学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

通过模型学解题中学物理专辑

—磁场中的电流问题

BOOK

内部资料 非卖品

献·给·读·者

《通过模型学解题》（物理）丛书是围绕高中物理教材，结合中学教学实际编写的学生课外读物。本丛书突破按知识体系谋篇布局的常规，力图引导学生换一种新的角度去窥视中学物理图景，领悟分析和解决物理问题的思路。

什么叫物理模型？物理模型就是抽象化了的物理研究对象、条件或过程。物理模型可划分为实体模型与过程模型两大类。

实体模型是研究对象或条件的抽象。质点、点电荷、点光源、光滑轨道、单摆、理想气体、匀强电场、匀强磁场、核式结构的原子等，都属于实体模型。

过程模型是对物理过程的抽象。直线运动、圆周运动、带电粒子在电场与磁场中的运动、导体在磁场中的运动等等，都是过程模型。

物理模型，按其性质特征、规模大小及相互联系，可以划分为不同的层次。本丛书以过程模型为结构框架，各分册有体现第一层次模型的书名和体现第二、三层次模型的简明目录。所谓“通过模型学解题”，就是根据物理的基本性质和特征，条分缕析，剖切成各个层次的过程模型，并抓住同一模型中各类问题的共同特性，例举有代表性的实体模型，综合运用各种物理知识，各种定理、定律，运用不同的观点、方法，归纳出解决问题的一般途径和方法技巧。

本丛书在研究具体问题时，以文字演算为主，避免繁琐的数值计算，从而使解决问题的方法更具广泛性，更显得逻辑严密。

按物理模型构建丛书框架，在不同层次的模型上展示物理图景，是一种新的编写体裁，新的尝试，前无经验，谬误和不妥之处难免，敬请读者批评指正。

王 兴 桃

1994 年 2 月

磁场中的电流问题，是研究磁场对磁场中的通电导体的作用问题。

就通电导体而言，我们研究通电导线、通电的流体以及通电的线圈这三个主要的模型；致于电流，主要研究固定的电源在导体中形成的电流，也研究导体在磁场中运动或变化的磁场在闭合的回路中由于电磁感应现象而产生的感应电流。

就磁场而言，我们研究永久磁体的磁场与电流产生的磁场这样两个模型。磁场对通电导体的作用，通电导体之间的相互作用，都是通过磁场而发生的。研究磁场中的电流问题，应牢牢掌握电与磁密切联系的观点。

电流是电荷定向运动形成的，揭示磁场对通电导体作用的微观本质，能使我们深入理解电流在磁场中产生的霍耳效应，解释电磁泵与磁阀的作用原理，并计算磁场对通电流体产生的压强，以及磁场对导电流体速度的控制，从而加深电、磁紧密联系的认识。

磁场力的问题，不仅仅是力的大小的计算问题，更重要往往也是比较困难的，是力的方向的确定。与磁场力有关的方向问题，已不是一条直线或一个平面上的问题，而是三维空间中三个有关方向间的关系问题。培养、训练空间想象能力，用文字或图示准确地表达三维空间里几个方向间的关系，对初学物理的人来讲，无疑是十分重要的，特别是图示表达，它与文字表达和数学式表达相比，有直观形象、简洁明确的优点，应引起充分的重视。

一、磁场对通电导线的作用

一小段通电直导线在磁场中所受的磁场力，跟导线与磁场方向的夹角有关。

通电直导线与磁场方向平行时，所受磁场力最小，为零；当通电导线与磁场方向垂直时，所受磁场力最大，为 Bil；如果磁场方向与电流方向的夹角为θ（图 1－1），则作用力为：

$$F=Bil\sin\theta$$

式中 l 为磁场中通电直导线的长度。

对公式 $F=Bil\sin\theta$，我们可以用两个模型来理解。

1.将磁感应强度矢量 B，沿平行于电流方向与垂直于电流方向进行正交分解，平行分量为 $B_1=B\cos\theta$，垂直分量为 $B_2=B\sin\theta$（图 1－2），B_1 与电流方向平行，对电流没有作用力，电流只受垂直分量 B_2 作用，作用力 $F=B_2il=Bil\sin\theta$。

2.直导线在垂直于磁感应强度 B 的方向上的投影长度为 $l'=l\sin\theta$，l' 叫磁场中通电直导线的“有效长度”（图 1－3）。表明磁场中与磁场方向夹角为θ，长度为 l 的通电直导线所受的磁场力，与长度为 $l'=l\sin\theta$，而与磁场方向垂直的通直导线所受磁场力大小相同。

根据上述两个模型理解安培公式（$F=Bil\sin\theta$）有非常重要的实用价值。下面先阐述有效长度模型（概念）的应用。

若通电的折导线 abc（图 1－4），两段直导线的长度分别为 $ab=l_1$、$bc=l_1$，通过的电流为 i，磁场的磁感应强度为 B。ab 段与 bc 段跟磁场方向的夹角分别为 a 与β，它们所受的磁场力分别为 $F_1=Bil_1\sin a$ 与 $F_2=Bil_2\sin\beta$，F_1 与 F_2 互相平行，分别与 ab、bc 垂直，合力为：

$$F=F_1+F_2=Bi(l_1\sin a+l_2\sin\beta)$$

显然，$(l_1\sin a+l_2\sin\beta)$ 就是折线 abc 在垂直于磁场方向上的投影长度，即 abc 的有效长度。

如果通电导线是曲线 ab（图 1－5），则可以把该曲线看作是若干段折线组成的，这些折线均由平行于磁场方向和垂直于磁场方向的两小段直线构成；这样，通电曲线（ab）所受的磁场力与垂直于磁场方向、长度为 $\overline{ab'}$ 的直导线所受的磁场力大小相等，为 $F=Bi\overline{ab'}=Bil'$。$l'=\overline{ab'}$ 是通电曲线的有效长度。

通电直导线所受磁场力的方向，即安培力的方向，总是垂直于磁力线和通电直导线所在的平面，即安培力的方向既与磁力线垂直，又与通电直导线垂直，三者之间的关系服从左手定则。通电导线与磁场方向垂直时，三者彼此垂直正交；通电导线与磁场方向不垂直时，磁感应强度矢量在导线垂直方向的分量、导线、安培力三者互相垂直。

根据上述基本知识，可以分析解决一系列具体的实际问题。

●通电导线在磁场中的平衡问题

通电导线在磁场中的平衡问题要注意两个方面：一是判断通电导线所受磁场力的方向，计算磁场力的大小；二是要分析通电导线在磁场中的受力情况，研究通电导线在磁场中平衡时所受各外力之间的关系。

如果通电导线在磁场中受共点力作用而平衡，则共点力的合力一定为零；如通电导线有固定转动轴，则它在磁场中所受外力对固定转动轴的力矩代数和为零；一般情况则是磁场中的通电导线没有固定转动轴，它所受的外力又不是共点力，这时需要用一般平衡条件。

下面通过具体的例题，分析几种受力情况下的平衡条件。

[例题 1]在竖直向下、磁感应强度为 B 的匀强磁场中，两根平行的金属导轨与水平方向夹角为θ（图 1－6），有电池、滑线电阻、安培表和两根导轨串联，当质量为 m 的直导线 ab 横跨于两根导轨之上，这时电路便接通，电流由 a 向 b 通过直导线，ab 在水平方向上静止在倾斜的轨导上。调节可变电阻，使通过 ab 的电流在一定范围内发生变化，ab 仍能保持静止。经仔细观测发现：当安培表的读数渐渐增大到 i_1 时，直导线开始上滑；当安培表的读数慢慢减小到 i_2 时，直导线开始下滑。试分析，i_1、i_2 与哪些因素有关？关系是什么？（通过分析研究，推导出 i_1、i_2 的表达式来。）

[分析与解]取导线的剖面图，分析导线的受力情况。当安培表读数为 i_1 时，直导线有向上运动趋势，两根导轨对它的摩擦作用沿导轨斜向下，可以认为直导线在共点力作用下而平衡，其受力情况如图 1－7 所示。其中支持力 N、摩擦力 f 是两根导轨对直导线的共同作用。这时平衡方程为：

$$\begin{cases} N_1 - mg\cos\theta - Bi_1 l\sin\theta = 0 \\ Bi_1 l\cos\theta - mg\sin\theta - f_1 = 0 \end{cases}$$

其中 $f_1=\mu N_1=\mu(mg\cos\theta+Bi_1 l\sin\theta)$，代入上式，经化简后可得：

$$i_1=\left(\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}\right)\frac{mg}{Bl}$$

当安培表读数为 i_2 时，直导线有下滑的趋势，其受力情况如图 1－8 所示，平衡方程为：

$$\begin{cases} N_2 - mg\cos\theta - Bi_2 l\sin\theta = 0 \\ Bi_2 l\cos\theta - mg\sin\theta + f_2 = 0 \end{cases}$$

其中 $f_2=\mu N_2=\mu(mg\cos\theta+Bi_2 l\sin\theta)$，代入上式，经化简后得：代入上式，经化简后得：

可见 i_1、i_2 与导线的重量 mg、导轨的倾角θ、两根导轨间的距离 l、导轨与导线之间的摩擦系数μ、磁场的磁感应强度 B 有关。不难看出，只要通过导线的电流（i）在 i_1 与 i_2 之间，即

$$\left(\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}\right)\frac{mg}{Bl}\le i\le\left(\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}\right)\frac{mg}{Bl}$$

导线就能静止在倾斜导轨上不动。当 $i=\frac{mg}{Bl}tg\theta$ 时，导线与导轨之间没有摩擦作用。

例题 1 的解题方法和结论，与斜面上的物体在水平力 F 作用下的平衡问题是相同的。

倾角为θ的斜面上，质量为 m 的物体，在水平力 F 作用下处于静止状态（图 1－9），若物体与斜面之间的摩擦系数为μ，则水平力 F 必须满足的条件是：

$$\left(\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}\right)mg\leq F\leq\left(\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}\right)mg.$$

在例题 1 中，磁场对通电直导线的安培力（F=Bil）与水平力的作用相当。可见，这两个形式上完全不同的问题，确具有相同的力学模型。

[例题 2]“电流天平”是根据通电导体在磁场中受磁场力作用原理制成的一种灵敏的测量仪器。它可以测出通电导体在匀强磁场中所受磁场力的大小，进一步还可求得匀强磁场的磁感应强度。

“电流天平”的原理图如图 1－10 所示。它的平衡臂能绕水平轴 oo'自由转动。平衡臂的右侧，沿边缘为］形的导线 oabo'，它们处在通电的直长螺线管中，当螺线管中有电流 I 通过时，就有沿螺线管轴线方向水平向左的匀强磁场 B。把平衡臂调成水平状态，如这时有电流 i 通过］形导线，它的与螺线管轴线平行的两条边由于与磁场平行而不受磁场力作用，只有短边 ab 受竖直向下的磁场力作用；如 ab 边长为 l，其所受磁场力的大小为 F=Bil，则平衡臂将失去平衡。用砝码调节使平衡臂恢复平衡状态，平衡臂的左右两臂长度相等，则 ab 边所受的磁场力与平衡砝码的重量相等，即 ab 边所受的磁场力大小为 F=mg，m 是平衡砝码的质量。又 F=Bil，电流 i 与长度 ab 以及砝码的质量均是可以测量的,这样就可以求得螺线管中沿轴线方向磁场的磁感应强度：

$$B=\frac{mg}{iab}$$

[例题 3]如图 1－11 所示，粗细均匀的直导线 ab 两端悬挂在两根相同的弹簧下边，ab 恰好处在水平位置。ab 的质量为 m=10 克，ab 的长度 l=60 厘米。水平方向与 ab 垂直的磁场的磁感应强度 B=0.4 特斯拉。（1）要使两根弹簧都处于自然状态（即不被拉长，也不被压缩），ab 中应沿什么方向，通过的电流强度应多大？（2）如导线中由 a 到 b 方向通过 0.2 安培的电流时，两根弹簧被拉长△x＝1 毫米；当沿由 b 到 a 的方向通过 0.2 安培的电流时，两根弹簧被拉长多少？（取 $g=9.6$ 米/秒 ^{2}）

[分析与解]（1）弹簧处于自然状态，则通电直导线 ab 应受向上的磁场力作用，且磁场力与导线 ab 的重力相等，即 Bil=mg。

根据左手定则，电流应由 a 向 b，电流强度的大小为 $i=\frac{mg}{Bl}=\frac{0.01\times9.6}{0.4\times0.6}=0.4i$（安培）。

（2）由 a 向 b 通过 0.2 安培的电流时，ab 受竖直向下的重力（mg）和向上的磁场力，两根被拉伸的弹簧对 ab 的拉力也是竖直向上的，这时 ab 的平衡方程为：

$$mg=Bil+2k\triangle x$$

由此式可得弹簧的倔强系数：

$$k=\frac{mg-Bil}{2\Delta x}=\frac{0.01\times 9.6-0.4\times 0.2\times 0.6}{2\times 0.001}$$

$$=24\text{（牛/米）}$$

当由 b 向 a 通过 0.2 安培电流时，磁场力方向竖直向下，这时的平衡方程为：

$$mg+Bil=2k\triangle x'$$

由此可得，两根弹簧这时被拉伸的长度为

$$\Delta x'=\frac{mg+Bil}{2k}=\frac{0.01\times 9.6+0.4\times 0.2\times 0.6}{2\times 24}$$

$$==0.003\text{（米）}=3\text{（毫米）}$$

[例题 4]在北京地区，一根东西方向的水平电线长 20 米，自西向东地通过 10 安培的电流；已知北京地区地磁场的磁倾角约为 57°，磁偏角较小，可以不考虑，地磁场磁感应强度的水平分量为 $B_{/\!/}=2.89\times10^{-5}$ 特斯拉，问地磁场对该通电导线的作用力多大？作用力的方向如何？

[分析与解]图 1－12 是地球通过自转轴的剖面图。地磁场的 N 极在地球南极附近，地磁场的 S 极在地球的北极附近。地球表面处的地磁场的磁力线是由南向北的（不考虑磁偏角）。在赤道上空 A 点，地磁场沿水平方向向北，磁倾角为零；北半球上空的 P 点处，磁力线的方向也是由南向北，但同时相对水平方向向下倾斜 θ 角，这就是磁倾角。

图 1-13 是北京地区上空垂直于通电导线方向上的剖面图,导线中的电流自西向东，表明纸面内为西，纸面外为东。由图中可以看出，北京地区地磁场的磁感应强度 B 是由南向北与水平方向夹角 θ=57°，斜向下方的。由 $B_{/\!/}=B\cos\theta$，则可得：

$$B=\frac{B_{/\!/}}{\cos 57°}$$

通电导线所受磁场力（F）的方向，由左手定则判定，自南向北与水平方向夹角 a=90°-57°＝23°（斜向上），20 米长的通电导线所受磁场力为：

$$F=Bil=\frac{B_{/\!/}}{\cos 57°}=1.1\times10^{-2}\text{（牛顿）}$$

还有另一种解题方法。它的思路是：第一步，分别计算出地磁场的水平分量（$B_{/\!/}$）和竖直分量（$B_{\perp}$）对通电导线的作用力；第二步，求这两个分力的合力，便得地磁场对通电导线的作用力图 1-14）。

地磁场的水平分量对通电直导线的作用力竖直向上，大小为：

$$F_1=B_{/\!/}il$$

地磁场的竖直分量（竖直向下）对通电直导线的作用力沿水平方向指向正北方，大小为：

$$F_2=B_{\perp}il=(B_{/\!/}tg\theta)il$$

地磁场对通电直导线的作用力，是 F_1 与 F_2 的合力，合力的大小为 F，其方向与水平面夹角为 a，根据图 1－14，可知：

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=B_{/\!/}il\sqrt{1+tg^2\theta}=B_{/\!/}il/\cos\theta\text{）}$$

$$tg\alpha=\frac{F_1}{F_2}=ctg\theta$$

即α+θ=90°，表明 F、B、i 三者彼此垂直。

[例题 5]在图 1－15 中，M、N 是同一水平面上的两个金属接触面，它们与电源、安培表、电键、滑线变阻器串联成为闭合电路的一部分，该装置处在水平方向的匀强磁场中，磁场的磁感应强度 B=0.6 特斯拉。一根边长分别为 80 厘米和 60 厘米的直角金属折导线 aob 的两端，分别放在 M 和 N 上，折导线处于竖直面中，两边都与磁场垂直。闭合电键，调节滑线电阻，使安培表的读数 i=2 安培。

（1）求磁场对通电的折导线的作用力。

（2）再调滑线电阻，当安培表的读数为 2.2 安培时，电路突然断开，求折导线的重量。

[分析与解]如图所示，电键闭合后，电流由 a 经 o 到 b 通过折导线，ao 边所受磁场力 F_1 与 ao 垂直，与竖直方向夹角为α，bo 边所受磁场力 F_2 与 bo 边垂直，与竖直方向夹角为β；显然，α+β=90°（图 1－16）。

根据安培公式，F_1、F_2 的大小分别为：

$$F_1=B\overline{ao}=0.6\times2\times0.8\text{（牛顿）}=0.96\text{（牛顿）}$$

$$F_2=B\overline{bo}=0.6\times2\times0.6\text{（牛顿）}=0.72\text{（牛顿）}$$

由于 F_1 与 F_2 垂直，它们的合力，也就是磁场对通过 2 安培电流的折导线的作用力 F 是竖直向上的，合力的大小为：

$$F=\sqrt{F_1^2+F_2^2}=\sqrt{0.96^2+0.72^2}\text{（牛顿）}=1.2\text{（牛顿）}$$

从图 1－16 可以看出 F_1、F_2 的反向延长线相交于 ab 连线的中点。ab 间的直线距离为 100 厘米，如有 100 厘米长的直导线在 ab 方向上通过 2 安培的电流，所受的磁场力竖直向上，大小为：

$$F'=Bi\overline{ab}=0．6\times2\times1\text{（牛顿）}=1.2\text{（牛顿）}$$

可见,水平方向上 100 厘米长的直导线 ab,与 140 厘米长的折导线 aob 所受的磁场力相同。

根据上述原理，当折导线通过 2.2 安培的电流时，所受磁场力为：$F'=Bi\overline{ab}=0．6\times2\times1\text{（牛顿）}=1.32\text{（牛顿）}$。这就是折导线aob的重量。

应用有效长度的模型，分析、计算曲线导体在磁场中所受的磁场力，既简单又明确，在分析、思考问题时，可以广泛应用。有效长度概念的引用，是基于等效原理，是在慎密分析物理过程的基础上提出的一种简化模型。任何一种模型的提出，首先必须与实际作用过程具有相同的效果，即等效；其次还应简单明确，便于掌握，且具有普遍意义。

就例题 5 来看，我们可以改变放置在接触面上折导线的形状（如图 1-17），并就一般情况证明，折导线 aob 通电时所受的磁场力，与 a、b 间的直导线通电时所受磁场力相同。

设电流为i，方向由a经o向b流动。则ao段所受磁场力为$F_1=Bi\overline{ao}$，bo段所受磁场力为$F_2=Bi\overline{bo}$，方向如图所示。

F_1的水平分量为$Bi\overline{ao}\sin\alpha$，方向向左；$F_2$的水平分量为$Bi\overline{bo}\sin\alpha$（180°-β），方向向右；由于$\overline{ao}\sin\alpha=\overline{bo}\sin\alpha$（180°-β），所以，水平分量互相抵消，通电折导线所受磁场力由竖直分量决定。

F_1的竖直分量方向向上，大小为$Bi\overline{ao}\cos\alpha$；$F_2$的竖直分量方向向下，大小为$Bi\overline{bo}\cos\alpha$（180°-β）；通电折导线aob所受磁场的合力为：

$$
\begin{aligned}
F &= Bi\overline{ao}\cos\alpha - Bi\overline{bo}\cos(180°-\beta) \\
&= Bi[\overline{ao}\cos a - \overline{bo}\cos(180°-\beta)] \\
&= Bi\overline{ab}
\end{aligned}
$$

可见，通电的折导线 aob 所受的磁场力，与 a、b 间的通电直导线所受磁场力相同。这种等效长度的概念可推广到一般曲线而被广泛应用。

●通电导线在磁场中的运动问题

通电导线在磁场力作用下如果发生运动，往往会产生电磁感应现象，产生的感应电动势使导线中的电流发生变化，从而改变通电导线在磁场中的受力情况，使其运动状态发生变化。可见，这类问题与电磁感应规律密切相关。这里我们只研究两类问题：(1) 分析研究通电导线在磁场力作用下的运动趋势、运动方向，而不涉及电磁感应或不需要分析电磁感应作用的问题；(2) 分析研究通电导线在磁场力作用下运动时的瞬间受力情况，以及运动中的动态平衡问题。本丛书的另一分册，《导体在磁场中的运动问题》将详尽讨论与电磁感应有关的问题。

讨论通电导线在磁场力作用下的运动趋势和运动方向问题，除判断磁场力的方向外，还要全面分析通电导线的受力情况。通电导线的运动状态是由它所受的重力、弹力、摩擦力以及安培力共同决定的。安培力作为一个独立的力不仅可以改变通电导线的运动状态，而且还能影响、改变通电导线所受的弹力和摩擦力，从而使其所受的合外力发生变化。可见，通电导线在磁场中的受力情况，要比纯力学问题复杂得多。就我们所要研究的两类问题而言，它们的难点分别是：(1) 通电导线在磁场力作用下发生运动后，由于其位置变化，所受磁场力也将发生变化；(2) 通电导线在磁场中运动时，电磁感应对导体中的电流、导体的受力情况产生影响。显而易见，难点的核心是通电导线运动中的受力情况分析。抓住这个核心，任何问题便可迎刃而解。

[例题 1]如图 1－18，通电直导线 ab 能自由活动，蹄形磁铁是固定不动的，试分析判断 ab 将如何运动？

[分析与解]首先要弄清楚蹄形磁铁磁场的磁力线在通电导线附近的分布情况（图 1-19）。

在通电导线上靠近 N 极的 P 点，将磁感应强度 B 分解为垂直分量与平行分量（$B_{\perp}$、$B_{/\!/}$），由于安培力只与垂直分量有关，应用左手定则可知，P 点附近通电导线所受的磁场力是垂直纸面向外的。

在通电导线上靠近 S 极的 Q 点，将该点的磁感应强度矢量分解为垂直分量与平行分量，由图中可以清楚看出，Q 点的垂直分量与 P 点的垂直分量方向相反，用左手定则判断，Q 点附近通电导线所受磁场力是垂直于纸面向里的。所以，通电导线 ab 将转动，a 端向外，b 端向里。当 ab 转过一个角度时，由图 1－20 可以看出，它将受到一个竖直向下的磁场力。因此，通电导线 ab 的运动，从上向下看，一边逆时针转动，一边向下运动，最终将进入蹄形磁铁的两极之间。

[例题 2]一根导线弯成图 1－21 所示的冂形，两端弯曲的一小段分别插在两个水银槽中。冂形导线的质量 m=10 克，中间一段的长度 l=20 厘米，电源、电键通过槽中的水银与冂形导线组成闭合电路，整个装置处在水平方向的匀强磁场中。磁场方向与冂形导线垂直，磁感应强度 B＝0.1 特斯拉。当电键接通后，冂 形导线便竖直向上跳起来，若它跳起的高度 h=30 厘米，试求通过导线的电量多大？

[分析与解]电键接通后，冂形导线中的电流从左向右流过，磁场作用于中间 20 厘米长的一段通电导线的安培力竖直向上，使冂形导线竖直向上跳起。

设电键闭合后，从电路接通到冂形导线跳离水银面而使电路切断的时间间隔为△t，在△t 时间内，如通过导线的电量为△Q，则流过冂形导线的电流强度为$i=\frac{\Delta Q}{\Delta t}$；在△t这段时间里，作用于形导线竖直向上的安培力为 Bil，竖直向下的重力为 mg，它们的合力 F=Bil-mg，方向是竖直向上的。在△t 时间里，合力的冲量为 F△t=（Bil- mg）△t；如冂形导线跳离水银时的即时速度为 v，则导线在△t 时间内动量的增加量（方向向上）为mv，根据动量定理可得：（Bil - mg）△t = mv，将$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=i$代入并化简，得$\triangle Q=\frac{m}{Bl}$（v + g△t）。

Π形导线跳离水银后只有重力做功，机械能守恒：$\frac{1}{2}mv^2=mgh$，故知$v=\sqrt{2gh}$，式中h是Π形导线跳离水银的高度。所以通过导线的电量为：

$$\Delta Q=\frac{m}{Bl}(\sqrt{2gh}+g\Delta t)$$

一般情况下，△t均较小，h较大，v〉〉g△t，即$\sqrt{2gh}\rangle\rangle g\Delta t$，这样，通过导线的电量$\triangle Q=\frac{m\sqrt{2gh}}{Bl}$。就本题而言，上述条件也是满足的，故通过Π形导线的电量为：

$$\Delta Q=\frac{m}{Bl}\sqrt{2gh}=\frac{0.01}{0.1\times0.2}\sqrt{2\times9.8\times0.3}=1.2\ (\text{库仑})$$

［例题 3］如图 1－22，水平面中的平行金属导轨相距 l=0.5 米，竖直向下的匀强磁场穿过导轨所处的平面，磁感应强度 B=0.8 特斯拉；电动势ε=1.5 伏，内电阻 r=0.2 欧的电池与两根导轨的左端相连；横跨于导轨之上的直导线 ab 质量 m=0.1 千克，电阻 R=0.8 欧；导轨的电阻与摩擦作用均可不计。求（1）电键接通时，直导线开始运动的瞬时加速度多大？（2）如果导轨足够长，磁场范围足够大，直导线最终将如何运动？

〔分析与解〕（1）电键接通后的瞬间，直导线 ab 还处于静止状态，这时电流从a流向b，电流强度为$i_0=\frac{\varepsilon}{R+r}$，直导线受到磁场力为$F=Bj_0l$，方向向右。由于导轨光滑，直导线不受摩擦力作用，故瞬时加速度由安培力决定，大小为：

$$a=\frac{F}{m}=\frac{Bi_0l}{m}=\frac{B\varepsilon l}{(R+r)m}=6(\text{米}/\text{秒}^2)$$

（2）直导线运动起来以后，由于切割磁力线而产生感应电动势，根据右手定则，感应电动势的方向，在回路中与电池的电动势方向相反，故电流将减小，直导线所受磁场力也随着减小，所以直导线由静止开始，速度不断增大，而加速度不断减小，直到加速度减小到零时，速度达到最大。直导线的速度达到最大时，感应电动势的大小正好与电池的电动势相等，方向相反，电路中电流为零，导线不受磁场力作用，直导线凭惯性作匀速直线运动。这就是直导线的最终运动状态。

设直导线最终的运动速度为 v_m，根据上面的分析，导线以 v_m 运动产生

的感应电动势与电池的电动势相等：$Blv_m=\varepsilon$，由此可得：

$$v_m=\frac{\varepsilon}{Bl}=3.75\text{（米/秒）}$$

关于例题3，有下列几个问题值得深入考虑。（1）如果考虑导轨对直导线的摩擦作用，直导线的运动性质仍然是加速度不断减小的加速运动。加速度减小到零时，速度达到最大，这时直导线所受安培力与导轨对它的摩擦力大小相等，方向相反。直导线最终作匀速直线运动的速度将小于3.75 米／秒。（2）直导线最终作匀速直线运动的动能，是磁场力（安培力）做功的结果。安培力对通电直导线做正功，如存在摩擦力，则摩擦力做负功，通电直导线动能的增量，等于外力功的代数和。对整个系统来讲，能量来自于电池。电池发出的能量，一部分消耗在电路中，转化为热能，其余的能量则通过磁场与电流的相互作用，转化为直导线的动能和通过摩擦作用转化为热能。整个物理过程，一定是遵守能量转化与守恒定律的。

[例题4]如图1－23所示，在竖直向上的匀强磁场（B）中，水平放置的平行导轨相距 l，其间串接电动势为ε、内电阻为 r 的电池组；质量为 m 电阻为 R 的直导线 ab，横跨于平行导轨上，它的中点通过水平细线跨过光滑的定滑轮与质量为 m' 的砝码相连。不考虑导轨的电阻与摩擦作用，滑轮的质量与细线的质量也不考虑。在电键闭合的同时，将系统由静止释放，求：（1）初始时刻，直导线与砝码的瞬时加速度多大？（2）如导轨足够长，磁场范围足够大，直导线与砝码能达到的最大速度多大？（3）在直导线、砝码以最大速度运动时，电池发出的功率多大？电池发出的电能转化为什么能量？

[分析与解]（1）电键闭合后，电路中最初的电流强度为$i_0=\frac{\varepsilon}{R+r}$，直导线ab受到的安培力水平向左，大小为$F_0=Bi_0l$。

设砝码的质量 m' 较小，它的重量 m'g 小于安培力 $F_0=Bi_0l$，则直导线有向左的加速度，砝码有向上的加速度，它们的加速度相等，设为 a，如这时连接直导线与砝码的细线的张力为 T，对直导线来讲，它的运动方程为：

$$\frac{B\varepsilon l}{R+r}-T=ma$$

砝码的运动方程为：

$$T-m'g=m'a$$

两式相加，经化简，可得加速度为：

$$a=\frac{B\varepsilon l}{(R+r)(m+m')}-(\frac{m'}{m+m'})g$$

（2）直导线向左运动时，切割磁力线产生的感应电动势在回路中与电池的电动势ε方向相反，电流将减小，直导线所受的向左的安培力也随着减小，系统加速度也逐渐减小，当加速度为零时，系统的速度达到最大值v_m。这时细线中的张力 $T=m'g$，通过直导线的电流强度为：

$$i=\frac{\varepsilon-Blv_m}{R+r}$$

对直导线来讲，这时它在水平方向上所受的合外力为零，即：

$$B\left(\frac{\varepsilon - Blv_m}{R + r}\right)l = m'g$$

由此可得最大速度为：

$$v_m = \frac{\varepsilon}{Bl} - \frac{m'g(R + r)}{B^2l^2}$$

（3）直导线以速度 v_m 运动时，电路中电流强度为：

$$i = \frac{\varepsilon - Blv_m}{R + r} = \frac{m'g}{Bl}$$

这时，电池发出的功率为：

$$P = i\varepsilon = \frac{m'g\varepsilon}{Bl}$$

电路中电流通过电阻转化为内能的功率为：

$$P_1 = i^2(R + r) = (\frac{m'g}{Bl})^2(R + r)$$

系统匀速运动，动能不变，砝码向上运动，速度为 v_m，其重力势能每秒的增加量为：

$$P_2 = m'gv_m = m'g\left((\frac{\varepsilon}{Bl} - \frac{m'g(R + r)}{B^2l^2}\right)$$

$$= \frac{m'g\varepsilon}{Bl} - (\frac{m'g}{Bl})^2(R + r)$$

根据上面计算的结果，可以看出 $P=P_1+P_2$，即电池发出的功率等于电路中内能的转化率与砝码重力势能的增加率之和。表明该物理过程是遵守能量转化与守恒定律的。

[例题 5]如图 1－24，在竖直放置的平行金属导轨上，套有一根水平的金属杆 ab，金属杆 ab 的两端能上下自由滑动，整个装置处在匀强磁场中，磁场方向与轨道面垂直。已知 ab 的长度 l=0.2 米，质量 m=0.02 千克，电池电动势 ε=1.5 伏，内阻 r=0.3 欧，定值电阻 R_1=1.2 欧，R_2=1 欧，导轨和金属杆的电阻均可不计。（1）当单刀双掷开关 K 掷向 1 时，金属杆恰好平衡，求磁场的磁感应强度。（2）把 K 掷向 2，金属杆由静止开始向下作加速运动，试推导金属杆下落运动中加速度随速度变化的表达式。（3）如导轨足够长，磁场范围足够大，求金属杆下落的最大速度。

[分析与解]（1）金属杆平衡时，所受安培力竖直向上，大小与其重力相等：

$$B(\frac{\varepsilon}{R_1 + r})l = mg$$

$$B = \frac{mg(R_1 + r)}{\varepsilon l} = 1$$（特斯拉）

（2）K 投向 2 时，ab 向下作加速运动。当 ab 的速度为 v 时，感应电动势为 Blv，感应电流 i=Blv／R_2。电流方向由 a 向 b，金属杆受重力与安培力作用，向下的加速度为：

$$a=\frac{mg-B(\frac{Blv}{R_2})l}{m}$$
$$=g-(\frac{B^2l^2}{mR^2})v$$

表明加速度随着速度增大而减小。开始时 v=0，加速度最大：a_m=g。

（3）当加速度减小到零时，金属杆的速度最大：

$$g-(\frac{B^2L^2}{mR_2})v_m=0$$

$$v_m=\frac{mgR_2}{B^2l^2}=5\text{（米／秒）}$$

[例题 6]如图 1－25 所示，两根光滑的曲线金属导轨平行放置，直线部分处在同一水平面中，金属杆 cd 横跨在两根导轨上，静止在水平面中。另一根金属杆 ab 从弧形轨道上与水平面相距 h 高的地方，由静止开始下滑，进入轨道的水平部分后，在竖直向上的匀强磁场 B 中运动。设轨道的直线部分足够长，匀强磁场分布在直线轨道所处的整个空间里。又 ab 与 cd 杆的质量相等。试分析金属杆 ab 与 cd 的运动过程。

[分析与解]由于轨道是光滑的,金属杆 ab 从 h 高处下滑过程机械能守恒，设质量为 m，它进入水平轨道时速度为 v，则：

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2 \qquad v=\sqrt{2gh}.$$

ab 以速度 v 进入匀强磁场后切割磁力线，产生感生电动势，两根金属杆与导轨构成的闭合回路中便有感应电流通过；ab 中的电流由 b 向 a，cd 中的电流由 c 向 d；有电流通过时，磁场对它们就有作用力 F=Bil；通过 ab 与 cd 的电流强度相等，方向相反，处在同一匀强磁场中，导线的长度也相等，所以 ab 与 cd 所受磁场力大小相等，方向相反（图 1－26）。

在磁场力作用下，ab 作减速运动，cd 作加速运动，由于磁场力相等，经相同时间，ab 动量的减小量与 cd 动量的增加量相等，即 ab 与 cd 的动量是守恒的。当 ab 与 cd 的速度相等时，感应电流消失，ab 与 cd 以相同的速度向右作匀速直线运动，这时的速度 v’可由动量守恒定律求得：

$$vm=(m+m)v'$$

$$v'=\frac{v}{2}=\frac{\sqrt{2gh}}{2}=\sqrt{\frac{gh}{2}}$$

ab 与 cd 以相同的速度作匀速直线运动时，总动能为 $E'=2\times\frac{1}{2}mv'^2=\frac{mgh}{2}$。系统原来的能量，即系统的总能量是 mgh，可见 ab进入磁场后损失的机械能，即转化为内能的能量是$\frac{mgh}{2}=\frac{mgh}{2}$。

从上述分析可以看出，ab 进入磁场后，ab 与 cd 的运动过程是复杂的：由于 ab 切割磁力线产生感应电流，导致磁场对 ab、cd 的作用，从而改变 ab 与 cd 的运动状态，直至最后 ab 与 cd 均达到新的平衡状态（匀速直线运动）。

ab 与 cd 变化，是从分析它们的受力情况入手，根据动量的变化等于

冲量的原理，得到系统动量守恒的结论，再根据能量转化与守恒定律，整个物理过程便一目了然。

●通电导线之间的相互作用问题

通电导线在其周围都要产生磁场，这是丹麦物理学家奥斯特最早发现的重要物理现象。这一发现把电现象与滋现象紧密联系在一起，进而揭示了磁现象的电本质。

通电直导线周围的磁场，即直线电流的磁场的磁力线，是一些以导线上各点为圆心的同心圆，这些同心圆都处在与导线垂直的平面里，磁力线的方向与电流方向的关系用安培定则（又叫右手螺旋定则）判定。磁场的磁感应强度的大小跟电流强度 i 成正比，跟离开导线的距离 r 成反比：

$$B = k\frac{i}{r}$$

k 是比例恒量。在国际单位制中，$k=2.0\times10^{-7}$ 牛/安 ^{2}。

通电导线之间的相互作用，是电流和电流之间的作用。这种相互作用最典型的模型是平行的通电直导线之间的相互作用和互相垂直的两根通电直导线之间的相互作用。

模型一：平行的直导线，当通以同方向的电流时，它们相互吸引；当通以反方向的电流时，则互相排斥（如图 1-27 和图 1-28）。

模型二：互相垂直的导线，当其中通过电流时，便有相互作用的磁场力发生，磁场力的作用使两根通电导线有发生转动、吸引而靠拢的趋势，直至两根导线中的电流按同一方向流动而吸合在一起。

图 1-29 分析研究互相垂直的 a、b 两根直导线在通电时的相互作用。b 中的电流自下而上，a 中的电流从左向右。图中画出了与 b 垂直的一个平面里的两条磁力线，导线 a 处在这个平面里。现研究直导线 a 上 O、P、Q、三点的受力情况。

在 O 点，导线 a 中的电流方向与 b 中电流的磁场方向平行，故 O 点不受磁场力作用；P 点的磁场方向沿大圆的切线方向，将 P 点的磁感应强度矢量 B 分解为平行于 a 的平行分量与垂直于 a 的垂直分量，根据左手定则，P 点所受磁场力竖直向下。用同样的分析方法，可以判断 Q 点的受力方向竖直向上。这样，如果导线 b 不动，则导线 a 将转动，运动的趋势是使 a 与 b 平行并互相靠拢。如果 a、b 均可以自由运动，则 a、b 将同时转动，并互相吸引而靠拢，直至两根导线吸合在一起。电流在两根导线中向同一方向流动。

弄懂上述两个基本模型的作用原理，准确判断相互作用的运动趋势，对分析解决实际问题是十分有用的。

[例题 1]一根螺旋弹簧悬挂在支架上，下端恰好可以插入水银槽中。按图 1-30 所示方法把电流、电键、弹簧通过水银组成一个闭合电路。试问电键闭合后，将观察到什么现象？

[分析与解]由图中可知，电键闭合后，电源、弹簧通过水银、电键构成闭合电路。弹簧每圈中的电流同向、平行，互相吸引，弹簧收缩，下端离开水银，电路断开；失去电流后弹簧恢复原长，下端再次插入水银中，电路再次接通，弹簧又一次收缩……，整个循环过程可以表达为：电路接通——弹簧收缩——电路断开——弹簧伸长——电路接通……

[例题 2]图 1-31 中的环形线框能以竖直方向的一条直径为轴自由转动，其中有顺时针方向的电流 i 流过。一根直长导线穿过环形线框，在与

线框面垂直的位置上固定不动。当直长导线中通以图示方向的电流 I 时，环形线框将如何运动？试就直长导线在图示的 0、0_1、0_2 三个位置上垂直于线框面的情况加以讨论。

[分析与解]（1）当直长导线通过环心垂直于线框面时，直长导线中电流（I）产生的磁场的磁力线与环形导线平行，磁场对环形电流无作用，这时环形线框将静止在原位置上不动。

（2）如直长导线在环心 0 正上方的 0_2 点与环面垂直，当其中通以电流 I 时，它的磁力线如图 1-32 中的虚线所示。在转动轴左侧的 a、b 点处，圆环导线上所受的磁场力均垂直于环面向外，在转动轴右边的 c、d 点处，圆环导线上所受的磁场力均垂直于环面向里。所以环形线框的左边向外、右边向里转动。

（3）如果直长导线在环心 0 正下方的 0_2 与环面垂直，当其中通过电流 I 时，环的左边所受磁场力均垂直环面向里，而环的右边所受磁场力均垂直于环面向外（图 1-33）。这时环的转动情况与（2）恰好相反。

本题还可以直接用前述的模型二加以判断。当直长导线在环心 0 的正上方 0_1 点处垂直穿过环面时,圆环的最高点 a 处与通电的直长导线最近(图 1-34），相距最近的这两段导线中的电流互相垂直，相互作用的结果，使两段导线中的电流按相同的方向流动，直导线不动，所以圆环将转动，左边向外，右边向里。

当直长导线在环心 0 的正下方 0_2 点处垂直穿过环面时，圆环最低点 b 处与通电直导线距离最近（图 1-35），相距最近的地方，两段导线中电流互相垂直，作用的结果是圆环的左边向里、右边向外转动。

当用模型一或模型二判断通电导线相互作用力的方向，或相互作用而引起的运动趋势时，需要注意两点，一是要根据两根通电导线中距离最近的两段电流来分析，二是要明白通电导线的作用是相互作用，符合牛顿第三定律。

［例题 3］两个半径略有差别的环形导线线框，环心 0 重合而互相垂直放置（如图 1-36 所示），两圆环面相交于直线 ab，较大的圆环 I 处在竖直位置，较小的圆环 II 处在水平位置上。若按图示的方向通以电流 i_1 和 i_2，且两圆环可以自由运动，则它们将如何运动？

[分析与解]两环形通电线框在 a、b 处相距最近，这两处的导线可以看作是互相垂直的。根据模型二，互相垂直的通电导线间的相互作用，使这两段通电导线互相吸引、靠拢，最终这两段通电导线按电流同方向流动而吸合在一起。由图可知，这两个通电环将以 ab 为轴转动，最终两环处在同一平面里，两环中的电流方向按同一方向流动。

[例题 4]如图 1-37 所示，无限长直导线中通过电流 I_1=20 安培，矩形线框 abcd 与直导线处在同一平面中，ab 边与直导线相距 5 厘米，线框的边长 ab=cd=l=40 厘米，bc=ad=l’=20 厘米，线框的匝数 n=10，组成线框的导线中通过的电流强度 I_2=10 安培。求载流的长直导线的磁场对通电线框的作用力。

[分析与解]直线电流的磁场与线框所处的平面垂直指向纸内，bc 边和 ad 边所受的磁场力大小相等，方向相反，互相抵消。

直线电流在 ab 边所处的位置上产生的磁场的磁感应强度为：

$$B_1 = k\frac{I_1}{r_1} = 2.0\times10^{-7}\times\frac{20}{0.05}$$ （特斯拉）

= 8.0×10-15（特斯拉）

ab 边所受磁场力的方向与 ab 垂直，指向右方，磁场力的大小为：

$F_1=nB_1I_2l=3.2\times10^{-3}$（牛顿）

直线电流在 cd 边所处的位置上产生的磁场的磁感应强度为：

$$B_2 = k\frac{I_1}{I_2} = 1.6\times10^{-5}$$(特斯拉)

cd 边所受的磁场力方向向左，大小为：

$F_2=nB_1I_2l=0.64\times10^{-3}$（牛顿）

F_1 与 F_2 的方向相反，线框所受的磁场力为 F_1 与 F_2 的合力，方向向右，合力的大小为：

$F=F_1-F_2=2.56\times10^{-3}$（牛顿）

合力 F 实际上是通电的直导线与通电线框之间的相互作用，根据牛顿第三定律，通电的线框对通电的直导线有向左的作用力 F’，F’与 F 大小相等、方向相反。

在不需要计算作用力的大小时，可以根据通电的平行直导线之间相互作用的模型，分别判断直导线与线框的 ab 边和 cd 边的相互作用。直导线与 ab 边平行，通过反向电流，相互排斥；而直导线与 cd 边平行，通过同向电流，相互吸引；排斥力大于吸引力，合作用自然为相互排斥。

●安培力的微观本质（霍耳效应原理）

电流是带电粒子运动形成的，磁场对通电导线的作用力，自然会让人们想起磁场对运动的带电粒子（电荷）的作用力。

如导线材料单位体积里含有参与导电的带电粒子数为 n，每个带电粒子的带电量是 q，在电场力的作用下，带电粒子定向运动的平均速率为 v，则横截面积为 S 的导线中通过的电流强度为 I 时，必存在关系式：

$$I = nqSv$$

如有匀强磁场垂直于该通电导线，且磁场中导线的长度为 l，则该导线所受的磁场力为：

$$F=BIl=(nSl)Bqv$$

式中 nSl 是处在磁场中参与导电的带电粒子的总数（N=nSl），可见 F=N（Bqv），即宏观力 F 是 N 个同方向的微观力 f=Bqv 的合力。f=Bq 就是带电量为 q 的带电粒子以速度 v 垂直于磁感应强度为 B 的磁场时所受的磁场力，又叫洛仑兹力。

引出洛仑兹力的概念不仅可以解释安培力的微观本质，更深刻地理解磁场对通电导线的作用力，而且还可以解释磁场中通电导体的另一宏观现象——霍耳效应。

如磁场中的通电导体是厚度为 d、宽度为 c、长度为 l 的金属薄片，金属薄片按图 1-38 所示的方法放置在 O-xyz 坐标系中，整个薄片都处于沿 Ox 轴正方向的磁感应强度为 B 的匀强磁场中；若有电流强度为 i 的电流沿 Oz 轴的正方向通过，则该导体受磁场的作用力方向为 Oy 轴的正方向，磁场力的大小为：F=Bil。

电流是带电粒子运动而形成的，在金属导体中定向运动的是自由电子，电子带负电，电流的方向规定为正电荷的运动方向。可见，在上述金属薄片中自由电子的运动方向与 Oz 轴的正方向相反,它所受的磁场力的方向，即安培力的方向，是与 Oy 轴的正方向相同的。因此自由电子在沿 Oz 轴的反方向运动的过程中要向 Oy 轴的正方向偏转,结果自由电子在金属薄片的 b 侧聚集，使侧面 b 带负电，而另一个侧面 a 由于缺少自由电子而带正电，这样，侧面 a 与侧面 b 之间便形成一个电势差（电压），这种现象叫霍耳效应。可见，霍耳效应也是磁场对通电导体中带电粒子作用的一种效应。

设侧面 a 与侧面 b 之间的电势差为 u，这样，a、b 面之间便形成一个由 a 指向 b 的电场，自由电子在受洛仑兹力作用的同时，还要受电场力的作用，不难判断，电场力的方向与磁场力的方向相反，即电场力的方向是指向侧面 a 的。当方向相反的电场力与磁场力大小相等时，自由电子就不再偏转，而只是沿着 Oz 轴的反方向运动，这时 a、b 两个侧面间的电压达到稳定值 u_H 叫霍耳电压，a、b 面间的电场强度为 E=uH/c，电子的带电量为 e，所受的电场力为 eE=euH/c，所受的磁场力为 eBv，在动态平衡时，电场力与磁场力大小相等，即

$$\frac{eu_H}{c} = eBv$$

式中 v 是自由电子定向运动的平均速率，根据金属导电的自由电子理论，

有：

$$i=neSv=nedcv$$

可见，$v=i/nedc$，代入电子的动态平衡方程式中，可得霍耳电压的表达式为：

$$u_H=\frac{Bi}{ned}$$

式中 n 为金属导体的自由电子密度——单位体积内的自由电子数。由上式可以看出，霍耳电压的大小与导体薄片的厚度（沿磁场方向的厚度）成反比，而与薄片的宽度和长度无关。霍耳电压的大小还与所加磁场的磁感应强度 B 和所通过的电流强度 i 的乘积成正比。

利用公式 $uH=Bi/ned$，不仅可以计算霍耳电压值，还可以利用该式测量磁场的磁感应强度。用半导体技术制成的霍耳元件，已经广泛应用于微电子技术的各个领域。

[例题 1]N 型半导体是主要靠自由电子导电的半导体,自由电子是多数载流子；P 型半导体是主要靠空穴导电的半导体，空穴是 P 型半导体的多数载流子。把半导体薄片按图 1-39 所示的方法放在匀强磁场中，并按图示的方向通过电流 i。如发现侧面 b 的电势比侧面 a 的电势高，则半导体是 N 型的还是 P 型的？

[分析与解]为了判断霍耳效应中两个侧面电势的高低，必须首先搞清导体中导电时载流子的带电性质。在不知道截流子的带电性质时，则必须采用假设的方法。

如果是 N 型半导体，载流子是自由电子，自由电子带负电，其运动方向与电流方向相反，在图中自右向左。根据左手定则，自由电子在磁场力作用下向侧面 b 偏转，a 面的龟势应比 b 面的电势高，可见不是 N 型半导体。

如果是 P 型半导体，则多数载流子是空穴，空穴可以看作是带正电荷的载流子，它在图中运动的方向与电流 i 的方向相同，自左向右，根据左手定则，空穴向 b 面偏转，b 侧面上带正电，故 b 面电势高，a 面电势低，可见该半导体是 P 型的。

从上面的分析可以看出，不论是 P 型半导体还是 N 型半导体，在图示的情况下，载流子都是向侧面 b 偏转的。侧面 b 的电势高，表明偏转的载流子是带正电荷的，由此也可判断半导体是 P 型的，载流子是带正电荷的空穴。

利用霍耳效应可以测量磁场的磁感应强度。测量的方法是把霍耳元件（薄片导体）放到待测的磁场中，使薄片的大侧面与磁场方向垂直。让稳恒电流 i 通过霍耳元件，测量与电流方向平行的两个侧面间的电压，即霍耳电压，再根据有关公式，通过计算，便可求得磁场的磁感应强度。

[例题 2]如通过霍耳元件的电流强度 i=1 毫安，用电势差计测得霍耳电压 $u_H=1.5$ 伏，已知霍尔元件中多数载流子的密度为每立方厘米 2×10^{10} 个，载流子的带电量为 1.6×10^{-19} 库仑，霍耳元件的厚度是 3 毫米，求磁场的磁感应强度多大。

[分析与解]根据公式 $uH=Bi/ned$，可得公式：

$$B=\frac{nedu_H}{i}$$

将已知量全部用国际单位表示：$i=10^{-3}$ 安培，$u_H=1.5$ 伏，$n=2\times10^{16}$ 米$^{-3}$，$d=3\times10^{-3}$ 米，$e=1.6\times10^{-19}$ 库仑，将已知量代入上式，得：

$$B=\frac{2\times10^{16}\times1.6\times10^{-19}\times3\times10^{-3}\times1.5}{10^{-3}}$$ （特斯拉）

$$=1.44\times10^{-2}$$ （特斯拉）。

●思考与练习

1.在图 1-40 中，a 是一段通有电流 i 的直导线，它可以自由运动。试说明图示的几种情形下，通电导线段 a 受磁场力的情况以及 a 在磁场力作用下将如何运动。

2.在图 1-41 中，a、b、c 是同一平面里的三根平行的通电直导线，a、b 固定不动，c 在 a、b 的当中，且到 a、b 距离相等。问：（1）如 a、b 中的电流相等且方向相同，c 将如何运动？（2）如 a、b 中的电流相等，但方向相反，c 将如何运动？（3）如 a、b 中电流方向相同，a 中的电流强度比 b 中的电流强度大，c 将如何运动？

3.两根可以自由运动的导线彼此交叉相交成一角度。按图 1-42（1）、（2）所示的方向通以电流时，两根导线的相对位置将如何变化？

4.如图 1-43 所示,矩形导线框处在条形磁铁 N 极附近的位置 Ⅰ 和位置 Ⅱ，当导线框按图示的方向通以电流 i 时，试分析线框四条边的受力方问。如线框是可以自由运动的，则线框将向什么方向运动。

5.如图 1-44 所示，OO′是一根不动的载流直长导线。ab 是一段可以自由运动的直导线，开始时 ab 处在 OO′左侧的位置 Ⅰ 处，这时 ab 与 OO′互相垂直，且在同一个平面里。使电流 i 由 a 向 b 通过，试分析 ab 在位置 Ⅰ 处的受力情况；ab 将如何运动？如果开始时 ab 处在位置 Ⅱ，这时它的受力情况如何？它将怎样运动？(设想把 ab 划分成若干长度相等的几小段，分析每小段的受力情况，比较每小段所受磁场力的大小。)

6.在圆环铁芯上，按图 1-45 所示的位置和方向上绕有两组相同的线圈，并按图示的方向通以相同的电流 I，则处在环心处与环面垂直的通电直导线所受磁场力的方向如何？

7.在光滑的斜面上有一条水平放置的通电直导线 ab 恰好处于静止状态（图 1-46）。已知斜面的倾角 $\theta=37°$（$\sin37°=0.6$，$\cos37°=0.8$），ab 的长度 $l=20$ 厘米，通过的电流 $i=5$ 安培，竖直向上的匀强磁场的磁感应强度 $B=0.6$ 特斯拉。试求：（1）作用于 ab 的磁场力多大？方向如何？（2）ab 的重力多大？

8.在磁感应强度 $B=0.5$ 特斯拉的匀强磁场中，有一个金属导线做成的直角三角形线框处在与磁场垂直的平面里(图 1-47)，线框的 ab 边长 $l_1=10$ 厘米，bc 边长 $l_2=6$ 厘米，ca 边长 $l_3=8$ 厘米，线框中通过的电流强度 $i=2$ 安培。求：(1）线框的各边所受磁场力各多大？请将它们的方向在图中用箭头标出。（2）三条边所受的磁场力的合力多大？

9.题 8 中同样的通电线框，放在同样的匀强磁场中，所不同的是线框面与磁力线平行，如图 1-48 所示。求：（1）线框的各边所受的磁场力各多大？方向如何？(2）磁场对通电的直角三角形线框各边作用力的总效果是什么？

10.如图 1-49 所示，粗细均匀的金属导线 ab，两端用细线悬挂在支架上，呈水平状态，ab 的长度 $l=80$ 厘米，重量 $G=2$ 牛顿。它的右半段处在水平方向的匀强磁场中，磁场方向与 ab 垂直，磁感应强度 $B=0.5$ 特斯拉。若有 5 安培的电流从 a 向 b 流过。（1）ab 所受磁场力多大？这时 b 端的悬线承受多大的拉力？a 端的悬线承受多大的拉力？（2）若使通过 ab 的

电流逐渐增大（其它条件均不变），试问电流增加到多大时，b 端悬线所受的拉力减少为零？

11.粗细均匀的直导线，长为 25 厘米，质量为 10 克，下端可绕光滑的水平轴 O 在竖直平面里自由转动，上部靠在支点 a（图 1-50）。这时导线与水平方向夹角 θ=53°，O、a 间距离为 20 厘米，O、a 之间按图示方法接有直流电路，匀强磁场垂直于直导线所在的竖直平面，磁感应强度 B=0.3 特斯拉，调节电路中的可变电阻，使电流由零开始逐渐增加，问安培表的读数多大时，直导线对支点 a 的压力恰好减少到零？（取 g=10 牛/千克，Sin53°=0.8，cos53°=0.6）。

12.质量 m=3 克的金属导线,放在相距 d=0.1 米的水平平行导轨的右端（图 1-51），磁感应强度 B=0.1 特斯拉的匀强磁场竖直向上穿过导轨所在的平面，轨道的左端与一电池组相连。当电键 K 闭合后，金属导线在磁场力作用下沿水平方向抛出，最后落在地面上。已知轨道与地面间的高度差 h=0.8 米，导线抛出的水平距离 s=2 米，求电键闭合后通过金属导线的电量多大？

13.竖直向上的匀强磁场，磁感应强度 B=0.2 特斯拉，磁场中有两根平行的金属导轨相距 l=0.5 米，导轨与水平方向夹角 θ=30°，直导线 ab 的质量 m=0.1 千克，电阻 R=0.1 欧，沿水平方向放在导轨上（图 1-52）。电池的电动势 ε=1.5 伏，内阻 r=0.1 欧。导轨的电阻不计，摩擦力也可不计，取 g=10 米/秒 ^{2}。在闭合电键的同时，将直导线 ab 由静止释放。求：(1) 电路接通的最初瞬间，直导线所受磁场力多大？方向如何？两根导轨对直导线的支持力多大？(2)电路接通的最初瞬间,直导线所受的合外力多大？方向如何？加速度多大？（3）直导线在轨道上运动的最大速度多大？

14.如图 1-53 所示，水平面上平行导轨相距 l=0.5 米，两根导轨之间的电源电动势 ε=8 伏，内阻 r=1 欧，定值电阻 R=1 欧；伏特表 V_1、V_2 与安培表 A 都是理想的电表。横跨在两根导轨上的直导线 ab 的质量 m=0.1 千克，电阻 R'=0.5 欧。竖直向下的匀强磁场穿过轨道所处的水平面，磁感应强度 B=2 特斯拉。轨道光滑，电阻也可不计。求：（1）电键闭台的最初时刻，直导线 ab 的加速度多大？方向如何？（2）当伏特表 V_1 的读数为 6 伏时，安培表 A 的读数多大？伏特表 V_2 的读数多大？这时直导线 ab 的加速度多大？（3）直导线 ab 的最大速度多大？当 ab 以最大速度运动时，安培表 A，代特表 V_1、V_2 的读数各多大？

5.如图 1-54 所示，金属棒 ab 横跨在水平光滑的П形金属导轨上。金属棒的中点拴着一根细线，线的另一端拴有 400 克质量的物体，细线跨过光滑的定滑轮，物体放在地面上，在细线伸直的情况下，ab 棒到П形导轨左端的距离为 80 厘米，平行导轨之间的距离为 50 厘米，导轨与金属棒构成回路的总电阻为0.2欧。竖直向下的均匀磁场从无到有，以$\frac{\Delta B}{\Delta t}=0.2$特/秒的变化率均匀增大，试求经多少时间，物体恰能被从地面拉起？（取 g=10 米/秒 ^{2}）

16.一根 100 厘米的直导线，弯成正六边形的五条边（如图 1-55），放置在竖直面里，端点 a、f 处在同一水平面上。按图示方向通以 10 安培的电流，若水平方向的匀强磁场与线框面垂直，磁感应强度为 1.5 特斯拉。

求：（1）通电的折导线所受的磁场力。（2）若通电导线是半径为 20 厘米的半圆形导线，在同一磁场中，通过逆时针方向同样大小的电流，两个端点处在同一水平面上，求其所受的磁场力。

二、磁场对通电流体的作用

电流是电荷（带电粒子）的定向运动形成的，磁场对通电导线的作用力，使人们十分自然地想到磁场对运动电荷的作用力。

形成电流的运动的带电粒子，叫载流子。大多数金属导体中是靠带负电的自由电子来导电的；而在导电溶液中则是正负离子同时沿相反的方向运动而形成电流；半导体则可能是自由电子与空穴同时参予导电，或自由电子作为多数载流子，或空穴作为多数载流子而形成不同类型的半导体的导电方式。

无论是什么载流子形成的电流，在导体通电时，导体本身并不运动。只有通电导体处在磁场中时，才会受到磁场的作用力。

导电液体中存在大量的正离子和负离子，这就形成了导电液体在磁场中的行为特性：第一，当磁场中的导电液体通过电流时，正负离子向相反的方向运动。由于正负离子分别带正负电荷，又向相反的方向运动，它们受到的磁场力的方向实际上是一致的，这样正负离子受到的磁场力就能使导电流体向着特定的方向流动；第二，如果导电流体在磁场中流动，正负离子也就向着同一个方向运动，由于它们带着不同性质的电荷，磁场对它们的作用力方向相反，正负离子就要向不同的方向偏移，从而在导电流体中形成一个电势差，如果有适当的回路并形成电流，磁场对导电流体中的电流就有作用力，这个作用力也可以说是磁场对流动的流体的反作用，必然要影响流体的流动。

下面分别研究导电流体在磁场中的两个不同的行为特性。

●磁场对通电流体的作用（电磁泵原理）

我们通过电磁泵原理的阐述，来说明磁场对通电液体的作用。

在原子反应堆中用来进行热交换的液态金属（钠），专用医疗机中的血液，都是靠电磁泵来驱动的。

图 2-1 是电磁泵的工作原理图。矩形截面积为 S=a×b 的导管中是某种导电液体，磁感应强度为 B 的匀强磁场，沿垂直于导管的方向通过导管中的流体，磁场的宽度为 l，当有图示方向的电流 I 通过导电流体时，则流体便会被驱动。下面我们要说明通电流体被磁场驱动的原理，并计算驱动力和驱动力对流体的压强。

取图 2-1 的一个剖面，如图 2-2 所示。这个剖面图是逆着匀强磁场的方向看去的，剖面与磁场方向垂直，磁场垂直于剖面指向读者；电流 I 的方向向上，即正离子的方向向上，负离子的方向向下；根据左手定则，正负离子均受磁场力的作用，磁场力的方向向右，也就是图 2-1 和图 2-2 中 v 的方向。

导电液体实际上都是等离子体，即正负离子数相等，正负离子的带电量也相等。若单位体积内导电粒子数为 n，每个导电粒子的带电量为 q，则每个带电粒子（即离子）所受的磁场力为：

$$f=Bqv_0$$

式中 v_0 是带电粒子在电流方向上的定向运动的速率，根据导电理论可知：

$$I=nblv_0q$$

式中 bl=S，是电流 I 的横截面积，根据此式可得 $v_0=I/nblq$，则 $f=BI/nbl$. 导电流体中受到磁场作用力的带电粒子的总数为 N=nabl，则磁场对导电流体的驱动力，即合力为：

$$F=Nf=(nabl)\frac{BI}{nbl}=BIa$$

单位面积上所受的力为压强（p），所以磁场驱动流体的压强为：

$$p=\frac{F}{S}=\frac{F}{ab}=\frac{BI}{b}.$$

●磁场对运动的导电流体的作用（磁阀原理）

在研究了磁场对通电液体的作用后，现在分析磁场对运动的导电流体的作用。

设导电的液体（如水银）在直长管道中以速度 v_0 流动。管道的左右两个面的宽度为 b（图 2-3），它们用绝缘材料制成；在垂直于左右侧面的方向上有宽度为 l 的匀强磁场 B。

当导电液体在管道中以速度 v 流动时，相当于长度为 b 的导体以速度 v 垂直切割磁力线；根据右手定则可以判断，流动的液体产生的感应电动势，在下底面处电势高，上底面处电势低；电势差，也即感应电动势的大小由法拉第电磁感应定律决定：

$\varepsilon = Bbv$。

如果在管道的外边用电阻很小的导线把上下底面连接起来，从而形成电流通路的话，则导电液体中便会有自上而下的电流通过。

设导电液体的电阻率为 ρ，在磁场范围内，导电液体中自上而下的电流的横截面积为 al，长度为 b，电阻为 $R = \rho\frac{b}{al}$，不计管道外的连接导线的电阻，则自上而下通过导电液体的电流强度为：

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{Bbu}{\rho\frac{b}{al}} = \frac{Balv}{\rho}$$

当导电液体中有电流自上而下通过时，磁场对电流（实际上是导电液体）就有作用力，根据左手定则，磁场力的方向与液体原来的流动方向（即 v_0 的方向）相反，作用力的大小为：

$$F = Bib = B(\frac{Balv}{\rho})b = \frac{B^2ablv}{\rho}$$

这个磁场力形成与 v_0 方向相反的压强为：

$$p = \frac{F}{ab} = \frac{B^2lv}{\rho}$$

设形成流速 v_0 的压强为 p_0，则流速为 v 时，流体上的压强为 P_0—p，（p 的方向与 p_0 的方向相反）。由于流体的流速与流体上的压强成正比，所以在有磁场存在时，流体的流动速度将会发生变化：

$$\frac{v}{v_0} = \frac{p_0 - p}{p_0} = 1 - \frac{B^2lv}{p_0\rho}$$

由上式可得：

$$v = (1 - \frac{B^2lv}{p_0\rho})v_0$$

经移项交换，可得：

$$v = v_0(1 - \frac{B^2lv_0}{p_0\rho})^{-1}$$

此式表明，用调节磁场磁感应强度 B 的大小可以实现控制流速的目的。根据上述原理可以制成一种“磁阀”。

我们把“电磁泵”与“磁阀”的研究方法与结果比较一下。

在研究“电磁泵”时，我们通过微观分析的方法，得到磁场对导电流体的驱动力 $F=BIa$。请读者参阅图 2-1，这个结论是否可以直接应用安培力公式的概念而获得呢？显然，从图中可以看出，所谓“电磁泵”的驱动力，从宏观上看，也可看作是处在磁场 B 中长度为 a 的一段通过电流强度为 I 的导体所受的磁场力。

在研究“磁阀”原理时，我们直接应用宏观的观点，参考图 2-3，根据法拉第电磁感应定律，直接得到管道上、下底面间的电势差 $\varepsilon=Bbv$。显然，这个电势差，我们也可以应用微观的分析方法求得：正负离子在磁场中向同一方向运动，所受磁场力方向相反，正负离子分别在下底面与上底面聚集，从而形成自下而上的电场。

可见，宏观的方法与微观的方法，它们的研究对象不同，应用的物理规律也不同，但所得的结论肯定是相同的。从不同的角度、不同的观点分析同一个问题，可能选择不同的研究对象；不同的研究对象，在同一个物理过程中所遵循的物理规律也不相同，这就形成了通常所说的不同的解题方法。

●思考与练习

1.在图 2-4 所示的装置中，作为容器的玻璃缸外，用绝缘导线绕上足够匝数的线圈，通电后便能产生一个磁场。在玻璃缸中放两个金属板做成的同心圆环，这两个圆环分别与电池的正负极相连。把电解液注入玻璃缸中，仔细观察便会发现电解液将沿一定的方向运动。请分析电解液为什么会运动？沿什么方向运动？

2.在图 2-5 所示的装置中，铝圆盘可绕水平轴 0 自由转动，圆盘放在马蹄形磁铁的两个磁极之间，圆盘的下边缘与水银槽里的水银接触，当按图示的方法接通电路时，铝盘便会转动起来。试说明圆盘转动的理由并判断其转动方向。把圆盘的转动与上题电解液的运动进行比较，说出它们之间的异同之处。

3.图 2-6 为磁流体发电机的原理图。一对平行的金属板正对面积为 S，相距 d；板间图 2-6 有图示方向的磁场，磁场的磁感应强度为 B；让高温电离气体（等离子体）以速度 v 沿着与磁场垂直的方向通过金属板之间，则有电流从负载 R 上通过。试说明该装置的发电原理；如高温电离气体的电阻率为 p，负载的电阻为 R，其它导体的电阻不计，负载 R 上的电压多大？哪一端电势高？

三、磁场对通电线圈的作用

磁场对通电线圈的作用效果是使通电线圈转动，因此，确定转动力矩的大小和转动方向，是我们的基本研究课题。电磁式电表的工作原理，是这些基本理论的实际应用。变化的磁场能在闭合线圈中产生感应电流，闭合线圈在磁场中转动时，也会产生感应电流，感应电流也要受磁场的作用，所以我们还要研究变化磁场对闭合线圈的作用，磁场对转动线圈的作用。

●磁场对通电线圈的作用力矩问题

磁场对通电线圈的作用，最简单也是最基本的模型，是匀强磁场对通电的矩形线圈的作用，而且矩形线圈的两条边保持与磁场垂直，如图 3-1 所示。

磁场方向由 N 极指向 S 极，是水平方向由左向右的，设磁场的磁感应强度为 B；矩形线圈的 ab 边和 cd 边与磁场方向垂直，设它们的长度为 l_1，bc 边与 da 边长为 l_2；如线圈中按图示的方向通过电流 i，则 bc 边与 da 边所受的磁场力均在线圈平面内，大小相等、方向相反，且在同一条直线上，互相抵消，对线圈不产生转动的效果。ab 边与 cd 边长度相等，通过的电流强度也相等，它们都与磁场方向垂直，所受的磁场力大小相等：$F=Bil_1$，但 ab 边的受力方向向下，cd 边的受力方向向上，互相平行，从而构成一对力偶，这对力偶的力矩为：M=Fd，d 是构成力偶的两个力的作用线间的垂直距离，即力偶的力臂。在匀强磁场中，F 的大小不变，力臂的大小与线圈的位置有关。

当线圈平面与磁场方向垂直时（图 3-2），力臂 d=0，力矩也为零。力矩为零的位置叫线圈的平衡位置，通常在图中用虚线表示。

当线圈平面与磁场方向平行时（图 3-3），力臂最大，力臂等于 bc 与 da 边的长度：$d=l_2$，这时力偶的力矩也最大，最大力矩为：

$$M_m=Fl_2=Bil_1l_2=Bis$$

式中 $S=l_1l_2$ 是矩形线框的面积。不难判断，这个力矩的自然转动轴通过 bc 边与 da 边的中点，这根转动轴也是矩形线圈平行于 ab 边与 cd 的对称轴 OO＇（图 3－1）。

一般情况下线圈的位置用线圈平面与平衡位置间的夹角θ来表示（图 3-4），这时力臂为 $d=l_2\sin\theta$，力矩为：

$$M=Fd=Bil_1l_2\sin\theta$$
$$=BiS\sin\theta=M_m\sin\theta$$

此式是磁场中通电线圈所受力矩的一般表达式。M_m 是最大力矩，即线圈面与磁力线平行，即θ=90°时磁场对通电线圈的作用力矩。如线圈图 3-4 共 n 匝，则 $M_m=nBiS$。当线圈面与磁力线垂直时，θ=0，则 sinθ=0，M=0，即线圈处在平衡位置时，所受的力矩为零。

力矩公式 $M=M_m\sin\theta$ 有两个十分重要的特性：（1）只要转动轴与磁力线垂直，该公式与转动轴的位置无关。也就是说，转动轴即使不在线圈的对称位置，力矩公式也是适用的。（2）该公式与线圈的形状无关，即不管线圈是什么形状，只要知道线圈的面积 S，则最大力矩就可以根据公式 $M_m=nBiS$ 求得，力矩公式 $M=M_m\sin\theta$ 与线圈的形状无关。

下面只证明最大力矩公式 $M_m=BiS$ 与转动轴的位置、与线圈的形状无关。在接下去的例题中，读者可以见到具体的实例。

（1）在图 3-5 中，矩形线圈与磁力线平行，线圈中通过电流 i，计算线圈相对于与磁场方向垂直的转动轴 OO′的力矩。

设 $ad=cd=l_1$，且 ab 边与 cd 边平行于 OO＇，$bc=da=l_2$，它们与 OO＇垂直，dc 边与 OO＇相距 l。

ab 边所受磁场力为 $F_1=Bil_1$，方向向下，相对于转动轴 OO＇，它的力臂 $d_1=l+l_2$，故力矩的大小为：$M_1=F_1d_1=Bil_1（l+l_2）$，它的作用是使线圈绕转动轴 OO＇逆时针转动。

cd 边所受磁场力为 $F_2=Bil_1$，方向向上，它对转动轴的力臂为 $d_2=l$，故其力矩为 $M_2=F_2d_2=Bil_1l$，它的作用是使线圈绕轴 OO＇顺时针转动。

在图示情况下，bc 边与 da 边均与磁力线平行，不受磁场力作用。故线圈相对于转动轴 OO＇所受力矩为 M_1 与 M_2 的代数和。设逆时针方向的力矩为正，顺时针方向的力矩为负，则总力矩为：

$$M=M_1+M_2=Bil_1（l+l_2）-Pil_1l=Bil_1l_2=BiS$$

（2）设通电线圈是等腰三角形 abc，底角为θ，底边 $ab=l_1$，腰长 $bc=ac=l_2$，按图 3-6 所示方向通过电流 i，线圈处在磁感应强度为 B 的匀强磁场中，线圈面与磁力线平行，线圈的底边与磁力线垂直。

根据左手定则，ab 边所受磁场力垂直于纸面向外，大小为 $F_1=Bil_1$，作用点在 ab 的中点 Q。

ac 边所受磁场力大小为 $F'=Bil_2\cos\theta$，作用点在 ac 边的中点 Q_1，方向垂直于纸面向里；bc 边所受磁场力的大小与 ac 边所受磁场力相等，作用点为 bc 边的中点 Q_2，方向也是垂直于纸面向里。把 ac 与 bc 作为整体看，它所受磁场力的合力大小为 $F_2=2F'=2Bil_2\cos\theta$，合力的作用点为 Q_1、Q_2 的连线的中点 Q＇，合力的方向当然也是垂直于纸面向里的。由于 $2l_2\cos\theta=l_1$，所以 $F_2=Bil_1$。可见，通电的三角形线圈所受的磁场力 F_1 与 F_2 构成一对力偶，力偶的自然转动轴是 Q、Q＇连线的与磁力线垂直的中垂线。力矩的大小为：

$$M=Fd=F_1(\frac{1}{2}l_2\sin\theta)=Bil_1l_2\sin\theta/2=BiS$$

式中$S=\frac{1}{2}l_1l_2\sin\theta$是等腰三角形的面积。可见通电的三角形线圈在磁场中所受的最大力矩是与它的面积成正比的。

现在计算通电的三角形线圈以 OO＇（图 3-6）为转动轴的力矩。OO＇与磁力线垂直，三角形的底边 ab 与 OO＇平行，设它们相距 l，则 ab 边所受的磁场力相对于 OO＇的力矩为 $M_1=F_1l$，迎 OO＇看去，M_1 的作用效果是使线圈绕 OO＇顺时针转动；ac 边与 bc 边所受的磁场力的合力为 $F_2=Bil_1$，作用点在 Q＇点，它使线围绕 OO＇逆时针转动，力矩大小为

$M_2=F_2(1+\frac{1}{2}l_2\sin\theta)$；可见，力矩的代数和为

$$\begin{aligned} M=M_1+M_2 &= F_2(l+\frac{1}{2}l_2\sin\theta)-F_1l \\ &= F_2l-F_1l+F_2\times\frac{1}{2}l_2\sin\theta \\ &= Bi(\frac{1}{2}l_1l_2\sin\theta)=BiS \end{aligned}$$

可见，力矩公式 M=BiS 不仅对三角形线圈是适用的，而且对三角形外垂直于磁力线的任意转动轴也是适用的。

[例题 1]木质圆柱体，半径为 R，长度为 l=10 厘米，其质量为 m=0.25 千克。在圆柱体上，顺母线和直径绕 10 匝矩形线圈（图 3-7）。把它们放到倾角为θ的斜面上，使线圈面与斜面平行，整个装置都处在竖直向上、磁感应强度 B=0.5 特斯拉的匀强磁场中。如果斜面足够粗糙，试问线圈中通过多大电流时，圆柱体才会在斜面上不动？（设线圈导线的重量可以不计，取 g=10 米/秒 ²）。

［分析与解］在垂直于圆柱体轴线方向上取剖面如图 3-8 所示。圆柱体与斜面的交线 D 跟斜面的底边平行，由于斜面足够粗糙，圆柱体平衡时，不会向下滑动，所以 D 是圆柱平衡时的轴线。

圆柱体的重力（mg）对 D 轴有顺时针方向的力矩：$M_1=mg(R\sin\theta)$。

要使圆柱体能在斜面上静止不动，只有按图示的方向在线圈中通以电流 i。这时 ad 边与 bc 边所受的磁场力均沿圆柱体的轴线方向，大小相等、方向相反、互相抵消，故不影响圆柱体的平衡。ab 与 cd 边受磁场力的大小相等：$F_1=F_2=nBil$，方向如图所示，构成一对力偶。ab 边所受磁场力 F_1 使圆柱体相对于 D 轴逆时针转动，cd 边所受磁场力 F_2 使圆柱体相对于 D 轴顺时针方向转动，由于 F_1 的力臂 DD_1 比 F_2 的力臂 DD_2 大，所以磁场力的合力矩是逆时针方向的，大小为：

$$M_2=F_1(DD_1)-F_2(DD_2)=F(DD_1-DD_2)$$
$$=F(D_1D_2)=nBil(2R\sin\theta)$$
$$=(nBiS)\sin\theta$$

要使圆柱体静止不动，则应使 $M_1=M_2$，即：

$$mgR\sin\theta=nBiS\sin\theta=2nBiRl\sin\theta$$

由此可以求得通过线圈的电流强度应为:

$$i=\frac{mg}{2nBl}=\frac{0.25\times10}{2\times10\times0.5\times0.1}(\text{安})=2.4(\text{安})$$

读者也许已经注意到，磁场对通电线圈的作用力矩为 $M_2=(nBiS)\sin\theta$，转动轴 D 处在线圈平面外与磁力线垂直的地方。这里又一次证明，磁场对通电线圈的力矩公式是与轴的位置无关的。

[例题 2]均匀的直导线每单位长度的质量为ρ，用它弯成如图 3-9 所示的“屋顶”形的闭合线框（abcdefa），将它放在光滑的水平 oy 轴上，轴是绝缘的，线框的边长 ab=de=l，bc=cd=ef=fa=l'，“屋顶”的夹角 $2\theta_0<180°$，θ_0角也就是“屋面”与竖直平面 oyz 的夹角。试求：（1）如整个线框处在 ox 轴正方向的匀强磁场中，使线框固定不动，沿图示的方向使电流 i 通过线框，这时磁场对线框的作用力矩多大？（2）若只有重力和电磁作用力作用，线框将发生偏转，平衡时线框对原来的平衡位置的偏角θ多大？

［分析与解］（1）不难判断 fa 边与 bc 边所受磁场力大小相等、方向相反，互相抵消；cd 边与 ef 边所受磁场力也互相抵消。这四条边所受磁场力都与 oy 轴平行，没有转动效应。

ab 边与 de 边所受磁场力构成一对力偶，对 oy 轴的转动力矩为：

$$M=Fd=(Bil)(2l'\sin\theta_0)=BiS$$

式中 $S=l(2l'\sin\theta_0)$ 是线框面在平行于磁力线方向上的投影面积。

显然，M=BiS 是线框受到的最大磁力矩。这里的线框不是平面线框，而是立体的，这里，磁场对它的作用力矩由线框面在平行于磁力线方向上的投影面积决定，公式 M_m=BiS 仍然适用。

(2) 从上面的分析可以看到，如外力撤消，则线框沿顺时针方向偏转。设偏转角为θ对线框面平衡（图 3-11），这时磁场对通电线框的作用力矩，还是 ab 边与 de 边所受的力偶的力矩，但这时力偶的力臂为 d'=（2l'sinθ_0）cosθ，故磁场对线框的力矩为：

$$M=Fd'=(Bil)\ (2l'\sin\theta_0)\cos\theta$$
$$=BiS\cos\theta$$

线框从原来的位置偏转θ角后，重力对 oy 轴的力矩代数和已不再等于零。

fa 边、ab 边与 cb 边的重力产生顺时针的力矩：

$$M_1=(l\rho g)\ l'\sin(\theta_0-\theta)+2(l'\rho g)\frac{l'}{2}\sin(\theta_0-\theta)$$
$$=\rho g(l+l')\ l'\sin(\theta_0-\theta)$$

cd 边、de 边和 ef 边的重力产生逆时针的力矩：

$$M_2=(l\rho g)\ l'\sin(\theta_0-\theta)+2(l'\rho g)\frac{l'}{2}\sin(\theta_0-\theta)$$
$$=\rho g(l+l')\ l'\sin(\theta_0-\theta)$$

整个线框对 oy 轴的重力矩为 M_1 和 M_2 的代数和，是逆时针方向的，大小为：

$$M'=M_2-M_1=\rho g(l+l')\ l'\ [\sin(\theta_0+\theta)-\sin(\theta_0-\theta)]$$
$$=2\rho g(l+l')\ l'\cos\theta_0\sin\theta$$

当 M=M'，即电磁力矩与重力矩的代数和为零，即

$$2Bill'\sin\theta_0\cos\theta=2\rho g(l+l')\ l'\cos\theta_0\sin\theta$$

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{Bil}{\rho g(l+l')}\mathrm{tg}\theta_0$$

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{Bil}{\rho g(l+l')}\mathrm{tg}\theta_0\right)$$

θ就是线框平衡时对原来的静止位置的偏角。

●电流表的工作原理

电流表的构造如图 3-12 所示。磁性很强的马蹄形磁铁的两个图 3-12 磁极与固定的圆柱形铁心之间有辐射方向分布的匀强磁场，铁心的外面有一个可以与轴一起转动的矩形线圈，轴的前后各装一根螺旋式弹簧，线圈的两端分别与两个螺旋弹簧连接，被测电流从接线柱经螺旋弹簧通入线圈，通电线圈在磁场的作用下带动安装在转轴上的指针一起偏转。

电流表的构造有两个关键。一是磁极与圆柱体之间有沿辐射方向分布的匀强磁场（图 3-13），这就保证通电线圈不论转动到什么位置，线圈平面都跟磁力线平行，磁场作用于通电线圈的力矩是一个不变的值：$M_1=nBiS$。二是与轴相连的两根螺旋弹簧，当通电线圈与轴一起转动时，螺旋弹簧便扭紧或扭松，从而产生一个阻碍线圈转动的力矩 M_2，螺旋弹簧产生的力矩跟线圈的偏角 θ 成正比，即 $M_2=k\theta$。平衡时，磁场作用于线圈的力矩M_1与螺旋弹簧的力矩M_2相等，即 $nBiS=k\theta$，于是可得$i=(\frac{k}{nBS})\theta$，由于 k、n、B、S 均为定值，所以指针指示的偏转角度跟通过线圈的电流强度成正比，并且电流表的刻度线是均匀的。这是磁电式电流表的特点。

[例题]已知电流表的线圈匝数 n=100，矩形线圈处在磁场中的两条边长 $l_1=1.2\times10^{-3}$ 米，另两条边长 $l_2=1.0\times10^{-2}$ 米；指针每偏转 1°角，螺旋弹簧产生的阻碍力矩 $k=1.5\times10^{-2}$ 牛顿·米；从电流表的表面标度可看出，它的电流量程是 10 微安，指针的最大偏转角为 80°。试求该电流表中辐向分布的均匀磁场的磁感应强度多大？

[分析与解]根据题意可知，当电流表指针满偏时，螺旋弹簧产生的反抗力矩为：

$M_2=k\theta=1.5\times10^{-9}\times80$

$=1.2\times10^{-7}$ 牛顿·米

电流表指针满偏时，通入线圈的电流为 10 微安，这时磁场作用于线圈的力矩为

$M_1=nBiS=100\times10\times10^{-6}\times1.2\times10^{-4}B$ 牛顿·米

$=1.2\times10^{-7}B$ 牛顿·米

根据力矩平衡原理，$M_1=M_2$，可知磁感应强度 B=1 特斯拉。

●变化磁场对线圈的作用问题

闭合的线圈处在变化的磁场中时，由于电磁感应作用，线圈中产生感应电流，磁场对感应电流也同样有作用。研究变化的磁场对线圈的作用，需要应用电磁感应知识，这里只通过几个例题作一简要说明，详细的研究请参阅有关资料。

〔例题 1〕80 厘米长的粗细均匀的直导线，质量 m=0.04 千克，电阻 R=0.01 欧，用它做成一个正方形的线框 abcda，它可以绕 bc 边转动，在 ad 边的中点，用细线沿竖直方向吊住线框，使线框面与水平方向成θ=30 的夹角（图 3-14）。竖直方向的变化磁场穿过该闭合线圈，磁场以均匀的变化率 $\frac{\Delta B}{\Delta t}=0.5$特/秒自零开始匀速增加，悬吊线框的细线上的张力随之减小。问：（1）磁场的方向应该竖直向下还是竖直向上？为什么？（2）磁场自零开始增大，悬线上的张力开始减小，几秒后悬线的张力恰好减少到零？（3）若磁场继续变化，线框将开始转动，如线框面转过 30°时，悬线恰好呈水平状态,悬线上便开始出现张力,线上的张力是如何变化的？

[分析与解]（1）由于磁场在竖直方向上，只有当 ad 边受到的磁场力沿水平方向向左时，悬线上的张力才有可能逐渐减小到零（图 3-15）。

若磁感应强度 B 方向竖直向下，则感应电流的方向为 a→b→c→d→a，ad 边所受磁场力水平向左；若 B 竖直向上，则感生电流方向为 a→d→c→b→a，ad 边所受磁场力也是水平向左。所以磁场的方向竖直向上、向下都可以。

（2）设正方形线框的边长为 l，磁场变化时，线柩中的感生电动势为$e=l^2(\frac{\Delta B}{\Delta t})\cos\theta$，感应电流为$i=\frac{e}{R}=l^2(\frac{\Delta B}{\Delta t})$，设t秒末磁场的磁感应强度为 B_t 这时线框所受磁场的作用力矩为：

$$M_1=B_1il^2\sin\theta=B_1l^4(\frac{\Delta B}{\Delta t})\cos\theta\sin\theta/R$$

线框的重力相对于转动轴的力矩是顺时针方向的，ab 边和 cd 边的重力矩相等，各为$(\frac{mg}{4})\frac{l}{2}\cos\theta$，ad边的重力矩为$(\frac{mg}{4})l\cos\theta$，总的重力矩为：

$$M_2=2\times(\frac{mg}{4})\frac{l}{2}\cos\theta+(\frac{mg}{4})l\cos\theta=\frac{mg}{2}l\cos\theta$$

当 M_1 与 M_2 恰好相等时，悬线上张力恰好为零。$M_1=M_2$，得：

$$B_t(\frac{\Delta B}{\Delta t})l^4\cos\theta\sin\theta/R=(\frac{mg}{2})l\cos\theta$$

$$B_t=\frac{mgR}{2(\frac{\Delta B}{\Delta t})l^3\sin\theta}=\frac{0.04\times10\times0.01}{2\times0.5\times0.2^3\times0.5}(\text{特})=1(\text{特})。$$

由$B_1=\frac{\Delta B}{\Delta t}$，得$t=2$秒。即磁场自零开始增加，2秒末悬线上的张力恰好减小为零。

（3）线框转过 30°，这时线框面与水平方向的夹角为θ'=60°，设悬线上开始出现张力时磁场的磁感应强度为 B_0，经过 t 秒，磁感应强度

为$B_0+(\frac{\Delta B}{\Delta t})t$，这时变化磁场产生的感应电动势为$e=(\frac{\Delta B}{\Delta t})l^2\cos\theta'$，感应电流强度为$i=(\frac{\Delta B}{\Delta t})l^2\cos\theta'/R$，磁场对线框的作用力矩为：

$$M_1'=(B_0+\frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot t)\frac{(\frac{\Delta B}{\Delta t})l^2\cos\theta'}{R}\cdot l^2\sin\theta'。$$

线框的重力相对转动轴的力矩为：

$$M_2'=2\times(\frac{mg}{4})\frac{l}{2}\cos\theta'+\frac{mg}{4}l\cos\theta'=\frac{mg}{2}l\cos\theta'$$

假设这时悬线沿水平方向对线框 ab 边中点的拉力为 T，拉力 T 对转动轴的力矩是顺时针方向的，力矩大小为：图 3-16

$$M'_3=Tl\sin\theta'$$

考虑 M'_1、M'_2 与 M'_3 的方向，平衡时力矩代数和应为零，可得平衡方程：

$$(B_0+\frac{\Delta B}{\Delta t}\cdot t)\frac{(\frac{\Delta B}{\Delta t})l^4\cos\theta'\sin\theta'}{R}-\frac{mg}{2}l\cos\theta'-Tl\sin\theta'=0$$

将上式化简、变形，可得线上张力随时间变化的关系形式是：T=at+b，其中 a、b 均为常数，表明 T 随时间均匀增大。

感兴趣的读者作一些简单的推导便会发现，常数 $a=\frac{\Delta B}{\Delta t}{}^2l^3\cos60°/R$=0.1 牛/秒，表明线上的张力每秒增加 0.1 牛。

系数 a 还可以直接根据它的物理意义通过计算求得。当线框面与水平方向夹角为θ′=60°时，线框中感应电动势为 $e=(\frac{\Delta B}{\Delta t})l2\cos60°$，感应电流为 $i=(\frac{\Delta B}{\Delta t})l^2\cos60°$，这时线框沿水平方向向左受到的磁场力，即 ad 边受到的磁场力。由于磁场的磁感应强度每秒增大 0.5 特斯拉（即$\frac{\Delta B}{\Delta t}$=0.5 特斯拉/秒）。每秒增加的磁场力为（$\frac{\Delta B}{\Delta t}$） $il=(\frac{\Delta B}{\Delta t})^2l^3\cos60°/R$。由于细线拴在 ad 边的中点，线框处于平衡状态，所以细线上的张力每秒的增加量，即 $a=(\frac{\Delta B}{\Delta t})^2l^3\cos60°/R$。

●磁场对转动线圈的作用问题

线圈在磁场中转动时，穿过线圈的磁通量发生变化，线圈中会产生感应电动势、感应电流，磁场对感应电流的作用，也就是我们所要讨论的磁场对转动线圈的作用。

［例题］如图 3-17，闭合线圈 abcda，边长 $ab=cd=l_2$，$bc=ad=l_1$，在匀强磁场 B 中，绕对称轴 OO′ 以角速度ω匀速转动。设线圈共 n 匝，总电阻为 R。

（1）线框转动到什么位置时，磁场对它的作用力矩最大？

（2）当线圈从平衡位置（电磁感应中，该位置又叫中性面，如图 3-17 的位置）转过θ角时，磁场对线圈的作用力矩多大？

[分析与解]闭合线圈在磁场中转动时，穿过的磁通量不断变化，线圈中有感应电动势、感应电流产生。根据电磁感应定律，当线圈面与磁力线平行时，感应电流最大，这时磁场对线圈的作用力矩也最大。

线圈面转动中与磁力线平行的瞬间，最大感应电流为：

$$I_m=\frac{\varepsilon_m}{R}=\frac{nBl_1l_2\omega}{R}$$

这时磁场对线圈的作用力矩也最大：

$$M_m=nBI_ml_1l_2=n^2B^2(l_1l_2)^2\omega/R$$

若从平衡位置开始计时，由于线圈是以角速度ω匀速转动的，所以转过θ角所花的时间$t=\frac{\theta}{\omega}$，即$\theta=\omega t$，这时线圈在磁场中的位置如图$3-18$所示。该时刻线圈中感应电流的大小为：

$$i=(\frac{nBl_1l_2\omega}{R})\sin\theta$$

这时，磁场对线圈的作用力矩为：

$$M=nBil_1l_2\sin\theta=\frac{n^2B^2(l_1l_2)^2\omega}{R}\sin^2\theta$$

将$\theta=\omega t$代入，可知磁场对线圈的作用力矩是随时间而变化的：

$$M_1=\frac{n^2B^2(l_1l_2)^2\omega}{R}\sin^2(\omega t)$$

由此式可以看出，t=0 时，线圈通过中性面，这时感应电流为零，故得 M=0；当 t 等于 1/4 周期（t=T/4）时，θ=90°，线圈面与磁力线平行，这时感应电流最大，线圈受磁场的作用力矩也最大：$M_m=n^2B^2(l_1l_2)^2\omega/R$。

●思考与练习

1.如图 3-19 所示，在倾角θ=37°的斜面上，放着一个短形线圈 abcd，线圈共 n=10 匝，ab 边长 l_1=10 厘米，bc 边长 l_2=15 厘米。整个斜面都处在竖直向下的匀强磁场中，磁感应强度 B=0.2 特斯拉。按图示的方向，让电流强度 i=2 安培的电流通过线圈。求：(1) 线圈的四条边各受多大的磁场力？方向如何？(2) 线圈的两组对边 ab 与 cd，bc 与 ad 所受磁场力情况有什么关系？线圈的运动趋势是什么？（只考虑磁场力作用）

2.在图 3-20 中，矩形线框能以水平的 ox 轴自由转动，线框的边长 ab=dc=8 厘米，ad=bc=6 厘米，组成线框的导线是粗细均匀的，总质量为 2.8×10^{-3} 千克；匀强磁场的方向与竖直向上的 oz 轴一致，磁感应强度 B=1.34×10^{-2} 特斯拉。要使线框能在图示的位置、与竖直平面成 30°夹角而静止，在线框中应按什么方向、通以多大的电流？（取 g=10 牛/千克）

3.将一根导线弯成边长为 l 的正方形的三条边，它可以绕与正方形所缺的一条边重合的水平轴自由转动（如图 3-21），导线的截面积为 S，密度为ρ，磁感应强度为 B 的匀强磁场，竖直向上分布，当导线中通以图示方向的电流 I 时，导线框偏离原来的竖直位置θ角而平衡。求该磁场的磁感应强度 B 的大小。

4.在磁感应强度为 B 的匀强磁场中，一个通以电流 I 的等腰三角形线框的底边与磁场方向平行，两腰长为 l，底角为θ。试分析各边所受磁场力的大小与方向，求磁场对该通电线框的作用力矩。如该线框从图 3-22 所示位置转 90°，磁场对它的作用情况如何？

5.电流表中沿辐向分布的均匀磁场的磁感应强度 B=2×10^{-2} 特斯拉。边长 a=1×10^{-2} 米的正方线线圈共 100 匝，线圈转过 1°角时，螺旋弹簧产生阻碍线圈偏转的力矩是 2.5×10^{-8} 牛顿·米。试问，当线圈中的电流是 10 毫安时，电表的指针将转过多大的角度？

6.已知电流表中的线圈共 50 匝，线圈是矩形的，处在均匀辐向磁场中的两条边长 1 厘米，另两条边长 9 毫米，磁场的磁感应强度为 0.5 特斯拉，线圈每偏转 1°角，螺旋弹簧产生的阻碍力矩为 2.5×10^{-9} 牛顿·米。如指针的最大偏角为 90°，该电流表的量程是多少？当指针偏转 50°时，通过线圈的电流多大？

7.如图 3-23 所示，正六边形的线框，每边长 20 厘米，处在匀强磁场中，线框面与磁力线平行，磁场的磁感应强度为 1.5 特斯拉，若通以 10 安培的电流，分别以 OO' 与 $O_1O'_1$ 为轴，计算磁场对通电线框的作用力矩。

参考答案

（一）

6.铁芯环面上有沿水平方向向右的磁场，则与环面垂直的通电直导线受向下的磁场力。

7.（1）0.6 牛，水平向右；（2）G=0.8 牛。

8.（1）F_1=0.10 牛，F_2=0.06 牛，F_3=0.08 牛；（2）F_1、F_2、F_3 是共点力，合力为 0。

9.（1）ab 边受力 F_1=0.06 牛，垂直纸面向里；bc 边受力 F_2=0.06 牛，垂直纸面向外；ca 边不受磁场作用。（2）磁场对线框作用的总效果是转动。力矩大小为 0.0024 牛·米。

10.ab 受力为 1 牛，b 端 0.25 牛，a 端 0.75 牛；（2）6.7 安培。

11.i=1.25 安培。需要注意，安培力的作用点在 oa 的中点。

12.通过导线任何一个截面的电量均为 1.5 库仑。

13.（1）安培力 F=0.75 牛，水平向右；支持力 N=1.24 牛。

（2）合力 F=0.15 牛，沿轨道向上，加速度 a=1.5 米/秒^2。

（3）最大速度 v_m=4 米/秒。

14.（1）a=32 米/秒^2，水平向右。

（2）安培表：2 安，伏特表 v_2=4 伏，a=20 米/秒^2。

（3）v_m=8 米/秒，安培表读数为 0，伏特表 V_1=8 伏，V_2=8 伏。

15.t=100 秒时物体离开地面。

16.（1）F=3 牛；竖直向上；（2）F=6 牛，竖直向下。

（二）

1.从上向下看，电解液沿顺时针方向运动。

2.铝圆盘顺时针方向转动。

3.负载 R 的上端电势高，R 两端的电势差为 $U=\dfrac{BdvR}{(R+\rho\dfrac{d}{S})}$

（三）

1.（1）ab 边与 cd 边所受磁场力相等，均为 0.4 牛，方向相反而平行；ad 边与 bc 边所受磁场力相等，均为 0.48 牛，方向相反，在同一条直线上。（2）ad 边与 bc 边所受磁场力大小相等，方向相反，在同一直线上，互相抵消，对线圈运动没有影响；ab 边与 cd 边所受磁场力构成一对力偶，使线圈有绕 cd 边转动的趋势，力短为 3.6×10^{-2} 牛·米。

2.电流方向 a→b→c→d→a，电流强度为 10 安培。

3.$B=2S\rho g tg\theta/I$

4.ab 边受磁场力 $F_1=BIl\sin\theta$，方向垂直于纸面向外；cd 边受磁场力 $F_2=BIl\sin\theta$，方向垂直于纸面向里；bc 边不受磁场力作用。F_1、F_2 是一对

力偶，力矩为 $M=Bil^2\sin\theta\cos\theta$。

当线框转过 90°时，三边均受力，这三个力在同一平面里，合力为零。

5.80°

6.100 微安，56 微安。

7.OO'与 $O_1O'_1$ 均与磁力线垂直，故相对于这两根轴，力矩相同，均为 1.56 牛·米。