学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

通过模型学解题中学物理专辑

—运动合成问题

献·给·读·者

《通过模型学解题》（物理）丛书是围绕高中物理教材，结合中学教学实际编写的学生课外读物。本丛书突破按知识体系谋篇布局的常规，力图引导学生换一种新的角度去窥视中学物理图景，领悟分析和解决物理问题的思路。

什么叫物理模型？物理模型就是抽象化了的物理研究对象、条件或过程。物理模型可划分为实体模型与过程模型两大类。

实体模型是研究对象或条件的抽象。质点、点电荷、点光源、光滑轨道、单摆、理想气体、匀强电场、匀强磁场、核式结构的原子等，都属于实体模型。

过程模型是对物理过程的抽象。直线运动、圆周运动、带电粒子在电场与磁场中的运动、导体在磁场中的运动等等，都是过程模型。

物理模型，其性质特征、规模大小及相互联系，可以划分为不同的层次。本丛书以过程模型为结构框架，各分册有体现第一层次模型的书名和体现第二、三层次模型的简明目录。所谓“通过模型学解题”，就是根据物理的基本性质和特征，条分缕析，剖切成各个层次的过程模型，并抓住同一模型中各类问题的共同特性，例举有代表性的实体模型，综合运用各种物理知识，各种定理、定律，运用不同的观点、方法，归纳出解决问题的一般途径和方法技巧。

本丛书在研究具体问题时，以文字演算为主，避免繁琐的数值计算，从而使解决问题的方法更具广泛性，更显得逻辑严密。

按物理模型构建丛书框架，在不同层次的模型上展示物理图景，是一种新的体裁，新的尝试，前无经验，谬误和不妥之处难免，敬请读者批评指正。

王兴桃

1994 年 2 月

运动合成问题，主要研究四类问题。

第一类问题：把一个物体所作的复杂运动，看成是若干个简单运动的合运动，并根据运动合成的原理，找出研究复杂运动的方法。如平抛运动，通常都被看成是水平方向上的匀速运动和竖直方向上自由落体运动的合运动，这样，就可以在笛卡儿坐标中，运用解析法研究其运动情况并确定其轨道方程。

第二类问题：一个物体同时参与两个或两个以上的运动，这个物体的运动便是几个分运动的合运动。例如，一艘轮船在流动的河水中航行，船员顺着桅杆向上爬行，则船员的运动便是若干个分运动的合运动。这里所指的船员的运动，还有相对于轮船、相对于河水、相对于河岸的区别。选择不同的参照物，运动的合成结果将不相同。

第三类问题：研究两个或两个以上独立运动的物体之间的相对位移、相对速度、相对加速度等有关问题。如电梯中的落体问题；猎犬在一条直线上或一个平面上追捕一只拚命奔跑的兔子的问题等。

第四类问题：研究两个或两个以上的物体在某种特定联系下，或在某种特定限制条件下运动时，与运动合成有关的问题。

如人在码头上通过跨在岸边光滑轮上的绳子牵引小船靠岸的过程中，船速与人拉绳子在岸上走动的速度关系。

运动合成问题有两个最显著的特征：一是运动合成的相对性。任何一个运动合成问题，都与参照物的选择密切相关，这是由运动的相对性决定的。二是运动合成的矢量特性。由于运动量具有方向性，这就决定了研究运动合成问题时，必须按平行四边形法则，或由此发展而来的矢量三角形法和正交分解法等数学方法进行分析计算。

运动合成的相对性和矢量特性，决定了运动合成问题的复杂性。分析研究运动合成问题，不仅要对力学基本原理有深刻的理解，而且特别需要有丰富的想象力；分析研究运动合成问题，不仅要运用一系列物理学基本原理，而且将涉及到物理学的一系列基本研究方法；所以研究运动合成问题，对学好物理，培养能力有特别重要的意义。

一、同一直线上运动的合成

一条直线上的运动合成问题，广泛存在于自然界和实际生活中。它包括一个物体沿一条直线作复杂运动的情况，还包括两个或两个以上的物体沿一条直线运动的情况。

当涉及到两个或两个以上的运动物体时，由于运动的相对性，参照物的选择显得十分重要。大多数情况下，人们都习惯于选择地面为参照物，这种习惯性选择主要是因为直观、易被理解。然而我们将会发现，确当地选择地面以外的运动物体作参照物，不但可以使解决问题的方法变得十分简单，而且可以加深对相对性原理的理解，使我们对简单的机械运动的理解与认识产生质的飞跃。

●匀速运动的合成问题

一条直线上匀速运动的合成问题，只有同向与反向运动两种情况，其最主要的特点是直观。分析解决这类问题的关键是参照物的选择。选择不同的参照物，意味着对同一个实际问题有不同的理解模型，也就代表着一种不同的解题方法。

在下面的例题中，我们有时用不同的方法，即选择不同的参照物分析解决同一个问题。对有些复杂的问题，如果自始至终选择同一个特定的参照物，往往显得十分困难。这时，必须灵活地变换参照物。

［例题 1］一只小艇沿河流逆水航行，航行中在某处有一只救生圈从艇上掉落到水中，经时间 t 才发现，小艇立即掉头，在离救生圈掉落处下游 s 处捞起救生圈。求水流的速度多大？（不考虑小艇掉头所用的时间，小艇航行时相对于水的速度假设不变。）

［分析与解］方法一：以河岸为参照物作示意图，如图 1－1 所示。

救生圈在 O 点从小艇上掉落到水中。经时间 t，小艇逆流而上到达 A 点时掉头，这段时间里救生圈已顺水漂流到 O 点的下游 A′处。小艇掉头后顺水航行时间 t′，在 B 点捞起救生圈，在时间 t′里，救生圈从 A′处顺水漂流到 B 点。

假设小艇的航速为 v_0，水流速度为 v，小艇由 O 到 A 逆流航行时相对于河岸的位移 OA=（v_0-v）t；在时间 t 时，救生圈顺水漂流到 A′点的位移 OA′=vt。小艇掉头后顺流航行，在 B 点与救生圈相遇，故从 A 到 B 的位移为 AB=（v_0+v）t′；在时间 t′内，救生圈由 A′顺水漂到 B 点，位移为 A′B=vt′。由图 1－1 和上面的分析，可得下列两个相应的方程：

$$\begin{cases} vt + vt' = s \\ (v_0 + v)t' = (v_0 - v)t + vt + vt' \end{cases}$$

由第 2 个方程可得 t=t′。将 t=t′代入第 1 个方程,即求得水的流速：$v = \frac{s}{2t}$。

方法二：以河水为参照物。以河水为参照物，即认为水不流动。这样，救生圈掉落到水中后，它的位置不动（相对于水）。小艇在水中航行 t 秒发现救生圈掉落在水中，由于不计掉头所用的时间，小艇掉头后返回到救生圈处所用的时间必然也是 t 秒。在小艇一个往返的 2t 秒内，救生圈实际上相对于河岸顺水漂流距离 s，若水的流速为 v，则：

$s = v（2t）$，即$v = \frac{s}{2t}$

在方法一中，我们始终以河岸为参照物，得出 t=t′的结论；在方法二中，我们先以水为参照物，经过分析，得知小艇相对于救生圈逆流而上航行的时间与顺流而下航行的时间相等。再以河岸为参照物，在小艇一往一返的时间内，顺水而下的距离是 s，从而求得水流的速度 v。还可以看出，在方法一中是以位移为联系纽带的；在方法二中，不仅参照物变换了，而且联系的物理量也变换了；先假设水不流动，分析小艇相对于河水逆流而上的航行时间与顺流而下的航行时间；然后，再以河岸为参照物，看河水在相同的时间里相对于河岸的位移。

评说这两种方法的难、易与优、劣是没有什么意义的。关键是要理解与掌握分析问题的物理思想和物理模型，并能准确而熟练的运用。

［例题 2］一列步兵队伍以 5.4 千米/小时的速度沿笔直的公路匀速前进，行进中保持 1200 米的队列长度不变。一个通讯员骑马从队列的末尾到队列的前端传达命令后，立即又返回到队列的末尾，往返共用时间 10 分钟。如果通讯员骑马行进的速度是匀速的，掉头的时间不计，求他骑马行进的速度多大？

［分析与解］方法一：设队伍行进的速度为 v_1，通讯员骑马行进的速度为 v_2（v_1、v_2 均相对于地面），则通讯员从队尾向队首前进时，相对于队列的速度为 v_2-v_1，返回时相对于队列的速度为 v_2+v_1；如队列长为 l，通讯员往返共用时间 t，则：

$$t=\frac{l}{v_2-v_1}+\frac{l}{v_2+v_1}$$

于是得到关于 v_2 的一元二次方程：

$$vt_2^2-2tv_2-tv_2^2=0。$$

对 v_2 解这个方程，并将已知量用国际单位表示后代入，求得解答：

$$v_2=\frac{2l+\sqrt{4l^2+4t^2v_1^2}}{2t}=\frac{l}{t}\pm\sqrt{(\frac{l}{t})^2+v_1^2}$$

$$=2（米/秒）\pm 2.5（米/秒）$$

舍去负根，可得通讯员骑马时的速度为 v_2=4.5（米/秒）=16.2（千米/小时）。

方法二：以地面为参照物，设队伍向右运动。见图 1－2。通讯员以速度 v_2 从队尾 B 开始向队首行走，经过时间 t_1 在 A_1 点到达队列的最前端。在这段时间里，通讯员向右运动的路程是 v_2t_1，队首由 A 到 A′，运动的路程是 v_1t_1。由图中（甲）的部分可以看出有下列关系存在：

$$v_2t_1-v_1t_1=l$$

在 A_1 点通讯员掉头向左朝队尾行走，经时间 t_2 在 B_2 点到达队尾，在 t_2 这段时间里，队首向右运动的距离是 v_1t_2，通讯员向左跑到队尾的路程是 v_2t_2，由图中（乙）的部分可以看出：

$$v_2t_2+v_1t_2=l$$

由上述两式可得：

$t_1+t_2=t$，即：

$$\frac{l}{v_2-v_1}+\frac{l}{v_2+v_1}=t$$

这个结果与方法一是相同的。表明选择不同的参照物，不会影响解题的结果。

方法一认为队伍不动，通讯员以速度 v_2-v_1 从队尾向队首走，接着以速度 v_2+v_1 从队首向队尾走。方法二则以通讯员和队列在相同时间里位移大小的关系为纽带，列出两个方程。这两种方法的汇合点是通讯员相对于队尾运动所用的时间 t，不论你选择什么物体作参照物，它是一个不变的

常量。所以，我们在这两种方法中都得到关系式

$$t = \frac{l}{v_2 - v_1} + \frac{l}{v_2 + v_1}$$

［例题 3］在大商场、大火车站、地铁站等公共场所的进出口，往往设有自动扶梯运送客人上下，但有些人可能会在运动着的自动扶梯上跑动。

如有两个人沿着同一运动中的自动扶梯从上向下奔跑。甲在扶梯上跑动的速度为 v，他从上到下走过的扶梯有 n_1 级；乙在扶梯上的速度为 kv，他走过的扶梯级数为 n_2 级。求这架自动扶梯运动的速度多大？该自动扶梯从上到下共有多少级？

［分析与解］如扶梯不运动，人沿扶梯跑下的距离就是扶梯的长度（设为 l），它与扶梯的级数（设为 n）成正比。

如扶梯运动，人在运动着的扶梯上走动，那么，他相对于扶梯的位移与他走过的扶梯级数成正比。如扶梯向下运动，则沿扶梯向下跑的人，相对于扶梯跑过的距离小于扶梯的长度；如自动扶梯向上运动，则沿扶梯向下跑的人，相对于扶梯跑过的距离大于扶梯的长度。

设自动扶梯运动的速度为 u 对例题 3 来讲，它有向下与向上运动两种情况。

情况一：自动扶梯向下运动。则沿扶梯向下跑时相对于地面的速度为 u+v，他跑下扶梯所用的时间为

$$t_1 = \frac{l}{v + v}，$$

他相对于扶梯跑过的距离为

$$s_1 = vt_1 = \frac{lv}{u + v}；$$

而乙跑下扶梯时相对于扶梯的速度为 v+kv，

所用的时间为

$$t_2 = \frac{l}{u + kv}$$

他相对于扶梯跑过的距离为 $s_2 = kvt_2 = \dfrac{klv}{u + kv}$。

根据前面的分析，人沿扶梯走过的路程与他跑过的扶梯的级数成正比，所以能得到下列两个比例式：

$$\begin{cases} s_1 : l = n_1 : n \\ s_2 : l = n_2 : n \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} \dfrac{lv}{u + v} : l = n_1 : n \\ \dfrac{klv}{u + kv} : l = n_2 : n \end{cases}$$

$$解得\begin{cases} u = \dfrac{k(n_2 - n_1)}{kn_1 - n_2} \cdot v & ① \\ n = \dfrac{(k-1)n_1 n_2}{kn_1 - n_2} & ② \end{cases}$$

情况二：自动扶梯向上运动，两人沿扶梯向下奔跑。

甲跑下扶梯用时间$t_1=\frac{l}{v-u}$，

他相对于扶梯跑过的路程为$s_1=vt_1=\frac{lv}{v-u}$，

走过的扶梯级数为 n_1；

乙跑下扶梯用时间$t_2=\frac{l}{kv-u}$，

他相对于扶梯走过的路程为$s_2=kvt_2=\frac{klv}{kv-u}$，

走过的扶梯级数为 n_2，由分析可知：

$$\begin{cases}\frac{lv}{v-u}:l=n_1:n\\ \frac{klv}{kv-u}:l=n_2:n\end{cases}$$

解得$\begin{cases}u=\frac{k(n_2-n_1)}{kn_1-n_2}\cdot v\\ n=\frac{(k-1)n_1n_2}{kn_1-n_2}\end{cases}$

细心的读者也许已经注意到，在上面分析解题的过程中，我们的参照物是在不断改变的。在求人从上到下运动所用时间时，我们是根据人相对于地面的位移与人相对于地面的速度求得的；然后，根据运动的时间，求得人相对于扶梯走过的路程。

另外值得注意的是两种情况中的相对速度是不同的。甲沿向下运动的扶梯向下奔跑时，他相对于地面的速度是 u＋u；当甲沿向上运动的扶梯向下奔跑时，他相对于地面的速度是 v －u，而当乙沿向下运动的扶梯向下奔跑时，他相对于地面的速度为 kv+u；当他沿向上运动的扶梯向下奔跑时，他相对于地面的速度是 kv-u。

为了帮助理解，在思考与练习中有相应的数值练习题供读者选用。在做这些练习题时，不要套用例题 3 的结果，而应该通过具体的分析，一步步地求得问题的正确解答。

●竖直方向上的抛体问题

在直线运动中，匀速运动与初速度为零的匀加速直线运动，是两种最简单的运动形态。其它的复杂运动都可以看作是这两种简单运动的合运动。

从运动和力的关系看，作匀速直线运动的物体所受力的合力为零，作匀加速直线运动的物体所受外力的合力为恒力。

竖直方向上的抛体，有竖直向上或竖直向下的初速度 v_0。在不计空气阻力的影响时，物体抛出后受恒定的重力作用，有竖直向下的恒定加速度 g。因此，竖直上抛运动可归结为两个模型（或称两种过程）。第一个模型把它看作是初速度为 v_0、加速度为-g 的匀减速直线运动；第二个模型把它看作是竖直向上、速度为 v_0 的匀速直线运动与竖直向下的自由落体运动的合运动。对竖直下抛运动。也有两个模型，第一个模型把它看作是初速度为 v_0、加速度为 g 的匀加速直线运动；第二个模型则把它看作是竖直向下的匀速直线运动与自由落体运动的合运动。

如考虑空气阻力的作用，则物体在运动中受重力和空气阻力作用。根据力的独立作用原理，运动中的物体有两个独立的加速度：一个是重力引起的竖直向下的重力加速度，另一个是空气阻力引起的，其方向与运动方向相反。所以，在考虑空气阻力作用时，竖直方向上的抛体运动，用运动合成的模型来看，它是三个独立运动的合运动：第一个独立运动是竖直向上或竖直向下的匀速直线运动；第二个独立运动是竖直向下的自由落体运动；第三个独立运动是初速度为零的匀变速直线运动，其加速度大小由空气阻力的大小决定，方向总与运动方向相反。

用运动合成的观点（模型）分析复杂的运动，是把复杂的运动分解为简单的运动，认为复杂的运动是简单运动的合成，这既是认识的深化，也是研究问题的方法，是认识论与方法论的统一。

上述分析、解决竖直方向上抛体运动的两个模型，是对同一个具体问题的两种认识，也可以说是从两个不同角度研究同一个物理过程。就整体而言，竖直方向上抛体的运动是一种匀变速运动，因此我们统一用匀变速运动的公式分析、研究竖直方向上的抛体问题。

［例题 1］一只气球从地面由静止开始匀加速竖直上升，加速度 a=2 米/秒 ^{2}，5 秒末有一个物体从气球上掉落下来，问该物体经多少时间落到地面？

［分析与解］方法一：研究对象是从气球上掉落下来的物体，当它从气球上掉下来的那一瞬间，它与气球具有相同的、竖直向上的速度：v_0=at=10（米/秒）；这一瞬间，

物体的高度$h=\frac{1}{2}at^2=25$（米）。

物体从气球上掉下以后，只受重力作用，有竖直向下的重力加速度。由于有初速度 v_0，物体竖直向上作匀减速运动。经时间 t_1，速度减少到

零，时间$t_1=\frac{v_0}{g}=1$（秒）。

在这$t_1 = 1$秒的时间里，物体上升的高度$h' = \frac{v_0^2}{2g} = 5$（米）；

即当物体速度为零时，它离地面的高度 H=h+h′=30（米）；随后，物体将从 H=30（米）的高度自由下落，自由下落的时间为 t_2，

由$H = \frac{1}{2}gt_2^2$，可得$t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 2.45$（秒）。

可见，物体从气球上掉下，到落到地面共用时间：

$t = t_1 + t_2 \approx 3.45$（秒）。

方法二：物体掉高气球时高度 h=25（米）；瞬时速度 v_0=10（米/秒），竖直向上。物体掉离气球以后，作初速度为 v_0、加速度为-g 的匀减速运动。取竖直向上的方向（也就是 v_0 的方向）为正方向，当物体落到地面时，它的位移为-h，这个位移所用时间 t，根据匀变速直线运动的公式可得：

$$v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = -h$$

代入已知量，可以得到关于时间 t 的一元二次方程：

$5t^2-10t-25=0$

舍去负根，得 t≈3.45（秒）。

［例题 2］一只皮球在离地面 h_1=4.5 米高的地方，以速度 v_1=12 米/秒竖直向下抛出，与地面撞击以后竖直向上弹跳起来，弹跳起来的速度是撞击前速度的 0.8 倍。已知皮球运动中受到的空气阻力是其重力的 0.1 倍，试求皮球跳起的高度？

［分析与解］皮球抛出后受重力与空气阻力作用，重力使皮球有竖直向下的加速度，其大小为 g=10 米／秒 ^{2}；空气阻力与皮球的运动方向相反，它使皮球产生竖直向上的加速度，大小为 0.1g=1 米/秒 ^{2}；根据矢量合成原理，皮球抛出后的合加速度为 a_1=9 米/秒 ^{2}，方向竖直向下。可见皮球抛出后作初速度为 v_1=12 米/秒、加速度为 a_1 的匀加速运动，到达地面时位移为 h_1=4.5 米，它与地面撞击的速度 v_2 可由公式 $v_2^2-v_1^2=2a_1h_1$ 求得：

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2a_1h_1} = 15 \text{（米/秒）}$$

皮球从地面弹跳起来的速度为：

$v_0=0.8v_0=12$（米/秒）

皮球向上运动时，受到竖直向下的重力和空气阻力作用，合加速度竖直向下，大小为 a_2=11 米/秒 ^{2}，由此可得皮球弹跳起的高度为：

$$h_2 = \frac{v_0^2}{2a_2} \approx 6.55 \text{（米）。}$$

［例题 3］一个热气球停在空中某一高度 h 处，某时刻甲物体从热气球下的吊篮中自由落下，经时间 t_0=3 秒后，吊篮中的人以初速度 v_0=40 米/秒竖直向下抛出乙物体，试求：（1）乙物体经多少时间与甲物体相遇？（2）如乙物体抛出后 5 秒落到地面上，求吊篮离地面的高度多大？

［分析与解］（1）设乙物体抛出后经 t 秒与甲物体相遇，这时甲物体与吊篮的距离：

$s_1 = \frac{1}{2}g（t + t_0）^2$

乙物体与吊篮相距：

$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$

甲、乙相遇，则 $s_1=s_2$，即：

$\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 - (v_0 t + \frac{1}{2}gt^2) = 0$

解得$t = \frac{gt_0^2}{2(v_0 - gt_0)} = \frac{10\times 3^2}{2\times(40-10\times 3)} = 4.5$**（秒）**

（2）吊篮离地面的高度由乙物体 5 秒内的位移大小决定：

$H = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = 40\times 5 + \frac{1}{2}\times 10\times 5^2$

$= 325$**（米）**

［例题 4］从空中足够高的某点，以相等的速率 v_0 竖直向上和竖直向下同时各抛出一个物体，试求这两个物体之间的距离与时间的关系。

［分析与解］设物体抛出时开始计时，抛出后 t 秒，这两个物体相对于抛出点向上和向下的位移分别为：

$s_1 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$

$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$

时刻 t，这两个物体相距：

$s = s_1 + s_2 = 2v_0 t$

即 v_0 一定时，两物体间的距离与时间成正比。

●电梯中的落体与抛体问题

电梯中的落体与抛体是相对于电梯而言的。由于电梯原来是运动的，因此这类问题比较复杂。就电梯而言，它可能是匀速上升或匀速下降，也可能是匀加速或匀减速向上或向下运动；就落体与抛体而言，固然有向下的加速度 g，但它从电梯上掉落下来或被抛出后，相对于地面的即时速度的大小和方向，是与电梯原来的运动状态密切相关的。

通过分析研究，我们可以把这类问题归结为一个统一的模型，并根据这个模型归纳出一般的解题方法。

设电梯厢体的底板与顶板之间的距离为 H，在电梯以加速度 a 向上作加速运动的过程中，顶板上有一个小构件因松动而掉落下来。求小构件从顶板掉落到底板上所用的时间 t。

解法一：以地面为参照物。设小构件脱离顶板时，电梯与小构件的共同瞬时速度为 v_0；这样，小构件脱离顶板后的运动是初速度为 v_0 的竖直上抛运动，而电梯厢体的运动是初速度为 v_0、加速度为 a 的匀加速运动。

设小构件脱离顶板后经时间 t 掉落到底板上。在这段时间里小构件相对于地面的位移为 s_2，可能是向下的，也可能是向上的（见图 1－3 甲、乙）。

取小构件与电梯脱离时的那一点为坐标的原点 0，取竖直向上的方向为坐标的正方向，在时间 t 里，电梯的底板相对于地面向上的位移为：

$$s_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

在同样的时间里小构件的位移如向下（见甲图），

则其位移的大小为$s_2 = -（v_0 t - \frac{1}{2}gt^2）$；

如小构件的位移向上（图乙），

则其位移的大小为$s_2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$；

无论哪种情况，都有：

$s_1 - s_2 = H$

即$H = \frac{1}{2}（g + a）t^2$，由此可得：$t = \sqrt{\frac{2H}{g + a}}$

解法二：以电梯的厢体为参照物。以电梯的厢体为参照物，即假设观察者与电梯一起运动。这样，小构件与顶板脱离后相对于电梯的运动，是初速度为零、加速度为（g+a）的竖直向下的匀加速运动。当它落到底板上，相对于电梯的位移为 H 时，所用的时间为 t，根据初速度为零的匀加速直线运动的规律可知：

$H = \frac{1}{2}（g + a）t^2$，可得$t = \sqrt{\frac{2H}{g + a}}$

［分析与讨论］

1．如电梯静止或作匀速运动，则$a = 0$。这时$t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$。

表明电梯不动或匀速运动时小构件相对于电梯的运动是自由落体运动。

2．电梯向下作匀减速运动时，电梯加速度的方向向上，小构件相对于电梯的加速度为 g+a，其结果与电梯向上作匀加速运动相同，

即 $t=\sqrt{\frac{2H}{g+a}}$。

3．如电梯向上作匀减速运动或向下作匀加速运动，这两种情况下电梯加速度的方向均向下，小构件相对于电梯的加速度为 g-a，

故落到底板上所用时间 $t=\sqrt{\frac{2H}{g-a}}$。

显然，如电梯向下的加速度值 a≥g，t 将变得没有意义，表明这种情况下，构件不会与顶板分离，当然也就不可能落到底板上去。

［例题 1］在电梯中，用一根细线将一个小球悬挂在顶板上，小球与底板相距 H=1.5 米。当电梯以加速度 a=4.9 米/秒 ^{2} 向上作匀加速运动时，细线突然断裂，则小球经多少时间落到底板上？

［分析与解］细线断裂的瞬间，小球与电梯具有相同的初速度，不论该速度多大，细线断裂后小球相对于电梯的运动是初速度为零、加速度为 g+a=1.5g 的匀加速运动，则有：

$$H=\frac{1}{2}(g+a)t^2$$

$$t=\sqrt{\frac{2H}{g+a}}=\sqrt{\frac{2H}{1.5g}}\approx 0.45\text{（秒）}$$

［例题 2］电梯以 v_0=3 米/秒的速度匀速下降，一个人在电梯中距底板 H=1 米的地方以相对于电梯的速度 v=5 米/秒竖直向上抛出一个小球。试问：小球经多少时间落到底板上？

［分析与解］方法一：以地面为参照物。小球抛出时相对于地面的初速度为 $v-v_0$=2 米/秒，方向竖直向上；小球抛出后相对于地面的运动是初速度为 $v-v_0$ 的竖直上抛运动；设经过 t 秒小球落到底板上，在 t 秒内，

小球向下的位移大小为 $s_1=-[(v-v_0)t-\frac{1}{2}gt^2]$ ，

电梯的底板向下的位移大小为 $s_2=v_0t$；根据题意有：

$s_1-s_2=H$，即 $\frac{1}{2}gt^2-vt=H$

解得 $t=\frac{2v\pm\sqrt{4v^2+8gH}}{2g}=(\frac{v}{g})\pm\sqrt{(\frac{v}{g})^2+\frac{2H}{g}}$

代入已知量，舍去负根，即得：t≈2.17（秒）。

方法二：以电梯为参照物，即假设电梯不动。这样，小球相对于电梯的运动是初速度为 v=5 米/秒的竖直上抛运动，经时间 t 秒小球落到底板上，相对于电梯的位移为-H，故有：

$vt-\frac{1}{2}gt^2=-H$，即 $\frac{1}{2}gt^2-vt-H=0$

解这个方程所得结果与方法一相同。

所谓电梯中的“抛体”问题，是研究电梯中的物体，当它与电梯解除直接联系的瞬间，具有相对于电梯的初速度的情况。这里只研究竖直方向上的“抛体”问题。

电梯以速度 v_1 匀速上升，某时刻电梯中的人以相对于电梯的初速度 v_2 竖直上抛一个小球。小球没有与电梯的顶板相碰，随后又落回到人的手中。就这个模型我们研究下列几个问题。（1）小球抛出后，相对于地面作初速度为（v_1+v_2）的竖直上抛运动，当它上升到最高点，也就是它相对于地面的速度为零时，所用的时间为：

$$t_1=\frac{v_1+v_2}{g}$$。

在这段时间里，小球相对地于地面竖直向上的位移为：

$$s_1=(v_1+v_2)t_1-\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{(v_1+v_2)^2}{2g}$$

（2）设小球抛出后 t 秒落回到手中，在这段时间里，小球和电梯相对于地面的位移分别为：

$$s_{1t}=(v_1+v_2)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$s_{2t}=v_1t$$

小球落回到手中时，$s_{1t}=s_{2t}$，即$v_2t-\frac{1}{2}gt^2=0$

解此方程，可得：$t=2\left(\frac{v_2}{g}\right)$。

（3）当小球落回到手中时，小球相对于地面的位移为：

$$s_2=(v_1+v_2)t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$=(v_1+v_2)\left(\frac{2v_2}{g}\right)-\frac{1}{2}g\left(\frac{2v_2}{g}\right)^2$$

$$=\frac{2v_1v_2}{g}$$

（4）比较（1）、（2）的分析，可以得知小球相对于地面“回落”的时间是：

$$t_2=t-t_1=\frac{2v_2}{g}-\frac{v_1+v_2}{g}=\frac{v_2-v_1}{g}$$

（5）相对于电梯而言，小球作初速度为 v_2 的竖直上抛运动，小球从抛出到落回到手中，所用时间为：

$$t'=2\left(\frac{v_2}{g}\right)=t$$

当小球与电梯的顶板距离最小，也就是小球相对于电梯静止时，小球相对于地面的速度为 v_2，而小球抛出时相对于地面的初速度为（v_1+v_2），所以小球相对于电梯上升的时间为：

$$t_1'=\frac{(v_1+v_2)-v_1}{g}=\frac{v_2}{g}$$

相对于电梯的回落时间为

$$t_2 = t' - t_1 = \frac{v_2}{g} = t_1' \text{：} t_1' = t_2',$$

表明竖直上抛的小球，相对于匀速运动的电梯而言，上升的时间与回落的时间相等，由此可以推知，抛出点与电梯顶板之间的距离至少为

$$d = \frac{v_2^2}{2g}\text{。}$$

（6）小球落回到手中时，相对于电梯的即时速度为：

$$v_2' = v_2 - gt = -v_2$$

而小球落回到手中的瞬间，相对于地面的即时速度为：

$v_1' = (v_1+v_2)-gt = v_1-v_2$

上述研究结果，可以归纳如下：

在以速度 v_1 匀速上升的电梯中，以相对于电梯的速度 v_2 竖直上抛的物体，只有在抛出点与顶板之间的距离不小于 $\frac{v_2^2}{2g}$ 的情况下，才不会与顶板相碰。在这种情况下，抛体相对于地面上升的时间为 $t_1=(v_1+v_2)/g$，回落时间为 $t_2=(v_2-v_1)/g$；相对于电梯上升的时间与回落的时间相等；$t_1'=t_2'=v_2/g$。小球相对于地面上升的最大位移是 $(v_1+v_2)^2/2g$，当小球回落到手中时，相对于地面的位移是 $2v_1v_2/g$。

例题 3 可以帮助我们理解上述分析与推导过程，再通过具体的数值计算，可获得比较直观的印象。

［例题］电梯以速度 v_1=3 米／秒匀速上升。电梯中的人以相对于电梯的速度 v_2=5 米/秒竖直上抛一个小球。小球没有与电梯的顶板相碰，随后又落回到人的手中。

相对于地面而言，求：（1）小球竖直向上的最大位移量多大？（2）小球从抛出到落回到手中的这段时间里，相对于地面的位移量多大？（3）从小球抛出到落回到手中这段时间里，小球通过的路程是多少？

相对于电梯而言，求：（4）小球抛出点与电梯的顶板之间距离至少多大？（5）当小球与顶板最近时，小球是否运动？如果运动的话，它的速度大小和方向如何？（6）小球落回到手中时，它的速度大小和方向如何？

［分析与解］小球抛出后的运动，相对于地面而言，是初速度为 v_1+v_2=8 米/秒的竖直上抛运动；相对于电梯而言，是初速度为 v_2=5 米/秒的竖直上抛运动。电梯始终以速度 v_1=3 米/秒竖直向上作匀速运动。

（1）小球抛出后，当它相对于地面的速度为零时，上升到最高点，这段时间为：

$$t_1 = \frac{v_1 + v_2}{g} = 0.8\text{（秒）}$$

这段时间内的位移，也就是小球抛出后相对于地面竖直向上的位移，其大小为：

$$s_1 = (v_1 + v_2)t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{(v_1 + v_2)^2}{2g} = 3.2(\text{米})$$

（2）设小球抛出后 t 秒落回到手中。在 t 秒内小球和电梯的位移分别为：

$s_{1t}=（v_1+v_2）t-\frac{1}{2}gt^2$

$s_{2t}=v_1t$

小球落回到手中时，$s_{1t}=S_{2t}$，即：$v_2t-\frac{1}{2}gt^2=0$

解得$t=2（\frac{v_2}{g}）=1$（秒）。

可见，小球落回到手中时相对于地面的位移为：

$s_2=（v_1+v_2）t-\frac{1}{2}gt^2$

$=（v_1+v_2）\frac{2v_2}{g}-\frac{1}{2}g(\frac{2v_2}{g})^2=\frac{2v_1v_2}{g}$

$=3$（米）

（3）从上面计算的结果可以看出，相对于地面而言，小球上升的时间 t_1=0.8 秒，回落的时间是 t_2=0.2 秒。上升通过的路程为 S_1=3.2 米，回落通过的路程是 s_1-s_2=0.2（米），故全过程通过的路程为：

s=3.2（米）+0.2（米）=3.4（米）

（4）相对于电梯而言，小球上升的最大高度 h 应小于抛出点与顶板之间的距离 d，即：

$d>h=\frac{v_2^2}{2g}=1.25$（米）

（5）当小球与电梯顶板最近时，小球相对于电梯的速度为零，即这一瞬间小球与电梯相对静止，但该时刻小球与电梯一样，相对于地面的速度是 v_1=3 米／秒，方向竖直向上。

（6）相对于电梯而言，小球从抛出到回落到手中，总时间为：

$t=2（\frac{v_2}{g}）=1$（秒）

这一结果与前面（2）的结果相同。

可见，当小球回落到手中时，相对于电梯而言，其速度为：

$v_2'=v_2-gt=-5$（米/秒）

“-”号表示 v_2' 相对于电梯的方向是向下的。

小球回落到手中时，相对于地面的速度是：

$v_1'=（v_1+v_2）t-gt=-2$（米/秒）

“-”号表示其方向相对于地面向下。

●追及问题

就广泛的意义来讲，两个物体在一条直线上运动时相遇的问题，都可以称作追及问题。在前面研究过的几类问题中，都已经涉及到了这类问题。在本节我们主要研究三种模型的追击问题。

模型一：甲、乙两个质点，相距 s，乙在前、甲在后，沿着它们的连线向同一方向同时开始运动。甲以速度 v 作匀速直线运动，乙作初速度为零、加速度为 a 的匀加速直线运动（图 1－4）。甲能否追上乙？什么情况下能追上？

什么情况下不能追上？

［分析与解］设开始运动后 t 秒甲追上乙。在时间 t 秒内，甲、乙的位移分别为：

$s_1=vt$，$s_2=\frac{1}{2}at^2$

甲追上乙，即甲、乙相遇，应有：

$s_1=s_2+s$

$\frac{1}{2}at^2-vt+s=0$，即$at^2-2vt+2s=0$

这是关于时间 t 的一元二次方程，解这个方程，得：

$$t=\frac{2v\pm\sqrt{4v^2-8as}}{2a}$$

$$=(\frac{v}{a})\pm\sqrt{(\frac{v}{a})^2-\frac{2s}{a}}$$

由此可见：

（1）如 $(\frac{v}{a})^2-\frac{2s}{a}<0$，即$v<\sqrt{2as}$，方程无解，

表明甲作匀速运动的速度小于$\sqrt{2as}$时，它不可能追上乙。

（2）如 $(\frac{v}{a})^2-\frac{2s}{a}=0$，即$v=\sqrt{2as}$时，方程有一个唯一的解：

$t=\frac{v}{a}$。表明甲能追上乙，但它们只能相遇一次。

（3）如$(\frac{v}{a})^2-\frac{2s}{a}>0$，即$v>\sqrt{2as}$时，方程有两个解：

$t1=(\frac{v}{a})-\sqrt{(\frac{v}{a})^2-\frac{2s}{a}}$, $t_2=(\frac{v}{a})+\sqrt{(\frac{v}{a})^2-\frac{2s}{a}}$, $t_1<t_2$时刻t_1，

甲的即时速度大于乙的即时速度，甲运动到乙的前面去了；时刻 t_2，乙的即时速度大于甲的即时速度，乙运动到甲的前面去了。

（4）特殊情况：若 s＝0，即甲、乙同时从同一地点开始向同一方向运动，则：

$vt-\frac{1}{2}at^2=0$, 即 $t(2v-at)=0$

得$t_1=0$，$t_2=2(\frac{v}{a})$，只能相遇一次，是乙追上甲。

[例题 1] 一列火车总长 l＝180 米，以加速度 a＝0．1 米／秒 ^{2} 由静止开始作匀加速直线运动。同时有一个人以速度 v＝6．5 米／秒从车尾向同一方向作匀速直线运动。求人与车头平齐时，火车的位移多大？

[分析与解]与模型一相比，人是质点甲，他作匀速运动，v＝6．5 米／秒；把火车头看作为质点乙，它在甲前面与甲相距 s＝180 米，它作初速度为零的匀加速直线运动，加速度 a＝0．1 米／秒 ^{2}。根据题意，甲、乙相遇，即人与车头平齐，应有：

$$vt=\frac{1}{2}at^2+s$$

即 $t^2-130t+3600=0$，即（t—40）（t—90）＝0

解得：$t_1=40$ 秒，$t_2=90$ 秒。即人与车头有两次平齐的机会。这时火车的位移分别为：

$$s_1=\frac{1}{2}at_1^2=80\text{（米）}$$

$$s_2=\frac{1}{2}at_2^2=405\text{（米）}$$

讨论：$t_1=40$ 秒时，火车的速度 $v_1=at_1=4$ 米／秒＜6．5 米／秒，是人赶上火车头，人与火车头平齐；$t_2=90$ 秒时，火车的速度 $v_2=at_2=9$ 米／秒＞ 6.5 米／秒，是火车头赶上人，火车头与人平齐。可见，两个解都是有意义的。

由已知条件：$\sqrt{2as}=\sqrt{2\times0.1\times180}=6(\text{米／秒})<6.5(\text{米／秒})$，

符合有两个解的条件。如果人行走的速度为 6 米／秒，则只有一个解；如果人的速度小于 6 米／秒，则无解。

模型二：甲、乙两个质点相距 s，乙在前、甲在后，沿着它们的连线向同一方向同时开始运动。乙以速度 v 作匀速直线运动，甲作初速度为零的匀加速直线运动（图 1—5），加速度为 a。求：(1) 甲要用多少时间才能追上乙？(2) 甲追上乙时速度多大？(3) 甲追上乙之前，何时它们相距最远？相距的最大距离是多大？

[分析与解]（1）设开始运动后 t 秒甲追上乙，在 t 秒内甲、乙的位移分别为：

$$s_1=\frac{1}{2}at^2$$

$$s_2=vt$$

甲追上乙，即甲、乙相遇，应有：

$S_1—S_2=S$

$$\frac{1}{2}at^2-vt=s,\text{ 即 }\quad at^2-2vt-2s=0$$

这是关于时间 t 的一元二次方程，解这个方程，得：

$$t=\frac{2v\pm\sqrt{4v^2+8as}}{2a}$$

$$=\frac{v}{a}\pm\sqrt{(\frac{v}{a})^2+\frac{2s}{a}}$$

由于时间 t＜0 无意义，可见方程有唯一解：

$$t=\frac{v}{a}+\sqrt{(\frac{v}{a})^2+\frac{2s}{a}}$$

（2）甲追上乙时，甲的速度为：

$$v'=at=v+\sqrt{v^2+2as}>2v$$

（3）在甲追上乙之前，甲乙相距：

$$\begin{aligned}\Delta s&=(vt+s)-\frac{1}{2}at^2\\&=-\frac{1}{2}at^2+vt+s\\&=-\frac{a}{2}(t-\frac{v}{a})^2+(\frac{v^2}{2a}+s)\end{aligned}$$

可见：当$t=\frac{v}{a}$时，Δs最大，最大值为：

$$\triangle S_{max}=\frac{v^2}{2a}+s$$

由此可以推知，当甲、乙相距最远，即$t=\frac{v}{a}$时，

甲的速度 $v_1=at=v$，即甲的速度与乙的速度相等。

这个推论十分重要，而且很有实际应用价值。

讨论：（1）若 $s=0$，即甲、乙同时从同一地点开始向同一方向运动，则唯一解是$t=2(\frac{v}{a})$；

甲追上乙时，它的速度 $v'=at=2v$；甲追上乙之前，

在$t=(\frac{v}{a})$时，它们相距最远，最大距离为$\triangle S_{max}=\frac{v^2}{2a}$，

该时刻甲的速度与乙的速度相等。

（2）模型二与模型一相比，模型二总有唯一解，而模型一可能无解($v<\sqrt{2as}$)，可能有一个解($v=\sqrt{2as}$)。也可能有两个解($v>\sqrt{2as}$)。

比较这两个模型的差异对应用这两个模型分析、解决实际问题十分重要。

［例题 2］一辆值勤的警车停在公路边。当警员发现从他旁边以 8 米／秒的速度匀速前进的货车有违章行为时，决定前去追赶，经 2．5 秒，警车发动起来，以 2 米／秒^{2}的加速度作匀加速运动。问：（1）警车要多长时间才能追上货车？当警车追上货车时，它的速度多大？（2）警车追上货车之前，两车间的最大距离是多少？

［分析与解］设警车起动后 t 秒追上货车。警车发动起来时，货车在警车前 $s=vt=8\times2.5=20$ 米，警车追上货车时，有：

$$\frac{1}{2}at^2=vt+s$$

$$\frac{1}{2}\times2\times t^2-8t-20=0$$

即 $t^2-8t-20=0$，$(t-10)(t+2)=0$

解得 $t=10$（秒）时，警车追上货车。

警车追上货车时的速度：

v_1＝at＝2×10＝20（米／秒）＞2v

（2）警车追上货车之前，它们之间的距离与时间的关系为：

$$\Delta s=(vt+s)-\frac{1}{2}at^2$$

$$=-t^2+8t+20$$

$$=-(t-4)^2+36$$

解得 t＝4（秒）时，Δs 最大，ΔSmax＝36（米）。该时刻警车的速度 V1＝8（米／秒），与货车的速度相等。

模型三：甲、乙两个物体，沿同一条直线向同一方向运动，速度分别为 V_{10} 和 V_{20}，且 $V_{10}>V_{20}$，乙在前、甲在后（图 1－6）。当它们相距 s 时，甲以加速度 a 作匀减速运动。试分析：在什么情况下，甲才会撞上乙？

［分析与解］设甲开始减速后 t 秒与乙相撞。在 t 秒内，甲、乙的位移分别为：

$$s_1=v_{10}t-\frac{1}{2}at^2$$

$$S_2=v_{20}t$$

甲撞到乙，则应有：

$$s_1-s_2=s \quad 即 \quad (v_{10}-\frac{1}{2}at^2)-v_{20}t-s=0$$

$$at^2-2(v_{10}-v_{20})t+2s=0$$

解此方程，得：

$$t=\frac{v_{10}-v_{20}}{a}\pm\sqrt{(\frac{v_{10}-v_{20}}{a})^2-\frac{2s}{a}}$$

由题意可以看出，甲在后，甲撞乙时，甲的速度必须大于乙的速度，即 $v_{10}-at>v_{20}$，也就是必须有：

$$t<\frac{v_{10}-v_{20}}{a}。$$

可见，符合题意的解只有：

$$t=(\frac{v_{10}-v_{20}}{a})-\sqrt{(\frac{v_{10}-v_{20}}{a})^2-\frac{2s}{a}}$$

要这个解有意义，还必须满足条件：

$$(\frac{v_{10}-v_{20}}{a})^2-\frac{2s}{a}\geq 0 \quad 即 \quad (v_{10}-v_{20})\geq\sqrt{2as}$$

可见：只有 $(v_{10}-v_{20})\geq\sqrt{2as}$ 时，甲才可能与乙相撞。

［例题 3］一列客车以 v_{10}＝20 米／秒的速度在平直铁道上匀速行驶，一列货车在前面以 v_{20}＝6 米／秒的速度在同一条铁道上同方向行驶。当它们相距 s＝120 米时，客车以 a＝0.8 米／秒 ^{2} 的加速度作匀减速运动，问客车是否会与货车相撞？

［分析与解］方法 1：设客车开始减速后 t 秒两车相撞，两车相撞应当满足条件：

$$v_{10}t-\frac{1}{2}at^2-v_{20}t=s$$

将已知条件代入上式得：

$t^2-35t+300=0$，即（t—15）（t—20）＝0

得两个解：$t_1=15$（秒），t2＝20（秒）。

$t_1=15$ 秒时，客车的速度为 $v_{10}-at_1=8$（米／秒）$>v_{20}$；$t_2=20$ 秒时，客车的速度为 $v_{10}-at_2=4$（米／秒）$<v_{20}$；上述计算表明，如果客车与货车在两条平行的轨道上同向运动，在 $t_1=15$ 秒时，

客车赶上货车，两车平齐；在 $t_2=20$ 秒时，货车赶上客车，两车再一次平齐。就本题而言，我们的结论是：客车开始减速后 15 秒与货车相撞。

方法二：以货车为参照物，即假设货车不动，则客车相对于货车的“初速度”为 $v_0=v_{10}-v_{20}=14$（米／秒），即相当于客车以“初速度”v_0 朝货车作匀减速运动，要不相撞，

则应有 $\frac{v_0^2}{2a}<s$。

然而就本题而言，$\frac{v_0^2}{2a}=\frac{14^2}{2\times0.8}=122.5$（米）$>120$（米）。

可见，两车将相撞。

为避免相撞，客车作匀减速运动的加速度值应满足：

$a>\frac{v_0^2}{2a}=\frac{14^2}{2\times120}\approx0.82$（米／秒^2），

本题的加速度值只有 0．8 米／秒^2，所以会相撞。

●思考与练习

1．A、B 两架飞机沿水平直线由南向北飞行，A 在前，速度 v_1＝100 米／秒，B 尾随其后，速度 v_2＝85 米／秒。试问：（1）在飞机 B 的驾驶员看来，飞机 A 的速度多大？方向如何？（2）在飞机 A 的架驶员看来，飞机 B 的速度多大？方向如何？

2．一艘轮船在长江中航行，方向由东向西。一个乘客在甲板上以 5 米／秒的速度由船头向船尾走。岸上的人在观测他们的运动情况，测得水向东流的速度是 1 米／秒，船向西航行的速度是 18 千米／小时。试问：(1)岸上的人观测在甲板上行走的乘客的运动情况如何？（2）这条轮船在水中的航速（相对于静止的水）多大？

3．一个游泳运动员在河里游泳。他从上游的 A 点游到下游的 B 点，用了 4 分钟；从 B 点返回到 A 点，他游了 6 分钟。若他“躺”在水上不游，顺水漂流从 A 到 B 要用多少时间？

4．一辆汽车正以 36 千米／小时的速度在平行于铁路的公路上匀速行驶；一列 200 米长的火车以 54 千米／小时的速度在铁路上迎面开来。问这列火车从汽车司机旁边通过要用多少时间？

5．甲、乙两人在公路上 A、B 两点之间进行自行车比赛。已知 A、B 相距 s＝2100 米。甲、乙同时从 A 地出发，跑完全程，甲比乙多用了 15 秒。让甲、乙分别从 A、B 两地同时出发相向而行，经 56 秒两人相遇。假设他们骑车时都作匀速直线运动，求甲、乙的速度各多大？

6.某地铁站的自动扶梯，当你站在上面不动时，自动扶梯用 1 分钟把你送到地面；如果自动扶梯不动，你沿着它匀速向上走，则需要用 3 分钟的时间。如果你顺着开动的自动扶梯向上走，需用多长时间？

7.某地铁站的自动扶梯向下输送旅客，甲、乙两人先后顺着该自动扶梯向下跑。已知甲相对于扶梯跑动的速度是 1．5 米／秒，乙的速度是 1．8 米／秒。甲在走动中全程共走过 42 级扶梯，乙共走过 45 级扶梯。问：自动扶梯运动的速度多大？从上到下，它共有多少级？

8．某自动扶梯从下到上共有 60 级，它以 1 米／秒的速度向上运行。甲、乙两人分别以相对于扶梯的速度 V_1＝1．5 米／秒和 V_2＝1．8 米／秒沿运动着的扶梯从上向下跑，问：甲、乙各走过多少级扶梯？

9．一根长度 l＝15 米的杆子保持竖直状态，由静止开始自由落下。求整个杆子通过初始位置正下方 5 米处的观察点所需要的时间。（本题可以从不同的角度选择不同的参照物来解：①以观测点为参照物；②假设杆子不动，即以杆子为参照物，观测点竖直向上作初速度为零、加速度为 g 的匀加速直线运动。用这两种方法解，有助于领会运动的相对性。）

10．以初速度 V0 竖直上抛一个物体，相隔 t 秒后，从原地以同样的初速度再竖直上抛一个物体，这两个物体在抛出点的正上方某处相遇。求相遇点到抛出点的高度。

11．一个气球以 V_0＝8 米／秒的速度匀速上升，当它与地面相距 h＝85 米时，悬挂在气球下的物体因绳子断裂而掉落下来，这时，汽球便获得竖直向上的加速度 a＝4 米／秒^2。求：物体落到地面时，气球的高度多大？

12．一个人站在阳台上，伸手将一个物体以初速度 V_0 竖直上抛，同时

有另一个物体从同一地方自由落下。他发现，当自由落下的物体落到地面时，竖直上抛的物体几乎同时到达最高点。试求抛出点距地面多高？

13．电梯以 V_1＝5 米／秒的速度匀速上升，电梯中的一个人以相对于电梯竖直向上的初速度 V_2＝5 米／秒抛出一个物体。试求：（1）抛出点距电梯顶板的距离至少多大，物体才不会碰到顶板？（2）在物体没有与顶板相碰的情况下，抛出的物体经多长时间落回到手中？小球落回到手中时，相对于地面的速度多大？（3）物体在抛出后的这段时间里，相对于地面的位移多大？位移的方向如何？

14．一条铁道的旁边有一条平行的公路。列车在铁道上以 20 米／秒的速度运动，当驾驶员发现前方 300 米处有一辆自行车以 4 米／秒的速度同向匀速前进时，立即开始刹车，列车以 0.1 米／秒 ^{2} 的加速度作匀减速运动。问：（1）列车从刹车开始，经多少时间追上自行车？（2）列车追上自行车后，过多少时间自行车追上列车（车头）？（3）列车追上自行车后，列车车头与自行车之间的最大距离是多少？

二、互相垂直方向上运动的合成

同一平面上两个互相垂直方向上运动的合成问题，可以分为匀速运动的合成和匀速运动与匀变速运动的合成两大类。

研究同一平面里两个方面上运动合成的方法很多，但它们的依据都是矢量合成的平行四边形法则。

平行四边形法则及其直接发展而来的矢量三角形法则，都可运用三角形中边、角关系的余弦定理和正弦定理进行分析计算，也可直接运用作图的方法来解决问题。这种方法的最大优点是直观、简便，在分析研究互相垂直方向上运动的合成问题时，十分方便，因此运用也最广泛。

另一种有效方法是根据所研究的实际问题，建立平面直角坐标系（笛卡儿坐标），对问题进行解析研究，所以这种方法又称解析法，或称解析几何法。解析法是研究复杂问题的有力工具，特别值得一提的是，运用解析法可以十分方便地确定物体（质点）的运动轨迹。

●匀速运动的合成问题

互相垂直的两个匀速运动的合运动，也是匀速直线运动。根据平行四边形法则，互相垂直的、速度分别为 v_1 与 v_2 的两个匀速运动的合运动，

其速率为$v=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$，

速率的方向也就是合运动的方向，用它与 v1 的夹角θ表示(图 2—1)：

$\theta=tg^{-1}(\frac{v_2}{v_1})$，或$\theta=sin^{-1}(\frac{v_2}{v})$……

根据图 2－1 所示的平行四边形法则的作图可以看出，速度分别为 V_1、V_2 的互相垂直的匀速运动的合运动，它的速度大小与方向也可以用图 2－2 所示的作图法来确定。这种作图法代表了矢量合成的三角形法，在矢量合成的三角形法作图中，分矢量 v_1、v_2 首尾相接、互相垂直，构成三角形的两条边，三角形的第三条边所代表的则是合矢量 V。图 2－2 中的（甲）、（乙）两种作图顺序不同，但结果一样，表明矢量合成中“交换律”成立。

为了介绍运用解析法研究运动合成的方法，我们先介绍运动分解的观点。设质点 M 从 O 点开始沿 Oxy 平面上的 OP 直线，以速度 v 作匀速直线运动，时刻 t 质点经过直线 OP 上的 M 点，M 点在 Ox 与 Oy 上的投影分别为 Mx 与 My（图 2－3），显然，M 点沿 OP 作匀速运动时，它的投影 Mx 与 My 将沿直线 Ox 与 Oy 作匀速直线运动；M 点的速度是 v，则 Mx、My 的速度分别为 Vx＝vcosθ，vy=vsinθ。这样，我们就可以把 Mx 与 My 的运动看作是 M 点的两个互相垂直的分运动。

矢量分解与矢量合成是互为逆运算的两种互相联系的矢量运算方法。它们都是具体的物理量（矢量）运算的抽象。

运动合成的观点与运动分解的观点相反，它把 M 点的运动看作是 Mx 与 My 的运动的合成：Mx、My 同时从 O 点开始分别以速度 vx、vy 沿 Ox 轴与 Oy 轴作匀速运动，它们的合运动也就是 M 点的运动，在时刻 t，Mx、My 的坐标（图 2－4）分别为：

$$\begin{cases} x=vx\cdot t \\ y=vy\cdot t \end{cases}$$

消去共同的参变量 t，便得 M 的轨迹方程：

$$y=(\frac{v_y}{v_x})\cdot 0x=tg\theta\cdot x$$

式中 tgθ＝v_y／v_x＝常量，可见轨迹是一条直线，直线的斜率为 k＝tgθ。

［例题 1］一艘货轮以 V_1＝40 厘米／秒的速度在静止的水中航行，一个船员顺着桅杆以速度 v_2＝30 厘米／秒向上爬行。试求：（1）相对于水面来看，船员的运动轨迹与运动速度；（2）如果货轮是顺水航行，而水流的速度是 V_3＝20 厘米／秒，这时船员相对于水面与相对于河岸的运动轨迹与速度如何？

［分析与解］（1）相对于水面来看，船员的运动是水平方向上速度为 V_1 的匀速运动与竖直方向上速度为 v_2 的匀速运动的合运动，其运动轨迹为

一条直线（图 2－5），直线与水平方向的夹角：

$$\theta = tg^{-1}(\frac{v_2}{v_1}) = tg^{-1}(\frac{3}{4}) = 37°$$

速度的大小为：

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 50 \text{（厘米／秒）}$$

（2）货轮顺水航行，船员相对于水面的运动情况同（1）。相对于河岸而言，是水平方向上速度为 $v_1 + v_3$ 的匀速运动与竖直向上速度为 v_2 的匀速运动的合运动，他的运动轨迹仍为直线，直线与水平方向的夹角为：

$$\theta' = tg^{-1}(\frac{v_2}{v_1 + v_3}) \approx 26.6°$$

速度的大小为：

$$v' = \sqrt{(v_1 + v_3)^2 + v_2^2} \approx 67 \text{（厘米／秒）}$$

［例题 2］雨滴在落到地面附近时速度都较大，它遇到的空气阻力差不多与其重力相等，所以雨滴落到地面附近时，竖直向下为匀速运动。设雨滴以速度 v_1＝10 米／秒竖直下落，列车以速度 v_2＝54 千米／小时匀速向东行驶。(1) 无风时，列车上的乘客看到的雨滴运动的方向和速度如何？（2）如果有西风，风速为 v_3＝5 米／秒，这时乘客看到的雨滴的运动情况又如何？

［分析与解］乘客坐在列车上，乘客看到的雨滴的运动情况也就是雨滴相对于列车的运动情况。

以列车为参照物，即认为列车不动。这样，雨滴相对于列车的运动，便是竖直向下速度为 v_1 的匀速运动与沿水平向西速度为 v_2＝15 米／秒的匀速运动的合运动（图 2－7）。合速度的大小为：

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \approx 18 \text{（米／秒）}$$

方向偏西斜向下，与竖直方向的夹角 θ 为：

$$\theta = tg^{-1}(\frac{v_2}{v_1}) \approx 56.3°$$

（2）有风时，可以不必考虑风对列车运动的影响。由于是西风，风由西向东吹，相对于列车来看，雨滴仍有水平向西的运动，速度的大小为 $v_2 - v_3$，雨滴竖直向下的速度仍为 v_1（图 2－8）。这样，合速度的大小为：

$$v' = \sqrt{v_1^2 + (v_2 - v_3)^2} \approx 14.1 \text{(米 / 秒)}$$

运动的方向向西偏斜，与竖直方向的夹角为

$$\theta' = tg^{-1}(\frac{v_2 - v_3}{v_1}) = 45°$$

●平抛问题与类似平抛问题

平抛物体的运动，是水平方向上速度为 v0 的匀速运动与竖直方向上的自由落体运动的合运动。

取抛出点为坐标原点，ox 轴的方向与初速度 v_0 的方向一致，oy 轴竖直向上（图 2－9），则物体抛出后 t 秒的位置坐标为：

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

消去参变量 t，便得平抛物体的运动轨迹：

$$y = -\frac{g}{2{v_0}^2}x^2$$

这是以坐标原点为顶点、oy 轴为对称轴、开口朝下的抛物线。

就整体而言，平抛运动是一种匀变速运动，在任意相等的时间间隔Δt 内，平抛物体的速度改变量均相等，大小均为Δv＝gΔt，方向都竖直向下。如取Δt＝1 秒，则Δt＝9．8 米／秒。

图 2－10（甲）为初速度 v_0＝20 米／秒的平抛物体的运动轨迹，v_0、v_1、v_2、……为 t＝0、l、2、……秒时的即时速度，把矢量 v_0、v_1、v_2……平移到一个共同的起点 0[图 2－10（乙）]，则第 1 秒内、第 2 秒内、第 3 秒内、……速度的改变量均相等；在取 g＝10 米／秒 ^{2} 时，Δv_1＝Δv_2＝Δv_3＝……＝10 米／秒。

平抛物体水平方向上的匀速运动与竖直方向上的自由落体运动是互相独立的。平抛物体的运动时间由其高度决定：

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

水平方向上的射程由其初速度和运动时间决定：s＝v_0t。

平抛物体在运动过程中速度改变量Δv＝gt，速度改变量的方向竖直向下。因此，平抛物体的末速度 v_1 可以根据矢量三角形（图 2－11）求得：

$$v_t = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2},\ \theta = tg^{-1}(\frac{gt}{v_0})$$

研究平抛问题，往往都与平抛物体的“落点”有关，如落点的位置、落地时速度大小和方向……。在涉及到追及问题时，则与抛出点的位置有关。

[例题 1] 一艘敌舰正以 v_1＝12 米／秒的速度逃跑；执行追击任务的飞机，在距水面 320 米高水平线上，以速度 v_2＝105 米／秒同向飞行。为击中敌舰，飞机应“提前”投弹。如不计空气阻力的影响，取 g＝10 米／秒 ^{2}，飞机投弹时，沿水平方向它与敌舰之间的距离应多大？当炸弹击中敌舰时，飞机与敌舰的位置有何关系？

[分析与解] 炸弹投下后作平抛运动，从投下到击中敌舰，它在空中运动的时间为：

$$t=\sqrt{\frac{2h}{8}}=\sqrt{\frac{2\times320}{10}}=8(\text{秒})$$

在这 8 秒时间里，炸弹沿水平方向运动的距离 $s_2=v_2t$，敌舰在同一方向上运动的距离 $s_1=v_1t$。由图 2－12 可以看出，飞机投弹时水平方向上"提前"的距离应为：

$s=v_2t-v_1t=(v_2-v_1)t$

$=744$（米）

在时间 $t=8$ 秒内，炸弹与飞机在水平方向上的运动情况相同，是匀速运动，它们的水平运动距离都是 $s_2=v_2t=840$（米）。所以炸弹击中敌舰时，飞机恰好从正上方通过。

从上面可以看出，就整体而言，水平方向上的运动与炸弹竖直方向上的运动是彼此独立的。水平方向上是匀速运动的飞机和投下的炸弹追击匀速运动的敌舰，所受的限制（也可以说是联系）是追击的时间

$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，

它由竖直方向上的自由落体运动情况决定。

在运动的分解与合成中，两个分运动的独立性可以广泛地推广、应用。下面的例题就说明了这个特性，并详细阐述利用这一特性分析、解决问题的方法。

[例题 2] 从倾角为 θ 的山坡上的 A 点，以水平初速度 V_0 射出一颗炮弹，落在山坡上的 B 点（图 3－13）。求：（1）炮弹从 A 到 B 共用多少时间？A、B 之间的直线距离多大？（2）在炮弹飞行过程中，何时与山坡之间的垂直距离最大？最大距离有多大？

[分析与解] 可以把山坡看作是倾角为 θ 的斜面，计算中忽略山坡的起伏对运算结果的影响。

（1）以 A 点为坐标原点，按图 2－13 所示建立直角坐标系。这样，炮弹的运动可以看作是 ox 方向上的匀速运动（速度为 v_0）与 oy 方向上初速度为零、加速度为 g 的匀加速运动的合运动。设经时间 t 炮弹落在 B 点，则 B 点的位置坐标为：

$$\begin{cases} x=v_0t \\ y=\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

由图可以看出：

$$\frac{y}{x}=tg\theta，\text{即}\quad \frac{\frac{1}{2}gt^2}{v_0t}=tg\theta$$

由此可得炮弹从 A 到 B 所用的时间为：

$$t=\frac{2v_0}{g}\cdot tg\theta$$

A、B 之间的距离为：

$$\overline{AB}=\sqrt{x^2+y^2}=\frac{2v_0^2}{g}\cdot tg\theta/\cos\theta$$

（2）按图2－14所示，将初速度v_0和重力加速度g沿垂直于斜面（山坡）的方向和平行于斜面的方向分别分解为v_1和v_2，g_1和g_2。这样，炮弹的平抛运动可以看作是下列两个方向上的分运动的合运动：在垂直于斜面的方向上，是初速度为v_1＝v0sinθ、加速度为g_1＝－gcosθ的匀减速运动；在平行于斜面的方向上，是初速度为v_2＝$v_0$cosθ、加速度为g_2＝gsinθ的匀加速运动。

由此可知，当炮弹运动到与山坡之间的垂直距离最大的C点时，炮弹在垂直于斜坡的方向上相对于斜坡的速度为零,所以由A到C所用时间为：

$$t'=\frac{(v_0\sin\theta)}{(g\cos\theta)}=\frac{v_0}{g}\cdot tg\theta=\frac{t}{2}$$

C点到斜面的最大距离为：

$$H=\overline{CD}=\frac{(v0\sin\theta)^2}{2(g\cos\theta)}=\frac{v_0^2}{2g}\cdot tg\theta\cdot\sin\theta$$

从上面的计算可知：从A到C的时间与从C到B的时间相等，

均为$t'=\frac{v_0}{g}$，$tg\theta=\frac{t}{2}$但是，沿斜坡上的距离$\overline{AD}$与$\overline{DB}$是不相等的，

它们的大小分别为：

$$\begin{aligned}AD&=(v_0\cos\theta)t'+\frac{1}{2}(g\sin\theta)t'^2\\&=(v_0\cos\theta)(\frac{v_0}{g}tg\theta)+\frac{1}{2}(g\sin\theta)(\frac{v_0}{g}tg\theta)^2\\&=\frac{v_0^2}{2g}\cdot tg\theta(\frac{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta})\\&=\frac{v_0^2}{2g}\cdot\sin\theta(\frac{1}{\cos^2\theta}+1)\end{aligned}$$

$$\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}$$

其中$\overline{AB}$可以根据运动学公式$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$计算：

$$\begin{aligned}AB&=(v_0\cos\theta)t+\frac{1}{2}(g\sin\theta)t^2\\&=(v_0\cos\theta)(\frac{2v_0}{g}tg\theta)+\frac{1}{2}(g\sin\theta)(\frac{2v_0}{g}tg\theta)^2\\&=\frac{2v_0^2}{g}\cdot tg\theta(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos\theta})\\&=\frac{2v_0^2}{g}tg\theta/\cos\theta\end{aligned}$$

这里$\overline{AB}$的结果与前面（1）中计算的结果相同，但计算的方法不一样。前面是根据炮弹的落点坐标（x，y），用解析几何的方法计算；这里是根据炮弹沿斜面方向作初速度为$v_0$cosθ、加速度为gsinθ的匀加速运动计算所得。这样就可以求得D、B之间的距离：

$$\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}$$
$$=\frac{2v_0^2}{g}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-(\frac{v_0^2}{2g}\sin\theta+\frac{v_0^2}{2g}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta})$$
$$=\frac{3v_0^2}{2g}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\frac{v_0^2}{2g}\cdot\sin\theta$$
$$=\frac{v_0^2}{2g}\cdot\sin\theta(\frac{3}{\cos^2\theta}-1)$$

显然$\overline{AD}\neq\overline{DB}$; 且$\overline{AD}:\overline{DB}\neq 1:3$，

这是由于初速度为 $v_0\cos\theta\neq 0$。

在分析、解决例题 2 的过程中，对炮弹的运动提出了两种不同的观点。第一种观点认为炮弹的运动是：水平方向上速度为 v_0 的匀速运动与竖直方向上的自由落体运动的合运动。第二种观点认为炮弹的运动是：垂直于斜面方向上初速度为 $v_0\sin\theta$、加速度为 $g\cos\theta$ 的匀减速运动与沿斜面向下、初速度为 $v_0\cos\theta$、加速度为 $g\sin\theta$ 的匀加速运动的合运动。从表面上看，第二种观点把平抛运动复杂化了。第一种观点是相对于地平面，第二种观点则相对于斜坡，这两种观点都是分析研究同一个对象：平射出去的炮弹在重力作用下的匀变速曲线运动。显然第一种观点具有直观，易被理解、接受的优点。第二种观点从理解问题的角度来看，确实是把问题复杂化了，但它提供了一种方法，这种方法使人们可以运用现有的物理知识和数学知识顺利地解决问题。更重要的是应该理解第二种观点的理论依据是矢量的分解与合成，分矢量与合矢量作用的等效性原理。等效性原理在自然科学中被广泛采用，它既是一个重要的原理，也是一种有效的方法。学习物理，要深刻理解等效性原理，逐步学会对具体的问题，特别是较复杂的问题，从不同的角度提出不同的观点，从而寻找新的思路，探索新的解题方法。

通常所讲的平抛运动，是物体在重力作用下的匀变速曲线运动，加速度就是重力加速度 g。物理学中存在着大量的类似平抛的运动，如带电粒子以初速度 v_0 垂直于电场方向射入匀强电场中以后的运动等。这类运动与平抛运动有着共同的特征：①有初速度 v_0；②物体在运动过程中受与初速度方向垂直的恒力作用，也就是运动过程中有垂直于初速度方向的恒定加速度 a。它们都是匀变速曲线运动，轨迹都是抛物线。区别在于平抛运动的加速度是重力产生的，是重力加速度；而类似平抛运动的加速度则可能是浮力、电场力或浮力、电场力和重力的合力形成的。

［例题 3］一个探空气球，它在空气中受到的浮力是其重力的 1.5 倍。由静止状态开始从地面释放，由于受到水平方向速度为 v_0 的风的影响，气球不能沿竖直方向直线上升。经观测，释放后 2 秒末气球的速度方向与水平方向夹角为 45°。试求：当气球的高度 h＝30 米时，其速度大小和方向如何？

［分析与解］取风速方向为 0x 轴方向，竖直向上为 0y 轴方向。则气球沿水平方向（即 0x 轴方向）作匀速运动，沿竖直向上方向（即 0y 轴方向）作初速度为零的匀加速运动，加速度为

a＝0．5g≈5（米／秒^2）

则 2 秒末竖直方向上的分速度为：

V_y＝at＝10（米／秒）

由于 2 秒末的速度方向与水平方向成 45°角，所以 2 秒末的水平分速度为：

V_x＝$V_y$tg45°＝V_y＝10（米／秒）

当高度为h＝30米时，由 $h=\frac{1}{2}at^2$

可以求得：

$$t=\sqrt{\frac{2h}{a}}=\sqrt{\frac{2\times 30}{5}}=2\sqrt{3}\text{（秒）}$$

这时气球的速度分量分别（图 2－15）为：

$$\begin{cases} v'_x = v_x = 10(\text{米}/\text{秒}) \\ v_y' = at = 10\sqrt{3}(\text{米}/\text{秒}) \end{cases}$$

这时速度的大小为：

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = 20\text{（米/秒）}$$

速度的方向与水平方向夹角为：

$$\theta = tg^{-1}(\frac{v'_y}{v'_x}) = tg^{-1}\sqrt{3} = 60°$$

[例题 4]在 0xy 平面上，物体沿 0x 轴的正方向作匀速直线运动，速度为 v_0；当物体进入 0y 轴右边的区域（x≥0）时，物体受到与 0y 轴正方向相同的恒力作用，从而产生与 0y 轴正方向同向的恒定加速度 a。求物体进入受力区域后 t 秒时的位置与速度。

[分析与解]物体进入受力区域后，由于物体在 0x 轴方向上不受力的作用，0x 轴方向上保持原有速度 v_0 作匀速运动，在 0y 轴方向上物体的加速度为 a，所以物体的实际运动是：0x 方向上的匀速运动与 0y 方向上初速度为零的匀加速运动的合运动，t 秒时物体的位置坐标（图 2-16）为：

$$x = v_0 t$$

$$y = \frac{1}{2}at^2$$

t秒内物体的位移大小为：$s = \sqrt{x^2 + y^2}$

位移的方向与x轴夹角a为：$a = tg^{-1}(\frac{y}{x})$

t 秒时物体的速度分量分别为：

$$v_x = v_0$$

$$v_y = at$$

速度的大小为：$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

速度的方向与x轴之间的夹角θ为：$\theta = tg^{-1}(\frac{v_y}{v_x})$

从t秒时物体的位置坐标：$x = v_0t$，$y = \frac{1}{2}at^2$可以看出，

位置随时间而变化。消去共同的参变量 t，即可得物体运动轨道的方程：

$y = \frac{a}{2v_0^2}x^2$（抛物线）

例题 4 可以看作是类似平抛运动的共同模型。掌握上述分析方法很重要。应该注意的是：t 秒内的位移方向与 t 秒末的速度方向是完全不同的两个物理概念；t 秒内的位移大小与 t 秒内物体（沿抛物线轨道）通过的路程也是不相同的。

●思考与练习

1．在运动着的列车车厢里，一个乘客让手中的一个物体自由落下。试问在下列三种情况中，车上的乘客和车外路边静止的观察者看到的落体运动情况。（1）列车匀速行驶；（2）列车匀加速行驶；（3）列车匀减速行驶。

2．河宽 400 米，小艇以 4 米／秒的速度将船头垂直指向对岸行驶。试求水流速度在下列三种情况时，小艇过河所用时间且小艇在对岸何处靠岸？（1）流速为零；（2）流速为 1 米／秒；（3）流速为 2 米／秒。

3．大客车在平直的公路上以 12 米／秒的速度向东匀速行驶，雨滴竖直匀速下落，速度为 8 米／秒。问车中的乘客见到的雨滴速度大小和方向如何？

4．长江中的轮船本身的速度是 6 米／秒，顺流而下，向正东航行，水流速度为 2 米／秒。船上的乘客在甲板上以 3 米／秒的速度垂直于轮船航行的方向，由北向南行走。求乘客相对于江岸的速度大小和方向。

5．在 45 米高的塔顶上，以 10 米／秒的速度水平抛出一块石子，不计空气阻力，且 $g=10$ 米／秒 ^{2}。求石子落地时的速度大小和方向。

6．飞机沿水平方向以 100 米／秒的速度匀速飞行。飞行中每隔 2 秒有一个小物体从飞机上掉落下来（不计空气阻力对物体运动的影响）。当第六个物体即将落下时，第一个物体恰好落到地面上。求该瞬间这六个物体在空间的相对位置。

7．我海岸防空部队在发现一艘敌舰后，立即派出飞机前去拦击。我机以 200 米／秒的速度在 500 米高处水平飞行，敌舰与飞机处在同一竖直平面内。在下列情况中，为击中敌舰应在离目标多远处（水平距离）投弹？（1）敌舰静止不动；（2）敌舰以 20 米／秒的速度在逃离；（3）敌舰以 20 米／秒的速度与我机相向航行（不计空气阻力，取 $g=10$ 米秒 ^{2}）。

8．甲、乙两个同学在码头上向水面抛掷小石块。他们都沿同一水平方向投掷，抛出点与水平面间的高度差为 11．25 米。已知甲抛出小石块的初速度是 $v_1=12.5$ 米／秒，而乙抛出的小石块的落水点比甲抛出的小石块的落水点远 3．75 米。求乙抛出小石块的初速度多大？

9．在第 8 题中，乙抛出的小石块落水时的速度多大？落水时速度的方向如何？

10．正方形的光滑平板 abcd 的边长为 l，静止地斜放在水平桌面上，与桌面成 30°夹角，ab 边和 cd 边水平。一个小球被以某一水平速度从 a 点沿 ab 抛出（图 2-17），小球恰好从 d 点离开平板。试求小球从 a 到 d 所用时间多长？小球从 a 点抛出时的初速度多大？

三、两个任意方向上运动的合成

两个任意方向上的运动，是指两条有任意夹角的直线上的运动。两个任意方向上运动的合成问题，比互相垂直的方向上运动的合成问题要广泛得多，而且一般也都比较复杂。这些问题可以归纳为匀速运动的合成、斜抛与类斜抛问题以及相关运动中的合成问题三大类。

研究两个任意方向上运动的合成，最直接的方法是根据平行四边形法则或矢量三角形法则，运用作图法并辅之以简单的计算。这种方法的最主要优点是直观，数学计算不复杂。

●匀速运动的合成问题

两个任意方向上匀速运动的合成问题很多。这里仅就运动中的人感觉到的风向问题与过河问题举例，通过所举例题的分析与解的过程，阐述一般的解题方法。

［例题 1］当人以 3 米／秒的速度向东跑时，他感到风是从正北方向吹来的；当他以 6 米／秒的速度向东奔跑时，则感到风从东北方向吹来。求风相对于地面的方向和速率。

［分析与解］空气流动形成风。如空气相对于地面不动，人在走动时，便会感到有风迎面吹来，这时人感觉到的风向与人的运动方向相反，速率与人运动的速度大小相同。

在有风的情况下，走动的人感觉到的风实际上是空气相对于人的运动，所以我们可以假设人不动，即以人为参照物。

人向东走，以人为参照物，则转化为地面相对于人向西运动。

空气相对于地面运动，地面相对于人运动，则人感觉到的风便是空气相对于人的运动。

可见，人感觉到的风，是空气相对于地面的运动和地面相对于人的运动的合运动。

根据上述分析，题目所述内容可以表述为图 3-1 中的（甲）（乙）两个矢量图。

由（甲）、（乙）两图可知，空气相对于地面的方向是指向东南的，图中 $\theta=45°$，而速率 $v_{气对地}=\sqrt{2}\upsilon_{人对地}=3\sqrt{2}$(米/秒)≈4．2(米/秒)

从图（乙）还可以看出，当人以 6 米／秒的速度向东奔跑时，他感觉到的东北风的风速，比他以 3 米／秒的速度向东跑时感觉到的风速大，前者是后者的 $\sqrt{2}$ 倍。

［例题 2］船在水中的速度为 v_1，河中流水的速度为 v_2，水向东流，河宽为 d（图 3-2）。（1）若船头指向保持与河岸成θ角不变，船相对于河岸的速度多大？船从南岸要用多少时间才能到达北岸？（2）θ角多大时，过河所用的时间最短？最短时间多少？（3）θ角多大时，船恰好能在正对岸靠岸？这样过河用多少时间。

［分析与解］以河岸为参照物，船参与了两个运动：相对于水的运动，速度为 v_1，方向与河岸夹θ角；与水一起向东运动，速度为 v_2。则船相对于河岸的速度是 v_1、v_2 的合速度：

$$v=\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\theta}$$

v 的方向与河岸夹角为 a，由图 3-2，根据正弦定理可知，

$$\frac{v_1}{\sin a}=\frac{v}{\sin(180°-\theta)}$$，则得：

$$a=\sin^{-1}\left(\frac{v_1}{v}\cdot\sin\theta\right)$$

船到达对岸所用的时间为：

$$t=\frac{d}{v\sin a}\text{或}t=\frac{d}{v_1\sin\theta}$$

（2）由$t=\dfrac{d}{v_1\sin\theta}$可知，当$\theta=90°$，

即船头保持与河岸垂直时，过河所用的时间最短：

$$t_{min}=\frac{d}{v_1}$$

这时，船在正对岸下游 s 处靠岸：

$$s=v_2t_{min}=（\frac{v_2}{v_1}）d$$

（3）要使船恰好能到达正对岸，则应使α=90°，

即$\dfrac{v_1}{v}\sin\theta=\sin90°=1$，故$\sin\theta=\dfrac{v}{v_1}$，

可见，船头应保持与河岸之间的夹角大小为：

$$\theta=\sin^{-1}(\frac{v}{v_1})=\sin^{-1}(\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{v_1})$$

这样过河所用的时间为：$t=\dfrac{d}{v}$或$t=\dfrac{d}{v_1\sin\theta}$

显然，要使船能在正对岸靠岸，必须θ＞90°，且$v_1>v_2$，否则不行。

［例题 3］甲、乙两人在静水中游泳时最大速度分别为v_1和v_2。他们分别从自西向东流的河的南岸和北岸的 A、B 点向对岸游去（图 3-3）。已知 A、B 相距 s，A、B 连线与河岸夹θ角，水的流速为 v。两人同时、分别从 A、B 点出发，问他们各自应向什么方向游，才能用最短的时间在河中某处相遇？

这最短的时间是多少？

［分析与解］为了用最短的时间在河中某处相遇，显然他们均以最大的速度v_1、v_2游动。

方法一：以河岸为参照物。甲、乙两人游动的方向也就是v_1、v_2的方向，分别用它们与河岸垂直线的夹角α、β表示（图 3-3）。设经过时间 t 他们相遇，在这段时间里，他们两人在垂直于河岸方向上的位移大小分别为s_1和s_2，而在平行于河岸方向上的位移大小分别为s'_1和s_2'。用正交分解的方法可知：

$$\begin{cases}s_1=v_1\cos\alpha\cdot t\\ s_2=v_2\cos\beta\cdot t\end{cases}$$

$$\begin{cases}s_1'=（v_1\sin\alpha+v）t\\ s_2'=（v_2\sin\beta-v）t\end{cases}$$

甲、乙相遇，则应有：

$$\begin{cases}s_1+s_2=s\cdot\sin\theta\\ s_1'+s_2'=s\cdot\cos\theta\end{cases}$$

即（$v_1\cos\alpha+v_2\cos\beta$）$t=s\cdot\sin\theta$　　①

（$v_1\sin\alpha+v_2\sin\beta$）$t=s\cdot\cos\theta$　　②

两式平方相加，可得：

$[v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos(\beta-\alpha)]t^2=s^2$

$$t=\frac{s}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos(\beta-\alpha)}}$$

可见，只有当α=β，t 有最小值：

$$t_{min}=\frac{s}{v_1+v_2}$$

将α=β代入①②两式，可得 ctgα=ctgβ=tgθ，即α=β=90°-θ，这表明甲、乙均沿着连接 A、B 的直线向对方游时所用的时间最短。

甲、乙两人沿着连接 A、B 的直线向对方游时，如水静止，则他们将在 A、B 连线上的某点 O 相遇；若水以速度 v 流动时，他们将在 O 点下游的 O′点相遇，而 OO′=vt_{min}。这种情况下，甲、乙的实际游泳路线分别是直线 AO′与 BO′。

方法二：以河水为参照物。由于甲、乙两人在同一条河中游泳，在相同的时间里，甲、乙均被水向下游冲去相同的距离 s=vt，所以可以不考虑水流动的影响，而认为甲、乙都在静止的水中以各自最大的游速游动。要在最短的时间里相遇，所以应沿着连接 A、B 的直线分别向对方游去，这样所用的时间最短：

$$t_{min}=\frac{s}{v_1+v_2}$$

实际上在这段时间里，由于水流的作用，甲、乙均向下游漂移一段距离：

$$s'=vt_{min}=\frac{v}{v_1+v_2}\cdot s$$

水不流动时甲、乙在 AB 上的 O 点相遇，水流动时他们在 O′点相遇，甲、乙两人相对于河岸的实际路线分别为 AO′和 BO′（图 3-4）。

方法三：假设水不流动，乙也不游，则相当于甲以速度

$\vec{v}_1$和速度$-\vec{v}_2$的合速度$\vec{v}_{12}$从A向B游去（图3-5）。

由图 3-5 可以看出，只有当α=β=90°-θ时，

$\vec{v}_1$与$-\vec{v}_2$的合速度$\vec{v}_{12}$才有最大值，

这样，甲从 A 到 B 所用的时间才最短。v_{12} 的最大值为 v_1+v_2，所以最短的时间为：

$$t_{min}=\frac{s}{v_1+v_2}$$

上述三种方法的根本区别在于参照物的选择，而计算方法的区别则是非本质的区别。参照物的不同选择，代表了不同的物理思想，也就是分析同一物理过程的不同物理模型。对物理过程的理解，都与特定的模型相联系。对于运动学问题来讲，模型取决于参照物的选择，这反映了运动的相对性特性。

●斜抛问题与类似斜抛问题

对斜抛物体运动的理解，通常有两个模型。

模型一：斜抛物体的运动，是水平方向上速度为 $v_1=v_0\cos\theta$ 的匀速运动与竖直方向上初速度为 $v_2=v_0\sin\theta$ 的竖直上抛运动的合运动（图 3-6）。

模型二：斜抛物体的运动是初速度方向上速度为 v_0 的匀速直线运动与竖直方向上自由落体运动的合运动（图 3-7）。

这两个模型的区别在于模型一把初速度 v_0 正交分解为水平方向上的 v_1 和竖直方向上的 v_2，把斜抛运动看作是两个互相垂直的方向上的运动的合运动。模型二对斜抛运动的描述更为直接。被斜抛的物体，若无重力作用，将沿初速度的方向作匀速直线运动，1 秒末经过位置 A_1、2 秒末经过位置 A_2、……实际上重力是存在的，所以 1 秒末斜抛物体的位置不在 A_1，而是在 A_1 的正下方 B_1，2 秒末的位置不在 A_2，而是在 A_2 的正下方 B_2，……，A_1B_1、A_2B_2、A_3B_3、……的大小由自由落体公式 $\frac{1}{2}gt^2$ 决定，$A_1B_1:A_2B_2:A_3B_3:\cdots\cdots=1^2:2^2:3^2\cdots\cdots$

模型一的最主要优点是与平面直角坐标系紧紧联系在一起，抛出点为坐标原点，ox 轴沿水平方向，oy 轴竖直向上，这两根坐标轴的方向与该模型的两个运动的方向一致。一般教科书均采用这个与坐标系结合的模型。

模型二直接体现了力学基本规律，特别是力的独立作用原理。利用这个模型可以十分简便地解释一系列物理现象，分析说明一系列物理过程发生的机理。这个模型把斜抛运动看作是夹角为 90°+θ 的两个方向上运动的合成，这两个方向与直角坐标没有直接的联系，所以在分析计算与斜抛运动有关的问题时，往往采用模型一。

在图 3-6 所示的坐标系中，设斜抛物体抛出后 t 秒的位置坐标为 P（x，y），根据模型一，可以写出轨迹的参数方程：

$$\begin{cases} x = v_0\cos\theta\cdot t \\ y = v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

消去共同的参变量 t，可得轨迹方程为：

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\cdot x^2 + \mathrm{tg}\theta\cdot x$$

这是抛物线方程。y=0 时，可得斜抛物体的水平射程 x：

$$0 = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \mathrm{tg}\theta\cdot x$$

$$X = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$$

可知，当 2θ=90°，即 θ=45°时，水平射程最大：

$$X_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

将轨迹方程配成完全平方的形式，可得：

$$y=-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x-\frac{v_0^2\sin\theta\cdot\cos\theta}{g}\right)^2+\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

可见，当$x=\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{X}{2}$时，$y$有最大值，

即斜抛物体能达到的最大高度为：

$$Y=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

由射程公式 $X=v_0^2\sin 2\theta/g$ 与 $x=v_0\cos\theta\cdot T$，可得斜抛物体的飞行时间：

$$T=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$$

与平抛运动一样，斜抛物体的运动也是匀变速运动。加速度为 g，在△t 时间里，速度改变量的大小为 g△t，方向竖直向下。

在分析下列例题的过程中，我们将进一步阐述斜抛物体的运动特性。任何一种解题方法，都来源于对运动特性的理解，也体现了对物理过程的认识。只有对题目所述的物理过程有了充分的了解，对物理过程中物体运动的特性、运动中所遵循的物理规律有了深刻的认识，才可能产生灵活多变的解题方法。所以解题过程的重点是对题目的深入分析，而不是公式的套用。

[例题 1] 一个斜抛物体，某时刻的速度方向与水平方向夹角为α，经时间 t，速度方向与水平方向的夹角变为β。如抛出时初始时刻的抛射角为θ，求抛出时的初速度。

[分析与解] 设初速度为 v_0，斜抛物体在整个运动过程中，水平方向上总是匀速运动，即速度的水平分量恒定不变，保持为 $v_{||}=v_0\cos\theta$。竖直方向上是初速度为 $v_0\sin\theta$ 的竖直上抛运动。又设某时刻抛体的速度为 v_1，经 t 秒速度为 v_2。

(1) 设 v_1、v_2 均斜向上（图 3-8），则在 t 秒内，竖直方向上速度改变量为：$\triangle v=gt=v_{||}tga-v_{||}tg\beta$，

故得$v_{\|}=\frac{gt}{tga-tg\beta}$，$v_0=\frac{gt}{(tga-tg\beta)\cos\theta}$

(2) 如 v_1 是抛体上升阶段某时刻的速度，v_2 是抛体下降过程中的速度，则 t 秒内竖直方向上速度改变量（图 3-9）为：

$\triangle v=gt=v_{||}tga+v_{||}tg\beta$

故得$v_{\|}=\frac{gt}{tga+tg\beta}$，$v_0=\frac{gt}{(tga+tg\beta)\cos\theta}$

(3) 如 v_1、v_2 均为抛体下降过程中的即时速度（图 3-10），则 t 秒内速度改变量为：

$\triangle v=gt=v_{||}tg\beta-v_{||}tg\alpha$

故得$v_{\|}=\frac{gt}{tg\beta-tg\alpha}$，$v_0=\frac{gt}{(tg\beta-tg\alpha)\cos\theta}$

［例题 2］某雷达站在某时刻发现一枚导弹正在向雷达站的方向飞来，测得该时刻导弹的高度 h_1=36000 米，水平距离 s_1=45000 米；1 秒后导弹的高度 h_2=36045 米，水平距离 s_2=44500 米。

设导弹无推动力，空气阻力不计，g 取 10 米／秒 ^{2}，求：（1）假设导弹按抛物线（弹道）飞行，雷达站处在导弹的轨道面之中，求导弹的发射点与雷达站之间的水平距离？（2）导弹轨道的最高点到地面的高度是多少？（3）在发现导弹后 5 秒末，从雷达站发射一束激光恰好将导弹击毁，求激光束瞄准的仰角多大？

［分析与解］方法一：由发现导弹时的位置 P（45000，36000）和 1 秒后的位置 M（44500，36045）可知，导弹处在轨道的上升阶段（图 3-11），根据抛体运动的规律和已知条件，可以推断导弹在被发现时（即 P 点）的速度分量分别为：

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{s_2 - s_1}{t} = -500\text{（米／秒）} \\ v_y = [\text{（}h_2 - h_1\text{）} + \dfrac{1}{2}gt^2] \div t = 50\text{（米／秒）} \end{cases}$$

设导弹发射时初速度的水平分量与竖直分量分别为 v_{ox} 和 v_{oy}，发射后经 t_0 秒被雷达发现，在 t_0 秒内，观察导弹在竖直方向上的运动情况，可得：

$$\begin{cases} v_y = v_{yo} - gt_0 \\ h = v_{yo}t_0 - \dfrac{1}{2}gt_0^2 \end{cases}$$

代入已知量，得关于 t_0 的一元二次方程：

$t_0^2+10t_0-7200=0$

（t_0-80）（t_0+90）=0

舍去负根，得 t_0=80 秒，可知导弹发射点与雷达站的水平距离为：

$D=v_xt_0+s_1=500\times80+45000$

$=85000$（米）=85（千米）

（2）由 $v_y=v_{yo}-gt_0$。可以求得导弹发射时初速度的竖直分量为 $v_{yo}=v_y+gt_0=50+10\times80=850$（米／秒），可见导弹轨道的最高点到地面的高度为：

$$H = \frac{v_{yo}^2}{2g} = 36125\text{（米）}$$

（3）导弹被发现后 5 秒的位置坐标（图 3－11）为：

$$\begin{cases} x = D - v_x\text{（}t_0 + 5\text{）} = 42500\text{（米）} \\ y = v_{yo}\text{（}t_0 + 5\text{）} - \dfrac{1}{2}g\text{（}t_0 + 5\text{）}^2 = 36125\text{（米）} \end{cases}$$

可见，激光束瞄准时的仰角为：

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = tg^{-1}(0.8488) = 40°19'$$

根据上面的分析，我们还可以求出导弹总的飞行时间为：

$$T=\frac{2v_{oy}}{g}=175\text{（秒）。}$$

如导弹不被激光击毁，它的水平射程 $X=v_xT=85000$（米）$=D$（85 千米），雷达站将被摧毁。

方法二：在图 3-11 所示的坐标系中，坐标原点设在雷达站，导弹发射点与雷达站相距 D，v_{ox}、v_{oy} 为导弹发射时初速度的水平分量与竖直分量，则 t 秒时导弹的位置坐标为：

$$\begin{cases} x=D+v_{xo}t \\ y=v_{yo}t-\dfrac{1}{2}gt \end{cases}$$

设 $t=t_0$ 时导弹被雷达发现，这时导弹的位置为 P（45000，36000），由此可得：

$$\begin{cases} 45000=v_{xo}t_0+D & ① \\ 36045=v_{yo}t_0-\dfrac{1}{2}gt_0^2 & ② \end{cases}$$

在 $t=t_0+1$ 时导弹的位置在 M（44500，36045），可得：

$$44500=v_{xo}(t_0+1)+D \qquad ③$$

$$36045=v_{yo}(t_0+1)-\frac{1}{2}g(t_0+1) \qquad ④$$

由①、③两式解得：

$v_{xo}=-500$（米／秒）

④式与②式相减，得 $v_{yo}=50+gt_0$；代入②式，得到关于 t_0 的一元二次方程，解此方程可知 $t_0=80$（秒），这样由①式便可计算出导弹发射点与雷达站的水平距离：

$D=45000-v_{xo}t_0$

$=45000+500\times80$

$=85000$（米）

（2）将 $t_0=80$（秒）代入②式，可知：

$v_{yo}=850$（米／秒）

则导弹飞行中的最大高度为：

$$H=\frac{v_{yo}^2}{2g}=36125\text{（米）}$$

（3）发现导弹后经 5 秒，导弹的位置由①、②两式求得：

$$\begin{cases} x=42500\text{（米）} \\ y=36125\text{（米）} \end{cases}$$

故激光束瞄准时的仰角为：

$$\theta=tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)=40°19'$$

［例题 3］从空中某点 M 以相等的速率向各个不同的方向同时抛出若干个物体。试证明在任何时刻，这些物体总是处在同一个球面上。并说明球面的球心位置与球面的半径。

[分析与解]从 M 点抛出去的物体，可能是竖直上抛，也可能是斜上抛、平抛或斜下抛。为描述这些抛体的运动，我们以 M 点为坐标原点，竖直向上为 y 轴，把 x 轴设在任意一个水平方向上（图 3-12），这样，只要我们能证明在 oxy 平面内的抛体在任何时刻都处在同一个圆上，问题也就解决了。因为我们只要把 oxy 平面绕 y 轴旋转一周，空间中的立体球面与平面中的圆之间的联系便会一目了然。

设物体抛出时的初速度方向与水平轴夹角为θ，则时刻 t 抛体的位置坐标分别为：

$$\begin{cases} x = v_0\cos\theta \cdot t \\ y = v_0\sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

设 $v_0t=a$，$\frac{1}{2}gt^2=b$，在任意确定的时刻 t，a、b 也随之确定。将 a、b 代入，得

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta - b \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y + b = a\sin\theta \end{cases}$$

这是以抛射角θ为参变量的圆参数方程，圆心的坐标为 O（0，-b），半径为 a。

由 $b=gt\frac{1}{2}gt^2$ 可知，圆心位置是变化的，它从 M 点开始，由静止出发作自由落体运动。圆的半径 $a=v_0t$ 随时间逐渐增大。

例题 3 所述的现象，在节日焰火（烟花）中可以看得很清楚。从地面上看去，五颜六色的发光点构成的一个圆面，实际上是分布在一个球面上。由于焰火弹是斜射升空的，球面的球心实际上沿抛物线运动，而球面的半径总是随时间而逐渐变大。

上述三个例题的解法是有区别的。例题 1 主要应用矢量分析与矢量图；例题 2 是根据抛体在竖直方向上与水平方向上的运动特性，逐步分析求解；例题 3 则是解析法的具体运用。共同点是这三种解法都是按模型一理解斜抛运动的。

物理学中还常常遇到类似斜抛运动的问题，如带电粒子以初速度 v_0 射入匀强电场中，当初速度 v_0 的方向与电场方向垂直时，带电粒子在电场中的运动是类似平抛运动；如初速度 v_0 的方向与电场方向不垂直，则带电粒子进入电场后的运动就是类似斜抛运动。

[例题 4]质点在 oxy 平面中沿直线 y=tgθx，从第Ⅲ象限经坐标原点向第Ⅰ象限以速度 v_0 作匀速运动。通过坐标原点以后，物体即受恒力作用，有与 oy 轴相反方向的恒定加速度 a。求质点通过 O 点后 t 秒时的位置和速度。

[分析与解]如图 3-13，y=xtgθ是通过坐标原点、与 ox 轴夹角为θ的直线。将初速度 v_0 沿 ox 轴与 oy 轴分解，得分量：

$$\begin{cases} v_{ox} = v_0\cos\theta \\ v_{oy} = v_o\sin\theta \end{cases}$$

可见，质点在第Ⅰ象限与第Ⅳ象限里的运动，是 ox 方向上速度为 v_{ox}

的匀速运动与 oy 方向上初速度为 v_{oy}、加速度为 a 的匀减速运动的合运动。
t 秒时质点位置 P 的坐标（图 3-13）为：

$$\begin{cases} x = v_0\cos\theta \cdot t \\ y = v_0\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

质点在 P 点的速度分量为：

$$\begin{cases} v_x = v_o\cos\theta \\ v_y = v_0\sin\theta - at \end{cases}$$

速度的方向与ox方向间的夹角为：$a = tg^{-1}$（$\frac{v_y}{v_x}$）。

●相关运动中的运动合成问题

相关运动，是指存在着某种联系的几个物体的运动。这里所讲的联系，有直接联系与间接联系。码头上的人通过跨在岸边滑轮上的绳子，拉着小船靠岸，在这过程中小船靠岸的速度与人拉着绳子沿水平地面走动的速度之间的关系，是通过绳子联系的，是直接联系。斜靠在墙角处的直杆，当杆子的下端沿水平地面滑动时，杆子的上端必然会沿墙壁向下滑行，由于杆子的长度与形状都不变，杆子下端沿水平地面滑动的速度与杆子上端沿墙壁向下滑行的速度，自然也是直接联系的。人追赶一部开动中的汽车，猎犬追捕一只兔子，人与汽车、猎犬与兔子自然也有联系，但它们之间没有特定的联系物（如绳子、杆子……），这种联系叫间接联系。

研究相关运动中不同物体的运动量（位移、速度、加速度、……）之间的关系，显然是比较复杂、比较困难的，因为这种关系与联系方式和运动的限制条件有关。这就需要我们根据运动量的矢量特性，根据实际的联系情况与限制条件，选择合适的参照物，通过分析，找出正确的解题途径，求得准确的答案。

[例题 1]人在码头上，通过跨在定滑轮上的绳子，拉着小船靠岸（图 3-14）。人拉着绳子沿水平方向走动的速度 v_0 保持不变，人拉着的这段水平绳子与水面相距 h。求小船与岸边相距 x 时，船靠岸的速度 v 多大？

[分析与解]方法一：人拉着绳子走动时，绳上各点的速率都相等，方向与绳子的方向一致。

对滑轮以下的那段绳子来说，它的运动显然不是平动。这段绳子在船靠岸的过程中与水面之间的夹角 θ 不断增大，因此这段绳子的运动，既有与这段绳子的长度不断缩短相关的沿绳子方向上的运动，又有绕定滑轮 O 的转动。所以绳上各点的运动速度，是沿绳子方向上的速度 v_0 和垂直于绳的方向上的速度 v’的合速度（图 3-15）。可见，当小船与岸边相距 x 时，绳端 A 点，即小船的靠岸速度为：

$$v = v_0 / \cos\theta = v_0 \cdot \frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x} = \sqrt{1 + (\frac{h}{x})^2} \cdot v_0$$

方法二：设小船与岸边相距 x 时靠岸的速度为 v，经过很短的一段时间△t，小船运动到 B 点（图 3-16）。在△t 这段时间里，滑轮以下的那段绳子由位置 AO 运动到 BO，这段绳子绕 O 点转过的角度为 a.在 AO 上取 C 点，使 CO=BO。由于△t 极短，a 很小，所以可以认为 BC 与 AO 垂直，三角形 ABC 可以看作是直角三角形，故得

$$\frac{AC}{AB} = \frac{v_0 \Delta t}{v \Delta t} = \frac{v_0}{v} = \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

由此可得：$v = \sqrt{1 + (\frac{h}{x})^2} \cdot v_0$。

上述两种方法的共同点是分析滑轮以下的那段绳子的变化情况。方法一认为这段绳子既有沿绳子方向上的速度 v_0，又有绕 O 点转动垂直于绳子方向上的速度 v′，而小船的速度是 v_0 与 v′的合速度。方法二则根据这段绳子在极短的时间△t 内位置变化情况，推断三角形 ABC 为直角三角形，

找出小船靠岸的速度 v 与绳上各点沿绳子方向上的速度 v_0 之间的关系，从而求得答案。

从所得答案 $v=\sqrt{1+(\frac{h}{x})^2}\cdot v_0$ 可以看出，当小船与岸边相距很远，

即 x》h 时，$v\approx v_0$，小船靠岸的速度与人拉绳子的速度几乎相等。

[例题 2]同一平面中的两根直杆 a 和 b，夹角为 θ，分别以垂直于自身的速度 v_1 和 v_2 在同一平面中平动（图 3-17）。求这两根杆子交点 O 的速度大小和方向。

[分析与解]方法一：设 b 杆不动、a 杆动，则交点 O 将沿 b 杆以速率 v_1' 运动（图 3-18）：$v_1'=v_1/\sin\theta$。

设 a 杆不动、b 杆动，则交点 O 将沿 a 杆以速率 v_2' 运动（图 3-18）：

$v_2'=v_2/\sin$?

实际情况是 a、b 两杆同时运动，所以交点 O 的运动速度应是 v_1' 与 v_2' 的合速度 v：

$$v=\sqrt{v_1'^2+v_2'^2-2v_1'v_2'\cos\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta}}{\sin\theta}$$

应特别注意交点 O 的速度不是 v_1、v_2 的合速度，而是 v_1' 与 v_2' 的合速度！

方法二：设某时刻两杆相交于 O，经过时间 t 两杆的交点为 O′（图 3－19）。可见，两杆的交点是沿 OO′方向运动的。设交点的速率为 v，则：

$\overline{OO'}=vt$。

从图 3－19 可以看出：OO′是 a、a′、b、b′构成的平行四边形的对角线。根据题意及图示，可得：

$\overline{OC}=v_1t$，$\overline{OD}=v_2t$

$\overline{OA}=\overline{OC}/\sin\theta=v_1t/\sin\theta$

$\overline{OB}=\overline{OD}/\sin\theta=v_2t/\sin\theta$

$$OO'=\sqrt{OA2+OB2-2OA\cdot OB\cos\theta}$$

$$=\sqrt{(\frac{v_1t}{\sin\theta})^2+(\frac{v_2t}{\sin\theta})^2-2(\frac{v_1t}{\sin\theta})(\frac{v2t}{\sin\theta})\cos\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta}}{\sin\theta}\cdot t$$

即 $v=\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2-2v_1v_2\cos\theta}}{\sin\theta}$

[例题 3]某时刻质点 A、B 处在直线 l 的两端，直线长为 l=15 米（图 3－20）。质点 A 以速度 v_A=4 米/秒沿直线 l 运动，质点 B 以速度 v_B=3 米/秒沿垂直于直线 l 的方向运动。求：何时 A、B 相距最近？最近距离多大？

[分析与解]方法一：取地面为参照物。经时间 t，A 运动到 A′，B 运动到 B′，这时两个质点相距（图 3－21）为：

$$s=\sqrt{(l-v_A t)^2+(v_B t)^2}=\sqrt{(15-4t)^2+(3t)^2}$$
$$=\sqrt{25t^2-120t+225}$$
$$=\sqrt{25(t-\frac{12}{5})^2+81}$$

可见，当$t=\frac{12}{5}$（秒）$=2.4$（秒）时，两个质点相距最近，

最小距离为$s_{min}=\sqrt{81}$（米）$=9$（米）。

方法二：分别以 A 或 B 为参照物，用相对速度求解。

（1）以 A 为参照物。即假设 A 不动，则 B 将作两个分运动：垂直 l 方向上的速率为 v_B 的匀速运动；沿 l 方向由 B 向 A 速率为 v_A 的匀速运动。B 相对 A 的运动是这两个分运动的合运动（图 3－22），合速度的大小为：

$$v=\sqrt{v_A^2+v_B^2}+v_B^2=5\text{（米/秒）}$$

即质点 B 相对于 A 沿 BB′作匀速运动，速度为 v=5 米/秒。显然，只有当质点 B 运动到 B′点，而 AB′⊥BB′，两个质点之间最近，最近距离为：

$$s_{min}=\overline{AB}'=l\sin\theta=l\cdot\frac{v_B}{v}=9\text{（米）}$$

质点由 B 点到 B′点所用的时间为：

$$t=\frac{l\cos\theta}{v}=\frac{15\times0.8}{5}\text{（秒）}=2.4\text{（秒）}$$

（2）以 B 点为参照物。即假设 B 不动，则 A 沿 l 以速度 v_A 向 B 运动的同时，还垂直于 l 以速度-v_B 运动（图 3-23）。A 相对于 B 的速度是 v_A、-v_B 的合速度。参考（1）的方法，可以求得相同的答案。

[例题 4]房间里离地面 H 高的 A 点有一盏灯，这盏灯可以看作是点光源。一个小球以初速度 v_0 从 A 点沿水平方向向墙壁垂直抛出，恰好落在墙角 B 处（图 3－24）。试求：小球在墙壁上的影子是如何运动的？

[分析与解]刚抛出时小球的影子在墙上 F 点，且 AF 与墙壁垂直。时刻 t 小球处于位置 P 时，它的影子在墙上 P′处。可见，在时间 t 内，影子由 F 运动到 P′点，位移 s=FP′。由 P 作 AF 的垂线，垂足为 E，则直角三角形 AEP 与直角三角形 AFP′相似；由相似三角形知识可得：

$\frac{FP'}{EP}=\frac{AF}{AE}$，即$FP'=\frac{AF}{AE}\cdot EP$

式中$FP'=s$，$EP=\frac{1}{2}gt^2$，$AE=v_0t$，$AF=v_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$，

将各值代入上式并化简，即得：

$$s=\sqrt{\frac{Hg}{2}}\cdot t$$

式中$\sqrt{\frac{Hg}{2}}$为常量。可见，小球的影子从 B 点开始向 F 作匀速运动，运

动速度 $v=\sqrt{\frac{Hg}{2}}$ 恒定不变。

也许有人对上述结果不甚理解，平抛小球在竖直方向作自由落体运动，它在墙壁上的影子怎么会作匀速运动呢？原来：小球不仅在竖直方向上作自由落体运动，而且在水平方向上作匀速运动，并且小球恰好落在墙角处。显然，如果小球没有水平方向上的匀速运动，小球也不是恰好落在墙角处，影子的运动将完全不同。还应注意，本题所研究的是平抛出去的小球与它在墙上影子的运动的相关性，这里的影子是点光源形成的，如果是垂直于墙壁的平行光产生的影子，情况又将如何呢？

可见，在研究相关运动中不同物体的运动量之间的关系时，必须仔细分析相关物体的联系方式和运动所受的限制条件。

[例题 5]长度为 l 的直杆斜靠在墙角处。某时刻起它在竖直平面里开始滑动，当下端 B 与墙角相距 x 时，B 端沿水平方向的速度为 v_B（图 3－25）。求这时杆子的上端 A 沿墙壁向下滑动的速度（v_A）多大？

[分析与解]当杆子在竖直平面里滑动时，B 端的速度沿水平方向，A 端的速度竖直向下。设 B 端与墙角相距 x 时，杆子与地面的夹角为?。将直杆两个端点的速度 v_A、v_B 沿杆子的方向和垂直于杆子的方向分解（见图 3－26）。由于杆子的长度保持不变，故杆子 A 端和 B 端沿杆子方向的分速度应该相等，即：

$$v_A\sin\theta = v_B\cos\theta$$

由此可得 $v_A = v_B \cdot \mathrm{ctg}\theta = \frac{x}{\sqrt{l^2 - x^2}} \cdot v_B$，其中 $x < l$。

在分析与解的过程中，我们应用了两个限制条件：①杆子的下端沿水平方向滑动、上端竖直向下滑动；②杆子在滑动过程中长度不变，所以 A 端和 B 端沿杆子方向上的分速度相同。

读者可以将本题与例题 1 进行比较。例题 1 中我们分析滑轮以下那段绳子的变化情况。这段绳子上端 O 的位置不变，绳子的下端 A 沿水平方向运动。通过分析，我们得出两个重要的结论：①A 端相对于 O 的运动，既有沿绳子方向的运动，又有垂直于绳子方向上的运动，A 点的运动是这两个方向上分运动的合运动；②绳上各点沿绳子方向上的运动速度不变。就是人牵引绳子的速度。

通过上述分析、比较，使我们进一步认识到：借助于模型和典型例题的分析，是学好物理的有效方法，也是一条捷径。

[例题 6]汽车在平直的公路上以速度 v_1=10 米/秒匀速行驶。在与公路相距 d=50 米的 B 点，有一个人想乘上这部汽车，当这部汽车通过与 B 点相距 l=200 米的 A 点（图 3－27）时，人即以速度 v_2=3 米/秒沿某直线奔跑。问：这个人应沿什么方向上的直线奔跑，在他到达公路时，才能恰好赶上汽车，或赶在汽车之前到达公路上某处稍等片刻而乘上汽车？

[分析与解]这是平面上的追及问题，它比直线上的追及问题显然要复杂得多。

解法一：设人沿直线 BC 奔跑，当他到达公路上的 C 点时，汽车也恰好到达 C 点（图 3－28）。设直线 BC 与直线 BA 之间的夹角为 a。由已知条件可知 AB 与公路之间夹角？的正弦值为：

$\sin\theta = \frac{d}{l} = 0.25$。本题的任务就是求a角的大小。

设人从 B 到 C 用了时间 t，在同样的时间 t 里汽车从 A 运动到 C，则 $AC=v_1t$，$BC=v_2t$，在三角形 ABC 中应用正弦定律：

$\frac{AC}{\sin a} = \frac{BC}{\sin\theta}$，即 $\frac{v_1 t}{\sin a} = \frac{v_2 t}{\sin\theta}$

得 $\sin a = \frac{v_1}{v_2}\sin\theta = \frac{v_1}{v_2}\cdot\frac{d}{l} \approx 0.8333$

查表可得α有对应的两个解：

$\alpha_1=56.5°$，$\alpha_2=123.5°$

从图 3－28 可以看出，当α=56.5°时，人与汽车恰好在 C 点相遇；当α=123.5°时，人与汽车恰好在 C′点相遇。可见，人要赶这部汽车，他奔跑的方向与 BA 之间的夹角必须满足条件：56.5°≤α≤123.5°。

如上所述，α=56.5°与α=123.5°时，人恰好能赶上汽车；而 56.5°＜α＜123.5°时，人赶到公路边可以稍等片刻后乘上汽车。

人从 B 到 C 恰好赶上汽车所用的时间为 t_1，根据正弦定律：

$$BC = \frac{\sin\theta}{\sin(180°-\alpha_1-\theta)}\cdot l$$

sin? =0.25，? ≈14.5°；sin（180°$-a_1$-?）=sin109°=0.9455；l=200 米，代入上式得：

BC≈52.9（米）。

由 $BC=v_2t_1$，可得：t_1≈17.6（秒）。

根据同样的方法可以求得，人从 B 到 C′恰好赶上汽车应需时间 t_2=24.9（秒）。

上面的解法是以地面为参照物，人与汽车都相对于地面在运动。如果改变参照物，情况将如何呢？

解法二：以汽车为参照物。即假设汽车不动，则人应沿直线 BA、以速度 v 向汽车奔跑，而 v 应该是 v_2 与 $-v_1$ 的合速度（见图 3－29 和 3－30）。

根据正弦定律：

$\frac{v_1}{\sin\alpha} = \frac{v_2}{\sin\theta}$，即 $\sin\alpha = \frac{v_1}{v_2}\cdot\sin\theta = 0.8333$

得 $\alpha_1=56.5°$（图 3－29）和 $\alpha_2=123.5°$（图 3－30）。

上述两种方法都得到相同的结果：

$$\sin a = \frac{v_1}{v_2}\cdot\frac{d}{l}$$

从题目所给的条件：v_1=10 米/秒，d=50 米，l=200 米来看，当人的运动速度 v_2=3 米/秒时,只要他的运动方向与 AB 间的夹角 a 满足关系式 56.5°≤a≤123.5°时，他肯定可以赶上并乘上汽车。

如果人的奔跑速度 v_2<2.5 米/秒，则 sina>1，本题无解。表明 v_2<2.5 米时，人无论如何都赶不上汽车。

若 v_2=2.5 米/秒，则 sina=1，a=90°，这时问题有唯一解：人必须沿垂直于 AB 的方向奔跑，在 C″点与汽车相遇（图 3－31），这时 BC″

=ABtg? =51.7（米），人以 v_2=2.5 米/秒从 B 跑到 C″需时间

$$t = \frac{51.7\text{米}}{2.5\text{米}/\text{秒}} = 20.7\text{（秒）。}$$

从解法二（假设汽车静止，以汽车为参照物）还可以看出，本题相当于：已知一个分速度（$-v_1$）的方向和大小，还知道另一个速度（v_2）的大小和合速度（v）的方向，求分速度 v_2 的方向与合速度 v 的大小。显然，这是一个比较复杂的问题。从上面分析与解的结果看，可能无解，可能有唯一解，还可能有两个解。深入研究这个典型例题的解题方法，真正弄懂由图 3－29、图 3－30 和图 3－31 所表示的解题结果，对任何一个初学物理的人来说都是十分有益的。

●思考与练习

1.已知河宽为 200 米，两岸平行，河中水流速度是 2 米/秒。一条小艇相对于静水的速度是 4 米/秒，它要横渡这条河流，求：(1) 如小艇的船头始终垂直指向对岸，过河要用多少时间？小艇在何处靠岸？(2) 若小艇要到达正对岸，它应如何行驶？过河要用多少时间？

2.如题 1，如小艇将船头指向上游且与河岸成 30°夹角，小艇过河要用多少时间？小艇在何处靠岸？

3.小轮船用 5 分钟时间横渡一条 600 米宽的大河，恰好靠上正对岸码头。已知小轮船本身的速度是 4 米/秒。求小轮船船头的指向与河水的流速。

4.汽车以 6 米/秒的速度向东匀速行驶,车上人看到的雨点竖直向下匀速运动，并测得速度为 4 米/秒。求车停止后，车上的人看到的雨点的运动方向和速度多大？

5.人骑自行车以速度 v_1=15 千米/小时向正北方向行驶,行驶中他感到风从正西方向吹来，风速 v=20 千米/小时。试求相对于地面的风速和方向。

6.汽车在平直的公路上以速度 v_1=10 米/秒匀速行驶。在与公路相距 d=50 米的 B 点，有一个人想赶乘这部汽车。当汽车经过与人相距 l=200 米的 A 点时（图 3－32），人即以 v_2=4 米/秒的速度沿直线向公路奔跑追赶汽车。问他向什么方向奔跑，追赶上汽车所需的时间最短？

7.河岸边的捕鲨站设在 A 点（图 3－33），当发现一条大鲨鱼平行于海岸线向正北方向游动到捕鲨站东南方的 B 点时，即发射一枚鱼雷式的小火箭去追杀它。已知鲨鱼游动的速度 v_1=12 米/秒，小火箭沿水面以速度 v_2=24 米/秒匀速前进。为了射中这条鲨鱼，小火箭应向什么方向发射？

8.一条走私船正以 v_1=20 千米/小时的速度向北偏东 30°的方向逃跑，当它通过 A 点时，在其正东 5 千米的 B 点我海岸截私快艇奉命前去追截（图 3－34），快艇船速为 v_2=25 千米/小时，若要在快艇航线上截住该走私船，我快艇应按什么方向航行？

9.在第 8 题中，我截私快艇从 B 点算起，经多少时间，在其航线上截住该走私船？

10.在平地上竖立一根直杆，从地面上某点，在该点与直杆所处的竖直平面里斜抛一个物体，经△t 秒该物体恰好从直杆的顶端掠过，又经过 3△t 秒落到地面上。不计空气阻力，求：(1) 杆子的高度 h；(2) 物体离地面的最大高度 H。(3) 物体的落地点到抛出点的距离是杆子到抛出点的距离的几倍？

11.在倾斜角为 a 的山坡脚下，以仰角? 向山坡上发射一枚炮弹，炮弹的初速度为 v_0，不计空气阻力，求炮弹沿山坡上的射程 s。

12.假设水从消防龙头喷射出来的初速度相等。试求在喷射仰角分别为 60°、45°和 30°的情况下，喷出的水所能达到的最大高度之比和水平射程之比。

13.如图 3－35 所示，A、B 是一条大河两岸的两个码头，相距 S=1200 米，两个码头的连线与水流方向夹角为 60°，水流的速度 v=1.9 米/秒。今有小汽艇在 A、B 间作一次往返航行，不计汽艇掉头所需的时间，共需时

间 5 分钟。已知小汽艇在 A、B 间航行时的实际航线均为连接 A、B 的直线。求小汽艇本身的速度及航行时船头的指向？

参考答案

1.（l）15米/秒，向北；（2）15米/秒，向南。2.（l）相对静止；（2）6米/秒=21.6千米/小时。3.24分钟。4.8秒。5.甲：17.5米/秒；乙：20米/秒。6.45秒。7.u=l米/秒，n=70。8.n_1=180，n_2=135。9.t=1秒。

10.$h=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{gt^2}{8}$。11.175米。12.$h=\frac{v_0^2}{2g}$。13.取$g=10$米/秒^2。

（1）d≥1.25米；（2）t=1秒，v=0；（3）s=5米，竖直向上。14.（1）20秒；（2）405秒；（3）980米。

（二）

1.（1）车上人看：自由落体；车外人看：朝列车运动方向的平抛运动。（2）车上人看：向后，斜向下的匀加速直线运动；车外人看：朝列车运动方向的平抛运动。（3）车上人看：向前，斜向下的匀加速直线运动；车外人看：朝列车运动方向的平抛运动。2.（l）100秒；正对岸；（2）100秒，正对岸下游100米处；（3）100秒，正对岸下游200米处。3.速率v≈14.4米/秒，对竖直方向向西偏斜角约56°。4.v=8.54米/秒，向东偏南20.6°。5.v=31.6米/秒，与水平方向的夹角a≈71.6°。6.处在同一条竖直直线上。第六个物体的高度，即飞机的高度为500米，第五、第四、第三、第二个物体离地面的高度分别为480米、420米、320米、180米，第一个物体在地面上。7.(1) 2000米，(2) 1800米，(3) 2200米 8.v_2=15米/秒。9.21.2米/秒，与水平方向夹角为45°。

10.$t=2\sqrt{\frac{l}{g}}$；$v_0=\frac{1}{2}\sqrt{gl}$。

（三）

1.（1）50秒，在正对岸下游100米处靠岸；（2）船头指向上游与河岸成60°角，57.8秒。2.用100秒，在正对岸上游146米处靠岸。3.船头指向上游与河岸成30°角，3.46米/秒。4.7.2米/秒，对竖直方向向东偏斜56.3°。5.v_2=25千米/小时，风向东偏北37°角。6.与BD成37°角（见图3－32）的BC方向。7.向东偏南24°19′。8.向北偏西46°11′的方向航行。9.10.7分钟（642秒）。

10.（l）$h=\frac{3}{2}g(\triangle t)^2$；（2）$H=2g(\triangle t)^2$；

（3）4倍。11.$s=2v_0^2\sin(\theta-a)\cos\theta/g\cos^2 a$。

12.$H_{60}:H_{45}:H_{30}=3:2:1$；$s_{60}:s_{45}:s_{30}=\sqrt{3}:2:\sqrt{3}$。

13.船速v=8.26米/秒；无论从A到B还是从B到A，船头均应指向上游，对直线AB的偏角均为? =11°30′。(附:从A到B,实际航速为v_1=9.05米/秒，用时间t_1=132.6秒；从B到A的实际航速为v_2=7.15米/秒，需时

间 t_2=167.8 秒。）