适当出一些探索规律性的题目。

通过探索规律可以培养学生抽象概括的能力，发展思维的创造性。出题目时要注意具有多层次，以便于区分学生的不同思维水平。例如，下面的题有 3 个层次，第 1 小题是通过直观进行计算，第 2 小题离开直观进行计算，第 3 小题脱离具体计算概括公式。

(1) 照下图的样子用小棒连着摆正方形。

摆 2 个用 () 根

摆 3 个用 () 根

摆 4 个用 () 根

(2) 连着摆 6 个正方形，要用 () 根小棒。写出算式。

(3) 如果不数小棒，你能找出一般的计算公式吗？

实验表明，学生的答案呈现不同的思维水平。例如，有的学生第 2 小题就做错了，有的学生第 2 题虽然做对，但不会在此基础上概括出一般计算公式。

3. 适当出一些非常规的题目。

上面举的一些例子有开放性、探索规律等特点，但是还与常规计算有较密切的联系。这里则指的是不一定用到常规计算的题目。例如，“有甲、乙、丙、丁 4 个学生赛跑，结果可能排出不同的名次。算一算一共可以排成多少种不同的名次。”这道题就不能利用常规计算而要借助图表找出正确答案。

以上探究性题目可都不作为教学要求，也不作为考试内容。

小学数学是随着社会、科学技术、生产和生活的发展需要不断变化的，其中的应用题教学必然也要随着发生变革。目前，无论从教材或教学来看，对应用题进行了一些改革，但是还很不够，需要进一步实验、探索，使其更加完善，以适应社会发展的需要，为培养人才打下更好基础做出贡献。

(本文原载于《课程·教材·教法》 1994 年第 8、9 期。)

《分数应用题教学研究》读后感

《小学数学教师》1989年第3期刊登了上海虹口区教育学院管南雄等同志写的一篇实验报告，题为《分数应用题教学研究》。这篇报告写得好，值得大家认真读一读，思考一下。

这篇报告以实验的结果说明，在小学教学分数应用题时采用目前流行的“分类型、给结语、给解题模式”的教法所产生的弊端和给学生造成的损害。这种损害在小学阶段虽然不十分明显，但是已经看到一些，到了中学就更清楚地显示出来。因而问题也就更为严重。这说明采用目前流行的教法，在小学没有真正给中学学习打好数学基础，相反地给进一步学习造成了障碍。学生没有掌握数学基础知识，靠死记硬套公式，是无法进一步学好数学的。这一点很值得我们深思，并加以改进。

这篇报告以实验的结果说明，紧密联系分数乘法的意义，加强用方程解应用题，不仅有利于掌握分数乘除法应用题的解题方法，提高解题能力，而且有利于中小学的衔接。从而也进一步说明，按照现行教材中对分数应用题教学的处理方法进行教学，基本上是可行的，不需要另外补充什么结语和解题公式。关键在于紧密联系分数乘法的意义，加强应用题之间的联系，指导学生具体分析题里的数量关系，根据已知未知的不同确定解法。实际上有不少教师是按教材的精神教的，收到较好的效果。当然现行教材也还有值得改进的地方，但不是加结语，加解题公式，而是进一步加强应用题之间的联系，加强方程解法。

这篇报告更引人深思的是，在肯定十几年来小学数学教学质量有很大提高的同时，也要看到确实还存在不少教法死板的问题，分数乘除法应用题只是其中之一。值得注意的是，分数应用题教法死板的问题很早就提出来了，如《小学数学教师》1983年第5期松子等同志就曾发表过意见。从1987年第2期起，《小学数学教师》又连续讨论了数学教学要灵活的问题，也已达两年多。但是应用题教学中的教法死板的问题依然存在。这正说明小学数学教学改革还需要深入开展。1985年全国教育工作会议上提出，“要改革同社会主义现代化不相适应的教育思想、教育内容和教育方法。”万里同志在会上还具体指出教学方法死的一些表现，并且指出，如果不彻底改变教育思想和教学方法，就不能提高民族素质，培养出大量的适应新时代需要的新型人才。要提高民族素质，一方面是提高思想道德素质，另一方面是提高科学文化素质。而提高科学文化素质，不仅是使学生具有一定的科学文化知识，还应使学生的能力得到发展，具有勇于思考、勇于探索、勇于创新的精神。现在在一些班级教学中还教学生死记硬套公式，是无法达到国家和社会对我们提出的新的要求的。1986年国家教委颁发的《全日制小学数学教学大纲》，专门加了一条“改革教学方法”，就是适应社会主义现代化要求，针对小学数学教学中存在的问题而提出的。我们要完成小学数学教学的任务，必须不断改革教学方法，特别要加强能力的培养，做有利于提高民族素质的工作。

为了加速小学数学教学改革，切实做到提高民族素质，为培养社会主义现代化建设人才打好基础，当前需要进行以下几项工作：一、认真学习中央教育改革的文件，进一步学习《小学数学教学大纲》，提高思想认识，明确我国社会主义现代化建设对小学数学教学提出的新的要求，小学数学教学改革的正确方向和具体任务。二、进一步讨论小学数学教学中还有哪些方面不

符合中央的教育方针以及改革的精神，有哪些不适应社会主义现代化建设的需要，有哪些不符合《小学数学教学大纲》中提出的要求。例如，低年级简单应用题教学中是否也有同高年级分数应用题教学相类似的教法，也采用了分类型、给结语、给解题模式呢？其他内容是否也有类似的教法呢？还希望通过讨论弄清哪些法则、计算公式是必需的数学基础知识，哪些不是数学基础知识，既给学生增加学习负担，又妨碍学生能力的发展。三、切实研究改革的措施。研究措施时，要以现代教学论、心理学的理论作指导，要了解儿童的认知规律和年龄特点，要从义务教育整体，从中小学的衔接出发，针对当前的弊端，提出改革方案，广泛进行科学实验，在实验中坚持实事求是的科学态度。

为了促进小学数学教学改革实验的深入开展，希望《小学数学教师》以及其他有关的教育刊物，提供讨论交流经验的园地。我们相信，只要全国教研人员、学校领导和教师认真学习，从思想上提高认识，明确改革的方向，就会集思广益，经过实验总结出好的改革经验，在即将来临的九十年代中，使小学数学教学能够向前跨进一大步，大面积地提高质量，较好地适应我国社会主义现代化建设的要求，为提高民族素质做出较大的贡献。

（本文原载于《小学数学教师》1990年第2期）

在小学数学教学中进行思想品德教育

思想品德教育是我国学校教育的一项基本任务，它是直接关系到我国未来一代的建设者的精神面貌的大问题。我们的小学教育，要全面贯彻党的教育方针，使学生在德、智、体几方面都得到发展，成为有社会主义觉悟的有文化的劳动者，成为有理想、有道德、有知识、有体力并立志为人民、为祖国、为人类做贡献的一代新人。为此，就必须重视和加强思想品德教育。除了开设思想品德教育课以外，还需要各科教学的密切配合，共同担负起这一具有战略意义的任务。小学数学也不例外。在《小学数学教学大纲（试行草案）》中明确规定，对学生进行思想品德教育是小学数学教学的目的任务之一。在小学数学教学中，进行思想品德教育，同进行数学基础知识的教学和能力的培养，还具有相辅相成的作用。数学基础知识以及富有教育意义的应用题的内容，为思想品德教育提供了材料，通过教学可以使使学生受到爱国主义、社会主义和初步的唯物辩证观点等的教育，培养一些优良品质；学生思想认识的提高，优良品质的形成，又提高学生学习的积极性，为将来参加现代化建设努力学好数学，并增强学习的效果。因此，每一个小学数学教师都必须重视并在教学中切实完成这方面的任务。

根据小学数学的学科特点，在教学中进行思想品德教育可以着重以下几方面的内容。

（一）学好数学的目的性教育：结合数学内容，通过实际例子说明数学在我国社会主义现代化建设中的作用，使学生认识到掌握数学基础知识和练好基本功的重要意义，立志为参加现代化建设学好数学。

（二）进行爱国主义和社会主义教育：用有意义又有说服力的数目材料编成应用题，反映我国社会主义建设的伟大成就、人民生活水平的提高、新旧社会的对比、我国古代数学家的重大贡献（如祖冲之的圆周率）、小学生的公益活动以及有趣的科学知识等，培养学生爱祖国、爱人民、爱劳动、爱科学、爱社会主义的公德。

（三）进行初步的唯物辩证观点的教育：例如，通过数和形的概念的教学，使学生初步认识到，数学知识都是从现实世界中得来的，人们掌握了它们，还要应用于实际，为我国的现代化建设服务。又例如，通过一些实际例子，说明一些数学概念之间或运算方法之间的相互关系（如，加与减、乘与除、积商的变化等），使学生初步领会到事物是相互联系的，是发展变化的。

（四）培养一些优良品质：通过数学作业和练习，可以培养学生严肃、认真的学习态度，独立完成作业、细心检查验算的习惯，书写工整、工作有计划、有条理的良好作风，有毅力、肯于动脑筋克服困难的坚强意志等。

此外，还可以根据形势发展的需要，在可能同数学教学内容结合的条件下，充实新的内容。例如，反映注意环境保护（如保护益鸟）、进行卫生教育、开展“五讲四美”活动等内容。

在小学数学教学中进行思想品德教育，一般要注意以下几点：

1. 紧密结合数学教学内容，适应学生的年龄特点，寓思想教育于数学知识教育之中。教学时，要认真分析数学教材中思想教育的因素，根据学生的接受程度，确定进行思想品德教育的方法。例如，在低年级认识数“3”时，只要通过直观，引导学生数各种不同的实物，把它们一一对应起来，使学生看到这几种实物的个数都一样，然后说明所有跟这几种东西的个数一样的，

都用数目“3”表示，就可以了。到了较高年级，可以举例简单说明数是从实践活动中产生的。又例如，在解答课本中有教育意义的应用题时，要通过有说服力的数目材料使学生受到思想品德教育。

2.注意通过数学课上的实践活动进行思想品德教育。培养学生良好的思想品德，不单是使学生了解它们的意义和要求，重要的是身体力行，使学生在数学课上的实践活动中养成良好的行为习惯。例如，从一年级开始，就要注意培养学生良好的学习习惯，培养学生认真听讲，细心思考，书写工整，格式规范，按时完成作业，自己检查验算等，从小逐步树立起工作认真负责的良好作风。通过实际测量、制作等活动，还可以培养学生爱劳动、爱护公共财物等品德。在实践活动中，做得好的，要给以表扬。

3.注意联系实际进行教育，并把课内教育与课外教育结合起来。例如，教师可以经常注意收集一些有教育意义的真实材料，编成应用题让学生解答。也可以组织学生在课外收集一些反映我国社会主义建设成就的数目材料，把它们编成应用题。有时还可以利用数学墙报、数学晚会介绍一些劳动模范和先进工作者计算准确不出差错的先进事迹，我国古代和现代一些数学家刻苦学习做出重大贡献的故事等。这些真实的材料对小学生具有极大的感染力和教育作用。

4.注意教师的示范作用。例如，要培养学生书写工整和认真检查验算的习惯，首先教师要严格要求自己做出榜样，在板书和批改作业中做到认真、细致、书写整齐。对个别学生进行教育帮助，要采取耐心说服的方法，避免用训斥的方法。

(本文原载于《课程·教材·教法》1982年第4期)

在小学数学教学中培养学生的思维能力

培养学生的思维能力是现代学校教学的一项基本任务。我们要培养社会主义现代化建设所需要的人才，其基本条件之一就是要具有独立思考的能力，勇于创新的精神。小学数学教学从一年级起就担负着培养学生思维能力的重要任务。下面就如何培养学生思维能力谈几点看法。

一 培养学生的逻辑思维能力是小学数学教学中一项重要任务

思维具有很广泛的内容。根据心理学的研究，有各种各样的思维。在小学数学教学中应该培养什么样的思维能力呢？《小学数学教学大纲》中明确规定，要“使学生具有初步的逻辑思维能力。”这一条规定是很正确的。下面从两方面进行一些分析。首先从数学的特点看。数学本身是由许多判断组成的确定的体系，这些判断是用数学术语和逻辑术语以及相应的符号所表示的数学语句来表达的。并且借助逻辑推理由一些判断形成一些新的判断。而这些判断的总和就组成了数学这门科学。小学数学虽然内容简单，没有严格的推理论证，但却离不开判断推理，这就为培养学生的逻辑思维能力提供了十分有利的条件。再从小学生的思维特点来看。他们正处在从具体形象思维向抽象逻辑思维过渡的阶段。这里所说的抽象逻辑思维，主要是指形式逻辑思维。因此可以说，在小学特别是中、高年级，正是发展学生抽象逻辑思维的有利时期。由此可以看出，《小学数学教学大纲》中把培养初步的逻辑思维能力作为一项数学教学目的，既符合数学的学科特点，又符合小学生的思维特点。

值得注意的是，《大纲》中的规定还没有得到应有的和足够的重视。一个时期内，大家谈创造思维很多，而谈逻辑思维很少。殊不知在一定意义上说，逻辑思维是创造思维的基础，创造思维往往是逻辑思维的简缩。就多数学生说，如果没有良好的逻辑思维训练，很难发展创造思维。因此如何贯彻《小学数学教学大纲》的目的要求，在教学中有计划有步骤地培养学生逻辑思维能力，还是值得重视和认真研究的问题。

《大纲》中强调培养初步的逻辑思维能力，只是表明以它为主，并不意味着排斥其他思维能力的发展。例如，学生虽然在小学阶段正在向抽象逻辑思维过渡，但是形象思维并不因此而消失。在小学高年级，有些数学内容如质数、合数等概念的教学，通过实际操作或教具演示，学生更易于理解和掌握；与此同时学生的形象思维也会继续得到发展。又例如，创造思维能力的培养，虽然不能作为小学数学教学的主要任务，但是在教学与旧知识有密切联系的新知识时，在解一些富有思考性的习题时，如果采用适当的教学方法，可以对激发学生思维的创造性起到促进作用。教学时应该有意识地加以重视。至于辩证思维，从思维科学的理论上说，它属于抽象逻辑思维的高级阶段；从个体的思维发展过程来说，它迟于形式逻辑思维的发展。据初步研究，小学生在10岁左右开始萌发辩证思维。因此在小学不宜过早地把发展辩证思维作为一项教学目的，但是可以结合某些数学内容的教学渗透一些辩证观点的因素，为发展辩证思维积累一些感性材料。例如，通用

教材第一册出现 $2 + \begin{matrix} \textcircled{3} & \square \\ \textcircled{4} & \square \end{matrix} = \square$, 可以使学生初步地直观地知道第二个加数变化

了, 得数也随着变化了。到中年级课本中还出现一些表格, 让学生说一说被乘数(或被除数)变化, 积(或商)是怎样跟着变化的。这就为以后认识事物是相互联系、变化的思想积累一些感性材料。

二 培养学生思维能力要贯穿在小学数学教学的全过程

现代教学论认为, 教学过程不是单纯的传授和学习知识的过程, 而是促进学生全面发展(包括思维能力的发展)的过程。从小学数学教学过程来说, 数学知识和技能的掌握与思维能力的发展也是密不可分的。一方面, 学生在理解和掌握数学知识的过程中, 不断地运用着各种思维方法和形式, 如比较、分析、综合、抽象、概括、判断、推理; 另一方面, 在学习数学知识时, 为运用思维方法和形式提供了具体的内容和材料。这样说, 绝不能认为教学数学知识、技能的同时, 会自然而然地培养了学生的思维能力。数学知识和技能的数学只是为培养学生思维能力提供有利的条件, 还需要在教学时有意识地充分利用这些条件, 并且根据学生年龄特点有计划地加以培养, 才能达到预期的目的。如果不注意这一点, 教材没有有意识地加以编排, 教法违背激发学生思考的原则, 不仅不能促进学生思维能力的发展, 相反地还有可能逐步养成学生死记硬背的不良习惯。

怎样体现培养学生思维能力贯穿在小学数学教学的全过程? 是否可以以下几方面加以考虑。

(一) 培养学生思维能力要贯穿在小学阶段各个年级的数学教学中。要明确各年级都担负着培养学生思维能力的任务。从一年级一开始就要注意有意识地加以培养。例如, 开始认识大小、长短、多少, 就有初步培养学生比较能力的问题。开始教学 10 以内的数和加、减计算, 就有初步培养学生抽象、概括能力的问题。开始教学数的组成就有初步培养学生分析、综合能力的问题。这就需要教师引导学生通过实际操作、观察, 逐步进行比较、分析、综合、抽象、概括, 形成 10 以内数的概念, 理解加、减法的含义, 学会 10 以内加、减法的计算方法。如果不注意引导学生去思考, 从一开始就有可能不自觉地引导学生死记硬背的组成, 机械地背诵加、减法得数的道路上去。而在一年级养成了死记硬背的习惯, 以后就很难纠正。

(二) 培养学生思维能力要贯穿在每一节课的各个环节中。不论是开始的复习, 教学新知识, 组织学生练习, 都要注意结合具体的内容有意识地进行培养。例如复习 20 以内的进位加法时, 有经验的教师给出式题以后, 不仅让学生说出得数, 还要说一说是怎样想的, 特别是当学生出现计算错误时, 说一说计算过程有助于加深理解“凑十”的计算方法, 学会类推, 而且有效地消灭错误。经过一段训练后, 引导学生简缩思维过程, 想一想怎样能很快地算出得数, 培养学生思维的敏捷性和灵活性。在教学新知识时, 不是简单地告知结论或计算法则, 而是引导学生去分析、推理, 最后归纳出正确的结论或计算法则。例如, 教学两位数乘法, 关键是通过直观引导学生把它分解为用一位数乘和用整十数乘, 重点要引导学生弄清整十数乘所得的部分积写在什么位置, 最后概括出用两位数乘的步骤。学生懂得算理, 自己从直观的

例子中抽象、概括出计算方法，不仅印象深刻，同时发展了思维能力。在教学中看到，有的老师也注意发展学生思维能力，但不是贯穿在一节课的始终，而是在一节课最后出一两道稍难的题目来作为训练思维的活动，或者专上一节思维训练课。这种把培养思维能力只局限在某一节课内或者一节课的某个环节内，是值得研究的。当然，在教学全过程始终注意培养思维能力的前提下，为了掌握某一特殊内容或特殊方法进行这种特殊的思维训练是可以的，但是不能以此来代替教学全过程发展思维的任务。

（三）培养思维能力要贯穿在各部分内容的教学中。这就是说，在教学数学概念、计算法则、解答应用题或操作技能（如测量、画图 etc）时，都要注意培养思维能力。任何一个数学概念，都是对客观事物的数量关系或空间形式进行抽象、概括的结果。因此教学每一个概念时，要注意通过多种实物或事例引导学生分析、比较、找出它们的共同点，揭示其本质特征，做出正确的判断，从而形成正确的概念。例如，教学长方形概念时，不宜直接画一个长方形，告诉学生这就叫做长方形。而应先让学生观察具有长方形的各种实物，引导学生找出它们的边和角各有什么共同特点，然后抽象出图形，并对长方形的特征作出概括。教学计算法则和规律性知识更要注意培养学生判断、推理能力。例如，教学加法结合律，不宜简单地举一个例子，就作出结论。最好举两三个例子，每举一个例子，引导学生作出个别判断[如 $(2+3)+5=2+(3+5)$ ，先把 2 和 3 加在一起再同 5 相加，与先把 3 和 5 加在一起再同 2 相加，结果相同]。然后引导学生对几个例子进行分析、比较，找出它们的共同点，即等号左端都是先把前两个数相加，再同第三个数相加，而等号右端都是先把后两个数相加，再同第一个数相加，结果不变。最后作出一般的结论。这样不仅使学生对加法结合律理解得更清楚，而且学到不完全归纳推理的方法。然后再把得到的一般结论应用到具体的计算（如 $57+28+12$ ）中去并能说出根据什么可以使计算简便。这样又学到演绎的推理方法至于解应用题引导学生分析数量关系，这里不再赘述。

三 设计好练习题对于培养学生思维能力起着重要的促进作用

培养学生的思维能力同学习计算方法、掌握解题方法一样，也必须通过练习。而且思维与解题过程是密切联系着的。培养思维能力的最有效办法是通过解题的练习来实现。因此设计好练习题就成为能否促进学生思维能力发展的重要一环。一般地说，课本中都安排了一定数量的有助于发展学生思维能力的练习题。但是不一定都能满足教学的需要，而且由于班级的情况不同，课本中的练习题也很难做到完全适应各种情况的需要。因此教学时往往要根据具体情况做一些调整或补充。为此提出以下几点建议供参考。

（一）设计练习题要有针对性，要根据培养目标来进行设计。例如，为了了解学生对数学概念是否清楚，同时也为了培养学生运用概念进行判断的能力，可以出一些判断对错或选择正确答案的练习题。举个具体例子：“所有的质数都是奇数。（ ）”如要作出正确判断，学生就要分析偶数里面有没有质数。而要弄清这一点，要明确什么叫做偶数，什么叫做质数，然后应用这两个概念的定义去分析能被 2 整除的数里面有没有一个数，它的约数只 1 和它自身。想到了 2 是偶数又是质数，这样就可以断定上面的判断是错误的。

（二）设计多种练习形式。通过多种练习形式，不仅有助于加深理解所

学的数学知识，而且有助于发展学生思维的灵活性，并激发学生思考问题的兴趣。例如，讲过乘法分配律，除了像课本中的练习题，给出两个数相加再乘以一个数，要求学生应用运算定律写出与它相等的式子以外，还可以给出一些等式，其中有的不符合乘法分配律，让学生判断那个是错误的；或者用3种图形代替具体的数，写成两个式子，如 $(\quad + \quad) \times \quad$ 和 $\quad \times \quad + \quad \times \quad$ ，让学生判断它们是不是相等，并说明根据。这些练习都有助于培养学生演绎推理的能力。

（三）设计一些有不同解法和有多个答案的练习题，对于发展学生思维的灵活性和创造性有很大益处。但是，做有不同解法的练习题时，不宜让学生片面追求解法的数量，而要引导学生运用不同的思路，或运用不同的知识去解决，并且要找出简便的解法。

（四）设计的练习题的难度要适当，要是大多数学生经过努力思考运用所学知识能够正确解答出来的。在教学中为了发展学生思维，往往出一些超过大纲课本范围的题目，这样不仅会增加学生负担，而且由于难度太大，不利于激发学生学习兴趣，也不能有效地发展学生的逻辑思维和思维的灵活性。

四 培养思维能力要同培养语言表达能力密切联系起来

人们的思维与语言是密不可分的。语言是思维的工具。心理学认为，借助语言人们把获得的感觉、知觉、表象加以概括，形成概念、判断，进行推理。通过语言表达还有助于调节自己的思维活动，使之逐步完善。在数学教学中，要发展学生思维能力，就要引导学生去分析、比较、综合、抽象、概括、判断、推理，而教师要了解学生这些思维活动的情况，也需要让学生用语言表达出来，然后对学生思维的过程给予肯定或纠正。有经验的教师总是注意让学生用语言表达自己的计算过程和解题思路，结果学生思维能力有较快的提高。由于课堂教学时间有限，为了使每个学生都有用语言表达他们思维的训练机会，可以把指名发言、集体讨论和同桌两人对讲等不同方式结合起来。教师还应有意识有计划地注意帮助差生，鼓励差生发言，推动他们积极思维，以便促使他们的数学成绩和思维能力都取得较大的进步。

（本文原载于《江西教育》1989年第9期）

在小学数学中培养学生的思维能力问题

培养学生的思维能力是现代学校教学的一项基本任务。第二次世界大战以后，科学技术迅猛发展，知识激增，知识的更新加快，随之对教育提出了新的要求，就是要提高年轻一代的素质。不仅要教给学生现代科学技术知识，而且要把学生培养成勇于思考、勇于探索、勇于创新的人，从而强调教学要注重发展学生的智力。从心理学角度来看，智力的核心是思维能力。思维能力增强了，智力水平也就提高了。因此各国的小学数学都把培养学生思维能力作为教学的一项基本任务。

培养学生思维能力是一个很复杂的问题，它涉及到逻辑学、心理学、教育学等多学科的知识。同时，逻辑学和心理学都研究思维，但它们的侧重面有所不同。逻辑学主要从思维的结果（或产物）如概念、判断、推理等方面来研究，而且着重研究正确思维的规律及形式，以及这些认识结果之间的关系。心理学则主要从思维过程本身来研究，着重研究思维过程中的规律，以及导致形成某些认识结果的内在的隐蔽的原因。由于思维过程与思维结果是密切联系着的，所以心理学与逻辑学对思维的研究也要紧密联系，并且相互补充。我们在研究小学数学教学中发展思维能力也同样要注意思维过程和思维结果紧密联系这一特点，忽视哪一方面都不可能收到良好的教学效果。

一 人类思维发展的阶段

思维活动是多种多样的。根据人的不同发展阶段的思维特点来划分，可以分为以下几个阶段。

（一）直观行动思维：这是婴儿期（1岁以后）的思维特点。这个阶段的思维是在对物体的感知、动作中进行的。婴儿离开动作就不能进行思考，也不能计划自己的动作或预见动作的结果。这阶段婴儿只能概括事物的一些外部特征。以后长到成人，直观行动思维继续发展成操作思维。例如运动员的技能就需要操作思维。

（二）具体形象思维：幼儿期的思维特点，一般从3岁延续到小学低年级。儿童思维时可以摆脱对动作的直接依赖，而凭借事物的具体形象或具体形象的联想（即在头脑中形成表象）。这阶段儿童能进行一些初步概括，但概括出的特征很多是外部的、形式的。

（三）抽象逻辑思维：它是以抽象概念为基础的思维。又可以分为两个阶段。

1.形式逻辑思维：简称逻辑思维。它是以同一律为核心规律，进行确定的、无矛盾的、前后一贯的思维。它要求在同一思维过程中的每一个概念必须是确定的。例如，A就是A，不能既是A又是非A。在小学数学中每一个概念也都必须是确定的。例如教学约数、倍数时，把0排除，否则公倍数、最小公倍数也要包括0了。

形式逻辑思维的特点主要是从思维形式（概念、判断、推理）上进行思维。它是抽象逻辑思维发展的初级阶段，因此也称为普通思维，形式逻辑也称普通逻辑。一般地说，10—11岁是过渡到逻辑思维的关键年龄。这时学生的概括能力有了较显著的变化。

2.辩证逻辑思维：简称辩证思维。它是以对立统一为核心规律而进行的

思维。它着重从事物内部的矛盾性，概念的矛盾运动来进行思考。它把思维形式和思维内容联系起来，对事物的发展变化、相互联系、相互转化的过程进行思考。它是抽象逻辑思维发展的高级阶段，必须在形式逻辑思维的基础上才能形成。据心理学家研究，9—11岁学生的辩证思维才开始萌芽。

从个体发展来说，上述几种思维活动虽然是分阶段逐步发展的，但每发展到后一阶段时，前一阶段的思维特点并不因此而停止发展或消失，在一定条件下，还向更高的水平发展。例如，文学家、艺术家、建筑学家等的具体形象思维获得了高度的发展。

二 在小学数学教学中对发展思维能力的基本要求

新中国成立以来，历届小学数学教学大纲中有关发展学生思维能力的规定基本相同，即培养学生初步的逻辑思维能力。这里所讲的逻辑思维主要是指形式逻辑思维。从国家教委1992年颁发的《九年义务教育全日制小学数学教学大纲（试用）》中看得更清楚。其中明确提出，“结合有关内容的教学，培养学生进行初步的分析、综合、比较、抽象、概括，对简单的问题进行判断、推理，逐步学会有条理、有根据地思考问题；同时注意思维的敏捷和灵活。”这表明，在小学阶段主要是培养学生初步的形式逻辑思维能力，同时也注意培养学生的一些良好的思维品质。

为什么在小学以培养初步的形式逻辑思维能力为主呢？个人体会有以下两点。

（一）从数学的特点看：数学具有抽象性和逻辑严密性。数学本身是由许多判断组成的确定体系。这些判断都是由数学术语和逻辑术语以及相应的符号所表示的语句来表达的，并且借助逻辑推理由一些判断形成新的判断。而这些判断的总和就构成了数学这门科学。小学数学内容虽然比较简单，也没有严格的推理论证，但都是经过人们抽象、概括、判断、推理、论证得出的真正的科学结论，只是不给学生进行严密的合乎逻辑的论证。即使这样，一时一刻也离不开判断、推理。这就为培养学生的逻辑思维提供了十分有利的条件。

（二）从小学生的思维特点看：小学生正处在从具体形象思维向抽象逻辑思维过渡的阶段。特别是中、高年级，学生的抽象思维发生了“飞跃”或“质变”。具体地说，10—11岁学生开始能逐步分出概念的本质特征，能初步掌握比较科学的定义，能领会概念之间的逻辑关系，也能独立进行一些简单的逻辑分析，并进行间接的推理（即由几个判断推出新的判断）。因此可以说，这一阶段正是发展学生形式逻辑思维的有利时期。

由此可以看出，小学数学教学大纲中提出培养学生初步的逻辑思维能力，既符合数学学科的特点，又符合小学生的年龄特点。

有人一度提出，小学数学的教学目的之一是发展学生的创造思维。这一点值得商榷。第一，根据心理学研究，创造思维是人们思维活动的高级过程。它有普通思维的特点，例如在解问题时，也有提出问题、明确问题、提出假设、检验假设等阶段。但是不同之处在于有想象的参与。另外，创造思维往往是逻辑思维的简缩。从多数学生来说，如果没有良好的逻辑思维的训练，很难发展创造思维。也就是说，发展创造思维首先要有逻辑思维做基础。其次，人们的一般思维活动中也具有一定的创造性思维的因素。可以说，发展

逻辑思维，在一定程度上也包含着发展思维的创造性品质。但是如果把创造思维作为基本要求提出来，对小学生说就要求太高了。此外，由于创造思维这一过程本身比较复杂，心理学的分析研究还很不充分，还难以具体说明它的内涵，要在小学里提出明确具体的教学要求就更困难了。

也有人强调小学数学应着重发展辩证思维。这也值得商榷。如前所述，辩证思维是抽象逻辑思维发展的高级阶段，需要有一定的形式逻辑思维做基础。而且从小学数学内容来说，虽然有些内容能够反映辩证思维的某些规律，但有很多内容受到一定的局限。例如，对加与减，可以说是相反的运算，两种运算相互依存，但是在一定条件下可以互相转化就不好讲，因为还没有学过负数。另外从小学生的年龄特点来说，9—11岁才开始萌发辩证思维，显然比形式逻辑思维发展得晚。因此在小学把发展辩证思维作为教学的基本要求，还为时过早。在小学只能结合某些内容适当渗透一些唯物辩证观点的因素，给学生积累一些感性材料，而不是讲辩证法。例如，讲整数加法与减法时，可以通过实例说明它们是相反的运算，是相互依存的；讲分数乘除法时，可以通过实例说明两种运算在分数中可以相互转化。

三 小学数学中培养初步的逻辑思维能力和教法

下面基本按照《九年义务教育全日制小学数学教学大纲（试用）》中所提的内容分别加以阐述，同时分别提出一些教学建议供参考。

（一）培养学生初步运用分析、综合、比较、抽象、概括等能力

这些内容，从逻辑学上说都是逻辑的方法；从心理学上说都是人们进行思维活动必不可少的过程。

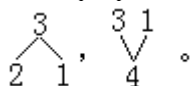
1. 培养初步的分析、综合能力。

分析是在思维中把事物的整体分解成个别部分、要素或特性；综合是把个别部分或特性结合成一个整体。分析与综合是密切联系着的，人们一方面不断进行分析，另一方面对分析的结果不断加以综合。

分析与综合在小学数学中有广泛的应用。通过分析可以理解某一数学知识的要素，新旧知识间的联系；通过综合又对数学知识有了全面的和整体的理解。

从一年级开始就用到分析与综合，而且贯穿在各年级各部分数学知识的教学之中。下面举几个例子。

（1）教学 10 以内的数时，要了解每个数的分解和组成。如



（2）任何一个计算，几乎都可以分解成几个已学的基本计算。如 20 以内的进位加法出现 $9 + 3$ ，两位数加一位数出现 $23 + 4$ ，两位数乘以一位数



出现 25×3 等。



（3）在进行概括的时候，一般都先经过分析，然后再综合。例如，讲除法的意义，先通过具体例子分析除法中各组成部分与乘法中各组成部分的联

系，在此基础上概括出除法的意义。

(4) 解答简单应用题时，根据问题找出所需的已知条件就是分析的过程，根据已知条件提出所能解的问题就是综合的过程。解答复合应用题时，分析、综合就较为复杂。先把复合应用题分解为几个有联系的简单应用题，进一步分析解每个简单应用题所需的已知条件，然后把已知条件成对的结合，连续地解答几个简单应用题，最后得到问题的答案。例如：

两步应用题：“同学们做了 12 朵红花，8 朵黄花。送给幼儿园 15 朵，还剩几朵？”

想：要求还剩几朵，须知道什么？——一共做多少朵，送了多少朵。（分析）

一共做多少朵知道吗？那么要先算什么？

要求一共做多少朵，须知道什么？——做了几朵红花，几朵黄花。（分析）

题里告诉了什么？怎么求一共做多少朵？（综合）

知道一共做 20 朵，现在可以求什么？怎么求？（综合）

(5) 教学几何初步知识也同样运用着分析与综合。例如，教学长方体特征时，引导学生观察、分析它们的面、棱和顶点，然后加以综合，总结出长方体有 6 个面、12 条棱和 8 个顶点，以及其他特征。

小学生的分析与综合，在不同年龄段具有不同的水平。低年级学生能进行简单的分析与综合，但是一般都要结合动作和直观来进行，而且主要是进行部分的分析，即能分析某个事物的个别部分或个别特征。中年级学生在教学的影响下有所发展，但多数还是部分分析，而进行综合的分析能力还很差。解答两步应用题时，有近 50% 的学生能正确分析出第一步先求什么，多数能列综合算式解答。高年级学生的分析、综合能力有较大的发展。他们能进行稍复杂的分析与综合。解答整、小数两步应用题时，近 80% 的学生能正确分析出第一步先求什么。但解分数的两步应用题时，还有较多学生对分析感到困难。在用不同方法解答应用题时，需要把原有条件重新组合分析，然后列综合算式，从而使学生的综合分析能力也得到了发展。

教学生进行分析、综合时要注意以下几点：

(1) 研究的事物都有许多部分、要素和特性，其中有些是重要的、本质的，教学时要引导学生分析重要的和本质的东西。例如， 12×3 ，口算时可以把 12 分解成任意两个数的和，但是要着重引导学生把 12 分解成 10 和 2，先算整十数乘以 3，再算 2 乘以 3，最后把两个积合并起来。

(2) 要随着学生的年龄逐步提高分析、综合的要求。例如，低年级教学 10 以内数的组成要结合动作、直观来进行分析；解答应用题也借助动作、直观来分析数量关系。到了高年级，有的就可脱离直观，但较抽象的内容还要适当利用直观。如教学约数、公约数、倍数、公倍数等可以让学生摆一摆计数板，以加深对分解公有的质因数的理解。

(3) 分析的深刻、详细的程度注意适当划分层次。例如，低年级教学长方形、只分析出它有 4 条边、对边相等，有 4 个角，都是直角。较高年级教学平行以后再分析出它的对边平行。

(4) 为了培养学生分析、综合的能力，注意适当让学生口头表述分析、综合的过程，可以让同桌的学生经常互相说给对方听。

2. 培养初步的比较能力。

比较就是确定所研究的事物之间的相同点和不同点。有比较才能鉴别，通过比较可以加深对事物的理解。比较与分析、综合有着密切的联系。通过分析，把事物的个别部分、个别特性区分出来，才有可能加以比较，确定它们的异同。

比较在小学数学学习中有广泛的应用，它有助于正确理解概念和法则。从一年级开始就学习比较。如比较两组物品的个数是同样还是不同样多，哪组多，哪组少。教学计算方法或法则时，通常都要出现不同的算式进行比较。例如， $5+1=6$ ， $1+5=6$ ； $6-1=5$ ， $6-5=1$ ； $31+15=36$ ， $31+50=81$ 等。教学一些概念时，也都要进行比较。如质数和互质数，分数和除法，正比例和反比例，长方形、正方形和平行四边形等。有关联的易混的应用题要进行比较。如比较乘、除法应用题，算术解法和方程解法等。

小学生的比较能力也是逐步发展起来的。低年级学生往往只能在直接感知的条件下区分一些直观、具体的事物的异同，或区分个别部分的异同，还不善于区分本质的异同。随着年龄和年级的增长，学生逐步发展到能区分抽象事物的异同，许多部分的异同，并且对简单的事物能区分本质的异同。研究还表明，小学生开始比较容易发现事物的相异点，逐步也能发现事物的相同点或相似点。而且开始发现事物的相异点都是比较明显的，以后逐步能比较细微的差异点。

教学生进行比较时要注意以下几点：

(1) 要比较的事物和对比较的要求必须适合上述小学生在比较方面的年龄特点。例如，低年级要多利用直观，并且多加引导；高年级则要更多地放手让学生进行抽象事物的比较，遇到较难的知识仍可利用直观。开始着重比较明显的相异点，以后逐步练习比较细微的差异点。

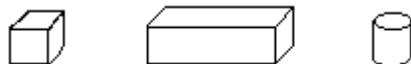
(2) 明确要比较的项目，必须在同一种属性、特点或关系上进行比较。有时在几方面有相同点或不同点，就要引导学生分项依次进行比较。例如引导学生比较长方形和正方形时，先比较它们的边，再比较它们的角，然后综合起来说出它们有什么相同点和不同点。

(3) 要引导学生抓住本质的属性。特别是分析不同点时，往往有很多非本质的不同点，不要在这些方面花很大力量。例如，方程解应用题和用算术方法解应用题，在解题时有很多相同点和不同点，但最重要的不同点是：用方程解时把未知量当作已知量直接参加列式，算术解法则把未知量作为解答的目标而不参加列式。学生明确这一点，就抓住用方程解应用题的本质。

(4) 对于易混的概念和法则要着重比较它们的相异点。例如1分米、1平方分米和1立方分米，要通过比较，使学生明确它们的实际长短或占空间的大小，弄清它们分别是长度单位、面积单位和体积单位，它们分别与1米、1平方米和1立方米的进率是10、100和1000，从而获得明确的长度单位、面积单位和体积单位的概念。

3. 培养初步的抽象、概括能力。

抽象是在思维中揭示出事物的本质特征，舍弃其非本质特征。有时本质或非本质特征要根据研究的方向和目标而定。例如：下面的几个形体，可以分别研究它们的形状特征。大小特征，颜色特征或制作的材料特征等。



概括则是在思维中把某些事物所抽取出的共同本质特征结合起来，并推

广到同类的事物上去。例如，研究大小不同、放的位置也不同的三角形，抽取出它们的共同本质特征，并得出一般结论，即三角形都由三条线段围成的，都有3个角。这就是概括。

显然，抽象、概括与分析、比较、综合有着密切的联系。它们是在分析事物的各自特征的基础上，舍弃其中一些非本质的对我们没有意义的特征或属性，分出本质的对我们有意义的特征或属性，并且通过比较不同的事物，找出它们的共同特征或本质属性，再加以综合。因此可以说，这几种逻辑方法是相互联系、相互渗透的。


抽象、概括在小学数学中有着广泛的应用。任何一个数学概念都是抽象、概括的结果。例如，认数3时，先数3个杯子，数的时候舍弃了杯子的形状、大小、颜色等特征，区分出数量来；再数3支铅笔、3个球，也同样舍弃其他的特征，只区分出数量的特征。经过比较，可以看到这三种物体具有共同的数量特征，即都是3个，于是概括出数目3。认识形也是一样，先拿一个小圆筒，舍弃它的数量、大小、颜色等特征，而抽取出它的形状特征。那么就看到它有上下两个圆面，还有一个侧面是曲面。如果再拿几个小圆筒，大小、颜色虽然不同，但是形状上具有同样的特征，那么就根据它们具有形状的共同特征把它们归为一类，做出概括。

小学生的抽象、概括能力也因年龄和年级的不同而有不同的层次和水平。据心理学家研究，低年级学生主要处于直观形象水平阶段。如认数1、2、3、4、5……以及认识加、减、乘、除运算的含义等，都是通过操作、直观而抽象、概括出来的。学生在抽象、概括时，他们往往只注意到或概括出事物的直观形象和外部特征。例如，在一年级教学圆柱的认识，有的学生说它的形状是“直上直下的，像个大柱子，圆乎乎的。”在教师的指导下，学生逐步能离开直观，理解一些抽象的数概念，概括出简单的计算法则。中年级学生则发展到形象抽象水平阶段。其特点是：学生注意和区分事物的直观的和外部的特征逐渐减少，而注意和区分事物的内部的和本质的特征逐渐增加。到了高年级，进一步发展到初步的本质抽象水平。其特点是：大多数学生能对事物的本质特征或属性以及事物的内部联系和关系进行抽象、概括。例如，给学生出示几个不同的菱形（来教过），四年级除了一些学生能抽象概括出它们都有4个角或4条边外，有8%的学生能指出它们的四边相等或对角相等。而五六年级除了一些学生能抽象概括出它们都有4个角或4条边外，有21%的学生能指出它们的四边相等或对角相等，还有33%的学生能指出它们是对称图形或有对称轴。高年级学生还能初步理解用字母表示数。但是学生的本质抽象水平的发展还是不完全的，对于离学生生活远的事物或高度的抽象、概括，还感困难。例如分数、小数、质数、合数的本质特征，还需要通过操作或直观来理解。

教学生进行抽象、概括时要注意以下几点：

（1）要通过直观、具体的材料进行抽象。抽象是与具体相对应的，因此要按照由具体到抽象的原则，提供丰富的直观、具体的材料，并引导学生抽象。直观、具体的程度可根据学生的年龄特点以及平时积累的感性经验多少而定。低年级要多运用一些直观、具体的材料，到高年级遇到过于抽象的概念，如质数、合数、分解质因数、分数等概念，也要注意适当运用直观教具。

（2）注意抽象、概括的科学性。进行抽象、概括时，要注意引导学生区分出事物的本质特征，舍弃其非本质特征，以便达到正确理解所学的知识。

另外要注意从多个事物进行抽象、概括，避免从一个事例作出概括，以防止得出片面的不正确的结论。即使是通过几个事例进行抽象概括，有时也难免得不到正确的一般概括，因此所举的事例要具有典型性、代表性。例如，低年级教学长方形时，要出不同的放置位置的长方形，特别要注意出现斜着放的长方形，如 ，以免学生抽象、概括时没有完全舍弃它的非本质特征，

误认为只有底边是水平放置的长方形才是长方形。

(3) 进行抽象、概括之后还要注意具体化。具体化和抽象、概括是相反的过程，在抽象、概括出事物的本质的一般特征之后，还要引导学生回到单独的个别的事物上去，以作为对抽象、概括出的结论的应用和验证。通过这一活动还可以加深学生对所学的知识理解，使学生的思维生动、灵活。例如，教学乘法的初步认识后，可以出现算式 3×4 ，让学生用小圆片摆出这个算式表示的是几个几。另外，如果有些差生对抽象、概括出的概念的本质特征不易理解，还要再回到具体的事例中去以帮助理解。

(二) 培养学生初步的判断、推理能力

前面讲的是思维的过程和方法，但人们在进行思维时，以什么形式表现出来呢？这就是通常所说的概念、判断和推理。无论逻辑学或心理学，都把这三者看作基本的思维形式。

1. 重视概念的教学。

概念是对事物的一般属性和本质特征的反映形式。任何一个概念都是对事物进行抽象、概括的结果。概念与知觉、表象不同。知觉、表象都是事物的具体的映象，具有直观的性质。而概念具有抽象、概括的性质。

概念是用词来表达的，它以词的意义形式而存在。在小学数学中概念有很多，也都是用词来表示的，如整数、分数、小数、约数、倍数、直线、长方形、圆等。

(1) 概念的定义。

任何一个概念都反映事物的本质特征，通常叫做概念的内涵。例如，平行四边形这个概念，它的内涵就是两组对边分别平行的四边形。一个概念还反映了某一类事物的总和或范围，通常叫做概念的外延。例如，三角形的外延就是指所有的三角形，其中包括锐角三角形、直角三角形和钝角三角形。可以看出，概念的内涵是说明概念的含意的，概念的外延是说明它的适用范围的。这两者相互联系、相互依赖。每个概念都有确定的内涵和外延，不能混淆。

概念一般都要加以定义。通过定义来揭示概念所反映的事物的本质特征。这在小学数学中例子也很多。给概念下定义的方法也有多种，下面举出几种常见的下定义的方法。例如，两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形。（关系定义，说明平行四边形是四边形中的一种，它的本质特征是两组对边分别平行。）

已知两个数的和及其中一个加数求另一个加数的运算叫做减法。（也是关系定义。）

一条线段绕它的端点旋转一周所成的角叫做周角。（发生定义，说明这种角的由来。）

两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，如果两种量中相对应的两个数的比值（也就是商）一定，这两种量就叫做成正比例的量。（条

件定义，通常有“如果……那么……”）

此外，在某些情况下，概念不好下定义，就采取描述、说明的方法。这在小学数学中还比较多。例如，物体表面或围成平面的大小叫做它们的面积。

（描述）

把一个合数表示成若干个质数的乘积，叫做分解质因数。（说明、解释）

1、2、3、4、5……叫做自然数。（指出概念的外延）

有些初始概念是不定义的，如集合。（在小学不讲）

（2）小学生对概念的掌握。

小学生掌握概念有一个逐步提高的过程。低年级学生掌握的概念大部分是具体的；如果是比较抽象的概念，那么必须是通过直观可以了解其本质特征的。据心理学家研究，儿童对概念的掌握的水平是与其概括的发展水平相适应的。低年级学生掌握概念的水平主要是描述型和功用型，如果给概念下定义，学生还较难接受。另外，学生往往对概念的本质特征不很清楚，也不易全面掌握。例如，有的学生误认为，只有水平放置的长方形才叫长方形。中年级学生可以初步理解和掌握一些概念的本质特征，但是由于抽象、概括水平的限制，对某些概念的本质特征的理解和掌握还有困难，而且往往不能脱离直观形象的支持。例如，中年级学生掌握亿以内的数比较容易，对亿以上的数就比较困难。分数、小数的概念，还需要通过操作、直观来逐步理解它们的含义。另据研究，四年级学生能识别垂线、直角三角形、平行四边形、正方形、梯形、圆这6种图形的平均正确率可达62.3%，但是能说明图形特征的平均正确率只有28.3%。这说明要掌握几何图形的本质特征还是比较难的。到了高年级，学生能够掌握一些概念的本质特征，理解一些概念的抽象定义。据测试，五年级能正确掌握所学平面图形特征的可达50%。但是有些概念还需要通过直接的经验或感性的表象来掌握。例如教学分数时，仍需要借助一些直观材料来说明概念的意义。高年级学生还能理解和掌握一些概念间的逻辑联系或概念系统，如平行四边形、长方形和正方形之间的联系和区别。但对概念的本质特征的理解和掌握也有不完全、逻辑性差等缺点，有时甚至发生混淆。例如，学生往往难以区分质数、互质数和质因数的含义，在计算时还往往用错术语。

（3）教学数学概念时要注意的几点。

正确说明所教概念的意义，首先教师要弄清概念的意义。要把数学的科学概念与日常生活中的概念的含义区别开来。例如“角”在数学中指的是平面的角，与日常生活“角”的含义不同。

要防止不适当地扩大或缩小概念的内涵或外延。例如教学“整数”不能只包括0和自然数。

教学概念的意义时避免同一词语的反复。例如不能说“求两个数加在一起是多少叫做加法”。

不能任意解释一个概念。例如教学体积概念时，用粉笔盒说明装多少支粉笔就是体积的大小。

要注意在理解的基础上给学生分析概念的定义。例如教学平行四边形，首先说明它是一个四边形，再说明它与一般的四边形的差别在于两组对边分别平行。

注意形成概念要符合儿童的认知特点。由于数学概念都是抽象的，一般要按照如下的认知顺序进行教学：动作、感知 表象 概念、符号。如教

学数目 3，先出数量是 3 的各种实物图（可让学生自己摆），然后出点子图，最后出数字“3”。教学质数和合数，可以先引导学生对 20 以内数的约数的多少进行分析，找出它们的特点，然后进行分类，把 2、3、5、7、11、13、17、19 归为一类，把 4、6、8、9、10、12、14、15、16、18、20 归为另一类，最后概括出质数和合数的概念。

注意概念的具体化。概念的形成是把具体事物进行抽象化的过程，形成概念以后还要回到具体化，以利于学生正确理解并加深理解概念的意义。例如教学乘法的含义后，给出一个乘法算式，让学生用小棒摆出它表示的是几个几。教学分数的意义后，让学生举实例说明它的含义。

注意概念间的联系和区别。这对于加深学生对概念的理解有重要的作用。

了解概念的联系也就是了解概念间的关系。概念间的关系一般有以下几种。

从属关系：如四边形、平行四边形和长方形的从属关系可以用下图表示。

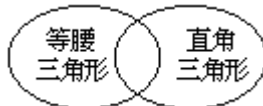


同一关系：说明两个概念完全相同。如等边三角形和等角三角形，质数和素数。

矛盾关系：如加法和减法，正比例和反比例。

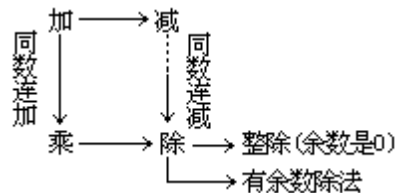
并列关系：如直角三角形、锐角三角形和钝角三角形，奇数和偶数。

交叉关系：如等腰三角形和直角三角形，可以用下图表示。



了解概念间的区别，就是要精确地掌握概念的内涵，弄清各概念的本质特征有什么不同。如长方形的周长和面积，要通过操作和直观使学生弄清楚各指长方形的哪一部分，用的计量单位和计算方法各有什么不同。

对于一些有联系的概念，到适当时候可以引导学生把所学的概念纳入概念系统中去，使知识系统化。例如，整数四则运算通过下表可把知识系统化。

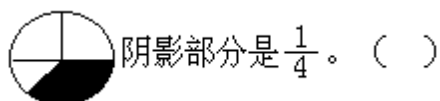


重视概念的应用和巩固。牢固地掌握一个概念，必须是能识别和应用它，理解概念的意义，而不是一字不差地背出概念的定义。

为了使学生识别和理解概念，可以出现如下的练习，让学生判断是否正确。

最小的自然数是 0。 ()

角的两边越长，角就越大。 ()



为了使学生会应用概念，可以出现如下的练习。

用加法的意义说明下面的应用题为什么用加法算：

“小明有 15 张邮票，小强比小明多 3 张，小强有多少张邮票？”

能整除 120 的质数有_____。

2. 培养初步的判断能力。

判断是对事物具有某种特征或属性的肯定或否定的思考。例如，“自然数和 0 都是整数”，“含有质因数 3 的数不能化成有限小数”，都是判断。很明显，判断是用语句来表达的。而语句是由词联结成的，因此判断是由概念联结成的。也可以说，判断是反映概念间的联系的形式，它反映一个概念是不是包含于另一个概念之中。例如，“减法是加法的逆运算”这个判断，它首先说明减法是一种运算，同时又说明是加法的逆运算。它表示了减法这个概念与加法概念的联系。

小学数学中有关概念的定义，法则，定律和公式等一般都用判断形式来表示。

(1) 判断的分类。

简单判断：指一个判断中不包含其他的判断。根据事物的数量、各种性质以及不同的关系，简单判断可以分成很多种。这里结合小学数学举出常见的几种。

按照肯定或否定某一种性质来分，有：

肯定判断：如，能被 2 整除的数都是偶数。

否定判断：如，0 不是自然数；分母含有 2、5 以外的质因数的分数，不能化成有限小数。

按照事物的数量来分，有：

单称判断：判断中只关系到一个事物。如，1 不是质数，也不是合数。

特称判断：判断中关系到某些事物。如，有些质数是奇数。

全称判断：判断中关系到某一类事物的全部。如，任意三角形的内角和是 180° 。

按照判断中所确定的事物与事物间的关系来分，有：

对称性的：如，3 加 2 等于 5；1 米等于 100 厘米。

非对称性的：如，5 大于 3。

传递性的：如，小明比小华高，小华比小林高，小明比小林高。

复合判断：它是由几个简单判断结合而成的。常见的有：

联言判断：它是断定几个事物情况同时存在的判断。如，3 和 5 都是质数；15 既是 3 的倍数，又是 5 的倍数。

选言判断：它是断定几个可能的事物情况至少有一个存在的判断。如，互质的两个数，或者一个是质数一个是合数，或者两个都是质数，或者两个都是合数。

假言判断：它断定的是在某一条件下事物才具有某种属性。如，如果一个数的各位上的数的和能被 3 整除，这个数就能被 3 整除；（如果）小数的小数点向右移动一位，小数就扩大 10 倍。

(2) 小学生判断能力的发展。

小学生的判断能力也是逐步发展的。低年级学生已能作一些简单判断，但是大多属于感知形式的直接判断。例如，教师出示 5 朵红花，学生点数后说出“红花是 5 朵”。在学生所进行的简单判断中，很多是对事物是否具有

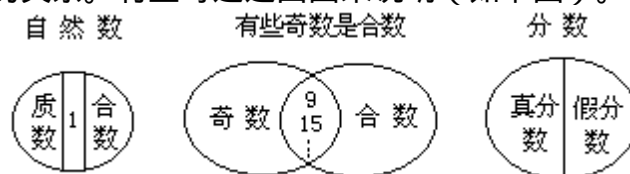
某种属性的直接断定。如“红花是5朵”，“正方形的四条边是相等的”。还有大量的判断是反映事物间的关系的。如“5比3大”，“红花比黄花少3朵”，“羊的头数是牛的2倍”，“3加2等于5”，“1米等于100厘米”等。这些判断，在教学的影响下，学生一般都能掌握。有时还用到一些稍复杂的判断。例如，“在没有括号的算式里，有乘法和加、减法，要先算乘法。这实际上是一个假言判断，只是在法则中把“如果……那么……”给省略了。通过实际例子，低年级学生还是能够理解和运用的。进入中年级，学生的判断能力有了一定的发展。有些学生能够离开直观进行一些抽象的判断。例如，对“两个加数的和一定比每个加数大”，有43.9%能做出正确的判断。但有些比较难的问题，判断的正确率比较低。有些学生能对所做的判断提出根据，但仍是少数。例如，在出示 $x \times 3 = 24$ ，让学生求未知数 x 时，大多数学生能做对，但只有9.6%的学生能说出根据什么用除法计算。中年级学生能理解和掌握比较容易的假言判断。在数学课上通过具体事例，多数学生能理解和掌握积的变化规律和商不变的规律。例如，“一个数和35相乘，积是7000，如果这个数缩小10倍，积变成（ ）。”正确率达76.7%。高年级学生的判断能力有较大的发展。多数学生能进行抽象的判断。例如，对“一个近似数是350，它可以表示的准确数里，最小的是351。”64.5%的学生能做出正确的判断。多数学生还能对做出的判断提出简单的论证或说明根据。例如，在解 $x \times 3 = 24$ 时，68.7%的学生能回答出计算的根据。据心理学家研究，高年级学生还能论证一些比较复杂的或然判断，提出各种可能的原因，并从中确定正确的原因或主要原因。但是根据数学测试，当一道题有不同的判断时，学生能答出几个可能的判断的只占12.4%，大多数学生只做出一种判断。这可能与平时教学解题时只有一个正确答案有关。尽管如此，这些事例已能说明高年级学生具有一定的逻辑判断能力。

(3) 培养学生初步的判断能力要注意的几点。

要正确理解数学知识中的每个判断，能从逻辑角度弄清它属于哪类判断，挖掘数学知识中的逻辑因素，才便于教学中有意识地引导学生做出合乎逻辑的判断。例如，三角形的内角和是 180° ，这是一个全称判断，因此教学时要对直角三角形、锐角三角形、钝角三角形分别加以考察、分析，然后再做结论。教学后还要问一问学生，为什么能做出结论说“任意三角形的内角和是 180° ”呢？

要根据学生的年龄特点，通过具体例子引导学生做出正确的判断。在低年级还要多运用操作、直观，在高年级对一般的判断可以脱离直观，但对比较抽象又难理解的判断，如有关分数大小的比较，还要适当运用直观。

要使学生正确理解判断中所确定的量，事物间的关系以及所具有的属性的特点。首先要分清一个判断是单称的、特称的或是全称的。其次要分清判断中概念间的关系。有些可通过画图来说明（如下图）。



对于假言判断，要使学生弄清条件。如小数点移位引起小数大小的变化，要弄清什么条件下小数的大小发生变化，怎样变；什么条件下小数的大小不变

(即小数的基本性质)。

设计好判断的练习。这是培养学生判断能力的重要途径。做一些判断是否正确的题目很有好处。例如，

所有的偶数都是合数。()

分数都比1小。()

互质的两个数一定都是质数。()

对于学生的回答，要注意引导学生检查和纠正其判断中的逻辑错误。也可进行这样的练习。例如，

任意两个等底等高的三角形可以拼成一个平行四边形。(“任意”两字应改为“有些”，即把全称判断改成特称判断。)

$\frac{3}{4}$ 吨 = 75%吨 (“75%”应改为“ $\frac{75}{100}$ ”，因分数概念与百分数概念不同一。)

逐步培养学生对自己的判断进行论证，说明理由。例如， $\frac{2}{7}$ 为什么不能化成有限小数？

3. 培养初步的推理能力。

推理是从一个或几个判断得出一个新判断的思维形式。推理所依据的判断叫做前提，推出的新判断叫做结论。

人们在实践中常常运用逻辑推理的方法获得新知识。推理在学习数学知识方面起着极其重要的作用。大部分数学知识是由一些基本判断推导出来的。

根据前提的数目来分，推理有两种：

直接推理：是以一个判断作前提的推理。例如，由“5比3大”推出“3比5小”。

有些直接推理也并不是很容易掌握的。例如，由“自然数和0都是整数”推出“整数就是自然数和0”，就错了。

间接推理：是有两个或两个以上的判断作前提的推理。例如，

各位上的数的和能被3整除的数都能被3整除；

375各位上的数的和能被3整除；

所以，375能被3整除。

(1) 几种常用的间接推理。

归纳推理：它是从特殊判断到一般判断的推理。这种推理又分为完全归纳和不完全归纳两种。

完全归纳是根据某类事物的每一种特殊情况(即对所有情况都一一考察)做出一般结论。这在小学数学中是少见的。下面可以算作接近完全归纳的例子。例如，通过直观得出，

直角三角形的内角和是 180° ；

锐角三角形的内角和是 180° ；

钝角三角形的内角和是 180° ；

所以，任意三角形的内角和是 180° 。

不完全归纳是仅根据某类事物中的部分情况具有某种属性做出一般性结论。这在小学数学中有广泛的应用。例如，教学0的乘法、运算定律、分数的基本性质等，一般举几个例子，分别做出个别结论(即单称判断)，然后

做出一般结论（即全称判断）。

应用不完全归纳推理，有时根据不多的几个事实，会得出不正确的结论。例如，

3 是质数，也是奇数；
7 是质数，也是奇数；
11 是质数，也是奇数；

所以，所有的质数都是奇数。（2 是质数，却是偶数。）

因此使用不完全归纳推理必须十分谨慎，所举事实必须注意代表性，做出结论后要进一步加以验证。

演绎推理：它是从一般判断到特殊判断的推理。演绎推理中最常用的是三段论形式。例如，

分数的分子、分母是互质数的是最简分数；（大前提）

$\frac{3}{11}$ 的分子、分母是互质数；（小前提）

所以， $\frac{3}{11}$ 是最简分数。（结论）

可以看出，三段论是由 3 个判断组成的，前两个判断分别叫大前提和小前提，最后是结论。在大前提中提供了一般原理原则，在小前提中提供了一个特殊情况（即特殊判断）。三段论通常都是从大前提开始的。但在实际中也往往从小前提开始，然后再提出大前提。因此在思维时两个前提可以颠倒顺序。但必须分清哪个是大前提，哪个是小前提。

在小学数学中应用法则、公式、定律等解决具体问题时，都运用了演绎推理。但往往不是严格按照三段论形式，而采取了简略的推理形式。例如，375 各位上的数的和能被 3 整除；

所以，375 能被 3 整除。

（这里省略了大前提。）

另外，在说明算理或论证的时候，实际上是先说了结论，再补充前提。例如，

判断下面哪些数能被 3 整除：375，……

回答：375 能被 3 整除。（这是结论。）

为什么？—因为 375 各位上的数的和能被 3 整除。（只说出小前提，省略了大前提。）

也可能答：因为各位上的数的和能被 3 整除的数都能被 3 整除。（只说出大前提，省略了小前提。）

类比推理：是根据两个事物在一系列属性上有相似之点，已知其中一个事物还有其他属性，由此做出另一个事物也具有同样的其他属性的结论。它的推理方式如下。

事物 A 具有属性 a、b、c、d；

事物 B 具有属性 a、b、c；

所以，事物 B 也具有属性 d。

可以看出，这是从特殊判断到特殊判断的推理。

类比推理在小学数学教学中也有一些应用。例如，

整数的计数单位间进率是 10，做加法要相同数位对齐，从低位加起；

小数的计数单位间进率是 10，做加法要相同数位对齐（就是小数点对

齐)；

所以，小数加法也要从低位加起。

有关平面图形的许多判断通过类比推理可推到立体图形上去。例如，长方形的面积等于相邻两条边的乘积；长方体的体积等于相邻三条棱的乘积。

圆可以分成一些相等的扇形，再拼成一个近似的长方形，从而导出圆面积计算公式；直圆柱的两底面是半径相等的圆，因此可以把圆柱底面分成一些相等的扇形，按底面扇形大小切开，再拼成一个近似的长方体，从而导出圆柱体体积计算公式。

必须注意，用类比推理所得的结论不总是真实的。因为进行类比推理的两个事物虽有许多相似点，但仍有一些差异，如果遇到有差异的属性，或者在第二个事物中根本没有这种属性，而仍使用类比推理，就会出现错误。

例如，

各位上的数的和能被 3 整除的数，能被 3 整除；

9 是 3 的 3 倍，各位上的数的和能被 9 整除的数，能被 9 整除；

27 是 9 的 3 倍，各位上的数的和能被 27 整除的数，却不一定能被 27 整除。（这里的 27 是两位数）

由于类比推理所得的结论有或然性，它不能代替科学论证，所以在推出结论后，需要进一步论证或在实践中检验。

（2）小学生推理能力的发展。

小学生的推理能力，是随着年龄的增长以及教学的影响逐步发展起来的。低年级学生首先掌握的是简单的直接推理，如由“5 比 3 大”直接推出“3 比 5 小”。遇到带有逆思考性质的推理，则有些学生感到困难。例如，一年级算 $14-9$ ，要求用加法想出得数，有些中、下学生开始感到困难，要通过操作、直观和多次练习才能逐步掌握。低年级学生也开始初步发展了间接推理，当然只限于简单易懂的，而且要借助直观或熟悉的事例。例如，配合直观出示 $6+0=6$ ， $8+0=8$ ， $0+5=5$ ……学生在教师的引导下能归纳出一个数加上 0 还得原来的数。又如，加法的交换性质，一年级结合直观进行归纳也不困难。实验表明，低年级学生由几个例子归纳出一条法则比较容易，如果要归纳两条或更多条法则就比较困难。低年级学生的演绎推理能力也获得初步发展，因为在数学课上经常要把归纳出的法则用到具体的计算中去。但是学生的演绎推理往往不是严格地按照三段论的形式进行的。例如计算 $8+9$ ，学生知道用 $9+8$ 来计算，但不会都想到调换两个加数的位置和不变这个大前提。往往经过教师提问，学生才把大前提补上。低年级解两步应用题时，开始学习多步的演绎推理，多数感到困难，经过较长时间的训练，能掌握的也还达不到半数。但是列式解答比较容易的两步应用题，一般没有困难。这也说明，学习解答两步应用题的能力和口头分析两步应用题的能力不是同步发展的。进入中年级，学生的推理能力有了一定的发展。多数学生能进行比较简单的间接推理。他们能结合直观进行归纳推理，但进行抽象的归纳推理还感困难。学生单独归纳一般规律也比较困难，而且表述时也往往不够确切。例如，加法结合律，学生还不善于从几个特殊判断上升到一般判断，需要教师加以引导。中年级学生大都能进行简单的演绎推理，但是在数学课上把已学的法则运用到个别问题中去时，往往是不自觉的。在解答两三步计算的应用题时，学生口头分析、推理的能力比低年级有较大的提高。中年级学生的

类比推理能力也有了一些发展。据研究，具有正确类推能力的学生约占 35%，有很多新知识可以在已学的基础上类推出来，但往往需要加以引导。总的来看学生独立类推的能力还较差。到了高年级，学生的推理能力有较大发展。据心理学家研究，12 岁学生归纳推理的正确率比 10 岁的有较大增加。从数学教学来看，多数学生能从几个具体例子归纳出一般结论，但是能从特殊结论合乎逻辑地逐步上升到一般结论，仍占少数。高年级学生的演绎推理也比中年级有了较大发展。例如给出一个未学过的法则，让学生按照所给的法则对某个式子进行运算。四年级学生能做对的只有 13.2%，五年级做对的达 45.9%，六年级则达 58.3%。学生综合运用归纳和演绎推理的能力还较差。从测试情况看，问题中所反映的规律是比较简单明显的，学生容易推出，规律比较复杂和不明显的，则感到困难。例如，给出一列数：7，8，13，15，20，23，（），（），要求找出数的排列规律并在括号里填数，做对的只有 16.5%。高年级学生的类比推理也有进一步发展。据心理学家研究，高年级能正确类推的达 59%。在高年级数学教学中较多运用类比推理，不仅为加快理解和掌握数学知识提供了有利条件，也促进了学生类比推理的发展。但是学生也容易出现类比推理的错误。例如，在低年级学过甲比乙多 20，反过来就推出乙比甲少 20。到高年级学过分数，多数学生易把这种方法错误地类推到分数中去，即如果甲比乙多 20%，反过来就推出乙比甲少 20%。

（3）培养学生初步的推理能力要注意的几点。

在引导学生进行归纳推理时，注意要举几个事例，避免只举一个事例就做出一般结论。同时要引导学生对每一事例的属性或特征做出正确的特殊判断，最后再上升到一般判断。例如，教学加法交换律，先就每个等式做出特殊判断：

$3+5=5+3$ 3 和 5 这两个加数调换位置，和不变；
 $10+8=8+10$ 10 和 8 这两个加数调换位置，和不变；
 $129+46=46+129$ 129 和 46 这两个加数调换位置，和不变；
所以，加法中两个加数调换位置，和不变。

另外，由于不完全归纳所得的结论不一定真实，在这之后还要引导学生把一般结论应用于个别例子中加以检验。

为了培养学生的初步推理能力，每教一个新的法则、性质、公式后，再应用于具体情况时，要注意让学生说根据。在这时并不要求学生严格按照三段论的形式来回答，但是当学生回答时缺少大前提，教师要通过提问，使学生明确补上所缺少的大前提。

应用演绎推理必须遵循一定的规则，否则会出现逻辑错误。例如，
凡 9 的倍数都是 3 的倍数；
20 不是 9 的倍数；
所以，20 不是 3 的倍数。

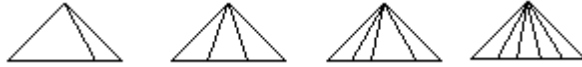
这个例子的结论是对的，但推理不正确。因为有一条规则是大前提必须是全称的，小前提必须是肯定的。而这里的小前提是否定的。因此要真正掌握好，还需要深入研究一些逻辑规则。

注意综合运用归纳、演绎推理。一方面，在归纳出新的法则、公式之后要应用于具体情况中去；另一方面，注意安排一些富于思考的题目，引导学生运用归纳推理探索出规律，再运用所得规律解决新的问题。例如，

（a）先找出数的排列规律，再在（ ）里填适当的数。

15 16 18 19 21 20 () ()

(b) 找出下面每个三角形中的线段的条数与所含的三角形的个数有什么关系。算一算，在三角形中加 5 条线段可以有多少个三角形。



在解答复合应用题的时候，充分注意培养学生推理能力。解答应用题时，既应用了分析、综合，又应用了判断、推理。如解答两步应用题时实际上是应用了多步的演绎推理。例如，“一个食堂原有煤 200 吨，用去 $\frac{3}{5}$ ，还剩多少吨？”推理的步骤如下：

要求还剩多少吨，必须知道原有的吨数和用去的吨数；

这道题知道原有 200 吨，不知道用去的吨数；

所以，必须先求出用去的吨数。

要求用去的吨数，必须知道原有的吨数和用去的占原有的几分之几；

现在知道原有 200 吨，用去的占原有的 $\frac{3}{5}$ ；

所以，可以求出用去的吨数。

根据分数乘法的意义，可以求一个数的几分之几；

现在要求 200 的 $\frac{3}{5}$ 是多少；

所以，可用乘法列式： $200 \times \frac{3}{5} = 120$ （吨）。

.....

当然只在开始时这样一步一步地推理，以后可以适当简缩推理过程。

使用类比推理时，要注意学生是否有乱用类比推理的错误，发现后要
及时纠正。例如，

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 32 \\ \hline 68 \end{array}$$

错把加法的分别对位计算的方法类推到乘法。（开始学两位数乘法，学生容易出现这样的错误。）

四 在小学数学中培养学生的思维品质

《九年义务教育全日制小学数学教学大纲（试用）》除了强调发展学生初步的逻辑思维能力外，还注意培养思维的敏捷性和灵活性。这属于培养思维品质问题，也称智慧品质，有人也称这些为科学思维素质。心理学关于思维品质的研究是从 50 年代才开始的。国内外一些心理学家认为，“在构成人的特殊的、个体的各种个性品质中，智慧品质起着重要的作用”。“思维品质的实质，是人的思维能力的差异的表现，亦即智力差异的表现。”由此看出，思维品质是思维能力中不可缺少的组成部分。在各科教学中都要始终注意在发展学生逻辑思维的同时，培养学生的思维品质。近来我国心理、教育工作者也开始注意这方面的研究。

关于思维品质包括哪些内容，还没有一致的看法。一般来说包括思维的独立性、敏捷性、灵活性、创造性，还有人提出思维的深刻性、批判性等。结合小学数学的学科特点，我认为主要是培养思维的敏捷性和灵活性，而这

两者与思维的创造性又有密切的联系。

(一) 小学生思维品质的发展

低年级学生的思维品质已经有了一些发展。其特点是：1.思维的自觉性还很差。由于低年级学生的逻辑思维刚刚开始发展，一方面还不会思考问题，另一方面还不能意识到自己的思维过程。往往学生做完一道题，答不出他是怎样想的。至于自觉地检查、调整或论证自己的思维过程就更差。但是通过有意识地培养，可以逐步提高学生思维的自觉性。2.学生间的思维速度差异比较大。一般思维快的和思维慢的能够相差几倍。但是在正确的教育下，特别是针对学生的不同特点，及时地有区别地采取一些措施，可以逐步提高学生思维的敏捷性。3.思维的灵活性一般都比较差，思维的惰性比较大。这与儿童的生理发展，特别是与脑的成熟的程度有关。另一方面，由于个体发展的差异，以及环境教育的影响，学生之间也存在着一定的差异。例如，对一年级出了这样一道题，“5个相同加数的和是20，这个相同加数是几？”由于学生没学过除法，只能根据乘法的含义运用口诀想出答案。较好的班级做对的可达70%，而较差的班级做对的仅有30%。又例如，在二年级教过一位数除多位数商中间有0的简便算法，有极少数学生一下掌握不了，宁愿照前边学过的方法一步不漏地去除。

中年级学生的思维品质有所发展。具体表现在：1.在教学的影响下，学生思维的自觉性有提高。有些学生明显地表现出对数学的兴趣，喜欢做一些稍费思考的题目，有些学生还喜欢看数学课外读物。2.学生思维的敏捷性和灵活性有所发展。在数学课上学生能够选用简便的方法进行计算，能用不同的方法解答应用题。但是学生之间往往有很大差异。实验说明，如果教学得法，差异还是可以缩小的。3.学生思维的创造性也有一些发展。例如，用小棒连续摆成6个正方形（不出图），要求学生列式计算小棒的根数。结果四年级有21%的学生列出各种综合算式（连加除外），有7.9%的学生能在前面计算的基础上概括出一般的计算公式，还有少数学生做出初步概括，但表述不完善或使用术语不确切。这表明已有少数学生在探究能力和思维的创造性方面有一定的发展。

高年级学生的思维品质进一步发展，特别是思维的敏捷性和灵活性有较大的发展。在教学的影响下，学生的计算速度有进一步提高，灵活运用简便算法的能力有所增强；对一道题想出不同解法的能力也有发展。据心理学家研究，高年级学生一般都能用两种方法解答一道应用题，能用三种方法解答的学生可达80%以上。教学实践表明，有些分数应用题，一般学生选用两种方法解答不大困难；但用三种方法解答，中、差生感到困难。学生思维的创造性比中年级也有较大发展。据测试，上述用小棒摆正方形的问题，能概括出一般计算公式的达30.2%，其中有些学生还能用字母公式表示。这表明，一部分学生在探究能力和思维的创造性方面有较好的发展。

(二) 对培养学生思维品质的几点建议

1. 培养思维的敏捷性。

培养思维敏捷很重要。要提高民族素质，其中重要的一条是人人讲求工作效率，对临时遇到的问题能及时进行思考，正确判断，迅速得出结论或决策。思维敏捷要与思维轻率严格区别开来。思维敏捷不仅在速度上要求快，而且注意考虑周密。

从一年级就要注意思维敏捷的培养，但是不能要求过高、过急。教学时

首先要注意留给学生思考的时间，引导学生去想，逐步要求学生注意很快地想出问题解决的方法，并对想得快的又想得对的给以鼓励。同时注意防止学生单纯地为了求快，思考轻率而不够周密。计算要在正确的基础上适当提出速度要求，注意适当安排限定时间的练习。有些计算或应用题的分析，要在适当时候引导学生简缩思维。例如 $9+3$ ，经过一些练习和掌握口算步骤以后，引导学生想，“9 加 1 是 10，还有 2，得 12”。中年级以后要注意适当教一些简便算法。如，被乘数、乘数中间、末尾有 0 的乘法，要启发学生想有什么简便算法，并在计算中自觉地运用。

2. 培养思维的灵活性。

思维的灵活性的特点主要表现在，善于从不同角度、不同方向来思考问题，能用多种方法解决问题；能根据具体情况，灵活地运用知识来处理问题。

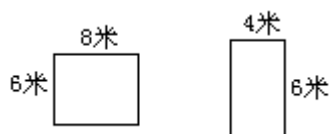
从低年级起就要注意培养学生思维的灵活性。但是开始不能要求很高，要随着年级的增长逐步提高要求。例如，在低年级，某些计算可在教师的指导下想出不同的计算方法，中年级以后就鼓励学生自己想出不同的计算方法，而且要找出简便的算法。要培养思维的灵活性，首先要加强算理教学，使学生切实理解和掌握规律性知识和一般计算方法，通过练习逐步巩固并加深理解，避免死记硬背。学生切实掌握了，就为灵活运用奠定了基础。教师在教计算步骤、解题过程以及书写格式等做出一些规定是必要的，但在一定条件下要允许学生灵活，不宜统得过死。例如，中年级学过乘法交换律以后，在算式中就要允许被乘数、乘数交换位置书写。分数混合运算只要求适当保留运算的过程，不必强调把每一步计算都完整地写出来。在练习中要注意适当出现一些概念或习题的变式，还要安排一些逆思考的题目，以利于培养思维的灵活性。例如，低年级出加法应用题，要避免每问都出现“一共”二字。各年级都要注意变换叙述方式。例如，“桃比梨少 40 千克，梨和桃的重量比是 5 : 4，求梨、桃各有多少千克。”通过这题把比和分数联系起来，虽然出现比的形式，但仍可用分数来计算，从而培养学生思维的灵活性。此外，适当安排一些有多个答案的开放型的题目，也有助于培养思维的灵活性。例如，“3 4，如果这个数能被 6 整除，十位上可以填几？”

3. 培养思维的创造性。

它与创造思维有联系又有区别。创造思维强调的是思维过程，或把它看作一种能力。而思维的创造性强调把它作为一种思维品质。作为品质来说，它的特点是假设、方案、结论独特新颖，包含新的因素。具有思维创造性品质的不仅限于少数创造发明者，也可以是小学生。小学生的独特新颖的解法也同样具有创造性。心理学家克鲁捷茨基认为，学生的创造性虽然没有客观的价值，但对学生自己说，从主观上看是新的，研究过程是创造性的。

发展学生思维的创造性，首先要给学生探索发现的机会。从低年级就要注意这一点。例如，让学生看 20 以内进位加法表，看看它的排列有什么规律；教学口算时，让学生想出不同的口算方法，等等。随着年级的增高，可以适当增加这方面的内容。例如，中年级探索积、商的变化规律，高年级探索小数点移动位置引起小数大小的变化规律等。除了教学新知识外，还要适当安排一些练习题。要适当加强发散思维的练习。从低年级起就要安排一些题目，要求学生用不同的方法计算或解答。随着年级的增高，还要引导学生从不同的角度，运用不同的知识来解同一个问题。例如，“豆腐坊用 50 千克黄豆做 200 千克豆腐，照这样计算，125 千克黄豆可以做多少千克豆腐？”开始只要

求用整数计算，以后可以要求分别用小数或分数计算，还可要求用比例知识来解。在较高年级，适当发展学生的直觉思维，对于培养学生思维的创造性有一定好处。直觉思维是在对所研究的问题作整体的了解，应用自己的经验，一下子做出直接的判断，找出解决问题的方法。进行直觉思维时，人们意识不到赖以求得答案的过程，缺少清晰的确定的步骤。但是由于对有关的基础知识及其结构的了解，使得思维产生了飞跃，迅速地越过某些个别细节和步骤。因此这种思维有时在一定程度上具有创造性成分。例如，



求上面两个长方形的面积一共是多少？这道题一般列式为： $6 \times 8 + 4 \times 6 = 72$ （平方米）。但是有的学生经过总体观察，很快答出72平方米。因为他们不仅发现两个长方形有一边同样长，而且发现大长方形的另一边是小长方形的另一边的2倍，从而很快想到它们的面积和应是小长方形面积的3倍。当然进行这样的练习不一定作为共同的基本要求。

五 在小学数学教学中培养学生思维能力应注意的几个问题

最后简单谈谈在小学数学中培养学生思维能力应注意的几个问题，也可以说是应遵循的几个原则。

（一）培养学生思维能力要与数学知识的教学紧密结合

这一点新大纲已明确指出，“学生初步的逻辑思维能力的发展，……要有意识地结合教学内容进行。”因为数学基础知识的教学与思维能力的培养是相辅相成的。基础知识为培养思维能力提供富有逻辑性的素材，反过来培养了思维能力又为很好地掌握数学基础知识创造有利的条件。把两者分离开来教学，无论对学习数学基础知识或培养思维能力都不会有好的效果。为此，备课时要认真研究教材，弄清数学知识本身的科学性、系统性和逻辑性，分析教材中含有哪些培养学生思维能力的因素。制订一节课的教学计划时，不仅要明确数学知识方面的教学目的要求，而且要明确在培养思维能力上侧重哪些方面，达到什么要求，并且力求在教案中有所体现。教学时要考虑选定什么样的方法，既能做到使学生较好地理解和掌握数学知识，又有助于激发学生思考，培养学生的思维能力。

（二）要把培养学生思维能力贯穿在各年级数学教学的始终

这一点也是新大纲中明确指出的，“要把发展智力和培养能力贯穿在各年级教学的始终。”小学生正处在由具体形象思维向抽象逻辑思维逐渐过渡的阶段，思维能力需要一个长期的逐步培养和训练的过程，因此就要求数学教学适应儿童年龄发展的特点，有计划有步骤地培养学生的思维能力，并且贯穿在小学数学教学的全过程。为此，每个年级，每节课，每个教学环节都要考虑在学习数学基础知识的同时，如何发展学生的思维能力。如果低年级忽视思维能力的培养，就会给中、高年级增加教学的困难；反过来，如果低、中年级重视发展思维能力，到高年级有所忽视，也会给进一步发展思维造成不利的影响。为了很好地贯彻这一条原则，就要很好地研究各年级学生的思维发展特点，适应学生的年龄特点，紧密结合知识内容，提出适当的发展思

维能力的要求。例如，同样是培养分析能力，低年级就要多结合操作、直观，引导学生分析；高年级则要逐步离开直观，着重培养学生独立进行抽象分析的能力，只在必要的时候才结合直观来进行具体分析。

（三）适应小学生心理特点，注意把操作、思维和言语表达结合起来

这里有两层意思。一是适应小学生特点，注意把思维与操作、直观结合起来。二是适应小学生特点，把思维与言语表达结合起来。关于第一点，是由小学生的思维特点决定的。低年级学生的思维特点仍以具体形象思维为主，中、高年级学生的思维虽然逐步向抽象逻辑思维过渡，但是在许多情况下，特别是遇到较抽象的数学知识，仍需要适当借助操作和直观。为了使學生较好地理解和掌握数学知识，同时也为了逐步发展学生的抽象思维，激发学习兴趣，在一定条件下适当利用操作和直观来引导学生思维是必要的。但是无论操作和直观，都是学习的手段，在适当时候要逐步脱离操作和直观，过渡到抽象思维，避免学生过多地依靠操作和直观。关于第二点也很重要。思维和语言是密切联系着的。语言是思维的工具。人们借助语言，才能对事物进行抽象、概括，反过来又借助语言对人们的思维进行调节，使思维逐步完善。因此发展学生的思维，必须相应地发展学生的言语。学生的言语也是逐步发展的，所以在发展学生的思维和言语时，都要考虑到学生言语发展的特点。例如，低年级学生的口头言语有了一定的发展，但是书面言语的学习还刚开始，因此在这个阶段应着重训练学生用口头言语表达自己的思维。到中年级，一方面继续发展学生的口头言语表达能力，另一方面要适当发展学生的书面言语，其中包括默读课本内容和应用题。到了高年级，一方面提高学生的口头言语表达能力，如说明算理、口头分析应用题以及口头论证等，另一方面加强发展书面言语，如少数题可以训练学生写出思考过程。在发展儿童言语时还要注意适应学生的差异，不能一刀切。例如，在低年级同一班学生，可以有一小部分学生能独立说明算理，有一部分学生则只要求在教师引导下说明算理，还可能有一小部分学生在教师引导下说明算理还有困难。但只要坚持训练，逐步提高要求，学生的言语表达能力和思维都会逐步有所发展。

（四）既重视思维过程，又重视思维结果

传统的教学只重视思维的结果，忽视思维的过程。现代教学论则十分重视思维的过程，这样有利于发展学生的思维能力。为此新大纲也明确提出“要重视学生获取知识的思维过程。”其目的在于纠正过去只重视思维的结果的片面做法。但是反过来也不能因此只重视思维过程，而忽视思维的结果。特别是数学，计算或解答是否正确还是很重要的。为了加强对思维过程的重视，首先要加强算理的教学，说明一种算法或一个公式的来源。解应用题要重视分析数量关系。做练习时要多让学生说明自己是怎样想的，必要的时候要说出论据，而不是简单地对一下得数。学生在练习中出现错误，要引导他们找出错误的原因，检查在分析、推理方面存在什么问题。低年级学生还要注意结合操作、直观来说明算理、分析数量关系，使学生的思维过程具体形象化，更便于理解、掌握和检查。还要注意逐步培养学生认真听别人叙述的思维过程，并能评价别人的思维过程是否正确、合理，从而提高表达思维过程的能力。

（五）加强教师的示范和指导

培养学生的思维能力，教师加强示范和指导具有十分重要的作用。

加强教师的示范，首先要求教师在讲授数学知识时注意正确运用逻辑方法，揭示每一逻辑思维过程。例如，在教学加法结合律时运用了不完全归纳推理，教师的整个讲述过程，要符合不完全归纳推理的顺序和思维过程，这样就为学生的思维树立了良好的范例，对学生的思维起了潜移默化的作用。其次在练习时教师还要继续给学生示范，引导学生有顺序地合乎逻辑地思考。例如，演绎推理如何按照三段论的形式来思考，以后如何简缩思维，还是比较难的，就需要教师做出示范，使学生便于模仿。

加强教师的指导，首先要求教师有计划有步骤地设计教学，每次明确在逻辑思维方面的要求和训练步骤。其次在练习中注意给以必要检查和指导。要了解学生的思维过程，思考的方法是否符合逻辑，有没有逻辑的错误，在适当时候要引导学生共同分析、订正。例如，学过质数和质因数以后，有的学生把两个概念弄混，这时有必要从本质特质上分清两个概念的联系和区别。特别要明确不能孤立地说某个数是质因数，必须说某个数是 x 的质因数。

最后，教师要做到加强示范和指导，最根本的是要提高自己的逻辑学和心理学水平，不断研究和总结发展学生思维能力的经验。这样才能切实完成新大纲规定的有关这方面的教学任务。

（本文原载于《中国小学数学教育》1994年第9—12期及1995年第1—3期。）

第二部分 小学数学教材和教学心理实验研究

学龄前儿童数概念的发展

近年来,无论在国内或国外,由于社会生产和科学技术的迅速发展,需要加速培养人才,人们都越来越重视儿童的早期数学教育。目前对学龄前儿童进行数学教育有各种做法,究竟哪种比较好,是个值得深入研究的问题。其中很重要的一点是必须先了解幼儿数学初步概念形成和发展的特点,否则盲目地进行教育,不但收不到良好的效果,反而会妨碍幼儿身心的发展。本文根据一些调查研究材料就幼儿数概念发展的特点作一概述,并对如何发展幼儿的数概念提几点看法。

数(这里指自然数,下同)概念是数学中最基础的知识,也是幼儿开始积累数学的感性经验首先遇到的问题之一。掌握数概念是一个比较复杂的过程,不仅要会数数,还要理解数的含义,知道数的顺序和大小,理解数的组成和数的守恒,掌握数的读写法。因为幼儿年龄小,身心都在发育中,要在不断积累感性经验的基础上逐步形成数概念,所以要经历一个较长期的过程。下面着重从四个方面进行一些分析研究。

一 计 数

计数活动的实质是在所数的物体集合的元素与自然数列中从1起各数之间建立一一对应,而把最后一个元素所对应的那个数作为计数的结果。有些幼儿虽然很早就能按顺序说出数词一、二、三……,但不能同所数的物体一一对应,或者不能确定数得的结果,这样不能认为具有计数的能力。幼儿的计数能力是逐步发展起来的。研究表明,一般遵循以下的发展顺序:先口头数,然后点物数,再到说出计数的结果。

最初,幼儿没有数量的观念,对物体集合的感知模糊不清。以后逐渐能区别数量的多少。例如,给一岁多的幼儿每只手里放一块饼干,如果拿走一块,他会不满意。两岁左右,在成人的教育影响下,逐步学会个别的数词,如“一”、“二”,但往往不能正确地用以表示物体的数量。例如,当问到物体“有多少”时,有些幼儿往往都用“两个”来回答。两岁至三岁的城市幼儿,有一些开始能数几个数,有少数能数到10以上,但也有些(约1/3)完全不会数。三岁多的幼儿,多数能数到10。四岁多的幼儿,多数能数20以内的数,其中少数能数到100。五岁多的幼儿,多数能数30以上的数,其中约半数能数到100。六岁多的幼儿,大多数能数到100。农村的幼儿,由于环境和教育条件差一些,口头数数的能力发展迟缓一些,但是到六岁以后大多数也能数20以内的数,即使是没有入过学前班的,也有25%的幼儿能数到100。

幼儿在口头数数的发展过程中有以下几个特点:1.四岁以下的幼儿掌握一些数词,但是往往分不清它们的先后顺序,因而常出现跳数、乱数的现象,

本文引用的材料,主要是在北京市一所街道幼儿园和河北省万全、阳原两县农村的调查结果,同时参考了全国九个地区3—7岁儿童数概念和运算能力发展的研究报告。

返回重数的情况也较多。2.四、五岁的幼儿，数到几十九再接下去数困难较多，出现停顿、跳数、返回重数等现象。3.年龄较小的幼儿只会从1数起，五岁以上的幼儿开始有些能从中间任意一个数起接着数。这表明幼儿随着年龄的增长，逐渐地在数词之间建立起较牢固的联系，并且对计数规律有了一定的理解。

幼儿虽然很早能口头数一些数，但是大部分属于“顺口溜”的性质，很多幼儿不能把数词同所数的物体一一对应起来。幼儿从口头数一些数发展到初步能够点物数是一个很大的进步。因为点物数需要多种分析器参加，并且协同动作。不仅语言运动分析器参加活动，运动分析器和视觉分析器也参加活动，正确地说出数词的同时，手依次指点着一个个物体，眼同时注视着一个个物体，并且监视手指的运动。幼儿（特别是五岁以下）的大脑皮质抑制机能的发展还比较差，口手眼协调动作还不灵活，再加上口头数数还不熟悉，在点物数时常常顾此失彼，因而出现漏数、重复数等不对应的情况。据调查，五岁以下的幼儿，点物数的能力大都落后于口头数的能力。两岁多的幼儿，有少一半能点物数三五个数，有25%只能点数到2，其余的完全不会点数。三岁多的幼儿，大都能点物数5以内的数，其中有些能点数到10。四岁多的幼儿点数时不对应的情况明显减少，大都能点数10以内的数，有些幼儿点数的数目已接近口头数的数目。五岁多的幼儿，大多数能点物数，点数的数目与口头数的数目范围基本趋于一致。六岁多的幼儿（包括农村的），基本上都具有点物数20以内数的能力。

幼儿说出计数的结果比点物数的能力的发展更迟缓一些。因为这需要在掌握点物数的基础上理解数到最后一个物体，它所对应的数词就表示这一组物体的总数，也就是说在数词与物体的数量之间建立起联系。由于幼儿的理解和概括能力较差，需要一个较长时间的反复实践才能逐步掌握。据调查，两岁多的幼儿，有些虽能点物数几个数，但其中有40%左右不能说出计数的结果，能说出计数结果的幼儿也大都小于点物数的数目范围，最多不超过3。但是也有25%的幼儿，完全不会点物数，却能说出两个或三个物体的总数，这是他们长期直接感知的结果。三岁多的幼儿，仍有20%左右会点物数几个数但不会说出计数的结果；1/3的幼儿只能说出两个或三个物体的总数；有些幼儿能说出五、六个物体的总数，但是也明显落后于他们的点物数的能力。三岁多的幼儿，大多还不能按指定的数（5以内）取物，有些幼儿所取物体的数量是对的，但是当问到所取的总数是多少时，又说错了。四岁多的幼儿，大多数能说出数量在10以内的物体的总数，而且能按指定的数（10以内）取物；约半数的幼儿说出计数结果的数目范围与点物数的数目范围大体趋于一致。这表明幼儿初步理解了数的基数含义。五六岁的幼儿，不仅计数的范围逐步扩大，计数的准确性也不断提高，基本上都能按指定的数正确地取出物体。计数的技巧也在发展着，表现在从逐一计数发展到按群计数。五岁多的幼儿有极少数已能两个两个地数，六岁多的幼儿能两个两个地数的达40%左右，极少数还能五个五个地数。计数时也逐步摆脱了手触摸物体。六岁多的幼儿中，有1/3能直接用眼看着数，以眼的活动代替了手的活动。

二 数的序列

掌握数的序列结构，是掌握数概念的一个重要组成部分。其中包括知道

自然数的顺序，每个数在自然数列中的位置，数与数间的顺序关系和大小比较，以及序数的含义。

幼儿在学习计数的过程中，已经接触到数的序列，也逐渐认识一些自然数的顺序。但是从掌握数的序列结构来说，还是很初步的。特别是在开始学习计数时，往往是把一个数词与另一个数词机械地建立起联系，并不明白数的顺序关系。随着比较实物的数量的多少、给实物或数目排序等活动，逐渐掌握数的顺序关系。

幼儿比较数的大小能力比计数能力发展要晚一些。三岁多的幼儿，多数能从 1 数到 10，但是若问 7 和 9 哪个多，大都不知道；四岁多的幼儿能答对的也不到一半，五岁至五岁半的幼儿也只有 50% 能答对。有的幼儿提出要求说，“你得拿出（东西）来让我数”。由此可见，较小的幼儿，只能看着实物依靠数数来比较数的大小，还没有建立起抽象数的顺序与数的大小的明确关系。五岁半以后，一般幼儿都能较顺利地比较 10 以内数的大小。

给三个以上的实物或数字卡片排序的能力，也反映幼儿掌握自然数的顺序和大小的水平。幼儿在这方面的能力发展得更晚一些。因为在排序时不仅要熟悉数的顺序，还要能比较每两个数的大小，而且能协调几个数目间的关系，每次选择的一个数要比前面的一个数大而比后面的一个数小，这对幼儿来说是比较难的。调查表明，四岁以下的幼儿大都没有排序的能力。四五岁的幼儿，排序的能力明显提高，但是也有少一半不会做。例如，能给画着 1—5 只小猫的画片排序的达 58.3%，能给三张 10 以内的点子图排序的约 75%。给数字卡片排序的成绩稍好一些。这阶段的幼儿在排序时大多采取尝试错误的方法。到六岁以后，一般都能按照数的顺序比较顺利地排出 20 以内的数的顺序，显示大多数幼儿掌握了 20 以内数的顺序关系。

掌握数的序列的另一重要方面是理解数的序数含义。前面所讲的计数都是从数的基数含义方面来理解的，就是懂得用数可以表示物体集合中元素的个数。而理解数的序数含义，却是要懂得用数可以表示集合中某一元素在序列中的位置。幼儿理解和掌握数的序数含义，一般比较晚。因为这需要幼儿先掌握开头几个数的顺序，能够一一对应地点数物体，还要有给物体或数目排序的经验。据研究，幼儿最初分不清基数与序数，两者常发生混淆。例如，当问到“这是第几个”时，两三年的幼儿常不会回答，或者用基数回答“三个”“五个”。要求他们按指定的序数取物更困难些，大多数拿第一个或最后一个，有的还随便拿一个或两个。四岁多的幼儿，序数观念有了较快的发展，多数能指出 5 个以内的物体的排列顺序；五六岁的幼儿，大都能理解 10 个以内的物体的排列顺序，但仍有少数对基数与序数发生混淆。

三 数的组成

掌握数的组成，从本质上说是从整体与部分的关系上来掌握数的结构。前面讲到计数，只是把物体集合看作一个整体，并不涉及它能划分成几个部分，以及几个部分间的关系。数的组成揭示了一个数可以分成几个数，反过来几个数可以组成一个数。这样使幼儿从整体与部分的关系上理解数与数之间的关系，不仅加深对数概念的理解，思维能力也得到发展。

幼儿对数的组成的理解比较晚，也经历了一个较长的过程。据研究，最初给幼儿几个物体，幼儿看到的只是一个个单个的物体，还不能把它们看作

一个整体。在成人的教育影响下，幼儿逐渐能把它看作一个整体，数出它们的个数。在点数物体的过程中，由开始知道一个数是由若干个一组成的，逐渐发展到知道一个数可以由几个相同的或不相同的数组成。五岁以下的幼儿对数的组成理解的很少。如给幼儿 3 个木块，让他摆成两堆，看几个和几个合起来是 3 个，能答对的不到 10%；五岁多的幼儿能答对的也不过 25%，另有 1/3 的幼儿能答对一部分。他们往往看不出部分与整体的关系，如答“3 和 3 合起来”，“2 合起来 3”，“3 个合在一起是 3 个”等。六岁多的幼儿，由于成人和教学的影响，答对的可达 75%，其余的幼儿能答对一部分。但若给幼儿 10 以内的一个抽象数，要求说出它的组成，六岁以下的幼儿大都要依靠扳手指才能答对一部分，六岁多的幼儿能答对也只有 1/3，另有一些能答对一部分，其中有些仍需要扳手指。这些情况表明，由于幼儿的抽象思维水平较低，分析、综合的能力也较差，要完全理解和掌握 10 以内数的组成还有一些困难。

四 数的守恒

数的守恒指的是一组物体的数目不因其排列方式的改变而改变。瑞士心理学家皮亚杰认为，数量的守恒本身并不是数的概念，而是一个逻辑的概念，但是儿童必须掌握了数量的守恒原理，才能发展数的概念。因此理解和掌握数的守恒是发展儿童数概念的必不可少的一个组成部分。

幼儿开始理解数的守恒也比较晚。据皮亚杰研究，若把一行木片排得密一些或稀一些，幼儿一般要到六岁半到七岁才知道总数不变。对我国幼儿的测试，结果相似。六岁以下的幼儿绝大多数不理解数的守恒。例如，把数目相同的两组物体一一对应地排成两行，然后把第二行物体的间隔拉大，六岁以下绝大多数幼儿根据物体排列的长短来判定第二行的数目多，六岁多的幼儿能理解的有明显的增长，可达 75%。把数目不同的两组物体一一对应地排成两行，然后把第二行物体（数目较少）的间隔拉大，使两行的两端分别对齐，测试结果与前面基本相同。虽然六岁多的幼儿能正确回答的增多了，但还有不少幼儿说不清理由。七岁以后，大多数儿童才既能正确回答又能说明理由，达到完全理解数的守恒。

五 对发展幼儿数概念的几点看法

从上面的研究可以看出，幼儿数概念的发展具有一定的顺序性和阶段性。两岁幼儿大都处在数量感知阶段，对数仅有模糊观念，有些幼儿虽认识几个数，大多是靠直接感知的。四五岁幼儿大都进入数概念开始形成阶段，能点数数量不多的物体，并说出计数的结果，初步掌握一些数的顺序和大小，初步理解数的基数和序数含义。六七岁幼儿大都进入数概念基本形成阶段，能较顺利地一个一个点数较多的物体，有些还能按群计数，开始理解数的组成和数的守恒。但另一方面，也要看到幼儿数概念的发展是不平衡的，个别差异很大。其原因是多方面的，同先天的遗传素质有关，但是环境和教育的影响更大。国内外有很多试验和调查可以说明这一点。当前我国城乡幼儿数概念的发展同解放初比较，已有了较大的提高，也说明我国社会主义制度和教育起了重要的作用。我国城乡幼儿数概念的发展还存在一些差别，随着农

村生产的发展，物质、文化和教育条件的改善，城乡的差别逐步缩小，城乡幼儿数概念的发展的差别也正在逐渐缩小。

如果把上面的调查研究结果同一些外国的材料比较，可以看出，我国幼儿数概念的发展并不比外国的幼儿低。例如，日本的幼儿，三岁左右能正确地从1数到5；五岁时能口头数到30和40左右，而作为数概念能理解到10左右；六岁时能口头数到100左右，点实物能数到20左右。美国幼儿的认数能力比日本幼儿低一些。苏联的五岁多幼儿一般会10以内计数，有些能数到12—15。这可能与各国语言中数词的难易有关。

下面就如何根据幼儿的年龄特点，有计划有步骤地发展幼儿的数概念，简单地谈谈个人的几点看法。

（一）发展幼儿数概念，必须在保证完成幼儿教育的总目标、总任务的前提下来进行。有的家长或幼儿园教师希望孩子早日成才，往往不适当地提早或提高要求幼儿能数较多的数，成套地说数的组成，甚至计算一些进位加法和退位减法，结果使幼儿对数学产生了畏惧，妨碍了身心的发展。为此，确定幼儿的认数范围和要求，应注意是幼儿一般不需要费力就能达到的。如日本，在幼儿园大纲中明确规定，不应当让幼儿记过多的数词和数过多的数。

（二）教学的重点，不是教会幼儿数很多的数，而是通过不大的数目使幼儿初步理解数的意义，形成正确的数概念。例如，要能够一一对应地点数10以内（最多不超过20）的物体，知道数到最后一个数既可以表示所数物体的总数，也可以表示最后一个物体的排列次序，知道数的顺序和大小，结合直观初步知道数与数间的关系，认数字等。另外，要着重把教幼儿认数同发展幼儿的智力结合起来，通过认数活动发展幼儿的操作能力、观察力、注意力和思维能力。这样既可以给小学数学的学习做较好的准备，又避免同小学的过多重复。

（三）教学的顺序应注意与幼儿数概念发展的先后顺序大体相适应。例如，幼儿对数的守恒的理解比较晚，就不宜过早提出这方面的要求；对数的组成的教学也不宜过早，应重在理解。安排教学还要适当考虑如何便于幼儿掌握数概念。例如，家长教两三岁幼儿往往从口头数数开始，但是目前国外的早期数学教育趋向于从物体集合的分类、一一对应和给物体排序等实际操作开始，而不是先教幼儿顺口溜地数数，这是掌握数概念的重要基础。

（四）教学方法要适合幼儿的年龄特点。教学时要充分利用游戏和有趣的活动引导幼儿认数，使幼儿对认数发生兴趣，在有趣的活动中接受数学教育。教学时要按照实物操作 表象 抽象概念的顺序逐步使幼儿形成正确的数概念。还要根据各年龄幼儿的生理、心理发展水平恰当地提出要求。

（本文原载于《课程·教材·教法》1984年第3期。）

学龄前儿童计算能力的发展

对儿童进行早期数学教育，不仅需要研究了解幼儿数概念发展的特点，也需要研究了解幼儿计算能力发展的特点。只有掌握幼儿计算能力的发展规律，才便于正确地确定幼儿计算教学的内容，提出适宜的进行计算教学的方法，同时也便于小学在此基础上进行较为系统的数学教学。

本文的研究表明，幼儿在数概念发展的同时，计算能力也在逐步地发展着，而且与数概念的发展有着紧密的联系。幼儿的计算能力也是在各种活动中以及成人的教育影响下逐步发展起来的。他们在对物体集合的元素反复进行操作的基础上形成运算的初步概念，逐步掌握计算的方法，并对一些小的数目的计算逐步达到比较熟练。

一 幼儿的加、减计算能力的发展

通过测试研究，幼儿的加、减计算能力的发展大体经历三个阶段。

(一) 实物操作阶段(三—四)岁

三岁以下的幼儿，对加、减计算基本上还处于朦胧状态。测试结果表明，让两岁半以下的幼儿先拿1个木块，再添上1个木块，问一共有几个木块，只有1/3的儿童能做对。有1/3的儿童不会拿。或者先抓一把，再抓一把；或者先拿1个然后又拿走，也说不出有几个。还有1/3的儿童在试者引导下能操作，但说不清一共有几个木块。如果让幼儿先拿1个，再添上2个，则只有16.7%的儿童能够操作，但说不一共是3个。有少数儿童还是先拿1个，再拿1个，说一共是2个。这表明这些幼儿只认识数目2。减法的实物操作有类似的情况。超过两岁半而不满三岁的幼儿，83.3%能进行“1+1”“2-1”的实物操作，但当试者提出“1+2”“4-2”之类的实物操作要求时，能做对的很少。在出示需要用“1+1”或“2-1”计算的实际问题时，两岁半以下的幼儿基本上都不会做，而且83.3%的幼儿的回答是加法问题和减法问题的得数相同。这表明这些幼儿在操作活动和数目的计算之间还没有建立起联系。超过两岁半而不满三岁的幼儿，对需用“1+1”计算的实际问题多数能正确回答，对需用“2-1”计算的实际问题则有半数能正确回答；但是当改换其他数目，如需用“2+2”“5-2”计算的实际问题则只有极少数能正确回答。这说明这个阶段的大多数幼儿，由于多次操作活动，开始形成牢固的个别联系，即1个添上1个是2个，2个拿走1个剩1个，但是还没有真正理解加减运算的一般含义。

三岁多的幼儿开始进入加、减法的实物操作阶段。这时约有半数幼儿能够进行5以内加、减法的实物操作，极少数幼儿还能进行10以内加、减法的实物操作。有些幼儿能够正确地进行操作，但是说错了得数。另外还有些幼儿由于点数实物的能力还很差，操作还有困难。开始有一部分幼儿通过操作初步理解加、减法的含义，即添上是加，拿走是减。由于多数幼儿能点数实物并说出计数的结果，因而有些幼儿不仅能口头回答得数，而且同时能用手手指表示得数。例如，当提问“1个添上2个是多少？”有些幼儿一边回答“3

本文引用的材料，主要是对北京市一所街道幼儿园和一所小学初入学的儿童，以及河北省万全、阳原两县农村儿童的调查结果，同时参考了全国九个地区3—7岁儿童数概念和运算能力发展的研究报告。

个”，一边伸出3个手指。这说明幼儿在做加减计算时在极大程度上需要实物操作的支持。如果让幼儿做抽象的数的计算，则5以内的加法有37.4%的幼儿做对，5以内的减法只有20%的幼儿做对，而且做对的题目大多是重现他们生活经验中已经形成的联系，幼儿还不会利用实物操作的方法（如数手指）去解决他们不熟悉的计算题。至于结合儿童生活经验的实际问题，除了需用“1+1”“2-1”计算的题目大多数幼儿能口答以外，其他题目很少能做对。大多数幼儿不理解题意，随便说一个数来回答；甚至有的幼儿还没听完整个应用题，就说出一个得数。也有极少数幼儿能答对5以内的加、减法应用题，但是不明白是怎样算的。例如，提问一个三岁十个月的幼儿，“小明有2块糖，妈妈又给他2块，小明一共有几块糖？”在说对得数以后，问她是怎样想的，她说，“我知道几个数，1加1等于2，2加2等于4。”这说明三岁多幼儿还没有明确的选用运算方法和已知数的意识，有些幼儿虽然初步知道要用加法或减法计算，但是还不会根据题意选择已知数，于是往往把自己所会的加法算式都说出来，做为回答，出现对刺激的反应的泛化现象。

（二）半具体半抽象阶段（四—六岁）

这一阶段幼儿计算能力的发展有以下几个特点：

1. 幼儿完全掌握了5以内加、减法的实物操作，大多数掌握了10以内加、减法的实物操作。通过实物操作大多数幼儿初步理解加、减法运算的含义。

2. 能够进行一些抽象数目的加、减计算，但一般还离不开具体的实物操作，出现大量的扳手指的现象。同三岁多的幼儿相比，应该说这是一个很大的进步。因为三岁多的幼儿还没有完全掌握用实物计算的方法，还没有学会利用手指进行计算。在测试中，令三岁多幼儿用手指算，大多数都不会。例如，让三岁七个月的女孩伸指算3个添上2个是多少，她右手伸3个手指，左手伸1个手指；算6个添上3个是多少，就不会伸手指了。让三岁十一个月的男孩算5个减去3个是多少，他先答“6”。再让他伸指算，他先错误地伸4个手指，而且不会去掉3个。但是四岁多的幼儿，由于大都有了利用实物计算的能力，有些幼儿开始能把用实物计算的方法应用于抽象数目的计算中去。测试结果表明，5以内的加、减法，很多幼儿不需手指就可以算出得数；5以上10以内的加、减法，四岁多的幼儿基本会用手指计算的只占33%左右，而五岁多的幼儿基本会用手指计算的达75%左右。但是能用手指计算20以内的加、减法的仍占少数，约占25%，而且大多数是五岁半以上的儿童。这些幼儿在用手指算20以内的进位加法时，也明显地反映出半具体半抽象的特点。例如，让一个五岁八个月的女孩算“8+4”，她先伸出8个手指，然后看着手指接着数4个数，说得“12”；另一个五岁九个月的女孩，采取另外一种方法，她伸出4个手指表示要加的4，然后看着手指点数9、10、11、12，说得“12”。

3. 口头解答加、减法应用题能力有较大发展。四、五岁的幼儿绝大多数能口头解答5以内加、减法应用题，一半左右能口头解答10以内加、减法应用题。这与幼儿掌握了用实物计算加、减法有密切的联系。在成人教育的影响下，幼儿通过大量的用实物计算活动，一方面初步理解加、减法的含义，另一方面逐步学会用实物（特别是手指）计算的方法，从而就为口头解答加、减法应用题创造了条件。测试结果表明，这个阶段的幼儿口头解答5以内加、减法应用题，正确率都高于相应范围的抽象数目的计算，有些幼儿做得还比较熟练。但是这不能说明幼儿对加、减法的含义和应用已有较深的理解，仍

说明这阶段幼儿的加、减法计算的半具体半抽象的特点，并在很大程度上是因为联系儿童日常生活的事物为儿童提供了具体的直观的表象。从以下的事实可以得到证明：（1）这个阶段的幼儿在操作活动中往往是用“添上”“去掉”等词语来表示“加”和“减”的概念的，当出示抽象数目的式题，如说“3加2”“5减3”时，很多幼儿还不懂“加”“减”的意思，甚至有用手指计算加法的方法来计算减法。（2）有些幼儿不会做5以内加、减法的某几个式题，但是能够做类似的应用题，这在减法中尤为明显。例如，在五岁的幼儿中有50%不会做式题“5-3”，其中三分之一的幼儿完全不懂“5-3”的意思，但是都能做对用“5-2”计算的应用题；其中一半幼儿在做式题“5-3”时不会扳手指，但是做用“5-2”计算的应用题时却能用扳手指的方法做对了。这说明由于应用题给幼儿提供了计算活动的情境，使幼儿在头脑中产生实物计算的表象，借助表象并配合实物计算达到正确地计算出结果。（3）在口头解答应用题时，大多数幼儿只能说出得数，而说不出加法或减法算式。如五岁多的幼儿能说出加法算式的只占1/3，能说出减法算式的只有8.3%。说明幼儿虽然能口头解答一些加、减法应用题，但仍处在直观的表象的阶段，幼儿对于用加、减法算式来表示生活中的计算问题还没上升到概括性的认识。

另外一个值得注意的问题是，这个阶段的幼儿在抽象数目的计算中，一般都表现为加法的成绩明显优于减法的成绩。说明减法计算要比加法计算难。这与幼儿的心理发展有关。按照皮亚杰的观点，从心理学上讲，加法与减法是一种运算。因为作为一个运算，其特点之一是具有可逆的行动。加法作为一种可逆的运算，其本身就包括了它的逆运算——减法。但是在幼儿期，还缺乏可逆性的运算能力。据测试，四五岁幼儿有50%对提出的减法题做了加法。其中大多数是用手指算的。例如，算“3-1”，幼儿左手伸3个手指，右手伸1个手指，然后合起来数，说“得4”。少数幼儿不伸手指，直接按正序数数。例如，算“5-3”，一个幼儿按正序数1、2、3、4、5、6，说“得6”。在口头解答减法应用题时，有些幼儿虽然说对了得数，但是当让他们解释怎样算的时候，往往说的是加法。例如，提出这样一道应用题，“小华有5块饼干，吃了2块，小华还剩几块饼干？”一个四岁八个月男孩回答，“因为3块饼干加上2块饼干，吃了2块饼干。”一个四岁七个月女孩则回答，“因为3加1等于4，4加1等于5。”（同时把5个手指和3个手指加起来。）这说明幼儿在思考减法应用题时，还不会直接用减法计算，而是用尝试法给减数添上几个凑成被减数，从而确定剩余的数。在成人看来这样想似乎是困难的，实际上这是幼儿向可逆行的运算能力发展的雏型，这样还为进一步认识加减法的运算关系做了具体的准备。这种情况在五、六岁的幼儿中也常看到。

（三）抽象数的加、减计算阶段（六一七岁）

这个阶段儿童开始进入抽象数的加、减计算，这时儿童的加、减计算能力有较快的发展，主要有以下几个特点：

1. 绝大多数儿童掌握了5以内的加、减法，多数能做10以内的加、减法，少数能做20以内的进位加法和退位减法，甚至能做100以内比较容易的加、减法。

2. 依靠实物计算有所减少。特别是5以内的加、减法，大多数儿童能够不费思索地答出得数，还需用手指计算的儿童不到20%，这同四、五岁幼儿

相比已显著减少。10 以内的加、减法，遇到一些数目较大的计算，仍有约半数的儿童往往要用手指计算。至于 20 以内的加、减法，还有少量儿童不会用手指计算。经过教师的教学，大都能掌握计算的方法。

3. 有些儿童能够部分地或完全摆脱实物计算，进入抽象数的加、减计算。他们的推想方法是多种多样的。在做加法时主要采用以下几种方法：（1）在第一个加数后面接着数数。如 8 加 4，有的儿童能从 8 起接着数 4 个数，得到 12。（2）分组加。如 6 加 9，有的儿童想到 6 加 4 等于 10，10 再加 5 等于 15。（3）利用熟悉的相同数加得的和来推算。如 4 加 3，有的儿童想出 4 加 4 等于 8，再减少 1 个，得 7。这表明这些儿童已初步理解整体与部分间的某种增减关系和变化规律。在做减法时主要采用以下几种方法：（1）倒着数数。如 15 减 8，从 15 起一个一个地倒数到 7。（2）利用加减关系。如 8 减 5，有些儿童能说出，“因为 5 加 3 等于 8，8 减 5 就等于 3。”表明这些儿童已经具有可逆行的运算的能力。（3）利用已熟悉的减法来推算。如 11 减 6，有些儿童说 10 减 6 等于 4，11 减 6 等于 5。这实际上也是利用了整体与部分间的增减关系和变化规律。以上这些推想方法，在一定程度上具有逻辑运算的性质，只是在儿童的头脑中还是直观的、具体的，还没有形成抽象概括，但是无疑为以后的进一步抽象概括打下了重要基础。在测试中也发现有些儿童对所给的题目能够正确答出得数，却说不出所用的推想方法，或者对 10 以内加、减法能说清楚，而对 20 以内加、减法就说不清楚。这表明这个阶段很多儿童对自己的思维还缺乏自我意识的能力。

这个阶段的儿童在做用加、减计算的应用题时，比前一阶段也有所发展。但是由于儿童对加、减法的概念主要是从合并、添加、去掉等方面来理解，因此所能解答的应用题也主要限于这个范围之内。至于求两数相差多少的应用题，儿童还很少理解。据研究，五、六岁的幼儿理解合并、添加用加法，去掉用减法，可达 90% 以上，而理解求差需用减法的，只占 30% 左右。

二 幼儿乘、除计算能力的发展

幼儿的乘、除计算能力的发展与加、减计算能力的发展不同，一般地说是在非教学影响下自发地发展起来的，其发展的起始较晚，发展的速度较慢。但是即使如此，不少幼儿用非乘、除计算的方法口头解答实际问题的能力也达到一定的水平。

测试结果表明，能够用非乘、除计算的方法口头解答乘、除法应用题的幼儿，最早始于四岁半左右。四岁半以下的幼儿都不理解题意，很少作出反应。四岁半以上至五岁多的幼儿一般都有反应，但是多数回答是错误的，能正确算出结果的约占 25% 左右。四五岁幼儿在进行计算时，同做加、减法类似，大多数依靠实物，主要是看手指。例如，提出一道乘法应用题，“一个小朋友给 2 个苹果，3 个小朋友一共要给几个苹果？”五岁八个月的女孩边伸手指边说，“一个小朋友给 2 个，2 个小朋友给 4 个，再来一个小朋友是 6 个。”提出一道除法应用题，“老师有 8 支铅笔，一个小朋友分给 2 支，可以分给几个小朋友？”五岁一个月的男孩伸出 8 个手指，把每 2 个并起来，边扳手指边说，“这俩是一个小朋友的，这俩是两个小朋友的，这俩是 3 个

小朋友的，这俩是 4 个小朋友的。”言语表达虽不确切，但从他的操作过程看，思路是很清楚的。六岁多的幼儿做乘、除法应用题能正确算出结果的可达半数左右，而且需要凭借实物操作的有所减少，开始能够依靠表象进行思考。例如，在做乘法应用题时，有的幼儿能用连加法计算，如“2 个和 2 个合起来是 4 个，再 2 个，合起来是 6 个。”有些幼儿采取另外一种加法，他们的思路是，“一人给 1 个就要给 3 个，一人给 2 个就要加上 3 个，所以是 6 个。”实际上是把人数作为相同加数相加，这反映了实际分物品的一种方法。在做除法应用题时，有的幼儿能用同数连减的方法推算出来；还有的幼儿压缩了思维过程，简化了推算步骤，如说“8 支铅笔分给 3 个小朋友（以后）还剩 2 支”，从而确定一共可以分给 4 个小朋友。从幼儿的推想可以看出，他不仅把除法应用题与减法应用题联系起来，而且注意到它们之间的区别，即做除法应用题时，不是求剩余多少，而是看分尽时减去了几个 2 支，就是分给几个小朋友。但是也还有相当数量的幼儿由于缺乏实际分的经验，不理解题意，把除法计算与减法计算混同起来。例如，有些幼儿回答说，“给一个小朋友发 2 支，还剩 6 支，就是发给 6 个小朋友。”还有些幼儿回答说，“能发出 6 支铅笔。”五岁多的幼儿的回答也有类似的情况。

三 对发展幼儿计算能力的几点意见

从上面的调查研究可以看出，学龄前儿童计算能力的发展也具有一定的顺序性和阶段性。一般地说，稍迟于儿童数概念的发展。三岁以下的幼儿，对加、减计算基本上处于朦胧状态。三岁多幼儿开始进入加、减法的实物操作阶段，他们能够用实物操作（包括数手指）做一些极简易的加、减计算，但是还不能用来解决他们不熟悉的或数目稍大的计算题。四、五岁的幼儿，进入半具体半抽象的阶段。一方面逐步完善较小数目的加、减计算的实物操作，另一方面逐步扩大数的计算范围；但是他们在很大程度上仍依靠实物操作的方法来进行抽象数目的计算，只对较小数目的加、减法能够摆脱实物或手指来进行计算。六、七岁的幼儿开始进入抽象数的加、减计算阶段。这一时期幼儿依靠实物操作进行计算有所减少，一部分幼儿能够进行抽象数目的加、减计算，有些幼儿的抽象思维还达到较高的水平。四岁半以后，有些幼儿的乘、除计算能力也开始发展，但是仍限于用非乘、除的计算方法来口头解答乘、除法应用题。幼儿的这些计算能力发展的特点，不仅为学前的数学教育提供有利的科学依据，也对小学的数学启蒙教育具有很大的参考价值。

下面就如何根据幼儿的年龄特点，发展幼儿的计算能力，谈一点个人意见。

（一）幼儿的计算教学的内容和要求要适应儿童的年龄特点，不宜要求过高。学龄前儿童的教育属于预备教育的性质，计算知识和技能的教育也要在这一基本前提下根据幼儿的发展特点适当教给一些极初步的、简易的计算知识和技能，不能要求过多过高，否则不利于幼儿德、智、体、美、劳的全面发展。

从国际上看，很多国家对幼儿的计算教育要求也是比较低的。例如，在日本，幼儿在六岁上小学以前完全不教加、减计算。在罗马尼亚，幼儿进入小学前只教加 1 减 1 的计算。在俄罗斯，幼儿在学前只教一些简易的 10 以内加、减法，加法只限较大数加较小数，减法只限减数小于差的，计算方法也

只限于逐次加 1 或逐次减 1。美国学前也只教 10 以内简单的加、减法。从前面测试的结果看，我国六岁以下的幼儿，由于教学和家庭的影响，虽然能做一些加、减计算，但是大都依靠数手指，有些幼儿还不会利用手指进行计算；六岁以上的幼儿做加、减法，也还有少一半要依靠数手指。从普及的角度考虑，为了不加重幼儿的学习负担，使幼儿的身心得到健康的发展，也避免造成幼儿园与小学的过多重复，可以把幼儿园的计算内容限定在 10 以内加、减法，而且不宜要求达到像小学一年级那样熟练，只要通过实物操作初步理解加、减法的含义，能正确算出较容易的 10 以内加、减法的得数就可以了。

(二) 计算教学的顺序要适合幼儿的心理发展顺序。教幼儿计算按照什么顺序进行，过去往往带有盲目性。例如，有些家长一开始就教幼儿抽象数目的加、减计算，有些幼儿园或学前班则基本按照教小学生的顺序来教幼儿计算，这都是违反客观规律的。如前所述，幼儿的加、减计算能力的发展特点是，从实物操作过渡到半具体半抽象再过渡到抽象数目的加、减计算。因此加、减计算的教学应基本符合这一发展顺序。也要像教幼儿认数那样，适当分散教学，循序渐进，逐步扩展和提高。可以从四岁开始，先教幼儿进行实物操作，如把两堆物品合并起来（总数不超过 5），数出物品的总数；或从一堆物品（总数不超过 5）中拿走一部分，数一数还剩多少。通过操作给幼儿积累一些加减法的感性经验，初步体会“添上”“去掉”的含义就行了。对五岁的幼儿，可以先结合认数并通过实物操作教给一个数添上 1 个得到它后面的一个数，从一个数里去掉 1 个得到它前面的一个数。在此基础上出现“加”和“减”的含义以及加 1、减 1 的计算。由于把最简单的加、减计算与数数密切结合起来，便于幼儿理解和掌握。以后进一步可以教加 2、减 2 的计算方法，使幼儿学会在一个数后面接着数 2 个数（即逐次加 1），或由这个数起往前倒数 2 个数（即逐次减 1）。再往后可引导幼儿脱离实物操作来推想。这种方法虽然比较原始，但是在幼儿已有的感性经验的基础上逐步概括提高，比利用数的组成容易掌握，也有助于理解加、减法的含义；而且幼儿掌握了方法以后，即使没有学过的加、减法，也可以推想出来，从而有助于发展幼儿的初步迁移能力。此外，还要重视口头解答应用题的教学。如果上述这些内容给幼儿打好基础，就可为小学进行较系统的学习做较好的准备。

(三) 教学方法也要适应幼儿的年龄特点。幼儿的计算教学是极初步的启蒙性质的数学教学，同时培养幼儿对数的计算的兴趣，为以后上小学做些初步的准备。要达到这一目的，选用适当的教学方法就非常重要。首先要注意通过各种游戏和有趣的活动来进行计算的教学，使幼儿在游戏、玩耍当中学到极初步的计算知识，并且自始至终注意培养幼儿对计算的兴趣。其次教学时选用的方法要符合幼儿的年龄特点。例如，教四岁的幼儿计算只要进行一些实物操作就可以了，活动的时间不宜太长。就是到了大班，教学一些抽象数目的计算也不能完全离开实物操作，注意在实物操作的基础上进行适当的抽象、概括。因为整个幼儿阶段思维的特点还是以形象思维为主。此外，在游戏、操作等活动中都应注意启发幼儿的思考，调动幼儿思维的积极性、主动性，使幼儿在学到初步的计算知识的同时，思维能力也得到初步的发展。

附表

— 二—七岁儿童计算能力发展情况统计表

百分比		年龄	二岁	三岁	四岁	五岁	六—七岁	
							城市	农村
内容								
实物 操作 计算	加 法	5 以内	58.3% (只 1+1)	44%	100%	100%	100%	91.7%
		10 以内	—	8.3%	75%	75%	91.7%	91.7%
	减 法	5 以内	66.7% (只 2—1)	46%	100%	100%	100%	83.3%
		10 以内	—	12.4%	83.3%	95.8%	95.8%	75%
抽象 数目 计算	加 法	5 以内	—	37.4%	83.3%	75%	95.8%	75%
		10 以内	—	4.1%	45.8%	50%	87.4%	50%
		20 以内	—	—	20%	20%	62.6%	25%
		100 以内	—	—	—	—	50%	—
	减 法	5 以内	—	20%	66.6%	50%	91.7%	75%
		10 以内	—	4.3%	29.3%	20%	66.7%	50%
		20 以内	—	—	12.4%	20%	41.7%	25%
		100 以内	—	—	—	29.1%	—	
口 头 解 答 应 用 题	加 法	5 以内	—	16.7% (8.3%)*	91.7% (16.7%)	100% (33.3%)	100% (66.7%)	91.7% (16.7%)
		10 以内	—	—	66.7% (8.3%)	66.7% (16.7%)	91.7% (41.7%)	75% (25%)
	减 法	5 以内	—	8.3%	83.3%	100% (8.3%)	100% (41.7%)	50% (16.7%)
		10 以内	—	—	41.7% (8.3%)	50% (33.3%)	50% (25%)	33.3% (25%)

*括号中的数是正确说出算式的百分数。

二 二—七岁借手指进行计算情况统计表

情况 百分比 内容	二岁		三岁		四岁		五岁		六—七岁	
	部分或全部用 手指	部分或全部用 手指	部分或全部用 手指	不知或不会用 手指	部分或全部用 手指	不知或不会用 手指	部分或全部用 手指	不知或不会用 手指	部分或全部用 手指	不知或不会用 手指
5 以内加减	—	0	25%	66.7%	66.7%	16.7%	16.7%	—	—	—
10 以内加减	—	0	33.3%	66.7%	75%	16.7%	50%	—	—	—
20 以内加减	—	0	16.7%	75%	25%	66.7%	25%	25%	—	—

(本文原载于《课程·教材·教法》 1994 年第 11 期。)

20 以内加、减法教材改革的初步实验研究

一 研究目的

20 以内数的认识和加、减法是小学数学中最基础的内容之一；它又是学习数学的起点，因此还带有启蒙教育的性质。儿童刚入学，通过这一部分内容的学习，获得 20 以内数的比较明确的概念，初步理解加、减法的意义，能够熟练地计算 20 以内的加、减法，同时发展他们的智力，培养良好的学习习惯和对数学的兴趣，就可以为进一步学习打下较好的基础。因此，编好这部分教材，对于提高小学数学教学质量，为培养人才打好基础，具有十分重要的意义。

如何编好这部分教材，一直是教学研究工作者和教师不断探索的一个问题。古今中外，有各种各样的处理方法。现行通用教材第一册是在总结过去改革经验的基础上编写成的。采取了认数和计算结合，加法和减法穿插编排的形式，注意加、减法之间的联系，比以前的教材容易掌握。但是也存在一些缺点。主要是：1. 10 以内数的认识，分散出现，拖的时间长，落后于多数儿童认数能力的发展；在建立数的概念时对数的序数含义重视不够。2. 进位加法按照得数是 11、12、13、……的顺序编排，由于每次教学的式题得数单一，不能很好地调动儿童的学习积极性，容易造成不用思考，死记式题的得数；所学的凑十的计算方法得不到有效地运用和迁移。3. 退位减法是根据加减法的关系用加法来计算的，有些儿童初学时有些困难，在编排上不便于教师用不同的方法进行教学。近几年来有些教学研究工作者和教师对这一部分教材的编排和教法进行了不同的实验。例如，20 以内的进位加法和退位减法，按照 9 加几和相应的减法，8 加几和相应的减法，……的顺序来编排；或者把加减法分开，先教加法凑十的计算方法，随后进行大量的练习，再教减法破十的计算方法，随后进行大量的练习。这些实验克服了上述的一部分缺点，但是也还有一些值得研究的问题。现在的问题是：20 以内加、减法教材具有什么样的结构比较好，使初入学的儿童既能够顺利地掌握这部分基础知识和计算技巧，又能使他们的智力获得初步的发展？这就是本实验研究的主要目的。

二 改革要点和实验过程

(一) 本实验对教材主要做的几点改进：

1. 在准备课中出现 1 到 10 的数字，以及等号、大于号和小于号。
2. 认识 1 到 10 各数时，加强数的组成练习，增加数的大小比较，加强数的序数含义。
3. 10 以内加、减法采取如下的编排方式：认识 3 以后，出现加法的初步认识和减法的初步认识；从认识 4 开始，每次都把加法和减法结合起来（如把得数是 4 的加法和 4 减几放在一节课内）进行教学，再通过练习逐步达到计算熟练。
4. 20 以内的进位加法和退位减法采取加减穿插的编排方式：先出 9 加几，随后出十几减 9；再出 8 加几，随后出十几减 8；……以后逐步对有联系的算式加以综合整理。

5.在教学认数和计算时，加强儿童的实际操作和其他活动。

(二) 实验过程

1.本实验进行了两次。1984 年秋先在两所较好的学校的三个班中进行实验，由教学水平较高的教师任教。1985 年秋又在较好的学校的一个班中进行实验，由具有一般教学水平的教师任教。学生基本上是就近入学的。由于某些原因，实验时没有对照班，但通过其他方式进行了一些对比。

2.第一次实验时，只就改革方案中某些新课编了实验教材，其他一些课仍用现行教材，做了一些调整。第二次实验时，在总结前次经验的基础上编了全部实验教材。10 以内数的认识和加减法按照上述方案实验了两次，20 以内进位加法和退位减法只在第二次按照上述方案进行实验。

3.实验前进行了摸底测验。以 1984 年秋的一个班为例，基本情况如下：

	写数字	10 以内加法	10 以内减法	20 以内进位加法	20 以内退位减法
基本上会*	85.9 %	73.7 %	60.5%	18.4 %	13.2 %
会一半多	7.9 %	15.8 %	18.4 %	34.2 %	21.1 %
会小部分	2.6 %	7.9 %	10.5 %	42.1%	44.7 %
基本不会		2.6 %	10.5 %	5.3 %	21.1 %

* 这里不管用什么方法，用数手指的方法算出正确结果的也算在内。

4.一般每小节教学之前与实验教师备一次课。第一次实验时，由于只编一部分实验教材，未能完全按照预先计划的课时进行教学；第二次实验时，完全按照预先计划的课时进行教学。

5.对实验情况的收集和研究，主要采取以下几种方法：做听课记录，阶段测试，个别查问，对比测试，专项调查，对记录、测试结果进行分析、讨论。

三 实验结果与分析

着重分析以下几个问题。

(一) 关于提早出现等号、大于号、小于号

在现行通用教材中，等号是在开始教加法时出现的，大于号、小于号是在第二册教学求两个数相差多少的应用题时出现的。实验教材改在准备课中教比较两组物体多少时出现，以后结合数的认识和计算，做一些数的大小比较的练习，如 $7 > 6$ ， $5+3 < 9$ 等。（圈里的符号要求儿童填）

从实验情况看，开始教学大于号、小于号，多数儿童能掌握，有少部分儿童不知开口朝向较大的数。学完 10 以内加减法，绝大多数掌握得比较好。测试结果如下：

项目	做对人数比	1984年			1985年实验班
		实验班(一)	实验班(二)	实验班(三)	
新课		82.9%	—	—	80.6%
6以内加、减法后		88.9%	96.4%	93.9%	94.4%
10以内加、减法后		97.4%	95.2%	95.3%	98.6%

提早出现大于号和小于号，是近20年来小学数学教学发展趋势之一。如苏联、民主德国在一年级认1、2时都出这两个符号，英、法两国也出得比较早。从实验情况看，提早出现这两个符号是完全可能的。因为儿童已经有了比较物体的数量多少的经验，这里只是把这种比较符号化；而这两个符号形象易懂，儿童只要记住开口朝向较大的数就不难掌握。在实验中还看到出现这两个符号有以下好处：1.在以后认数时便于用来表示比较数的大小，从而有利于弄清数的概念。2.有助于理解“相等”的概念。正如赞科夫所说，只有跟“不等”进行比较，才能掌握“相等”这个概念。3.经常利用对应关系比较实物多少和数的大小，可为以后教学求两数相差多少等应用题做较好的准备。4.出现大于号和小于号以后，可以使练习形式增加变化，有助于培养儿童思维的灵活性。例如，学完10以内加减法，出了一道思考题， $3+ < 5$ ，1985年实验班填对的达91.6%。教学时有一点值得注意，最初几节课只要让学生初步认识大于号、小于号，不要求全班一下都掌握，而要在以后的反复练习中逐步掌握。

(二) 关于10以内加、减法的编排

这部分教材进行实验时，由于加强操作，把加、减法结合着教学，儿童的学习积极性高，掌握知识的质量好。实验的结果如下：

项目	百分比	1984年			1985年实验班
		实验班(一)	实验班(二)	实验班(三)	
6以内加、减	全对人数	87.5%	85.4%	87.8%	58.3%
	错题率	0.6%	2%	0.6%	3%
	达到每分钟8题	72.5%	-	-	94.4%
10以内加、减	全对人数	71%	81%	88.4%	66.7%
	错题率	0.7%	0.54%	0.41%	1.1%
	达到每分钟8题	97.4%	78.6%	76.7%	100%
	达到每分钟10题	73.7%	59.5%	55.8%	100%

1985年实验班后来参加本校一年级各班统一测验，结果正确率和速度都是最好的。

根据实验情况初步分析，实验教材的编排有以下几点好处：

1.使儿童更清楚地理解加减基本式题之间的关系，便于利用联想算出

加、减法式题的得数。现行通用教材中加、减法虽然穿插编排，但是相互联系较少，只是通过少数练习题反映它们之间的联系。实验教材从得数是4的加法和相应的减法开始，每次都把加减法对照排列，在儿童操作的基础上由用一幅图表示两个算式（如在4个白木块和2个黑木块下面出现 $4+2=6$ 和 $2+4=6$ ，在4个绿苹果和2个红苹果下面出现 $6-2=4$ 和 $6-4=2$ ），逐步过渡到用一幅图表示四个算式（如在8个白木块和1个黑木块下面出现 $8+1=9$ ， $1+8=9$ ， $9-1=8$ ， $9-8=1$ ），儿童对10以内加、减法逐渐形成明确的认知结构，计算时联系数的组成和加减法的关系，能较快地算出结果。在给一幅图要求儿童看图写出两个加法算式和两个减法算式时，1984年三个实验班除了一人不清楚外，其他都明确加减法的关系，1985年实验班则全都写出正确答案。

2. 加、减法结合在一起教，减少了单教加法时得数单一的练习，调动了儿童学习的积极性。同时，由于儿童在头脑中逐步形成加、减法的内在联系，以后学到得数是8、9、10的加法与相应的减法，他们自己就能把这种规律性的联系运用于新的问题之中，这样就初步培养了儿童的类化、迁移的能力。

3. 由于新知识的教学相对集中，加强了联系，儿童又初步有一些类化、迁移的能力，相对地缩短了讲授时间，加强了课内练习，从而也减轻了学习负担。实验这部分教材时，虽然增加了大于号、小于号，加减混合式题以及用图画表示的应用题，而教学的课时数比现行通用教材的计划课时数还稍有减少。

（三）关于20以内进位加法和退位减法的编排

1984年实验时，进位加法按照9加几、8加几、……的顺序编排，同时出现交换加数位置的式题；退位减法结合着进位加法，每次出现相应的减法的所有情况。第二次则按照前述改革要点（4）进行实验。两次实验结果如下：

百分比 项目		1984年			1985年 实验班
		实验班（一）	实验班（二）	实验班（三）	
学 后 测 试	全对人数	71.1%	59.5%	55.8%	61.8%
	错题率	0.58%	1.32%	1.32%	1.2%
期 末 测 试	每分钟达到8题	92.1%	92.9%	90.7%	97%
	每分钟达到10题	81.6%	81%	79.2%	85.3%
期 末 测 试	全对人数	81.5%	73.2%	85.7%	80%
	错题率	0.37%	0.59%	1.1%	0.69%
	每分钟达到10题	84.2%	90.2%	95.2%	100%

可以看出，根据1985年教实验班的教师的实际情况，教学成绩却接近1984年实验班的成绩，在计算速度方面还超过了1984年的成绩。这个班参加本校统一的期末考试，成绩也都优于其他两个普通班。

下面根据第二次实验情况，也联系第一次实验情况，着重分析第二次实验教材的特点。

1. 新课的内容单一，思路单一，规律突出，儿童比较容易掌握。如9加几，都先把第二个加数分成1和几，用1和9凑成10；8加几，都先把第二个加数分成2和几，用2和8凑成10；算十几减9，在熟练9加几的基础上，都想9加几等于被减数；算十几减8，在熟练8加几的基础上，都想8加几

等于被减数；……大多数儿童都能较快地学会推想方法，并达到熟练。少数儿童开始学减法有些困难，主要是在计算十几减 9、减 8 时不会用加法逆向联想算出减法的得数；也有少数儿童虽然能用加法推想，但由于加法不熟练而想错了得数；还有个别儿童在想未知的加数时与凑十的加法混淆，如算 15-9 想成 $9+(4)=15$ ，算 16-9 想成 $9+(5)=16$ ，误认为想出的数比和的个数少 1。（第一次实验也有类似情况）经过及时的辅导，一方面借助逆向联想的卡片[如 $15-9=()$ ， $9+()=15$]教会儿童推想的方法，另一方面加强相应的进位加法的练习，儿童逐步都掌握了，以后计算就比较顺利，有的后进生进步还较快。下面列举 1985 年实验班的几个儿童的进步情况：

错题率 学生	项目		全部加、减法 学后测试	期末测试（包括 10 以内加减）
	9 加几和 十几减 9	8 加几和 十几减 8		
L.L.	40%	0%	1.4%	2%
L.Q.	35%	15%	11.1%	10%
S.C.	30%	45%	0%	0%
X.L.	30%	25%	5.6%	0%
S.L.	25%	30%	0%	0%
Z.E.	15%	5%	1.4%	0%
L.X.	5%	25%	1.4%	0%
平均	25.7%	20.7%	2.99%	1.7%

从表中看出，儿童接受新知识的快慢程度是有明显差别的。有些儿童理解和掌握新知识要经历一个较长的过程。这些儿童暂时处于落后状态，但并不都是差生。只要教师明确这一点，及时地、耐心地和有针对性地给以帮助，这个暂时困难可以逐步克服，最后还能取得较好成绩。

2. 新的编排方式有助于发展儿童智力。在实验中看到，多数儿童在学 8 加几时能把已经掌握的凑十方法迁移到新的情况中去。教学时实验教师有意识地提问：计算 9 加几和计算 8 加几时都用凑十法，有什么不同的地方？很多儿童能正确地回答。这会促进儿童分析、比较能力的发展。教学退位减法时，运用加法推算减法的得数（如 15-9，儿童要想 9 加几得 15，因为 9 加 6 得 15，所以 15 减 9 等于 6）这种训练本身就是培养儿童初步推理能力的过程，而且用加算减带有逆向思维的性质，而培养逆向思维是培养思维能力的的一个重要方面。前面所举的少数儿童感到困难的也正是这一点。但是儿童通过实际操作、观察演示以及借助逆向联想的卡片练习，逐渐掌握了推想的方法，后面的学习就比较顺利。这时儿童不但计算能力明显提高，类化、迁移的能力也获得发展。

3. 新的编排便于逐步简缩思维过程，提高计算速度，最后形成熟练的计算技巧。开始教学 9 加几、8 加几……的凑十方法，只是教给儿童推想的一般步骤，儿童大都按照思考步骤来计算。经过一些练习，教师引导儿童简缩思维的中间环节。如 $9+3$ ，只要想 3 拨过 1（省略“和 9 凑成 10，3 还剩 2，合起来”）得 12； $8+5$ ，只要想 5 拨过 2，得 13。儿童掌握这个规律以后，计算速度有较明显的提高。再经过一定的练习，达到看见式题不假思索地很快说出得数。至于退位减法，开始按照 9 加几得 12，8 加几得 13 等来推想 12-9、13-8 等的计算结果。以后在掌握基本推想方法的基础上，对于减数较

大的情况，也适当启发儿童找规律，有助于简缩思维过程。如减 9 所得的差比被减数的个位数都多 1，等等。实验表明，这种简缩思维过程、探索规律的工作不能进行得太早，在儿童还没掌握基本推想方法时教这种简便的方法，容易造成混乱，欲速则不达。另外，注意加减法之间的联系仍然很重要。开始为了便于儿童掌握，只限一个加法算式和一个减法算式建立联系，如 $9+2$ 和 $11-9$ ， $8+3$ 和 $11-8$ ，……随着学习的进展，逐步建立两个加法算式和两个减法算式的联系，最后还加以综合整理。这不仅使儿童进一步明确加减法的关系，而且便于儿童运用多方面联想，促进思维过程的简缩，较好地掌握 20 以内的进位加法和退位减法。

4. 新的编排方式便于教师采用不同的推想方法。近年来有些教师由于看到部分儿童用加法逆向联想来计算 20 以内退位减法比较困难，改教“破十法”，或进行了实验。但是这样教学时需要改变现行通用教材的编排顺序。这次实验教材改变了编排方式，为教师采用不同的推想方法提供了方便。（有关“破十法”问题将在后面加以讨论。）

四 结论与讨论

（一）当前，数学教材改革的一项重要任务，就是如何使儿童容易理解和掌握数学基础知识，减轻学习负担，同时又促进儿童智力的发展。要完成这项任务，研究和处理好数学教材的结构具有十分重要的意义。正如美国心理学家布鲁纳所说的，“不论我们选教什么学科，务必使学生理解学科的基本结构。”苏联教育家斯卡特金在《现代教学论问题》一书中也强调要确定学科的结构，以适应普通教育的目的。本实验表明，在小学数学中，即使是一年级最简单的内容也存在着研究教材结构的问题。良好的教材结构便于教师教和学生学，可以促进教学质量的提高。

（二）20 以内加、减法教材的结构可以是多种多样的。但是良好的教材结构，一方面必须反映数学的基本概念和基本原理，另一方面要符合儿童的认知特点。美国 G.F. 格林认为，“应当成组地讲解基本式，而不要单个地讲，”它的好处是可以“减少要学习的各自独立的内容的数目，便于从结构上做出概括结论并教儿童如何应用它们。”多年实践和本实验证明这种看法是正确的。但是如何分批分组，要对具体内容进行具体分析。苏联心理学家赞科夫在论教科书的系统结构时，强调要注意教育功能的多方面性，不仅使儿童掌握数学知识和技巧，而且要促进他们的一般发展。本实验结果表明，10 以内加、减法把两种运算结合起来教学，20 以内进位加法和退位减法穿插编排，以后逐步加以综合整理，能使儿童较好地掌握基础知识和计算技巧，又促进他们智力的发展。

（三）本实验表明，初入学儿童学习 20 以内加、减法时，无论在已有的经验，领会的速度，把已学的知识迁移到新问题中的能力，识记的能力等方面，都存在很大差异。因此编写教材，确定要求和进行教学都要注意适应这一点，改变那种“一刀切”的教育思想和教学方法。在教学某一新知识时不能要求所有儿童当堂都掌握，要容许一些后进儿童经过必要的辅导和较长时

布鲁纳《教育过程》，文化教育出版社，1982 年版，第 31 页

G.F. 格林《小学数学》，第 134、135 页，D.C. Heath and Company 1974。

间的学习实践逐步掌握。只要教学得法，暂时后进的儿童，能够逐步达到基本的教学要求，甚至能够取得较好的成绩。

（四）本实验虽然初步取得较好结果，但是教材的结构和其他方面的安排是否普遍适合各地情况，还有待进一步实验研究。其中 20 以内退位减法，实验表明，用加法逆向联想来算，仍是比较好的一种方法。它对于使进位加法进一步熟练，深刻理解加减法的关系，发展儿童智力，都有一定的促进作用。少数儿童开始学习会有一些困难，但只要多利用操作、直观，及时给以帮助，是能够逐步掌握的。实验教材的编排也为教师采用其他方法（如“破十法”）提供了方便。关于“破十法”，由于某些原因没有进行对比实验，仅在采用这种方法的学校进行了一些调查。初步看到，采用“破十法”，儿童比较容易理解和掌握，经过练习也能达到熟练的程度；有些儿童能够简缩思维步骤（如 $13-8$ ，很快想 8 的补数 2，加 3 得 5）。但是也有很多是分步算的。特别是在计算两位数减法时（如 $61-7$ ， $72-36$ ），有些儿童要用铅笔或手指先点着被减数的十位和减数的个位，再点着减数的个位和被减数的个位，少数儿童甚至往返几次，才算出得数，因而速度很慢。另外，采用“破十法”，削弱了加减法之间的联系，不利于培养儿童通过多种联想运用旧知识解决新问题。这个问题还有待进一步研究，并进行一些追踪调查。

（本文原载于《普通教育改革》，人民教育出版社，1987 年版。）

加、减法简单应用题教学改革的初步实验研究

一 研究目的

简单应用题在小学数学教学中占有十分重要的地位。通过简单应用题的解答，不仅可以使学生了解四则运算的意义和应用，初步学会运用所学的四则运算知识解决最简单的实际问题，而且有助于发展学生的思维能力。学生较好地掌握简单应用题的解答方法，还为学习解答复合应用题打下良好基础。在简单应用题教学中，首先使学生学会解答加、减法简单应用题又具有更重要的意义。它同 20 以内加、减法一样，也带有启蒙教育的性质。儿童刚入学，计算还不熟悉，对应用题的结构全不了解，要使他们初步学会分析应用题的数量关系，运用所学的运算方法去解决实际问题，比学习计算要难得多。如何使学生学会解答加、减法简单应用题，已成为各国小学数学教学研究工作者普遍重视的一个研究课题。

对于加、减法简单应用题的教材和教法，有各种各样的意见和处理方法。解放前，强调随机教学，根本无规律可言。有些教材编入一些应用题，“通常是学了哪一种方法，就做哪一种应用题目”，“这样，儿童不必加以思考，应用计算技能以解答应用题的能力，就不容易有发展了”。解放后全国通用教材，总的来说，在确定加、减法简单应用题的范围，从易到难的编排顺序和注重分析数量关系等方面都有很大的改进，在教学中也取得一定的效果。但是也存在一些缺点。主要是：1.应用题的范围还不够明确，有些应用题通过例题加以讲解，有些则没有。2.在编排上比较分散，又缺乏彼此间的联系，不便于学生掌握。例如，求两数相差多少和求比一个数多（少）几的数的应用题相隔一个多学期。3.应用题的解题思路与加、减法运算的意义联系不紧密，不便于学生分析应用题和选定正确的运算方法。4.应用题的变化比较少，不利于发展学生思维能力。

近年来国内外对加、减法简单应用题进行了一些研究和改革实验，并提出一些看法。在应用题的范围方面，国内有人认为分为两类：一类是部分数与总数的关系的应用题（包括求和、求剩余），另一类是两数与它们的差的关系的应用题。苏联莫罗认为分为以下三类：第一类是揭示加、减运算意义的应用题，第二类是揭示两数的比较应用题，第三类是揭示加、减运算中已知数和得数间关系的应用题（求加数，被减数和减数）。美国莱雷等三位心理学家认为分为以下三类：合并的应用题（包括求和以及求一个加数），原因/变化的应用题（如：A 有 3 个苹果，B 又给他 5 个，现在 A 有多少个？或，A 有 8 个苹果，后来他给 B 3 个，现在 A 有多少个？以及反过来求 B 给 A 多少个或 A 给 B 多少个的应用题），比较的应用题。可以看出，在应用题的范围和分类上是不完全一致的。

在加、减法应用题的组织和编排顺序方面，也有不同的处理方法。有些课本把它们分别安排在一、二年级，也有不少人主张把应用题适当集中在一

见吴研因等著《小学教材及教法》下卷第 85 页，中华书局，1947 年版。

见莫罗等著《小学数学教学法》第 143 页，文化教育出版社。

见 E.De Coneand Lieven Verschaffel：Beginning First Graders Initial Representation of Arithmetic World Problems，The Journal of Mathe - matical Behavior4，1985.

年级学完，但是如何集中和如何编排有不同意见。出现过早或过于集中会增加儿童学习的困难，并且影响基本计算的熟练掌握。

此外，在如何教学分析和解答应用题方面，也有不同意见。例如，有人主张要教给学生应用题的类型名称，并且抽象概括出每一类型的公式。

根据上述情况，本实验着重研究以下几个问题：

1. 如何确定加、减法简单应用题的范围？一年级学生是否一般都能掌握？

2. 根据学生的年龄特点，如何组织和编排加、减法简单应用题更便于学生接受？

3. 在教学解答加、减法简单应用题中，如何发展他们的思维能力？

二 改革要点和实验过程

(一) 本实验对加、减法简单应用题，主要做的几点改进：

1. 应用题的范围与通用教材基本相同，只增加求减数的应用题。原来教材中求被减数的应用题比较少，适当予以加强。

2. 改进应用题的编排顺序，在通用教材的基础上进一步加以完善：(1) 准备阶段的后期适当提高抽象水平，如所求问题用“？”或括号表示出来，用图画表示的一个已知条件不画清楚数量，而注明数字。(2) 延长过渡阶段（既有图画又有文字的应用题）的教学时间。(3) 正式的文字应用题适当分组出现，并注意联系对比。(4) 每种应用题出现以后，增加提问题、填条件和自编应用题的练习，加深学生对应用题的理解。(5) 应用题与计算适当配合出现。

3. 改进应用题的教学方法。主要有以下几点：(1) 加强操作和直观演示。(2) 突出应用题的结构和数量关系的分析。(3) 紧密联系加、减法的含义。(4) 注意启发学生思考。

4. 加强对比练习和变式练习。

(二) 实验过程

1. 本实验从 1984 年秋开始在两所较好的学校的三个班中进行，由教学水平较高的教师任教。1985 年秋又在较好的学校的一个班中重复实验一学期，由具有一般教学水平的教师任教。学生基本上是就近入学的。除个别学生外，都满 6 岁半。实验时没有对照班，但通过其他方式进行了一些对比。

2. 第一次实验时，第一学期只就改动较大的地方编了部分实验教材，其他一些内容仍用现行教材。

3. 一般每小节教学之前与实验班教师备课，教学中和教学后收集实验情况，主要采取以下几种方法：做听课记录，了解学生作业，阶段测试等。对记录和测试结果与教师共同进行分析、研究。

4. 加、减法简单应用题虽然在 100 以内加、减法计算的同时进行教学，但是在以后还有巩固、提高的过程，一直要延续到二年级万以内计算阶段。另外在一年级下学期已经出现连续两问的应用题，它是加、减法简单应用题的巩固和提高的一部分，同时又是向两步应用题的过渡。为了方便，本实验报告着重研究一年级学生掌握加、减法简单应用题的过程，暂不涉及连续两问的应用题。

三 实验结果与分析

(一) 从图画应用题顺利地过渡到文字应用题

实验表明，由于进一步研究和完善了应用题的编排顺序，加强了操作和教学前的孕伏，突出应用题的结构和数量关系的分析，以及解答方法紧密联系加、减法的含义等，学生顺利地由图画应用题过渡到既有图画又有文字的应用题，再过渡到文字应用题。

一年级上学期期末应用题测验结果见下表。

比率(%) 错题情况	1984年(共7题)			1985年 实验班 (共8题)
	实验班(一)	实验班(二)	实验班(三)	
错1题(%)	23.7	17.1	28.6	11.4
错2题(%)	7.9	14.6	11.9	2.9
错3题以上(%)	2.6	7.3	2.4	-
平均正确率(%)	93.2%	89.5%	91.2%	97.9%

实验证明，一年级上学期教材中关于加、减法简单应用题的编排顺序完全符合小学生“动作 表象 概念”的认识规律。学习开始加强学生操作比单纯直观、演示更能加深学生对加、减法运算含义的理解，加强对应用题的感性认识。但是，通过操作和图画学生对应用题的认识还是感性的和比较原始的，特别是有些图画很不容易反映出哪些是已知的数量，哪些是准备求的数量，学生往往难以判断该选用哪种运算方法。长期停留在这种水平上也不便于向较高的解题水平过渡。实验教材中增加了带图解性质的图画应用题在这方面起了很好的作用。一方面，在图画中用“？”标出哪个是要求的数量，便于学生分清哪些数量是知道的，哪个数量是要求的。另一方面，图中的一个已知数量或要求的数量具体是多少，不清楚地画出来，这样稍微提高图画应用题的抽象水平，较好地孕伏应用题的结构，并促进学生思考，正确地选择算法，独立进行计算，也减小了向有图画有文字的应用题过渡的坡度。再加上延长有图画有文字的应用题的学习时间，就为向文字应用题过渡做更好的准备。1985年秋，在教学10以内加、减法之后，出了一道求一个加数的图画应用题，正确率达94.4%；而教学20以内加、减法之后，出了一道求一个加数的文字应用题，正确率达97%。这说明教学效果是很好的。

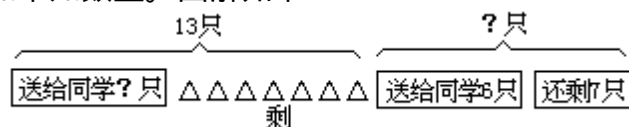
(二) 学生较好地掌握求被减数、减数的应用题以及有关两数差的比较的应用题。

这些应用题是在第二册中出现的。不仅应用题种类较多，有些还需要学生逆向思考，是比较难的。但是由于教学前增加孕伏、操作，教学时加强数量关系的分析以及联系对比，收到较好的效果。下面是部分实验结果：

正确率(%) 内容	教学后测试		阶段测验		期末测验	
	实验班(一)	实验班(二)	实验班(一)	实验班(二)	实验班(一)	实验班(二)
求被减数	94.7	85.4	89.5	97.6	-	-
求减数	86.8	92.7	100	97.6	100	97.6
求两数差	97.4	90.5	100	85.4	92.1	92.9
求比一个数多几的数	100	95.2	94.7	92.5	84.2*	71.4*
求比一个数少几的数	100	92.9	94.7	92.5	97.4	100
求比一个数多几的数 (反叙条件)	97.4	90.5	89.5	92.5	97.4	95.2
求比一个数少几的数 (反叙条件)	94.7	95.2	-	-	97.4	90.5
平均正确率(%)	95.6	91.8	94.7	93.0	94.7	91.3

*这题有一个多余条件，增加了难度。但错误大多数是选错了已知数，而不是选错了运算方法。其他各题的错误中也有一部分是选对了运算方法，但计算是错的。

实验情况表明，在教求减数和被减数的应用题时，紧密联系求剩余的应用题和加、减法运算的含义，通过图解引导学生分析清楚已知和未知的关系，就不难掌握解答的方法。因为求减数和被减数的应用题，都是求剩余的应用题的变型，不同的是已知和未知发生了变化。学生通过图解可以分清每道题里的已知数量和未知数量。图解如下：



而这两个图解所反映的数量关系，又都是前面反复出现过的，所以很容易同加、减法的含义联系起来。这样就促使学生把已学的知识迁移到新的情况中去，从而掌握了新的应用题的解答方法：从原来做的 13 只里，去掉剩下的 7 只，就是送给同学的只数；把送给同学的 6 只和剩下的 7 只合并起来，就是原来做的只数。

在实验中，对于两数（差）的较的应用题采取同样的处理方法，也取得较好的教学效果。在这一组应用题中，把求比一个数多几的数和求比一个数少几的数的应用题作为求两数相差多少的应用题的变型。先教学求两数相差多少的应用题。首先通过操作、直观使学生理解“同样多”“ \times 比 \times 多”“ \times 比 \times 少”等概念。然后结合图解引导学生先根据已知条件确定谁比谁多，再分析出大数里包含着两部分（跟小数同样多的部分和比小数多的部分），而从大数里面去掉跟小数同样多的部分就得出比小数多多少。以后教学求比一个数多（少）几的数的应用题，采取对比的方式出现，也通过操作、直观仿照上面的思路引导学生弄清谁多谁少，谁是已知的，谁是要求的，分析出数量间的关系，然后确定解答方法。在实验中看到，教学中有意识地训练学生根据已知条件判断

所比较的两个数量的多少以及它们之间的关系（例如，“苹果比梨多 5

个，从这个条件你想到什么？”），对选择运算方法起着关键性的作用。由于这三种应用题的分析思路一致，学生弄清楚数量关系，能够较快地掌握解答方法，很少发生混淆的情况。

值得注意的是，反叙条件的求比一个数多（少）几的数的应用题，过去一向认为是比较难的，但是采用上述的分析思路，学生解题的正确率没有明显的降低。这进一步说明，所教的分析思路是学生容易掌握的，便于举一反三。

（三）发展了学生的思维能力

从实验中看到，解答加、减法简单应用题过程中，由于教师的启发引导，学生积极进行思考，思维能力不断地得到发展。从开始解答用图画表示的应用题到解答各种加、减法文字应用题这一过程，也是学生由形象思维向初步的抽象思维逐步发展的过程。简单应用题，从结构和数量关系上看，虽然比较简单，但是从学生解题中的思维活动来看并不简单，也运用着各种思维的方法和形式，这样就促进了学生思维的多方面发展。现在做一简要的分析。

1. 开始教学用图画表示的应用题，通过问答如“告诉了什么？”“要我们求什么？”“怎样算？”等，学生先把应用题分解为三个组成部分，然后选择解题所需用的数目，再把它们联合起来进行运算，这样就初步发展了分析、综合的能力。以后按照教师要求说出“已知条件”和“问题”，进一步分析某些应用题中已知数量和未知数量间的关系，以及进行提问题、填条件的练习，使分析、综合的水平得到进一步提高。

2. 在分析数量关系的基础上选择运算方法的同时，培养了学生初步的推理能力。例如，解答这样的应用题：“黄花有10朵，红花比黄花多3朵。红花有多少朵？”随着教师提出一系列的问题，学生能够根据已知条件在头脑中逐步推想：“因为红花多，所以红花可以分成两部分：跟黄花同样多的10朵和比黄花多的3朵；要求红花有多少朵，就要把10朵和3朵合并起来，所以用加法算。”有些学生逐渐能独立地表述自己的推想过程。

3. 对具有同类数量关系的应用题采取相似的分析思路，而且每次都把已知数量和未知数量间的关系同加法或减法的含义联系起来，即或者归结为把已知的两个数量合并起来，或者归结为从一个已知数量里去掉一个数量。学生在理解应用题的数量关系的基础上，能把加法和减法运用到各种应用题的解答中去，初步培养了学生的迁移能力，而避免了形成死记类型硬套公式的不良习惯。

4. 通过逆向思考的应用题，初步发展了学生的逆向思维。据苏联克鲁捷茨基研究，学生从正向思维能自如地转换到逆向思维，是思维能力的一个重要组成部分。通过解答逆向思考的应用题，特别是经常出现正向和反向题目的对比，可以促进双向联想的形成，发展学生思维的灵活性。实验中看到，开始教学逆向思考的应用题，有少数学生转不过来，与正向的题目混淆。例如解答求一个加数的应用题仍用加法。但是经过一段练习，逐渐掌握题里的数量关系和分析思路，并与正确的运算方法建立起联系，能顺利地解答出来。

5. 通过所学的应用题的各种变式（包括缺少条件的、有多余条件的、改变已知条件的叙述顺序、改变问题的提法等），不仅加深学生对应用题的理解，而且初步发展学生思维的灵活性和创造性。例如，第二学期末出了这样

一道题：“小鸡比小鸭多 8 只，小鸡有 24 只，小鸭有多少只？”已知条件的叙述顺序虽然有变化，正确率仍在 90% 以上，最好的班达 97.4%。

四 结论与讨论

(一) 本实验研究表明，按照由易到难、由具体到抽象的原则组织教材，通过操作、直观突出应用题数量关系的分析，以及与加、减法的含义紧密联系，再有适当的教学方法相配合，一年级学生能够较好地掌握加、减法简单应用题的解答方法。当然，一年级学生的生活经验少，识字不多，阅读能力也很有限，所以出现的应用题的情节内容必须是小学生熟悉的，尽力避免出生字，句子也要简短易读，以免给学生造成语义上的障碍，影响对题意的理解。

(二) 本实验研究结果表明，加、减法应用题的范围是比较合适的，按照数量关系分成三组，反映了应用题之间的内在联系。现在列表如下：

<u>求两数和的应用题</u> 已	知两数和及一个加数求	已知两数和及一个加
	一个加数的应用题	数求另一个加数的应用题
求被减数的应用题	<u>求剩余的应用题</u>	求减数的应用题
求比一个数多几的数	<u>求两数相差多少的应用题</u>	求比一个数少几的数
的应用题（包括反叙		的应用题（包括反叙
条件的	）	条件的）

每组中画横线的应用题是原型题，同一横行的另外两道题则是原型题的变式题（逆向思考）。同 20 以内加、减法式题相似，分组教学这些应用题，突出了应用题间的联系和题里的数量关系，特别是经过复习和整理，在学生的头脑中对于加、减法简单应用题形成了有结构的认知系统。学生在解答应用题时比较容易地识别各组应用题的特点，分析已知数量和未知数量间的关系，并确定解答的方法。这样就克服了现行教材中分散地缺少联系地教学应用题的缺点。

应用题的分组教学与目前有些教师采用的分类型教学有很大的区别。主要有以下两点：1. 不教给学生应用题的类型名称，也不要求学生判别每种应用题是什么类型。学生虽然并不知道每种应用题叫什么，但是由于在学习中形成了有结构的认知系统，对于应用题之间的联系和区别比较清楚。这可以从学生自编应用题中明显地反映出来。2. 不教给学生有关每种应用题的解法公式，而加强审题、分析应用题的数量关系，并且与加、减法的含义紧密联系。这样就初步培养了学生灵活的解题能力，防止养成死记类型硬套公式的不良习惯。

(三) 本实验研究表明，加、减法简单应用题具有良好的教材结构，再配合适当的教学方法，对学生思维的发展可以起很大的促进作用。在培养解题能力发展思维的时候有两点值得注意：1. 必须符合一年级学生思维的特点和认知规律，才能收到好的教学效果。在实验中由于加强了操作、直观，给学生积累较多的感性经验，开始多借助表象，以后逐渐能够运用抽象思维进行分析、推理，掌握正确的解答应用题的方法。因此在应用题教学中发展思维要经历一个较长的过程，不能一蹴而就。为此，教学时要尽量分散练习，避免集中在几节课进行。2. 在解应用题时学生在理解题意、分析数量关系、选择算法等方面都显示出很大的差异。归根结底是他们的思维能力的差异所

决定的。为了适应这一特点，教学时加强对后进生的辅导，不是简单地告知某个应用题该怎样算，而是着重引导学生学会思考，鼓励他们的每一点进步。在要求上避免“一刀切”，容许后进生有更长的时间逐步理解和掌握解题方法，逐步提高思维能力。在实验中，应用题教学完了，测验成绩 241 在 60 分以下的为 2.5%；期末测验，成绩在 30 分以下的为 0%（50 分为满分）。这说明，按照上述做法，学生的解题能力和思维能力是可以逐步提高的。

（四）本实验研究虽然取得较好结果，但是在更大的范围是否普遍适合，还有待进一步实验研究。另外，在实验教材的组织、编排上也还有不足之处：1. 第二学期应用题的教学与 100 以内加、减法的教学如何配合得更好，不使难点集中，还有待进一步研究。2. 提问题、填条件、自编应用题等练习如何循序渐进，也有待改进。

（本文原载于《课程·教材·教法》1987 年第 2 期，后摘要作为 1988 年提交第十二届国际数学教育心理会议的论文。）

初步培养二年级学生解答两步应用题能力的研究

一 研究目的

在二年级初步培养学生解答两步应用题的能力，在培养学生解答应用题能力的全过程中具有十分重要的意义。学生初步掌握解答比较容易的两步应用题的方法，就为进一步学习解答稍复杂的应用题打下较好的基础。但是在教学实践中，很多教师都有这样的体验，开始教学生解答两步应用题比较困难。根据一些实验研究，认为原因是多方面的：1. 学生不能解答两步应用题与还没学会解答一步应用题有密切联系。2. 两步计算的应用题有不同的结构，因此解答的难易程度有所不同。3. 从解答一步应用题到解答两步应用题是一次质的飞跃。两步应用题，不仅已知条件的数量增加了，而且题里的数量关系以及分析推理的过程也比一步应用题复杂。但是要使二年级学生顺利地学会解答两步应用题，还有些问题需要研究。例如，学生在解答两步应用题的过程中有哪些思维特点，教学两步应用题前应当做哪些准备，如何根据两步应用题的结构和学生的思维特点组织教材，如何通过解答两步应用题发展学生的思维能力等。本实验就着重从这几方面进行一些探索。

二 实验过程和研究方法本实验主要进行以下几项工作：

（一）教学解答两步应用题以前，加强解答一步应用题的练习，特别是加强给已知条件提问题和根据问题填条件的练习，以及解答连续的两问的应用题，以便为学习解答两步应用题做较好的准备。

（二）教学两步应用题之前，进行预先测试，着重了解学生解答两步应用题时的思考和处理方法。

（三）教学中突出两步应用题的结构。根据预先测试的结果，确定开始只教学含有三个已知条件的比较容易的应用题。按照应用题的内在联系和分析推理的难易，把应用题分成三组进行教学。在教学过程中重视两步应用题与一步应用题的联系和区别。

（四）教学时着重通过少数典型的例题教给学生分析和解答的方法。开始着重从条件入手分析应用题，然后逐步教学从问话入手分析，最后练习既从条件入手分析，又从问话入手分析。在教学过程中注意了解不同程度的学生分析和解答应用题的特点。

（五）教学后进行测试，了解学生掌握解答两步应用题的情况，以及学习的迁移能力。

本实验在一所好的小学二年级进行。全班学生 50 人，平均年龄 7 岁 9 个月；教师有较多的教学经验。两步应用题的教学时间为 12 课时。

三 实验结果与分析

见赖昌贵著《小学生解答整数应用题困难原因的分析》，原载《发展心理教育心理论文选》。

见敏钦斯卡娅著《算术教学心理学》第六章，人民教育出版社。

见潘叔主编《教育心理学》，第九章，人民教育出版社。

(一) 教学两步应用题前预先测试结果表明, 76.6%的学生能解答一些两步应用题。

表 1 预先测试学生解答两步应用题的数量统计

做对 题数	8	7	6	5	4	3	2	1	0
%	6.3	11	6.3	12.8	6.3	11	14.9	8.5	23.4

注: 做对题数中, 包括只写一步算式, 但得数正确。

分析学生能做对的原因如下:

1. 部分学生有家长教过。据调查, 做对 6—8 题的学生中, 70%曾有家长教过。当然他们在全班中仍占少数。

2. 据调查, 大多数学生能顺利解答一步应用题, 特别是 80%以上的学生会给两个已知条件提问题, 或根据问题填所需的条件, 这就为分析和解答两步应用题打下较好的基础。

3. 根据测试, 90%的学生会解答连续两问的应用题, 从而为解答两步应用题准备了过渡桥梁。在这样的应用题中对于第二个问题只给一个已知条件, 另一个条件需要学生到第一道题目中去找。而这一点与两步应用题很相似, 学生在这方面有了一定的解答经验, 就会迁移到两步应用题的解答中去。

测试结果还表明, 这些两步应用题做对的百分比差异很大。

表 2 预先测试两步应用题正确解答的百分比

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
内 容	先加 后减	积加一 个数	从一个 数减去 两个数 的积	把剩下 的数平 均分成 几份	求比一 个数多 几的数, 再求它 的几倍	求比一 个数多 几的数, 再求两 数和	求等于一 个数几倍 的数, 再 求两数和	先求一个 加数, 再 求两数差
做对百分比	66	40	26	34	51	40	36	30
错算成一步 题的百分比	23	49.6	69.7	55.3	42.6	49.4	55.4	61.8

表中第 1 题是一般加减复合应用题, 题里已知条件的叙述顺序与计算顺序是一致的, 因而比较容易解答。第 3 题是减乘复合应用题, 但是题里已知条件的叙述顺序与计算顺序不一致, 因而比较难以解答。而第 8 题是只有两个已知条件的应用题, 要进行两步计算, 也是比较难的。

从测试结果还可以看出, 各题的主要错误是把两步计算的应用题看成一步计算的应用题。原因可能有两个: 1. 学生长期解答一步应用题, 在解答过程中形成了思维定势。许多学生没有注意到已知条件有了增加, 仍选两个已知条件进行计算。2. 一些基础较好的学生能够选择两个已知条件进行正确计算, 因为在他们的头脑中已经牢固地形成了有关的两个已知条件之间的联系。

而较差的学生, 则由于解答一步题时对有关的已知条件之间没有建立起牢固的联系, 以致在新的情境下遭到破坏, 于是大都随便选两个已知数和一种运算方法。

另外值得注意的一点是，含有三个已知条件的应用题（第1—5题）的解答正确率是44.2%，比含有两个已知条件的应用题（第6—8题）的解答正确率高8.9%。这说明由于后3题具有反复结构，题中的一个已知条件要两次参加计算，比较难一些。

（二）实验结果还表明，二年级上学期学生能够较好地掌握含有三个已知条件的比较容易的两步应用题的解法。

表3 二年级上学期解答已学过的两步应用题的测试结果

题号	1	2	3	4	平均正确率
内容	先加后减	从一个数里减去积	把剩余的数平均分成若干份	从一个数里减去两个数	
做对人数百分比	96	100	96	82（用两种解法） 10（用一种解法）	93.5

注：解错题的学生中超过一道题的只有2人。

表4 二年级上学期解答没学过的两步应用题的测试结果

题号	5	6	7	8	平均正确率
内容	先加后减（有多余条件）	先求比一个数多几的数，再求它的4倍	先求一个数的4倍，再求两数和	先除再乘（归一题）	
做对人数百分比	50	70	92	60	68

测试结果说明，学生学习解答两步应用题后具有较好的迁移能力。初步分析，取得较好的效果有以下几个原因：

1. 大多数学生具有解答一步应用题的能力，为学习解答两步应用题打下了较好的基础。

2. 大多数学生学会解答一些连续两问的应用题，为学习解答两步应用题做了一定的准备。

3. 开始教学两步应用题，选定的应用题的内容和范围是适当的。这些应用题是儿童生活经验中比较熟悉的，并且只限含有3个已知条件的，以便使学生区分两步应用题和一步应用题的不同点。

4. 两步应用题的编排顺序是适当的。由于把解题思路相近的应用题编成一组，不仅便于学生掌握两步应用题的分析方法，而且有助于学生举一反三。

5. 教学生解答两步应用题的关键是学会分析应用题。这也是发展学生思维的重要手段。两步应用题与一步应用题的不同点，一是已知条件没有明显地对应着，因此学生必须通过分析找出哪两个已知条件存在着对应关系，并且确定应当进行哪种运算；二是应用题的问题和已知条件存在分离现象，即为回答问题所需要一个已知条件隐藏起来，没有直接给出，学生只有经过分析才能把它找出来。而这个隐藏着的已知条件正是对另外两个已知条件所要提出的中间问题。学生开始解答两步应用题，往往不能把为回答问题所缺少的一个已知条件和对另外两个已知条件所要提出的问题联系起来。教师的作用就在于引导学生学会分析题里的已知条件和问题间的数量关系，找出缺少的已知条件，也就是找出隐蔽的中间问题。学生一旦掌握分析应用题的方法，

他们就不仅能够解答遇到过的应用题，而且能解答没有遇到过的应用题。第5—8题的测试结果就清楚地说明这一点。

(三) 实验结果还表明，学生在分析应用题方面存在明显的差异。在实验过程中曾对优、中、差三种水平的学生各4名进行了测查，结果如下：

表5 不同水平的学生分析应用题的情况

		测查项目	优等生	中等生	差等生	平均
教学开始时 测查	解答正确的人数		75 %	50 %	25 %	50 %
	分析正确的人数		50 %	25 %	0 %	25 %
教学结束时 测查	解答正确的人数		100 %	100 %	100 %	100 %
	分析正确 的人数	从条件入手	100 %	100 %	50 %	83 %
		从问话入手	100 %	50 %	0 %	50 %

从上面测试结果可以看出：

1. 教学两步应用题的初期，学生解题的正确率比较低，但是分析应用题的正确率更低。大部分中等生和所有的差等生不会分析。他们的主要错误是不能把已知数和要计算的问题正确地联系起来。例如分析这样一道应用题：“买来28米布，做了9件衣服，每件用2米，还剩多少米？”有的学生说，“知道做了9件衣服，还知道每件用2米布，就能求还剩多少米。”有些差等生还不能把有关的已知数对应起来。如有的学生说，“买来28米布，做了9件衣服，就能求还剩多少米。”

2. 在教学结束时，学生分析应用题的能力有了较大提高。优等生和中等生都能从条件入手进行分析，但是差等生还有半数不会分析。这说明加强分析应用题的训练后，大多数学生学会了根据应用题中问题的需要正确地选择有联系的已知数，并且能正确地选定运算方法。

3. 测试结果还表明，从问话入手进行分析比从条件入手进行分析要难得多。在教学结束时，差等生都没有掌握从问话入手进行分析的方法，就是中等生能掌握这种分析方法的也只有50%。从条件入手进行分析，实质上是给一对有联系的已知数提出要计算的问题；而从问话入手进行分析，是根据一个问题和一个已知条件补充另一个所需要的条件。后一种分析方法是逆向思维活动，比前一种要难得多。解两步应用题时，学生要根据问话正确地找出题里相对应的一个已知条件，然后再结合题意确定所需要的另一个条件，而这项活动比分析解答一步应用题要复杂得多，因此中等生和差等生大多感到困难。例如，分析这样一道应用题：“有30米布。剪下12米做床单，剩下的布做衣服，每件用3米布，可以做几件？”中、差生分析时，大多只说出前两个条件，如“要求做几件，必须知道有多少米布，用去多少米布”。还有的学生不结合题意，只能正确地说出一个条件，而所需的另一个条件或者说不出，或者说错，如说“剩下的布做几件衣服”。由此可以看出，开始练习分析应用题，宜于先从条件入手，逐步再练习从问话入手，而且不能一下要求所有的学生都会分析，需要一个长期的培养过程。

(四) 在实验中发现一些影响学生正确解答两步应用题的因素，主要有以下几个：

1. 应用题里的情节必须符合学生的生活经验，否则，分析数量关系就比较困难。

2. 学生的分析和解答应用题能力与他们的阅读和理解能力有密切的联

系。据调查，教学的第一周有三分之一的中、差学生不能顺利地读出应用题，读出应用题以后不能用自己的话说清题里告诉什么，问的是什么，这样就妨碍他们正确地做出解答。

3. 应用题中已知条件的叙述顺序在一定程度上影响学生正确地分析数量关系。例如，应用题：“小林比小芳大3岁，他们妈妈的年龄是小林的4倍。小芳今年5岁，妈妈有多少岁？”30%的学生做错，而其中有22%把第一步计算做成 $3 \times 4 = 12$ 或 $3 + 4 = 7$ 。这说明有些学生往往不考虑已知数之间是否有联系，而容易把相邻近的已知数联系起来进行计算。

4. 应用题中含有多余条件，给一些初学者造成很大困难。例如，这样的应用题：“学生做了8朵红花，7朵黄花。他们送给3个幼儿园，一共送了10朵，还剩多少朵？”50%的学生做错，其中有42%的学生（包括一些优等生）做三步计算。但那些优等生只是在正确的两步算式之间多写了一步，如 $15 \div 3 = 5$ 或 $10 \div 3 = 3 \dots 1$ 。这说明他们从整体上对题意是理解的，但是错误地认为每个已知条件必须用来参加计算。而中、差生的大部分只做对第一步，如： $8 + 7 = 15$ ， $15 - 3 = 12$ ， $12 - 10 = 2$ 。还有一小部分全部做错，如： $8 \times 7 = 56$ ， $56 - 3 = 53$ ， $53 - 10 = 43$ 。这说明他们受到了多余条件的严重干扰，以致原来已经形成的已知数间的联系完全受到破坏。

四 结 论

实验结果表明，在较好地掌握一步应用题的分析和解答方法的基础上，适当选定应用题的范围，合理地安排教学顺序，突出两步应用题的结构，改进教学方法，加强分析应用题的教学，用较少的时间，使二年级学生初步获得解答比较容易的应用题的能力是完全可能的。绝大多数学生能够顺利地解答学过的两步应用题，多数学生还能够解答不太难的未学过的应用题，显示出教学效果对学习的横向迁移起了一定的促进作用。

实验结果还表明，二年级学生分析两步应用题的能力与解答两步应用题的能力不是同步发展的。一般来说，学生分析两步应用题能力的发展落后于解答两步应用题能力的发展，而且在学生之间存在着明显的差异，特别是从问话入手进行分析的方法，中、差生还比较难于掌握。因此，开始教学解答两步应用题，可以先着重教学生从已知条件入手进行分析，然后逐步过渡到从问话入手进行分析。这种方法需要一个长期的训练过程，才能使多数学生掌握。

学生顺利地解答两步应用题是受多种因素制约的。应用题的情节须是学生生活经验中熟悉的才容易解答。学生阅读和理解能力的强弱对于分析和解答应用题能力的培养有重要的影响。因此教学时教师要重视培养学生阅读和审题的能力。改变应用题的已知条件的叙述顺序和应用题中出现多余的条件会增加两步应用题的难度，但是对发展学生思维的灵活性有一定的帮助。开始教学两步应用题，宜于出现基本的，逐渐可以出现变式的，其中包括有多余条件的，以利于逐步提高学生分析和解答两步应用题的能力。

（本文原载于《课程·教材·教法》1990年第12期，后摘要作为1990年提交第十四届国际数学教育心理会议的论文。）

在小学数学教学中培养学生解答分数应用题能力的研究

一 研究目的

本文所说的分数应用题主要是指由于分数乘法的意义的扩展而出现的应用题。这些分数应用题历来是小学数学教学中的一个难点，也是一个争论比较大的问题。一种看法认为，只要教算术解法，强调分类型，教结语，给解题模式就可以了；另一种看法认为，有关用除法解的分数应用题，要教方程解法，强调分析数量关系，使算术解法与方程解相辅相成。现行通用教材已在这方面做了一些改进，但还不够完善。近年来一些实验进一步表明，采用后一种教法，效果优于前一种教法。分数应用题的教学是一个比较复杂的问题，涉及如何体现小学数学教学的培养目标问题，学生学习分数应用题的心理特点问题，以及为了培养学生的解题能力，如何改革教材教法问题。为此，进行了一些改革实验对上述几个问题做了一些分析研究。

二 研究要点和实验过程

（一）实验研究的指导思想

以培养学生解答应用题的能力，促进学生思维的发展为目标，以探索学生解答分数应用题的思维特点为依据，建立合理的分数应用题的教材结构，相应地改进教学方法，使学生既便于掌握，又为中学进一步学习做较好的准备。

（二）实验研究的要点

主要探讨以下五方面改革对培养学生解答分数应用题能力的影响：

1. 分数应用题的教学范围：在现行通用教材的基础上适当加强分数乘、除法两步应用题，并在不增加负担的情况下使应用题稍有一些变化。
2. 分数应用题的教材结构：在编排时既注意与分数乘、除法计算密切配合，又注意分数应用题之间的内在联系，同时注意与已学的有关的应用题的联系。
3. 解题方法：对求一个数是另一个数的几分之几的应用题，（教学用除法计算）；对已知一个数的几分之几是多少求这个数的应用题（包括稍复杂的），采取方程解法和算术解法并重，同时加强两种解法的联系。
4. 加强基本训练：主要是加强单位“1”的判断和数量关系的分析；并加强根据分数乘、除法的意义来选定运算方法的练习。
5. 改进教学方法：重视启发引导学生分析数量关系，紧密联系分数乘、除法的意义列式解答，不教给学生应用题类型和解题公式。

（三）实验过程

本实验先在两所较好的小学五年级各一个班进行，初步探索改革的可行性。然后又在一所普通小学五年级一个班深入进行研究，在实验过程中进行了4次专项笔试，并对12名不同程度的学生进行了面试。为了便于弄清本实验对学生所产生的影响和问题，有部分内容在另一所较好的小学六年级普

《分数应用题教学研究》和《改革分数应用题教学》，《小学数学教师》1989年第3期。
实验班的教师以及普通班的教师都缺少教学分数应用题的经验。

通班 中进行了相同的测试。

三 实验结果与分析

(一) 实验结果表明, 五年级学生开始学习分数应用题还是比较难的, 需要一个较长的过程才能逐步培养起解答分数应用题的能力。下面是实验班各阶段的测试结果。

表 1 五年级实验班上学期解答分数应用题的测试情况

测试内容	一步应用题 教学后测试	乘除两步应用 题教学后测试	稍复杂的两步 应用题教学后 测试	期末综合 测试
正确率(%)	80.5	79.1	82.4	91.2

从表 1 可以看出, 每一部分应用题教学后进行测试, 列式的错误率都在 20% 上下, 教学后经过较长时间的练习, 到期末才有较大的下降。

(二) 实验表明, 影响学生正确解答分数应用题主要有以下几个因素:

1. 正确判断单位“1”。分数应用题涉及两个数量的比较问题。

在比较时就有以哪个数量为标准, 或者说把哪个数量看作单位“1”的问题。在解答整数应用题时, 也有涉及两个数量的比较问题。但是在比较两个数量差或倍数关系时, 以哪个数量为标准比较具体, 也容易理解。而在分数应用题中, 要根据一个数量是另一个数量的几分之几来确定哪个数量作标准(或单位“1”)就比较抽象, 难于理解。根据实验, 在一步的分数应用题教学后测试中, 由于判断单位“1”而做错題的约占 20% 左右。而且随着分数应用题范围的逐步扩大, 关于两个数量的比较的说法也多种多样。例如, 有时说甲是乙的几分之几, 有时说甲比乙多(或少)几分之几; 在表示一个数量是另一个数量的几分之几时, 有时用真分数, 有时

则用假分数; 此外在叙述方式上也是多种多样的。例如, 甲是乙的 $\frac{1}{5}$, 有时说甲相当于乙的 $\frac{1}{5}$, 或乙的 $\frac{1}{5}$ 相当于甲。这些都给学生理解和判断单位“1”增加了困难。下面是实验班有关判断单位“1”的测试结果。

表 2 一步应用题教学后判断单位“1”的测试情况

测试内容	给出一个条件进行判断			给出一道应用题进行判断		
	基本型	换成假分数	换叙述方式	基本型	换成假分数	换叙述方式
正确率(%)	95	49	89.2	84	68.6	79.3
平均	78.2			76.6		

从表 2 可以看出以下几点:

(1) 给出一个条件比给出一道应用题, 判断单位“1”要容易些。这是因为在一道应用题中, 有其他条件和问题的干扰。例如, 一个中等生, 凡给出一个条件的, 判断单位“1”都正确; 但给出一道应用题时, 如“商店

运来白菜200筐，相当萝卜筐数的 $\frac{4}{5}$ ，运来萝卜多少筐？”他却把白菜判断为单位“1”。在测试成绩最差的5个学生中，给出一个条件，判断正确的为80%，而给出这样一道应用题：“农场养牛头数是羊的 $\frac{7}{10}$ ，养羊300头，养牛多少头？”判断正确的只有20%。由于条件的叙述不是按正常应用题的叙述顺序，把“养羊300头”移到了后面，造成了一些干扰，使得初步形成的“ x 是 x 的几分之几”和“以 x 作单位‘1’”之间的联系遭到破坏。

(2) 改换叙述方式会降低判断的正确率。因为基本型的叙述方式固定，有规律可循，学生容易掌握；改变叙述方式后，往往比较难理解，从而增加了判断的难度。例如，“在一批图书中，故事书占 $\frac{4}{5}$ 。”有些学生不清楚故事书占谁的 $\frac{4}{5}$ ，机械地按照基本型来判断，错误地把 $\frac{4}{5}$ 前边的数量（故事书）判断为单位“1”。

(3) 用假分数表示两个数量的关系时，判断的正确率最低。例如，“全班人数相当男生人数的 $\frac{7}{4}$ ”，判断正确的只有49%。在询问一些学生的想法时，大都回答说，“因为全班人数多。”显然他们错误地认为数量多的就要看作单位“1”。

此外，在了解学生判断的根据时，存在着明显的差异。在抽问实验班的学生时，对于“小红身高是小华的 $\frac{9}{10}$ ”，83%的学生能联系分数的意义来分析，如说“要把小华的身高平均分成10份，取这样的9份是小红的，所以要把小华看作单位‘1’”。但是在另外一个班里调查，有些学生能回答哪个数量是单位“1”，却不会分析。还有些学生死记一些“规律”，如说“是”“等于”的后边是单位“1”。当遇到“杨树的棵数的 $\frac{3}{4}$ 等于柳树的棵数”这样的条件时，出现较多的判断错误。很明显，这对于培养学生解答分数应用题的能力起了极大的阻碍作用。

2. 正确分析题里的数量关系。解答分数应用题同解答整数应用题一样，能否正确地分析数量关系，对于能否正确地解答出来具有十分重要的影响。分数应用题的数量关系比整数应用题的要复杂。在实验中发现有以下几方面影响着分析数量关系的正确性。

(1) 根据所给的条件，能否变换一种说法来表示两个数量间的关系。这一点不仅反映学生对分数应用题中数量关系的理解的程度，也是解答稍复杂的分数应用题的必要基础。为了了解学生在这方面的掌握情况，曾进行了专项测试，结果如下表。

表3 变换说法表示两个数量间关系的测试情况

题号	1	2	3	4	平均
正确率(%)	71	79	58	45	63.3
班别					
五年级实验班	71	79	58	45	63.3
六年级普通班	66	91.4	29	34	55.1

注：五年级实验班是在教学两步应用题后测试的，六年级普通班是在教学两步应用题后又教学其他内容后测试的。

表3的前两题属于基本型的横向变换。例如，由“梨的个数比桃多 $\frac{3}{4}$ ”推出“梨的个数是桃的()”，或反过来推理。这种变换的特点是，前后两个判断是等价的，而且都以同一个数量作标准（或单位“1”），因此学生比较容易理解，解答的正确率较高。但是也有不少学生答错，如上题填了“ $\frac{1}{4}$ ”。他们错误地把梨看作单位“1”，仿照整数应用题中的数量关系来推想，从1里减去 $\frac{3}{4}$ ，得 $\frac{1}{4}$ 。这表明他们对梨的个数比桃多哪个数量的 $\frac{3}{4}$ ，还没有真正理解。

后两题属于基本型的横向和逆向的复合变换。例如，第3题：“牛的头数比羊少 $\frac{1}{5}$ ，羊的头数比牛多()。”这种变换难在不能从第一个判断直接推出第二个判断，而需要经过中间的变换。即先推出牛的头数是羊的 $\frac{4}{5}$ （横向变换），再推出羊的头数是牛的 $\frac{5}{4}$ （逆向变换），再推出羊的头数比牛多 $\frac{1}{4}$ 。从测试结果看出，实验班的正确率较低，而普通班的正确率更低。这与教材中缺少这方面的练习也有关系。主要错误有以下几种：填了“ $\frac{1}{5}$ ”。这样的错误，实验班有5.3%，普通班有25.7%。这些学生把整数中比较两个数量的差（如甲比乙少3，反过来乙比甲多3）错误地类推到分数中来。

填了“ $\frac{4}{5}$ ”。这样的错误，实验班达13.2%，普通班达37.1%。这些学生知道一个数量比另一个数量少几分之几，反推时不能按照整数的方法直接推出，但是错把第一步推出的“牛的头数是羊的 $\frac{4}{5}$ ”当作“羊的头数比牛少 $\frac{4}{5}$ 。”填了“ $\frac{5}{4}$ ”。这样的错误，实验班中占10.5%，普通班中占2.9%。

这些学生从原来的判断先推出牛的头数是羊的 $\frac{4}{5}$ 。又推出羊的头数是牛的 $\frac{5}{4}$ ，却误认为就是羊的头数比牛多 $\frac{5}{4}$ 。在测试后，实验班又进行一段练习，再抽查上、中、差生各2人，仍有 $\frac{1}{3}$ 不能正确回答，须经画图、提示，才能逐步

推算出来。

(2) 根据所给的条件能否写出两个数量间的关系式。例如,“已知苹果的个数,桔子的个数比苹果多 $\frac{1}{6}$,写出:___=桔子的个数。”这种测试题,也可以反映学生对分数应用题中数量关系的理解程度,同时也是解答分数应用题的必要基础。这项测试也是在一个五年级实验班和一个六年级普通班中进行的,测试前两个班都没有做过这样的练习。结果实验班的正确率为76%,普通班为61.4%。由于实验班比较重视结合题意分析数量关系,正确率较高。在错误的答案中,有些是两个班共同

出现的。如前面所说的题目,错写成“苹果的个数 \times 桔子比苹果多的 $\frac{1}{6}$ =桔子的个数”,或“苹果 \times (苹果 $+\frac{1}{6}$)=桔子的个数”。也有些是普通班所特有的。例如在虚线上填“ $1+\frac{1}{6}$ ”或“谁的量 \times 谁的率”或“单位1 \times (单位1+多的率)”等。这表明,普通班有些学生不会用所给的具体条件来表达数量间的关系,而是用统一的模式来套。他们采用这种方法也能解答一些分数应用题,但是一旦应用题的条件和叙述有了变化,他们就分析不清楚数量间的关系,导致解答的错误。

(3) 两步计算的分数应用题,在分析数量关系时顺思考和逆思考的难易程度有不同,下面是实验班的一些两步分数应用题的测试结果。

表4 两步的分数应用题教学后测试情况

应用题内容	顺思考		逆思考			
	$N \times \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$	$N + N \times \frac{a}{b}$	$N \div \frac{c}{d} \div \frac{a}{b}$	$N \times \frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$	$N \div (1 - \frac{a}{b})$	$N \div (1 + \frac{a}{b})$
正确率(%)	94.6	92	81.1	73	82	76.4

注:逆思考的分数应用题的正确率都是按算术解法统计的。为了简便,每道题列式用字母表示。

从表4可以看出,分析数量关系时需要顺思考(即解答时用乘法计算)的应用题,比较容易;而分析数量关系需要逆思考(即解答时用除法计算)的应用题,比较困难。容易出错的原因可能有以下几点:在逆思考时,需要判断两次单位“1”的,比较难。例如,“幼儿园大班人数是中班的 $\frac{4}{3}$,中班人数是小班的 $\frac{2}{3}$,大班有30人,小班有多少人?”学生往往分不清根据前两个条件各该判断哪个数量是单位“1”,已知大班的30人与单位“1”有什么样的关系,结果出现计算错误。有的学生算 $30 \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{3}$,有的学生算 $30 \times \frac{4}{3} \div \frac{2}{3}$,还有不会列式的。在同一道应用题中,既有顺思考,又有逆思考时,容易发生混淆。例如,“学校买来故事书60本,相当连环画本数的

$\frac{4}{5}$ ，科技书的本数等于连环画的 $\frac{3}{5}$ 。买来科技书多少本？”学生分别根据一个条件判断单位“1”不是很困难，但是由于在前半部分单位“1”是未知的，而在后半部分单位“1”是已知的，容易造成混淆，增加了判断单位“1”和确定算法的复杂性。学生解答时，有的第一步算错，有的第二步算错，还有的两步都算错。有些需要逆思考的分数应用题，容易受整数应用题中数量关系的干扰。例如，“黑兔有28只，比白兔的只数少 $\frac{3}{7}$ 。白兔有多少只？”

有的学生受整数应用题思维定势的影响，错误地认为黑兔比白兔少 $\frac{3}{7}$ ，反过来就是白兔比黑兔多 $\frac{3}{7}$ ，因此先用乘法求黑兔的 $\frac{3}{7}$ 是12只，再加上28只，求得白兔是40只。显然，这时有些学生还没有养成先判断单位“1”再分析题里的数量关系的习惯。在测试之后经过一段训练，分析数量关系的正确率有了提高。

3. 正确选择运算方法。一般来说，解答分数应用题，如果能正确地判断单位“1”和分析题里的数量关系，选择运算方法就不容易出错。但是学生在开始学习解分数应用题时，往往出现彼此分离的现象。下面分别进行一些分析研究。

(1) 判断单位“1”与选择运算方法的关系。下面以一步应用题为例。

表5 解一步分数应用题时判断单位“1”与选择运算方法的错误率的比较

	乘法应用题	除法应用题1	除法应用题2	平均
判断单位“1”错(%)	18.9	13.5	27	19.8
运算方法错(%)	18.9	24.3	18.9	20.7
判断错，算法错(%)	16.2	13.5	13.5	14.4
判断对，算法错(%)	2.7	10.8	5.4	6.3
判断错，算法对(%)	2.7	0	13.5	5.4

从表5看出。判断单位“1”的错误率与选择运算方法的错误率，平均值比较接近，没有大的差异；解乘法应用题的错误率，两者基本一致；但是解除法应用题，两者有较大的差异。这说明，一方面，在解一步分数应用题时，正确选择运算方法与正确判断单位“1”有密切联系；另一方面，在解某些应用题时，两者存在着分离现象。产生这种现象的原因，可以从以下两方面分析：

判断单位“1”的正确率高于选择运算方法的正确率，可能是学生不知怎样根据判断的结果来选择算法和列式。由于初学，学生在这两者之间还没有建立起正确的联系。例如，“商店运来白菜200筐，相当萝卜筐数的 $\frac{4}{5}$ 。运来萝卜多少筐？”多数错误是列式时用了乘法，但其中有部分学生判断单位“1”是正确的。也有的学生知道用除法，列出的算式却是 $\frac{4}{5} \div 200$ 。

判断单位“1”的正确率低于选择运算方法的正确率，往往是由于题

里有关两个数量的关系的叙述比较难于理解。例如，“玩具厂男工人数的 $\frac{7}{6}$ 等于女工人数。女工有240人，男工有多少人？”有些学生根据 $\frac{7}{6}$ 这个分数误认为女工人数多，就是单位“1”。但是在选择运算方法时，他们却撇开了刚才的判断，把两个已知条件联系起来，分析出男工人数的 $\frac{7}{6}$ 等于420人，从而确定求男工人数要用除法解答。据了解，出现这样的错误大都是中上等学生。

(2) 分析数量关系与选择运算方法的关系。这在解答两步的分数应用题时看得比较明显。下面是实验班的测试情况。

表6 解两步分数应用题时分析数量关系与选择运算方法的正确率的比较

分数 人数(%) 项目	分数							合计	正确率
	6	5	4	3	2	1	0		
运算方法(a)	56.8	5.4	24.3	5.4	8.1	—	—	100	83.3%
数量关系(b)	21.6	29.7	29.7	5.4	8.1	5.4	—	100	72.5%
a = b	21.6	2.7	5.4	—	—	—	—	29.7	—
a > b	35.1	2.7	10.8	—	—	—	—	48.6	—
a < b	—	—	8.1	5.4	8.1	—	—	21.6	—

注：表中第一行为两步分数应用题选择运算方法的得分情况，测试6道题、每题按1分计算。表中第二行为分析数量关系的得分情况，也测试6道题，每题也按1分计算。表中第三、四、五行是分别统计得每种分数的学生选择运算方法与分析数量关系的正确率的比较。

从表6可以看出，总的来说，分析数量关系的正确率低于选择运算方法的正确率，但是差异不是很大，这说明多数学生在教学后对一、两步分数应用题的数量关系是比较清楚的。但是也要看到，正确选择运算方法和正确分析数量关系不是完全同步发展的，这与解答整数应用题时有相似之处，因此应该说属正常现象。

从后三行的统计可以更清楚地看出：选择运算方法与分析数量关系的正确率相一致(a=b)的学生只占全班的29.7%，还是少数；而前者高于后者(a>b)的学生占48.6%，接近一半。他们大多是中上等学生，基本上掌握了两步分数应用题的解答方法，但在分析数量关系时还不是完全清楚。在抽样面试时就遇到这种情况。例如，前面

举的求白兔有多少只的题目，一个中等生能正确解答，但当问到“ $1-\frac{3}{7}$ ”表示什么时，他却说“是黑兔比白兔多的。”另外，还有21.6%的学生，选择运算方法的正确率低于分析数量关系的正确率(a<b)。从表中看到他们都是中下生。这可能是因为在分析数量关系的题目比较单纯，比较容易做对；而解答一道两步应用题，还会受其他因素的影响。

下面对这个问题进行分析研究。

4. 影响正确解答分数应用题的其他因素。

在实验中发现有以下几点：

(1) 应用题的情节是学生熟悉的就容易解答，如果离学生生活较远的就比较难解答。例如，“农场收玉米300吨，超过原计划的 $\frac{1}{4}$ 。原计划产多少吨？”由于原计划与实际收的数量关系离学生生活较远，教学后测试，错误率较高，为23.6%。有些学生在分析数量关系时特别困难，甚至说不清楚有关系的两个数量的术语。当问一个中等生，“ $1+\frac{1}{4}$ ”表示什么，他回答说“是超过原计划的几分之几”；还有一个中上等生说“原计划占收玉米的几分之几”。

(2) 有联贯地叙述应用题的条件，比较容易分析和解答；如果有联系的条件相离较远，分析和解答起来就比较困难。例如，“商店运来桔子的筐数是苹果的 $\frac{3}{5}$ ，运来梨的筐数是桔子的 $\frac{1}{2}$ 。运来梨30筐，运来苹果多少筐？”全班错题率为18.9%。而另外一道解法完全相同的应用题，有联系的条件相离较远，学生分析数量关系时需要重新排列它们的顺序，结果错题率为32.4%。

(3) 有多余条件的应用题容易做错。例如，“学校种树的总棵数中，柳树占 $\frac{2}{9}$ ，而杨树的棵数的 $\frac{3}{4}$ 等于柳树的棵数。种柳树18棵，种树的总棵数是多少？”这实际上是一道一步应用题。但由于第二个条件是多余的，致使很多学生误认为是必要条件，按两步来计算，结果错题率高达70%。很多学生把相靠近的两个数据 $\frac{3}{4}$ 和18联系起来，误认为总棵数中只包括柳树和杨树，因此求出杨树的棵数后，再加上柳树的棵数，得到种树的总棵数。还有些学生把这道题误认为是用连乘或连除来计算的应用题。

(4) 已知条件较少，解答时需要重复使用的，比较难于分析和解答。这同具有反复结构的整数应用题，颇有相似之处。例如，“一个工厂去年生产棉布6000米，超过原计划的 $\frac{1}{5}$ 。实际比原计划多生产多少米？”这是一道三步应用题，在一个班中测试，错误率高达42.8%。有的学生误认为是两步题，列式为 $6000-6000 \times \frac{1}{5}$ ；还有的学生误认为是一步题，列式为 $6000 \times \frac{1}{5}$ 。当然从根本上说，还是判断单位“1”和分析数量关系的错误。

上述一些因素虽然不是影响解分数应用题的主要因素，但是它们与影响解题的主要因素有密切联系，有时还可能对判断单位“1”和分析应用题的数量关系产生严重的干扰作用，从而导致错误地选择运算方法和列式，因此在教学中也是不容忽视的。

(三) 实验表明，建立合理的分数应用题的教材结构，对于培养学生解答分数应用题的能力具有重要的作用。在建立教材结构时有以下几点值得注意。

1. 分数应用题同整数应用题一样，一步计算的应用题是基础，两步及两步以上的应用题都是由一步应用题扩展而成的，因此必须切实打好一步应用

题的基础。在教学一步应用题时，关键是加强判断单位“1”和分析数量关系的数学，加强解法与运算意义的联系，引导学生在分析数量关系的基础上联系运算的意义正确地选择运算方法，从而使学生摆脱传统地机械地套结语、搬公式的不良习惯。实验表明，这一点取得了较好的效果（见表1）。

2.加强乘、除法两步应用题，对于巩固所学的一步应用题，进一步学习稍复杂的两步应用题都起着重要的作用。因为连乘、连除以及乘除复合的两步应用题，它们的共同特点是分析和解答时需要两次判断哪个数量是单位“1”，这对于培养学生判断单位“1”和分析数量关系的能力有很大帮助。从教学后的测试结果看，解答的正确率稍低于一步应用题（见表1），说明这些应用题并不是很难掌握的。而且开始学习这些两步应用题，由于数量关系稍复杂一些，解答的正确率稍低一些，也属正常现象。

3.加强分数应用题之间的内在联系，对于学生形成有关分数应用题的认知结构，培养学生分析和解答分数应用题的能力起着十分重要的作用。从实验的结果来看，主要应加强以下几方面的联系：

（1）加强一步的分数应用题之间的内在联系。通过典型的例子，可以使学生理解到，随着分数乘法意义的扩展，相应地出现三种一步计算的分数应用题。原型题是求一个数量的几分之几是多少（与分数乘法的意义直接联系），而求一个数量是另一个数量的几分之几以及已知一个数量的几分之几是多少求这个数量（都用除法），是原型题的变型（逆思考的）。通过联系、比较，学生理解这三种应用题属于同一个数量关系，只是已知和未知的不同，从而解答方法也不同。

（2）加强一步的分数应用题与一步的整数应用题之间的联系。通过典型的例子，可以使学生明确地理解：求一个数量的几分之几是多少的应用题是求一个数量的几倍是多少的应用题的发展，它们的算法相同；求一个数量是另一个数量的几分之几的应用题与求一个数量是另一个数量的几倍的应用题在算法上也相同，只是作为标准的数量（即单位“1”）正好相反；而已知一个数量的几分之几是多少求这个数量的应用题与已知一个数量的几倍是多少求这个数量的应用题，也是算法相同，而且都是求作为标准的数量（即单位“1”）是多少。由于加强了整数应用题与分数应用题的联系，在学生的头脑中形成了完整的认知结构，从而利用联想比较容易地掌握分数应用题的解答方法。

（3）加强稍复杂的两步分数应用题与一步的分数应用题之间的联系。这要从两方面来做。一是开始教学两步应用题时从与它有联系的一步应用题引入；二是在教学两步应用题之后，再进行对比练习。这样有助于学生理解两步应用题是由一步应用题扩展而成的，不同的在于两个数量间的关系是以

间接的形式给出的。如前面所举的例子中“黑兔的只数比白兔少 $\frac{3}{7}$ ”代替了“黑兔的只数是白兔的 $\frac{4}{7}$ ”，通过分析数量关系使学生弄清楚，把间接叙述的条件转化为直接叙述的条件，就容易找到两步应用题的解答方法。

（4）加强稍复杂的两步分数应用题之间的内在联系。通过典型的例子进行联系和比较异同，使学生弄清它们的已知条件和问题不尽相同，但是具有共同的解题思路。解答时既要按照共同的思路去分析数量关系，又要根据每种应用题已知和未知的不同来确定解答的步骤和选择运算方法。实验表明，

通过联系对比，学生不仅提高了解稍复杂的两步分数应用题的正确率（见表1），而且提高了分析、推理能力。

(5) 安排少量的比较容易分析数量关系的两步以上的分数应用题，有利于培养学生灵活的解题能力。由于这些应用题都是在已学的应用题的基础上增加一个条件，在一定程度上起着复习已学的应用题和综合运用所学知识解决实际问题的作用。但是实验表明，必须严格限制应用题的范围和难度，否则会给学生加重学习负担。

(6) 在分数除法的最后教学比的概念，并在分数应用题中增加比的应用，有助于加深学生对分数应用题中数量关系的理解，培养学生灵活地解答分数应用题的能力。例如，在两步应用题教学后测试中出现了这样一道题：“五年级男生和女生人数的比是7:5，男生有21人，女生比男生少多少人？”解答的正确率为92.2%，其中用分数计算的为84.2%，而且有5种不同解法，显示了大多数学生建立起比与分数两个概念间的联系，并且在解题中能够灵活运用。

(四) 实验表明，在教学一些需用除法解答的分数应用题时，采取算术解法和方程解法并重，并且加强两种解法的内在联系，收到较好的效果。

1. 在实验中看到，由于加强算术解法与方程解法的联系，学生较好地理解当单位“1”是未知的，算术解法为什么用除法计算，并且善于联系方程解法推想出算术解法。

表7 解分数除法应用题时选用算术解法和方程解法的情况

解法 百分比 内容		先算术解	先方程解	算术解	算术解	方程解	未做
		后方程解	后算术解	(两种)	(只一种)	(两种)	
一步应用题 (2道) 实验班		60.9	13.5	0	23	0	2.7
稍复杂的 两步 应用题 (2道)	实验班	23.7	64.4	10.5	0	1.3	0
	普通班	81.4	4.3	8.6	5.7	0	0

解一步的分数应用题和解稍复杂的两步分数应用题是分别测试的，每次都要求能用两种解法的用两种解法。从表7看出，实验班的学生在解一步分数应用题时，由于比较容易，多数学生(60.9%)先写算术解法，后写方程解法。但是在解两步应用题时，则多数学生(64.4%)先写方程解法，后写算术解法。这一方面是因为方程解法把逆思考变成顺思考，比较容易推想，正如一个中等生回答的，“难的想不出来就用方程”；另一方面是因为学生在头脑中对算术解法与方程解法建立起联系，想出方程解法后，就容易推想出算术解法。而普通班虽然也教了两种解法，但是它们的联系不紧密，而且强调用算术解法，测试结果正好相反，大多数学生(81.4%)先写算术解法，后写方程解法，而且不会用方程解的比率超过了实验班。这说明教材采取不同的处理方法，教学时采取不同的训练，对学生解题思路的影响也大不相同。特别值得注意的是，加强了方程解法的教学，还为中学学习一元一次方程打下较好的基础，从而加强了中小学的衔接。

2. 加强方程解法的教学，减少了分数应用题的难度，提高了解答分数应用题的正确率。

表 8 解分数应用题采用两种解法的正确率的比较

	一步应用题教学后				两步应用题教学后				较容易的三步	期末		
	1		2		1		2		应用题教学后			
	方程解	算术解	方程解	算术解	方程解	算术解	方程解	算术解	方程解	算术解	方程解	算术解
实验班	61.2	75.7	64.9	81.1	86.8	81.6	78.9	73.7	91.7	91.7	94.6	94.6
普通班	—	—	—	—	74.3	85.7	72.4	72.4	88.2	88.2	—	—

从表 8 看出，实验班开始做一步应用题，用方程解法的正确率低于算术解法。因为开始教学方程解法，学生看不到方程解法的优越性。另外还有些学生用算术解法已成习惯，或没有掌握方程解法，如上面测试的两题未列方程的分别为 18.9%和 29.7%。

以后加强了这方面的训练有所好转。教学两步应用题，虽然数量关系比一步应用题复杂，但是学生掌握方程解法的思路比较容易，两道题的测试结果都是方程解法的正确率高于算术解法。在做较容易的三步应用题时，两种解法的正确率趋于平衡，而且正确率都有较大的提高。另外，普通班由于强调算术解法，在两三步应用题的测试中，除第 1 题的算术解法的正确率高于实验班外，其他各项的正确率都低于实验班，这也可以说明加强方程解法对于提高解题的正确率起了一定的作用。

3. 加强方程解法的教学，还有助于促进知识的迁移，培养学生灵活的解题能力。在教学少量的较容易的三步应用题之后，进行了一次测试，其中有 3 道与解过的应用题相近，另有 3 道是学生没有遇到过的。测试结果如下。

表 9 灵活解分数应用题能力的测试情况

项目	题号	百分比						平均
		1	2	3	4	5	6	
实验班	正确率	83.3	72.2	91.7	94.4	83.3	44.4	78.2
	用方程解的人数(%)	41.7 (0)**	2.8 (2.8)	100* (8.3)	0 (0)	58.3 (5.6)	58.3 (25)	—
	用算术解的人数(%)	58.3 (16.7)	97.2 (25)	100* (8.3)	100 (5.6)	41.7 (11.1)	41.7 (30.6)	—
普通班	正确率	73.6	70.6	88.2	82.4	70.6	26.5	68.7
	用方程解的人数(%)	0 (—)	0 (—)	100* (11.8)	0 (—)	0 (—)	11.8 (5.9)	—
	用算术解的人数(%)	100 (26.4)	100 (29.4)	100* (11.8)	100 (17.6)	100 (29.4)	88.2 (67.6)	—

*第 3 题要求写出方程解法和算术解法两种。

** () 里面的都是解错的人数百分比。

从表 9 看出，无论是每题正确率或是平均正确率，实验班都高于普通班，这说明实验班的灵活解题能力和迁移能力优于普通班。重要原因在于实验班学生能够根据题目具体情况灵活地选择解答方法。例如第 1、5 两题，实验班

有相当多的学生选用方程解法，而且错误率较低；而普通班全用算术解法，而且错误率较高。再看第 2、4 两题，实验班学生能够根据题目的特点选用算术解法（第 2 题只个别学生选用方程解法），普通班全用算术解法，但是实验班的正确率也高于普通班。至于第 6 题，由于比较难，两个班都有学生选用不同解法，但实验班选用方程解法的大大高于普通班，而且用方程解法的正确率（33.3%）已经超过普通班的全班正确率；普通班 88.2% 的学生用算术解法，而正确率却只有 20.6%。这也说明，实验班在一定程度上得益于较好的掌握方程解法，并能灵活运用。另外第 3 题要求写出两种解法，两个班的正确率差异不大。但是两个班在解题思路还是有差别的。据统计，实验班有 63.9% 的学生先用方程解，而普通班只有 14.7% 的学生先用方程解。这也反映实验班多数学生善于由方程解法推想出算术解法，而普通班多数学生是从算术解法推想出方程解法。

（五）学生解分数应用题的过程存在着一定差异。

从上面的实验结果已经看到，从整体上说，分数应用题的教学效果是比较好的。但是在实验中也看到，学生在学习解答分数应用题的过程中存在一定差异。

1. 在判断单位“1”和分析数量关系上自始至终存在着差异。这在前面的测试结果中已经有所反映。下面再抽出实验班上、中、差各 4 名学生，对他们的期末测试结果进行一些分析研究。

从表 10 看出，解答两步应用题，上、中、差生的差别不是很大；但是解答较容易的三步应用题，差生的正确率很低；而判断单位“1”，中、差生都较差。例如，“全校学生人数相当于男生人数的 $\frac{11}{5}$ ”，一半差生认为应把全校人数看作单位“1”。尽管经过较长时间的练习，题目稍有变化，他们还会受非本质特征的干扰。就连一部分中等生也存在着一种思维定势，认为全校人数总是要看做单位“1”。这不仅反映一些学生的概念不清，也反映他们的思维灵活性较差。在分析数量关系方面，如“甲数是乙数的 1.5 倍，

表 10 上、中、差生（12 名）期末有关分数应用题的测试结果

内容 正确率(%) 生别	判断	数量关系	两步应用	三步应用	四项平均
	(1 道)	(4 道)	题(5 道)	题(1 道) 两种解法	
上等生	100	93.8	93.8	100	97.5
中等生	50	84.4	80	100	80.7
差等生	50	53.1	80	37.5	63.6

求乙数是甲数的（），”75% 的差生不清楚，填 $1\frac{1}{3}$ 或 0.5。由于差生判断单位“1”和分析数量关系上有缺欠，势必妨碍他们灵活地解答稍有变化的应用题。

2. 在灵活解答分数应用题方面有较大差异。下面是上、中、差各 4 名学生灵活解分数应用题的测试结果。

表 11 上、中、差生（12 名）灵活解分数应用题的测试情况

内容 正确率(%) 生别	1	2	3	4	5	6	平均
上等生	100	75	100	100	100	100	97.6 %
中等生	100	25	87.5	100	50	25	64.6 %
差等生	25	25	67.5	50	75	0	40.4 %

从表 11 看出，上、中、差生在灵活解分数应用题方面的差异比表 10 中掌握分数应用题的分析和解答方法方面的差异更大一些。

(1) 差生对于具有明显的固定模式的题基本能够解答，但是一有变化，往往感到困难。例如第 5 题，虽然是三步应用题，但原有的模式比较明显，只是问题稍有变化，75% 的差生能够解答。而第 1 题也是由已学的两步应用题改变问题而成的。据统计，原来这样的两步题，75% 的差生也能解答；但是改变问题后原有的模式不明显，只有 25% 的差生能够解答。

(2) 中、差生灵活解题能力较差反映在审题和分析数量关系的能力比较差。例如第 2 题，“李村种白菜 $6\frac{1}{2}$ 公顷，种的萝卜比白菜少 $\frac{1}{3}$ 公顷。这两种菜地共占全村菜地的 $\frac{5}{6}$ 。全村菜地有多少公顷？”这题本来不难，但是中、差生解答正确率很低，主要错在后两个条件没有分清。有的看成是“少 $\frac{1}{3}$ ”，有的看成“萝卜就是 $\frac{1}{3}$ 公顷”，还有的看成“萝卜占全村菜地的 $\frac{5}{6}$ ”，等等。这反映出中、差学生收集和加工信息的能力比较差。

(3) 中、差生迁移能力和综合运用知识的能力比较差。例如第 6 题，表面是一道相遇的行程问题，但是实际上是一道稍复杂的分数应用题。学生需要既熟悉两个物体相向运动的数量关系，又要熟悉分数应用题的数量关系，善于把行程问题转化为分数应用题。测试结果表明，上等生都能做到这一点，中等生有少部分能做到，而差生都做不到。

3. 在解题过程中分析推理存在较大差异。根据对 12 名学生面试情况，发现大致有以下特点：

上等生：大多能正确分析题里的数量关系，连贯地说明解答步骤，并对选择的运算方法说明理由。

中等生：多数对一些比较容易的题目能正确分析数量关系，对一些较难的题目则说不清楚。少数能连贯地说明解答步骤，多数只能解释每一步求的是什么；有时尽管解答正确，但解释不清楚。如前面举的求原计划产玉米多少吨的题目，有的中等生说不清楚“ $1 + \frac{1}{4}$ ”表示什么。

差等生：即使是做对的题目，约有半数不能正确分析数量关系，大多数不能连贯地说明解答步骤，解释每一步求的是什么也常出错误。例如，“一批图书有 60 本，借出一些，还剩 $\frac{3}{5}$ ，借出多少本？”一个差生说，“因为借出一些，还剩 $\frac{3}{5}$ ，减去 $\frac{3}{5}$ 就等于借出的。”进一步提问：“这是借出的本数吗？”答：“不是，是借出的量。”

从上面的分析更清楚地看出，学习分数应用题时，一部分中等生和全部差生在分析推理与正确解答这两方面不是同步发展的，这同低年级学生解答整数的两步应用题有相似之处。这一方面在一定程度上反映了学生学习解答应用题的客观规律，另一方面也表明在教学中对培养中、差生分析应用题的能力还有待加强。

四 结 论

(一) 实验结果表明，培养学生解答分数应用题的能力是一个比较复杂的问题。根据学生的年龄特点和认知规律，恰当地选定应用题的范围，合理地编排应用题的教学顺序，教学时加强分数应用题的数量关系的分析，采取算术解法与方程解法并重，可以用较少的时间达到较好地培养学生解答分数应用题能力和发展学生思维的目的。

(二) 实验结果表明，五年级学生(平均年龄 10 岁半)能够较好地掌握两步计算的分数应用题。适当拓宽两步计算的分数应用题的范围，有利于培养学生解答分数应用题的能力。学生也能够解答一些比较容易的三步计算的分数应用题，但是数量关系不能复杂，综合性不能很强，题量不能很多，否则会加重学生特别是差生的学习负担。

(三) 实验结果表明，合理地编排分数应用题，特别是加强分数应用题与分数运算意义的联系，加强分数应用题与整数应用题的联系，加强分数应用题之间的联系，加强方程解法及其同算术解法的联系，对于学生形成分数应用题的认知结构，掌握分数应用题的解答方法，培养学生正确地较灵活地解答分数应用题的能力，降低分数应用题的学习难度，减轻学生的学习负担，促进中小学的衔接，都具有重要的意义。

(四) 实验结果表明，影响学生顺利地解答分数应用题的因素主要有：正确地判断单位“1”，正确地分析题里的数量关系，联系运算的意义正确地选择运算方法(包括列算式或方程)。只要加强这几方面的教学，就不需要教给学生什么解题公式。这样教学还有力地促进了学生灵活的解题能力和思维能力的发展。至于影响学生解答分数应用题的其他因素，如应用题情节的叙述，应用题条件的叙述顺序，应用题条件的多少等，也往往在一定程度上给学生增加解题的困难。教学时注意应用题适当有些变化，有利于提高学生灵活地分析问题和解决问题的能力。

(五) 在实验中明显地看到，学生在学习解答分数应用题的过程中，在理解和掌握解分数应用题的方法方面，灵活地和综合运用知识解应用题方面以及口头分析数量关系和说明解题思路方面，都存在着较大的差异。在教学时，要加强对差生的辅导，并允许他们经过一段较长的时间逐步理解和掌握，最后达到教学的基本要求。特别要重视对中、差生的分析、推理的训练，给他们口头表达的机会，以便既提高他们解题的正确率，又提高他们分析问题的能力。要坚持因材施教，对于差生，只要使他们学会解答大纲、课本中共同要求的题目就可以了；对于学有余力的学生，则可以出一些稍费思考的题目，让他们选做，但是也要避免出一些过于繁难的脱离实际的对于进一步学习没有多大意义的题目。

(本文原载于《课程·教材·教法》1991 年第 11 期。)

在小学数学中教学简易方程的研究

— 前 言

小学数学中增加代数初步知识是在 60 年代从国外开始的,它是数学教育现代化的一个重要组成部分。在我国,很早也进行了这方面的实验研究。如 1958 年中国科学院心理研究所刘静和曾在小学进行试教代数的实验研究,证明“小学五年级可以接受代数概念,并巩固地用来解答四则应用题”;认为“混合教学代数与算术可以使现在中学某些教材‘下放’小学”。当时由于多种原因,这项研究成果没有得到顺利推广。1977 年,教育部重新编写各科教学大纲,提出把先进的科学知识充实到中小学中,开始研究小学增加代数初步知识问题。1978 年教育部制订的《全日制十年制学校小学数学教学大纲(试行草案)》中,四年级列入了用字母表示数和简易方程,五年级列入了正、负数四则计算。随后编写了简易方程的教材,在个别学校进行实验。在此基础上编写了通用教材,供全国各地使用。至于正、负数四则计算,在个别地区也进行了实验,并收到较好的效果。但根据各地意见,为了减轻教学负担,在修改教学大纲时,删掉了这部分内容。

二 1978 年以来教学简易方程的情况

为了实现教学大纲的要求,1978 年小学数学通用教材编写组开始编写四年级实验教材,1979 年春在一所五年制普通小学四年级 2 个班中进行实验。教学内容包括:用字母表示数,解简易方程 $[x \pm a=b, ax=b, x \div a=b, ax \pm b=c, ax \pm bx=c, a(x \pm b)=c]$ 等类型]和列方程解应用题。五年级教学分数应用题(逆思考的),先用方程解,在此基础上,出现用算术方法解。实验结果如下。

表 1 四年级实验班教学简易方程后测试结果

测试人数	解简易方程(9题)正确率	列方程解整小数应用题(9题)正确率
65	94.4%	86%

表 2 实验班与普通班解应用题测试比较

	整、小数应用题(四年级)			分数应用题(五年级)		
	测试人数	平均分	60分以上	测试人数	平均分	60分以上
实验班	61	79	80.3%	62	88.1	91.9%
普通班	62	59	50%	62	73.8	76%

实验初步表明,在四年级教学简易方程是可行的,而且实验班的解应用题能力明显高于普通班。用方程解不仅可以使一些应用题化难为易,还有助于学生根据应用题的特点灵活地选用解法。据统计,在上面的对比测试中,实验班学生解整、小数应用题时,用方程解的占总题数的 45.2%。学生认为列方程解应用题容易的占 75.5%,认为稍难的占 18.5%,认为难的只占 6%。

为了便于全国小学生接受,编写全国通用教材时,对简易方程的内容适

当加以调整。删去 $ax \pm bx=c$ 型的方程以及用这样的方程解应用题；在三年级教学加、减、乘、除法算式中各部分间的关系后，提早出现 $x \pm a=b$, $ax=b$, $x \div a=b$ 型的方程，但不出“方程”的术语。先在个别的省进行试教，取得较好效果后，再推广到全国。现在这套通用教材已经使用 10 年，普遍反映教学简易方程是可行的。1985 年以后，少数省、市编写的六年制小学数学教材中增加了方程 $ax \pm bx=c$ 和用这样的方程解应用题，也取得较好的效果。此外，还有少数单位如北京师范大学教育系和景山学校进行加强代数初步知识的实验，也取得一定经验。

三 80 年代末加强简易方程教学的研究

70 年代末以来，在小学数学中增加简易方程虽然取得较好的效果，但仍不足之处：首先，简易方程的教学主要集中在五年制小学四年级（或六年制小学五年级），其他年级安排的内容较少，不利于巩固和提高所学的知识 and 解题技能。其次，教学分数应用题虽出现列方程解，但是主要还是反映算术解法的思路，与初中列方程解应用题的思路联系不够紧密。为了加强简易方程的教学，课程教材研究所从 1987 年春开始新的实验探索。主要有以下几点：

（一）三年级结合加、减、乘、除法算式中各部分间的关系和求未知数 x ，增教列含有未知 x 的等式解一步应用题（逆思考的）。

（二）四年级增教 $ax \pm bx=c$ 型的方程和用来解有关的应用题。

（三）五年级适当增加含有分数的简易方程，解分数应用题（逆思考的）时在解题思路加强与初中代数的衔接，并重视算术解法与方程解法的联系。例如：

“小明家买来一袋大米，吃了 $\frac{5}{8}$ ，还剩 15 千克。买来大米多少千克？”

解题时设买来大米 x 千克，强调根据题意列方程 $x - \frac{5}{8}x = 15$ ，然后推导出 $(1 - \frac{5}{8})x = 15$, $x = 15 \div (1 - \frac{5}{8})$, $x = 40$ 。在学生掌握方程解法后，再说明 $(1 - \frac{5}{8})x = 15$ 实际表示一袋大米的 $(1 - \frac{5}{8})$ 是 15 千克，从这个方程也可以推导出 $x = 15 \div (1 - \frac{5}{8})$ ，从而引出算术解法。

1987—1989 年上述改革实验先在两所较好的学校各一个班中进行，取得较好的效果。1989—1991 年又在全国城市、农村小学约 200 个班进行实验，也取得较好的效果。部分实验结果如下。

表 3 全国实验班三年级下学期列含未知数 x 的等式解一步应用题测试结果

用方程解和算术解		只用方程解	
班数	平均正确率	班数	平均正确率
170	87.6 %	174	89.9 %

表 4 某省实验班五年级上学期分数应用题测试结果

学校数	班数	7 题平均正确率	第 7 题	
			算数解法	方程解法
16	18	89.5 %	95.4 %	93 %

表 5 实验班与普通班学生灵活运用两种解法的比较

	两步应用题 (2 题) 用两种解法			三步应用题 (1 题) 选 1 种解法	
	先算术解 后方程解	先方程解 后算数解	只算术解或 只方程解	用方程解	用算术解
实验班 (五年级 38 人)	23.7 %	64.4 %	11.8 % (算术解 10.5 % 方程解 1.3 %)	58.3 % (5.6 %) *	41.7 % (11.1 %)
普通班 (六年级 35 人)	81.4 %	4.3 %	14.3 % (全部算术解)	0	100 % (29.4 %)

* () 里都是解错的人数的百分比。

从表 3 看出，在三年级试教列含未知数 X 的等式解应用题，取得较好的成绩。从表 4 看出，某省城、乡小学实验班解分数应用题的正确率也是比较高的，学生既能用方程解又能用算术方法解。从表 5 进一步看出：(1) 当要求学生用两种方法解时，普通班大多数学生先写算术解法，而实验班多数学生先写方程解法；实验班学生会用两种解法的略高于普通班。(2) 当要求选用一种解法解三步应用题时，普通班都用算术解法，错误率较高 (29.4%)；实验班多数学生能根据题目选用适当解法，错误率较低 (总计 16.7%)。这说明五年级加强用方程解应用题，对提高学生解分数应用题能力以及培养学生思维的灵活性起了重要作用。

四 结论

十多年来中国的教学改革经验表明，在小学数学中增加用字母表示数和简易方程具有以下几方面的功能：1. 有助于巩固和加深理解所学的一些算术知识，如运算定律、常见的计算公式等。2. 使一些整数、小数、分数应用题化难为易，提高学生解决简单的实际问题的能力。3. 促进学生的抽象思维能力以及思维灵活性的发展。4. 有利于加强中小学的衔接。近几年的实验进一步表明，在已有的基础上加强简易方程的教学是必要的，它有助于进一步发挥上述四个功能；同时也是可能的，学生不仅能够接受，而且不增加学习负担。目前，我们正根据新的实验研究成果编写义务教育小学数学教科书，供全国试用。这将进一步提高我国小学数学教学质量，为提高全民族素质，起到一定的作用。

(本文原载于《中日义务教育学术交流会论文集》。)

第三部分 外国小学数学教育改革

国外小学数学教材改革情况简介

一 小学数学教材改革的发展简史

近几十年来，数学有了飞速的发展：新的数学知识不断产生；新的数学方法不断出现；它的应用范围日益扩大。传统的中小学数学课程教材已不能适应这种新的变化，迫切需要对之进行改革。因此，在国外比较广泛地开展起数学教育现代化运动。

小学数学教材的改革，早在五十年代就已开始。有些国家提出了改革意见，拟定了改革方案，进行了小规模试验。例如，1956年英国就有人提出：小学数学教学的目标，应是给儿童打好有关数量和空间方面的数学思维的基础。1958年美国伊利诺大学算术方案，就涉及到解方程和不等式以及函数、运算定律等问题。六十年代初，有些国家开始了较大规模的改革。1963年美国召开坎布里奇会议，提出中学毕业的数学程度要达到当时大学三年级的水平。在这之后，小学数学出现了各种改革方案，编出很多新数学课本。例如学校数学研究组编的SMSG小学数学课本，当时有很大的影响。1964年在英国也有人提出要使小学数学现代化，以后编出SMP等小学数学课本。1967年苏联分别公布了1~3年级（小学）和4~10年级改革的数学教学大纲，并从1969年起换用新的小学一年级课本。1968年日本公布了用现代数学观点修订的小学算数教学指导要领，并从1971年开始施行。1970年法国也公布了改革的小学数学教学大纲。与此同时，欧洲其他一些国家也进行了改革。以后，小学数学教材改革扩展到第三世界国家。1978年在苏丹还专门召开了第三世界国家数学发展国际讨论会，着重研究了小学数学教学的目标、内容等问题。

二 小学数学教材改革的主要特点

各国改革的步子大小不尽相同，对教材内容的处理方法也不完全一样，再加上各国小学的学习年限长短不一，小学数学的程度有很大差别。下面就西方几个主要国家的小学数学教材改革的主要特点做一简单介绍。

（一）改变传统的算术、代数、几何分科的办法，精简传统的算术内容，把原来中学的一些代数、几何知识下放到小学。在精简传统的算术内容方面，很多国家删去较复杂的整、小、分数四则计算。例如，整数乘、除法一般只学到乘、除数是三位数的；分数的分母一般不超过10，法国小学只讲到分数乘法。比例也加以简化，如美、苏、法等国只讲正比例，日本只讲正、反比例概念。混合运算和应用题，除苏、日两国保留较多外，其他国家都比较简单。

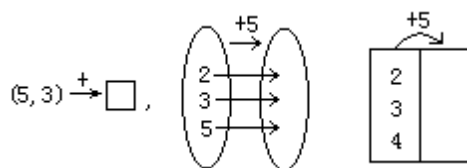
在增加的内容方面，比较普遍地引入用字母表示数、简易方程、列方程解应用题和简单的正、负数计算。苏联一年级就引入简易方程和列方程解一步应用题，五年级学完有理数四则计算和一元一次方程；美国讲到正、负数

为了便于跟我国的小学数学教材比较，介绍时，美、日（小学六年）、法（小学五年）等国就以原来小学的学习内容为准，联邦德国（小学四年）、苏联（小学三年）则以五年所学的内容为准。

加减法，还讲了简易不等式、指数、幂、平方根等；日本只出现正、负数概念。各国还比较普遍地增加几何形体的认识和一些图形的性质。例如，美、日、苏等国都讲了图形的全等和相似、轴对称和中心对称、平移和直角坐标等，并讲了简单的尺规作图。美国还讲了圆弧、弦、圆周角、椭圆等，日本还直观地介绍了空间的直线、平面的平行和垂直等。

(二) 增加或渗透集合、函数、统计等现代数学内容。多数国家从一年级起就结合认数和计算，通过韦恩图直观地引入集合的初步概念。美、法、联邦德国等国在一年级就出现了集合、子集等名称；联邦德国在二年级就介绍了表示集合、属于等的符号，美、日、苏等国也分别在三、四、五年级介绍了这些符号。

许多国家通过各种直观形式，引入了函数、关系、映射等思想。如英、法等国在低年级讲加、减法时就配合横式出现下列形式：



美、日等国还结合比例等问题出现简单的函数图象。

较多的国家结合日常生活或游戏介绍概率、统计等初步知识。如美、日、英、法等国都讲了通过试验或用分数乘法求概率，有的还分别介绍了收集资料、数据处理、作频率分布表和求平均数、中数、众数等。

此外，美、英、法等国还讲了2、3、4、5等进位制及其简单加、减法，简单的流向图和逻辑语句等。

(三) 用结构的思想处理传统的数学内容，强调用现代数学的基础概念(如集合、运算、关系和映射等)把小学数学的内容也组成一个统一的整体。如美国的一套小学数学课本在序言中明确指出：“强调概念、结构、精确语言和演绎方法。”许多国家的课本都用集合观点来讲传统的算术和几何图形的概念。美、英、法、联邦德国、苏联等国在一开始讲加法、乘法时就引入运算定律，以后讲四则计算时都用运算定律推导出计算方法。例如： $23 \times 4 = (20+3) \times 4 = 20 \times 4 + 3 \times 4 = 80 + 12 = 92$ 。

(四) 强调使学生掌握常用的数学术语和符号，为进一步学习打基础。如苏联小学数学教学大纲中明确指出，应该使儿童简单而又自然地掌握数学术语，并在一年级一开始就出现“加数”、“和”等术语以及 $>$ 、 $<$ 等符号；日本小学算数教学指导要领中还规定了各年级学生要掌握的数学术语和符号。

三 关于小学教学教材改革成败问题的争论

各国小学数学教材改革方案经过十多年的试验和大面积推广，逐渐暴露出一些问题。主要是教师教起来困难，学生不好接受，负担重，数学成绩下降。典型的例子如，小学生填不出 $17+6 = (10+ \underline{\quad}) + \underline{\quad} = \underline{\quad} + (\underline{\quad} + \underline{\quad}) = 10 + \underline{\quad} = \underline{\quad}$ ；懂得 $6 \times 7 = 7 \times 6$ ，却不知道乘积是42。七十年代，对新数学的批评日益增多。1973年美国数学家克莱因写了题为《庄尼为什么不会加？》一书，指责新数学是失败的。一些教师、学生家长和社会各界也纷纷提出批评。主要的意见是：1. 新数学只考虑数学本身的发展和需要，片面强

调纯理论的抽象的概念，忽视社会的实际应用；2. 强调整理解，忽视基本技能的训练；3. 只适用于一般水平以上的学生，培养少数有才能的尖子，忽视面向全体学生。近几年来，美国掀起一场“回到基础”运动，要求取消新数学，强调小学数学要着重基本计算技能的训练。其他国家也有类似的反映。

但是也有人反对对于新数学的过分指责。1975年美国数学教育全国咨询委员会在一篇调查报告中指出，数学成绩下降是否大部分应归咎于“新数学”值得怀疑，因为改革运动的建议只有很少一部分在课堂上实行，而且也没有充分重视教师培训。1977年美国一家报纸发表的文章也谈到：“尽管新数学遭到批评，但是很少有人认为它完全失败。”1980年1月召开的关于数学课程变化的国际会议以后所发表的综合报告中也指出，要预测二十年来数学教育改革的永久效果还为时过早。与会大多数国家表示继续研究，并且克服过去出现的一些缺点。美国全国数学教师协会拟订的八十年代《行动计划》中，批评“回到基础”运动把数学能力放在低水平上，不能适应新的变化的需要。

四 小学数学教材改革的趋势

为了克服新数学所出现的一些缺点，近年来日、法、苏等国都修订了小学数学教学大纲和小学数学课本。美国也做了修改。小学数学教材改革的趋势主要有以下几点。

（一）强调使小学生掌握必要的数学基础知识和基本计算技能，为进一步学习打好基础。这主要是针对过去教材改革过分强调数学教育现代化和偏重抽象数学概念，忽视必要的数学基础知识和削弱基本计算技能而提出来的要求。许多国家在修订大纲时都充实了算术方面的基础知识，加强四则运算技能的训练。日本教育课程审议会讲到修订算数科的基本方针时强调：“要重视切实学会基础知识，熟练掌握基本技能。”在修订的小学算数教学指导要领中，把原来规定的目标加以简化，突出地强调使学生掌握有关数量和图形的基础知识和技能，特别加强20以内加减法和乘法表的练习。法国最近修改的课本中明确指出，数的读写和数的运算是“大纲的核心的基本知识”，并加强了算术基础知识和四则计算的基本训练。苏联新修订的大纲中明确规定了各年级对知识、技能和技巧的基本要求，并且强调必须牢固地掌握加法表、乘法表以及一些口算四则的技巧。近年来美国出版的课本也有类似的倾向。

为了切实加强算术基础知识，并解决学生负担过重问题，一些国家删减了一些不十分必要的和小学生较难接受的内容。例如，日本删去了等式的性质、验证运算定律的成立、求柱体的体积、负数等。美国的一些课本删除了直角坐标、椭圆、柱体、锥体等内容。苏联也删去一些比较次要的内容，如和、差、积、商的变化。

（二）强调发展学生的能力，培养学生的探究态度。由于科学技术的飞速发展，知识的大量增加和不断更新，单纯传授知识，并用延长学制、加重课程分量的办法，已不能适应形势发展的需要，必须发展学生的智力，培养学生具有创造性思考能力和独立探索知识的态度。《数学教育的新趋势》中指出，小学数学“不仅在获得算术的熟练技能方面保持良好的水平，而且把这个目标扩展到其他方面，从而使学生获得新的能力，特别是为以后的适应打开通路。”1978年第三世界国家数学发展国际讨论会强调，小学数学不仅

使学生获得运用整小数运算的能力，还要培养解决问题的态度和方法，获得表示和解释数量和其他数据的能力，……日本小学算数教学指导要领在目标中规定：“培养学生对日常事物进行数学处理，有条理地进行思考以及处理问题的能力和态度。”法国新修订的小学数学教学大纲中强调：“要培养探究的兴趣和一定的想象力。”苏联大纲中也强调：“充分发挥儿童认识活动的积极性，发展儿童的独立能力”，“培养他们的独立性和创造性。”在一些国家的课本中讲述新教材和安排练习题时，注意启发学生思考，让学生自己找规律，概括出结论，还编入一些思考题，有趣的习题等。

（三）继续坚持数学教育现代化的方向，但是注意适应小学生的特点，以更直观的形式和渗透的方式来处理。七十年代以来，尽管反对数学教育现代化的呼声很高，但是多数国家继续坚持数学教育现代化的方向，只是更注意适应小学生的特点，采取更直观易懂的形式，更多地结合传统的算术内容以渗透的方式来处理。例如，日本文部省在关于修订小学算数教学指导要领的说明时指出，基本维持现代化思考方法；强调逐渐培养用集合观念的思考方法很有必要。但是也指出，集合本身不是教学内容，只作为一种处理方法。日本新编的一年级课本仍出现韦恩图，在四年级已删去集合的名称和符号。苏联在说明修订大纲时，也强调“完全不涉及现代小学数学课程的基础。”法国一年级课本仍出现韦恩图，但不再出集合的名称和符号。各年级讲算术知识时继续渗透集合、函数等思想，但不再用集合观点给一些概念下定义。美国课本对二进制、流向图、概率等也做了一些简化。有的课本则把这些内容放在每章之后，不作为必学的知识。

（四）在安排上更注意适合儿童的年龄特点和接受能力。这是针对过去过多强调儿童早期学习，提倡高速度、高难度，提早出现一些比较抽象和难以理解的内容，以致造成教学困难而提出的。如前所述，许多国家在修订大纲和课本时已删掉一些不十分必要的和难以理解的内容，除此以外还把一些内容适当后移。例如，日本把最简单的分数（ $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 等）从二年级移到三年级，体积的概念、全等图形等从四年级移到五年级等等。苏联把用方程解应用题和两步应用题从一年级移到二年级，长（正）方形周长的计算公式从二年级移到三年级，它们的面积计算公式从三年级移到四年级等。美国一些新出版的课本也作了一些调整。

此外，各国还针对过去过分强调语言精确、严密而出现过多的数学术语和符号所带来的问题做了改进。如日本修订的小学算数教学指导要领中，对每个学年要掌握的数学用语和符号做了一些精简。

（本文原载于《小学数学教师》1981年第1期。）

国外小学数学教学方法改革情况简介

一 提出改革小学数学教学方法的原因

小学数学教学方法的改革，早在第二次世界大战以后，有些国家就在进行研究。例如，1956年英国就有人提出，教学方法要适应儿童不同能力的发展。但是大力地宣传和推进改革，还是六十年代以后的事。在提倡数学教育现代化运动的初期，主要是数学教学内容的改革。六十年代以后，由于小学数学教学目的的改变和教学内容的改革，传统的教学方法越来越不适应新形势的要求，纷纷提出要加以改革。归纳起来，主要有以下几点理由。

（一）传统的教学方法不能适应发展学生能力的要求

这不只是数学一科的问题。许多心理学家、教育学家指出，传统的教学方法主要特点，一是“单纯地传授知识”，忽视培养学生能力，特别是思维能力；二是把儿童的接受能力估计过低，“多次单调的重复”，不能调动学生的学习积极性。他们认为，在科学技术迅速发展、知识不断增加的情况下，单是传授知识已经不够了，必须培养学生的能力，“教会学生独立工作和创造性思考的本领。”根据这一新的要求，有必要对传统的教学方法做相应的改革。

（二）教材的改革必须伴随以教学方法的改革

实行数学教育现代化，中小学数学的教学内容增加很多。这些内容要提早教给儿童，再用传统的教学方法显然是不行的，必须相应地改革教学方法。瑞士心理学家皮亚杰提出，要“制定现代的教学方法来教现代数学”。美国心理学家布鲁纳说，“选择一定的教法，有可能把自然科学和数学的基本概念教给比传统年龄轻得多的儿童。”美国数学教育全国咨询委员会通过调查，认为数学教育现代化未能成功，不完全是教材问题，跟教法没有作相应的改革有很大关系。1980年第四届国际数学教育会议期间，有很多关于教学方法的专题讨论。

（三）现代教学技术有了很大的发展，也促进了教学方法的改革

很多数学教育工作者认为，现代教学技术（如幻灯机、录音机、电视机、计算器、计算机等）可以帮助学生理解和记忆数学概念，有助于思维，有助于提高学习效率，培养能力。传统的教学方法难以适应个别差异，而现代教学技术在发展高材生和补救差生方面却能发挥很大作用。近年来，国外对于在小学数学教学中如何使用现代教学手段问题进行了很多研究。

由于上述原因，现在国外越来越重视教学方法的改革。有些数学教育工作者已从数学课程增加新内容的研究转到数学教学方法的研究，如英国的纳菲尔德设计就是一例。

二 小学数学教学方法改革的趋向

根据所看到的一些材料，在小学数学教学方法改革方面，大致有以下几个趋向。

（一）强调提高教学效率

所谓教学效率，就是单位时间内所完成的教学任务。赞可夫曾不止一次地批评传统的教学方法是多次单调的重复，如10以内的数做了120次练习，

讲了 25 节课，浪费很多时间。他提出教学方法要注意科学、有效；要重视理解，加强各部分知识间的联系，练习和复习要得法。在苏联，很强调要善于依据教学论、儿童心理学、教育心理学和逻辑学的基本原理选择一定条件下的最优教学方案。美国全国数学教师协会（NCTM）拟定的八十年代《行动计划》中第四条，明确提出：“必须把既讲效果又讲效率的严格标准应用于数学教学”。

（二）强调发挥学生的积极性，鼓励学生独立发现和探索

传统的教学法是灌输式，把学生看作容器，不注意发展学生的智力，不能适应时代的要求。因此一些教育学家、心理学家提出了新的教学理论。如皮亚杰提出：“一切真理都要由学生自己获得，或者由他重新发明，至少由他重建，而不是简单地传递给他。”布鲁纳也认为，学习重要的不是记忆事实，而是获得知识的过程。他提出“发现法”，强调“教数学……要让学生自行思考数学，参与到掌握知识的过程中去。”

发现法的一般过程是：确定学习课题（或提出假设），自己研究解决（或检验假设）的方法，收集必要的资料，找出问题的答案。关于发现法，在国外也有不同的看法。有人认为，这样做耗费大量时间只能解决一个细小问题，而教师用几分钟说明即可解决这个问题。也有人认为纯发现法，即自始至终由学生自己来做，在学习顺序和掌握数学结构方面都不会是合乎理想的；而采用有指导的发现法，即问题从外部提出，让学生在教师的必要的帮助下来进行，要比纯发现法效果好。还有人认为发现法是有局限性的，不一定对所有的数学课题和所有的儿童都适用，需要教师很好地制定计划。也有人认为至少要在小学高年级才能使用。

（三）强调通过多种活动来掌握数学

传统的教学方法是教师讲，学生听，除了做习题以外很少其他活动。1976 年第三届国际数学教育会议曾提出这个问题，强调在教学时要通过各种活动，如画图、操作、制做、调查、收集周围环境的数字材料等，来组织教学。美国的八十年代《行动计划》中强调，要鼓励学生提问、实验、估算、探索、提出解释等等。苏联小学数学教学法中也提倡采用多种多样的教学活动和组织形式，并认为这样可为培养儿童的认识能力创造条件。在教学中注重提高实际作业的比重，特别是讲几何初步知识时，要让学生制做、画图、剪纸、叠纸、观察和认识周围环境的几何图形。还强调教应用题要结合儿童的活动，如公益劳动、旅行和其他活动收集编应用题的材料。指出解应用题的目的根本不是教儿童死记某些一定类型的应用题的解法，而是把所获得的理论知识应用于实践。同时也指出，传统的教法一直到现在还在继续发生消极的影响，如选用专门编的所谓“典型”应用题，使儿童死记各种类型应用题的解法，不可能保证学生达到现代条件下所要求的数学知识水平。

（四）面向全体，并适应个别差异

近二十年来，国外十分重视儿童的个别差异问题，认为长期以来所采用的班级教学，在组织形式上不容易适应个别差异。在数学教育现代化运动初期，强调培养尖端人才，提出个别化的教学方法，实际上只注意到优等生，忽视对差等生的教学。结果在数学教学中，发展了天才教育，而大多数学生的成绩下降。现在已开始注意面向全体学生，同时适应个别差异。近年来，国外在这方面进行了许多试验，提倡分组教学。例如，美国恩德希尔设计出一个教学范型，在教某一数学概念之前，先了解和估计一下有哪几个学生已

经理解和掌握这个概念，教学时就让他们直接进入充实提高的活动；而大多数学生则由教师教学。经过大组、小组、个别教学以后进行检查诊断，掌握得好的学生也进入充实提高组，还需要再练习的进入练习组，还没掌握好的进入重授组。到适当时候，所有的学生又作为一个班级一起进入下一个数学概念的学习。日本的数学教学法中也提倡“个别化的指导”，强调在课堂上尽量减少一齐学习的时间，教师多看每个人的作业本，观察学生操作教具，及时发现练习中的错误，及早“治疗”。苏联小学数学教学法中也强调，把个别教学和集体教学巧妙地结合起来，对学生进行有区别的指导，是课堂教学的一个重要方面。并且提出，教师指导下的集体作业，应该跟各种形式的小组作业和个别作业交替进行。教师一般要准备几种差别作业，有的作业还要考虑到每个学生的程度特点，对于学习有困难的学生，还要准备专门的辅导材料。

（五）重视广泛应用直观教具和现代化教学手段

在国外，直观教具不仅广泛应用于知识的讲解，而且用于思考推理的练习；不仅用于课内，而且用于课外。例如，在美、英、苏等国，低年级都广泛使用彩色木条（《小学数学教师》丛刊第2期91页有介绍）来做四则运算，大数的计算，说明简单的分数等。为了讲几何形体，用硬纸板剪成形体的各个面，随时可以拼装。木制的各种几何形体，配以识图有助于发展空间观念；把它们放在表示不同集合的圆圈里又是很好的逻辑推理练习。现在国外的小学正开设数学实验室或实验角，准备各种各样的教具、操作用具，许多用发现法教学的课就在数学实验室中进行。

近年来，在一些较发达的国家和地区，还提倡应用电子计算器和电子计算机进行辅助教学。关于计算器的使用，各国尽管还有不少争论，特别是很多教师不赞成小学生使用计算器，担心会忘掉计算技能。但是不少实验调查报告都认为，计算器有助于掌握基本技能和数学概念以及解答应用题，不会损害学生的学习成绩。同时也考虑到小学的特点，一般认为宜于在高年级使用，在使用计算器之前应先掌握基本计算技能。至于使用计算器以后会带来什么样的影响，有些人认为还需要进一步研究。关于电子计算机，在美、英、日等国已有不少小学使用。计算机不仅用于计算、解应用题，而且用于辅导儿童、解答疑难问题、进行计算技能的训练，此外还用于记录和分析学生成绩并根据学生的进步情况制定学习计划。在美国已编有学习小学数学的成套的程序，根据需要随时可以把程序输入计算机来使用。

三 改革教学方法的关键在于教师

在数学教育现代化运动初期，对培训教师工作重视不够。有些国家和地区虽然做了一些培训工作，但也主要是帮助教师熟悉新增加的教学内容，对于教法研究很少。经过一段时间的实践，越来越感到培训教师的重要性。1976年第三届国际数学教育会议就指出：小学阶段，同其他阶段相比，教师的作用更是基本的。任何一项改革，只有教师了解其目的，掌握改革的内容，适应改革的内容能够修改原来的教法，才有可能成功。1978年第三世界国家数学发展国际讨论会上也强调，“学校数学课程的任何重大改革，首先必须准备好教师。”美国的八十年代《行动计划》中有一条提到，数学教师应当要求自己 and 同事们具有高业务水平。他们预测，八十年代在数学、数学的应用

和教学方法上都将继续出现新思想和新理论，从而会影响中小学数学课程和教学，因此认为教师必须加强这几方面的学习，即使最好的教师也必须不断提高，才能适应情况的变化，更好地完成教学任务。

（本文原载于《小学数学教师》1982年第2期。）

国外小学数学教学改革趋势

一 小学数学教学改革的起因和发展概况

近二十多年来，国外小学数学教学改革是整个数学教育现代化运动的一个组成部分。第二次世界大战以前，中小学数学课程教材是比较稳定的，基本上没有变化。第二次世界大战以后，由于数学本身有了很大发展，科学技术也飞速发展，数学的应用日益广泛，特别是电子计算机的出现，促使各学科广泛地应用着数学方法，从而对参加生产和各种工作人员的数学水平，提出较高的要求，并且由于知识的不断更新，要求具有独立获取新知识的能力。而当时，学生的数学水平低下，社会上对数学教育提出了批评。因此，传统的中小学课程、教材、教法越来越不适应这种形势的变化，迫切需要进行改革。在四十年代末、五十年代初，有些国家已经出现了改革的方案和小规模的试验。如 1951 年美国伊利诺大学成立学校数学委员会，开始研究中学数学改革问题，编写九至十二年级教材。1956 年英国就有人提出小学数学教学的目标应是给儿童打好有关数量和空间方面的数学思维的基础。1957 年苏联发射了人造卫星，出于国际竞争的需要，促使美国加速改革数学教育。1958 年由美国政府资助成立了“学校数学研究组”（简称 SMSG），着手编写中小学试验教材。1958 年，伊利诺大学也拟出了算术方案，其中已涉及到解方程和不等式以及函数、运算定律等问题。六十年代初开始较大规模的数学教育现代化运动。1962 年编出 SMSG 中小学数学课本。1963 年，美国坎布里奇会议上提出，从幼儿园起到中学最后一年的数学课程要达到当时大学三年级水平。以后出现更多的改革方案，编出了各种各样的小学数学教材。1964 年英国也有人提出改革小学数学课程，使之现代化。以后编出 NMP、SMP 等小学数学课本。1967 年苏联分别公布了一至三年级（小学）和四至十年级改革的数学教学大纲，并从 1969 年起在小学一年级换用新教材。1968 年日本公布了用现代数学观点修订的小学算术学习指导要领，并从 1971 年开始施行。1970 年法国也公布了改革的小学数学教学大纲。与此同时，欧洲其他一些国家也进行改革。以后，小学数学教学改革又扩展到第三世界国家。1978 年在苏丹还专门召开了第三世界国家数学发展国际讨论会，研究小学数学教学的目标、内容等问题。

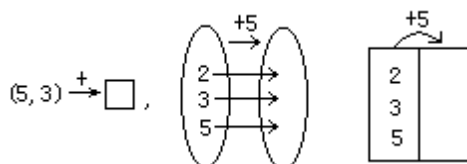
小学数学教材改革有以下几个主要特点。

（一）改革传统的算术、代数、几何分科的办法，精简传统的算术内容，把原来中学的一些代数、几何知识下放到小学。很多国家删去较复杂的整数、小数、分数四则计算。如整数乘、除法一般只学到乘、除数是三位数的；分数的分母一般不超过 10；有些国家（如美、苏、法）只讲正比例，日本只讲正、反比例概念，并简化了四则混合运算。与此同时，增加了一些代数、几何的内容。比较普遍地引入用字母表示数，简易方程和列方程解应用题，以及简单的正负数四则运算。苏联五年级结束算术课程并学完一元一次方程。美国小学还讲了简易不等式、指数、幂、平方根、等差数列等。很多国家还增加了几何形体的认识和一些图形的性质。如美、日、苏等国都讲了图形的全等和相似、轴对称和中心对称、平移和直角坐标等，并增加了简单的尺规作图。美、日等国还讲了菱形、正多边形以及棱柱、棱锥等的认识，并求它们的表面积。美国还讲了弧、弦、椭圆等，日本还直观地介绍了空间的直线、

平面的平行和垂直等。

(二) 增加或渗透集合、函数、统计等现代数学内容。多数国家从小学一年级起就结合认数和计算出现韦恩图, 美、法、联邦德国等国还出现了集合、子集等名称; 联邦德国在二年级就介绍了表示“集合”、“属于”等的符号, 美、苏、日等国则分别在三、四、六年级出现这样的符号。

许多国家通过各种直观形式引入函数、关系、映射等思想。如英法等国在低年级讲加减法时出现等形式。苏联在二年级通过求 $x+2$ 的值等, 逐步给学生变量思想; 四年级给出变量的概念。美、日等国还结合比例等问题出现简单的函数图象。



较多的国家结合日常生活或游戏介绍概率、统计的初步知识。如美、日、英、法等国都讲了通过试验求概率。如盒里放 $0, 1, 2, \dots, 9$ 的数字卡片, 摇匀后每次抽一张, 求抽出质数的概率。美、英等国还讲了用分数乘法计算概率。日、美等国从低年级起就出现简单的统计图表, 到高年级还分别介绍了收集资料、数据处理、作频率分布表和求平均数、中数、众数等。

还有一些国家结合认数和计算介绍与电子计算机有关的基础知识, 如二、三、四、五进位制及其简单加减法, 简单的流程图, 简单的逻辑语句等。

(三) 用结构的思想处理传统的数学内容, 强调用现代数学的基础概念(如集合、运算、关系和映射等)把小学数学的内容组成统一的整体。如美国的一套小学数学课本在序言中明确指出:“强调概念、结构、精确语言和演绎方法”。美、法等国的课本都用集合的观点来讲传统的算术、几何概念。如英国小学数学第二册讲:“没有对应起来的数目是差”。法国小学数学课本中讲:“两条带子的交是一个点的集合, 叫做平行四边形”。美、苏、法、英、联邦德国等国在开始讲加法、乘法时就通过直观引入一些运算性质, 以后学计算方法时都用运算性质推导。例如, $9+2=9+(1+1)=(9+1)+1=10+1=11$; $23 \times 4=(20+3) \times 4=20 \times 4+3 \times 4=80+12=92$ 。

(四) 强调使学生掌握常用的数学术语和符号。苏联小学数学教学大纲中指出:“应该使儿童简单而又自然地掌握数学术语”, 并在一年级课本的开头就出现“加数”, “和”等术语以及“ $>$ ”“ $<$ ”等符号。日本小学算术学习指导要领中还明确规定了各年级学生要掌握的术语和符号。

在增加了教学内容, 强调发展学生思维, 培养独立获取知识的能力之后, 如果仍用传统的教学方法, 把学生当作容器, 采取注入式, 单纯地传授知识, 多次的重复, 显然不能适应新的要求。因此有些心理学家、教育家纷纷提出要改革教学方法。如皮亚杰提出,“要制定现代的教学方法来教现代数学”, 布鲁纳认为,“选择一定的教法, 有可能把自然科学和数学的基本概念教给比传统年龄轻得多的儿童”。布鲁纳倡导采用发现法, 强调“教数学……要让学生自行思考数学, 参与到掌握知识的过程中去。”他还同数学家狄因斯一起亲自试验。赞可夫也指出, 既然教学大纲补充了新的内容, 当然以前没有采用过的教学方式的出现是不可避免的。他强调要“让学生自己去寻求问题的正确解答”。他领导的试验既改革了教材也改革了教法。例如, 注意激发学生独立地探索; 让学生进行有目的的观察, 发现所学教材的各部分之间

的内在联系；提出一系列问题，让学生思考解答途径；注意教学方式的多样化；加强实际操作等。

二 关于小学数学教学改革成败问题的争论

早在数学教育现代化运动初期，就有人提出反对意见。美国应用数学家克莱因在 1962 年就批评新数学只重视数学的内容，而忽视数学的方法；教学的对象只是少数学生，培养尖子；急于搞抽象化，强调演绎推理等。七十年代，各国小学数学教材改革经过了一段时间的试验，逐渐暴露出一些问题。主要是教师难教，学生难学，负担重，成绩下降。典型的例子如：小学生懂得 $6 \times 7 = 7 \times 6$ ，却不知道积是 42。教师、家长以及社会各界纷纷对新数学提出批评或反对的意见。1973 年克莱因又写了一篇题为《庄尼为什么不会加？》的小册子，指责新数学是失败的。归纳各方面的主要意见是：第一，只考虑数学本身的发展和需要，片面强调纯理论的抽象的概念，忽视社会的实际应用；第二，强调理解，忽视基本技能的训练；第三，只适用一般水平以上的学生，培养少数有才能的尖子，忽视面向全体学生。随后在美国以及其他一些国家掀起一场“回到基础”运动，要求取消新数学，主张小学数学要着重基本计算技能的训练。但是也有反对的意见。1975 年美国数学教育全国咨询委员会在一篇题为《对数学教育总的看法和分析》的报告中指出，数学成绩下降是否大部分归咎于“新数学”值得怀疑，因为改革运动的建议只有很少一部分在课堂上实行，而且也没有充分重视教师培训。1977 年美国《洛杉矶时报》发表一篇文章也谈到“尽管新数学遭到批评，但是很少有人认为它完全失败。目前的课本又将重点放在基本技巧上，但仍旧含有新数学中介绍的许多概念。”1980 年 1 月召开的关于数学课程变化的国际会议所发表的综合报告中也指出，要预测二十年来数学教育改革的永久效果还为时过早。美国全国数学教师协会的八十年代《行动计划》中，批评了“回到基础”运动，认为想把数学能力放在低水平上，不能适应新的变化的需要。在苏联争论也很厉害，有些数学家提出用集合论解释数学概念没有必要。指出这样把教材人为地复杂化，使学生对知识只是形式主义的理解，小学一年级学习用方程解应用题也是形式地接受。但是也有人认为，四五年级引入集合，带变量的命题和语句，仅仅是使数学教学的某些语言标准化、明确化。也有一些教师反对走回头路。近几年，争论虽基本平息，但并没有取得完全一致的看法。1982 年美国有一篇文章说：“过去两三年虽然有达到均势的趋向，但这并不意味着达到观点一致。”

三 小学数学教学改革的发展趋势

为了克服新数学所出现的一些缺点，七十年代末至八十年代初，许多国家相继在总结经验的基础上修订了小学数学教学大纲和课本。如法国于 1977 年修订公布小学预备课程（即一年级）数学教学大纲，以后陆续修订公布其他年级的。日本于 1977 年公布了修订的小学算数学习指导要领。1978 年起苏联教育部陆续修改了小学数学教学大纲，并于 1981 年公布了草案。同年苏联教育部公布了 1981~1982 年度中小学数学教学纲目，1982 年又公布了 1982—1983 年度中小学数学教学大纲，对大纲内容作了进一步修改。随后又陆续

修改了课本。美国没有统一的教学大纲，但是美国全国数学教师协会拟出的八十年代《行动计划》，反映了近几年数学教学改革的趋向。另外，近几年也出版了一些新课本，同七十年代的课本比较，也有一些修改。其他国家（包括一些第三世界国家）对课本也做了修改。

近年来，小学数学教材改革的趋势主要有以下几点：

（一）强调使小学生掌握必要的数学基础知识和基本技能，为进一步学习打好基础。这一要求主要是针对过去小学数学教材改革过分强调数学教育现代化，重视抽象数学概念，忽视必要的传统的数学基础知识，和削弱了计算能力的培养而提出来的。1978年联合国教科文组织出版的《数学教育新趋势》中就曾指出，“小学阶段算术仍是数学教学的中心科目”。法国修改的课本中明确指出，数的读写和运算是“大纲的核心的基本知识”，并加强了算术基础知识和四则计算的基本训练，不仅增加了练习题，计算的数目也适当加大。日本学校课程审议会向文部省报告中提出修订算数科的基本方针时强调“要重视切实学会基础知识，熟练掌握基本技能。”在修订的算数学习指导要领中，简化教学目标，突出使学生掌握有关数量和图形的基础知识和技能，还增加低年级的教学时间，加强20以内加减法和乘法表的练习。苏联在修订小学数学教学大纲时，也特别强调“算术是初等数学课程的基础”，重视给儿童进一步掌握数学知识、技能和技巧建立足够的巩固的基础，并且规定了各年级的基本教学要求；四五年级强调，首先是对小学学过的数学知识进行概括和发展，使学生掌握自然数和整数、分数和小数的计算技巧，其次是学习代数和几何的极其初步的知识。自然数运算、正负数运算、有理数运算等，都单列一章，不与数概念混在一起。美国全国数学教师协会也强调培养学生基本技能，但是认为应反映新的变化着的需要，因此应当包括比计算技能更多的东西，如解决问题的能力，对结果的合理性的觉察力，估算和求近似数，度量的技能，阅读、解释和制作图表的技能等。

（二）删减一些不十分必要的和小学生难接受的内容，切实减轻学生负担。日本修改小学算数学习指导要领时，删去了等式的性质、验证运算定律的成立、旋转体的概念、柱体的体积、计算概率、负数等。苏联修改小学数学教学大纲时，强调把减轻负担作为改进一至三年级教学工作的主要方针；不再强调三年学完过去小学四年的内容，只学完乘数、除数是两位数的乘、除法，不出现用两步运算来解的方程，相应地也删去用方程解两步以上的应用题，也不再要求在不带方格的纸上画直角和长方形。四、五年级删去集合的符号和一些几何作图等。美国的小学数学课本也删减一些从中学下放到小学的内容，如直角坐标、椭圆、柱体和锥体等。

（三）在安排上更注意适合儿童的年龄特点和接受能力。这是针对过去过多强调儿童的早期学习和提倡高速度、高难度，致使许多比较抽象的和难理解的内容过早出现而造成困难这一缺点而提出的。例如，在日本，小学算

数学习指导要领中把一些内容作了如下的调整：最简单的分数（ $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 等）的认识从二年级移到三年级，折线统计图从三年级移到四年级，

体积的概念、全等图形等从四年级移到五年级，对称、图形的包含关系以及频率分布等从五年级移到六年级。苏联在修改大纲时也作了不少调整，主要的有：两位数进位加法和退位减法、两步应用题、用字母表示数、解最简单

的方程和列方程解应用题，从一年级移到二年级；多边形周长的概念、几分之一大小的比较等后移；乘数、除数是三位数的乘、除法，从三年级移到四年级；原来二、三、四年级含有两步和两步以上运算的方程以及相应的列方程解应用题，适当后移。美国有些新出版的课本也作了一些调整，如一年级不再出三位数和简单的三位数加法，几何初步知识有些后移，原四年级讲公倍数、公因数、质数和异分母分数加减法，移到五年级。

（四）继续保留数学教育现代化运动中某些带方向性的有益的处理方法，更注意适应小学生的特点。七十年代以来，尽管反对新数学的呼声很高，但是多数国家修订教材时继续保留某些带方向性的有益的做法，只是根据小学生的特点，采取更直观易懂的形式，更多地结合传统的算术内容以渗透的方式来处理。例如，日本文部省在关于修订小学算数学习指导要领的说明时指出，基本维持现代化思考方法；强调用集合的思考方法来教数量和图形等内容，可以更明确理解所学内容的意义；并认为逐渐培养用集合观念的思考方法很有必要。但是也指出，集合本身不是教学内容。日本新编的小学一年级数学课本，仍结合认数和计算出现韦恩图。数量关系的教学改从三年级起，仍包含函数、式子表示、统计资料等内容，只是不再划分为三个部分。法国小学数学保持现代化的方向更为明显。小学一年级仍出现韦恩图，但不再出集合的名称和符号。讲算术知识继续渗透集合、函数思想，但不再用集合观点给一些概念下定义。1983年亚太地区数学教育规划讨论会的报告也认为，集合的思想应该在各级教材中用作教学数学概念的语言，而不要作为独立的课题来教。美国近年来出版的一些课本，一方面继续用集合的思想说明一些算术内容，另一方面对某些现代数学内容降低了要求或者做较灵活的处理。例如，概率只讲根据具体试验结果求出现的概率，简单树图、平移、旋转、反射等都单独用小标题标出来，放在每章的测验题之后，用以扩大学生的知识面，给学生积累一些有关现代数学的感性材料。

（五）有些国家针对过去过分强调语言精确、严密而出现过多的数学术语和符号所带来的问题，做了改进。如日本修订的算数学习指导要领中，对每个学年要掌握的数学用语和符号做了一些精简。

（六）在一些发达的国家中，随着计算机的应用日益广泛，开始增加计算机教学。如美国小学，计算机的普及率已超过一半，有些学校利用计算机使学生既学到数学概念，又学到简单的计算机语言和编程的方法；有些学校则用计算机使学生提高所学技能，只对好的学生教学编程。法国最近规定，在小学用80课时教学计算机。但就大多数国家来说，在小学进行计算机教学仍处于试验阶段。

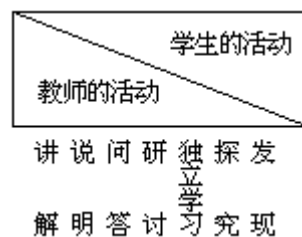
近些年来除了在教材方面进行调整外，更加重视教学方法的改革和推广工作。1975年美国数学教育全国咨询委员会在一篇报告中指出，数学教育现代化未能成功，不完全是教材问题，跟教法没有作相应的改革有很大关系。因此有些人从教材改革的研究转向教法改革的研究。

在教法改革方面有以下几个趋势值得注意：

1. 强调提高教学效率。就是提高单位时间内所完成的教学工作量。赞可夫曾不止一次地批评传统的教学法是多次单调的重复，浪费很多时间。他提出教学方法要注意科学、有效。他认为要求学生一下子记住的方法是不科学的，势必要搞成死记硬背。他强调要重视理解，加强各部分知识之间的联系，练习和复习要得法。现在，苏联强调要善于依据教学论、儿童心理学、教育

心理学和逻辑学的基本原理选择一定条件的最优教学方案。认为提高教学效果的主要潜力，基本上应当在改进每一节课的质量方面来找。还采取一些具体措施，保证既提高学生的数学成绩，又不增加课业负担。如在课本中安排好每节课的内容，严格控制课外作业量，充分利用已学的知识作为学习新知识的基础，每一节课既教学新知识又适当复习旧知识等。美国全国数学教师协会拟订的八十年代《行动计划》中第四条，明确提出“必须把既讲效果又讲效率的严格标准应用于数学教学。”强调“教师必须尽最大可能用效果最好、效率最高的方法。”

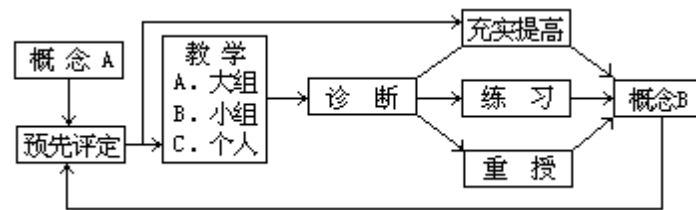
2. 强调发挥学生的学习积极性，鼓励学生独立发现和探索，培养学生独立获取知识的能力。皮亚杰提出“一切真理都要由学生自己获得，或者由他重新发明，至少由他重建，而不是简单地传递给他。”布鲁纳也说“用自己的头脑亲自获得知识”。赞可夫也强调要“激发学生独立的探索性的思想”。布鲁纳倡导的“发现法”就是为适应这一目的要求的。但是在国外发展学生智力，培养独立获取知识的能力，不只限于用发现法，而采用多种教学方法。特别是纯发现法有一些缺点，也不是对任何年级、任何内容都适用。目前有人提倡有引导的发现法，就是在发现的过程中，可以有某几个环节，教师给以帮助、引导。目前常用的有讲解法、问答法、探究法、发现法、实验法等。除讲解法外，采用其他方法时学生在课堂上都有一定的活动，只是所占的比例不同（如下图所示），但对于发展学生思维、培养学生独立获取知识的能力，都有一定的益处。一些教学法工作者还主张多种方法结合。在苏联，也十分注意启发学生独立思考，培养学生独立工作能力。他们把传统的教学方法从性质上和方向上加以改变，以适应现代的要求。例如，采用讲解法时重视调动学生的积极性，激发学生独立思考。采用谈话法时，一方面强调要提出富有启发性的问题，另一方面要促使学生根据已学的知识和自己的观察、经验得出新的概念、法则和结论，而不只是再现一些知识。目前在苏联把独立作业提到极其重要的地位，不仅用于再现一些定义、法则，巩固和完善已获得的知识、技能和技巧，而且用于学习新教材，使学生用已学的知识独立地解新的较复杂的应用题或解决新的理论问题。例如四年级教学乘法分配律时，教师先提出三道应用题，让学生分别用两种方法解答，然后按照计划进行比较，找出相同点和不同点，再用字母表示式子，得到 $(a + b)c = ac + bc$ ，最后表述定律。独立作业在整个课堂教学的比例也增大了。高年级还让学生独立阅读课本（如五年级分数乘法）。在苏联特别强调根据目的任务、教材特点以及学生情况等选择最合适的方法。



3. 强调通过多种活动使学生掌握数学。1976年第三届国际数学教育会议上就曾提出，教学时要通过多种活动，如画图、操作、制作、调查、收集周围环境的数字材料等来组织教学。美国全国数学教师协会的八十年代《行动计划》强调，要鼓励学生提问、实验、估计、探索、提出解释；解应用题时，要采取多种形式，通过各种活动，如图表模型、观察现象、图解、模拟真实

情况等来提供应用问题的情景。苏联小学数学教学法中也强调采用多种多样的教学活动和组织形式，认为这样可为培养儿童的认识能力创造条件。他们还提高了实际作业的比重，特别是讲几何初步知识时，强调让学生制做、画图、剪纸、叠纸、观察和认识周围环境的几何图形；解应用题时要注意结合儿童的活动，如公益活动、旅行等收集编应用题的材料。

4. 面向全体学生，并适应个别差异。数学教育现代化运动初期，强调培养尖端人才，提出个别化的教学方法，实际上只注意到优等生，忽视对差等生的教学。结果发展了天才教育，大多数学生数学成绩下降。现在已开始注意面向全体学生，同时适应个别差异。近年来，国外进行了许多试验，提出了分组教学。如美国恩德希尔设计出一个教学范型（如下图）



在教某一数学概念之前，先了解和估计一下有哪几个学生已经理解和掌握这个概念，教学时就让他们直接进入充实提高的活动，而大多数学生则由教师教学。经过大组、小组、个别教学以后，进行检查诊断，已掌握好的学生也进入充实提高组，还需要再练习的进入练习组，还没掌握好的进入重授组。到适当时候，所有的学生又作为一个班级一起进入下一个数学概念的学习。日本的数学教学法中也提倡个别化的指导，强调在课堂上尽量减少一齐学习的时间，教师多看每人的作业本，观察学生操作教具，及时发现练习中的错误，及时“治疗”。苏联小学数学教学法中也强调把个别教学和集体教学巧妙地结合起来。认为对学生进行有区别的指导，是课堂教学的一个重要方面，并且提出，教师指导下的集体作业，应该跟各种形式的小组作业和个别作业交替进行。教师一般要准备几种差别作业，有的作业还要考虑到每个学生的程度特点，对于学习有困难的，还要准备专门的辅导教材。

5. 重视广泛使用直观教具和现代教学手段。在国外，提倡使用多种多样的数学教具，不仅由教师演示，而且重视让学生操作；不仅用于知识的讲解，而且用于思考推理的练习；不仅用于课内，而且用于课外。例如，美、英、苏等国都提倡广泛使用彩色木条（奎逊耐木条）来教学认数和四则运算，说明简单的分数等。为了认识几何形体，用硬纸板剪成形体的各个面，随时可以拼装。木制的各种几何形体，配合识图，还有助于发展空间观念；把它们放在表示集合的圆圈里，又是很好的逻辑推理练习。现在国外小学还开设数学实验室或实验角，准备各种各样的教具、操作用具，许多用发现法教学的课就在数学实验室中进行。

近年来，在一些发达的国家和地区，还广泛使用现代教学手段，如幻灯片、影片等。在日本，配合各册课本制作的幻灯片总计达三百多张。近年来，有些国家还允许或提倡使用电子计算器。关于计算器的使用，各国还有不少争论，特别是许多教师不赞成小学生使用计算器，担心会忘掉计算技能。但是不少实验报告都认为，计算器有助于掌握基本技能和数学概念以及解答应用题，不会损害学生的成绩。同时也认为要考虑到小学生的特点，一般宜于在高年级使用，在使用之前应先掌握基本计算技能。美国全国数学教师协会八十年代《行动计划》中提出，超过两位数的计算就可以用计算器。日本算

数学习指导要领中规定，高年级可以适当使用计算器，但是不能影响培养学生的估算能力。至于使用计算器以后会带来什么样的影响，有些人认为还需要进一步研究。关于计算机，美、英等国已有不少小学在数学课上用作辅助教学手段，不仅用于学习计算，解应用题，而且用于辅导儿童，解答疑难问题；此外还用于记录和分析学生成绩并根据学生的进步情况制定学习计划，而且逐渐成为在家庭中对孩子进行教育的用具。

（本文原载于《小学数学教材和教法》第一集，人民教育出版社，1985年版。）

发现法与小学数学教学

近年来，有些教师在小学数学课试验用发现法进行教学，这是小学数学教法改革的一项新的尝试。随着教法改革的深入，不少教师提出这样的问题：什么是发现法？在小学数学教学中如何运用发现法？作为一种教学方法，必须具有某些独有的特征，能与其他教学方法相区别。为了便于教师进行研究，现根据所了解的一些材料，对发现法的特点及其在小学数学教学中的运用做一简单介绍，以供参考。

一 发现法的特点

发现法是近二十多年来国外倡导的一种教学方法，也有人称为探究问题法。五十年代末六十年代初，根据科学技术的迅猛发展和培养人才的需要，国外在提出改革传统教材的同时，相应地要求改革传统的教学方法。有些心理学家和教育工作者倡导“发现”的学习方法，强调要让学生自己发现和创造知识。例如，瑞士心理学家皮亚杰就提出：“要引导儿童去重新发明他们能够发明的事物。”美国心理学家布鲁纳更完整地提出发现学习的理论。他强调，学习是发现知识、理解一个学科的基本认识结构、运用直观和分析推理以及依靠内在动机的过程。他认为，“发现不限于寻求人类尚未知晓的事物，确切地说，它包括用自己的头脑亲自获得知识的一切方式。”因此，他提倡在教学中广泛运用发现法。

倡导者们认为发现学习的优点主要是：1.发挥学生主动性和创造性，发展他们的智力；2.可以较深地理解知识，并且较好地保持在记忆中；3.使学生更容易迁移，并且提高学习和研究较难的教材和问题的兴趣和信心；4.学生获得探究知识的技能，从而提高学生独立学习的能力。

运用发现法的一般步骤如下：1.创设问题的情境，提出要解决的问题；2.拟出解决问题的方法和途径，收集资料；3.提出假设；4.检验假设；5.总结，做出共同的结论。

可以看出，发现法教学的过程与科学家发现新知识的过程基本上是一致的。照布鲁纳所说，两者属于同一类的活动，差别仅在程度而不在性质。

纯发现法的教学，自始至终强调儿童自己独立进行活动。这种方法，国外的学前教育工作者运用得多一些，在学校教育中也有运用。但是，纯发现法存在较大的缺点，它只适用于介绍新教材，有时儿童有困难，不能保证达到预期的目的和获得系统完整的知识。因此有人（如美国的柯尔士）提出引导发现法，即在拟定解决问题的途径或提出假设时，教师可以适当予以提示和帮助。这样，学生做起来比较容易，可以有效地控制学生的学习活动，并保证达到预期的目的。

二 发现法在小学数学教学中的运用

自从倡导发现法以来，在国外的小学数学教学中有一些教师运用了发现法，但不普遍。最早在六十年代初，布鲁纳曾和美国数学家狄因斯合作，研究试用发现法教小学数学。他曾在小学三年级试用发现法引导儿童根据正方形的边长求面积，发现 $(x+1)(x+1)=x^2+2x+1$ 。以后一些数学教学法研

究人员在这方面做了不少的研究。现在从国外书籍中选几个例子来说明。

例 1：一位数除两位数的教学。

给出一道题如 $39 \div 3$ 。学生可以先拿 39 个物品，每 3 个一份，把它们分成 13 份。做几个这样的题目以后，可以让他们把物品组成 10 个一组。例如，给出这样一道题：“哈利买了 4 条糖果，每条有 10 块。他吃了 1 块，把剩下的每 3 块包成一包，分给同学，分给了几个同学？”

学生可能有以下几种解法：

1. 每 3 个分成一堆，然后数出分得的堆数；
2. 从三个 10 中各先拿出 1 个，剩下的每 9 个分给 3 个同学，再把其余的也每 3 个分成一堆。

$$\begin{array}{r} 9+9+9+3+3+3+3=39 \text{ (块)} \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 3+3+3+1+1+1+1=13 \text{ (人)} \end{array}$$

3. 与 2. 相似，但他们看出有 4 个 9。

$$\begin{array}{r} 9+9+9+9+3=39 \text{ (块)} \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 3+3+3+3+1=13 \text{ (人)} \end{array}$$

4. 他们看出 3 个 10 正好分给 10 个人，剩下的每 3 个分成一组。

$$\begin{array}{r} 30+3+3+3=39 \text{ (块)} \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\ 10+1+1+1=13 \text{ (人)} \end{array}$$

5. 与 4. 相似，但他们看出剩下的 9 个正好够分给 3 个人。

$$\begin{array}{r} 30+9=39 \text{ (块)} \\ \downarrow \downarrow \\ 10+3=13 \text{ (人)} \end{array}$$


在学生得出解法之后，全班进行讨论。教师对不同的算法不给出评价。再出一道题，许多学生会选用比他第一次用的更为简便的方法。进一步教师提出引导性问题，促使学生找出更为有效的计算方法，形成一般的竖式计算。

例 2：乘法分配律的教学。

给出一道一个数乘以和的应用题，例如：“有 3 个男孩和 4 个女孩，分给每人 2 块饼干，一共需要多少块饼干？”让各小组研究这道题可能有几种方法。学生想出下面的解法：

$$\text{每人的块数} \times (\text{男孩数} + \text{女孩数}) = 2 \times (3 + 4), (\text{每人的块数} \times \text{男孩数}) + (\text{每人的块数} \times \text{女孩数}) = (2 \times 3) + (2 \times 4)。$$

还可以用长方形阵列的方法（即按照已知数画几行点子，再导出算式）。每个小组可以自己设数，排成大小不同的阵列。让学生写出积，然后在其中某两行之间或某两列之间折叠一下，把阵列分成两部分，重新写出算式，求出积来。以 4×7 为例，可以写成如下的形式：

阵列： 4×7 

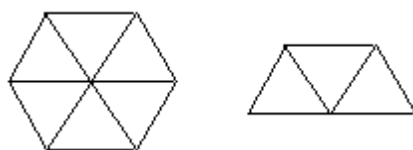
命名（把一个因数表示成两数和）	单项积	两个积的和
$7=5+2$	$4 \times (5+2)$	$(4 \times 5) + (4 \times 2)$
$4=1+3$	$(1+3) \times 7$	$(1 \times 7) + (3 \times 7)$

.....
学生找到分配律以后，可以用它去发现新的事实。

例 3：三角形内角和的教学。

开始先让学生各拿一张正方形纸，沿对角线折叠，发现每个三角形的三个角是由一个直角和两个半个直角组成的。随后让学生拿一张长方形纸，沿对角线剪开，再试试能不能发现每个三角形的内角和是多少。有的学生很快发现三角形内角和等于 2 个直角，因为一个长方形有 4 个直角，而剪成的两个三角形是完全相等的。

教师还收集了一些等边三角形容器。儿童发现可以把 6 个这样的容器拼成一个新的图形。而且可以把三个拼在一起立在桌子上（右图）。这说明每个角（根据已学的图形的对称很快发现等边三角形的三个角相等）等于 2 个直角的三分之一。这再一次说明三角形的内角和等于 2 个直角。



然后教师向学生提问，能不能发现任意三角形的内角和是多少。教师建议学生各画几个不同的三角形，给每个角标上号。有的学生折叠三个角，使它们对在一起；有的学生撕开三个角，把它们拼在一起。他们发现拼成的角的边形成一条直线。有些学生试图发现三角形的内角和是否有不等于 2 个直角的。

最后教师建议，在一个球面上画一个三角形。学生很高兴地发现，在球面上画的三角形有些内角和是 2 个直角，还有一些却大于 2 个直角。

从上面的几个例子可以看出，在小学数学教学中运用发现法，基本上符合前面介绍的几个步骤。几个例子突出的共同点是激发儿童动脑筋想办法发现规律。解决问题；不同的是，有的教师引导多一些，有的教师引导少一些。

三 对发现法的评价

自发现法问世以来，国外对这种方法有各种各样的评价。除了象前面介绍的发现法的倡导者所指出的一些优点以外，也有不少人提出意见。

有些人对发现法持反对的态度。例如，美国心理学家加涅不相信只要使学生掌握思考方法，就可以培养起能力。他强调教学要使学生掌握大量有组织知识，教师要给以充分指导，使学生按照规定的程序进行学习。美国另一心理学家奥苏博则认为，大多数学习应当是学生主动解决问题，但必须由教师建立一个系统的序列和方式。他认为听讲也可以是一个智力上主动的过程，而在探究的情境中学生也可能是被动的。

也有人认为发现法有它的适用范围，不能作为唯一的一种教学方法。苏联教学法专家巴班斯基曾指出，这种方法花的教学时间多，在培养一些不复杂的技能技巧时作用是不大的。美国的小学数学教学法研究工作者恩德希尔认为，在教学新概念和一般概括性知识时可以用这种方法，而关于概念的名称、符号表示法仍需要教师予以讲解，而且在发现新知识以后，还要适当地通过讲解法复述概念，指出它的属性，以及计算方法的一些细节（如进位加法要说明竖式具体怎样加，注意哪些事项）等。日本福冈大学秋山俊夫根据

日本的试验，认为发现法对于具体运思阶段后期至形式运思阶段前期的学生（十岁左右——十二岁左右）比较有效，但也认为要花费时间和劳力。

结合我国具体情况如何在小学数学教学中运用发现法，还没有完整的经验，有待于进一步试验研究。

（本文原载于《小学数学教师》1983年第1期。）

小学数学教育改革趋势——第五届国际数学教育会议讨论简介

第五届国际数学教育会议于1984年8月在澳大利亚的阿得雷德市举行。会上小学组就小学数学教育方面的问题，分成7个小组进行讨论，每个小组讨论一个专题。下面对讨论的情况做一简单介绍。

一 整数计算和估算

有几个国家的代表反映，课堂教学往往集中注意基本的计算技能，忽视较高水平的计算方法，其中包括口算和估算。而且教学往往太形式化，死板，很少注意与旧知识的联系和应用。由于有了计算器，有一些数学教育家和教育行政人员，很少提计算的目标，而提出更多发展性的教学项目。

小组的参加者集中讨论了与基本式（指20以内加减法和表内乘法）有关的教材和学习问题。一致同意掌握基本式是非常重要的。还认为教师应当设法培养学生的概括能力、掌握数量关系和思考方法，以帮助儿童学会基本式。而关键之一是要注意基本概念、思考方法和计算的扩展之间的联系。而这些思考方法对于计算方法、口算和估算都应当是有用的。

关于整数计算，一种主张是笔算、电子计算（计算器）和口算三者的教学应当保持平衡。但是大多数认为，要对估算给予更大的注意。有些人主张取消数目较大的除法；另外一些代表认为，教各种笔算方法有可能导致较为自然地应用于口算和估算。

关于估算，都认为儿童应当有效地掌握它并能应用，应当强调计算速度，提出合理的答案，心里算出来。需要使儿童掌握广泛多样的方法，能根据具体情况来使用估算。认为估算和心算的教学宜于早一点开始，与各种计算教学密切结合起来。估算的教学内容包括以下几方面：高位计算（如 $465 + 275$ ，算 $400 + 200 = 600$ ，其余的大约是100，所以得700），凑整（四舍五入），把几个数分组使计算简便，把一些数群集起来采用平均数等。

二 比、小数和分数

关于比的知识，有的国家孩子七八岁时就开始介绍初步的观念，到十一岁左右进一步介绍线性概念。他们认为使儿童获得不同数量间的比的概念需要较长的时间。有的代表说明在教科书中怎样用游戏来介绍比；有的代表则用建筑物的图画和让学生画比例尺来介绍比；还有的举密度、竿影等说明各种各样的比。大家认为，比应当是小学数学中的一个基本概念，因为它在物理、化学、生物以及数学的某些领域，如概率、相似及三角等方面的应用是非常重要的。大家有一个总的批评意见，就是现行大纲太重视数学本身，而忽视它同儿童现实的联系。

关于小数，有人做了调查：六年级结束，只有少于一半的学生能把 $\frac{3}{10}$ 改写成小数，四分之一的学生写成3.10。当要求把0.9写成分数时，错写成 $\frac{0}{9}$ 或 $\frac{9}{0}$ 的占同样的比率。六年级学生中只有14%，七年级学生中只有37%认为0.5大于0.42。调查材料说明，很多学生不会把小数跟位置值或分数的

部分——整体概念联系起来。因此教学中最紧迫的问题是帮助学生理解小数的意义。

关于分数，有人对先教分数乘法还是先教分数加法进行了实验研究。结果表明，先教分数加法学生错误少，因为分数乘法要由分数连加导出。有人主张应把分数既看作算子（分的动作），又看作数量（分的结果）。有人认为教有理数用集合和数轴来说明比用实物和平面区域来说明要困难些，因此建议把用集合和数轴说明放到后面。等价分数和等价小数也是较难的课题，需要在理解分数、小数的意义上增加教学时间。会上还有人提出，分数的计算应当简单一些（数目要小，分母要容易算）。有人提出带分数的重要性问题，结论是带分数的运算的重要性已经下降了。

总起来说，纯数字的处理和法则的形式化过早进入数学教育，破坏了儿童从现实生活经验中获得的初步观念。因此，不应过早地教儿童法则，让他们用一些无意义的符号进行无意义的运算。

三 解应用题问题

这个组谈到的主要问题有：儿童是怎样解应用题的？是什么原因使解应用题发生困难？关于解应用题的教学，我们知道了什么，还需要知道什么？在解应用题的教学中存在什么问题？

有人研究，许多儿童能在校外（如市场上）解实际问题，而且能用不同的方法去解，却不能在学校里解相似的应用题。因为在市场上他们所对付的是各种量，而在学校里他们所对付的较多的是符号。还有人研究，儿童在学校里解应用题时不是彻底思考问题，而是希望“抓”到答案。学校里的教学方法似乎压抑了儿童解应用题的能力。因此在讨论中大家一致同意：1. 教师必须帮助儿童弄清应用题中的语言与数量之间的联系；2. 应当减少对算法的重视，而更多地重视运算的意义；3. 在教学学生解应用题时不应当用关键词如“还剩”、“一共”等。但是也指出，解应用题时有一部分是语言活动，也需要帮助学生解释应用题的语言，使他们了解数量关系，而不是找运算和关键词之间的联系。

还有人研究解应用题的重要组成部分。认为在解应用题时必须分析数量关系并弄清它们的模式，以便找出解法。研究表明，改变一个简单应用题的结构，既能影响题目的难度，又能影响解题的方法。他建议要讨论数量间的关系，重视运算的意义，并提供大量的各种不同的应用题。

有人提出下面的一些做法，对儿童解应用题是有益的：1. 注意动作（如放在一起，比较）；2. 注意部分——部分——整体间的关系；3. 用较小的数目来叙述原题；4. 画图和操作；5. 根据应用题中的数目来考虑答案的范围。

而下面的做法对儿童是无益的：1. 指导儿童识别所给的数据；2. 指导儿童识别所问的问题；3. 用很少的字重述这道题。

认为应当鼓励儿童用计算器计算，以便能把注意力集中在解答方法上而不是在计算上。

最后，讨论者都同意，需要给儿童丰富多样的题型。如果教师要顺利地帮助儿童成为较好的解题者，就必须把注意力不放在教儿童“诀窍”上，而放在发展数学思维上。

四 小学几何

有代表反映，小学里分配给几何教学的时间太少，几何好象引起很多问题，远不如数的方面那样明确。还指出，传统的几何概念极大地影响着教学内容。例如，在法国几何教学的目的不是发展空间观念，而是介绍演绎推理。

在几个国家做了一些实验，研究几何体的性质，在平面上呈现三维物体的方法，几何图形的理解和处理，以及文化对形的概念的影响。表明简单的感知活动并不是对现象复制，而是儿童创造的结果。几何教学必须由儿童自己去揭示各种空间现象的概念，并去发现如何做才容易展示这些概念，以增进对空间的理解。

有的代表强调，要使用各种教学材料来发展儿童的空间能力。例如，用镜子来学习图形的反射；用折纸学习图形的旋转、对称等概念，面积的守恒以及周长的变化；用各种形状盒子来认识三维图形同它们的二维表示之间的关系。

有的代表提出要帮助教师改进几何教学，为他们编专门的书籍，使他们了解几何基础知识，并提出组织几何课堂教学的建议。

最后强调以下几点：

1. 要提供能够吸引学生的教学材料，应把三维的教学材料放在二维的教学材料之前。

2. 所设计的教学材料要使儿童花些时间去探索和创建模型，并自己纠正错误。

3. 在探索阶段之后，所有的活动都应仔细地组织。

4. 教师要做好教学活动的计划，要观察儿童的操作，听他们在说什么，并向他们提问，以便帮助他们学习。

5. 所有这些都牵涉到教师的培训。教师必须具有使用这些教学材料的体验，以便他们自己弄清楚概念。教师在计划和制备教学材料时，需要得到校长和其他教师的帮助。

五 代 数

与会者着重研究的问题有：小学教学代数的意义是什么？代数教学的目的怎样提比较适当？代数教学研究的关键问题是什么？

大家认为代数至少有三个部分：1. 从现实到代数概念；2. 开始认识代数式并明了其可能的“现实”意义；3. 从一个代数式到另一个代数式。并一致认为第三部分在小学阶段是不重要的，或是不适当的。认为在小学进行代数思维比较好，因为它很少是正式讲的，也很少是符号的。但是在小学应当教给儿童符号，还是应当鼓励儿童自己解题，有不同看法。研究报告说明，对儿童进行教学是成功的，但不能用传统的中学代数的教学方法。

对儿童进行代数教学最适宜的活动是寻找，表述，概括范型，用图画、图表和符号形式来表示概括。所有这些都助于逐渐增加对函数和变量的认识。认为给学生说几个数（如 0, 1, 5, 4），然后告诉他们计算的结果（如 3, 5, 13, 11），再让他们猜出计算的规律（如把一个数乘以 2 再加 3），很有好处。

与会者一致认为，代数教学与小学数学其他内容的教学方法相同，即给

学生任务后，让学生通过讨论建立起这方面的经验。代数教学应当有计划、有目的地进行。同时也有一些任务需要进一步研究，如：在小学阶段怎样呈现概念和使概念符号化才便于理解，小学代数除了为中学代数做准备外，是否还有更多的目的等。

六 微型计算机和计算器的使用

与会者主要研究以下几个问题：

1. 如何能用微型计算机诊断学生的错误？2. 如何研制软件以引起数学学习和发展概念？3. 计算机教育的现状是什么？4. 怎么使用计算器？

有人认为，把诊断编入计算机辅助教学材料中在目前还处在原始阶段。他举出编造诊断程序的步骤如下：1. 明确定出诊断的内容；2. 确定为这项内容进行的课程练习；3. 列举出可能出现的错误；4. 在学生答案的基础上研究如何说明错误；5. 记录一些学生的演算情况；6. 提出补救可能成功的办法；7. 对程序做必要的修改。

有人具体介绍了使用计算机辅助教学的内容和方法。如用于教学几何知识，估计长度，理解和使用变量，学习和使用坐标系，解应用题等。有人认为除了少数高年级的天才生外，一般不宜教编程序。但是许多参加者认为，应该教编程序以加强数学的学习。

关于计算器，一位代表介绍说已在很多国家中使用。1982 年在美国，75% 的五年级学生使用计算器；1984 年在英国，87% 的五年级学生使用计算器。英国的一份报告中建议，要在各阶段都利用计算器和计算机。但是要注意计算器对数学课程的效果，特别是掌握一位数计算和估算技能还是很重要的，因为它们可以判断用计算器算出的答案是否合理。无论是计算器还是计算机，如何有效地使用还需要进一步研究。

七 教学的手段和方式

会上讨论了各种教学手段（一般环境，有结构的情境，教科书）的相互关系，以及教学方式（教师，语言，学生的相互作用）。

有些代表强调，数学的学习应当以儿童的自然环境作为出发点。传统的教学都是用木块来说明各种运算。而在生活情境中（如坐公共汽车）学习数学，可以说明计算的意义就是把事件的过程记录下来。但也有些代表主张用木块来教学，认为它是使学习加快的手段，而演剧式的活动相对来说比较慢。还有的代表强调采用游戏可以使学生之间相互影响。

有的代表强调数学的学习应以有结构的情境作为出发点。几何模型对于促进视觉范型的发展，以及对过渡到数的范型和数量关系的对应具有特殊的用途。例如，以建造模型为基础的活动往往要求记录、组织和解释数据。最后学生要学会如何制表画图。这样他们必须学习把各种结果联系起来加以比较，并做出预言。几何模型的活动可以培养解应用题的技能。讨论表明，有结构的情境的范围可以从日常生活到较为形式化的数学。

有的代表强调，在数学教学中要注意使用教科书，认为教科书有一个记录的系统，从而可以使数学变得容易理解。教科书既是给儿童参考资料的来源，又是儿童活动的来源。同时也强调教师是媒介体。他们有数学知识，而

且如果教师不愿意或不能处理变化了的情境，即使有好的教科书也不会产生多大变化。有人提出，如果微型计算机接替了练习的功能，同时还使用具体的教学材料以形成初步的概念，那么教科书可能就变成多余的了。但大多数人相信，还必须有教科书作为鼓舞的源泉，作为一种安全网，并作为学校数学课题的体现者。

（本文原载于《小学数学教师》1988年第2、3期。）

第十届国际数学教育心理学会议简介

第十届国际数学教育心理学会议于 1986 年 7 月 20 日至 25 日在英国伦敦城市大学举行。出席会议的有三十多个国家和地区的代表共 280 多人。会议采取全体会议讲演，分组介绍研究报告，进行课题研究和专题讨论，小字报和图书资料陈列等多种方式。中国代表三人应邀参加会议并在全体会议上发了言。

代表们向会议提交的研究报告有八十多篇。报告的内容十分广泛，有相当一部分是研究和探索学生学习数学的一些具体课题（如算术运算、有理数、立体图形、解问题等）的特点和规律，另外一些则是通过某一课题的教学研究数学教育心理的一般规律或专门问题，如学生的认知能力与课程的认知要求之间的配合问题，在数学学习中学生之间的相互影响，超认知（metacognition）在数学教学中的作用，学生的数学成绩的评价，计算器、计算机（重点是 LOGO 语言）在数学教学中的作用等。

大部分代表分成八个课题研究组，着重研究以下几个课题：16 岁以上至大学学生的数学思维；空间能力和几何知识，几何中的表象、概念和几何概念的形成的理论；数学教育的认识论的研究；表述（representation）对获得数学知识的影响；教学设计（teaching design）的原理；比和比例的理解；数学教育心理和数学教育理论之间的关系；数学教育的社会心理学（着重研究社会的动机，社会的相互影响以及社会的认知）。

另有部分代表则就以下一些专题交换经验和看法：数学教师的准备和发展；探索数学课录象带；性别与数学；促进中小学数学教学的变化；培训数学教师的心理学等。

大会主席柯列斯教授回顾了 1976 年召开第一届会议以来数学教育心理学研究工作的发展情况，指出最初强调“研究要联系数学的学习过程”，“对改进教学要做出更有效的贡献……”，现在已经使这方面的一些需要得到满足。但是他也指出，在大多数会议中认知理论还是一个没有充分表述的领域，而近年来认知理论的发展表明，有关学习理论的基本观点用于数学学习是很有益的。现在需要数学教育心理工作者进行具体的分析，并且细心地使这些理论有血有肉，能直接应用于数学教学及其研究工作。美国麻省理工学院教授帕波特强调，数学经验是一种复合物，必须从多种观点去理解。首先要区分数学的观点和心理学的观点。在心理学的观点中还要区分认知的和情感的。情感不单是对数学的爱憎，而且推动着智力的发展。因此要注意研究数学的认知以外的其他方面。

第十一届会议计划于 1997 年在加拿大举行。

（本文原载于《课程·教材·教法》1986 年第 11 期。）

小学数学教育研究的新发展——第六届国际数学教育会议讨论简介

第六届国际数学教育会议于1988年7月27日至8月3日在匈牙利首都布达佩斯举行。会上除了安排一个组专门讨论小学数学教育中的问题以外，有些专题组的讨论，以及小字报、专题报告会等也涉及到小学数学教育方面的问题。根据所了解的材料，对会议中所反映的小学数学教育研究的新发展，概要地介绍如下。

一 强调学习过程

一些代表认为，对应于教的过程，有必要提出学的过程。数学教育中重要的一点是如何弥合教与学之间的裂缝，如何使教数学与学数学尽可能互相伴随着。提出这个问题的原因，主要是从促进学生在数学方面的进步，或者说逐渐的数学化来考虑的。认为数学化的进程的组成部分有：做模型、公式化、符号表示等。要通过教数概念、数的运算方法来研究和分析教数学的特点，同时也不断地进行逐渐的数学化过程。有一位代表以教乘法的初步认识为例，说明引导学生由具体逐步抽象的过程。还有一位代表用除法（如 $3\sqrt{42}$ ）作例，说明从具体的实际问题出发，引导学生先想出非正规的分的方法，求出得数以后，逐步研究出一般的除的方法，在这之后再类推到被除数是较大数的除法。但是也有的代表认为，也不宜把这个过程拉得很长，还要研究如何用较少的时间使学生学会一般的除的方法。

二 新技术对小学数学教育的影响

与会代表大都认为新技术对于中小学数学教育具有很大的促进作用。使用新技术，特别是微型电子计算机，有助于理解数学概念；有助于掌握一些基本技能，特别是解决实际问题和几何作图的技能；有助于提高学生学习数学的兴趣，使学生从过繁的机械运算中解放出来；还有助于改进数学教育的评价方法。

与会者着重讨论了新技术对小学数学课程内容的影响。有人认为，随着新技术的出现和使用，现行的教学内容将有很多被删掉，而加入一些新内容，并强调要使学生学会一些数学方法，如收集、翻译数据，有条理地排列，概括，归纳和演绎，做模型，类推，化简等。但也有人提出质疑：在数学知识和技能都很差的基础上，能学好数学方法吗？有人认为，口算、笔算、估算、工具算等各种计算方法，只要在生活中和进一步学习中有用处，仍然应该学会，但要重理解、思考和评价，根据不同情况来选用。不少学者认为，计算器虽然有很大用处，但笔算仍是重要的，因此倾向于小学高年级再学习使用计算器。而且不能只把计算器作为一种计算工具，还要用它作为教具帮助理解数学概念，发展学生思维。因此使用计算器会引起内容和方法两方面的改革。

有的学者谈到新技术对教师的任务及其教学方法的影响问题。认为使用计算机以后，增加了学生独立学习的成份，教师的作用会起一定的变化。教师的任务不是传输知识，而是组织学生积极活动，引导学生去探索和发现知

识，让儿童自己构建知识，培养合理的思维。由于新内容、新技术和新教法都影响着数学教育的目标，因此改进数学教育的关键因素就是继续提高教师的专业水平。

会议也提出了使用新技术对教科书的影响问题。有人认为，由于计算机能为理解数学概念、训练技能以及解问题提供材料，因此将会改变数学教科书的结构。苏联一位学者强调，现代的数学教科书应该有助于发展学生的创造性潜能。

会议上有的代表介绍了在家庭作业及课外辅导方面引入新技术的情况。例如，有人调查英国一些学校的学生家庭中拥有微型计算机的已超过 60%，很多学生利用微机程序来完成一些家庭作业。美国一家电视厂，把小学数学的主要内容制成录相带，配合学校的数学教学，每天在电视台播放半小时，不仅学生收看，而且家长和教师也收看，取得很好的效果。也有的国家有人把小学高年级的内容，如质数和合数，整除性的检验，多边形和多面体等，编成电视剧系列。其目的是通过数学概念的学习与愉快的体验的联系，来激发学生对数学的学习兴趣。

三 错误在学习数学过程中的作用

近年来，数学教育工作者对错误在数学学习过程中的重要作用越来越重视。1987 年数学学习国际组织在加拿大开会时曾进行过专门讨论。这次会议上小学组就此问题也进行了研究。大都认为，学生在学习中出现错误和误解，有助于教师确定学生在学习方面存在的问题的类型。教师只有弄清这一点，才能很好地做出自己的教学计划，去帮助学生消除错误。错误和误解都是基于不适当的理解。但是教师通过与学生讨论错误，使他们看到错误之所在以及错误的原因，可以有效地消除错误，而且能使学生加强对数学的一般理解。还有人提出，不应把错误仅仅看作是教师用以诊断学生学习中的困难和寻找消灭错误的策略的工具，还应把它看作是激发学生探索数学知识的动机和手段。要使学生认识到出现错误并不是坏事，它为进一步进行教学活动（包括解问题、提问题、批判的思考等）提供了机会。要着重引导学生分析讨论什么是错误，而不只是如何把它改正过来。如果善于把错误作为质询和探究的出发点，就会使学生得到更大的益处。

四 关于解问题的教学的研究

近些年来，解问题的教学一直是各国数学教育工作者着重研究的一个问题。这次会议着重研究以下两个问题：1. 如何帮助学生理解问题的情境；2. 如何教学生学会使用解题的一般策略。

有的代表指出，传统的教学解问题的方法，往往是由教师给出一个范例，让学生模仿。教师不仅没有给学生准备真实的问题情境，也没有教给学生一般的解题策略。这样既不能提高学生解问题的能力，也不能提高他们解问题的积极性。

为了帮助学生很好地理解问题的情境，有的代表提出，要引导学生弄清题目里有关的事实数据，确定解题的目标以及这些事实数据之间的关系。会上有的代表介绍了他们对影响解题策略的因素所进行的研究。有人认为，问题

的易难与其具体、抽象的程度以及有无事实或有无假设有密切关系。一般地说，具体的比抽象的要容易些，有事实的比假设的要容易些。还有人研究认为，一个数学问题，既有数学结构，又有逻辑—语言结构，这两者都影响着学生的解题策略。此外，学生的解题策略还受着学生生活经验的影响。

关于如何教学生学会解数学问题的一般策略，有人认为，学生解题时包含着复杂的心智活动，如联系、分析、分类、想象、选择、作计划、预测、推论、心算、检验、评价等。要根据学生解题时心智活动的特点给以指导。有的代表强调，通过自我提问，提高学生的认知理解水平，培养学生自己监督、调节他们认知活动的能力（即所谓超认知能力），是提高学生解题能力的重要途径。一位代表在小学四年级进行试验，开始由教师示范，联系数学问题的情境和具体任务，自问自答。如：“首先我需要做什么？——我必须弄清这道题要我做什么。实际上发生了什么事？那么我知道什么可能对解题有帮助？我以前是否见过这样的问题？题里的条件是太多了还是太少了？我能把它找出来吗？我能想出一个类似的或者比较简单的情境吗？合理的答案可能是什么？……”学生熟悉这种自问自答的方法以后，开始练习自己设问，自己回答并加以评价。一年以后，大多数学生能自己构建解题思路，显示出这种方法对提高学生解题能力以及改变学生对数学的态度具有很大的影响。

五 关于一般教学方法的研究

会议对于一般教学方法没有进行专门讨论，但是谈到其他问题时，涉及到一些教学的原则问题，值得注意。例如，谈到教师的培训问题时，提出知识不要由教师来传输，而要由儿童来构建；强调教师要能促进学生提问以及对数学的应用的探究。有的代表在谈到如何评价教师的教学方法时，着重在课堂上是否做到：学生的学多于教师的教，个别教学与集体教学平衡，学生的相互作用，发展学生的合理思维技能与一般的解题技术。

有些代表介绍了对新教学方法的试验研究。例如，有的代表采用探究法进行教学，鼓励学生自己发现数学原理。在探究问题时，学生要收集数据，进行推断。如练习普通分数化小数时，让学生探究什么样的分数可以化成有限小数。他认为，认识的好奇心是引起动机的重要因素。动机越强，学习的坚定性越大。他还认为，学具在探索问题时起着重要的作用，可以促使学生自己去发现数学原理。特别是对差生，可以产生较大的效果。有的代表试验用所谓“有引导和对话的自学法”。指出这种教学方法实际上是讲解、做中学、发现和程序教学这四种方法与古希腊的对话（讨论）法的结合。强调让学生自己去学习经过特殊设计的教科书，通过细致计划好的对话使学生对所学的新课题得到充分的理解。这些活动都是在教师的监督和引导下进行。经过试验，学生获得的知识 and 解题能力都比用传统的讲解法好。但是也指出最困难的问题是编写和印刷教科书。还有的代表强调采用使学生独立工作的方法。认为保证学生有独立工作的条件很重要。教师的指导和鼓励学生应有一定的比例，尽力给学生以充分的时间去思考、实验和讨论。但是对学生的独立作业的安排要有专门的准备。

六 对高能学生的数学教育

这次会议很重视高能学生的数学教育问题。有些代表指出，传统的数学教学只注意中等水平的学生。这是自然的，因为这些学生构成了大多数。但是另一方面，人们也已认识到，高能学生对于发展一个国家的技术和文化所具有的重大作用。每个国家都尽可能使高能学生学得多一些、深一些、快一些，以便为他们的未来的活动做更好的准备。但是，各国采取的措施不尽相同。有些代表在会上介绍了本国的经验。例如，匈牙利在一些学校中设有特殊班，招收数学成绩好的学生，每周上数学课近 10 小时。有的学校创办“数学下午”，为一些高能学生扩展一些新知识。保加利亚除设有加强数学学习的特殊学校（从一年级开始）外，在普通中小学还分成三个水平：1.必修的普通数学，一般每周 4~5 课时，教以系统的数学知识和技能，以解决日常生活和实践中的问题；2.自由选修数学，从六年级起开设，每周 2 课时，目的在使能力较高并对数学有兴趣的学生获得较高的理论水平，并了解现代数学及其应用；3.选修数学，从四年级起开设每周 2 课时，目的是在必修的普通数学的基础上扩展数学知识，或者从数学专门领域获得一些数学知识和能力，以发展学生的个人创造性。在美国和澳大利亚的一些学校中，建立数学俱乐部，或开设暑期学校。在联邦德国则设“MATHEMA”课外学习项目，以提高高能学生的数学水平。

（本文原载于《小学数学教师》1989 年第 6 期及 1990 年第 1 期。）

日本小学数学教材的改革

众所周知，日本小学生的数学成绩在国际上是名列前茅的。据 1981 年国际教育成就评价协会进行第二次国际数学研究，对初中一年级学生的测验结果如下：

	算术	代数	几何	概率统计	计量
国际	50	43	41	55	51
日本	60	60	57	71	69

可以看出，日本学生在各项内容的测试分数都高于国际平均成绩。其中原因之一与教材的改革有很大关系。据国际教育成就评价协会调查，测试的内容中日本学生已经学过的达 75%，而其他各国学生已经学过的平均只有 62%。这也从一个方面反映了日本小学数学教学的水平是比较高的。因此值得我们认真加以研究。

一 日本小学数学教材改革简史

日本小学数学教材的改革经历一个曲折的过程。第二次世界大战前，小学数学的水平是比较高的，40 年代受军国主义的影响，基础知识有所削弱，程度曾有下降。第二次世界大战后，日本战败，制订了新的《教育基本法》和《学校教育法》，1947 年重新拟订了小学算术教学大纲草案。由于这个大纲比美国高，后接受美国教育使节团的专家意见，于 1948 年修改了大纲，减少了内容。乘除数是小数、分数的乘除法、比例、三角形和圆的面积等移到初中教学，教学时数也有减少，在教科书中按生活单元来编排教学内容。结果不仅降低了数学的程度，而且学生不能获得系统的数学知识。在这之后，社会和教育界纷纷对基础学力的下降进行了激烈的批评。为了适应日本经济和科技的发展，1958 年提出了“充实基础学力、提高科学技术教育”的改革方针，修订了教学大纲，增加小学数学教学时数，提高小学数学的水平。在小学学完算术和简单的图形的知识，把乘除数是小数、分数的乘除法、百分率、比例等重新放在小学来教学。与此同时，还加强数量关系的教学，重视培养数学的思考方法。1968 年对小学算术教学大纲进行了修订。这次修订是在国际上开展数学教育现代化运动高潮下进行的。一方面对传统的算术内容做了一些精选，如精简一些繁难的大数目计算，另一方面增加近代、现代的数概念，如介绍集合的用语和符号，等式的性质，负数概念，概率的初步认识等；加强了函数思想，并增加了一些几何知识，如图形的全等和相似，对称，平移，正多边形，棱柱，棱锥，空间的直线、平面的平行和垂直等。由于增加新内容较多，删减一些必要的数学基础知识和技能，给教学造成一定困难，受到教育界及社会的批评。如全国教育研究所联盟大会有一个报告就指出，“大多数教师感到有一半以上的孩子不能接受课业。”1977 年文部省对小学数学教学大纲进行了如下修订：1. 删减内容，其中有负数概念，验证运算的成立，柱体体积，旋转体，等式的性质，概率等；2. 部

分内容适当后移，如 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{3}$ 等简单的分数从二年级移到三年级，折线统计图从三年级移到四年级，体积的概念、全等图形从四年级移到五年级，对称、

图形的包含关系以及频率分布等从五年级移到六年级；3.加强基础知识和基本训练，如加强20以内加减法和乘法表的练习，一、二年级每周各增加了1课时（高年级课时数稍有减少）；4.不出集合用语和符号，也不作为正式内容教学，改为渗透集合思想，体现现代化方向不变；对一般数学用语和符号也适当作了精简。1990年文部省对小学数学教学大纲又进行了修订。这次修订主要是为了适应日本经济的发展以及信息社会的变化，进一步使学生养成用数学理论处理日常事物的能力和态度。具体的修改有以下几方面：1.删减少数内容，如四则运算的可能性，用数表示发生不确定事件的程度，用图象表示反比例的特征等；2.增加一些内容，如被除数、除数同乘、除以一个数商不变的性质，最大公约数和最小公倍数，棱柱、棱锥的体积和表面积，圆柱、圆锥的体积；3.加强一些内容，如估算，几何图形的组成要素，图形间的关系。此外还强调通过操作、实验等活动加深对所学内容的意义的理解，为了减轻计算负担，五年级开始使用电子计算器。

二 日本小学数学教学内容的分析

日本把小学数学的教学内容归纳为4个领域，即数和计算，量和测定，图形以及数量关系。下面就这4个领域分别做些介绍和分析。

（一）数和计算：包括两个方面，一是数概念，二是计算。在数概念方面，教学整数、分数、小数和百分率。整数认到16位数，同我国一样也是四位一级，第四级称兆级。小数认到三位小数。分数则分母多数不超过10。在教学内容重视数的意义及大小的理解，经常通过数轴上表示数来说明数的大小以及数与数之间的关系。此外还重视数的性质的教学。对于整数的性质，着重讲偶数、奇数、倍数、公倍数、最小公倍数、约数、公约数、最大公约数等概念，不讲用质因数分解的方法求最小公倍数和最大公约数。在计算方面，十分重视四则运算的意义、运算间的关系以及运算的性质及其应用的教学。对于多种计算方式注意根据其实际需要提出适度的要求。如整数加减法笔算一般不超过五位数的，小数加减法笔算一般有效数字不超过四位，整数乘除法笔算中的乘、除数以两位数的为主，只出现少量的乘、除数是三位数的，因为较大数目的计算，在五年级教过电子计算器的使用以后，可以用计算器解决，以减轻计算负担。对于较简单的计算要求会用口算。对珠算只要求会做数目不大的（一般限两、三位数）加减法。十分重视估算的教学，并使学生在实际计算中实用。对于混合运算要求较低，一般限两、三步计算的，数目也比较小。上面这些处理既可做到培养学生基本的计算能力，又有助于减轻学生的学习负担。

（二）量和测定：日本小学数学中十分重视量的认识，把它看作小学数学的一个重要组成部分。首先是通过操作建立正确的量的概念，其中包括长度、重量、容积、时间、面积、体积、角度、速度等。其次重视各种量的实际测量，从以自然物品（如铅笔、杯子等）为单位进行测量引出常用的计量单位。同时注意通过各种活动培养学生估计某种量的大小。最后是进行一些有关量的计算，如时间的计算，面积、体积的计算，多边形内角和的计算等。对于同一种量的各个计量单位间的关系也比较重视，但是单位间的换算练习比较简单。关于求积计算内容比较多。在平面图形方面，有长方形、正方形、平行四边形、三角形、圆、梯形和多边形面积的计算；在立体图形方面，有

长方体、正方体、棱柱、圆柱的体积和表面积的计算，还有棱锥、圆锥体积的计算。

(三) 图形：日本十分重视图形知识的教学，也把它作为小学数学中的一个重要组成部分。在平面图形方面，认识的概念比较多，如直线，角，三角形（包括等腰三角形和正三角形），四边形（包括长方形、正方形、平行四边形、梯形和菱形），多边形（包括正多边形），圆等；还认识直线的位置关系（垂直和平行），全等图形，对称图形（包括轴对称和中心对称）等。此外重视简单的作图，如画垂线、平行线、角、三角形、四边形、全等图形（简易的）、扩大图、缩图等。在立体图形方面，认识的概念也比较多，如正方体，长方体，棱柱，圆柱，棱锥，圆锥，球等；还认识空间的位置关系，如了解空间的直线、平面的平行和垂直。此外还出现二视图的初步认识。所有这些，对于发展学生的空间观念有很大帮助，并为初中学习几何知识打下很好的基础。

(四) 数量关系：在这个领域中包含的内容很广泛，归纳起来可分以下三个方面。

1. 用式子表示数量关系：用语言或含字母的式子表示运算关系、运算性质、面积和体积的计算公式以及正、反比例关系；等号和不等号的使用；用或字母表示未知数的等式并求未知数等。

2. 函数：积商的变化，如乘法九九中乘数每增减 1 引起积的变化，被除数、除数同时被一个数乘除商不变等；对两个相依变化的数量的关系进行研究并用图、表来表示；认识正、反比例的关系和特征等。

3. 统计：按照目的收集数据资料 and 进行分类整理，用统计图、表表示资料，并研究其特征；频率分布；了解从一部分资料可以推出全部的趋向；对简单的事件有次序地研究整理发生的情况。

可以看出，在数量关系这个领域中，既包含一部分算术知识，又包含一些代数初步知识，还包含一些统计初步知识。像代数初步知识，不仅不作为独立的知识进行讲授，也不出现“方程”等术语。

此外，值得注意的一点是，解应用题（日本称解问题）也不作为独立的一部分知识出现，而是结合上述四个领域的知识分散出现。在日本小学数学中还是比较重视解问题的教学的，着重培养学生解题时的思考方法。在教学大纲中没有说明教哪些思考方法，但是结合每部分知识都强调了培养使用的能力和思考的方法。具体则由教科书编者加以安排。

从上面的介绍可以看出，日本小学数学教学内容有以下几个特点：

1. 知识面宽，适当控制深度。很明显，日本小学数学的知识面比我国小学的要宽，特别是在几何初步知识方面，比我国小学多了很多。但是多数内容深度不大，规定 6 年总计每周用 29 课时学完。这样既适应进一步学习的需要，又不给学生造成过重负担。

2. 以算术内容为主，适当渗透现代、近代数学思想。这样处理，既适应现代信息社会发展的需要，又保证打好必要的数学基础。

3. 加强知识意义的理解，适当提出计算要求。日本小学数学十分重视对数、量、形的概念的意义以及数量关系的理解，通过数学知识的学习培养思考问题的方法，能在实际中应用。至于计算能力的培养，则根据现代社会和计算工具的发展，提出适当的要求，如降低笔算要求，加强估算，在适当年级引入计算器的使用，这既符合社会发展的趋势，又有利于学生身心的发展。

三 日本小学数学教学内容的编排

日本小学数学教学内容的编排不完全由教学大纲规定。教学大纲中只对各年级要教的内容做了规定，至于每个学年之内的内容如何安排则由教科书编者灵活处理。总观日本小学数学教学内容的编排有以下几个特点。

（一）四个领域的内容齐头并进，相互配合

从一年级起，数、量、形和数量关系齐头并进。例如，一年级在数和计算领域，认识100以内的数，教学20以内的加减法和100以内的简易的不进位加法和不退位减法；在量和测定的领域，通过物体长度、容器大小的比较初步了解长度、容积的概念，初步认识钟面上的时刻（整数和几时半）；在图形领域，初步认识长方体、正方体、圆柱、球、正方形、长方形、三角形和圆。在数量关系领域，虽然教学大纲从三年级才做安排，但是实际上在一、二年级也含有数量关系的因素，如用加减法算式表示数量关系，加法的交换法则等。几个领域的知识是相互配合的。如认识容积时，教科书中画出一个水壶可容7杯水，一个咖啡壶可容4杯水，让学生比较哪种壶容的水多，在认识容积的时候也认识了数的大小。这种四领域齐头并进的办法，有利于学生数学知识和技能的全面发展。

（二）每一部分知识适当划分阶段，分散安排

例如，在数和计算领域，不仅整数划分几个阶段，逐步扩大数和计算的范围，分数、小数也适当划分阶段，分散安排在三至六年级，逐步加深。这样比较符合儿童的认知特点，有助于逐步提高和巩固计算知识和能力。又例如，在立体图形的认识和求积方面，从低年级到高年级逐步加以安排。一年级直观认识长方体、正方体、圆柱和球；二年级出现长方体、正方体的组成要素（面、棱和顶），三年级出现球的初步概念，认识球心、半径和直径；四年级进一步认识长方体和正方体，结合长方体的认识使学生了解空间的直线、平面的平行与垂直；五年级认识体积的概念，计量体积的单位，求长方体、正方体的体积；六年级认识棱柱、圆柱、棱锥、圆锥，并计算它们的体积和表面积。这样分散安排有利于学生空间观念的发展，巩固所学的立体图形的知识。

（三）注意遵循由易到难的原则

例如乘法九九表，先分别教学乘数是5、2的乘法，再依次教学乘数是3、4、6、7的乘法，最后分别教学乘数是8、9的乘法。小数乘法，先教学乘数、除数是整数的，再教学乘数、除数是小数的。分数乘除法的编排顺序也是一样。这样由易到难，学生容易掌握计算方法和规律。

四 日本小学数学教科书的编写

第二次世界大战前日本有全国统一的教科书。1946年以后废除统一的教科书，改为文部省只颁布各科学学习指导要领，即各科教学大纲，由专家学者根据教学大纲编写多套教科书，经文部省审定后出版发行，供学校选用。各套小学数学教科书虽然都是根据统一的教学大纲编写的，但是在每个年级的内容的编排上，教材的处理上，以及编写的风格上不完全相同。下面着重谈各套教科书编写的共同特点。

(一)教科书中只编入讲解的教学内容和基本的练习题,需要进一步巩固的练习题一般都放在教学指导书中,另外印有检查用的标准测验题,供教学使用。

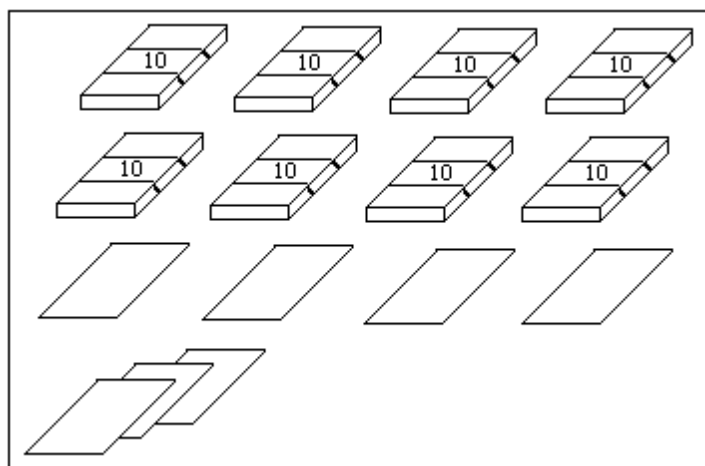
(二)重视通过学生操作、实验和实测等活动抽象概括出数学知识。1990年修订的教学大纲最后关于教学内容的处理上特别强调这一点。在编写各套教科书时也注意体现这一点。例如,教学四则计算时尽量用摆木块、木条、木板(分别表示几个一、十、百)或日元硬币来说明。三年级教学圆的认识时,先让学生把物体的圆形底面放在纸上沿它的一周画圆,然后用带孔的木条固定一点画圆,再用规画圆,在此基础上教学圆心、半径和直径,并用纸剪圆,折叠出直径半径。

(三)重视启发学生思考。日本小学数学教学大纲最后关于内容处理的第一点就是适当设计儿童自己思考,培养学生论理的思考力。这一点与加强操作、实验和实测活动是紧密联系着的。在教科书中都注意体现这一点。例如,三年级教学两位数乘以一位数时,出现例题:“一张硬纸 32 元,买 3 张要用多少元?”接着提问:怎样写算式?然后出线段图,再提问:想想 32×3 的计算方法。然后出钱币图,配合图先出现分步的计算方法:

$$\begin{array}{r} 2 \times 3 = 6 \\ 30 \times 3 = 90 \\ \hline 96 \end{array}$$

再出现算式和答案(略)。最后讲笔算的方法(略)。又例如,五年级上学期讲使用 x 思考的问题时,出现例题:“买了几筐柿子,每筐 90 元,买 1 袋栗子 780 元。总价是 1500 元。买了几筐柿子?”后面出了 3 个问题:(1)柿子的筐数用 x 表示,总价是 1500 元,用一个算式表示出来。(2)从上面所写的算式中,求出 x 所表示的数。接着解方程 $90 \times x + 780 = 1500$ 。(3)把 $90 \times x$ 看作一个整体,再想一想上面所写的算式的道理。可以看出,始终注意先让学生自己动脑思考。

(四)尽量体现教学的顺序,便于教师教学。例如,四年级教学两位数除两位数,先出例题:“有颜色纸 87 张。分给每人 21 张,可以分给几个人?”下面分五步提问:



1. 该怎样列算式?
2. 87 里面有几个 21? 看右图来思考。
 $87 \div 21 = 4$ 余 3
 想一想 $87 \div 21$ 的计算方法。

3.把 21 看作 20，估计商是多少。

4.每人 21 张，分给 4 个人，

$$\begin{array}{r} 4 \\ 21 \overline{) 87} \\ \underline{84} \end{array}$$

一共分了多少张？

下面讲述笔算过程

$\begin{array}{r} 4 \\ 21 \overline{) 87} \end{array}$ <p>在个位商4。</p>	$\begin{array}{r} 4 \\ 21 \overline{) 87} \\ \underline{84} \end{array}$ <p>21和4相乘， 在87下面写 84。</p>	$\begin{array}{r} 4 \\ 21 \overline{) 87} \\ \underline{84} \\ 3 \end{array}$ <p>从87里面减 去84。</p>
--	--	--

5.右面商的书写位置正确吗？

$$(1) \begin{array}{r} 3 \\ 23 \overline{) 76} \\ \underline{69} \end{array} \quad (2) \begin{array}{r} 3 \\ 23 \overline{) 76} \\ \underline{69} \\ 7 \end{array}$$

练习题。（共 12 题，略）

$87 \div 21 = 4$ 余 3 验算一下。

$$(21 \times 4) + 3 = 87$$

(除数 \times 商) + 余数 = 被除数。

练习题，要求验算。（共 4 题，略）

从上面的例子中看出，明确给出了教学的顺序，特别是思考问题的顺序和重点，教师按照给出的思考问题分步教学，就可以顺利地完成教学任务。这对于指导教师教学起着重要的作用。

(五) 重视解决问题及其思考方法的教学。日本小学数学教科书都比较重视解决问题及其思考方法的教学，但是重视的程度和处理的方法不完全相同。比较突出的一套是东京书籍株式会社出版的《新算数》。这套课本除了在各年级结合计算出现一些应用问题外，还从二年级起每学期专门安排一定篇幅的解各种各样的问题。问题的范围大致有以下几个方面。

1. 反映日常生活中的问题和数量关系。例如，二下出现这样的问题：“两学期完了，学生文库有 35 本书。一月份买了 15 本，二月份又买了 9 本。这时比两学期完了增加多少本书？”“孩子们排成一队，铃木的前面有 6 人，后面有 8 人。这队一共有多少人？”三年级出现这样的问题：“木村的捉虫网杆长 110 厘米，要接 80 厘米的杆子，相接的部分是 12 厘米，捉虫网的杆子全长多少厘米？”“路旁每隔 8 米栽一棵树，松子从第 1 棵跑到第 7 棵，跑了多少米？”

2. 适当安排一部分传统的比较容易的应用问题。例如，四年级出现这样的问题：“甲买 1 块橡皮和 2 本笔记本，付 290 元；乙买同样的 1 块橡皮和 4 本笔记本，付 530 元。1 块橡皮和 1 本笔记本各多少元？”五年级出现和差、和倍、差倍问题。六年级出现简易的工程问题。

3. 安排一些渗透现代、近代数学思想方法的题目。例如，四年级出现渗透集合思想的问题：“一班有学生 40 人，其中有兄弟的是 24 人，有姐妹的是 20 人，既有兄弟又有姐妹的是 8 人。看线段图求出只有兄弟的、只有姐妹的、有兄弟或姐妹的。没有兄弟姐妹的各有多少人。”五年级出现用表来解的问题：“有容积是 3dl 和 5dl 的两个杯子，用这两个杯子在水槽中量出 1dl、

2dl.....10dl 的水。使用杯子量的次数要少。”六年级出现渗透排列的问题：“公园里有 4 种乘坐的车，要都乘坐到，可以有多少种来坐的顺序？”

出现上述问题时，除少数给出解答外，多数没有解答，只画出图并提出启发性问题，引导学生思考，自己进行解答。例如工程问题是这样出现的：良子到伯父家玩，下面是两个人的对话。

良子：多么广阔的田地啊！耕地时间要用多少？
伯父：去年用小拖拉机耕了 15 小时，今年用大拖拉机耕了 10 小时。

用两台拖拉机一起耕，需用多少小时？

(1) 知道田地的面积，该怎样计算？

*如果田地的面积是 9000m^2 ，该怎样计算？

(2) 不知道田地的面积，该怎样思考？

*把田地的面积看作 1，小拖拉机 1 小时能耕多少？大拖拉机呢？

*两台一起耕，1 小时能耕多少？

出线段图（略）

*用（1）的解法和答案进行比较。

日本小学数学课本也有些不足或值得研究之处。例如，有些内容的图形知识难了些，有些内容处理过于简略，不够细致，课本中的基本练习显得少些，等等。据日本教学教育学会 1986 年的调查，最喜欢数学的小学生从 1976 年的 28% 下降到 20%，而最不喜欢数学的小学生从 1976 年的 21% 上升到 33%；1976 年小学数学在最不喜欢的科目中居第四位，到 1986 年在最不喜欢的科目中升居第一位。这也说明日本数学教育工作者在看到成绩的同时也看到小学数学教学改革还存在着问题。1990 年公布的新教学大纲以及根据新大纲修订的小学数学教科书于 1993 年才开始实施，情况能有多大好转，还需要经过一段时间的实践检验。

（本文原载于《课程·教材·教法》1995 年第 3 期。）

苏联一至五年级的数学教学改革

一 大改革前的算术教学情况

苏联对数学教学进行重大改革(以下简称“大改”)是从1969年开始的。在这以前,小学是四年制,设算术课,主要内容有整数四则运算,分数的初步认识,常用的计量单位,简单的几何形体知识(包括长方形、正方形的面积和长方体、正方体的体积)。中学第一年(称五年级)和第二年(称六年级)的第一学期继续设算术课,系统地学习整数、分数、小数、百分数、比例以及几何初步知识(包括三角形和圆的面积等)。六年级第一学期算术课每周4课时,另外2课时开始学习代数。因此可以说,中小学一共以五又三分之一学年的时间教完算术全部内容。这在当时各国的算术教学中,是进度最快的,教学质量最高的。但是在苏联的中小学数学教学中,一直存在着学生负担重的问题。原因是多方面的,首先是教材的选择与安排问题。60年代初曾把一至三年级的教学内容顺次向下一个年级移一些,例如把100以内整十数四则运算从一年级移到二年级,把1000以内整百数四则运算从二年级移到三年级,把三位数乘除法从三年级移到四年级,但是并没有从根本上解决问题。主要是内容和要求偏难、偏高,在安排上也有重复。此外教学方法也存在一些问题,教得比较死,教学效率不高。

早在1957年,苏联心理学家赞可夫就开始研究小学教学改革问题,着重解决教学与学生的发展之间的相互联系的理论问题。与此有联系的是建立小学各科教学的新体系。1957年开始实验,到1961年,学生用4年的时间除学完原来小学四年级规定的算术内容外,还学了五年级的一些内容。以后继续进行改革实验,结果以3年的时间学完原来小学四年的算术内容,还多学了一些代数初步知识,从而初步建立起小学三年的数学教学新体系。后来他在实验总结中谈到他的新教学体系有以下几个特点:1.把教学建立在高难度的水平上(当然要严格掌握难度的分寸);2.高速度地学习教材(也要注意速度合理,能促进学生的一般发展);3.提高理论知识的比重。这些教学思想的改变,对当时传统的教学思想是个很大的冲击,对后来算术教学的改革产生了很大的影响。

二 60年代末至70年代一至五年级数学教材的改革

苏联在第二次世界大战后,科学技术有较快的发展,1957年卫星上天是一个重要的标志。随之而来对数学教学目的、教学内容提出了新的要求。正如后来公布的中学数学教学大纲中所指出的,“要求学生在数学的发展和知识、技能、技巧方面,必须为他们学习在现代生产条件下从事实际活动,为他们学习较高水平的课程(物理、制图、化学等)以及进一步在高等学校学习达到一定的水平。”当然,1958年以后,美欧各国的数学教育现代化运动对于苏联的改革也有一定的影响。

1964年末开始了起草中小学数学教学大纲的工作。1967年初公布了小学(改三年制)数学教学大纲(草案)。大纲中吸收了赞可夫以及其他专家的实验研究成果。1968年公布了中学(四至十年级)数学教学大纲(草案)。1969年小学一年级开始使用新教材,1970年四年级开始使用新教材。后来对

大纲曾做了一些修订，相应地各年级数学课本也做了一些修改。

(一) 这一时期一至五年级的数学教学内容

一至三年级：在算术方面，除教学多位数四则运算，分数的初步认识、常用的计量单位外，还增加了一些作为口算加、减、乘、除法的基础的运算性质，如和加上一个数，一个数减去和，和乘以、除以一个数等。新增加一些代数初步知识，如不等式，用字母表示数，求代数式的值，简易方程，列方程解应用题等。在几何初步知识方面，同原来的大纲相比，增加了圆的认识，图形的分解与组合，但删去长方体、正方体的体积计算（移到中学）。

四、五年级：除了把原来的中学算术内容学完（只教正比例），在代数知识方面，增加正负数，一元一次方程；在几何知识方面，增加的比较多，如合同图形，角的二等分线，补角，三角形内角和，三角形的分类，对称，平移，简单的尺规作图等。此外，还增加了集合的初步知识，如子集、交集、并集、集合的分类等。

可以看出，前五年不再单纯地学习算术，而编入一些代数，几何的一部分知识，并适当增加现代、近代的数学知识，形成一个综合的数学课程。这同原来的算术课程相比，是一项重大的变革。另外同欧美各国数学教育现代化运动后的五六年级相比，数学水平仍是比较高的。

(二) 这一时期一至五年级数学内容的编排体系在编排上主要有以下几个特点：

1. 减少整数的循环。例如在小学取消了 20 以内的四则运算这一圈，删去 20 以内的乘除法，而把 20 以内进位加法和退位减法并入 100 以内的加减法；把原来小学四年级的整数四则运算的系统整理并入新的四年级（中学第一年）。

2. 加强知识间的联系，算术、代数和几何齐头并进，相互配合。在小学，以算术知识为主，适当出现一些代数、几何初步知识。讲 10 以内加减法时，就出现最简单的方程，如 $x+5=8$ ， $x-3=5$ 。以后还出现列方程解一步应用题，二、三年级逐步增加难度。一年级还出现直线、线段、多边形、直角。二年级出现折线、圆、图形的分解与组合等。三年级教学长方形、正方形的面积计算。四、五年级则以算术和代数知识为主，配合几何知识，把算术和代数打通，按照数概念的发展统一编排，形成一个比较完整的体系。四年级首先讲自然数和自然数四则运算，结合除法出现分数概念及同分母分数加减法，同时配合出现等式、不等式、解方程、角、长方体体积。然后讲小数概念和小数四则运算，配合出现米制计量单位、百分数、比例尺、统计图、角的度量、三角形内角和及面积、尺规作图等。五年级先讲正负数，把数的范围扩大到全部整数。配合出现集合的运算、合并同类项、解方程、对称、平移、几何作图等。然后讲有理数，以正分数运算为主，适当出现一些负分数四则运算，还配合出现比例、圆的周长和面积，以及一些几何作图。在具体安排每一部分内容时也注意知识间的联系。例如，10 以内的加减法，改变传统的加减分编的方式，使有关的加减法互相穿插和对应。对简单应用题，则把有联系的加以分组，适当集中教学。

3. 按照理论知识指导数学概念和计算的原则来安排教学顺序。有些概念如角、邻补角、合同图形等用集合观点来定义，把这些知识放在集合的初步知识之后。讲口算加减法是以“和加一个数”、“一个数减去和”等运算性质作为算理的依据，就先通过直观讲有关的运算性质，然后再讲口算方法。

4.统一了编写体例。60年代,小学算术课本基本上采用习题汇编的形式,对新知识举例讲解比较少;而中学算术专有课本系统地讲解新知识,另外有一本习题汇编供做练习用。这次统一采取了以习题汇编为主、适当讲解新知识为辅的形式,只是四五年级讲解的部分比小学的稍多一些。

这套大纲和课本经过几年的使用,出现了不少批评意见,主要有以下几点:第一,新增加的内容,学生难接受。例如,一年级要求学生列方程解应用题,二年级出现含有两步运算的方程,如 $72-(54-x)=52$,学生形式地接受了,但不理解。四五年级教学集合的概念,并用集合的观点定义一些概念等。有些专家认为,“不应该把集合理论作为阐述中学数学的基础。”第二,教学内容过多,学生负担过重。第三,必须掌握的基本技能有所削弱。

1978年开始对小学数学教学大纲和课本做了一些小的修改,主要有:一年级完了只要求学好100以内的不进位加法和不退位减法,并能解答简单应用题,不要求必须学会解答两步应用题,同时把列方程解应用题移到二年级;二年级删去长方形周长的计算公式,三年级删去和差积商的变化,用字母表示数量关系。四五年级数学涉及中学数学全部课程内容,由不同单位拟订了几个大纲的修改方案,因为争论比较大,没有确定下来。

三 80年代一至五年级数学教材的改革

进入80年代,苏联对一至五年级数学教学大纲和课本进行了较大的修改。

1981年,苏联教育部公布了中小学数学教学纲目。一至三年级,强调数学课程的任务是“学习自然数的算术运算及其对最简单的量的应用,直观地介绍几种几何图形及其性质。”这就是说,代数初步知识不再作为小学的一项主要教学任务。只在教求每种运算的未知项时出现方程的形式。同时对除数是二、三位数的笔算除法适当降低了要求。四五年级数学课程的任务,强调“对小学学过的数学知识进行概括和发展,为学生学习系统的代数和几何课程做准备,学习代数和几何的极其初步的知识。”这就是说,降低了代数、几何的要求。具体调整的内容有:删去了有关集合的知识,等式的性质,几何的变换,较难的尺规作图(如把线段二等分,作角的平分线,根据所给的条件作三角形)等;简化了对称、解方程(改按已知数和得数间的关系来解),增加了最大公约数、球的认识,以及已知两点的坐标求它们的距离。1982年公布了新的教学大纲,明确规定不再以集合论的观点处理中小学数学,较多地注意发展和巩固计算技巧。具体内容与1981的教学纲目基本相同。

1984年,苏共中央制定了《苏联普通学校和职业学校改革的基本方针》,决定把小学学制延长一年,提早到6岁入学。1985年2月苏联公布了普通学校(小学4年,中学7年)的标准教学计划。稍后,又颁布了中小学数学教学大纲。其中四年制小学数学教学大纲是在原三年制小学数学教学大纲的基础上制定的,教学要求和程度基本相同,但是为了适应四年制小学提早入学的特点,把教学进度放慢,大体上把三年制小学前两年的内容安排在三年内学完,一年级改为每周4课时。二、三年级改为每周5课时。四年级的内容和教学要求与三年制小学三年级的基本相同,每周都是6课时。此外,大纲中还有以下几点修改:1.在10以内数的认识前面加强了准备课,主要增加比较物体大小、长短、形状,认识空间方位,初步认识时间,物体群的比较等;

2.把 11—20 各数的认识和计算单划为一个阶段,加强了进位加法表和相应的减法的教学;3.100 以内两位数加减法,教口算的同时增教笔算;4.进一步简化方程,小学只出现最简单的,如 $x-356=478$, $6 \times x=426$ 之类,用方程解应用题也只限一步的;5.适当加强了简便算法;6.有些内容推迟出现,如大于号、小于号改在二年级教 20 以内加减法时出现,线段和用字母表示点、线段、角移到四年级。经过这样修改,切实降低了难度,减轻了学习负担。但是目前仍是少数小学试行,大多数小学仍实行三年制,七岁入学。在制定四年制小学数学教学大纲的同时,对三年制小学数学教学大纲也做了相应的修改(第一部分准备课没有变动)。新学制五、六年级数学教学大纲则在原来四、五年级数学教学大纲的基础上进行了修订。主要有:1.删去对称、合同图形;2.增加反比例的概念;3.增加计算器的初步知识。

1986 年起,按照新大纲编写新课本陆续出版了一部分。这些课本除了在内容上符合新大纲要求外,初步看到还有以下几个特点:1.内容的编排更加系统,前后联系更加紧密。比过去的课本重点更为突出。例如,过去几何安排较乱,同算术知识联系较差,现适当集中,同算术知识联系有些改进。2.增加了例题,加强了新知识的讲授。四年制小学课本还部分地改变了习题汇编的形式,教学新知识与学生的练习适当分开,题量也适当减少。3.注意适应学生的差异。如另编有练习册或在原课本中编有难易不同程度的练习题,供选择。

总的来看,80 年代苏联一至五年级的数学教学内容和要求,发生以下几个较大的转变:1.从算术、代数、几何基本上并重转为以掌握系统的算术知识为主,学习一些代数、几何初步知识,为系统地学习代数、几何做准备;2.从重视理论知识忽视技能、技巧转为理论知识与技能、技巧并重;3.从强调用集合论的观点、变换的思想等处理教学内容转为删去这方面的内容。但是这些转变并不意味着恢复到六十年代数学教育现代化运动以前的情况。由于加强了算术和代数、几何之间的联系,采取了理论知识与技能、技巧并重,扩展知识面的同时注意了降低难度、减轻负担,不是使改革全部后退,而是使改革更符合当前苏联的实际,同大改前相比仍然有较大的前进和提高。

四 近二十年来一至五年级数学教学方法的改革

(一) 苏联一至五年级数学教学方法改革的过程

苏联一至五年级数学教学方法的改革是从 60 年代末、70 年代初,随着数学教学内容的改革相应地开始进行的。改革以前,基本上采用传统的教学方法。50 年代采用的主要是讲解法,尽管在讲解时注意运用分析与综合、归纳与演绎,但是以教师传授知识为主,难以发挥学生的主动性。有时运用问答式的谈话法,但是往往是知识的再现,而缺少启发思考。大量地运用着练习法,目的也主要是巩固和熟练所学的知识 and 技能。到 60 年代,由于提出了发展学生的认识能力,培养学生的独立性、创造性,在教法上有了一些改进。强调谈话法要注意启发性,在某些情况下还采用实验法或独立作业法。但是这种独立作业只是带有自学的性质,并作为教师讲解的准备。例如,课本中给出乘数中间有 0 的乘法竖式,让学生研究分析,找出乘法的简便方法,然后由教师讲解并加以概括。少数有经验的教师开始注意让学生独立研究一些例子,独立作出结论。

60年代末70年代初，随着数学教学目的、内容的改革，也提出了数学教学方法的改革问题。例如，《小学数学教学大纲》中强调，“教学方法的改革要集中在教学过程中，充分发挥儿童认识活动的积极性，发展儿童的独立能力。”《中学数学教学大纲》中也强调，“应当大力发展符合下述要求的教学方法：有利于提高学生学习数学的兴趣，使学生自觉掌握数学概念，有利于激发学生的积极性，有利于培养学生的自学能力，善于合理地、创造性地完成所得到的任务，独立获取知识。”

但是教学方法的改革并不是很容易实现的。由于更新教学内容，教师缺乏经验，掌握不好教学要求和教学方法。例如，小学增加了一些代数、几何初步知识以后，安排在三年中有计划地进行教学，引入概念是初步的，不能要求达到正式定义的水平。但是有些教师提前要求学生回答“什么叫式子”“什么叫式的值”等问题。教学几何图形时，不是利用观察、制作、画图等方法，而只用语言文字的方法，把形式化的定义告诉学生。有些教师把他自己在中学学过的线段的定义教给学生。有的则是由于教师习惯使用传统的教学方法，不能随着教学目的的变化而改变教学方法。例如，在应用题教学时：正如苏联莫罗等著《小学数学教学法》中所说的，“许多教师一直到现在还没有在应有的程度上理解所发生的变化，在使用教学方法方面，仍然采用传统的办法。”另外有些坚持使用传统的某一种教学方法的专家、教学指导人员仍给教师以影响。莫罗等著《小学数学教学法》也曾指出过，“按照传统习惯给教师提出解一定类型（以前的教学大纲所列举的）应用题的教学目的，这种根深蒂固的传统势力一直到现在还在产生消极的影响。”苏联教育部长也曾指出过，经常看到某个专家“顽固地企图使人家接受他的思想”，“在讲授大纲的某一章节时只要采用他喜欢的那种教学方法才是唯一正确的”。

根据以上一些情况，苏联十分重视针对改革教学方法中存在的问题及时地给以指导。例如，1981年公布的中学数学教学大纲中就强调，“数学教师有权选择不同的教学途径和讲述大纲内容的方法。”1984年苏联教育科学院教学内容与教学方法研究所发表一封教学法指示信中强调，“提高数学教学质量的重要潜力在于，改善教学过程的组织，提高科学教学法水平和综合技术教育的方向性。”“主要的问题在于组织学生的合理的学习性劳动和培养他们的独立思维能力。”1985年《中学数学教学大纲》进一步强调，“衡量教师工作是否成功的标准，应该是学生学习数学的质量和教师完成教学与教养任务的情况，而不是形式上使用某种教学方法、手段、方式或教具。”由于有针对性地及时地给以指导，数学教学方法的改革比较好地沿着正确的方向发展。

（二）一至五年级数学课中常使用的教学方法

近年来，苏联根据现代教学论原则，在数学课中提倡使用的教学方法主要有以下几种：

1. 讲解法。这原是传统的教学方法，其特点是以教师讲述为主，把数学知识直接传授给学生。60年代末70年代初，一度对这种方法持否定态度。后来有所改变，认为这种方法仍有一定的优点，如可以较系统地阐明新知识。但是随着数学教学目的的改变，可以从性质和方向上把它加以改造，强调讲解时要激发学生的兴趣，注意启发学生积极思考。

例如，教学 $42 \div 3$ 的口算方法。由于学生已经学过 $46 \div 2$ 之类的口算方法，讲解时，教师可以提出启发思考的问题，“能不能按照前面学过的方法，

把 42 分解成 40 和 2，然后用 3 分别去除呢？”教师试除一下，说明用 3 分别除 40 和 2 都不能除完没有余数。然后再提出启发性问题，“能不能把被除数分解成两个数，用除数都能除完没有余数呢？”教师试把 42 分解成 24 和 18，结果都能除完没有余数，把得到的商 8 和 6 加起来，得 14。接着再提出启发性问题，“这样算很不方便，怎么能使分解的两个数算起来简便呢？”最后教师说出，可以分解为 30 和 12， $30 \div 3 = 10$ ， $12 \div 3 = 4$ ， $10 + 4 = 14$ 。还可以再举一个例子，进一步说明这样计算简便。在上述教学过程中，虽然每次教师提问后都由教师自己回答，但是使讲解带有探索研究问题的性质，而且由于给了学生思考的机会，就促进学生和教师一起，在头脑中遵循着探索、论证来学习数学知识的途径，使学生初步学到人类探索问题的方法，从而提高了学生的认识能力。

一般认为，使用讲解法宜于在较高年级，讲解的时间不宜过长，只能占一节课的一部分。

2. 谈话法。这也是过去一直使用的教学方法。但在过去多用于检查已学的知识，要求学生再现学过的知识。现在有所发展，把这种方法用来教学新知识，而且强调提出启发性问题，引导学生积极思维。

例如，教学应用题：“一个学生买 5 本练习本，每本 2 戈比；买 3 支铅笔，每支 5 戈比。一共付出多少钱？”在让学生复述已知条件和问题后，可以采用如下的启发性谈话：“题里问的是什​​么？”“看一下题都买了什​​么？”“要求一共付多少钱，必须先知道什​​么？”当学生共同分析到这里，就可以让学生自己解答。

采用谈话法时，强调要注意所提的问题本身不应隐含着对答案的提示，或者在问题中就包含着的一部分答案。例如，指着三角形的高问学生：“这条线段是不是三角形的高？”就是不适当的提问。还强调在谈话结束时，教师要加以总结，再让学生进行练习。

3. 独立作业法。这也是过去数学课上用过的教学方法。但是如前所述，过去多用于再现一些定义、法则，或在讲解新知识之后，做练习时用，以巩固和完善已获得的知识、技能和技巧，很少用于教学新知识。现在由于强调培养学生独立获取知识的能力和创造性，开始重视在教学新知识时也适当使用独立作业法。采用独立作业法进行教学的内容，一般是与旧知识有一定联系的，比较容易在已学的基础上类推的，或者自己能探索出规律来的。

例如，在四年级教学乘法分配律时，教师先提出如下的三道应用题：

(1) 果园里种 8 行果树，每行有 5 棵梨树和 7 棵杏树，一共种多少棵树？

(2) 两辆汽车同时从两地出发，相向行驶，第一辆每小时行 80 千米，第二辆每小时行 60 千米。3 小时后相遇。两地相距多少千米？



(3) 求长方形的面积。（如上图）

要求学生独立分别用两种方法解答后，再分别对每种方法，每题的两种方法进行比较，分别列出等式：

$$(7+5) \times 8 = 7 \times 8 + 5 \times 8$$

$$(80 + 60) \times 3 = 80 \times 3 + 60 \times 3$$

$$(5+3) \times 4 = 5 \times 4 + 3 \times 4$$

然后让学生找出这三个等式的共同点，并用字母表示出来，即 $(a+b) \times c = ac + bc$ 。

最后教师说明，得到的结果是一个新的运算定律，叫做乘法分配律。教师让学生用言语表述后，再通过练习加以巩固。在学生独立进行分析比较时，教师注意巡回到学生中去了解有无困难，必要时可以给一些启发和帮助。

4. 实验法。这种方法在 60 年代已经开始提倡，现在进一步强调在教学量的计量以及几何初步知识时充分使用。认为使用实验法不仅可以使学生更清楚地获得计量单位以及图形的表象，而且可以培养学生的观察能力和工作的精确性。

例如，四年级教学三角形的内角和时，先让学生拿一块长方形纸，沿对角线剪开，成为两个完全相同的直角三角形。根据长方形的 4 个内角和是 360° ，可以算出直角三角形的 3 个内角和是 180° 。然后拿一个锐角三角形，从一个顶点到底边画高，沿高剪开，也成为两个直角三角形。根据第一次实验，知道每个直角三角形的内角和是 180° ，但是这两个直角三角形的两个直角和是 180° ，而且有两条边正好拼成锐角三角形的底边，由此可以推出每个直角三角形的另外两个锐角的和是 90° ，4 个锐角正好拼成原来锐角三角形的 3 个内角，由此可知锐角三角形的内角和也是 180° 。同样也可以推算出钝角三角形的内角和也是 180° 。最后得出结论：任意三角形的三个内角和都是 180° 。



在苏联的教学法著作中指出，这种实验方法虽然有助于发现数学规律，但不能把实验的过程和结果都看作是严格的论证。

5. 实践作业。这也是过去数学教学中常采用的教学方法，但是现在比过去更加重视。苏联《小学数学教学大纲》中曾指出，系统地进行一些实践作业，如制做几何形体、画图形、剪纸、制作模型、测量等，有利于完成量的计量和几何初步知识的教学任务，而且培养了学生初步绘图、测量的技能，发展了学生的实际操作能力。四、五年级数学教学大纲中也强调学习几何的基本概念，主要借助于直接的观察和实践，很多结论是要通过作图和测量加以总结而得出。实践作业的另一方面是配合计算、解问题进行一些实际操作。在苏联，引用皮亚杰的观点指出，传统的教学的缺点，在于只用口头讲解，而不是从实际操作开始数学教学。还强调指出，“教育心理学的现代观点要求儿童积极地完成具体操作，让他们独立地研究假设和结论”。为此，苏联专门拟订一整套数学教学设备，除了过去常用的算盘（每档 10 个珠）、小棒等外，还包括西方国家广泛使用的操作用教具，如奎逊耐木条等。

6. 研究法（或启发法）。这是一种组织学生进行探讨和创造活动的方法。由教师向全班提出研究的问题，然后引导学生独立地发现某一数学事实，或解答某一问题。这种方法与引导发现法基本相似。从 60 年代中期起，在苏联一些学校就开始试验，证明能发挥学生的主动性和创造性，提高学生学习的兴趣。当时曾有人反对，认为让学生“发现”数学中的新东西比记住现成的东西要难得多。但是一些数学教育家认为，对学生来说，在适当的教学条件下象数学家那样自己去“发现”真理，比死记那些不理解其来源、意义和相

互联系的命题和证明还要容易些。但是也强调研究或探讨的问题必须是学生力所能及的。后来这种方法逐渐为一些教师所采用。

除了上述几种教学方法外，有的教师还采用按照教科书自学。例如，五年级教学分数乘法时，先让学生阅读教科书中的几个例题，然后指定学生逐题讲述自己是怎样理解的，最后说出计算法则。采用这种方法的教师认为，便于学生理解和掌握教材，易于牢记，并与已学的知识联系，使学生沿着一定方向前进的思维处于积极活动的状态。但是一些数学教育家认为，要使自学取得好的效果，教师必须组织好学习，特别是要引导学生边读边想，达到理解书中所叙述的主要内容；遇到不懂的地方要提出来，由教师或学生加以讨论帮助解决。

在苏联的数学教学中，根据现代教学论观点，强调教学方法是多种多样的，没有一种是万能的。教学时要根据教学目的、教学内容、教学组织形式以及学校的教学设备等，合理地选择教学方法。即使在一节课内也不限定只用一种教学方法，可以几种方法配合使用。但是要防止形式主义地选用教学方法，片面追求方法的多样化。强调重视提高教学效果，做到教学方法和手段的最优化。此外，近年来还强调提高课堂教学效率，按规定的时间标准布置家庭作业，不容许把应当在课堂上完成的作业安排为家庭作业，以免造成学生负担过重。但是根据学生的不同水平对家庭作业的布置有所区分还是可以的。

五 简要的评析

总观苏联一至五年级的数学教学，以五年的时间不仅教完算术的基本内容，而且教完有理数、一元一次方程和一些几何初步知识，这在全世界来说，是数学水平最高的国家。即使将来把小学延长一年，改为6岁入学，以6年的时间教完上述内容，同世界各国比较，数学水平也是较高的。由于在前五年打下较好的数学基础，就为进一步学习数学以及其他学科提供有利的条件，而且为培养大量的优秀科技人才创造了前提。

苏联在数学教学方面取得的成绩，是经过长期不断改革逐步提高的结果。其中也走过一些弯路，但是有一些基本经验和最近发展趋势是值得重视和认真研究的。可以概要地归纳为以下几点。

（一）明确数学在普通学校中的重要地位和作用，重视不断提高数学教学质量。正如苏联的数学教学大纲中所指出的，在现代科学技术革命和科学技术转变为直接的生产力的条件下，数学是科学和技术的语言，中小学学生接受数学教育是科学技术进步的必要条件；国家在科学技术、生产、经济和国防上的潜力，直接依赖于中小学数学的教学质量。当前我国正在进行社会主义现代化建设，也必须充分重视中小学数学教学质量的提高，首先要在小学切实打好数学基础。

（二）制订统一的数学教学大纲，对各年级提出明确具体的要求，并且加强对数学教学的指导，不断针对数学教学中存在的问题及时地提出适当的提示或建议。我国小学数学有统一的教学大纲，教学要求也比较明确具体，但是对教学的集中统一指导还比较薄弱，苏联的经验对我们改进这方面的工作有一定帮助。

（三）重视根据不同年龄特点教给学生系统的理论知识，同时注意培养

有关的技能和技巧。这一点是经过一些弯路逐步认识明确的。早在 20 年代末 30 年代初苏联曾犯过片面强调学习实用知识忽视学习系统的理论知识的错误。1931 年纠正了这一错误。60 年代末 70 年代初又出现了过多重视理论知识而忽视技能技巧的偏向。80 年代有了一定的改进。我国小学数学教学改革的进程中也出现过类似的问题，联系到苏联的经验教训，更值得我们认真研究，正确处理好理论知识和技能技巧的关系。

（四）重视发展智力培养能力，特别是重视培养学生逻辑思维能力和独立获取知识的能力。苏联小学数学教学大纲中明确提出要发展儿童的逻辑思维、记忆、注意、创造想象、观察、严格地连贯地推理论证能力，要教学生学会简要地、准确地、清楚地而且正确地表达自己的思想。而且重视因材施教，有区别要求。对落后的学生必须达到规定的教学要求，同时强调要让学生尽可能充分发展数学方面的本领和才能。为此，课本编入较多的习题，而且专门编印一些难度较大的题目，还介绍一些数学史知识，以尽量满足那些在数学方面有兴趣和爱好以及有才能的学生的要求。在教学方法、教学组织形式方面也适应这一要求，适当加以改变。强调把全班作业、小组作业和个人作业有机地结合起来，课外采取数学小组、数学比赛等活动。我国小学数学课堂教学中“一刀切”现象还比较严重，课外活动也只有少数地区、学校开展起来，苏联的经验值得我们学习。

（五）在数学教学中始终注意培养学生道德品质和良好的学习习惯。在苏联，特别强调使学生形成科学的辩证唯物主义世界观，进行爱国主义教育，和培养学生热爱劳动、认真负责、克服困难等品质。在教科书中注意反映学生的社会公益劳动、爱护自然界、勤俭节约、以及数学史等有教育意义的教学内容。重视在做练习题时培养学生按照规定在方格中把数字和算式书写整洁。这些都对于提高苏联公民的素质起着积极的促进作用。我国现在正加强对学生思想品德教育，重视在数学教学中培养良好的道德素质和学习习惯，认真研究和吸取苏联的经验，对我们进一步改进这方面的工作也会有一定帮助。

（本文原载于《中国小学数学教育》1989 年第 12 期及 1990 年第 1—4 期。收入本书时文中的“苏联”均未改，以保持文章原貌。）

美国小学数学的教学方法

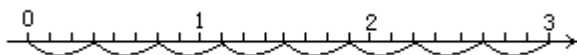
目前，在美国小学数学课上使用较多的教学方法有以下几种。

一 讲解法

这是传统的教学方法。它的特点是由教师告诉学生怎样证明数学的性质，怎样理解和使用概念，怎样计算。讲解时常用演绎法，即教师先出示概念或一般法则，再举几个例子说明，然后学生进行练习。

例如，教 $3 \div \frac{3}{8}$ ，教师采取不同的途径说明除法的计算方法：

“ $3 \div \frac{3}{8}$ 就是求3里面有几个 $\frac{3}{8}$ ，先用直线上的点表示的数来说明。把每个1分成8个八分之一，我们可以数出3里面有8个 $\frac{3}{8}$ ，得到的答案就是8。”



“求3里面有几个 $\frac{3}{8}$ ，还可以把3个一化成24个八分之一，然后写成：

$$3 \div \frac{3}{8} = \frac{24}{8} \div \frac{3}{8} = \frac{24 \div 3}{8 \div 3} = \frac{8}{1} = 8$$

“我们还可以使除数变成1，为此要给 $\frac{3}{8}$ 乘以 $\frac{8}{3}$ ，那么被除数也要乘以 $\frac{8}{3}$ 。”

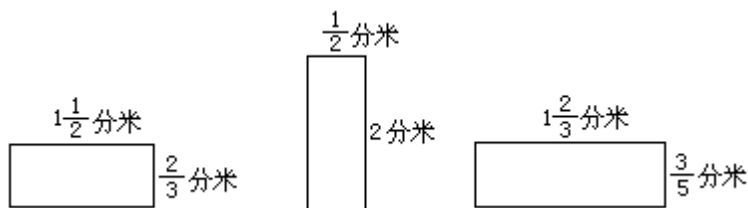
$$3 \div \frac{3}{8} = (3 \times \frac{8}{3}) \div (\frac{3}{8} \times \frac{8}{3}) = 3 \times \frac{8}{3} = 8$$

美国的教学法研究工作者一般认为，用这种教学方法可以在较短时间给学生较多的较系统的知识；特别是在讲一些新的概念以及一些符号记法时宜于采用。但是这种方法也有很大的缺点，在引起学生的学习动机方面较差，容易把学生作为一个接受器，把数学知识注入给学生，而且系统讲授往往不能完全适合学生的需要，影响教学的效果。

二 探究法

这种方法是由教师给学生提出一些需要解决的题目，并引导学生探究出这些题目的计算法则或公式来。

例如，教倒数时，教师画三个长方形，让学生根据所给的长和宽分别算出面积。



然后让学生算下面问题：

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} \quad \frac{8}{9} \times \frac{9}{8} \quad \frac{7}{5} \times \frac{5}{7}$$

$$\frac{8}{11} \times \quad = 1 \quad \frac{9}{13} \times \quad = 1 \quad \frac{7}{8} \times \quad = 1$$

想一想：由此得到什么公式？为什么？

让学生到黑板演算之后，找出各题得到不寻常的结果的原因，再让全班学生找出各题有什么相同点。当学生找出“每个分数的分子是另一个分数的分母时，它们的乘积等于1”以后，教师指出倒数概念，并让学生做求一个数的倒数的练习。

三 发现法

这种教学方法强调让学生自己去探索和发现知识。美国心理学家布鲁纳是这种教学方法的积极倡导者。他主张“教数学……要让学生自行思考数学，参与到掌握知识的过程中去。”发现法的一般步骤是：1. 创造问题的情境；提出要解决的问题；2. 拟出解决问题的方法和途径，收集资料；3. 提出假设；4. 检验假设；5. 总结得出结论。采用纯发现法进行教学，自始至终都由儿童自己独立活动。其优点是可以充分发挥学生的主动性，但是也有很大缺点，难以使学生获得系统的完整的知识，因而达不到预期的目的。近年来提倡采用引导发现法，即在拟定解决问题的途径或提出假设时，教师可以适当给以提示和帮助，最后还可以组织讨论。这样，既能发挥学生的主动性，又能使学生获得较系统的完整的知识，并发展他们的智力。

例如，教学整数除以分数时，先提出如下的问题：“3千克面包， $\frac{3}{8}$ 千克放一袋，可以放几袋？”让学生自己去解决，并画图说明是怎样想的。

然后教师巡视全班，对有困难的学生可以提启发性问题，如：“假如类似这样的题，已知数都是整数，你怎样解决？”“你能想出一个算式来吗？”“你可以用什么样的图解？”等。

当大多数学生解出来以后，可以让学生说出自己的解法。把不同解法都写在黑板上。然后引导学生讨论，评价哪种解法比较好，最后让学生用他们发现的比较好的解法做练习题。

对于这种教学方法，在美国也还有不同的看法。例如，美国心理学家加涅认为，教学是要使学生掌握大量有组织的知识，因此更强调按照规定的程序进行学习，教师要给以充分指导。另外有人提出发现法也是有局限性的，不一定对所有数学课题和所有的儿童都适用。而且在发现新知识以后，教师还要适当地通过讲解法复述概念，指出它的属性，以及计算方法的一些细节（如进位加法要说明用竖式具体怎样加）等。

四 问答法

这种教学方法最早始于苏格拉底，所以也叫做苏格拉底问答法。由教师给学生提出一系列的启发性问题，引导学生逐个回答，最后获得新知识。例

如，教学 $3 \div \frac{3}{8}$ ，可以这样问答：

师：这个除法还可以怎样写？

（学生可能有不同的写法，教师着重就 $\frac{3}{\frac{3}{8}}$ 提问。）师：我们要把这个分

数化简，该怎么办？选哪个数做分母？生：选 3。

师：可以选 3 做分母，但是要使问题变得容易些，最好使分母是 1。你们看：

$\frac{8}{1}$ ， $\frac{6}{1}$ ， $\frac{5}{1}$ ， $\frac{2}{3}$ 。师：怎样能使 $\frac{3}{8}$ 变成 1 呢？

生：照我们从前求面积的题目那样，可以给它乘以 $\frac{8}{3}$ 。师：好。 $\frac{3}{8} \times \frac{8}{3}$ ，

这样就行了吗？

生：不行，还要给分子 3 乘以 $\frac{8}{3}$ ： $\frac{3 \times \frac{8}{3}}{\frac{3}{8} \times \frac{8}{3}}$

师：为什么？

生：分子分母都乘以 $\frac{8}{3}$ ，分数的大小不变。

师：那么 $3 \div \frac{3}{8}$ 可以怎样计算呢？……

最后启发学生概括出整数除以分数的计算方法，并进行练习。

学会用同样方法计算分数乘以分数以后，再引导学生找出简便的计算方法。如，

$\frac{5}{8} \times \frac{2}{3}$ ，不必再做 $\frac{\frac{5}{8} \times \frac{3}{2}}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{2}}$ ，可以直接做 $\frac{5}{8} \times \frac{3}{2}$ 。

五 实验法

这种教学方法是由教师提出要解决的问题，要学生运用某些具体的材料进行实验、探索，才能找出解决的方法。

例如，教学生认识三角形时，可以把学生分成几个小组，也可以每个学生独立进行实验。课前要准备好 30 分米长的线。

1. 剪三条线段，使每两端彼此连接，做成一个三角形。

随便剪三条线段，不管多么长，都能做成一个三角形吗？

2. 想法找出三角形每边的中点。你用的是什麼方法？

3.用另外的线段把中点连接起来，你看到哪些图形？

4.把你做成的几个图形，同原来的三角形比较一下。这几个小三角形的面积同原来的三角形面积有什么关系？

学生要把每次所得的结果和问题的答案写在实验报告纸上。

美国小学数学教学法研究工作者认为，上面介绍的后四种教学方法，与讲解法不同，都强调启发学生思考，只是进行的方式和学生思考时的独立程度有所不同。采用这些教学方法，需要教师选择适当的时间，提出适当的问题，提供适当的活动。要做到这一点，就要充分了解学生，要在学生已有的知识的基础上进行，并且在课堂上以学生活动为主，发挥学生的主动性，教师给以帮助或指导。

研究工作者还强调，教学方法是随着数学课题，所教的学生以及教师的教学风格而变化的，不能千篇一律。每节课进行教学时，也不一定单纯地采用某一种教学方法，有时可以把几种教学方法以不同的方式结合起来，以便取得更好的教学效果。

（本文原载于《小学数学教师》1983年第6期。）

国外小学的分数的教学

在国外，特别是在欧美的一些国家的小学里，过去一直重视分数的教学。后来由于在现代科学技术中广泛使用小数，开始有人主张在小学应着重教小数，少教分数。在这以后，分数在小学数学教材中的地位和作用成为一个有争论的问题。为此，美国数学教师协会于八十年代初曾进行广泛的调查。据统计，80%以上的回答者认为，分数在实际中仍然有用，它是数学的基本概念，它还提供代数方程的解。因此大多数教师赞成小学还要教分数，只有15%的回答者赞成把分数推迟到初中去教。

目前，国外小学的分数的教学主要有以下几个特点。

(一) 简化分数的教学内容。如上所述，虽然大多数人肯定在小学有必要教分数，但是由于小数的应用越来越多，特别是电子计算机、计算器都用小数进行计算，而且分数也比较难学，所以比较一致地趋向于分数的教学内容尽量简化。目前，分数的分母多数不超过10。如日本六年级上学期的一种数学课本中，两页分数计算题共有83道(大多是一步计算的式题)，分母超过10的分数只有15个。苏联课本中分母超过10的分数较多一些，但是比六十年代的课本已大大简化。分数四则混合运算式题也比较简单。如日本课本中多数是两步计算的，少数是三步计算的。美国课本中三步计算的式题更少，苏联五年级课本中多数是两、三步计算的，有少数四、五步计算的。分数应用题也比较简单，美、日等国的课本中，都不超过两步计算的。苏联课本中多数是两步计算的，有少数稍复杂的分数应用题，但是由于学过一元一次方程，学生可以用方程解。至于繁分数，除苏联外，日、英、美等国都不教。

(二) 提早出现分数，并分散在各年级进行教学。过去，除了美国在小学一年级就出现几个最简单的分数以外，其它各国教学分数都比较晚，多数在三、四年级开始。数学教育现代化运动以后，很多国家(法国除外)都提早教学分数。例如英国、联邦德国都从一年级开始，先认识 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{1}{4}$ 等最简易的分数；苏联从二年级开始，先出现分子是1，分母不超过10的分数；日本从三年级开始(原从四年级开始)，分数的分母也不超过10。提早教学分数主要有以下几个原因：1. 在儿童生活中常遇到简单的分数问题，如把一个整体(点心、糖果等)分成两半或平均分成四份(很多国家的语言中都有“一半”“一角”这两个词)。2. 根据儿童心理的发展，应及时地使儿童获得分数的初步概念。据瑞士心理学家皮亚杰研究，六七岁儿童已能顺利地把一个整体分成两等份、三等份；有些儿童还初步理解整体的守恒，即把一个东西平均分成几份，再把这几份拼起来与原来的东西相等。3. 提早引入分数，并反复出现，便于儿童顺利地逐步地掌握分数的概念和计算，减少学习分数的困难。4. 有利于发展儿童的智力。分数所反映的是部分和整体之间的关系，而且与整数不同的是要用一对数来表示一个数，一个数作分子，一个数作分母。因此分数的概念比整数的概念更抽象。提早分数教学有助于发展儿童抽象思维能力。

(三) 各国在分数的教学顺序上有某些相同点，也有一定的差异。分数的教学顺序是一个较复杂的问题，其中有分数内容本身的内在联系和易难顺序问题，也有和其他内容(如小数、约数和倍数，百分数等)的联系问题。

下面分别做些介绍：

1. 关于分数和小数的编排顺序，一直是个有争论的问题。现在，由于一般都把小数看作十进分数，所以大多数国家都是先教分数的初步认识，然后教小数的初步认识，以后在分数计算有一定基础之上再教小数的计算，最后再教分数计算中一些较难的内容，如异分母分数加、减法和分数乘以、除以分数等。只有法国在四年级先教小数，直接从整数的十进制引入。

2. 关于约数和倍数的知识安排，差异较大。数学教育现代化运动以前，欧美一些国家都认为这部分知识大多是不切实际的，因此只结合约分、通分简单地教一点极必需的知识（如公约数，公倍数）。只有苏联比较重视这一部分内容，专安排一章来教学。数学教育现代化运动以后，强调数的理论的教学，美国开始重视这部分内容，认为教学数的理论有其实际的意义，不仅最大公约数和最小公倍数在分数计算中用到，而且许多概念可为代数的学习提供直观的背景。有人还认为，学生通过对这部分知识的探索发现，可以使解决数学的和科学的问题的能力得到发展。现在的美国课本大都专门安排一个单元来教学数的理论，而不再与分数合并在一起，所教内容和我国的课本基本相同。日本的课本也把约数和倍数专门安排一个单元，但是不教最大公约数和最小公倍数。苏联仍然强调这部分知识的重要性，但是一度曾经把这部分知识分散在自然数和分数计算中。最近又有所改变，把数的整除特征仍放在自然数除法中，其余的内容则专门安排一个单元放在分数之前来教学。

3. 关于百分数的安排，目前有两种编排方法。一种是不单安排一个单元。如苏联的课本，在小数除法后面教学百分数的初步概念和简单的计算问题，以后在分数除法后面再教求百分比。另一种是单安排一个单元。如美国课本，在分数以后教百分数，说明它是一个数与另一个数的比，并强调讲百分数在实际中的应用（包括折扣、银行利息、保险等）。日本课本的处理方法与美国的相仿，但实际应用问题较少。

4. 关于分数内容本身的安排，由于分散在各年级，各国在顺序上、范围上有不少差异。但是，大都把分数加、减法划分为同分母分数加、减法和异分母分数加、减法两个阶段，把分数乘、除法划分为分数乘以、除以整数和分数乘以、除以分数两个阶段。而在苏联，分数乘、除法不分两个阶段。

（四）教学分数乘、除法应用题，大多联系分数乘法的意义以及乘除法的关系来说明如何确定算法。国外过去教这部分内容也有教学生死记硬套的方法。如在日本，教学生看到题里有“ $\times \times \text{の} \frac{1}{3}$ ”（即 $\times \times \text{の} \frac{1}{3}$ に），就用乘法；看到题里有“ $\times \times \text{の} \frac{1}{3}$ ”（即相当于 $\times \times \text{の} \frac{1}{3}$ ），就用除法。以后对这种教法进行了批评。现在教分数乘法应用题，一般都联系乘以分数的意义。日本还把求一个数的几倍或几又几分之几倍和求一个数的几分之一联系起来。教分数除法应用题一般都用方程解。

（五）注意通过一些游戏来巩固分数的概念，熟练分数运算的技巧，并激发儿童学习分数的兴趣。这里举两个例子。

1. 用以巩固分数初步概念的游戏：用厚纸做一个大的正方形（约30cm

× 30cm) , 再做一些长方形和正方形 , 它们的面积分别是大正方形的 $\frac{1}{4}$ 、

$\frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{6}$ 、 $\frac{1}{16}$ 、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{12}$ (每种可以做 3 ~ 4 个) , 并且涂上不同颜色。另外用木头做一个小正方体 , 每个面上写上述分数中的一个。玩的时候 , 每个学生发一套正方形和长方形。一个人先投小正方体 , 看上面的分数是几分之几 , 就找出相应的长方形或正方形 , 铺放在自己的大正方形上。这样轮流投小正方体 , 并根据出现的分数铺放相应的图形。谁先铺满大正方形就算优胜。

2. 用以使分数计算熟练的游戏 : 在厚纸上画出如下的方格图 , 每个方格里写一个分数。另外做一些分数卡片 , 每张卡片可以写上运算符号 , 如 “ $+\frac{1}{2}$ ” “ $-\frac{1}{3}$ ” …… (也可以不写运算符号 , 而根据学习的进度临时确定进行哪种运算)。可以三、四个人一起玩。每人先拿一个棋子 (或石子、纸片) 放在 “ 开始 ” 的格里。然后一个人先翻一张卡片 , 如是 “ $+\frac{1}{4}$ ” , 就把它和格里的第一个分数 $\frac{1}{2}$ 相加。算对了 , 就从 “ 开始 ” 的一格走到 $\frac{1}{2}$ 的格里 ; 算错了不动。这样轮流做下去。谁先到达 “ 优胜 ” 格就算胜。

开始	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$			
3	$1\frac{1}{2}$			
				优胜

(本文原载于 《上海教育》 1986 年第 4 期)

美国小学数学中解题策略的教学

一 加强解题策略教学的重要性

近年来美国小学数学中一项重要的改革就是加强解决问题策略的教学。80年代初，美国全国数学教师协会曾提出解决问题是中小学数学教学的重点，同时也提出数学的基本技能应包括比计算能力更多的内容，其中就有关于解题策略的问题。1988年在第六届国际数学教育会议上也提出使学生学会使用解题的策略。80年代末，美国新拟订的《中小学数学课程和评价标准》中，对这方面进一步加以强调，每个学段的第一条标准就是学习和应用解决问题的策略。此后陆续在美国小学数学教科书中编入了有关解题策略的内容。

为什么美国如此重视解题策略的教学呢？这是为了适应现代社会发展需要。美国数学教育工作者认为，美国已进入信息社会，需要能处理信息的人，能用数学方法解决问题的人，因此使学生掌握解题的策略就成为数学教学必不可少的内容。这与过去美国小学数学中侧重培养学生解决实际问题的能力有很大不同。过去的小学数学中解决问题的教学目的只限于了解实际问题和能够解决一些简单的实际问题本身。而现在除了要达到上述目的以外，还要使学生掌握解决问题的各种策略，培养一般的解题能力和处理信息的能力，开发学生的智力，使学生能够适应不断变化的社会，即使遇到新的问题也能够应用已掌握的解题策略予以解决。显然这是美国小学数学教学的一项重大改革措施。

二 教学解题策略的内容

美国小学数学中不采用“解应用题”这个名称，而叫“解决问题(solving problem)。”问题的范围比我国所说的应用题的范围广泛，既包括实际应用的问题，也包括一些非实际应用的文字题、思考题。因此解题的策略也比较广泛。既有一般的解题策略，又有特殊的解题策略；另外为适应现代信息社会的需要，还提出一些初步应用近代、现代数学方法解题的策略。下面分别作一简单介绍。

(一) 一般解题策略

在一般解题策略方面，主要是教学解题的一般步骤，这与我国小学数学中讲的应用题的步骤基本相同。美国把解题步骤分为以下四步：1.理解题意；2.做解题计划；3.按计划解答；4.回答和检验。在课本中有时举例集中进行全面的讲解，有时进行单项的讲解和练习。

1.关于第一步，十分重视数据的收集。各套课本中都安排较多的使用统计图表中数据收集的练习。低年级多以形象图的形式出现，高年级多以统计表的形式出现。例如，五年级出现如下的表：

		风 冷 系 数		
	0	-3	-10	-13
温 度	-5	-9	-16	-20
	-10	-14	-23	-27
	-15	-20	-29	-34
	-20	-25	-35	-42
	⋮	⋮	⋮	⋮
	0	10	20	30
		风 速 (千 米 / 小 时)		

(1) 温度 0°C ，风速 10 千米时，风冷系数是多少？

(2) 温度 -5°C ，风冷系数 -16°C ，风速是多少？

课本中还注意安排有多余或缺少信息的题目的单项练习。例如，“托姆有 4 只小狗，萨姆有 3 只小猫，巴布有 5 只小狗。一共有多少只小狗？”“同学们去钓鱼，一半人没去过，没去过的有多少同学？”通过这样的题目，可以使根据问题正确选择必需的已知数，从而有助于提高学生分析问题的能力。

2. 关于第三步，十分注意正确选择运算方法的训练。例如，给出同样的已知条件，如两种物品的数量，先提问求它们一共有多少，再提问求它们相差多少。此外也出乘、除法对照的应用题。

3. 关于第四步，十分注意检验答案的正确性。一方面教给学生检验的方法，如用减法验算加法，用乘法验算除法等，通过不同的运算方法检查计算结果是否正确；另一方面教给学生用估算检查计算结果的高位数是否无误。此外还注意教学生判断答案是否合理。一是注意得数怎样才算合理。如下面几道题都要算 150 除以 60，但是答案不一样：“150 支铅笔，均分给 60 个学生，每人分得几支？”（答：2 支）“150 个同学，每只船可以乘 60 个同学，需要几只船？”（答：3 只）“一部电影放映 150 分钟，要放映多少小

时？”（答： $2\frac{1}{2}$ 小时）二是注意单位名称怎样才算合理。如“从家到洛杉矶有 480 千米，汽车一小时行 80 千米，到那里要多长？”选择答案：60 小时，60 千米，6 小时。

(二) 特殊解题策略

一般有以下几种：

1. 画图：通过画图帮助理解数量关系。例如，“俱乐部成员锯木做家具，要把一块木板锯成 10 块，每锯一次需用 5 分钟，一共需用多少分钟？”通过画图可知需要锯 9 次，从而容易算出需用的时间。

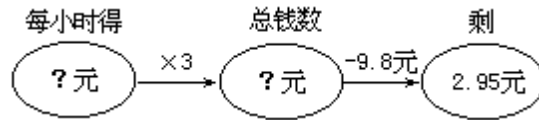
2. 简化题目：一种是把原题里较复杂的大数改换为简单的较小的数，使题目变得容易。另外一种是把叙述较为复杂的题目改换为叙述较为简单的题目，使题里的数量关系更清楚。

3. 尝试和猜想：通过猜想试算，逐步调整试算结果求得正确答案。例如，“索尼亚买 3 本书共付 22.5 元。其中《神秘的洞穴》比《隐藏的财宝》少 1 元，《隐藏的财宝》比《奇怪的城市》少 1 元。每本书的价钱是多少？”第一次尝试：21 接近 22.5，能被 3 除尽，平均每本书的价钱是 7 元；试把《隐

这里说的“多长”，在英语里指的是时间。

藏的财宝》定作 7 元，则 $6+7+8=21$ （元），接近 22.5 元，但还差 1.5 元。第二次尝试：给每本书加 0.5 元，则 $6.5+7.5+8.5=22.5$ （元），总钱数正好是 22.5 元。由此可知每本书的价钱。

4. 逆推：有些逆向思考的题目可以采用逆推的方法。例如，“阿伯特工作 3 小时，得到的钱买了一束花，用去 9.8 元，还剩 2.95 元。她每小时工作得多少钱？”画图帮助分析：



逆推时用相反的运算。

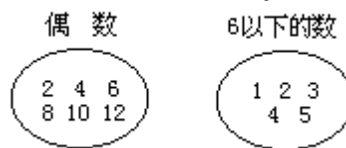
5. 用方程解：因为不专门讲简易方程，所以把用方程解决问题作为解题策略的一部分。一般只限于含有一两步计算的。

6. 用公式解：如求长方形的周长或面积，求长方体的体积。

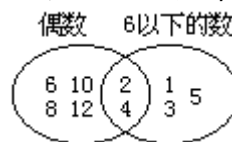
（三）用近代、现代数学方法解题的策略

这是美国小学数学解题策略的一个重要特点。通过教学使学生既初步了解一些近代、现代数学的思想方法，又提高处理信息和解实际问题的能力。一般有如下几种：

1. 分类：从低年级起就注意做分类的练习。例如，把同类的物品圈起来。较高年级让学生把有关的物体集合用图表示。例如，出示下面两图：



然后让学生把两个集合圈合并画在一起，成下图



2. 组织数据：渗透统计思想和方法。例如，文具店统计几种物品的数量如下，然后列表计算。

物品	盒数	每盒数量	总计
红 腊 ### ///	8	48	?
小字典 ### /	?	16	?
大信封 ###	?	225	?
小信封 ### ////	?	275	?
橡 皮 ///	?	144	?

3. 样本与预测：渗透统计思想和方法。例如，有 4000 人要进城游行，市里让他们填卡片，写出姓名和住址。要知道他们住哪个区各有多少人，不翻遍所有卡片，该怎样做才能知道？可以用样本来预测。从 4000 张随意抽出 100 张卡片，分给 5 个人，每人 20 张，分别做出统计如下表：

东 区	西 区	南 区	北 区
////	###	### //	////
###	////	### //	///
///	### //	###	###
###	###	### //	///
###	////	### //	###
22	25	33	20

表中说明100张中有20张住北区，即占 $\frac{1}{5}$ 。由此预测4000人中约有 $\frac{1}{5}$ 住北区，即约 $4000 \times \frac{1}{5} = 800$ （人）。还可以预测出其他各区的人数。

4. 计算概率：例如，6 个小正方体，其中有 2 个是兰色，2 个是绿色，1 个是黄色，1 个是紫色。随便拿出 1 个，是兰色的概率为 $\frac{2}{6}$ 。

5. 使用范型：即找出数或形的排列规律，然后运用规律进行计算或判断。例如，爱德沃今天在银行存 1 分，明天存 2 分，次一天存 4 分，第四天存 7 分，第五天存 11 分……照这样继续下去，第十天该存多少钱？为了解这道题，可以做如下的表，找出范型。

天	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
分	1	2	4	7	11	16	22	29	37	46	...

从表中找出范型是每天存的钱数依次比前一天分别增加 1、2、3、4、5……分，第十天应存 46 分，也就是比第一天多存 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ （分），即存 $1 + 45 = 46$ （分）。

6. 使用树图：例如，商店有两种电话机，一种是按键的，一种是转盘的。每种电话机又有红、黄、绿 3 种颜色。每种颜色的电话机又有方、圆两种形状。一共有多少种可供顾客选择？为了解这道题，可画树图如下

从图中可以看出一共有 12 种。写成算式是 $2 \times 3 \times 2 = 12$ （种）。

7. 开放性题目：一般有两种情况。一种是一道题有不同解法的，另一种是一道题有不同答案的。对后一种举例如下。

例 1：画出几种物品，分别注明单价，如衬衣 10.99 元，裤子 13.5 元，唱片 5.98 元，玩具车 3.92 元，蜡笔 1.6 元。塔德要花 8—10 元，他能买上面哪些物品？

例 2：停车场有汽车和摩托车，共 42 个轮子，可能各有几辆？可以列表如下：

汽车	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
摩托车	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

从表中看出，可以有 10 种答案。

8. 做决策：这是现代数学方法中的一种。在小学只能出现极简单的具体的。例如，“唐纳要买辆自行车，价值 290 元。他已储蓄了 225 元，每周打工可以挣 40 元。有 3 种选择，可以根据具体情况做决策。

- (1) 储蓄到够 290 元再买。
- (2) 当时付 90 元，然后每月付 19 元，付一年。
- (3) 当时不付款，每月付 28 元，付一年。

需求出每种选择所付款的总数，然后比较哪种有利，哪种不利。

- (1) 哪种选择付款最少？
- (2) 哪种选择可以立刻得到自行车？
- (3) 唐纳能挣够钱数来支付每种选择所需的款吗？
- (4) 唐纳按哪种选择付钱要少些，是第二种还是第三种？
- (5) 如果你是唐纳，你选择哪一种？

可以看出上述几个问题，并不都是只有一个答案，至于第(5)小题更是因人而异。

9. 逻辑思考：包括的内容很多，这里只举几个有代表性的例子。

例 1：琴娜可能买胡萝卜或梨，她不想买胡萝卜，她想买什么？

例 2：甲不如乙高，但他比丙高。谁最矮？

例 3：甲乙丙三人分别是钳工、电工和园丁，但甲不是钳工也不是园丁，乙不是钳工。确定他们每人的职业。

找出答案的一种方法是建立一个表，如右表所示。

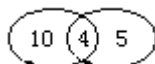
	钳工	电工	园丁
甲	x		x
乙	x	x	
丙		x	x

想：甲不是钳工也不是园丁，因此是电工。

乙不是钳工也不是电工，因此是园丁。

那么丙不是电工和园丁，必是钳工。

例 4：四年级有学生 28 人，其中 14 人参加乐队，9 人参加游泳队，有 4 人参加了这两种活动。多少人未参加这两种活动？



想：只参加乐队未参加游泳队的是 $14-4=10$ (人)。只参加游泳队未参加乐队的是 $9-4=5$ (人)。参加乐队和参加游泳队的一共是 $10+5+4=19$ (人)。所以未参加这两种活动的是 $28-19=9$ (人)。

三 教学解题策略的安排

美国小学数学课本中对解题策略的教学，同其他内容一样，也十分注意合理的安排。具体地说，有以下几个特点。

(一) 适应学生的年龄特点，从三年级开始正式教学。解题策略的教学，需要学生有一些数学知识基础，适当积累一些解题的经验，才比较容易接受。因此从三年级正式开始教学解题策略是比较合适的。但是在一、二年级也注意适当渗透一些有关解题策略的内容，如从图中找数据，看形象统计图，选择运算，初步认识解题步骤，开放性题目等。只是以更具体、简易的形式出现。如解题的四个步骤，在一、二年级是这样出现的：(1) 知道什么？求什么？(2) 要解这道题该做什么？(3) 做。(4) 检验。到三年级正式教学时

在此基础上再加以概括。

(二) 分散安排, 与其他教学内容适当配合。前面介绍的解题策略, 分散安排在各年级的各单元中, 都用小标题标出, 而且很多解题策略, 在不同年级重复出现, 其中计算的内容尽量与本年级教学内容相配合。例如, 三年级学过一些小数的加减法, 估算内容中就以小数的加减法为主; 四年级学过一些小数的乘除法, 估算内容中就以小数的乘除为主。又例如, 讲概率的计算需要有分数的基础, 就在分数的认识之后出现概率。

(三) 遵循由易到难、由简到繁、由具体到抽象的编排原则。例如, 找范型这一解题策略, 在各个年级都出现了, 但是题目的难易和繁简有所不同。低年级着重出现看图找规律的, 中年级除了继续出现低年级的形式外, 还出现看到一列数来找规律的, 以后进一步出现列表找规律的。又例如, 逻辑思考这一解题策略, 低年级出现使用“和”“或”的语句, 中年级出现利用规律解题, 高年级出现利用集合图解题。

四 一点看法

从前面对美国小学数学中解题策略教学的简要介绍可以看出, 加强这方面的教学, 有利于提高小学生的解题能力, 促进小学生思维能力的发展。尽管在安排处理上还存在不足之处, 如有些解题策略的选取还值得研究, 对多步题的练习少了些, 有些解题策略的安排还缺乏层次性等, 但是改革的方向是对的, 是适应现代社会发展需要的。

美国加强解题策略的教学对我国小学数学应用题教学的改革有一定的启发。建国以来, 我国小学数学应用题的教学做了一些改革, 但是还很不够, 特别是还没有跳出传统应用题教学的框框。应用题教学的内容, 基本还局限在原来的范围之内, 只是做了一些简化和较为合理的安排; 在解题思路方面开始有所重视, 在课本中也有所体现, 但是还缺乏系统的安排。同美国的解题策略的教学相比, 存在一定的差距。

为了进一步改革应用题教学, 更好地提高学生的解题能力, 发展学生的智力, 希望我们的教科书编者、教研人员、广大教师都来研究在小学数学中如何加强解题策略的教学。首先明确应用题教学改革的方向, 如何确定应用题教学的内容和范围, 如何适当安排解题策略的教学。其次要大力开展应用题教学的改革实验, 支持带有方向性的改革实验, 集中大家的智慧, 使我国小学数学应用题更前进一步, 为培养我国现代化建设需要的人才打好基础做出更大的贡献。

(本文原载于《小学数学教师》1995 年第 1 期。)

国外小学数学教育改革对我们的几点启示

当前，我国小学数学教学改革正在全国范围广泛开展起来，各种改革实验陆续出现，有些已取得初步成果。这无疑将对提高小学数学教材和教学的质量起一定的促进作用。我们要认真总结我们自己的成功的实践经验，加以发展。同时，也要注意借鉴国外的改革经验，使我们的小学数学教学质量更快地提高。各国在社会、经济、文化等方面尽管有着不同的背景，但在小学数学教育方面有着很多共同点，面临着一些共同性的问题需要解决。有些问题在国际会议上还进行了共同的探讨和研究。了解这些，对我们的改革会有一些的助益。当然，研究国外的数学教育理论和实践经验要注意分析，结合我国的实际情况，吸收其中有益的东西，探寻其中有益的启示，避免照搬。

从国外小学数学教育发展的趋势看，有以下几点值得注意。

一 强调数学为所有的人

这是 1984 年第五届国际数学教育会议上讨论的一个重要问题。代表们认为，数学教育现代化运动以来，设计的数学教学好象是为了培养未来的数学家，致使许多儿童在学习中感觉困难。因此，他们指出，数学教育应当改变方向，使数学为所有的人，成为大多数学生的有用的工具。这是九十年代应当考虑的一个主要问题。解决这个问题，不可能有一个简单的答案，因为各国的社会、文化条件不同，学校制度不同。但是，代表们都认为，要研究什么样的课程更适合大多数的需要，要找出能使大多数学生掌握数学的有效方法。

这一点对我们有很大启发。我国正在逐步实行九年义务教育，小学教育已基本达到普及。义务教育不仅要求所有适龄的儿童都要入学，而且要提高全民族的素质，要给所有正常的儿童打好初步的数学基础。对于这一点，有些教师认识到了，在教学中也有所注意。但是也有的教师还不够明确。例如，有些教师对于优等生比较重视，而对差生往往重视不够，结果使一些本来可以达到数学教学基本要求的学生落伍了。另外，也有的老师把数学教学的重点放在提高升学率方面，补充一些超过大纲、课本范围的内容或难题，而不是着重研究如何使数学成为所有学生的有用工具。结果加重了学生的负担，不利于学生德、智、体、美、劳的全面发展。因此，在小学数学教学中如何做到面向全体学生，同时注意因材施教，使每个正常的学生都能达到数学教学的基本要求，仍是当前要努力解决的一个重要问题。

二 改革数学教学内容，使数学成为学生的有用的工具

这是近年来在国际会议上以及一些国家研究数学教学改革的一个重点。数学教育现代化运动初期，由于过份重视数学水平的提高，强调为进一步学习现代数学打基础，结果削弱了一些实际中有用的基础知识。现在，人们越来越清楚地认识到，要使数学成为学生的有用的工具，必须删减那些用处不大的内容，而增加或加强一些实际中有广泛用途的内容。例如，由于计算工具的广泛使用，大数目计算可以简化，而应加强口算，增加估算；所解的问题应是现实世界常遇到的，要培养学生运用数学知识和技能于日常生活之

中，于其他学科之中。当然对于数学的应用要从广义上去理解，因此所解的问题也包括一些探究性作业，以利于发展学生智力，培养他们独立工作的能力。

联系到我国小学数学的教学内容，也还有值得进一步研究的地方。一方面在编订教学大纲和编写课本时要注意根据形势发展的需要来调整教学内容，对于实际用处不大的可予以删减；另一方面教师在教学时也要注意根据改革发展的趋向正确掌握教学的重点。例如，数目较大、步数较多的运算就不宜再让学生花很多时间去练习，而应加强数目不大的笔算和一般口算的熟练程度。应用题方面，也不宜超过大纲、课本的范围和难度，可以适当加强联系实际的题目。以为现在强调发展智力培养能力，应用题就要加难加深，这种看法很值得研究。一些实践表明，不超出大纲、课本的范围和难度，只要教材组织得当，教法运用得当，同样可以促进学生智力的发展和能力的提高。增加过于繁杂的内容，不仅会增加学生的学习负担，而且会降低多数学生学习数学的兴趣，不利于学生的全面发展。

三 改进教学方法，教会学生学习

早在 60 年代，国外由于科技发展和培养人才的需要，就提出改革数学教学方法的问题。但是 70 年代以至近些年来的一些调查研究表明，许多数学教师在课堂上仍采用传统的教学方法和教学顺序，教学生死记硬背。因此，人们越来越清楚地认识到改进教学方法的重要性。首先在教学方法方面，趋向于选用有助于培养学生独立探索和发现知识的方法，认为教师的主要作用是引导，而不是做“讲台上的圣人”。因此教师的重要任务在于组织学生学习数学的活动。为了适应这一要求，各国都提倡一些新的教学方法。如美国提倡用探究法、引导发现法等；苏联提倡用独立作业法、问题教学法等，同时对传统的讲解法、谈话法等加以改造，加强启发性。各国都强调没有一种万能的教学方法，应根据教学目的、教学内容、教学对象等选用最佳最合理的教法。其次，在教学组织方面，强调改变传统的“教师——学生”这种单向联系的教学模式，而把班级、小组和个人的活动结合起来，形成教师和学生之间的多向联系，注意学生之间的相互交流、相互协作。这样，既能调动学生学习数学的积极性，又能使优等生和差生都得到发展和提高。再次，针对目前不少国家中仍采用死记硬背的教学方法，强调教学时要注重理解，要在“工具性的理解”（能回答“怎样做”）和“有理性的理解”（能回答“为什么”）之间建立适当的平衡。此外，还提倡广泛使用多种教学手段，特别是使用学生可以操作的教学材料，促使学生在操作中思考和理解数学概念和法则，发现数学规律。

国外的教学方法的改革对我们也有很大启发。在我国，有一部分教师十分重视并积极研究小学数学教学方法的改革，但是也有不少教师对此重视不够。万里同志在全国教育工作会议上指出：“在教学方法上不善于实行启发式，在不同程度上还是用灌输式或填鸭式，上课听讲义，下课背讲义，考试主要靠死背硬记，受教育者主动性很不够，……”据了解，在小学数学教学中也不同程度的存在类似的现象。如有些学生死背课本上的一些结语，但并不真正理解。这种现象同我国社会主义现代化建设的需要是不相适应的。要提高小学数学教学质量，切实为培养人才打好数学基础，必须积极进行教学

方法的改革。为此，去年国家教委修订公布的《小学数学教学大纲》中专门写了一条注意改革教学方法。改革教学方法中的问题是很多的，修订的《大纲》中对一些主要问题都谈到了，只要我们认真学习领会其精神，并认真贯彻执行，就一定在较短的时间内取得效果。

国外教学方法改革的趋向给我们什么重要启示呢？据我个人体会，国外注意研究具体教法的改革，但是更注意教育思想和教学原则的改变。因为教法问题，归根到底还是改变教育思想的问题。万里同志讲，这种“教学方法（按：即上面引的那一段）主要是受陈腐的传统的教育思想的束缚”。所以强调“不适应社会主义现代化建设的教育思想、教学方法必须改变。”这一论述是非常正确的。但是目前在小学教学方法改革的研究和宣传工作中，往往对具体如何教，使用什么样的方法，注意较多；而对在教学中使用一些不适当的教法所反映的教育思想缺乏分析研究，对在改革教学方法中存在的思想障碍以及如何树立正确的符合现代教学论的教育思想，以促进教学方法的改革研究较少。例如有的教师在课堂上只顾演示给学生看，很少引导学生在操作中思考。原因是什么呢？如何帮助教师理解让学生动手操作的重要性，并针对教师提出的困难提供切实可行的办法，使教师在教育思想和教学方法上都提高一步呢？只要我们认真研究现代教学理论，又研究教学中的实际问题，把理论和实际紧密联系起来；在帮助教师提高的工作中既注意改变教育思想，又注意根据实际情况改变教学方法，把改变教育思想和改变教学方法紧密联系起来，我们的小学数学教学质量就会有较快的提高。

（本文原载于《山东教育》1988年第2期。）

90年代美国中小学数学教育的改革

一 60—80年代美国中小学数学教育改革概述

美国中小学数学教育的改革远在50年代末60年代初就已经开始。当时由于苏联卫星上天，美国的科学技术相对落后，出于竞争和培养尖端人才的需要，在全国中小学广泛开展了新数学教育运动。一方面把大学一、二年级的数学内容下放到中学，另一方面在中小学增加一些近代和现代的数学内容。由于过分重视理论知识而忽视联系实际，注意培养尖子的需要而忽视面向全体学生的需要，强调培养学生能力而忽视数学基础知识的教学和基本技能的训练，结果少数学生数学成绩有所提高，而大多数学生成绩下降，受到家长和社会各界的批评。70年代在美国掀起一场“回到基础”的运动，从教科书中删去新数学内容，重新强调数学基础知识的教学和基本技能的训练。但是这种倒退，同样不能适应美国现代科学技术发展要求提高中小学生学习水平的需要。

1980年美国全国数学教师协会在充分调查研究的基础上提出了对80年代中小学数学的建议（文件标题为《行动计划》），针对当时社会的需要和中小学数学教育改革中存在的问题提出八条建议：1.解问题是80年代学校数学的重点；2.数学的基本技能应包括比计算能力更多的内容；3.数学教学要在各年级充分利用计算器和计算机；4.既讲效果又讲效率的严格标准应当应用于数学教学；5.要采用比传统的测验更为广泛的措施来评价数学教学和学生学习的成績；6.要求所有学生学习更多的数学并且设计一种具有大范围选修的灵活课程以适应学生的不同需要；7.要求数学教师具有较高的专业水平；8.把公众对数学教学的支援提高到与理解数学对个人和社会的重要性相称的水平。每条建议都做了具体的阐述。

在这之后，一些州根据上述建议重新编订了数学教学大纲，把数学课程延长1—2年，有些州和教科书出版公司改编了中小学数学教科书。以纽约州为例，1981年开始起草幼儿园——八年级数学教学大纲，以后陆续起草七——十一年级数学教学大纲，经过试验并加以修改后在全州实行。这套教学大纲有以下几个特点：

1.适当增加教学内容：例如小学增加关系、找规律，指数和科学计数法，相似与合同，简单的概率、排列、组合，不等式，解多步的问题等；七、八年级减少重复的算术内容后，增加实数运算，解一元一次方程和不等式，直角三角函数（ \tan , \sin , \cos ），排列，两个或多个事件的概率，计算机初步知识及应用等；九——十一年级增加简易逻辑（包括简单句和复合句的真值、重言式、推理的定律、证明），复数，关系和函数（包括反函数、指数函数、对数函数），域的性质，三角方程和解三角形，变换几何，曲线方程，排列和组合，伯努利试验，二项式定理，统计（包括四分位数、标准差、常态分配曲线）等。

2.安排一些选学内容：如七、八年级安排计算机编程序，不等式的图象，多边形的外角，凸多面体和规则多面体等；九——十一年级安排群的初步概念等。

3.采用综合课程，即使是九——十一年级，也不分代数、几何等科，以加强知识间的联系。

4.在教法上强调让学生探究、发现、讨论,在掌握计算技能的基础上发展学生的逻辑思维和创造思维,以及应用数学解决问题的能力。

对于准备升大学的学生,要达到大学委员会所提的目标。

加利福尼亚州于1985年也公布了幼儿园——十二年级数学框架,在内容上与纽约州的有不少相同之处,但是也有其特色,如各阶段都重视逻辑的教学,九——十二年级的课程比较灵活,有综合数学,有分科数学,以适应不同学生就业和升学的需要。

二 90年代美国中小学数学课程的改革

80年代美国中小学数学教育虽然进行一些改革,但是学生的成绩没有明显的提高。据1988年美国教育部长的一份报告,在1982—1986年间,13岁学生的数学水平没有任何提高。17岁青年中只有51%的人能够令人满意地运算和论证较复杂的题目。据1989年一篇文章报道,第一年系统学习代数(一般在九年级),有40%的学生不及格。据美国全国数学教师协会的报告,只有少数学生能学完高中数学课程,其中大多数是白人男生。这与美国的现代社会极不适应。另外,据国际教育评价协会的资料也表明,美国中小学学生的数学成绩仍然处于落后地位。在20个国家和地区中,七年级数学测试结果,美国居第14名;十二年级数学测试结果,美国居第12名。这些情况引起了美国社会各界的关注,连美国总统布什拟订的2000年教育六大目标中也提出要求,美国学生在科学及数学方面的成绩要超过世界上任何一国的学生。

为了适应美国社会发展的需要,扭转中小学数学质量低下的局面,全美数学教师协会于1989年拟订了中小学数学课程和评价标准。这是美国有史以来第一次制订统一的标准和要求。长期以来,美国中小学的教育计划、课程等都是由各州分别制订的。这次制订统一的标准,有以下几个目的:1.为了保证质量;2.指出数学教育所期望达到的目标;3.促进改革。但是这套课程标准同中国过去所说的课程标准不同。它只着重说明中小学数学教育的目标,确定学习的主要课题以及学习课题之间的关系,为中小学数学课程的发展提供一个框架,而不是一套指令。有关课程内容的具体安排留给各地根据具体情况来拟订,并且强调允许和鼓励各地发挥自己的积极性和创造性。

(一) 拟订课程标准的指导思想

拟订中小学数学课程标准的基本指导思想是,美国已从工业社会进入信息社会,在这个社会中,低价的计算器、计算机和其他技术正在改变着自然科学、生命科学、社会科学、商业、工业以及政府的性质。缓慢的机械的交流手段已被电子的交流手段所代替。经济变革的步伐正在加速。相应地社会需要也有了很大变化:1.需要有数学知识的劳动者,这就是说,新的生产方式需要有技术能力的劳动力,需要能应用数学思想解决普通的和复杂的问题的能力。2.需要能终身学习,在今后25年中,一个劳动者至少要改变4—5次工作,这就要求人们能适应变化的情况,从而要求中小学数学必须是动态的形式,其中心是能应用数学来解决问题。3.需要所有的学生都有学习数学的机会,但目前学习较多数学的大都是白人男性,数学已成为社会求职的过滤器,从而使很多妇女和大多数的少数民族只能做科学技术中较低的工作。4.需要能处理信息的选民,现代社会的一些问题如环境保护、核能、国防、医

疗、太空探索以及税收等都需要公民具有技术知识，并且能阅读和解释复杂的有时甚至是矛盾的信息。总之，今天的技术社会希望学校能确保所有的学生都有机会成为有数学知识的人，能扩展他们的学习，成为善于了解问题并能处理信息的公民。

（二）中小学数学教育的目标

这套课程标准为中小学学生拟订了以下5个目标：1.了解数学在现代社会发展中的作用，并能探索数学和所服务的学科之间的关系；2.相信自己有学好数学的能力；3.成为具有解数学问题能力的人；4.学会运用数学语言交流他们的思想；5.学会数学上的推理。总之，要使学生成为具有数学知识和进行探索、猜想以及逻辑推理的能力，并有效地应用数学方法解问题的人。

（三）中小学数学课程的分阶段标准

由于这套课程标准只为中小学数学课程的发展提供一个框架，因此不详细列出各年级教学课题的范围和顺序，而是把幼儿园——十二年级划分为3个阶段，按阶段拟订课程标准。

1. 幼儿园——四年级课程标准。

这阶段共有13条标准。前3条分别论述作为解问题的数学，作为交流的数学，作为推理的数学在本阶段的要求，第4条论述本阶段数学知识间的联系。在这4条中提出的教学要求主要有：

（1）使学生解各种结构的问题和日常生活问题，学习和应用解问题的策略。

（2）使学生了解数学语言和符号与日常生活的联系，把表示、谈、读、写、听数学作为学习和使用数学的重要组成部分。

（3）使学生能够作出有关数学的逻辑结论，证明自己的答案和解答方法。

（4）使学生认识概念与算法的联系，不同的数学课题间的关系。

第5—13条分别论述本阶段教学的课题的要求。这个阶段教学内容的更新主要有以下几点：

（1）加强整数的概念和分数、小数意义的教学。

（2）加强运算意义的教学；重视口算和估算，并能实际应用；减少复杂的笔算；适当使用计算器。

（3）重视有关计量单位的概念和几何图形的性质，发展空间观念，重视实际测量。

（4）增加数据的收集和整理，阅读、分析和解释数据，概率的初步探讨。

（5）增加对规律的认识，用变量表示关系。

这阶段对教学方法的改革提出的主要要求：

（1）强调数学教学的方向应放在理解概念上，这比放在获得多少技能上更为重要。

（2）要让学生积极地做数学，其中包括操作、探索、提问、证明、表示、求解、构建、讨论、应用、调查、记述、预测等。

（3）强调发展学生的思维和推理能力。

（4）适当使用计算器和计算机，以帮助儿童探究数学概念和规律，并且便于学生把注意集中在解问题的方法上。但是它们不应代替基本的口算和合理的笔算。教师要培养学生用多种方法计算，并注意计算结果是否合理。

2. 五——八年级课程标准。

这阶段共有 13 条标准。前 4 条的标题与第一阶段的前 4 条标题相同，但教学要求则在第一阶段的基础上有所提高。主要有：

(1) 研究和应用各种解决问题的(着重多步的和非常规的)策略，概括新问题的解法和策略。

(2) 发展对数学概念的一般理解，包括定义的作用，应用读、听和视图等技能来解释和评价数学概念，讨论数学概念并进行猜想和有说服力的论证。

(3) 认识和应用演绎推理和归纳推理、空间推理以及借助比例和图象进行推理，评价自己的思维。

(4) 理解数学是一个综合的整体，用图象的、数字的、代数的和口头的数学模型或表示来探索问题并记述结果，应用一个数学概念进一步理解其他数学概念。

第 5—13 条分别论述本阶段教学课题的要求。这个阶段教学内容的更新主要有以下几点：

(1) 强调发展运算的概念，探索整数、分数、有理数运算之间的关系；减少单纯记忆法则和算法；在解问题和检验结果的合理性时使用估算。

(2) 增加识别和应用函数关系，发展和使用图表、图象和规律来表示关系，分析函数关系以解释一个量的变化引起另一个量的变化。

(3) 增加用多种方法解线性方程，以及非正式的探究不等式和非线性方程。

(4) 重视对几何图形的性质和关系的理解，探索几何图形的变换。

(5) 强调用统计方法来表述、分析、评价某一论点并作为决策的手段。

(6) 强调通过某些含有概率的情境创造实验模型和理论模型，在此基础上作出预测，并在实际中应用。

(7) 增加估量和加强应用计量解问题。

这阶段对教学方法的改革提出的主要要求：

(1) 让学生个人和分组进行探索、猜想、分析和应用数学。

(2) 教学时要注意综合性、整体性，而不是孤立地教学所列的每个课题。

(3) 数学课程要便于接受，使所有的学生都获得数学知识和生活所必需的工具。

(4) 适当使用计算器、计算机和录音机，以便使学生集中注意解题的方法和其他重要内容。

(5) 要把学习的评定作为教学的一个组成部分。

3. 九——十二年级课程标准。

这阶段共有 14 条标准。前 4 条的标题与前两个阶段的前 4 条相同，但教学要求又在前两个阶段的基础上加以提高。主要有：

(1) 综合应用数学解题的策略来解数学内部和外部的的问题，把数学模型的方法应用于现实世界的问题情境。

(2) 形成数学定义，并通过探究对所发现的进行概括的表示，能记述在解问题时怎样达到正确答案或所遇到的困难，联系他们读过的或听过的数学能提出明确的和引伸的问题。

(3) 进行猜想和检验猜想，遵循逻辑的论证，判断论证的有效性。

(4) 认识同一概念的等价表示，运用和评价数学课题间的联系，运用和评价数学与其他学科的联系。

第5—14条分别论述本阶段教学的课题的要求。这个阶段教学内容的更新主要有以下几点：

(1) 代数增加数系的结构，矩阵及其应用；强调用计算机理解概念，用以计算机为基础的方法解方程和不等式；用图表、符号和图象表示关系，并且在它们之间能够转化。

(2) 几何增加变换几何、三维几何，重视代数与几何的关系；削弱作为完整公理体系的几何，但是演绎论证还应加强。

(3) 加强直角三角形的比、三角函数与圆函数之间的联系，用图象解三角方程；削弱用笔算解三角方程，复杂恒等式的验证。

(4) 统计增加集中趋势、变异性及相关、抽样。

(5) 概率增加随机变量、离散概率分配、常态曲线及其性质。

(6) 增加离散数学，其中包括有限图、速推关系、算法分析等。

(7) 增加非正式探讨微积分初步概念，主要包括图象的极大点和极小点，通过无限数列和极限以及曲线下的面积了解极限过程，导数。

标准中十分强调这个阶段的中心内容是由记忆孤立的事实和计算方法转到概念理解、数学的多种表示、数学的联系，数学模型和解数学问题，并把统计、概率和离散数学上升到较为中心的位置。

上述内容为所有学生必须在十一年级学完的，准备升大学的学生，十二年级还要进一步学习离散数学和微积分基础，对其他课题也提出更高的要求。但是同时也说明，对所有学生必学的课题和准备升学的学生增加学习的课题，都允许在深度上有适当的弹性。

为了加强数学课题间的联系，这个阶段也采用综合课程，不分科。

这个阶段对教学方法的改革提出的主要要求：

(1) 采用多种教学方式，如小组学习、个人探索、同伴教学、全班讨论、设计作业等，让学生积极独立构建和应用数学思想，为毕业后工作或升学做好准备。

(2) 建立并应用数学课题间的联系。

(3) 使用计算器和计算机来教和做数学，鼓励学生使用现代技术进行探究、猜想和验证自己所发现的东西。

(4) 把学习的评定作为教学的一个重要组成部分，并且应与教学的重点方面如使用现代技术密切配合。

(四) 中小学数学课程标准的实施情况

由于这套课程标准不是政府的指令，只是美国全国数学教师协会拟订的指导性文件，而且才公布两年多，很少看到报道实施情况的材料，也还没有看到哪个州已经拟订好新的数学教学大纲。但是已有极少数出版公司编写出新的数学教科书。有少数已经发行，有的将于1992年秋发行。据美国全国数学教师协会主席谈，目前已有30%的学校实行新课程标准，但是有些教授认为目前不可能达到这个比率。

关于这套课程标准的评价，有人不大赞同搞统一的标准，也有人认为标准中的设想很好，但是很难实行。现在全美数学教师协会正在加强对这套标准的宣传，每年召开几个地区性会议，通过会议一方面广泛宣讲课程标准的精，另一方面交流实行新标准的经验。

三 90年代美国中小学数学教育的改革实验和研究

近年来，在美国为了提高中小学数学教学质量，进行很多改革实验和研究。下面就了解到的做一简单介绍。

（一）提高少数民族和贫苦学生的数学水平的实验研究

这项实验是美国大学委员会搞的，称为“公平 2000 年设计”，简称“公平 2000 年”。目的在于提高黑人、西班牙裔、美国土著以及女学生和贫困学生的数学水平，争取在 20 世纪末消除他们在大学升学率和在大学学习成功率方面与非少数民族的差距。1990 年秋在 6 个地区的八、九年级进行了试点。首先，抓教师和指导顾问的培训，使他们确信采取适当支援方式，每个学生都能学好数学。其次，由教师和指导顾问联合给学生树立学好数学的信心和升大学的勇气。第三，要求所有学生学习必修的代数、几何课程。第四，研究改进教学方法，如加强分组教学等。关于实验的初步效果还没有看到报道。

（二）运用现代技术提高学生数学水平和教师专业水平的研究

这方面的研究较多。例如，利用播音教学数学，即把设计好的课堂教学过程通过收音机或录音机播放出来，其中包括讲解、提问、练习等。教师在课堂上的工作主要是配合播音教学辅导学生。据说在条件较差的国家和地区试验效果较好。目前在美国广泛地开发各年级数学教学软件，供教师作为课内外辅助教学的材料。有的研究单位把幼儿园——十二年级数学的全部内容和教学过程制作在一个小的密集激光盘上，相当 15000 面左右的容量，供教师、学区、州的督学、教师培训者以及大学教师参考使用。

（本文原载于《课程·教材·教法》1992 年第 3 期。）

亚太地区发展数学教学材料研讨会简介

亚太地区发展数学教学材料研讨会于1984年10月30日至11月17日在日本东京举行。这次会议是联合国教科文组织亚洲教育革新发展中心与日本国立教育研究所共同组织召开的。有18个国家20名代表参加了这次会议。此外，特邀的咨询员、观察员以及教科文组织的代表出席了会议。

这次会议是1983年9月在东京召开的亚太地区数学教育规划讨论会的一个后续会议。会议的宗旨有以下四点：

1. 确定小学数学重点课题需要研究和使用的低价的和取自周围环境的教学材料。

2. 研究并提出教学中使用上述教学材料的有效方法。

3. 研究发展小学数学（特别是解问题的技能）的教学材料的一般理论，并制定发展的策略和准则。

4. 共同研究一些教学材料的实例，说明上述策略和准则。

会上，各国代表分别介绍了本国的经验，着重就上述问题进行了讨论，根据讨论的结果起草并通过了一篇题为《小学数学使用的教学材料》的报告。会议期间，展出了各国代表带去的部分教学大纲、教科书、教学指导书及教具。代表们还访问了两所日本小学，听了数学课。

下面简单介绍会议的主要精神和讨论结果。

一 强调在小学数学中研究和使用教学材料的重要性

首先从数学教育的目的上看。认为数学教育的主要目的是：1. 使儿童认识社会存在数学的哪些情境，培养儿童解实际问题的技能；2. 给儿童建立数学的认知结构。使用可以操作的教学材料，就便于儿童想象所学的数学的真实情境，使儿童获得探究概念和寻求解决问题的途径的机会，从而有助于达到上述两个目的。

其次从数学的特点看。数学是一种抽象的学科，比较难教难学。而借助具体、半具体的教学材料来研究数学的概念和原理是一种有效的方法。

另外从教学的发展趋势看。传统的数学教育，以教师教为主；而现在的小学数学教学，以学生活动为主，也就是说从教数学转到强调学数学。在这种情况下，需要给儿童提供必要的教学材料，让他们自己操作、观察、形成假设、讨论结论，从而既获得数学知识，又学到学习数学的方法。

传统的教学材料，严格地说就是教科书。但实际上，儿童的周围环境能够提供许多有助于学习数学的材料，而且利用这些材料还能引起儿童学习数学的动机和兴趣。因此，为了改进数学教育，应该鼓励教师在教学时除了使用教科书外，还要广泛地使用其他各种教学材料。

二 研究确定小学数学重点课题使用的教学材料并编出课时计划

根据亚太地区各国数学教育的情况，代表们以下面九个课题为重点研究

“教学材料”，英语为 instructional materials，从广义上说，它包括教科书、教学指导书、教具等，但有时也可以只指教具、作业纸等辅助性材料。本文所用的“教学材料”，主要指后者。

需要使用的教学材料以及使用的方法：1. 整数概念；2. 整数四则运算及性质；3. 分数概念；4. 分数加、减法；5. 小数概念及小数运算；6. 计量单位；7. 几何形体；8. 近似数、估算；9. 解决问题。

会上先选定教学上述课题可以使用的教学材料 28 种，其中有：取自周围环境材料的 12 种，如石子、树叶、种子、贝壳、珠子、塑料瓶、各种包装盒等；商店出售的或教师可自制的 16 种，如位置值木块、计数器、百块板、减法盒、分数图形、数字卡片、拼接卡片等。以后又选出低价的、易于制备的和适于教学多种课题的补充教具 19 种，如点子卡片、角演示器、几何木条、多用式题卡片、位值表、加法和乘法转盘、方格板、幻方等。此外，对一些重点课题编写出相应的课时计划举例 36 个，着重说明课题中的一个或几个小节内容的教学年级、教学目的、使用的教学材料、教学步骤等。

三 分析了亚太地区各国小学数学教学在广泛发展和使用教学材料方面存在的问题

归纳起来，有以下三方面：

（一）教师方面，主要有：对使用具体材料缺乏正确的认识，缺乏足够的数学知识，对使用哪些教学材料较好以及如何使用缺乏了解，注意演示而忽视儿童自己操作，不知道如何使用教学材料评价儿童的成绩。

（二）提供适用的教学材料方面，主要有：在一些地方的商店出售的教学材料价格高又不适用，教师不知这些材料的复制方法，缺少指导教师制作教学材料的中心，有些政府机构对需要鼓励生产教学材料并使之现代化缺乏理解，没有注意充分收集日常的适用于数学教学的各种物品。

（三）数学教学的条件方面，主要有：班级人数太多因而不能有效地使用教学材料，教师没有充分的时间制备教具，缺乏保管教具的地点，行政领导对在这方面的研究缺少鼓励。

以上的问题可能因不同的国家而有不同。会议认为，要解决这些问题，政府机构、教师培训机关、视导人员、教师协会、研究人员、社区团体、学校以及教师个人等都负有责任。特别是前四个部门，责任更大，不仅要帮助解决问题，还要向公众和教师进行宣传。

四 针对存在的问题提出鼓励使用教学材料的策略

会议提出了 20 条建议，主要的有：

（一）在职进修和师范教育要提供更多的数学知识。

（二）给教师定期的和更多的学习机会，使他们了解教学材料的重要性和使用方法。

（三）使有技能的教师接受更深的训练。

（四）对培训教师的教育工作者在这方面给以更多的训练。

（五）鼓励并支持教师在这方面的新发明和试验。

（六）向学校提供购置的经费或直接供应教学材料。

（七）建立资料中心以便教师或师范生制作教具。

（八）利用社区的力量帮助教师制作教具。

（九）供应教师印刷的资料以帮助教师理解教学材料的制法和用法。

- (十) 订阅数学教学的专业杂志。
- (十一) 利用培训过的教师帮助其他学校教师，并推广新的经验。
- (十二) 对使用教学材料的效果进行评价。
- (十三) 承认小学教师是专业人员。

有些问题可以由政府部门与教师组织协商解决。还可以考虑建立机构，负责教学材料的研究、推广和监督工作，以便解决上述的一些困难问题。

由于这次会议着重研究低价的教学材料，没有对如何促进计算器和计算机的使用问题进行分析研究。但这并不意味着把它们排斥在教学材料之外。特别是计算机，会议认为它将对数学教学起多方面的作用，有必要另外召开会议进行地区内的合作研究。

(本文原载于《课程·教材·教法》1995年第2期)

亚太地区一些国家使用的小学数学教学材料

1984年11月在日本举行了亚太地区发展数学教学材料研讨会。会上各与会国代表除了介绍本国的小学数学课上经常使用的一些教学材料外，还展出了一些教学材料的样品。

会议表明，亚太地区各国日益重视教学材料在小学数学教学中的重要作用。例如，马来西亚代表说，“为了提高小学数学的质量，除了其他方面，还需要提供各种教学材料。”印度代表指出，“现在已从教数学转为强调儿童学数学，……小学数学教学材料，从原则上讲，应当考虑到数学教育的重点的改变。”日本代表认为，“数学具有抽象性和逻辑性，而小学生的思维是具体的。在数学和儿童之间的桥梁就是具体的和半具体的物品，即教学材料。通过操作具体的物品，儿童是能够学会抽象的数学的。”不少国家采取了积极的措施，加强小学数学教学材料的研究、生产和使用。例如，日本早在六十年代所规定的小学需要置备的数学教学材料达60种。其中包括帮助儿童理解数、量、形的概念的教具、模型，使儿童获得一些技能的教具、仪器（如计算练习板、距离测定器、大分度器、弹簧秤），儿童在学习活动中需用的操作材料（如计数圆片、拼图形的几何色板、各种积木），以及一、二、三年级用的教学挂图等。近年来又制出各年级使用的幻灯片，共78个课题，373张；还生产了供三至六年级学生个别学习用的录音带，共四组。在马来西亚，除了教育部研究出儿童学习的用具，由企业进行生产外，还鼓励教师和学生制作和收集一些适用的教学材料。

亚太地区各国使用的小学数学教学材料，有一些与我国常用的教具相似，如计数器、说明分数的圆盘等；另外还有以下几个特点。

一 就地取材

很多国家都根据本国的具体情况和物产的特点，分别选用木棍、石子、树叶、种子、贝壳、椰子叶梗、麦秆等作教具。例如，孟加拉利用当地的罗望子树种作计数的练习。巴布亚新几内亚在教学万以内的数和计算时，分别用石子、小棍、贝壳、树叶来表示一个、一十、一百、一千。如果摆1个树叶、2个贝壳、3根小棍、4个石子，就表示1234。日本教师利用一种家用小橱柜（约长40厘米、宽30厘米、高50厘米，上面有 5×4 个小抽屉），教学乘法的初步认识、运算定律和坐标的初步概念。如竖着看是4个5，横着看是5个4，所以 $5 \times 4 = 4 \times 5$ 。利用儿童周围的熟悉的事物说明数学问题，儿童感到亲切，而且看到周围环境中到处是数学问题，很容易激发学生学习数学的兴趣。

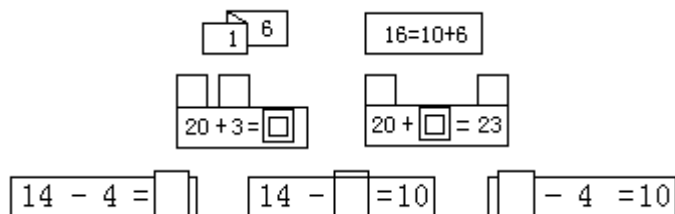
二 强调实际操作

例如，在马来西亚，教除法的认识时，先让学生分成每两人一组，每组发给10个硬币（模型），让学生平均分，看每人分得几个。再让学生分成每五人一组，仍发给10个硬币，让学生平均分，看每人分得几个。然后引出除的概念。在新加坡，教学角的认识时，每个儿童都发给两个硬纸条，让他们把一端钉好，再转动一个硬纸条，形成各种不同的角。然后全班进行讨论，

可以形成什么样的角。有些经济发达的国家还使用专门生产的教学材料。在新西兰，广泛利用奎逊耐木条作教具。在日本，有专门为低年级儿童设计制作的供儿童操作的教学材料，其中有数字卡片、小棒、梅花、小正方体、钱币模型、钟表、式题卡片、平面图形色板、钉子板、计算转盘等。儿童通过实际操作，可以加深理解数学概念的意义和计算方法的算理，还有助于发展学生的思维。

三 一具多用

例如，在泰国，数目卡片采取折迭的形式，打开来就出现表示数的组成的等式（见下图）。加法式题卡片，已知数和得数的上面各粘着一块纸片，用以遮盖某个已知数或得数，可做加、减法练习（见下图）。在菲律宾，则给计算式题卡片加上可以移动的纸套，也能做相反的运算的练习（见下图）。在日本，有供儿童个人用的计算转盘等。



四 注意发展思维和培养能力

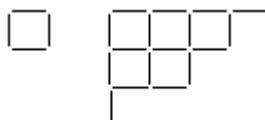
例如，在澳大利亚，设计一套平面图形，要求儿童利用指定的某几个图形摆出轴对称图形。下图是一个最简单的例子。要求用这三个图形摆出四种轴对称图形。通过这样的活动既可以发展儿童的空间观念，又发展儿童的发散思维。他们还设计制作一种可以构图的几何体，让儿童看图摆几何体，或计算立方单位的数目。例如：



（一）用一个S形、一个L形和一个正方形组合成下右两图所示的几何体。

（二）下面每幅图是由多少个小正方体组成的？如果拿去涂阴影的正方体，剩下的是什么样的形体？各含有多少个小正方体？

在日本，还注意利用教学材料发现解问题的方法，既发展儿童思维，又培养解问题的能力。例如，用4根牙签可以摆一个 1×1 的正方形，如果要摆 10×10 个正方形，需要多少根牙签？儿童要通过实际操作，寻找解题规律，列出算式。还可以找出不同的解法，比较哪种简便。



五 有些教具很注意趣味性

例如，新西兰有一种教具，是在硬纸板上写一些算式，然后剪成不规则的曲线形，让学生边拼边算，拼对了，背面有“很好！”字样或是一幅图画。

在日本等国，广泛流行一种减法盒。盒子可以用纸板或塑料制成。盒中间有一个隔板，把盒分成两部分，但又是相通的。盒里放一定数量的小球或钱币，然后把盖盖上，摇一摇，小球或钱币就分成两部分。如果告知总数和一部分的数量，用减法可以求另一部分的数量。

许多国家都有一些做数学游戏的教学材料，儿童很感兴趣。例如：

1. 投标枪游戏：用一块板做靶，靶上画三个同心圆。投进最里圈得 50 分，投进中圈得 25 分，投进外圈(划分 20 个部分)得分由 1 分到 20 分不等。每人每轮投 3 次，累计先得 300 分者为胜。如果反过来，先给每人 300 分，每次得分就把它减掉，先减得 0 分者就为胜。这样，可以练习减法。

2. 奇数偶数游戏：由两个人玩，开始两人有同样多的罗望子树种。甲在手心放若干粒种子，让乙猜种子的数量是单数还是双数。如果猜对了，就得到这些种子，和自己原有的种子数加起来，说出总数；而甲要算出剩下的种子数。然后乙在手心放若干粒种子，让甲猜。这样继续玩下去，最后哪个人得到对方的所有种子为胜。通过这游戏可以练习加减法。

(本文原载于《小学数学教师》1985 年第 4 期)

国外小学数学常用的一种教具——奎逊耐木条

近二、三十年，国外小学数学教学中，广泛使用一种教具，叫做奎逊耐木条。它是比利时一位小学校长乔治·奎逊耐研制的。

这套教具由十种木条组成，分别涂上白、红、浅绿、紫、黄、深绿、黑、蓝、棕、橙等颜色。十种木条的截面都是1平方厘米的正方形、长度分别为1、2、3、……10厘米。显然，白色木条是一个正方体、其他各色木条都是长方体。

奎逊耐木条具有以下几个特点：

(一)是一种多用途的教具。利用奎逊耐木条可以学习自然数、整数四则运算、分数的概念、分数四则运算等，还可以学习某些代数知识，如整式的运算，以及简单的几何形体的认识和面积、体积的计算等。因此在小学各年级数学课上都可以使用。

(二)是一种操作性的教具。它不只作为教师演示用的一种教具，更重要的是学生实际操作的教具。通过操作，如排序、比较、合并、移动、均分等，学生不仅理解所学概念的意义，计算法则的来源，或某一性质的原理，而且发展了操作能力。上课时，通常发给每个学生一盒奎逊耐木条，每盒木条的数量大致如下：

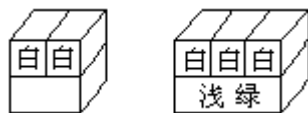
白色 21 个	黄色 4 个	蓝色 4 个	红色 12 个
深绿色 4 个	橙色 4 个	浅绿色 10 个	黑色 4 个
紫色 6 个	棕色 4 个		

(三)是一种探索性的教具。用这种教具大都不是直接向学生说明某一数学概念或计算法则，而是使学生通过操作去探索和发现数学的规律。例如，要知道5是哪两个数组成的，学生就要试着找出哪两个木条接起来跟黄木条等长，要找出所有可能的情况，并按照顺序排好，然后做出结论。学生在操作时会发现，用调换木条的顺序的方法可以较快地找出所有可能的情况，如找到一个白木条和一个紫木条(表示1和4)合起来是5，很快想到一个紫木条和一个木白条合起来也是5。因而在操作中促进了学生思维能力的发展。

下面简单介绍如何使用奎逊耐木条教学数学概念和进行计算。

一 认识自然数

把白木条看作1，通过与白木条的比较，可以引导儿童确定其他颜色的木条依次表示2, 3, 4, 5, ……10。例如(见下图)，通过摆木条知道红木条表示2，浅绿木条表示3。

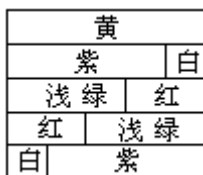


把10种木条按照由短到长的顺序排列成楼梯形状，就表示从1到10的自然数列。利用它可以学习10以内的数的顺序和大小比较。还可以学数的序数含义。例如，向学生提问：

- 从左起第四个是什么颜色的木条？
- 从右起第三个是什么颜色的木条？

—黄木条排在从左起第几个？排在从右起第几个？

用木条还可以学习数的组成。例如，通过摆木条可以找出5的组成（见右图）有：4和1、3和2、2和3以及1和4。



利用木条还可以学习100以内的数。

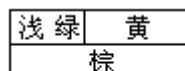
数100以内的数时，每数够10个白木条，可以用1个橙木条代替；超过40的数，可以把不同颜色的木条接起来。如1个蓝木条和1个白木条，1个棕木条和1个红木条，都表示10。

两位以上的数也可以按照位值原则来摆。例如，红木条放在个位表示2个一，放在十位表示2个十，放在百位表示2个百。

	百	十	一(个)
24		红	紫
353	浅绿	黄	浅绿

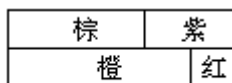
二 整数加、减法

（一）做两个数的和不超过10的加法，先把表示这两个数的木条接起来，然后找出一个木条跟相接的两个木条等长，这个木条所表示的数就是两个加数的和。例如，右图表示 $3+5=8$ 。



$$3+5=8$$

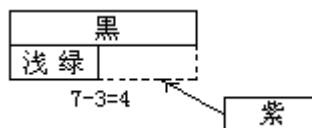
遇到和超过10的，可以拿1个橙木条和另一个木条接起来表示两个加数的和。例如：棕木条和紫木条接起来表示 $8+4$ ，要知和是多少，下面放1个橙木条和1个红木条，容易看出和是12。



$$8+4=12$$

（二）说明两位以上的数的加法，可以按照位值原则摆木条，然后逐位加，某位上两个数的和满10，要在前一位增加一个单位。

（三）做两个10以内的数的减法，先找出两个木条分别表示被减数和减数，使它们的一端对齐，然后找出另一个木条和短木条（表示减数）接起来跟长木条（表示被减数）等长。找出的木条所表示的数就是减得的差。例如右上图表示 $7-3=4$ 。



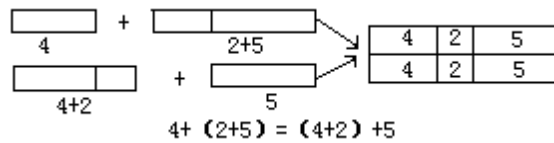
计算十几减几（退位）的减法，可以按照同样方法进行。

（四）两位以上的数的减法，要按照位值原则摆木条，然后逐位减，某

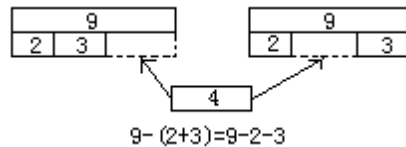
位上的数不够减要从前一位退 1 改作 10，再减。

(五) 通过摆木条，还可以学习加减法的关系和加、减法的运算性质。

例如：



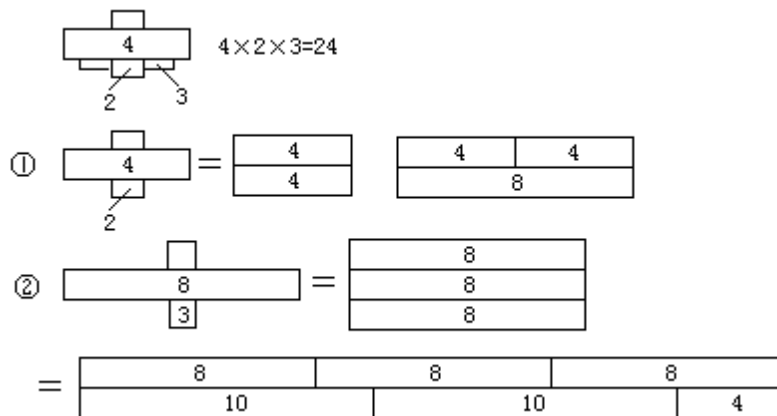
再举其他类似的例子，最后引导学生概括出加法结合律又例如：



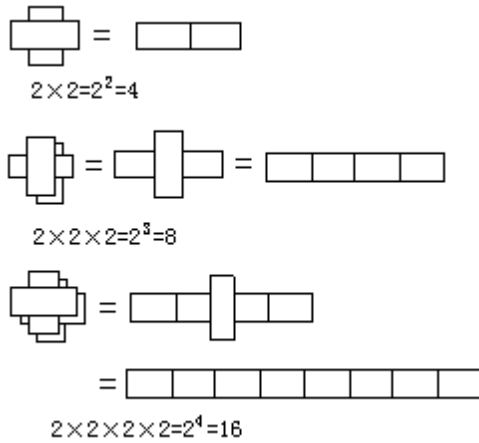
再举其他例子，最后引导学生做出概括：一个数减去两个数的和等于从这个数里依次减去和里的各个加数。

三 整数乘、除法

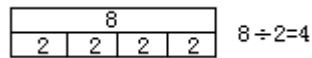
(一) 两个数相乘，先拿两个木条分别表示被乘数和乘数，摆成十字形；然后按照表示乘数的木条的长度连续摆满表示被乘数的木条，使表示被乘数的那几个木条的总宽度跟表示乘数的木条的长度正好相等。最后根据所摆的同样的几个木条的总长度，算出两数相乘的积。例如：



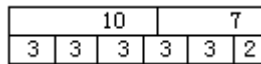
(三) 几个相同的数连乘，也就是一个数的若干次方，用奎逊耐木条摆成塔形，可以很直观地表示出来。例如：



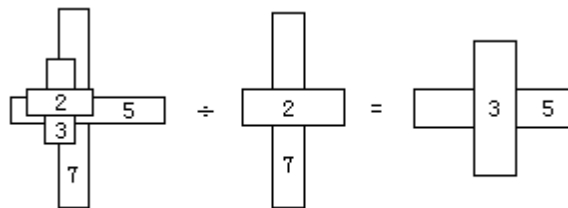
(四) 计算除法时，先拿两个木条分别表示被除数和除数，然后看用几个表示除数的木条接在一起跟表示被除数的木条等长，商就是几。



如果最后需要接的木条比表示除数的木条短，就表示除后有余数。例如，下图表示 $17 \div 3 = 5 \dots 2$ 。



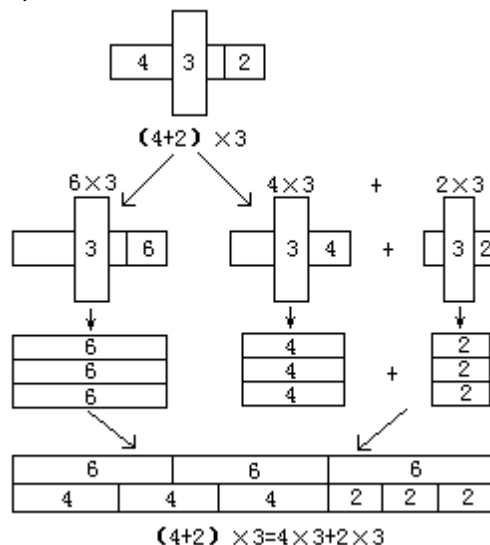
有时做较大的数的除法，被除数和除数可以用十字形或塔形表示。例如， $210 \div 14$ ，分别摆成 $2 \times 3 \times 5 \times 7$ 的塔形和 2×7 的十字形，然后从被除数里拿掉 2×7 ，得到 3×5 ，就是商得 15。



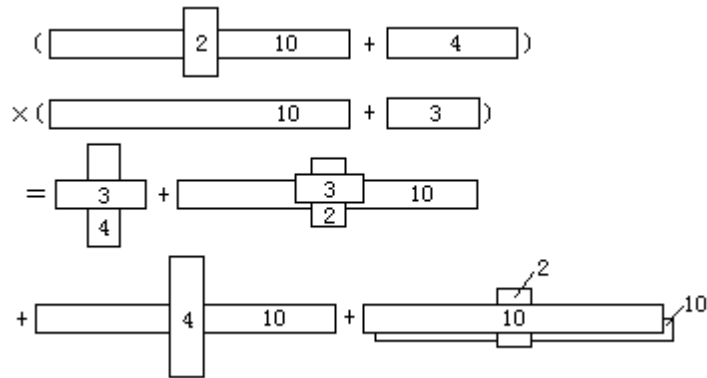
$210 \div 14 = 15$

(五) 多位数乘除法，也可以用奎逊耐木条来说明。但是最好先了解乘除法的运算性质。

利用奎逊耐木条，可以这样说明乘法分配律：



根据乘法分配律，用木条可以说明笔算乘法的计算方法。例如， 24×13 可以看作是 3 个 $(20 + 4)$ 和 10 个 $(20 + 4)$ 的和，也就是 3 个 4、3 个 20、10 个 4 和 10 个 20 的和。



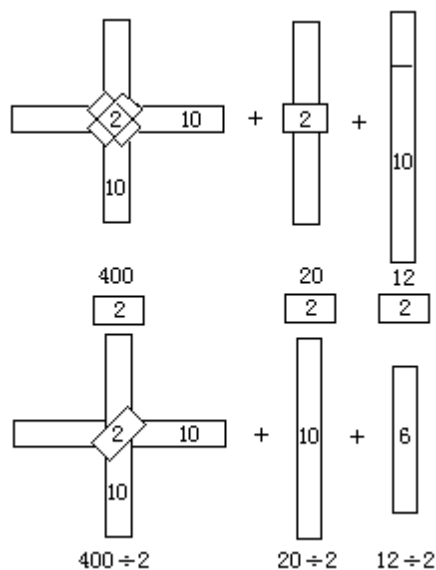
在摆木条的基础上总结乘法竖式的计算步骤如下：

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 13 \\ \hline 12 \\ 60 \\ 40 \\ +200 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 24 \\ \times 13 \\ \hline 72 \\ +24 \\ \hline \end{array}$$

根据和除以一个数的运算性质，用木条可以说明笔算除法的计算方法。例如， $432 \div 2$ ，可以把被除数分解成 400、20 和 12，拿这三个数依次除以 2（如下页图）。

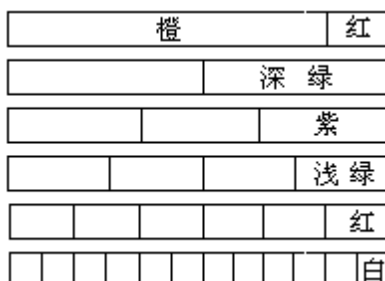
在摆木条的基础上总结除法竖式的计算步骤如下：

$$\begin{array}{r} 6 \\ 10 \\ 200 \\ 2 \overline{)432} \\ \underline{400} \\ 32 \\ \underline{20} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 216 \\ 2 \overline{)432} \\ \underline{4} \\ 3 \\ \underline{2} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$



四 分解质因数

(一) 利用奎逊耐木条可以给学生建立因数、质数和合数的概念。例如：
通过摆木条，可以直观地了解，12 可以分别由 1 个 12、2 个 6、3 个 4、4 个 3、6 个 2 或 12 个 1 组成，也就是 12 能被 12、6、4、3、2、1 整除，由此也就知道这些数都是 12 的约数（或因数），还可以了解 6、3、2、1 都是 6 的约数（或因数）；4、2、1 是 4 的约数（或因数）；等等。

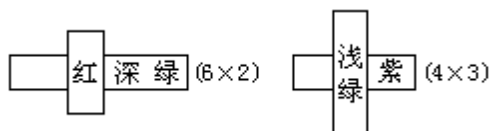


通过摆木条，学生可以了解，有的数只能用它自身（表示该数的木条）和若干个 1（白木条）来表示。这就是说，这个数的约数只有它自身和 1，这样的数就叫做质数，如 2、3、7 等：

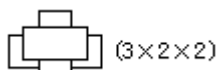


有的数除表示该数的木条自身和白木条以外，可以用其他木条表示，也就是说除该数自身和 1 外，还有其他约数。这样的数就是合数。如 12、6、4 等。有了木条帮助理解，学生对这些概念就不会感到抽象难懂了。

(二) 利用奎逊耐木条可以说明把一个合数分解质因数。先说明，每个合数都可以用表示它的因数的木条摆成一个塔形，例如 12，首先用下面两个十字形来表示。

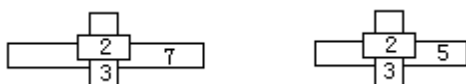


由于 4 和 6 都是合数，因此还可以用更短的木条组成塔形来表示。



因为这些木条所表示的数都是质数，所以这个塔形就叫质数塔形。把一个合数摆成质数塔形，说明这个数可以用几个质数相乘的形式来表示，就叫做把这个合数分解质因数，上页图的质数塔形表示： $12=3 \times 2 \times 2$ 。

(三) 通过摆质数塔形来把合数分解质因数后，很容易找出两个合数的公因数和最大公因数。例如 42 和 30 分别用下面的质数塔形来表示：



可以看出，42 和 30 有公因数 2、3 和 6，最大公因数是 6。

(四) 通过摆质数塔形来把合数分解质因数后，也很容易找出两个合数的最小公倍数。例如，12 和 18，先分别用下面的质数塔形来表示：

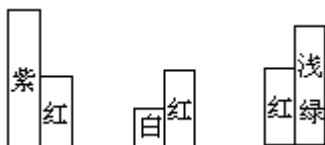


然后参照这两个塔形，摆一个新塔形，要是原来 2 个质数塔形的公倍数，就要包含原来每个塔形的所有木条。具体地对 12 来说，所摆的这个新塔形至少必须包含两个红木条和一个浅绿木条。就是要包含的质因数至少必须有两个 2 和一个 3；对 18 来说，这个新塔形至少必须包含一个红木条和两个浅绿木条，就是要包含的质因数至少必须有一个 2 和两个 3。这样新塔形至少要包含两个红木条和两个浅绿木条，也就是两个 2 和两个 3。由此得到 12 和 18 的最小公倍数是： $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ 。

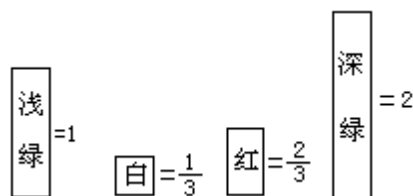
也可以按一般求最小公倍数的方法，先找两个数公有的质因数。于是断定新塔形要包含它们公有的一个红木条和一个浅绿木条；而新塔形要是 12 的倍数，至少还要有一个红木条；要是 18 的倍数，至少还要有一个浅绿木条。这样也可以断定新塔形至少要包含两个 2 和两个 3。

五 分数的概念

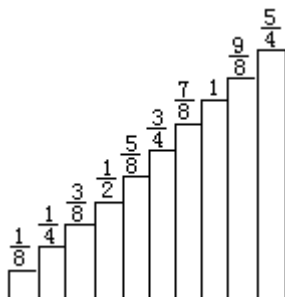
分数概念涉及到部分和整体的关系，一个分数表示某一部分是整体的几分之一或几分之几。因此可以从奎逊耐木条的长短的比较中引出分数。例如：



长木条在左，短木条在右，表示长木条是短木条的几倍；反过来，短木条在左，长木条在右，表示短木条是长木条的几分之一或几分之几（都是以右边的木条作为比较的标准）。比较上面每一组的两个木条，可以看出，紫木条是红木条的 2 倍，白木条是红木条的 $\frac{1}{2}$ ，而红木条是浅绿木条的 $\frac{2}{3}$ 。



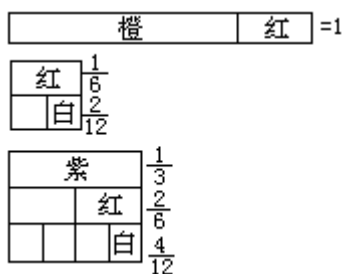
如果选定某种颜色的木条作为单位 1，则其他颜色的木条就可以表示某些分数或整数。例如：



可以把十种颜色的木条按顺序排列，然后选定某种颜色的木条为 1，做判定其他颜色的木条各表示多少的练习。例如：

在上图中，以棕色木条为1，则白木条为 $\frac{1}{8}$ ，红木条为 $\frac{2}{8}$ ……橙木条为 $\frac{10}{8}$ 或 $\frac{5}{4}$ ，如果以橙色木条为1，则白木条为 $\frac{1}{10}$ ，红木条为 $\frac{2}{10}$ ，蓝木条为 $\frac{9}{10}$ 。由此可见，用这些木条也可以表示小数0.1、0.2……

利用上面排好顺序的木条可以比较分数的大小。显然 $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$ ， $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ ， $\frac{3}{4} > \frac{5}{8}$ ，……

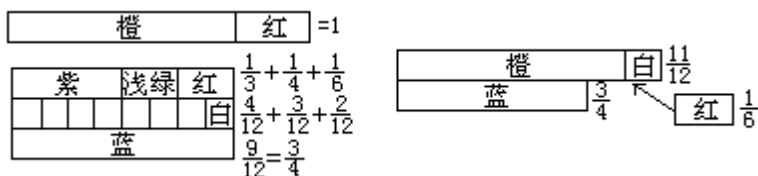


利用木条还可以做分数的等值变形练习。

可以看出， $\frac{1}{6} = \frac{2}{12}$ ， $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$ 。还可以从中找到分子、分母的变化规律，从而得到分数的基本性质。

六 分数四则运算

(一) 利用木条可以说明分数加、减法。例如：以橙木条和红木条的总长为1，则 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{6}$ 分别用紫色、浅绿色、红色木条表示。求三个分数的和时，先化成同分母的分数，即分别用12个白木条(或一个橙木条和一个红木条接起来)表示1。表示三个分数和的三种颜色的木条总长等于9个白木条，即9个 $\frac{1}{12}$ ；它又和蓝木条等长(如左下图)，所以 $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ 。

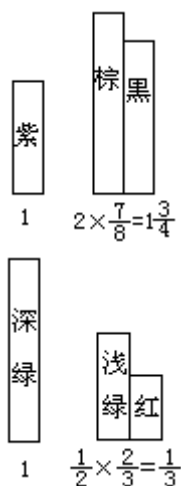


如果算 $\frac{11}{12} - \frac{3}{4}$ ，因为蓝木条补上一个红木条和橙、白木条的总长相等，所以可知 $\frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$ 。也可以先把蓝木条化成分母是12的分数，即用几个白木条来表示，得 $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$ ；然后在蓝木条右面补上两个白木条，正好和橙、白木条的总长相等(如右上图)。由此算出 $\frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{11}{12} - \frac{9}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

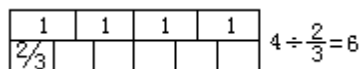
(二) 利用木条还可以说明分数乘、除法的计算方法。例如：要算 $2 \times$

$\frac{7}{8}$ ，就是求2的 $\frac{7}{8}$ 是多少。先拿紫木条表示1，棕木条就是2，而棕木条的 $\frac{7}{8}$ 就用黑木条（或7个白木条）表示。要知道黑木条实际是多少再拿它同表示1的紫木条比较。可以知道，紫木条表示1时，黑木条是 $1\frac{3}{4}$ 由此得出 $2 \times \frac{7}{8} = 1\frac{3}{4}$ 。

要算 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ ，就是求 $\frac{1}{2}$ 的 $\frac{2}{3}$ 是多少。可以拿深绿木条表示1，浅绿木条就表示 $\frac{1}{2}$ ，而浅绿木条的 $\frac{2}{3}$ 就用红木条（或两个白木条）表示。要知道红木条实际是多少，再拿它同表示1的深绿木条比较。可以知道，深绿木条表示1时，红木条是 $\frac{1}{3}$ 。为了更好地说明分数乘法的计算方法，可以先在浅绿木条右面放一个白木条，表示求 $\frac{1}{2}$ 的 $\frac{1}{3}$ ，要知道它实际是多少，须同深绿木条比较。显然它实际表示 $\frac{1}{6}$ （即 $\frac{1}{2 \times 3}$ ）；求 $\frac{1}{2}$ 的 $\frac{2}{3}$ ，要放2个白条（也可换成一个红木条），就是 $\frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{6}$ 或 $\frac{1}{3}$ 。

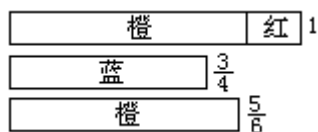


要算 $4 \div \frac{2}{3}$ 得多少，可以拿浅绿木条表示1，4个浅绿木条就表示4，红木条就表示 $\frac{2}{3}$ 。然后看4里面包含多少个 $\frac{2}{3}$ ，除得的商就是多少。因为6个红木条和4个浅绿木条等长，所以商是6。



再如算 $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$ 得多少，可以拿一个橙木条和一个红木条的总长表示1，蓝木条和橙木条分别是它的 $\frac{3}{4}$ 和 $\frac{5}{6}$ 。

可以看出，蓝木条是橙木条的 $\frac{9}{10}$ （为了看得清楚，可以把蓝、橙木条分别换成等长的白木条），即 $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{9}{10}$ 。

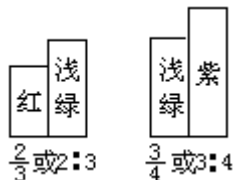


为了说明除以一个分数要乘以这个分数的倒数，在举上面第一个除法例子时，可以先看4里面包含多少个 $\frac{1}{3}$ （用白木条表示），显然要放 (4×3) 个白木条，也就是4里面有 (4×3) 个 $\frac{1}{3}$ 。下一步要看4里面包含多少个 $\frac{2}{3}$ ，就要把每两个白木条换成一个红木条，结果包含6个红木条，就是 $\frac{4 \times 3}{2} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$ 。

在举上面第二个除法例子时，为要说明计算方法，可以联系分数乘法的意义逐步推导。如要算 $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$ ，是已知一个数的 $\frac{5}{6}$ 是 $\frac{3}{4}$ ，求这个数。可以拿两个橙木条接在一起表示1，一个橙木条和一个黄木条接在一起表示 $\frac{3}{4}$ 。（学生摆木条时，依照分数乘法仍竖着摆较好）。由于 $\frac{5}{6}$ 是5个 $\frac{1}{6}$ ，根据已知一个数的 $\frac{5}{6}$ 是 $\frac{3}{4}$ ，可以知道这个数的 $\frac{1}{6}$ 是多少，就要把 $\frac{3}{4}$ 平均分成5份，一份用浅绿木条表示，实际计算得 $\frac{3}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{4 \times 5}$ （即 $\frac{3}{20}$ ）。然后再想，这个数应有6个浅绿木条那样长，摆出6个浅绿木条。实际计算可得：

七 比和比例

联系前面用木条表示分数，很容易导出比的概念。如右图。用下面的方法可以检查这 $2 \frac{3}{3}$ 和 $4 \frac{6}{6}$ 两个比是否成比例：



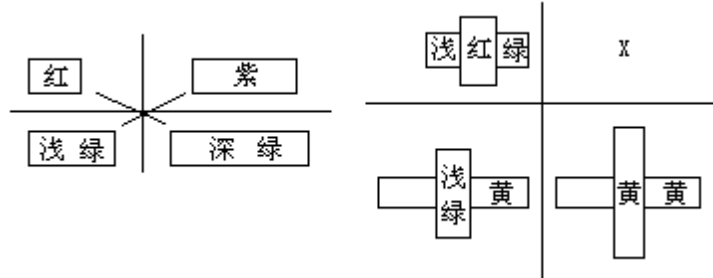
拿对角线上的木条相乘，得 $2 \times 6 = 3 \times 4$ ，说明它们是成比例的，即 $\frac{2}{3} = \frac{6}{4}$ 。还可以把木条调换位置。如浅绿木条与红木条上下调换，紫木条与深绿

木条上下调换，然后交叉相乘得 $3 \times 4 = 2 \times 6$ ，由此说明四个木条成比例，

$$\text{即 } \frac{3}{2} = \frac{6}{4}。$$

利用摆木条可以解正比例的问题。例如：

买 6 块糖用了 15 分，25 分可以买几块？

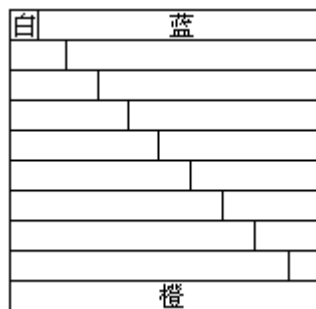


从红、浅绿、黄、黄四个木条的乘积中，拿掉公有的一个浅绿木条和一个黄木条，显然剩一个红木条和一个黄木条（表示除得的商），乘起来得 10，从而导出比例的解法。

$$\begin{aligned} 6 \quad 15 &= x \quad 25 \\ 15x &= 6 \times 25 \\ x &= \frac{6 \times 25}{15} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

八 认识计量单位

由于奎逊耐木条的长度是以厘米为单位的，所以用来认识长度单位厘米和分米就非常方便。此外，还可以认识面积单位 1 平方厘米、1 平方分米。认识 1 平方分米时，可以让学生用十种颜色的木条拼成如右图形，向学生指出正方形平面的边长是 1 分米，面积是 1 平方分米。进一步研究 1 平方分米和 1 平方厘米的进率关系。



同样，认识体积单位时，可以让学生用木条拼成一个棱长为 1 分米的正方体，指出它的体积是 1 立方分米，进一步研究 1 立方分米和 1 立方厘米的进率关系。

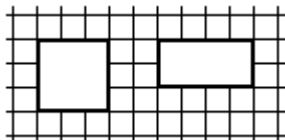
九 几何初步知识

（一）利用奎逊耐木条可以认识长方形、正方形、长方体和正方体。除了利用单个的木条来研究这些图形的性质外，还可以拿几个木条拼成一个形

体来研究。

(二) 通过摆木条可以使学生比较清楚地理解面积的概念, 以及长方形、正方形的面积计算方法。

例如, 让学生在方格纸(每个方格边长一厘米)上摆3个浅绿木条, 再摆2个紫木条, 然后比较这两个形体底面的大小。通过数方格不仅知道哪个底面大, 也帮助形成面积的概念。进一步可以启发学生研究每个平面图形所含的平方厘米数, 与边长的关系, 从而导出面积的计算方法。



(三) 通过摆木条还可以使学生比较清楚地理解体积的概念, 以及长方体、正方体表面积和体积的计算方法。

(四) 利用木条还可以使学生认识直角、对称等。

十 教学时使用奎逊耐木条应注意的几点

奎逊耐木条在国外使用比较广泛, 但我国还很少使用。由于我国的具体情况有些不同, 如何更有效地使用这种教具, 还需要进一步研究, 现在看来, 有以下几点值得注意。

(一) 小学数学中绝大部分教学内容虽然都可用奎逊耐木条来帮助说明概念, 理解算理, 但教学时要避免单一化, 不能把它作为唯一的教具。有些内容如果使用其他教具效果更好, 就不一定用它, 或与它彼此配合使用。

(二) 奎逊耐木条, 同其他教具一样, 只是学习的一种手段。教学时, 同使用其他直观教具一样, 要在学生操作、感知的基础上及时引导学生抽象概括, 以利于学生抽象思维的发展。学生操作后, 要注意让学生用言语表达, 形成必要的概括结论, 总结出探索的规律, 有时可以适当提一两个问题让学生在操作中探索多种解法或多种答案, 以促进学生创造思维的发展。

(三) 由于它是一种学生操作的教具, 着重让学生在操作中探索和发现规律, 在使用时就比较费时间。因此如何引导学生操作, 既发挥学生思维的积极性, 又不致形成学生漫无边际的探索, 浪费时间, 使学生的主体作用和教师的主导作用很好地结合起来, 是一个需要特别注意的问题。为此教师课前的周密设计很重要。低年级儿童还不善于取出、放回和保管木条, 教师事先都要考虑如何安排和指导。

(四) 我国的班级人数多, 而奎逊耐木条比较小, 不便演示。为此可以考虑设计制作一套尺寸较大的木条, 既可挂在黑板上, 又容易取下, 便于教师演示。

(本文原载于《湖北教育》 1985 年第 7—10 期。)

