学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

通过模型学解题中学物理专辑

——振动波动问题

BOOK

内部资料 非卖品

献·给·读·者

《通过模型学解题》（物理）丛书是围绕高中物理教材，结合中学教学实际编写的学生课外读物．本丛书突破按知识体系谋篇布局的常规，力图引导学生换一种新的角度去窥视中学物理图景，领悟分析和解决物理问题的思路．什么叫物理模型？物理模型就是抽象化了的物理研究对象、条件或过程．物理模型可划分为实体模型与过程模型两大类．实体模型是研究对象或条件的抽象．质点、点电荷、点光源、光滑轨道、单摆、理想气体、匀强电场、匀强磁场、核式结构的原子等，都属于实体模型．

过程模型是对物理过程的抽象．直线运动、圆周运动、简谐运动、等温过程、静电平衡、稳恒电流、带电粒子在电场与磁场中的运动、导体在磁场中的运动等等，都是过程模型．

物理模型，按其性质特征、规模大小及相互联系，可以划分为不同的层次．本丛书以过程模型为结构框架，各分册有体现第一层次模型的书名和体现第二、三层次模型的简明目录．所谓“通过模型学解题”，就是根据物理问题的基本性质和特征，条分缕析，剖切成各个层次的过程模型，并抓住同一模型中各类问题的共同特性，例举有代表性的实体模型，综合运用各种物理知识，各种定理、定律，运用不同的观点、方法，归纳出解决问题的一般途径和方法技巧．

本丛书在研究具体问题时，以文字演算为主，避免繁琐的数值计算，从而使解决问题的方法更具广泛性，更显得逻辑严密．

按物理模型构建丛书框架，在不同层次的模型上展示物理图景，是一种新的编写体裁，新的尝试，前无经验，谬误和不妥之处难免，敬请读者批评指正．

王兴桃
1994 年 2 月

从学习知识的角度来看，研究机械振动与机械波，需要综合运用力学基本知识、基本规律，研究振动物体的运动与外力的关系，用功、能原理探讨振动过程的能量特性．从方法论的角度来看，由于振动过程、波动过程的显著特点是运动的周期性，所以在研究方法、物理模型与数学工具的运用上，都与直线运动和一般的曲线运动有明显的区别．学习研究振动与波动问题，不仅是重点知识的应用与深化，而且还是知识的拓宽与研究方法的发展．

简谐振动是本书研究的重点．由于任何复杂的周期运动都可以看作是若干个简谐振动的合成，所以，深刻理解简谐振动发生的条件，准确判断简谐振动的周期，熟练掌握描述简谐振动过程的各种数学方法十分重要．

参考圆是研究简谐振动的物理模型，也是描述简谐振动的有效的数学方法．作为物理模型，它把简谐振动与圆上的匀速圆周运动在一条直径上投影的运动联系起来；作为方法，应用参考圆可以在初等数学范围内，推导出一套描述简谐振动的数学公式和图象．这种把复杂运动与熟悉的简单的运动联系起来，用已有知识探索未知领域的方法，既直观简单，又易被理解和掌握，是科学研究常用的方法．了解并掌握这种方法，是分析解决实际问题的需要，也是培养提高能力的有效途径．

一、简谐振动

物体在平衡位置附近沿着直线或弧线所作的往复运动，叫作机械振动，简称振动．在日常生活中，机械振动的例子随处可见，如摆钟摆锤的运动，气缸内活塞的往复运动等等．晶体内部，位于晶格结点上的离子也是一刻不停地在振动．

作机械振动的物体之所以会在平衡位置附近往复运动，是因为一旦它离开平衡位置，便会受到指向平衡位置的回复力作用．物体的运动形式是由受力条件以及它的初始状态决定的．机械振动中，物体受到的回复力的大小、方向都改变，但方向总是指向其平衡位置．

在机械振动中，最简单也最重要的是简谐振动．简谐振动所受回复力的特点是：大小与相对其平衡位置的位移成正比，方向总是与位移方向相反，若用式子来表示，即为：

$$F=-kx$$

这里，x 表示位移，k 为正的常量，称为回复系数．负号的意义是回复力 F 与位移 x 方向相反．水平方向的弹簧振子所受弹簧的弹力就是回复力，它是简谐振动的典型例子．

竖直悬挂的轻弹簧下系一质量为 m 的小球，我们称之为竖直方向的弹簧振子，它的运动也是简谐振动，证明如下：

设弹簧原长为 l_0，下系质量为 m 的小球．静止时，弹簧伸长 x_0，根据胡克定律：

$$mg=kx_0$$

k 为该弹簧的倔强系数．以小球的平衡位置 O 为坐标原点，向下为 x 轴的正方向．现使小球在竖直方向运动起来，设某时刻小球相对其平衡位置的位移为 x，如图 1－1 所示．则小球受到向下的重力 mg 和向上的弹力 $k(x_0+x)$，回复力

$$F=mg-k(x_0+x)$$

将 $mg=kx_0$ 代入，得

$$F=-kx$$

由此可断定小球的运动是简谐振动．

作简谐振动的物体同样遵守牛顿第二定律，它的加速度

$$a=\frac{F}{m}=-\frac{k}{m}x$$

可见，加速度 a 也是与位移的大小成正比，方向与位移相反，总是指向平衡位置．因此，作简谐振动的物体的加速度，其大小、方向都时刻在变化，因而简谐振动不是匀加速运动，而是一种变加速运动．

●简谐振动的周期问题

作简谐振动的物体，我们称之为振子．振子的运动是一种周期性的运动．振子从某一状态开始运动，再次回到这一状态，叫作完成了一次全振动．振子完成了一次全振动所需的时间叫作周期，用字母 T 表示：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

式中 k 是回复系数．对弹簧振子来讲，k 就是弹簧的倔强系数．对一般简谐振动来讲，回复系数决定其振动周期．

单摆是简谐振动的一个非常重要的例子．在一根细线下拴一个小球，便组成了一个单摆，但严格说来，单摆是指在一根不能伸长且没有质量的线下系一质点所组成的模型系统．实际的单摆，悬线的伸长量比悬线本身长度小得多，线下所系小球的线度比线的长度小得多，线的质量比所系小球的质量小得多时，可以看作为理想单摆．

如图 1－2 所示，当单摆摆至任意位置（设这时摆角为 θ，$\theta<\theta_0<5°$）时，将其所受重力分解为沿圆弧切线方向的分力 F 及沿法线方向的分力 F′．F′＝mgcosθ，它与悬线中张力 T 的合力是摆球在此位置处作圆周运动的向心力，而 F 是使摆球产生切向加速度的力，即单摆的回复力．由图可见，

$$F = -mg\sin\theta \approx -mg\theta \approx -mg\cdot\frac{x}{l}$$

上式中有两步近似．第一步近似：sinθ≈θ，只有当 θ＜5°时，用弧度表示的 θ 角的数值才和 sinθ 的值近似地相等；第二步近似：$\theta\approx\frac{x}{l}$，θ 应为弧长与半径的比值，而式中的 x 为位移，数值上等于弦长，也只有当 θ＜5°时，弧长才能近似地用弦长（即位移 x）代替．

对于给定的单摆，m、l 皆为定值．在确定的地点，重力加速度 g 也为定值．故得：

F＝－kx

式中 $k=\frac{mg}{l}$ 是回复系数，于是单摆的振动周期：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

作为实例，下面研究几种变形的单摆．

［例 1］如果把单摆放在一个电梯中，当电梯(1)以加速度 a 加速上升时；(2)以加速度 a 加速下降时，单摆的周期分别为多大？

［分析与解］当电梯加速上升时，摆球处于超重状态，应以其视重 m（g＋a）代替原来的重力 mg，这时的回复力应是 m（g＋a）sinθ．由此不难得出，这时单摆的周期

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$$

同理，当电梯加速下降时，单摆的周期

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$$

电梯减速下降时单摆的周期和加速上升时的情况相同，减速上升时单摆的周期和加速下降的情况相同．

[例 2]如果把单摆悬挂在一个沿平直路面以加速度 a 匀加速前进的车厢内，情况又如何呢？

[分析与解] 这时，单摆的平衡位置已不在竖直方向，而是偏离竖直方向一定的角度α（图 1－3）．由牛顿第二定律以及物体的受力及运动情况分析，不难得出$\alpha = tg^{-1}(\frac{a}{g})$．当摆球被从这一平衡位置拉开至 A 点（这时悬线 OA 与平衡位置 OC 间有一小于 5°的夹角θ），放手以后，它将以平衡位置 C 为中心来回振动，振动的周期为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$$

这一周期公式对于水平加速和水平减速两种情况均适用，只不过悬线的平衡位置与竖直方向偏离的方位不同而已．火车若向右加速运动，悬线的平衡位置偏左；向右减速运动，则悬线的平衡位置偏右．

[例 3] 若摆球带电（比如带正电，电量为 q），且处在竖直向下的匀强电场中，（场强为 E）．其振动周期多大？

[分析与解] 小球除受重力外，还受到向下的电场力．代替原来单摆摆球重力 mg 的是重力和电场力的合力（mg＋qE）．这样，原来周期公式$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$中的g，以$g' = \frac{mg+qE}{m}$代之即可．

若电场竖直向上，且电场力小于重力，则公式中的g应以$g' = \frac{mg-qE}{m}$g′代之．若这种情况下小球所受的电场力大于重力，则小球平衡时将不是处在悬点以下，而是处在悬点正上方，g应代之以$g' = \frac{qE-mg}{m}$．

若电场沿水平方向，这时与原先重力mg地位相当的应是重力和电场力的合力$\sqrt{(mg)^2+(qE)^2}$，平衡位置偏移到悬线与竖直方向夹角为$\alpha = tg^{-1}(\frac{qE}{mg})$的地方，其振动的周期是：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\frac{\sqrt{(mg)^2+(qE)^2}}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+(\frac{qE}{m})^2}}}$$

综上所述，求变形单摆的周期，关键是变换原周期公式中的“g”．为此，要确定变形单摆在新的平衡位置“相对静止”时悬线中的张力与摆球质量的比值．

下面我们来讨论“浮子”在液面的振动情况．

［例 4］某圆柱体物块漂浮在液面，用手稍向下按物块，放手后，物块便上、下振动起来.这物块的振动是否为简谐振动？其振动周期多大？

［分析与解］设物块质量为 m，横截面积为 S．漂浮在液面处于平衡状态时，浸入液面下的深度为 b，设该液体的密度为ρ，则平衡方程为：$mg=\rho gSb$.

取竖直向下为 x 轴的正方向，原点在液面处．当物块在振动过程中向下发生位移 x 时，其受到的浮力为$\rho gS(b+x)$，浮力大于重力，合力（即回复力）向上，为：

$$F=mg-\rho gS(b+x)$$
$$=-\rho gSx$$
$$=-kx$$

式中 $k=\rho gS$ 为常量，因此，物块的运动是简谐振动，振动周期为：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gs}}$$

从上面的推导过程可以看到，“浮子”在液面上、下简谐振动，其柱体的横截面积 S 必须为常量，这样回复力才可以写成 $F=-kx$ 的形式．要求 S 为常数，并不意味浮子本身一定是柱体．因为引起回复力变化的只是浮力的变化，浮力的变化是由排开的液体的重力决定的．因此，浮子只要以其平衡时的液面位置为中心，长度为 2A（A 为上、下振动的振幅）的一段横截面积 S 为常量，其在液面的振动就是简谐振动．

［例 5］如图 1－5 所示，相距 2a 的两转轮 O_1、O_2 反方向旋转，其上放置一均匀的木板，木板和转轮间的摩擦系数为μ．开始时，木板中点已偏离两转轮的中心线 MM′，试证明木板将作简谐振动，并求出其振动周期.

证明 设某时刻木板中点偏离 MM′的距离为 x,并设木板质量为 m.根据力矩平衡原理，有

$$N_1\cdot 2a=mg(a+x)$$
$$N_2\cdot 2a=mg(a-x)$$

$$\therefore N_1=\frac{a+x}{2a}mg\qquad N_2=\frac{a-x}{2a}mg$$

摩擦力 $f_1=\mu N_1=\frac{a+x}{2a}\mu mg\qquad f_2=\mu N_2=\frac{a-x}{2a}\mu mg$

f_1向右，f_2向左．由于图示时刻 $f_1>f_2$，故合力（f_1-f_2）方向向右，与板中心相对于二转轮中心线 MM′的位移 x 方向相反，它就是使木板振动的回复力．以向左为 x 轴的正方向，则

$$F=-f_1+f_2=-\frac{\mu mg}{a}x$$

令 $\frac{\mu mg}{a}=k$ 则 $F=-kx$

由此可知，木板作简谐振动，其振动周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{a}{\mu g}}$$

［例 6］二轻质弹簧，倔强系数分别为 k_1、k_2，与一个质量为 m 的小球按图 1－6 所示三种情况组合成一个振动系统．该系统的振动周期分别为多大？

［分析与解］我们可取振子原先的平衡位置为坐标原点，x 轴水平向右．设小球某时刻向右发生位移 x．对于第(1)种情况，弹簧 1 伸长 x，弹簧 2 被压缩 x，两弹簧对小球产生的弹力皆沿 x 轴负方向，故回复力

$F=F_1+F_2=-k_1x-k_2x$

$=-(k_1+k_2)x$

令 $k=k_1+k_2$ 则 $F=-kx$

周期 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$

第(2)种情况，两弹簧皆伸长 x，故回复力

$F=F_1+F_2=-k_1x-k_2x=-(k_1+k_2)x$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

第(3)种情况，设弹簧 1 伸长 x_1，弹簧 2 伸长 x_2，则振子位移

$x=x_1+x_2$

又因两弹簧中张力必相等，故有

$k_1x_1=k_2x_2=kx$

这里，k 是将两弹簧组合后作为一个弹簧看待时的倔强系数．这样可得到

$x_1=\frac{kx}{k_1}$，$x_2=\frac{kx}{k_2}$

代入 $x=x_1+x_2$，可得

$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$ 或 $k=\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}$

由此可得该系统的振动周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{(\frac{k_1+k_2}{k_1k_2})}}$$

［例 7］A、B 两物体叠放着，在光滑水平面上由弹簧拉着 B 一起（无相对滑动地）作简谐振动，如图 1－7 所示．A、B 的质量分别为 m_A、m_B，A、B 间的摩擦系数为 μ，轻弹簧的倔强系数为 k，试求：

(1)若振幅为 A，在振动过程中静摩擦力的最大值是多大？

(2)为使 A、B 不发生相对滑动，振幅 A 不得超过何值？

［分析与解］(1)因 A、B 间无相对滑动，故可先将 A、B 整体作为研究对象．由于振幅为 A，故知回复力的最大值：

$F_m=kA$

A、B 的共同最大加速度：

$$a_m=\frac{F_m}{m_A+m_B}=\frac{kA}{m_A+m_B}$$

由于物体 A 是靠 B 对它的静摩擦力维持其随 B 一起振动的，因此振动过

程中 A、B 间的最大静摩擦力：

$$f_m = m_A a_m = \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot kA$$

(2)由于 B 对 A 可提供的最大静摩擦力 $f_m' = \mu m_A g$，所以振动中物体 A 可达到的最大加速度：

$$a_m' = \frac{f_m'}{m_A} = \mu g$$

要保证 A、B 间不发生相对滑动，物体 B 的加速度也不得超过此值，即系统（A、B）振动中的加速度都不可超过 a'_m．因此回复力不得超过

$F_m' = (m_A + m_B) a_m' = (m_A + m_B) \mu g$，振幅不得超过：

$$A_m = \frac{F_m'}{k} = \frac{(m_A + m_B)\mu g}{k}$$

第(2)小题也可这样求解：直接令第(1)小题最后结果中的 $f_m = f'_m = \mu m_A g$，同时令 $A = A_m$，可方便地求出 A_m．

［例 8］如图 1－8 所示，一长为 l 的细绳，一端固定，另一端拴一个质量为 m 的摆球．将球放在一个质量也为 m 的滑块的光滑槽内，并可在槽内自由移动．已知地面光滑，摆线与竖直方向之间的最大偏角小于 5°，摆线质量不计，则系统的振动周期是多少？

［分析与解］该系统在振动过程中，当偏角为任意值 θ 时，回复力

$$F = -mg\sin\theta \approx -mg\theta \approx -\frac{mg}{l}x$$

与弹簧振子的回复力公式 $F = -kx$ 相比较，有 $k = \frac{mg}{l}$。对照弹簧振子的周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$，本题的振动系统中，与公式中 M 相对应的是同时参与振动的小球和滑块的总质量 2m，故得该振动系统的振动周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{mg/l}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$$

小结：上述各问题求解的步骤大致相同，即先设法写出回复力的表达式，看是否符合 $F = -kx$．若符合，则该系统所作的振动是简谐振动．这时自然也就得出了回复系数 k 的表达形式，代入简谐振动的周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，便可求得周期．

●摆钟走时的校准问题

由单摆的周期公式可以看出，在同一地点，重力加速度 g 为定值，在摆长 l 保持不变的情况下，单摆的振动周期就保持不变．这一性质称为单摆的等时性．前人利用单摆的这一性质，制成了计时用的摆钟．摆钟在一个地方计时准确，搬到另一个地方，重力加速度改变了，周期也将跟着改变．这样，原来走时准确的摆钟，搬到新地方，计时就可能不再准确．即使在同一地点，重力加速度保持不变，但因气温的变化，使摆长 l 伸长或缩短，也会导致摆钟振动周期的改变，因此影响摆钟的准确计时．在这两种情况下，都必须对摆钟进行校准．

校准摆钟的计算一般很繁琐，这一方面是由于不同因素所引起摆钟计时的误差本来就很小，要准确校准，计算的精确度要求很高；另一方面单摆周期公式中还包含了开方运算．比较好的方法是尽量利用比例关系，先消去一些常数，并省去一些中间数字计算，从而使运算过程大大减化．

对于给定的摆钟，它所显示的时间，我们称之为表观时间，记为 t，它与摆钟振动次数 N 成正比．在一定的时间内，N 又与摆钟的振动周期成反比：

$$t \propto N \propto \frac{1}{T} \propto \sqrt{\frac{g}{l}}$$

我们用带撇号的字母表示不准确摆钟对应的量，而用不带撇号的字母表示准确摆钟对应的量。则在同一地点，g值不变，$t \propto \sqrt{\frac{1}{l}}$，或$l \propto \frac{1}{t^2}$，即

$$\frac{l'}{l} = \left(\frac{t}{t'}\right)^2 = \left(\frac{t}{t+\triangle t}\right)^2$$

$$l' = \left(\frac{t}{t+\triangle t}\right)^2 l$$

$$\triangle l = l - l' = l\left[1-\left(\frac{t}{t+\triangle t}\right)^2\right]$$

若钟走快了，△t＞0，则 l′＜l，应将摆长增加△l；若钟走慢了，△t＜0，则 l′＞l，应将摆长缩短|△l |．

在不同地点，g 值不同，要想保持摆钟准确计时，应使 T′＝T，即 $2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

因此必须调节摆长 l：

$$\frac{l'}{g'} = \frac{l}{g}，\ l' = \frac{g'}{g} l$$

应改变的摆长值为：

$$\triangle l = l - l' = l\left(1-\frac{g'}{g}\right)$$

若重力加速度增大，即 g′>g，则△l<0，表示摆长应增长；若重力加速度减小，即 g′<g，则△l>0，表示摆长应缩短．

下面我们通过几个具体例子来熟悉一下这类计算问题．

［例 1］北京和南京的重力加速度分别为 9.812 米／秒²和 9.795 米／秒²．把在北京准确的时钟拿到南京去，钟将变慢还是变快？一昼夜相差多少？在南京怎样将钟校准？

［分析与解］钟面上显示的时间 t 与一昼夜钟摆动的次数 N 成正比，而 N 又与摆的周期 T 成反比，故有

$$t\propto N\propto \frac{1}{T}$$

而 $$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

在l保持不变的前提下，$T\propto 1\sqrt{g}$，故

$$\frac{T'}{T}=\sqrt{\frac{g}{g'}}$$

由于 g′<g，所以 T′>T，表示摆钟从北京拿到南京后，钟将变慢．设一昼夜慢△T 秒，则

$$\triangle t=N(T-T')=NT(1-\frac{T'}{T})=NT(1-\sqrt{\frac{g}{g'}})=86400\times(1-\sqrt{\frac{9.795}{9.812}})$$

$=74.9$（秒）

在南京应将摆长由 l 缩短为 l′，以使

$$2\pi\sqrt{\frac{l'}{g'}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

由此， $$l'=\frac{g'}{g}l$$

$$\triangle l=l-l'=l(1-\frac{l'}{l})=l(1-\frac{g'}{g})=0.00173l$$

［例 2］一单摆在地面时，其周期为 T_1，把这个单摆放到高为 h 的山顶上时，其周期变为 T_2．已知地球半径为 R，则此山的高度为多少？

［分析与解］根据单摆周期公式$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，知$T\propto 1/\sqrt{g}$。由万有引力知识，我们知道，$g=\frac{GM}{r^2}\propto\frac{1}{r^2}$，故有$T\propto r$。已知$r_1=R$，$r_2=R+h$，故

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{R}{R+h}$$，得$$h=\frac{T_2-T_1}{T_1}R$$

［例 3］有一个摆钟，它的摆长为 0.250 米，经测试，它每天慢 5 分钟．问：应如何调整它的摆长，才能使其准确计时？

［分析与解］准确的摆钟，每天摆动的次数必定是恒定的，这样才能保证钟的分针每天转 24 周，时针转 2 周．钟慢了，则该钟每天摆动的

次数少了，也就是它的摆动周期长了．

设准确的钟每天摆动 n 次，摆动周期为 T，摆长为 l，则有：

nT＝24×60×60（秒）＝86400（秒）

如待校准的钟摆动周期为 T′，摆长为 l′，则它摆动 n 次的时间为

nT′＝86400（秒）＋5×60（秒）＝86700（秒）

由 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，可得：

$$\frac{T}{T'}=\sqrt{\frac{l}{l'}}=\frac{86400}{86700}$$

可见，准确计时的钟摆长应为：

$$l=(\frac{86400}{86700})^2 l'=0.993l'$$

＝0．993×0．250（米）

≈0．248（米）

即应把摆长缩短 2 毫米．

［例 4］一台摆钟，当摆长为 l_1 时，它每天快 t 秒；当摆长调到 l_2 时，每天慢 t 秒．试求，准确计时时，摆长 l 应多长？

［分析与解］解法一：设一天的时间为 t_0 秒（86400 秒），准确计时的摆钟的摆长为 l，周期为 T；摆长为 l_1 时，周期为 T_1；摆长为 l_2 时，周期为 T_2。根据 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 和已知条件，可知：$l_1<l<l_2$，$T_1<T<T_2$．对快钟来讲，每天快 t 秒，则每天摆动的次数为 $\frac{t_0}{T_1}$，多计时：$t=\frac{t_0}{T_1}(T-T_1)$；对慢钟来讲，每天摆动的次数为 $\frac{t_0}{T_2}$，每天少计时：$t=\frac{t_0}{T_2}(T_2-T)$．故得

$$\frac{t_0}{T_1}(T-T_1)=\frac{t_0}{T_2}(T_2-T)$$

即 $\frac{T}{T_1}-1=1-\frac{T}{T_2}$，$T(\frac{T_1+T_2}{T_1T_2})=2$

将单摆的周期公式代入上式（注意其中重力加速度 g 值相同），化简后可得准确计时的钟摆长度为：

$$l=\frac{4l_1l_2}{l_1+l_2+2\sqrt{l_1l_2}}$$

解法二：根据题意及前设条件可列下表：

	周期	一天摆动的次数
快钟	$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$	$n_1 = \frac{t_0}{T_1}$
慢钟	$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$	$n_2 = \frac{t_0}{T_2}$
准确的钟	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$	$n = \frac{t_0}{T}$

快钟每天多摆动（n_1－n）次，多计时 t＝T（n_1－n）；慢钟每天少摆动（n－n_2）次，少计时 t＝T（n－n_2）．故得：T（n_1－n）＝T（n－n_2）

$$\frac{1}{\sqrt{l_1}} = \frac{1}{\sqrt{l}} = \frac{1}{\sqrt{l}} = \frac{1}{\sqrt{l_2}}$$

整理后可得校准后的摆长应为：

$$l = \frac{4l_1l_2}{l_1 + l_2 + 2\sqrt{l_1l_2}}$$

●简谐振动的图象问题

匀速直线运动、匀变速直线运动等既可用函数关系表示，也可用图象表示．同样地，简谐振动也可用图象表示．

以横坐标表示时间 t,纵坐标表示作简谐振动的质点相对其平衡位置的位移 x，所画出的 x—t 图线是一条按正弦（或余弦）规律变化的曲线，如图 1－9 所示，这便是简谐振动的位移一时间图象．

公式 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$ 表示作简谐振动的质点相对其平衡位置的位移 x 随时间 t 的变化规律．位移的最大值为 A，叫作振幅；ω叫作圆频率（或角频率），而（ωt＋φ）叫作该简谐振动的相位．在振动和波的研究中，相位是个十分重要的概念，它是决定质点振动状态的物理量．在振动质点的振幅 A 给定的情况下，只要知道振动的相位，则质点相对其平衡位置的位移、速度以及加速度等就都被确定．t＝0 时的相位φ，反映了计时开始时刻质点的状态，故φ叫作初相位．相位这个物理量还用来比较两个振动的步调．对于两个频率相同的简谐振动，只要它们的初相位相同，则它们的步调就始终是一致的，即这两个振动质点总是向同一方向振动，同时经平衡位置，且同时达到正（或负）方向的最大位移，我们称这两个振动是同相的［见图 1－10(a)］．当两个振动的初相位不等时,则其的步调就不一致,我们就说它们存在相差([见图 1－10(b)].当相差$\triangle\varphi=\varphi_1-\varphi_2=\pi$时，它们的步调恰好相反，这时两个振动质点的运动方向总是相反，一个到达正方向最大位移处，另一个恰好到达负方向最大位移处，我们称这两个振动相位相反或反相［见图 1－10(c)］．

在一个周期之内，质点所经历的状态是时刻在变化的．从相位来说，这相当于相位经历从 0 到 2π的变化．从图 1－9 可以看到，t＝0 时的位移 $x_0=A\cos\varphi$是由初相φ决定的，曲线上各 x 值对应于各自的相位（ωt＋φ）．在曲线中，我们还应注意到，在 t_1、t_2 两个时刻，质点的位移虽然相同，但速度方向却正好相反，因而 t_1、t_2 这两个时刻质点的运动状态并不相同．

为了进一步了解简谐振动表示式中 A、ω和φ三个物理量的意义，我们这里简单介绍简谐振动的矢量图表示法．

如图1-11所示，设有一长度为A的旋转矢量OP在平面内绕原点O以角速度ω逆时针匀速旋转。如t＝0时，$\overrightarrow{OP}$的位置在$\overrightarrow{OP}_0$处，$\overrightarrow{OP}_0$与Ox轴间的夹解为φ。这样，在任意时刻，矢量$\overrightarrow{OP}$与 Ox 轴间的夹角就是（ω t ＋φ）。矢量$\overrightarrow{OP}$的端点 P 在 Ox 轴上的投影 P′此刻相对于原点 0 的位移为：

$x=A\cos(\omega t+\varphi)$，

可见，当矢量$\overrightarrow{OP}$匀速转动时，其端点 P 在 x 轴上的投影 P′的运动即为简谐振动．这样，我们就把简谐振动与一匀速旋转矢量端点的运动联系起来了．并且还能直观地看到描述简谐振动的物理量：振幅 A、圆频率ω、相位（ωt＋φ）及初相位φ与旋转矢量的长度、角速度、角位移及初始角位置的对应关系．

当矢量$\overrightarrow{OP}$匀速转动时，其端点 P 即在半径等于 A 的圆周上作匀速圆周运动，我们通常把这个圆称为简谐振动的参考圆．实际上，我们可将

矢量端点的运动看作一个动点 P 在参考圆上匀速转动，而以该动点在参考圆的一条直径上的投影点的运动来代表给定的简谐振动．显然，这种简谐振动的参考圆表示法和旋转矢量表示法没有什么实质上的差别．

当动点 P 沿圆周运动一周时,其投影点 P′在直径上就完成了一次全振动．质点完成一次全振动所经过的时间叫作周期，记为 T．显然，T 和角频率ω之间有如下关系：

$T=2\pi/\omega$

我们来比较下面两个简谐振动：

$x_1=A\cos(\omega_1 t+\varphi_1)$

$x_2=A\cos(\omega_2 t+\varphi_2)$，

这两个简谐振动的振幅相等，圆频率和初相位不等，它们用旋转矢量$\overrightarrow{OP_1}$和$\overrightarrow{OP_2}$表示在同一个图上（见图 1-12），初始角位置分别为φ_1和φ_2。时刻 t $\overrightarrow{OP_1}$与$\overrightarrow{OP_2}$间的夹角$\triangle\varphi=(\omega_1 t+\varphi_1)-(\omega_2 t+\varphi_2)$，叫相位差。如果$\omega_1\neq\omega_2$，$\triangle\varphi$将随时间 t 而变化．但如果$\omega_1=\omega_2=\omega$，则$\triangle\varphi=(\omega t+\varphi_1)-(\omega t+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2$，$\triangle\varphi$不再随时间变化，即在圆频率相等的情况下，任意时刻二简谐振动的相位差等于它们的初相位之差，为一定值．在这种情况下，二旋转矢量向同一方向以共同的角速度ω旋转，因此二矢量间的夹角（$\varphi_1-\varphi_2$）保持不变，相应地，二矢量端点在 x 轴上的投影点 P_1′与 P_2′都将在同一直线上作简谐振动，它们的振幅相等，频率相同，但在相位上 P_1 比 P_2 总是超前一个恒定的值$\triangle\varphi=\varphi_1-\varphi_2$，在时间上$P_1$′比$P_1$′总是超前$\triangle\tau=\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{\omega}$．将这两个振动图线在同一坐标中画出来，如图 1－13 所示．虚线代表 P_1'点的振动，实线代表 P_2'点的振动，可以看到，这两个振动图线形状相同，只要将代表P_2'点振动的实曲线向左平移$\triangle t=\dfrac{\varphi_1-\varphi_2}{\omega}$，它就与代表$P_1$′点振的虚曲线完全重合．

在图 1-11 中，如果开始计时的时刻，即 t = 0 时刻，$\overrightarrow{OP}$矢量从$\overrightarrow{OA}$位置开始旋转的，则 P′点振动的初相位就为 0；如果是从$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$位置开始旋转的，则P'点的初相位就分别为$\dfrac{\pi}{2}$、π、$\dfrac{3\pi}{2}$，等等．

以上初相位值的确定，是以余弦函数表示振动质点的位移随时间变化规律而言的。如果我们将旋转矢量 $\overrightarrow{OP}$ 向 y 轴投影，则不难得出投影点的运动规律为

$y=A\sin(\omega t+\varphi)$

它是以正弦函数表示该投影点的位移一时间关系的．由于 $\cos(\omega t+\varphi)=\sin(\omega t+\varphi+\pi/2)$，因此，同一质点的振动，当分别用正弦和余弦函数描述时，它们在相位上将有$\pi/2$ 的差值．例如，在图 1－14 中，质点在 A、B 间以 O 为平衡位置作简谐振动．当质点从 A 开始运动时，以余弦函数表示，其初相位为零；而若以正弦函数表示，其初相位为$\pi/2$．

利用参考圆还可以十分方便地建立简谐振动的速度、加速度与时间之间的关系．

在图 1－15(a)中，t 时刻作为匀速圆周运动的质点 P 的速度大小为ωA，方向沿圆周切线方向，该速度在 x 轴上的投影即为 P′点在 t 时刻作简谐振动的速度 v.由图可知，

$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

在图 1－15(b)中，P 点的加速度（同心加速度）为ω^2A，其在 x 轴上的投影即为 P′点作简谐振动的加速度 a．不难看出，

$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2x$

可见，作简谐振动的质点，其加速度 a 的大小与位移成正比，方向总是与位移方向相反．

如果初相位$\varphi=0$，则简谐振动的位移、速度、加速度相应地分别为：

$x=A\cos\omega t$

$v=-\omega A\sin\omega t$

$a=-\omega^2A\cos\omega t=-\omega^2x$

它们的图象分别表示在图 1－16 的(a)、(b)、(c)图中．

［例 1］某同学在研究一个作简谐振动的质点的振动情况，当质点经过平衡位置时开始计时．经测量，他得知：质点的振动周期为 T（秒）；当$t=3\frac{5}{6}T$（秒）时，质点与平衡位置间的距离为a．根据他的测量结果，你能写出该质点的振动方程吗？

[分析与解]如前所述，振动方程是表示作简谐振动的物体（质点），相对于平衡位置的位移（x）随时间（t）变化规律的方程：$x=A\cos(\omega t+\varphi)$．从振动方程的标准形式来看，它有三个要素：振幅(a)，角频率（ω），初相位（φ）．可见，只要能够确定这三个物理量，质点的振动方程便被唯一确定了．

根据测量，质点的周期为T，而$T=\frac{2\pi}{\omega}$，可知质点振动的圆 频 率为：

$$\omega=\frac{2\pi}{T}$$

由于质点经过平衡位置时开始计时，即 t=0 时，x=0．将此代入振动方程的标准形式：$0=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot 0+\varphi\right)=A\cos\varphi$，可得质点振动的初相位为：

$$\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$$

根据测量，$t=3\frac{5}{6}T$时，$|x|=a$，即：$a=\left|A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\times 3\frac{5}{6}T\pm\frac{\pi}{2}\right)\right|=A\cos\left|\left(\frac{5}{3}\pi\pm\frac{\pi}{2}\right)\right|$由此可得质点的振幅为：

$$A=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

在确定了质点振动的三要素后，便可写出它的振动方程为：

$$x=\frac{2\sqrt{3}}{3}a\cdot\cos(\frac{2\pi}{T}\cdot t\pm\frac{\pi}{2})$$

方程表示的位移的单位，由 a 的单位决定．式中初相位φ的“±”号不能确定，是由于题目中的已知条件不明确．“质点经过平衡位置时开始计时”．这里有两种情况：一是沿着规定的正方向通过平衡位置，还有一种情况是沿相反的方向通过平衡位置．请读者想一想，初相位的“+”号对应于哪种情况？“－”号对应于哪种情况？

再者，题目中说：“当$t=3\frac{5}{6}T$（秒）时，质点与平衡位置间的距离为a．”请问：当$t=3\frac{5}{6}T$（秒）时，质点的位移是$+a$还是$-a$？

你如果能结合教材，并参阅前面介绍的参考圆，把上面两个问题想通、弄懂，你就确实已经理解了振动的三个要素，掌握了确定振动方程的基本方法．

[例 2]一个弹簧振子，弹簧的倔强系数 $k=1.0\times10^3$ 牛／米，振子的质量 m=0．10 千克．把振子从平衡位置拉偏 10 厘米后由静止释放，不计阻力，它便在 P 点和 M 点之间作简谐振动（图 1－17）．(1)写出振子的振动方程；(2)振子从平衡位置右边 5．0 厘米的 A 点运动到平衡位置左边 5．0 厘米的 B 点，至少要用多少时间？

[分析与解](1)对弹簧振子来讲，回复系数就是弹簧的倔强系数，由周期公式$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$和公式$\omega=\frac{2\pi}{T}$，可知：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{0.10}{1000}}\text{（秒）}=\frac{2\pi}{100}\text{（秒）}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=100\text{（弧度/秒）}$$

由已知条件可知振子的振幅 A=0．10（米），若振子处在 P 点时开始计时，则初相位φ=0，这样，振子的振动方程为∶x=0．10cos（100t）（米）

(2)从 P 点开始计时，振子从 P 到 A 用时间 t_1 秒，在 A 点时位移为+0.05 米；振子从 P 到 B 用时间 t_2 秒，在 B 时位移为－0．05 米，列出下列两个方程：

+0．05=0．10cos（100t_1）

－0．05=0．10cos（100t_2）

解得：$t_1=\frac{\pi}{300}$（秒），$t_2=\frac{2\pi}{300}$（秒）

可见，由 A 到 B 所用时间为：

$$\triangle t=t_2-t_1=\frac{\pi}{300}\text{（秒）}\approx0.01\text{秒}.$$

确定振子从 A 到 B 所用的最少时间，还可以应用参考圆的方法来求．在图 1－18 中，振子在 x 轴上从 A 点运动到 B 点，相当于参考点在参考圆上从 A′点运动到 B′点，参考点在参考圆上以角速度ω作匀速圆

周运动，根据已知条件可知 OA′与 Ox 轴夹 60°角，OB′与 Ox 轴夹120°角，可见，从A′到B′所用的时间应为1／6周期，即

$$\triangle\tau=\frac{T}{6}=\frac{\pi}{300}\text{秒}.$$

十分明显，参考圆的方法不仅可以形象、直观地帮助我们理解简谐振动的规律，获得描述简谐振动的数学表达式，而且可以简化分析、解决实际问题的过程．参考圆的方法与数学中描述正弦、余弦函数的单位圆方法十分相似．主要区别是单位圆的半径为 1 个单位，而参考圆的半径是简谐振动的振幅 A．象数学中采用单位圆模型研究三角函数，物理学中采用参考圆模型研究简谐振动，都是自然科学研究中采用模型研究问题的具体实例．“通过模型学解题”，不仅仅是为了解题，更重要的是要学会一种研究问题的方法．其意义是不言而喻的．

[例 3]导弹、卫星上的仪表及计算机等设备，在发射或运行过程中都要承受很大的加速度．所以在发射之前都要对它们进行相关的试验．为此，将待试验的仪器、仪表等装在一个在水平方向上作简谐振动的试验台上．如果试验台的振幅为 2．5 厘米（0．025 米），要使试验台在振动过程中的最大加速度不小于重力加速度的 10 倍，试验台的振动频率应多大？

[分析与解] 取 g=10 米／秒 ^{2}，则该试验台振动中的最大加速度应不小于 100 米／秒 ^{2}．

简谐振动的加速度随时间变化规律为：

$a=-A\omega^2\cos\omega t$

可见，其最大加速度值为：

$a_m=A\omega^2=4\pi^2f^2A\geq 10g$

式中 f 为试验台的振动频率，角频率ω=2πf，由上式可得：

$$f\geq\sqrt{\frac{10g}{4\pi^2A}}=\frac{10}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{0.025}}\approx 10\text{（赫兹）}$$

即：试验台的振幅为 2．5 厘米时，只要其振动频率不小于 10 赫兹，试验台及安装在试验台上的仪器、仪表等，就会接受不小于 10 倍重力加速度的考验．用试验台振动的方法做加速度试验，可以在实验室中很小的空间里进行，一般的电子设备制造厂都有这种试验台．

从公式 $a_m=4\pi^2f^2A$ 可以看出，试验台振动中的最大加速度与振幅成正比，与振动频率的平方成正比．可见，试验台的频率不仅可调，而且它的振幅也应能根据需要进行调整．

[例 4]图 1－19 是光滑水平面上的一个振动系统.两根弹簧的倔强系数分别为 k_1 和 k_2，振动前，这两根弹簧均为自由长度．质量分别为 M 和 m 的两个物体之间的静摩擦系数为μ,振动过程中这两个物体始终保持相对静止．求：(1)要使两个物体在振动中保持相对静止，振幅的最大值是多大？(2)从平衡位置开始计时，写出系统的振动方程．

[分析与解](1)两个物体间的最大静摩擦力 $f_m=\mu mg$，所以振动中的最大加速度 $a_m=\mu g$．

振动系统的回复力由两根弹簧的弹力决定，当振幅为 A 时，两根弹簧的弹力的合力最大值为 $f'=(k_1+k_2)A$，可见，振动中应满足的条件

是：

μ（m+M）g≥（k_1+k_2）A

$$A \le \frac{\mu(m+M)g}{k_1+k_2}$$

即振幅不能超过μ（m+M）g／（k_1+k_2），否则两个物体将会有相对运动．

(2)振动系统的总质量为（m＋M），回复系数为（k_1+k_2），所以振动周期与圆频率分别为：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k_1+k_2}}，\ \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m+M}}$$

由于振子通过平衡位置时开始计时，所以初相位有两个值：$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$，$\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$。可见，振动方程有两种可能的形式：

$$x_1 \le \frac{\mu(m+M)g}{k_1+k_2}\cos\left[\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m+M}}\cdot t+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$x_2 \le \frac{\mu(m+M)g}{k_1+k_2}\cos\left[\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m+M}}\cdot t-\frac{\pi}{2}\right]$$

x_1 是从右向左通过平衡位置时的振动方程，x_2 是从左向右通过平衡位置时的振动方程．

例 4 的特色在于振幅的确定．物体 m 的加速度是由物体 M 对它的静摩擦力确定的；物体 m 与物体 M 一起运动，它们的共同加速度是由两根弹簧的弹力的合力决定的；把静摩擦力与弹簧的弹力联系起来的是两个物体在振动中始终保持相对静止，它们有相同的加速度．可见，全面、正确地分析问题是解题的关键．在分析问题时，必须明确研究的对象．在例 4 中分别以物体 m 和把两个物体当成一个整体作为研究对象，使它们产生加速度的力也不相同，振动方程中的符号“≤”，正反映了这两个力的大小关系．

●简谐振动的能量问题

我们以弹簧振子为例，讨论简谐振动的能量问题．用外力将小球从其平衡位置拉开一段距离的过程中，外力克服弹簧的弹力做了功，这部分功是以弹性势能的形式储存在弹簧振子系统之中的．放手后，振子开始振动，弹性势能和小球的动能互相转化．如果没有摩擦阻力，则振动系统的机械能守恒．

设弹簧的倔强系数为 k，小球的质量为 m，振幅为 A；振动到平衡位置时，速度达最大值，设为 v_m；在振动过程中的任意时刻 t，设小球相对其平衡位置的位移为x，速度为v．则t时刻，小球的动能$E_k=\frac{1}{2}mv^2$；系统的弹性势能$E_p=\frac{1}{2}kx^2$．

系统的机械能为两者之和，是一个定值，它等于小球在平衡位置时的动能，也等于小球位移达最大值时的弹性势能，即有

$$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}kA^2$$

这一结论我们也可从简谐振动的运动方程得到．为简单起见，取初相位φ=0，t 时刻，简谐振动的位移和速度为：

$x=A\cos\omega t$，$v=-\omega A\sin\omega t$

总能量为：

$$E=\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}k(A\cos\omega t)^2+\frac{1}{2}m(-\omega A\sin\omega t)^2$$

弹簧振子的周期：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{2\pi}{\omega}，\therefore\omega^2=k/m$$

由此可得：$E=\frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t+\frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega t=\frac{1}{2}kA^2$．

可见，简谐振动系统的能量与振幅 A 的平方成正比．

对于单摆，振动过程中重力势能和动能互相转化，而总的机械能仍守恒．在图 1－20 中，设单摆的摆长为 l，小球质量为 m，幅角为 θ_0，任意时刻 t，摆球速度大小为 v，摆线与竖直方向的夹角为θ．取小球在其平衡位置处的重力势能为零，这时小球速度有最大值，设为 v_m．则 t 时刻，摆球势能和动能分别为：

$$E_p=mgl(1-\cos\theta)，E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

由于 $E_k=mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)$，所以系统总机械能：

$$E=E_p+E_k=mgl(1-\cos\theta)+\frac{1}{2}mv^2$$

$$=mgl(1-\cos\theta)+mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

$$=mgl(1-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}mv_m^2$$

不难看出，对于单摆，振幅越大，即幅角θ_0越大，系统的机械能也越大.

竖直方向的弹簧振子，在振动过程中重力势能、弹性势能和动能三者互相转化而总的机械能保持不变.

以上几例都没有考虑摩擦阻力的作用，因而不会出现机械能向热能的转化，否则系统的机械能将有一部分要转化为内能，机械能减少，振幅随之减小.

以振幅有无变化对振动进行分类，可将振动分为阻尼振动和无阻尼振动两类．振幅不变的振动叫作无阻尼振动；振幅逐渐减小的振动叫作阻尼振动.

也可以把振动分为自由振动和受迫振动两类．系统开始振动以后，除受到回复力的作用外，不再受到外力的干扰，则这类振动叫作自由振动．物体作自由振动时，其周期或频率是由振动系统本身的条件决定的，叫作振动系统的固有周期或固有频率．物体在周期性外力（称为策动力）作用下的振动叫作受迫振动．系统作受迫振动的振动频率等于策动力的频率，跟物体的固有频率无关.

受迫振动有一种特殊的情况，叫作共振．当策动力的频率跟振动系统的固有频率相等时，策动力对系统做正功，能量不断增加，振幅达到最大值，这种现象叫作共振．声学和电磁学中都有类似的共振现象．声学中的共振现象叫作共鸣，电磁学中的共振现象叫作电谐振.

下面我们通过两个例子来进一步熟悉一下这部分的内容.

[例 1]一个质量为 m=4．0 千克的金属球作简谐振动，振幅 A=0.15 米，周期 T=2．0 秒．求振动系统的总能量.

[分析与解]对简谐振动系统来说，其总能量为一定值，它等于金属球通过平衡位置时的动能，也等于金属球达到最大位移时的弹性势能，所以可以有两种方法求解.

方法一：振动系统的圆频率为：

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\times3.14}{2.0}=3.14\text{（弧度／秒）}$$

金属球通过平衡位置时的速度值为：

$v_m=\omega A=3．14\times0．15=0．47$（米／秒）

故总能量为：

$$E=\frac{1}{2}mv_m^2=\frac{1}{2}\times4.0\times0.47^2=0．44\text{（焦耳）}$$

方法二：由周期公式$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，可求振动系统的倔强系数：

$$k=\frac{4\pi^2m}{T^2}=\frac{4\times3.14^2\times4.0}{2.0^2}=39.4\text{（牛 / 米）}$$

当金属球的位移为 A 时，系统的弹性势能与总能量相等：

$$E=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}\times39.4\times0.15^2=0．44\text{（焦耳）}.$$

[例 2]弹簧的一端沿水平方向固定在墙上,另一端与水平桌面上质量

为 m 的木块相连（图 1－21）．已知弹簧的倔强系数为 k，木块与桌面之间的摩擦系数为μ．现将木块从平衡位置向右拉，使弹簧被拉长 A，然后由静止松手，木块将作减幅振动．若弹簧第一次恢复到原长时，木块通过平衡位置时的速率为 v_0，试分析在整个过程中木块的速率能几次与 v_0 相等？

[分析与解]由题意可知，木块第一次通过平衡位置时的速率为 v_0，其动能为 $\frac{1}{2}mv_0^2$，这时弹簧的形变量为零，弹簧的弹性势能为零，可见该时刻弹簧振子系统的能量只有 $\frac{1}{2}mv_0^2$；随后，由于桌面不光滑，振动中要克服摩擦力做功，振动系统的能量将小于 $\frac{1}{2}mv_0^2$，故木块第一次通过平衡位置以后，其速率不可能再为 v_0．

在振动开始之初，振动系统的能量为 $\frac{1}{2}kA^2$，它就是弹簧的弹性势能振动开始以后，弹性势能减少，减少的弹性势能，一部分消耗在克服阻力做功转化为热能上，另一部分则转化为木块的动能．木块第一次到达平衡位置时的动能为 $\frac{1}{2}mv_0^2$，可见 $\frac{1}{2}kA^2$ ＞ $\frac{1}{2}mv_0^2$，因此在木块到达平衡位置之前，它的速率肯定有一次为 v_0．

设木块在平衡位置右边 x 处的速率为 v_0，这时振动系统的能量为：（$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx^2$）＜ $\frac{1}{2}kA^2$，这里机械能不守恒的原因是由于克服阻力做功 W=μmg（A－x），转化为热能．根据能量守恒定律，可得：

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx^2+\mu mg(A-x)$$

木块第一次回到平衡位置时弹性势能为零，根据能量守恒与已知条件可列方程：

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_0^2+\mu mgA$$

比较上述两式可得：

$$\frac{1}{2}kx^2-\mu mgx=0$$

即 $x\left(x-\frac{2\mu mg}{k}\right)=0$，由此可知：当 $x=0$ 和 $x=\frac{2\mu mg}{k}$ 时，木块的速率为 v_0，即在振动过程中木块只有两次速率为 v_0．

[例 3]在光滑水平台面上,两个质量相等的木块粘贴在一起与倔强系数为 k 的弹簧构成一个水平方向上的弹性振动系统（图 1－22），该系统在平衡位置 O 附近的 P、Q 点之间作简谐振动，周期为 T_1，能量为 E_1，若两个木块在从 P 点向右运动的过程中，通过 O 点时木块 B 与木块 A 分离，试问：B 脱离后，木块 A 与弹簧组成的振动系统的周期与能量各多大？

[分析与解]两个木块从 P 点向右运动时，通过 O 点时的速率最大，

分离后木块 B 向右作匀速运动，而木块 A 仍与弹簧相联，组成一个新的振动系统．

设 A、B 的质量均为 m，A、B 粘贴在一起时振动周期为 $T_1=2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$，B分离出去以后，新的振动系统的振动周期为$T_2=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，可见：$T_2=\frac{\sqrt{2}}{2}T_1$.

振子通过平衡位置时的动能即为振子的能量，木块 B 与 A 在平衡位置分离，它们的速率相等而且为最大值，在速率相等的条件下，动能与质量成正比，所以新的振动系统的能量为：

$$E_2=\frac{1}{2}E_1$$

由于桌面光滑，振动系统的机械能守恒，振动系统的能量也就是振子在最大位移时的弹性势能，所以新的振动系统的振幅 A_2 与原系统的振幅 A_2 有如下关系：

$$A_2=\frac{\sqrt{2}}{2}A_1$$

即 B 分离以后，新的振动系统的振幅为原来的 0．71 倍．

[例 4]如图 1－23，质量为 M 的木块与倔强系数为 k 的弹簧构成的水平弹性振子，在光滑水平面上作简谐振动，振幅为 A.(1)若在大木块 M 经过平衡位置 O 的瞬间，将质量为 m 的小木块放到它面上去；(2)若在大木块通过最大位移的 P 点或 Q 点时，将小木块放上去，试问两个木块一起振动时，振动系统的振幅与周期将如何变化？

[分析与解](1)设大木块通过 O 点时的速度为 v，小木块放到大木块上去以后，它们的速度将变成 v′，这个过程由于水平桌面光滑而动量守恒：

$$Mv=(m+M)v',$$

$$\therefore v'=\frac{M}{m+M}v$$

可见，共同振动后系统的能量为：

$$E'=\frac{1}{2}(m+M)v'^2=\frac{1}{2}kA'^2$$

原来的振动系统能量为：

$$E=\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}kA^2$$

由上述三个式子可得，小木块放上去以后系统的振幅为：

$$A'=\sqrt{\frac{M}{m+M}}\cdot A$$

由于振动系统只是质量发生变化，所以振动周期也将发生变化：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}}$$

即$T'=\sqrt{\frac{m+M}{M}}\cdot T$

(2)大木块在 P、Q 点时的即时速度为零，这时将小木块放上去系统的机械能不会损失，振动系统的总能量就是这时弹簧的弹性势能，其值为$\frac{1}{2}kA^2$，所以振幅不会发生变化．然后，当两个木块一起通过平衡位置时的速度将减小到 v′

$$\frac{1}{2}(m+M)v'^2=\frac{1}{2}kA^2$$

$$v'=\sqrt{\frac{k}{m+M}}\cdot A$$

小木块没有放上去之前，大木块通过平衡位置的速度为 v$\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}kA^2$，$v=\sqrt{\frac{k}{M}}\cdot A$

可见，v′与v的关系为：$v'=\sqrt{\frac{M}{m+M}}\cdot v$

周期变化情况与(1)相同．

●振动的合成问题

在日常生活与工程技术中，我们常常会见到一个质点同时参与两个或两个以上的振动，比如，两列水波相遇处，作为媒质的水就同时参与了两个振动．多种乐器合奏，各个乐器发出的声波在空气中传播至同一地点，那里的空气就同时参与了几个振动．因此我们有必要讨论振动的合成问题．

一般说来，多个振动所引起的合振动问题是比较复杂的．这里仅讨论两种最简单的情况．

1．同方向同频率振动的合成问题

设有两个同方向、同频率的简谐振动，振动方程分别为：

$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

由于两个振动在同一方向上，因此合振动的位移为两个分振动位移 x_1 与 x_2 的代数和：

$$x=x_1+x_2=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)+A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

$$=A_1\cos\omega t\cos\varphi_1-A_1\sin\omega t\sin\varphi_1+A_2\cos\omega t\cos\varphi_2-A_2\sin\omega t\sin\varphi_2$$

$$=(A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t-(A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t.$$

令 $\begin{cases}A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2=A\cos\varphi\\A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2=A\sin\varphi\end{cases}$

则 $x=A\cos\varphi\cos\omega t-A\sin\varphi\sin\omega t$

$=A\cos(\omega t+\varphi)$

可见，同方向同频率的两个简谐振动的合振动仍然是简谐振动，合振动的圆频率和分振动的圆频率相等，其振幅和初相位根据前式可以推得：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$\varphi=tg^{-1}\frac{A_1\sin\varphi+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

即合振动的振幅和初相位是由分振动的振幅和它们的初相位决定的．尤其是分振动的相位差，直接影响合振动振幅的大小．

(1)当 $\varphi_1-\varphi_2=\pm2k\pi$（k=0、1、2、3、……）时，$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=1$，这是分振动相位相同的情况．这时合振动的振幅为：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2}=A_1+A_2$$

即当两个分振动相位相同时，合振动振幅最大，为分振动振幅之和．

(2)当 $\varphi_1-\varphi_2=\pm(2k+1)\pi$（k=0、1、2、3、……）时，$\cos(\varphi_1-\varphi_2)=-1$，这是两分振动相位相反的情况，这时合振动的振幅为：

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2}$$

$$=|A_1-A_2|$$

即当两个振动相位相反时，合振动振幅最小，为分振动振幅之差的绝对值．

(3)其它情况，即 $\varphi_1-\varphi_2\neq\pm k\pi$（k=0、1、2、3、……）时，$-1<\cos(\varphi_1-\varphi_2)<1$，这时

$|A_1-A_2|<A<A_1+A_2$

这是一般情况，合振动振幅介于最小值$|A_1-A_2|$和最大值 A_1+A_2之间．

以上我们是在机械振动范围内，就同方向同频率的两分振动合成问题的讨论得出的结论，这些结论在以后学习声波、光波的干涉时同样适用．

2．同方向但频率不同的两个振动的合成问题

设两个分振动的圆频率分别为ω_1 和ω_2．为突出讨论不同频率的振动合成的特点，我们不妨假定这两个分振动的振幅相等，（皆为 A），且初相位为零．这样两个分振动的位移方程分别为

$x_1=A\cos\omega_1 t$

$x_2=A\cos\omega_2 t$

合振动的位移为：

$$x=x_1+x_2=A\cos\omega_1 t+A\cos\omega_2 t$$

$$=2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

一般情况下，合振动的周期性是难以觉察的．但当两个分振动的圆频率都很大而两者相差又很小时，就可以明显地觉察到合振动的周期性．在上述条件下，$|\omega_1-\omega_2|\ll(\omega_1+\omega_2)$，因而合振动 x 的表达式中，前面的因子$2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$随时间的变化，比后一因子$\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$随时间的变化，比后一因子$\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)$几乎不变，而把它的绝对值$\left|2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right|$当作振福，那么合振动就可看作是振幅为$\left|2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right|$、圆频率是$\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)$的简谐振动了．

合振动的振幅$\left|2A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\right|$随时间的缓慢变化也是周期性的，即合振动的振幅时大时小，这种合振幅时大时小，即合振动时强时弱的现象，叫做“拍”．

用振动图象表示这种现象更为直观．图 1－24 中(a)、(b)分别是分振动的振动图象，图(c)是合振动的振动图象．由图 1－24 可见，时刻 t_1，两个分振动的相位相同，互相加强，这时合振幅为分振动的振幅之和，达最大值．由于两分振动的频率有微小差别，此后分振动的相位差将逐渐增大，到时刻 t_2，相位差增至π，两个分振动相位相反，振动互相减弱，合振幅为分振动振幅之差，取最小值．再经过一段时间，到时刻 t_3，相位差达 2π，分振动相位再次相同，互相加强，振幅再次达最大值．以后这种变化不断重复，出现合振幅时大时小，合振动时强时弱的周期性变化．

“拍”的现象在声振动、无线电技术中有广泛的应用．例如校正钢琴，往往把待校的钢琴同已校好的钢琴作比较，敲击两架钢琴的同一个音键，细听有无“拍”的现象．如果听得出有“拍”的现象，说明尚未校准，必须再校，直至“拍”消失才算校准好．

[例 1]已知两个同方向的简谐振动如下：

$$x_1=0.05\cos\left(10t+\frac{3}{5}\pi\right)$$

$$x_2=0.06\cos\left(10t+\frac{1}{5}\pi\right)$$

(1)求它们合振动的振动方程；

(2)另有一同方向简谐振动

$x_3=0.07\cos(10t+\varphi_3)$

问φ_3为何值时，x_1+x_3的振幅最大？φ_3为何值时，x_2+x_3的振幅最小？（式中 x、t 均为国际单位）

[分析与解](1)合振动的振动方程形式为：

$x=A\cos(10t+\varphi)$

其中 A、φ为合振动的振幅和初相位．

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}$$

$$=\sqrt{0.05^2+0.06^2+2\times0.05\times0.06\left(\frac{3}{5}\pi-\frac{1}{5}\pi\right)}$$

$$=0.09\text{（米）}$$

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}=\frac{0.05\sin\frac{3}{5}\pi+0.06\sin\frac{1}{5}\pi}{0.05\cos\frac{3}{5}\pi+0.06\cos\frac{1}{5}\pi}$$

$$=2.5029$$

$$\varphi=68°13'=1.19\text{（弧度）}$$

故合振动的振动方程为：

$x=0.09\cos(10t+1.19)$（米）

（2）当$\varphi_1-\varphi_3=\frac{3}{5}\pi-\varphi_3=0$，即$\varphi_3=\frac{3}{5}\pi$时，第一、三两个振动相位相同，$x_1+x_3$的振幅最大，为$A_{13}=A_1+A_3=0.05+0.07=0.12$（米）

当$\varphi_2-\varphi_3=\frac{1}{5}\pi-\varphi_3=-\pi$，即$\varphi_3=\frac{6}{5}\pi$时，第二，三两个振动相位相反，$x_1+x_3$的振幅最小，为$A_{13}=A_1+A_3=0.07-0.06=0.01$（米）．

[例 2]已知两个简谐振动的振动方程分别为：$x_1=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{2}\right)$，$x_2=3A\cos\left(\frac{2\pi}{3T}t+\frac{\pi}{2}\right)$．求它们的合振动．

[分析与解]x_2的振幅是 x_1 的 3 倍，初相位相同，但周期不同：x_1的

周期为 T，x_2 的周期为 3T．我们用作圆法求它们的合成．

在同一坐标系中，按相同的标度，分别画出 x_1 与 x_2 的图象，如图 1－25 中的两条实曲线所示．然后根据振动合成原理，用虚线画出它们的合振动图象．从图 1－25 可看出，合振动 x 的周期为 3T，振幅比 3A 小，它既不是正弦曲线，也不是余弦曲线．

●思考与练习

1．某质点沿直线作简谐振动，经观察发现，该质点以相同的速度通过相距 10 厘米的 a、b 两点，历时 1．0 秒．过 b 点后经 1．0 秒，该质点以大小相同、方向相反的速度再次通过 b 点．那么该质点的振动周期多大？

2．一质点在平衡位置 O 两侧作简谐振动．它离开 O 点向最大位移处运动过程中，经 0．15 秒第一次通过 M 点，再经过 0．10 秒，第二次通过某 M 点，此后需经______秒第三次通过 M 点．该质点的振动频率为______赫．

3．两个弹簧的倔强系数分别为 k_1、k_2，与同一个小球组成的弹簧振子的固有频率分别为 0.3 赫和 0．4 赫．现将这两个弹簧与该小球组成如图 1－26 所示的弹簧振子，它的固有频率多大？

4．两个弹簧的倔强系数分别为 k_1、k_2，与同一个小球组成的弹簧振子的固有周期分别为 3 秒和 4 秒．现将两弹簧与该小球组成如图 1－27 所示的弹簧振子，其固有周期多大？

5．有一弹簧振子，若将其竖直放置，平衡后，弹簧伸长 4 厘米，求振子的振动周期和频率（g 取 9．8 米／秒 ^{2}）．

6．物体挂在弹簧下面作简谐振动．如果物体距平衡位置 2 厘米时，弹簧加在这物体上的力恰好等于在平衡位置时弹簧加在该物体上的力的 2 倍，求该物体的振动周期．

7．如图 1－28 所示，P、Q 两滑块放在滑台面上，质量分别为 m_1＝250 克，m_2＝500 克（可视为质点）．弹簧的倔强系数 k＝10 牛／米，并与滑块 P 相连．今用手推滑块 Q 将弹簧从平衡位置 O 压缩到 A 点，放手后，经过多长时间二滑块会分开？若已知 Q 与 P 分开时的速度为 1 米／秒，为使 Q 与墙发生碰撞后能以原速率返回，且与 P 在 O 点再次相遇（Q 与墙壁碰撞的时间不计），求 O、B 间的距离．

8．一个在地球上走时准确的摆钟移到月球上去，设月球表面的重力加速度为地球上的 $\frac{1}{6}$，不计温度对摆长的影响．试问该摆钟在月球上走过 1 小时，相当于地球上的时间为多少？

9．有一摆钟，冬天走时准确，夏天每昼夜慢 14 秒，求冬天与夏天的摆长之比．应怎样调节摆长使该摆钟在夏天也准确？

10．单摆摆长为 l，最大偏角为θ，摆球质量为 m．摆球从最大偏角位置摆向平衡位置的过程中，以下叙述正确的是 [ ]

(A)重力冲量为 $\frac{\pi m}{2}\sqrt{gl}$

(B)合力冲量为 $\pi m(2-\cos\theta)\sqrt{gl}$

(C)合力冲量为 $m\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$

(D)合力冲量为零

11．摆长为 l_1 与 l_2 的两个单摆比摆长为 l 的标准摆在相同时间内计时分别快 t 秒与慢 t 秒，则三摆长间的关系为

[ ]

(A)$l=\frac{1}{2}(l_1+l_2)$ (B)$\sqrt{l_1l_2}$

(C)$l=\sqrt{l_1^2+l_2^2}$ (D)$\frac{2}{\sqrt{l}}=\frac{1}{\sqrt{l_1}}+\frac{1}{\sqrt{l_2}}$

12．放在地面的单摆 t 秒内振动 N 次，放在山顶上时，t 秒内振动 N－1 次．已知地球半径为 R，则此山高度为______．

13．放在光滑水平面上的木板 B 与倔强系数为 k 的弹簧连接在一起，物体 A 放在 B 上如图 1－29 所示．已知 A、B 间最大静摩擦力是 A 重量的一半，为使 A、B 不相对滑动且在水平方向上共同作频率为 2 赫兹的简谐振动，B 板的最大加速度和振幅各为多少？

14．一个水平弹簧振子，弹簧的倔强系数 k＝9．8 牛／米，物体的质量是20克。现将弹簧从平衡位置拉长$2\sqrt{2}$厘米，并给物体一远离平衡位置的速率 7．0 厘米／秒，求该振子的运动规律．

15．一个质量是 0．25 克的质点作简谐振动，其运动方程为：$x=6\sin(5t-\frac{\pi}{2})$．式中x的单位是厘米，t的单位是秒．求：

(1)振幅和周期；

(2)初始位置 x_0；

(3)质点在开始时所受的力；

(4)振动的能量．

16．两个分振动各为：$x_1=\cos\omega t$，$x_2=\sqrt{3}\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$（式中 X 的单位是厘米，t 的单位是秒）．若它们在同一直线上合成，求合振动的振幅 A 及初相位φ．

二、波动

机械振动在媒质中的传播叫作机械波，简称波．

当媒质中某处质点振动时，由于媒质质点间存在相互作用，从而会引起邻近的其它质点的振动；而邻近质点振动后，又会引起相邻质点的振动．这样，机械振动这种运动形式就通过媒质质点间的相互作用由近及远地传播，从而形成机械波．

由此可见，机械波的形成要有两个条件：其一是要有波源即振源；其二是要有能够传播振动的媒质．

机械波既然是由机械振动所引起的，因此波动与振动密切相关．

振动在媒质中传播时，就媒质的每个质点来看，都以它的平衡位置为中心作机械振动，但没有整体的定向移动，即媒质并不随波迁移．波动过程是振动这种运动形式的传播过程，也是能量的传播过程．

波分为横波和纵波两种．如果媒质中质点的振动方向与波的传播方向垂直，这种波称为横波．它所表现出来的外部形态是波峰与波谷沿波的传播方向向前推进．

如果媒质中质点的振动方向与波的传播方向在一条直线上，这种波就称为纵波．纵波表现出来的外部形态是疏部与密部相间，沿波的传播方向向前推进．

波在均匀媒质中是匀速传播的，传播的速度称为波速．波速是振动在媒质中的传播速度，它与媒质质点的振动速度不是一回事．同一种振动在不同的媒质中传播的速率不同，波长也不同；而不同频率的振动在同一种媒质中的传播速率相同，此速率仅由媒质本身的性质决定，与波的频率无关．波速 v、波长 λ 及频率 f、周期 T 之间的关系为：

$$v=\frac{s}{t}=\frac{\lambda}{T}=\lambda f$$

其中 s 为 t 秒内波在媒质中传播的距离．

●波的图象问题

我们常用波的图象来直观地表现波的传播情况．图象的横坐标表示波的传播方向上媒质各质点的平衡位置，纵坐标表示某一时刻各质点相对其平衡位置的位移．

在横波图象中，我们规定，对于那些已运动到其平衡位置一侧的媒质质点，它们的位移为正，其纵坐标用相应的正值表示；而那些运动到平衡位置另一侧的媒质质点，它们的位移为负，其纵坐标用相应的负值表示．

纵波是疏密波，又如何作出它们的波形图象呢？我们是这样处理的：对于那些已振动到平衡位置前方（波传播的方向）的媒质质点，其位移规定为正，它们的纵坐标用相应的正值表示；而对于那些已振动到平衡位置后方的媒质质点，其位移规定为负，它们的纵坐标用相应的负值表示．

图 2－1 即为一列简谐波的图象．从该波的图象看，这列波的振幅 A＝10 厘米，波长λ＝4 米，还可以判断该时刻任一媒质质点相对其平衡位置的位移和运动趋势．

在波的图象中判断每一质点的运动趋势，是根据这样的道理：即每一质点都紧紧“追随”其相邻的“前面”的质点的运动．这里的“前面”是指波传来的方向，注意不要和波传播的“前方”相混淆．如图 2－1 中的波是沿 x 轴的正方向向前传播的，距波源 3 米处的质点 G 此刻位于平衡位置，它“前面”的质点 F 此刻已在平衡位置的下方，故质点 G 紧紧追随质点 F，将向下方运动．质点 C 此刻也位于平衡位置，而它“前面”的质点 B 在平衡位置的上方，故质点 C 紧紧追随质点 B，将向上运动．(注意，这里说某质点向上或向下运动，实际上已假定图 2－l 为横波的波形图象．若为纵波，则应说成是向右或向左运动)．

为了对振动图象和波动图象有更深入的了解，我们来研究下面的例子．

[例 1]图 2－2 为某列横波在某时刻的波形图．该时刻 P 点的运动方向向上，经过△t＝0．02 秒，P 点到达波峰．求：(1)这列波的传播速度多大？传播方向如何？(2)图中的质点 Q 到达波峰至少要多少时间？

[分析与解](1)该时刻质点 P 处于平衡位置，这时它向上运动，经△t 到达波峰，可见波的周期为 T＝4△t＝4×0.02 秒＝0.08 秒．由图可知波长λ＝32 米，所以波速为：

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{32\text{米}}{0.08\text{秒}}=400\text{（米／秒）}$$

波的传播方向向左．

(2)由于波向左传播，可知该时刻 Q 点的运动方向向下，至少要过$\frac{3}{4}$周期才能到达波峰：

$$\triangle t'=\frac{3}{4}\cdot T=0.06\text{（秒）}$$

[例 2]一列波速 $v=3.4\times10^4$ 米／秒的波，某时刻的波形图如图 2—3 所示．该时刻处在平衡位置上的 C、E 点间的距离为 17 厘米．C 点从该时刻起到第一次为负方向的最大位移的时间为 2.5×10^{-6} 秒，问质点 A 从

该时刻起到第一次位移为正方向的最大值需要多少时间？

[分析与解]C、E 之间距离为半波长，则λ＝0.34 米，波的频率 $f=\frac{v}{\lambda}=\frac{3.4\times10^4\text{米/秒}}{0.34\text{米}}=10^5$赫兹，可知周期为$T=\frac{1}{f}=10^{-5}$秒．

由已知条件可知，质点 C 从该时刻起到第一次为负的最大位移的时间为2.5×10^{-6}秒$=\frac{1}{4}\cdot T$，可见该时刻C点的运动方向向下，则波的传播方向与 x 轴相反，该时刻 A 点的运动方向向上，所以质点 A 从该时刻起到第一次为正向最大位移的时间为$\frac{1}{4}$周期，即：

$$\triangle t=\frac{1}{4}\cdot T=2.5\times10^{-6}\text{秒}$$

上述两个例题都说明了波的传播过程与媒质质点的振动是密切相关的．特别是波的传播方向与媒质质点的运动方向有着紧密的联系．

[例 3]一列简谐波在 t＝0 时刻的波形图象如图 2－4 所示,传播方向自左向右．已知经△t＝0.9 秒，A 点刚好第二次出现波峰，求：

(1)该波的周期；

(2)经多少时间在 B 点第一次出现波峰？

(3)波传播到 B 点所需的时间．

[分析与解](l)A 点此刻处在波谷，要经 1．5 个周期才刚好第二次出现波峰，故 1.5T＝△t，即 1.5T＝0.9，所以 T＝0.6（秒）．

(2)由波动图象，知波长λ＝120 厘米，故波速

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{120}{0.6}=200\text{（厘米／秒）}$$

t＝0 时（图示时刻），波峰在 R 处，R 点离波源 30 厘米．B 点第一次出现波峰的时刻，就是波峰由 R 点传播至 B 点的时刻，故所需时间：

$$t=\frac{s_{AB}}{v}=\frac{300-30}{200}=1.35\text{（秒）}$$

(3)波在 t＝0 时刻已传播到 Q 点，再向前传播距离 S_{QB}，这列波就传播到了 B 点，所需时间

$$t'=\frac{s_{QB}}{v}=\frac{300-30}{200}=0.9\text{(秒)}$$

[例 4] 简谐波沿 x 轴正方向传播，已知轴上 x_1＝0 和 x_2＝3 米两处的振动图线分别如图 2－5(a)、(b)所示．又知此波波长大于 3 米，则此波的传播速度多大？

[分析与解]从两个振动图线可知，x_2＝3 米处的点在 t＝0 时刻自平衡位置向下运动，要经$\frac{3}{4}$周期才能运动到y轴正方向最大位移处，这时它才和 t＝0 时刻 x_1＝0 处的质点的振动情况完全一样．这就是说，波从 x_1 ＝ 0 处传播到 x_2 ＝ 3 米处．历时 $\triangle t=\frac{3}{4}T$．又从图象可知，振动周期$T=4\times10^{-3}$秒，故$\triangle t=\frac{3}{4}\times4\times10^{-3}=3\times10^{-3}$秒，波速：

$$v=\frac{x_2-x_1}{\triangle t}=\frac{3-0}{3\times10^{-3}}=1\times10^3$$（米／秒）．

[例 5]图 2－6 为某一时刻海上的波浪图．波向右传播，周期为 20 秒．现有一只汽船，此时恰在 0 点．

(1)若该汽船以 8 米／秒的速度向右或向左航行，经过 5 秒时，则该船上、下振动的位移各有多大？

(2)若在 10 秒钟内向右或向左航行，恰好能越过第一个波峰，则船的航速分别为多大？

[分析与解](1)汽船 5 秒航行的距离为：s＝vt＝8×5＝40（米）．

若汽船向右航行，5秒时刻航行到x＝40米处，5秒为$\frac{1}{4}$周期，该处质点在t＝0时刻位于平衡位置，且向上振动，经$\frac{1}{4}$周期刚好振动到y轴正方向最大位移处．因波浪的振幅为 10 米，故此刻汽船上、下振动的位移为：y＝＋10 米

若汽船向左航行，5 秒时刻航行到 x＝－40 米处，该处质点在 t＝0时刻也位于平衡位置，且也是向上振动的，经$\frac{1}{4}$周期同样刚好振动到 y 轴正方向最大位移处，故汽船上、下振动的位移也为：y＝＋10 米．

(2)10秒为$\frac{1}{2}$周期，经10秒波浪向右传播半个波长。汽船若向右航行且在 10 秒内越过第一个波峰，它必须到达 x＝80 米处．由此得汽船航速：

$$v_{右}=\frac{s_{右}}{t}=\frac{80}{10}=8$$（米／秒）．

若汽船向左航行，且在 10 秒内越过第一个波峰，它必须到达 x＝—40 米处．故汽船航速：

$$v_{左}=\frac{s_{左}}{t}=\frac{40}{10}=4$$（米／秒）．

●波的干涉和衍射问题

当几个波源产生的波在同一媒质中传播时，如果这几列波在某点处相遇，那么相遇处质点的振动将是各个波所引起的分振动的合成，在任一时刻质点的位移是各个波在该点所引起的分位移的矢量和．这就是波的叠加．

我们只讨论两个频率相同、相位相同或相位差恒定的波源所发出的波的叠加．满足这一条件的两个波源叫作相干波源，它们发出的波叫作相干波．当振动方向相同的两个相干波相遇时，在空间的某些点上，两个简谐振动相位相同，合振动的振幅最大；在另一些点上，两个简谐振动相位相反，合振动的振幅最小．换句话说，两个相干波在空间相遇时，空间某些点振动始终加强，而在另一些点振动始终减弱，且振动加强和减弱的区域互相间隔，这种现象称为波的干涉．

一切波都会发生干涉．干涉是波特有的现象．

波在传播过程中遇到障碍物时，能够绕过障碍物的边缘前进，这种现象称为波的绕射或衍射．

并不是在任何情况下都会发生明显的衍射现象．实验观察告诉我们，能够发生明显的衍射现象的条件是：障碍物或小孔的尺寸比波长小，或者跟波长相差不多．

和干涉一样，衍射也是波动所特有的现象．不但机械波，一切波都能发生衍射．以后我们将会看到，正是由于光能够发生干涉和衍射，才使人们认识到光也是一种波．

[例 1]两个振动方向始终相同的声源,与某点间的距离分别为 2 米和 2．5 米．在该点始终听不到声音，求这两个声源的频率．(已知声速 v=340 米／秒）．

[分析与解]在该点始终听不到声音，这是两个频率相同而且同相的声波干涉的结果．听不到声音，表明该点到两个声源的路程差为声波半波长的奇数倍，即：

$$r_2 - r_1 = (2n+1)\frac{\lambda}{2} \quad (n=0、1、2、\cdots\cdots)$$

可得波长：

$$\lambda = \frac{2(r_2 - r_1)}{2n+1}$$

则声源的频率为：

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{(2n+1)v}{2(r_2 - r_1)}$$

$$= \frac{(2n+1)\times 340}{2\times(2.5-2)}$$

$$= 340(2n+1) \text{（赫兹）}$$

[例 2]有同频率、同相位的两个声源 S_1 和 S_2，相距 3 米，如图 2—7 所示，一人站在声源的北方距 S_1、S_2 等远处的 A 点，此时听到的声音很响．测得 A 点到 S_1、S_2 连线的垂直距离为 4 米．这人朝东慢慢移动，声音逐渐减弱，到 B 点时几乎听不见声音．测得 A、B 距离是 1．5 米．则

S_1、S_2 声波的波长为多大？若此人由 B 点向正南方向移动，声音逐渐变强，那么此人向正南方至少走多远，声音变得很响？

[分析与解]连接BS_1，BS_2，已知$\overline{S_1S_2}=3$米，由题意，知$\overline{BS}_2=4$米，则

$$\overline{BS}_1=\sqrt{\overline{S_1S_2}^2+\overline{BS}_2^{\,2}}=\sqrt{3^2+4^2}=5\text{米}.$$

因人在 B 点几乎听不到声音，表明：

$$\overline{BS}_1-\overline{BS}_2=\frac{\lambda}{2}.$$

由此可得波长：

$$\lambda=2（\overline{BS}_1-\overline{BS}_2）$$

$$=2\times（5-4）=2（\text{米}）.$$

设此人自B点向南走到C点处听到的声音又很响，并令$\overline{CS}_2$，则有：$\overline{CS}_1-\overline{CS}_2=\lambda$

即 $$\sqrt{\overline{S_1S_2}^2+\overline{CS}_2^{\,2}}-\overline{CS}_2=\lambda$$

$$\sqrt{3^2+x^2}-x=2$$

解得：$x=1.25$（米）

$$\overline{BC}=\overline{BS}_2-\overline{CS}_2=4-1.25=2.75（\text{米}）$$

即此人自 B 点向正南方至少要走 2.75 米，听到的声音才又变得很响.

[例 3]半径为 45 米的圆形广场，如图 2－8 所示.在广场中心 O 处及广场圆周上的 A 点，分别安装型号相同的扩音器．从两个扩音器里发出振幅、波长、频率完全相同的声音，已知声音的波长是 10 米．有一个人沿着广场周围逆时针方向行走．当他在图中所示的 B 点时听不到扩音器的声音，经过 B 继续沿逆时针方向行走，试问他离开 B 之后到达 A 之前，有几处他听不到扩音器的声音？

[分析与解]设当他走到圆周上的 P 点时听不到扩音器的声音，则应有：

$$s_{AP}-s_{OP}=（2n+1）\frac{\lambda}{2}，(n=1，\pm1，\pm2\cdots\cdots)$$

$$s_{AP}=（2n+1）\frac{\lambda}{2}+s_{OP}=(2n+1)\frac{10}{2}+45=10n+50.$$

由于 $0<S_{AP}<2R$（R 为广场半径），即：

$0<10n+50<90$，

$-5<n<4$，

可见 n 可取下列几个数中的任何一个：

－4，－3，－2，－1，0，1，2，3.

即此人在离开 B 之后到达 A 之前，共有 8 处他听不到扩音器的声音.

●思考与练习

1．在波的传播方向上，相距为 S 的 P 和 Q 两点之间只有一个波谷的四种情况如图 2－9 所示．设这四列波的波速皆为 v，传播方向向右．自图示时刻起，P 点首先出现波谷的是图______．

2．质点 S 是上、下振动，频率为 100 赫的振源所产生的横波同时向右边的 A 点和左边的 B 点传播，波速为 80 米/秒．已知 SA=17.4 米，SB=16.2 米，当 S 通过平衡位置向上振动时，A、B 两质点的位置是 [ ]

(a)A 在波峰，B 在波谷；

(b)A、B 都在波谷；

(c)A、B 都在波峰；

(d)A 在波谷，B 在波峰．

3．一列简谐波沿 x 轴方向传播，t 时刻和 t+△t 时刻的波形图线分别由图 2－10 中的实线和虚线表示，波的周期为 T，且 T＞△t．以下说法中正确的是 [ ]

(A)波向左传播，$\triangle t=\frac{3}{4}T$；

(B)波向右传播，$\triangle t=\frac{1}{4}T$；

(C)波向左传播，质点 a、b、c 重新回到平衡位置所需的时间为 $t_b>t_a=t_c$；

(D)波向右传播，质点 a、b、c 重新回到平衡位置所需的时间为 $t_a<t_b<t_c$．

4．一列简谐横波如图 2－11 所示，已知 A 点加速度为 10 米／秒 ^{2}，C 点速度方向向下，经 0．1 秒 C 点第一次达到最大位移，且 CD=20 厘米，那么 B 点加速度大小为_____米／秒 ^{2}，方向向_____，D 点的运动方向向_____，波速为_____米／秒 ^{2}．

5．一列横波，沿其传播方向相距 2 米的 P、Q 两点的振动图象分别如图 2－12 中的实线和虚线所示．已知波长大于 2 米，则该波频率为_____赫兹，波长为米，波速为米／秒．

6．图 2—13 为一列简谐横波在传播方向上相距 3 米的两质点 P 和 Q 的振动图线，实线为 P 的振动图线，虚线为 Q 的振动图线．已知 P 离波源较近，则该波波长多大？

7．某横波如图 2－14 所示，沿 x 方向传播，O 为波源，OP=4 厘米，PQ=14 厘米．当波恰好传到 Q 点时，在 OP 范围内有一些质点正向－y 方向运动，这些质点的平衡位置的坐标区间是什么？

8．已知一平面简谐波在 t=0 时刻的波形图如图 2－15 所示．

(1)分别画出$t=\frac{T}{4}$、$\frac{T}{2}$、T等三个时刻的空间波形图线；

(2)分别画出 $x=x_1$、x_2、x_3 等处质点位移随时间变化的振动图线．

9．在图 2－16 所示的坐标系中，一列横波沿轴的负方向传播，波速为 6 米／秒．当位于 $x_1=3$ 米处的质点 A 恰在平衡位置且向上运动时，位

于 x_2=6 米处的质点 B 正处于 x 轴下方最大位移处．则这列波的最小频率为多少？若不受最小频率的限制，写出此波的波长表达式，并在图中画出与最小频率相对应的波形图象．

10．一列波沿 x 轴正向传播，到达坐标原点时的波形如图 2－17 所示．则当波到达 N 点时，处于 O 点处的质点所通过的路程和该时刻的位移各是多少？

11．在原来静止的媒质中有简谐波沿直线传来，A、B 两点相距 12 米，已知 B 完成两次全振动后 A 开始振动，在图 2－18 中画出当 A 点处质点经平衡位置向下振动时的波形图（已知简谐波的振幅为 10 厘米）．

12．如图 2－19 所示，实线表示 t 时刻一列横波的波形，虚线表示经过△t=1 秒后该横波的波形．则该波的波速多大？若该波周期 T＞l 秒，则在 10 秒内，图中原点 O 处的质点通过的路程是多少？

13．一列横波在 x 轴上传播着，在 t_1=0 和 t_2=0.005 秒时波形曲线分别如图 2—20 中的实线和虚线所示．

(1)由图中读出波的振幅和波长；

(2)设周期大于（$t_2－t_1$），如果波向右传播，波速多大？如果波向左传播，波速又是多大？

(3)设周期小于（$t_2—t_1$），并且波速为 6000 米／秒，求波的传播方向．

14．一列横波在媒质中传播，某时刻的波形如图 2－21(a)所示．经过△t（△t＜T）后，波形图如图 2－21(b)所示．若这列波是沿 x 轴正向传播的，则波上各质点的振动频率多大？若波是沿 x 轴负方向传播的，则波上各质点振动的周期多大？

15．关于波的干涉现象，下列说法中哪些是正确的？

(a)在两列机械波相遇的区域，必定产生干涉现象；

(b)由两列振幅相等的相干波形成稳定的干涉图样时，振动最弱的地方一定保持位移为零；

(c)两列振幅相等的相干波形成稳定的干涉图样时，振动最强的地方一定保持最大位移；

(d)由两列相干波形成稳定的干涉图样时，振动最弱的地方位移不一定为零．

16．在图 2－22 中，S_1、S_2 为两个同频率的相干波源，实线和虚线分别代表某一时刻的波峰和波谷，则在 M、N、P、Q 四点中，振动互相加强的点是哪些点？振动互相减弱的点是哪些点？

17．如图 2－23 所示，在媒质中 S_1 和 S_2 为两个频率相同、相位相同、振动方向也相同的波源，相距两个波长，且 $S_1A=AB=BC=CS_2$，下列说法哪些是正确的？

(a)B 点永远是波峰；

(b)A、C 两点振动始终最强；

(c)B 点振动始终最强，A、C 两点振动始终最弱；

(d)某时刻 B 点的位移可能是零．

三、声波

声波也是一种机械波．观察发现，一切发声的物体都在振动，发声的物体称为声源．

像其它机械波一样，声源振动将会引起相邻的媒质质点振动，而这媒质质点又会引起更远的媒质质点振动．这样，声源的振动就通过媒质质点间的相互作用由近及远地传播，从而形成声波．

如果物体的振动频率高于 20000 赫兹或低于 20 赫兹，则人将听不到它们产生的声音．频率高于 20000 赫兹的声波叫作超声波，频率低于 20 赫兹的声波叫作次声波．

●声音的传播问题

声音在空气中传播时，媒质质点的振动方向与波的传播方向是在一条直线上．空气中的声波是纵波．在均匀媒质中，声波是沿直线匀速传播的．波速 v、传播距离 s 及时间 t 之间遵守如下关系：

$$v = \frac{s}{t}.$$

在同一温度下，同一媒质中，各种声波的传播速度是相同的，这波速完全由媒质决定，与声波的频率无关．和一般的机械波一样，声波的波长 λ、频率 f、周期 T 及波速 v 之间满足

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f.$$

对于不同的媒质，声波的传播速度不同．在 0℃和标准大气压下，空气中声波的传播速度为 332 米／秒，20℃时则为 344 米／秒．在水中，声速约为在空气中的 4．5 倍．在金属中声波的传播速度更快，由于人能听到的声波频率在 20000 赫兹～20 赫兹范围内，以声波在空气中的传播速度 v＝340 米／秒计算,与之对应的声波波长范围为 17 毫米～17 米.自然界中一般障碍物的尺寸与这个波长范围可以比拟，所以声波一般都能发生明显的衍射现象，即可以绕过障碍物传播．光波的波长很短，只是微米量级，比一般障碍物的尺寸小得多，故光波不会有明显的衍射现象，通常只能沿直线传播．隔着墙壁，我们看不见人，却能听见人说话的声音，即所谓“闻其声不见其人”，就是这个道理．

干涉是波动的特有现象，声波也不例外．当两个频率相同、相位差恒定的声源产生的声波叠加时，就会产生干涉现象．音叉的两股被敲击发声，由于两叉股同时振动，各自都成为声源，而且频率相等，相差恒定，它们发出的声波在其周围的空间里叠加，使有的区域里媒质质点的振动加强，有的区域里媒质质点的振动减弱．当我们围绕音叉周围走一圈，就会听到声音强弱交替变化，这便是声波的干涉现象．

声音的共振现象叫共鸣．如果我们有两个相同的音叉 A 和 B，我们就可以演示声音的共鸣现象．我们把 A 和 B 音叉各装在一个音匣上，每个音匣的一端是开口的．将这两个音匣放在相距不远的地方，并使它们的开口端互相对着．敲击其中的一个音叉，比如 A，并在它振动几秒钟后使它停止振动，这时我们将会听到另一音叉 B 发出的微弱的声音．这是由于音叉 A 先振动，通过空气媒质使 B 发生了受迫振动．由于 B 和 A 的固有频率相同，因而使 B 作受迫振动的策动力的频率与 B 的固有频率相等，使得 B 的振幅达到最大值，于是 B 也能振动发声．相传我国早年有两个相距不远的寺庙，各有一座大钟，一个寺庙敲钟发声，另一个寺庙里钟未敲也跟着响起来，这就是共鸣现象．

音叉和空气柱也能产生共鸣．图 3－1 可演示空气柱的共鸣现象．玻璃管的下端用橡皮管与盛有水的漏斗连通．把一个振动着的音叉放在玻璃管上端贴近管口处．上下移动漏斗，以改变管中空气柱的长度．在某一长度处，我们可以听到最强的声音．这是因为管中的空气柱在音叉振动产生的周期性策动力作用下，发生了受迫振动，当调节空气柱的长度，使得空气柱的固有频率恰好与音叉振动频率相等时，便发生了共鸣．慢

慢调节，使玻璃管内水面逐渐下降，管中空气柱的长度逐渐变长，我们发现当空气柱的长度为几个适当的值时，听到声音有最大的强度．

实验表明，和音叉发生共鸣的空气柱长度遵从如下规律：

当管子两端开口时，

$$L = n\frac{\lambda}{2}，n = 1，2，3\cdots\cdots$$

当管子一端开口一端封闭时，

$$L = （2n + 1）\frac{\lambda}{4}，n = 0，1，2，3\cdots\cdots$$

其中λ为音叉产生的声波波长．用此法可方便地测定音叉产生的声波的波长λ，进而由 v=λf 求得音叉的固有频率．

声波遇到障碍物会被反射回来，我们听到的反射回来的声音称为回音．在山谷中大喊一声，我们甚至会听到多次回声，这是由于离我们远近不同的山坡都会将声音反射回来，先后传到我们的耳朵里．我国北京天坛公园里的回音壁和三音石，是声波反射知识在建筑学上应用的极好例子．回音壁是个圆形的围墙，围墙内靠北边有个圆形的建筑物，称作“皇穹宇”，是明、清两代皇帝“祭天祈谷”的地方．回音壁高约 6 米，所围成的圆周直径 65 米，墙壁很光滑，能很好地反射声波．两个人分别站在东西墙根，一个人靠墙向北低声说话，另一个人就能很清楚地听到，就像听电话一样，其原因就是声波通过光滑的墙壁多次反射传播的结果．

从皇穹宇沿台阶向围墙的大门走去，第三块石头便是三音石．站在这块石头上击一下掌，就可连续听到“拍、拍、拍”三次击掌声（甚至更多次），“三音石”由此而得名．三音石位于以围墙为圆周的圆心上，在三音石上击掌时，声音传到四周围墙上，根据声波反射规律，我们知道反射后的声音都要经过圆心，因而在这一位置上听到的回声特别响．反射的回声，经过圆心后，又继续沿着圆的直径方向传播，碰到对面墙壁又再次沿直径反射回来，这样，我们就能听到第二次回声．声音往返于围墙间，其后便会听到第三次、第四次回声．

[例 1]频率为 50 赫兹的声波，从 A 点向 B 点传播，某一温度时声速为 330 米／秒，A、B 间距离有 n 个波长；后来温度升高，声速为 340 米／秒，这时 A、B 间距离为 n－2 个波长．求 A、B 之间的距离．

[分析与解]波的频率与温度无关，所以两种情况下波长分别为：

$$\lambda_1 = \frac{330\text{米}/\text{秒}}{50\text{秒}^{-1}} = \frac{330}{50}\text{米}$$

$$\lambda_2 = \frac{340\text{米}/\text{秒}}{50\text{秒}^{-1}} = \frac{340}{50}\text{米}$$

由题意可知 A、B 之间的距离为：

$$s = n\lambda_1 = (n-2)\lambda_2，n\cdot\frac{330}{50}（\text{米}） = (n-2)\frac{340}{50}（\text{米}）$$

解得 n=68，代入上式得：

$$s = n\lambda_1 = 68\times\frac{330}{50}（\text{米}） = 448.8（\text{米}）$$

[例 2]一辆汽车沿着与峭壁垂直的公路向峭壁驶去，当汽车与峭壁相距 s=500 米时，司机按响喇叭，经过 2.8 秒，他听到了回声．求汽车行驶的速度（设声速为 v=340 米／秒）．

[分析与解]设喇叭按响后，声音经 t_1 秒传播到峭壁；声音从峭壁反射回来，经 t_2 秒与汽车相遇，司机听到回声；可见 $t_1+t_2=t=2.8$ 秒．在这 2.8 秒内汽车向峭壁方向行驶的距离为 ut，u 是假定的汽车速度．由题意可得方程：

$vt_1+(vt_2+ut)=2s$，即

$(t_1+t_2)+ut=2s$，亦即

$(v+u)t=2s$

所以 $v+u=\frac{2s}{t}=\frac{2\times 500\text{（米）}}{2.8\text{（秒）}}=357.1$（米／秒）

故求得汽车的行驶速度为：

u=357.1（米／秒）－340（米／秒）=17.1（米／秒）

≈61.6（千米／小时）

蝙蝠有完善的超声波发射与接受器官，它就是凭借着自己的“活雷达”，在夜空中甚至黑暗的岩洞里飞来飞去，追捕昆虫，躲避各种复杂的障碍．蝙蝠的“活雷达”实际上就是一部回声定位器，而且能够分辨回声的“精细结构”，把昆虫反射的信号与树枝、电线……反射的信号区分开来．蝙蝠的这种本领已被人类仿效．

[例 3]用“声纳”装置可以测量海洋的深度，探测潜水艇或鱼群的距离等等．用“声纳”测量海水的深度时，应垂直于水面向海底发出超声波．如超声波从发出到接收到回波的时间间隔为△t=2.4 秒，声音在海水中传播的速度为 1448 米／秒．试求海水的深度．

[分析与解]设超声波在海水中的速度为 v，海水的深度为 h，由题意可得：

$v\triangle t=2h$，即

$h=\frac{v\triangle t}{2}=\frac{1448\times 2.4}{2}$（米）≈1738（米）

●思考与练习

1．闻其声不见其人，是因为声音很容易发生_____现象；雷声往往轰鸣不绝，持续较长时间，是声音的_____现象造成的；在管形水槽口的上方放置振动的音叉，当水位改变时声音周期性变化，这是声音的____现象．

2．以下关于声波的说法中，正确的是　　　　　　　　　　[　　]

A．声音特性由音调、响度与音品决定；

B．可判别回声与原声的最短时间间隔为 0.1 秒；

C．声波由空气进入金属后波长变短；

D．声音在不同媒质中传播音调不变；

E．声波在传播中必须以空气为媒质；

F．同一声波在不同媒质中传播时频率不变；

G．频率相同的声波在不同媒质中波长不同；

H．某声波在空气中传播时，若气温升高，则波长变大．

3．一只蝙蝠以 6．0 米／秒的速度垂直飞向一座房屋的墙壁．飞行中它发射出一束频率 $f=4.5\times10^4$ 赫兹的超声波，经 0.015 秒接收到回波．求蝙蝠发射超声波束时与墙壁相距多远？（设声速为 340 米／秒）

4.某渔船为了探测鱼群,某时刻向某特定的方向发射一束频率为 1.0×10^5 赫兹的超声波，经 0.88 秒接收到鱼群反射回来的回波．已知 1.0×10^5 赫兹的超声波在海水中的传播速度为 1.45×10^3 米／秒．求该鱼群与渔船之间的距离．

参考答案

一

1．4.0 秒　2．0.7，1.25　3．0.5 赫　4．5 秒　5．T=0.4 秒，f=2.5 赫

6．$T = 0.28$秒　70.43秒；$OB = \frac{n}{4}$米（$n = 1$、2、3、……）

8．$\sqrt{6}$小时　9．　0.9997；应缩短摆长　10．A、C

11．D　12．$\frac{R}{N-1}$　13．$a_{max} = 4.9$米／秒^2，$A = 3.1$厘米

14．x=2．8sin（22t+1.458）厘米 15．(1)A=6 厘米，T＝1．26 秒；(2)x_0=－6 厘米；(3)F=3．75×10^{-4}牛顿；(4)E=1．13×10^{-5}焦耳

16．$A = 2$厘米，$\varphi = \frac{\pi}{3}$

二

1．C　2．A　3．A、B、D　4．10，下，上，1

5．2，4，8　6．$\frac{12}{4n+3}$，$n = 0$，1，2……

7．0＜x＜1厘米，3厘米＜x＜4厘米　8．略　9．1．5，$\lambda = \frac{12}{4n+3}$米，$n = 0$，1，2，3……

10．81 厘米，－1 厘米　11．图略　12．4.n＋1 米或 4n＋3 米，n=0，1，2，3……；1 米或 3 米

13．(1)A=0．2 米，λ=8 米；(2)$u_{右}$=400 米／秒，$u_{左}$=1200 米／秒；(3)向左传播

14．3／（4△t）；4△t

15．B、D

16．M、P；N、Q

17．B、D

三

1．衍射；反射；共鸣　2．B、D、F、G、H．　3．2．6 米　4．638 米