学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

论光

汉译本
前言

克里斯蒂安·惠更斯（Christiaan Huygens，亦写作 ChristianHuyghens，1629 年 4 月 14 日—1695 年 7 月 8 日）是历史上最伟大的科学家之一。在从维埃特（Francois Viete，1540－1603）和笛卡儿（René Descartes，1596—1650）到牛顿（Isaac Newton，1642—1727）和莱布尼兹（Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716）之间的历史时期之内，他是最伟大的数学家；在伽利略（GalileoGalilei，1564—1642）之后和牛顿之前的历史时期之内，他在力学领域多年占据着独一无二的至高地位；他对于光的理论、时间测量和天文学做出了巨大的贡献，并且在他所感兴趣的许多其他领域都进行了极高水平的研究。牛顿曾从惠更斯的著作中得到不少启示，称他为 Sum-musHugenius（德高望重的惠更斯）。

荷兰乌得勒支的学者博斯（H. J. M. Bos）对惠更斯的生平、成就、思想和著述做了系统研究，并对其他学者在惠更斯研究方面的成果加以综合。他撰写的惠更斯传记，载于美国普林斯顿大学教授吉利斯皮（Charles Coulston Gillispie）主编的《科学传记辞典》（Dic-tionary of ScientificBiography，Charles Scribner ’s Sons，1970）第 6 卷第 597—613 页。

本书是惠更斯的代表作之一，1690 年以 Traitédela Lumière 为书名用法文发表。汉译本译自汤普森（Silvanus Philips Thompson，1851—1916）的英译本。汤普森是著名的英国应用物理学家、电机工程学家和科学技术史学家，著译作甚丰。吉利斯皮主编的《科学传记辞典》第 13 卷第 356—357 页载有美国加利福尼亚大学萨斯坎德（Charles Süsskind）撰写的汤普森传记。

至于本书的内容，当由读者通过研读去把握，不赘述。

任定成

1992 年 9 月 20 日

于武昌桂子山

论 光

其中解释了
反射和折射
尤其是
冰岛水晶的
奇异折射
发生的各种原因

序

我于十二年前旅居法国期间写下了这部论著，1678 年我把它递交给皇家科学院的学者们以及国王召见我时的在场成员。几位健在者，尤其是他们中间致力于数学研究的人们会记得，我宣读时他们已经在场；我在这里只能提到著名的先生，即卡西尼（Cassini）、勒麦（Rōmer）和德·拉伊尔（de la Hire）。尽管此后我已经更正和改动了某些部分，但当时写就的稿本可以证实，除了有关冰岛水晶形成的一些猜想，以及对于水晶折射的新观察之外，我没有增加什么东西。我叙述这些细节，是想让人们知道我对于现在发表的东西作过长时间思考，并非为了贬低那些可能没有看过我所写的东西而发现处理过类似问题的人们的功绩：譬如，两位著名几何学家牛顿（Newton）先生和莱布尼兹（Leibnitz）先生关于给定一个表面时聚集光线的玻璃形状问题事实上所想到的东西。

也许有人会问，为什么我拖了这么长时间才让这部著作问世。其原因是，我是用发表它的这种语言草草写就的，曾打算将它译为拉丁文以得到较多的注意。此后，我又准备将它同另一部关于折光学的论著一起发表，在这一部论著中，我解释了望远镜的效应以及属于这门科学的另外一些东西。但随着新奇感的消失，我就把这一构想的实施一拖再拖，而且经常被一些事务及其他新研究分心，以至连我也不知道什么时候能够了结这件事。由于这些考虑，我最终认为，尽管这部作品还不够完善，但将它发表出来还是比冒着让它遗失的危险再等一等要好。

在本书中看到的论证，不象几何学中的论证那样反映出很强的确然性，二者的差异甚大，因为几何学家是用确定的、无可争辩的原理来证明他们的命题的，而这里的原理则是由它们引出的结论来检验的；这些东西的本性不允许以其他方式论证。因此，总是有可能达到常常比完全证明的程度几乎低不了多少的某种盖然度。即，当用假定的原理论证了的东西与观察中的实验所产生的现象完全一致时；尤其是当这些现象大量存在，主要是当我们能够想象和预见那些应当遵循我们所使用的假说的新现象，以及当我们发现我们的预见与事实在那点上相符时。但是，如果在我提出讨论的东西中，所有这些都如我认为的那样得到盖然性证明，那么，这当是对我探究成功的强有力的确证；如果事实不象我描述的那样漂亮，那必定就麻烦了。我倒是相信，那些喜欢了解事物起因以及能欣赏光之奇观的人们，届时将在这关于光的种种沉思之中，在对于光的著名性质的新解释之中得到某种满足，光的性质是我们双眼构造以及大大扩展双眼用途的伟大发明的主要基础。我也希望有人沿着这些端绪，比我更进一步地深入思考这个问题，因为这个主题远未穷尽。这从我指出我所留下的尚未解决的某些困难的段落中可以看到，更不用说我全然没有涉及的问题，譬如数种发光体以及涉及颜色的所有问题了；到现在为止，还没有人能夸口在这个方

面获得了成功。最后，还有许多有关光的本性问题有待探究，我没有妄称已经揭示出光的本性，而我将非常感谢那些能弥补我在知识上的不足的人。

1690 年 1 月 8 日于海牙

英译者说明

就这部论著在光学科学发展中所施加的重大影响而论，本书英文版面世之前竟然已经过去了两个世纪，这似乎不可思议。这种情况或许是由于以前与受人拥护的牛顿思想相抵触的一切东西都遭到其信徒们谴责这种错误的热忱所致。然而，惠更斯的《论光》已经经受住了时间的检验：他将其光波传播概念运用于阐明错综复杂的晶体双重折射现象及大气折射现象所采用的微妙技巧，即使在现在仍然总是引起光学研究者的赞美。确实，他的波动理论远不如托马斯·杨（Thomas Young）和奥古斯丁·弗里斯内尔（AugustinFresnel）后来发展起来的学说那样完美，而且该理论属于几何光学而不是物理光学。假若惠更斯没有横向振动的概念、干涉原理的概念或者存在有序系列波的概念，他仍然会异常清晰地理解波的传播原理；他对这个主题的阐释是处理光学问题的新时代的标志。在准备这个译本的过程中必须小心从事，以免使用了含有现代概念的言词而把后来年代的观念引入作者的原文之中。因此，本书尽可能直译。作者的少数术语需要解释。譬如，他用“折射”（refraction）一词既表示通常的现象或过程，又表示这种过程的结果：例如，他习惯于把折射光线叫做入射光线的“折射”。当一个波前或者如他说的一个“波”已经从某个初始位置到达后一位置时，他就把处于后一位置的波前叫做波的“延续”（the continuation）。他还把由这些基波前组合形成的一组基波包说成是波的“终点”（thetermination）；他把基波前叫做“特殊”（particular）波。鉴于法文 rayon 一词具有光线（ray of light）和圆范围（radius ofa circle）双重含义这一情况，他避免在后一种意义上使用它，并且总是说半径（semidi-ameter）而不说范围。他关于以太的思考、他关于晶体结构的启发性观点以及他对于不透明性的细微解释，也许由于它们看上去似乎是现代的东西而会使读者感到诧异。任何读到他对于在冰洲石中发现的现象所进行的探索的人，都不能不对他的洞见和睿智感到惊奇。

S. P. T.

1912 年 6 月

第一章
论沿直线传播的光线

正如在几何学被用于研究物质的所有学科中所遇到的那样，有关光学的论证都立足于从经验引出的事实上。这些事实是：光线沿直线传播；反射角与入射角相等；以及光线折射时方向按正弦定律改变。后者现已为人们所熟悉，它和前面的两个定律一样准确可靠。

著文涉及光学不同领域的大多数人都以认定这些事实而感到满足。但一些更具好奇心的人们却渴望考察其起因与理由，认为这些事实本身是自然现象的奇异效应。在这方面他们提出了某些有创见的东西，然而还不足以使最有才智的人不去寻求更好、更满意的解释。所以在这里，我想抛砖引玉，对自然科学的这个领域贡献我力所能及的解释，而这个领域极有理由地被认为是其中最困难的一个部分。我个人认为，应该非常感谢那些人们，是他们首先拨开了笼罩这些事实的迷雾，并且给了我们希望，有可能通过清晰的推理来说明它们。不过另一方面，也使我惊异的是，甚至在这一点上，这些人为了使人信服，总是乐于提出一些绝非结论性的推理。因为我还没有发现有人对光的第一个最值得注意的现象作出过有希望的解释，即为什么它不以除了直线以外的方式传播，来自无数不同地方的可见光怎样彼此丝毫不妨碍地穿过。

因此，我将试图在这本书中依据已被当今哲学承认的原则，给出一些更为清晰并且更有希望的解释，首先是光以直线传播的性质，其次是光在遇到其他物体时被反射。接着，我将解释光线在穿过不同种类透明体时受到折射的现象；在这个部分，我还将解释由大气层不同密度而引起的空气的折射效应。

此后，我将考察一种取自冰岛的水晶具有奇异折射的原因。最后我还将论述由于透明体与反射体的种种形状而使得光线汇聚于一点或以不同方式偏离的问题。由此人们可以容易地看到，依照我们的新理论，我们求出的不仅有笛卡儿（Descartes）先生为此天才发明的椭圆、双曲线和其他曲线；而且还有玻璃透镜表面该具备的形状，这时它的另一个表面已被给定为球面、平面或别的任何可能的图形。

无法想象去怀疑光是某种物质的运动。因为，人们或者去考虑它的产生，会看到在地球上它主要由无疑含有快速运动物体的燃烧与火焰造成，而燃烧与火焰会溶解和熔化许多其他的甚至于那些最坚硬的物体；或者去考虑它的效应，会看到当光被汇聚，如被凹面镜汇聚时，它具有象燃烧那样的起火性质，也就是说，它使物体微粒离开。这无疑是运动的标记，至少在采用机械运动来构思所有自然效应起因的实际哲学中是这样的。我认为我们必须这么考虑，不然就放弃了一贯领悟物理学一切现象的全部希

望。

还因为依照这种哲学，只要人们确信视觉兴奋只是某种物质运动对我们眼后神经作用的感应，就更有理由相信光存在于我们与发光体之间的物质运动之中。

此外，当人们考虑到光向四面八方传播的极限速度时考虑到来自不同部位甚至于是正相对部位的光线又是怎样彼此不受干扰穿过时，或许会清楚地认识到，当我们看到一个发光体时，光线不可能象射弹或箭穿过空气那种方式由物质从发光体传运给我们；因为那必将严重地违背光的这两个性质，尤其是第二个性质。于是，光应以另外某种方式传播，而我们有关声音在空气中传播的知识可以给我们以启迪。

我们知道，借助于空气这种看不见摸不着的物体，声音通过连续不断地从空气的一部分传递到另一部分的运动由产生它的地方向周围传播；并且这种运动的传播在所有方向进行得同样的快因而应该形成一些不断扩大的并传入我们耳中的球面。现已毫无疑问，光从发光体来到我们的眼睛，也是通过施加在这之间物质上的运动；正如所看到的那样，因为光不可能被一个物体从一个地方运载到另一个地方。另外，如果光的传播需要时间——我们即将考察这一点——就可得知，施加在介质上的这种运动是连续的，因而它也应象声音那样以球面和波的形式传播：其所以称它们为波，是由于它们和看到石头扔入水中时所产生的情形类似，呈现出圆圈那样的连续分布，尽管它们的起因不同，而且仅在一个平面上。

为了弄清楚光的传播是否需要时间，让我们首先想一下是否有什么能使我们信服的相反的经验事实。至于那些在地球上可以取得的经验事实，尽管远处照光证实了光通过这些距离几乎不需要时间，人们还是可以有理由认为这些距离太小，由此能得到的唯一结论是光的传播极快。笛卡儿先生主张光瞬时传播，他不无理由地将其观点建立在从月食得出的一个较好的经验基础上；然而，正如我将要证明的，这也无法使人信服。为了使结论易懂，我将采用一种与他稍许不同的方式进行阐述。

设 A 为太阳的位置，BD 为地球轨道或公转路径的一部分，ABC 是一条直线，我假定它与月球的圆轨道 CD 相交于 C 点。

如果光需要时间，譬如一个小时穿过地球与月球之间的空间，那么当地球到达 B 点时，它投下的影子或亮光遮断就还不会到达 C 点，而将在一个小时后才到达那里。从地球到达 B 点的时刻算起，一个小时后到达 C 点的月球将被遮暗：但是亮光遮断造成的昏暗不再经过一个小时就到达不了地球。假定经过这两个小时地球到达了 E 点。那么在 E 点的地球将看到一个小时前在 C 点被遮住的月球，与此同时还将看到位于 A 点的太阳。由于我照哥白尼（Copernicus）那样假定太阳是静止的，而光又总是沿直线传播的，太阳总是在它那个地方出现。不过据说，人们一直观察到月食时的月球出现在正对太阳的黄道上那一点；然而眼下所考虑的，月球似乎在那

点之后出现，相差角 AEC 的补角 GEC 那样大的角度。这一点无论如何正好同人们的经验相反，因为角 GEC 会很可观，大约为 33 度。那么，依据我们在有关土星现象起因的论文中给出的计算,地球到太阳的距离 AB 大约为地球直径的一万二千倍，也就比相当于三十倍地球直径的到月球的距离 BC 要大四百倍。于是，角 ECB 几乎比大小为五分的角 BAE 大四百倍；即地球沿其轨道在二小时内穿过的行程，角 BCE 因而约为 33 度，角 CEG 也一样，只是大五分。

不过应当注意，这一论证中的光速被假定为它从这里到月球的行程需要耗费一个小时。倘若假定它只需要一分钟的时间，很显然角 CEG 仅有 33 分；而如果它只需要十秒钟时间，这个角就将小于 6 分。再者，人们既不容易由月食的观察中发觉什么；因而也不允许从中得出光的运动瞬时的结论。

确实，我们在这里假设了一个比音速快十万倍的怪速度。因为根据我所观测的结果，声音在一秒钟或者在大约一次脉搏的时间内约传递 180 突阿斯（toise）[①]。但是，这个假设似乎不应该被视为是不可能的；由于除了从某些物体向另外一些物体传递的连续运动的问题外，具有如此巨大速度的物体的传送倒并不是一个问题。鉴于以这种方式，光的所有现象都可以被解释，相反则所有的事情无法理解，我也就不反对去考虑这些事情，去假设需要时间来完成光的发射。因为在我一贯看来，即使是笛卡儿先生，他的研究曾清晰地论述了物理学的各种课题，他在这方面也的确比前人更加成功，但在处理光及其特性时，也从没有说过什么是不充满困难的，乃至于不惊人的。

我用来仅作为假设的东西，最近经过勒麦先生精巧的证明，仿佛成了既定的事实，虽然期待由他本人给出证实所必要的一切，我也打算在这里说一说。同先前的论证一样，也是由天体观测出发，不仅证明光的行程需要时间，而且给出需要多少时间，光速比我刚讲的至少还要大 6 倍。

勒麦先生为此利用了绕木星旋转的众小星体造成的星食，这些现象经常使他困惑，期望得出其答案。设 A 为太阳，BCDE 为地球的公转轨道，F 为木星，GN 为距离它最近的卫星的轨道。正是由于这个卫星旋转得快，而比其他三个卫星更适合于作此研究。假定这个卫星在 G 点进入木星的阴影部分，又在 H 点从阴影中出来。

再假设地球在下弦之前的某时刻到达 B 点，看见该卫星从阴影中出来；倘若地球留在原处不动，经过$42\frac{1}{2}$小时以后，必定会再看见它同样地出来，因为这恰好是卫星再跑到太阳对面绕其轨道一周所要的时间。如果这个卫星旋转了30次而地球始终在B点不动，就会每隔$42\frac{1}{2}$小时看见卫

[①] 法国旧制长度单位，1 突阿斯相当于 1.949 米。——编者

星从阴影中出来 30 次。但是地球在这段时间内已跑到了 C 点，增加了它与木星间的距离，因而得出如果光的行程需要时间，它在 C 点就比在 B 点晚一些看到这个小星体的光亮，需要晚30个$42\frac{1}{2}$小时，在这段时间里光走过 MC 这段空间，即 CH 与 BH 之差。类似地，在另一个弦内当地球从 D 点到 E 点逐渐接近木星时；在 E 点应当比地球在 D 点不动时早一些观察到卫星隐没到木星的阴影中。

在连续十年进行的大量星食观测中，已经发现这些差别非常明显，例如 10 分钟以上；光穿过公转轨道的直径 KL，即地球到太阳距离的两倍，需要大约 22 分钟时间。

地球从 B 到 C 或者从 D 到 E 时木星在其轨道上的运动，已包括在这一计算中；因此，显然不能认为光程迟差或星食超前是小星体运动出现的紊乱或反常。

如果考虑到直径 KL 的巨大尺寸，据我看，大约为二万四千个地球直径，就会承认光的极限速度。如果假定 KL 不超过二万二千个地球直径，看来在 22 分钟内穿过它，要求光速为每分钟 1 千个地球直径，即每秒钟或每次脉搏$16\frac{2}{3}$个地球直径，约一亿一千多万突阿斯。依据皮卡尔（Picard）先生 1669 年遵照国王的命令所作的精确测量，地球直径有 2，865 里格（league）[①]，估算误差程度 25 里格，每里格等于 2，282 突阿斯。如前所述，在一秒钟的同样时间内声音仅穿过 180 突阿斯，因而光速比音速大六十多万倍。但是，这与瞬时远非同一回事，因为有限与无限完全不一样。用这种方法证实了光的连续运动后，如上所述，就可以得出光象声音的运动那样通过球面波来传播的结论。

如果说二者在这方面相似的话，那在其他方面就不同，也就是说，导致它们运动开始的原因不同；传播它们运动的介质不同；而且传播方式也不同。关于声音产生中的问题，人们知道，它是由物体整个或其中相当大的部分振动震击周围邻近的空气所引起的。但是，光的运动却必定由光亮物体上的每一点发源，不然的话，我们就分不出那个物体的各个不同部分。这一点在下文中会更明显。我相信没有什么别的方法能比下述假设更好地解释光的运动，即，假设所有液态的光亮物体，例如火焰、太阳和星星的外表，是由飘浮在一种很难形容的介质中的微粒组成，这种介质能极快地震动这些微粒，并使它们撞击周围的比它们更细小的以太物质。不过我也认为，在固态的光亮物体，例如在火中，烧红了的木炭或者金属，金属或者木块微粒的激烈振动也会引起同样的光运动；固态光亮物体表面的微粒同样也会撞击以太物质。此外，产生光的微粒振动应该比产生声音的物体振动要更直接更迅速，因为我们看到，就象手在空气中的运动不能产生声

[①] 长度单位，1 里格约合 3 海里。——编者

音那样，产生声音的物体振动也不能产生光。

那么，如果询问被我称为以太的传递来自光亮物体运动的物质是什么，人们会看到，它与传播声音的物质不同。因为人们发现后者是我们可以真实感觉与呼吸的，当它从某个地方移开时，在那里仍然存在另一种能传送光的物质。这一点可以通过用抽气机抽出空气来密闭一个装在玻璃器皿内的发声体的方法来证明，这种抽气机是波义耳（Boyle）先生给我们的，他曾用它作过好多漂亮的实验。不过在做我所说的这个实验时，必须细心地将发声体用棉花或羽绒包住，以避免将其振动传递给装它的玻璃器皿或者传递给抽气机，这一预防措施向来被忽略了。这样一来，抽完所有的空气后，就听不到金属的声音了，尽管它仍被敲击着。

在这里，人们不仅看到，不能穿透玻璃的空气是传播声音的物质，而且看到，传播光的物质不是这种空气而是另一种物质，因为即使从器皿中抽掉了空气，光依旧穿过它。

最后这一点通过著名的托里拆利（Torricelli）实验能更清楚地得到证明。在这个实验中，水银下落留下的没有空气的玻璃管，能象有空气时那样传播光。这就证明了玻璃管内有一种不同于空气的物质，这种物质可以穿透玻璃或者水银，不过，不管是这还是那，空气都穿不透。在同样的实验中，如果在水银上先放一点水后再抽真空，一样可以得出结论，上述物质穿透玻璃或水，或者都穿透。

关于我所讲到的传送声音运动与光运动的不同方式，倘若考虑一下空气有一种能被压缩以至挤进此正常体积小得多的地方的性质时，就足以理解在声音情形下是如何进行的。空气按被压缩的比例尽量恢复其原状；这一特性连同其穿透性，即使在空气被压缩时也存在。这似乎表明，由更小部分构成的以太物质中，空气由被快速震动的到处飘浮的微粒组成。所以，声音传播的原因就是声波范围内的这些微粒稍微挤压在一起时，通过相互碰撞以恢复原状的结果。

然而光的极大速度以及它所具有的其他性质，不允许运动象这样传播。我准备在这里给出一个我以为光能够传播的方式。为此，有必要解释一下坚硬物体依次传递运动所应具有的性质。

把一些同样大小的由坚硬材料制成的球排成一条直线，并使它们彼此相切，再用一个同样的球撞击这些球中的头一个，我们发现，运动在一瞬间内就传到了它们的最后一个，并使它离开它们的行列，而我们并不觉察到其他球体曾经被撞动过，甚至于用来作撞击的那个球也同它们静止在一起了。由此可以看出，运动是以极快的速度传递的，做球的材料越坚硬，传递的速度越快。

不过有一点是确定无疑的，即运动的这个传递过程不是瞬时的，而是连续的，因而需要时间。因为如果你硬要这样说，假若运动或运动的序列不是连续地由这些球传送，则这些球就会同时获得运动，而一起往前跑；

这种现象没有发生。只是最后一个球离开整个行列，获得了与撞击它们的球的速度一样的速度。此外，还有些实验表明，那些被我们当作最坚硬材料的物体，譬如硬化钢、玻璃以及玛瑙之类，不但在伸展为棒状时而且在制成球或其他形状时由于某种原因也会起到弹簧那样的作用而变形。换句话说，在它们被撞击的地方会凹进去一点儿，随即就恢复了它们原先的形状。因为我发现，在用一个玻璃或玛瑙球撞击由同样材料做成的大而相当厚并且表面平坦的物件时，先在物件上呵口气或用别的办法稍微弄点污，就会留下一些圆形的痕迹，痕迹的大小随撞击的强弱而定。显而易见，这些材料在被撞的地方凹进去，然后又弹回去：因此，必定需要时间。

现在把这种运动方式用来研究光的产生，就没有什么妨碍我们估计，以太微粒是由一种几乎达到理想硬度并具有可任意选择弹性度的材料构成的。没有必要在这里去考察这种硬度或弹性度的来源，那会使我们偏离了主题。不过，我还是要顺带提一下，我们可以设想以太微粒，尽管它们很小，同样也是由其他组分构成的，它们的弹性度取决于一种到处充满着的微妙物质的极快运动，使它们的结构不得不呈现为象液态物质那样极为明显和容易流过的形式。这一点与笛卡儿关于弹性的解释相符，不过我不象他那样以为孔就是圆形的空心管子。不要以为这里面有什么是荒谬或不可能的，其实恰好相反，正是这种无穷的大小不同、速度不同的微粒才使自然界出现这么多千奇百怪的效应。

虽然我们将不管弹性的实际起因，但我们仍然看到许多物体都具有这个性质，因而假定象以太微粒这样的微小不可见的物体也具有这一性质，也不值得奇怪。除此以外，如果企图另外寻找任何一种光连续传播的运动方式，会发现没有哪种方式，在似乎是必须均匀行进方面，比弹性方式更合适。因为，假如光运动随着参与传送的物质越多，成比例地变得越慢，光在离开光源后就不可能经过遥远距离而保持其巨大的速度。除非假设以太物质的弹性，它的微粒才会具有一样迅速恢复原状的性质，而不论它们是否或强或弱地被推开。因此，光将总是依照同一速度传播。

必须知道，尽管以太微粒不是排成一条直线，象我们举例中的那样，而是混乱的，因而它们中的任何一个都与另外几个相切。这不影响以太微粒发送和向前传播它们的运动。关于这方面，有必要值得再提一下一个经过实验证实了的可用于这种传播的运动定律。这个定律是，当一个球，譬如这里的 A，与其他几个相同的球 CCC 相切时，如果它被另一个球 B 撞击，使它给所有与之相切的球 CCC 都施加一个推力，把它的运动整个都发送给了它们，而后就象 B 球那样不动了。即使不假设以太微粒是球形的（在我看来，其实也用不着这么假设），也能很好地了解传递推力的这种性能不会不对上述的运动传播起作用。

大小相同似乎更加必要，否则根据我几年前发表的《碰撞定律》（Laws of Percussion），当运动从一个较小微粒向一个较大微粒传递时，应该存

在运动的某种反冲。

无论如何，以后将会看到，对于光的传播，即要使传播更轻易和更有效，我们甚至也没有一点必要去作出大小相同这种假设。虽然在象光传播这样重要的问题中，作出以太微粒大小相同的假设，并没超出可能的范围，至少在大气层外似乎只传送太阳光和星光的浩瀚空间中是这样。

我在某种程度上已经指出，可以设想光以球面波连续传播，这一传播伴随一种在实验与天体观测中所要求的巨大速度。在这里，或许要进一步指出，尽管假定了微粒作连续运动（关于这一点有很多理由），并不妨碍波的连续传播；因为传播并不在于那些微粒的传送，而只在于一种不可避免向它们周围传递的小的扰动，不管施加在它们上面引起位置改变的是什么运动。

但是，我们还是有必要更具体地研究这些波的起源，以及它们的传播方式。首先，依据我们刚刚所作的有关光产生的论述，太阳、蜡烛或燃烧的煤这样的光亮物体上面每一个小区域，都能以该区域为中心产生其本身的波。于是，在蜡烛的火焰中标出了点 A、B、C，分别以这些点为中心作出的同心圆就表示来自它们的波。并且，对于火焰表面以及内部的每一点，都必须这样来设想。

不过由于这些波的中心的振动不具有规则的次序，所以不能假定这些波本身以相等的距离一个接一个；假若距离象图中所标出的那样，与其用以表示来自同一中心的几个波，不如表示在相等的时间间隔同一个波的行进。

终归不必认为这种互不干扰互不抵消的数量巨大的波不可想象，同一种物质微粒可以适用于来自不同方向，甚至相反方向的许多波是确定无疑的，不仅在它被一次紧接着一次的撞击时是这样，而且对于同时施加在它上面的撞击也是这样。之所以能这样是因为运动的传播是连续的。这一点可以参照上述的一列相同的硬球来证明。如果在同一时刻，从相反的两边朝这列球撞来两个一样的球 A 和 D，将会看到，它们中的每一个都以在撞击时同样的速度反弹回来，但整列球依然保持在原来位置上，尽管运动已经沿着它们传递了两次。如果这两个相反的运动正好在中间的球 B 或者另外某一个球 C 上相遇，这个球的两边将象弹簧一样伸缩，并由此在同一时刻内传递这两种运动。

但是，一开始就显得十分奇怪甚至不可相信的一点是，由如此小的运动和微粒产生的波动竟能传播如此无限遥远，例如从太阳或星星到我们这里这么远。因为这些波的强度必定随着离开其波源而成比例地减弱，以至于每个波的作用将无疑不能单个使我们的视觉觉察到。不过考虑一下由遥远的光亮物体发出的无穷多个波是怎样组合得看起来仅为一个波，尽管它们来自这个物体上的不同点，这个波当然就有足够的强度能观察得到，就不会再感到奇怪了。于是，这些在同一时刻一个大得象太阳一样的固定的

星体产生的无穷多个波，实际上构成一个单一的波，可能有足够的强度对我们的眼睛产生影响。此外，在可以想象的最小时间内，每个亮点通过撞击以太的那些微粒的频繁振动发出成千的波，这使它们的效应更加明显。

关于这些波的发射还有另外一种见解，传播波的物质的每一个微粒，应当不仅朝沿亮点出发的直线上的下一个微粒传递其运动，而且必定朝所有与它相邻和背向运动的微粒传递。因此可以得出，围绕每一个微粒，都有一个以该微粒为中心的波产生。若 DCF 是以亮点 A 为中心发出的波，在球 DCF 内的微粒 B 发出其分波为 KCL，它将在由 A 发出的主波到达 DCF 的同时，与波 DCF 在 C 点相遇。显然，波 KCL 上的只有区域 C 才与波 DCF 相遇，即只在 AB 的联线上相遇。同样，球 DCF 内的其他微粒，譬如 bb、dd 等，也会产生它们自己的波。不过这些波中的每一个单独与波 DCF 相比起来，可能是极其微弱的，波 DCF 是由所有那些波的离中心 A 点最远的表面部分组成的。

另外看到，波 DCF 决定于由 A 点出发的运动在一定的时间间隔内所通过的距离，虽然在它包围的空间中存在有不与球 DCF 相邻的那些分波部分，DCF 这个波之外却没有运动。所有这一切似乎不应当伴随过于细致或微妙的差别，因为在后面我们将看到，光的性质及其反射与折射所具有的一切属性，原则上都能通过这一方法作出解释。对于至今已着手研究光波的那些人而言，这一切都是鲜为人知的。他们当中有胡克（Hooke）先生，在他的《显微术》（Micrangraphia）中作了研究，还有法迪斯（Fardies）神父，他在一篇论文中已经试图利用这些波来证实反射和折射的效应。他曾让我阅读过这篇论文的一部分，由于他不久后去世而没有完成这篇论文。不过我刚才所作论述的要点，在他的论证中是没有的；而且他对其他问题的观点也与我非常不同，如果他的文章被保存下来，将来有一天会看到这一点。

我们接着讨论光的性质。我们首先注意到。波的每一个部分都应当这样传播，使其末端总是落在由亮点出发的两条直线之间。于是，以亮点 A 为中心的波的 BG 部分，将传播到由直线 ABC 和 AGE 所夹的弧 CE 上。因为，尽管包含在 CAE 范围内的微粒所产生的分波也能传播到这个范围之外，象它们正好都传播到其公切圆周 CE 上那样,它们也不会同一时刻凑合成运动被限制的一个波。

因此人们明白，至少在光线不被反射或屈折时，光为什么只沿直线传播，结果除非在从光源到物体的路径畅通之外，光就照不到该物体。例如，如果有一个被不透明物体 BH 和 GI 限制的开口 BG，正如以上所揭示的那样，由 A 点出发的光波将总是被直线 AC 与 AE 所限制；而传播到 ACE 范围之外的分波微弱到以至于不能在那里发亮。

无论我们把开口 BG 做得多么小,总有同样的理由使得那里的光在直线之间穿过，因为这个开口总是大得足以包含大量由难以想象小的以太物质

微粒，所以看起来光波的每一个小部分必定沿着从亮点出发的直线行进。那么，这样一来，我们可以把光线当作是直线。

此外，通过以上有关分波微弱的讨论，可以看出以太微粒不必要一样大，尽管一样大小更方便于运动的传播。事实上，在与较大的微粒撞击时，不一样大的微粒随着它的一部分运动而反弹，但这只是产生了一些背向亮点的不能发光的某些分波，而不是象 CE 那样由许多波组合而成的一个波。

光波的另外一个性质，也是最不可思议的性质，是来自不同的或者甚至相对方向的光波，能够毫无阻碍地相互穿过而产生其作用。由此也可以得出，一群旁观者可以在同一时刻通过同一开口看到不同的物体。而且两个人可以同时看到对方的眼睛。依据对光的作用所作的解释，光在相互穿过时是怎样不相互破坏或者不相互干扰，这些我已经提到过的效应就很容易想象了。依我看来，如果遵循笛卡儿的观点，认为光只是达到运动的连续压力，这些效应就完全不容易解释。因为这个压力不可能同时从两个相反方向，对两个没有互相接近趋向的物体施加作用。因而，就不可能理解我刚才所说的现象，即两个人能互相看到对方的眼睛，或者两个火把能互相照亮对方。

第二章　论反射

解释了光波在均匀物质中传播的效应以后，下一步我们将考察当光波遇到其他物体时发生的现象。首先，我们将弄清楚，怎样用这些同样的光波来解释光的反射，以及为什么反射会保持角度相等。

设有某种金属、玻璃或其他物体的一个表面 AB，平滑而光亮。我先假定它是完全均匀的（我将一直使用这个假定，直到本章结尾处理一些不均匀问题止）。再设一条倾斜于 AB 的线 AC，表示光波的一部分，而光波的中心离得非常远，以至 AC 可以被视为一条直线。由于我们好象在一个平面中来整个地考虑这个问题，设想本图所在的平面，是经过波的中心球面波的剖截面与 AB 平面正交。在整个讨论中只作这一次说明就够了。

波 AC 上的 C 点沿着直线 CB，经过一段时间间隔行进到平面 AB 上的 B 点，可以假定 CB 从亮中心出发，并与 AC 垂直。在同样这段时间间隔内，同一个波上的 A 点，受到阻碍而不能或者至少部分地不能将其运动传播到 AB 平面以外，而不得不在该平面上方的物质中，沿着等于 CB 的距离继续运动，如前所述，发出它自身的球面分波。这个波在这里由圆周 SNR 表示，其中心为 A 点，半径 AN 与 CB 相等。

如果大家进一步考察波 AC 上的其他一些部分 H，就可以看到，它们不仅沿着平行于 CB 的直线 HK，到达了表面 AB，而且还以 K、K、K 为中心在透明的空气中产生球面分波，这里用一些半径等于 KM 的圆周来表示，换句话说，这些半径等于 HK 延长到与 AC 平行的直线 BG 处的延长部分。显而易见，所有这些圆周有一个公切线 BN，即从 B 点作出的那条直线，它与以 A 点为中心以等于 BC 的 AN 为半径的第一个圆相切。

直线 BN（由 B 与过 A 的垂线的垂足 N 之间的点组成）本身是由所有这些圆周构成的，它限定由波 AC 的反射所引起的运动；而且在 BN 上发生的运动比其他任何地方都强得多。所以，依照前面的解释，BN 是波上 C 部分到达 B 点时 AC 波的传播。因为除了平面 AB 下方的直线 BG 以外，再没有其他象 BN 那样的线，是上述所有圆的公切线；在这里假设了运动可以传递到与平面上方一样的介质中，直线 BG 是波 AC 的传播。如果你想要知道波 AC 是如何连续地传播到 BN 的话，你只须在上述图形中，画出平行于 BN 的直线 KO，以及平行于 AC 的直线 KL。这样你就看到平直波 AC 逐渐屈折为各个 OKL 部分，并在 NB 处再次变直。

这里很明显，反射角等于入射角。由于三角形 ACB 和 BNA 都是直角三角形并有一公共边 AB，而且边 CB 又与边 NA 相等，则这些边对应的角相等，即角 CBA 等于角 NAB。而且正象垂直于 CA 的 CB 标记入射线的方向那样，垂直于 BN 的 AN 标记了反射线的方向，因此，这些光线对于平面 AB 具有相同的倾角。

不过在考虑上述论证时，人们可能会认为，在本图的平面中 BN 为圆形波的公切线的确是真的，但是实际上作为球面波的这些波还有无数类似的公切线，即那些由直线 BN 经过 B 点绕轴 BA 旋转所产生的锥面上的直线。于是剩下的就是要证明在这个问题上并不存在什么困难，而且通过同样的论证，看到为什么入射线与反射线总是位于与反射平面垂直的同一个平面内。注意，被认为只是一条直线的波 AC 产生不了光。因为一束可见光线，不管它怎么窄，总有一个宽度。因此，表示波在行进时构成光线，有必要用某种平面图形来代替 AC，就象我们已经采用的方法那样，通过假定光点在无穷远处，表示为下图中的圆 HC。依照前面的论证容易看到，到达平面 AB 的这个波 HC 上的每一段都在 AB 上产生它的分波。在 C 到达 B 点时这些分波会有一个公切面，即一个类似于 CH 的圆 BN，并且这个圆被一个平面从中间垂直地相交，该平面也与圆 CH 和椭圆 AB 同样地相交。

也可以看到，除了圆 BN 以外，所谓的分波球面不会再有其他的公切面；因此，正是在这一平面上，存在着比其他任何地方更多的反射运动，从而持续从波 CH 来的光。

在前面的论证中，我曾指出，入射波的 A 段的运动本身不能或者至少不能全部地传播到平面 AB 之外。因此必须注意，尽管以太物质的运动可能将其本身部分地传播到反射体，但这不能改变决定反射角的波的行进速度。因为在同一种物质中，轻微的撞击与强烈的撞击应当一样快地产生波。这一点出自于我们以上所说过的象弹簧那样起作用的物体的性质，即无论压缩多少，它们反冲的时间相等。同样在光的一切反射中，对于任何物体，反射角总是应当等于入射角，不管该物体是否有一种可能吸收部分入射光运动的性质。并且实验表明，事实上没有哪一种磨光了的物体违背这个规律。

不过，在我们的论证中最值得提及的事情是，不象所有试图解释光效应的人们假设的那样，不要求把反射面考虑为一个均匀的平面；而只需要互相靠近放置的反射体的物质微粒所可能具有的那种光滑程度所得到的平面；这些微粒比以太物质的微粒要大些，关于这一点在我们讨论物体的透明性与蔽光性时还会涉及到。由于反射面象这样由聚集在一起的微粒组成，而以太微粒在上面又比较小，显然不能以那些作者一贯采用的方法，类比球投向墙上时所发生的情况来证明反射角与入射角相等。但是在我们的方法中能毫无困难地作出解释。例如，由于应当设想在考虑的最小可见面中有无数微小的水银微粒，象一堆尽可能地撒平的沙粒那样排列着，就我们的情况而言，这个可见面就变得象擦亮的玻璃一样平。虽然与以太微粒比较起来，它始终是粗糙的，很明显我们所说的全部反射球面波的中心却几乎在一个均匀平面上，以至公切面能够按照光产生所需要的那样，精确地同它们吻合。在我们的论证方法中，只有这一点是必要的条件，不需要能引起相反作用的各处所反射的运动剩余部分，就使得所说的角度相

等。

第三章　论折射

采用磨光物体表面反射光波解释反射作用的同样方法，我们来解释透明性以及在透明体内光波传播的和穿过所引起的折射现象，这些透明体既可以是象玻璃那样的固体，也可以是象水、油等那样的液体。不过，为了使波在这些物体中传播的假设不至于显得奇怪，我将首先说明，可以设想有可能不只一种模式。

首先，如果以太物质完全不能穿入透明体，则透明体的微粒就应该象以太微粒那样，能够连续地传播波的运动，只要假设它们象以太那样也具有起弹簧作用的性质。当考虑水和其他透明液体时，这一点很容易想象，因为它们的固性似乎不允许它们作除了它们同时以一个整体运动以外的其他运动。然而，这不是不可避免的，因为这种固性不是我们看来的那种，说得确切些，这些物体根据它们凸凹不平的形状，不过是由一些相互靠得近的微粒构成的，这些微粒靠某种其他物质从外面加压结合在一起。主要是由于能简易地表现它们的稀薄性，磁旋物质在那里穿过，导致吸引力。而且不能认为这些物体有一种象海绵或软面包那样的结构，因为用火加热使它们变形，从而改变物体中微粒的位置。那么，正如已经讲过了的那样，物体是彼此邻接的微粒组成的复合物，而不是一个实心体。既然如此，这些微粒收受的运载光波的运动，只是由它们的某一部分传到另一部分，在这种情况下不需要微粒脱离其位置或者打乱，运动可以丝毫不损害复合物的表观固性而恰当地产生作用。

我所说的外压不应该理解为来自空气的压力，它是不够的，而应该理解为来自某种更精细的物质的压力。这一压力是很久以前我在实验中偶然发现的。在水里不含空气的情况下，虽然已经把空气从封闭管子的容器抽掉，压力继续存留在下端开口的这根管子中间。

那么可以用这种方式来想象固体的透明性，而无须设想传播光的以太物质能穿透固体或者在它里面找到进入的缝隙。但是，事实上以太物质不仅穿透了固体，而且还非常容易，前面提到的托里折利实验就是一个证明。因为在玻璃管上部水银和水下落后留出的地方，由于光的穿透，显然立即被以太填满了。不过，这是检验透明体和其他各种物体中透明度的另一种论据。

光穿过一个四周封闭的空心玻璃球时，球内与球外一样充满着以太物质是肯定的。如上所述，这种以太物质由只是相互邻接的微粒组成。那么，假若以太象这样被关在球内而不能从玻璃的缝隙中出来，当球的位置改变时，以太就不得不随着球一起运动。因而，当把球置于一个水平面上时，要使球具有一定的速度所需要的力，几乎与它装满了水或者水银时一样。因为每一个物体对外加运动速度的抵抗，与所包含的随着运动的物质的量

成正比。但是，正好相反，人们发现球对于运动效应的抵抗，只是正比于组成玻璃的物质量。由此可见，球内的以太物质肯定没有被关住，而是非常自由地流出来了。以后我们将证明，可以照此方法猜测有关不透明体的透明度。

接着来看解释透明性的第二种模式，似乎更可能合适些，即认为光波是由均匀地填充透明体间隙的以太物质传递的。由于光波连续自由地穿过透明体，所以透明体始终充满着以太。人们甚至可以证明，这些间隙比构成物体的相连接的微粒占据着更大的空间。因为，如果我们以上所说的是正确的，使物体具有一定水平速度所需要的力，正比于它包含的相连接的物质；并且如果力的比例遵守重力定律，就象实验所证实的那样，那么构成物体的量也遵守它们的重力比例。我们知道水只有同样体积水银的十四分之一重，于是水物质不是占据整体存在空间的十四分之一。它准是占据得还要少。由于水银还没有金重，而金物质也决不是密实的，正如下述事实表明的那样，磁旋物质造成的吸引力非常随意地穿透它。

但在这里也许有人会问，如果水是如此稀薄的物体，并且它的微粒只占据了其表观体积中这么小的一部分，非常奇怪它还能如此强烈地抵抗压力而不让它本身被人们一向企图施加的各种力所压缩，在受到压力时甚至保持其整个的液性。

这个困难不小，但可以通过下述方法来解决。通过组成水的微粒的振动，覆盖水液体的精细物质的剧烈而快速的运动维持住这种液性，而不管谁一向有意去给它施加过力。

即然透明体的稀薄性如上所述，就容易设想光波由填充微粒缝隙的以太物质传递。此外，也会相信光波在物体内部行进时应该稍微慢一些。因为微粒造成了一些小的迂回。我将要说明光速不同的物质中的折射。

在这么做以前，我简述一下关于透明性设想的第三个也是最后一个模式。假设光波的运动在占据物体缝隙的以太物质微粒中的传递，与在组成物体的微粒中的传递无关，使得运动在两种微粒中从一种向另一种传递。以后将看到，这个假设能用来很好地解释某种透明体的双折射。

假如有人以下述理由提出反对，即如果以太微粒比构成透明体的微粒小（因为以太微粒在透明体微粒的间隙中穿过），则它们可以传递运动，不过稍小些，可以作出的回答是，这些物体的微粒本身又是由更小的微粒组成的，可能正是这些次级微粒接受以太的运动。

另外，如果透明体的微粒比以太微粒的反冲稍微缓慢些，这不妨碍我们的假定，光波的行进在这些物体内比在这些物体外的以太物质中要慢。

所有这些就是我所发现的光波穿过透明体的最可能的模式。要作一点补充的是，这些物体与那些不透明体不一样，由于以太物质容易穿透它们，看起来似乎尤其如此，没有什么物体是不透明的。类比用以证实玻璃密度小以及容易为以太穿透的空心球的推理方法，也可以证明金属和其他种类

的物体都具有同样的穿透性。譬如一个银制的球，球是封闭的，它无疑包含着传递光的以太物质，因为以太物质象在空气中一样存在于那里。还有，把球封闭起来置于一个水平面上，它只根据组成球的银物质量来抵抗施加给它的运动，因而必定得出同上的结论，封闭在球内的以太物质不随球运动；所以银跟玻璃一样很容易被这种物质穿透。于是，银和其他不透明体的微粒之间被大量的以太物质均匀地填满，又由于以太可以传递光，所以看起来这些物体都应该是透明的，然而实际情况并非如此。

于是人们就会问，它们为什么不透明？是否因为组成它们的微粒不硬？换句话说，由比它更小的微粒组成的微粒，在受到以太微粒的压力时，能否改变它们的形状并借此使运动衰竭从而阻碍光波持续？不是这样的。因为，如果金属的微粒不硬的话，擦亮的银和水银怎么会这样强有力地反射光呢？我在这里找到的最有可能的解释，就是认为金属作为几乎最合适的实在的不透明物体，在它们的硬微粒中混有一些不硬的微粒，使得一部分微粒反射而另一部分微粒阻碍穿透；另一方面，如上所说，透明体只包含具有反冲本领的硬微粒，同以太微粒一起传播光波。

我们现在转到关于折射效应的解释方面来，象前面所作的那样，假定光波在透明体内通过，而且在其中减慢速度。

折射的主要性质是，在空气中的光线，譬如 AB，倾斜地落在一个透明物体的擦亮的表面 FG 上，在入射点 B 处屈折，以垂直分割表面的直线 DBE 为界，使角度 CBE 小于角 ABD，即在空气中与该垂线所夹的角。这些角的大小可以通过以 B 点为中心画出一个与半径 AB、BC 相截的圆得到。从交点向直线 DE 所作的垂线 AD、CE，称为角 ABD、CBE 的正弦，它们之间有一个固定的比值，对于一个至少给定的透明体，入射光线的所有倾角，它们的比值是相同的。这一比值在玻璃中非常接近于 3 比 2；在水中，非常接近于 4 比 3；在其他透明体中，也同样有所不同。

与这一点类似的另一个性质是，折射对于进入和离开透明体的光线之间，是互换的。换句话说，如果进入透明体的光线 AB 被折射成 BC，那么同样地，这个物体内的光线 CB，在穿出时被折射成 BA。

接着，为了用我们的原理来解释这些现象的原因，假设直线 AB 表示位于 C 方和 N 方的不同透明材料的分界平面。我这里所说的平面，并不意味着完全平坦，而象我们在研究反射时那样来理解，并且理由也是同样的。设直线 AC 代表光波的一部分，假定其中心离得非常远，使得这一部分可以被认为是一条直线。波 AC 上的点 C 在一定的时间间隔内将沿着直线 CB 推进到平面 AB，可以被设想是从光亮中心出发，而且与 AC 正交。如果透明体物质与以太物质能同样快地传播波的运动，那么，在相同的时间间隔中，A 点将沿着与 CB 平行而且相等的直线 AG，到达 G 点；如果透明体的物质传送光波运动与以太物质一样快，波 AC 上的所有点应当到达 GB。但是，我们假设透明体物质传送这种运动要慢些，例如，慢三分之一。于是，透明

体中 A 点的运动象前面所说的那样产生自己的球面分波，将传播开等于 CB 三分之二的距离。这个分波用圆周 SNR 表示，它的中心为 A，半径等于 CB 的三分之二。如果依次考虑波 AC 上的其他点 H，就会发现，在 C 点到达 B 点的同时，它们不仅沿着与 CB 平行的直线 HK 到达了表面 AB，而且还在透明材料中以 K 点为中心产生分波，在这里用一些半径等于三分之二的 KM 长度的圆周表示，这些半径也等于 HK 到直线 BG 的延长线的三分之二；如果两种透明材料具有相同的穿透性，半径就将等于整个 KM 的长度。

所有这些圆周有一条公切线 BN，也就是我们先前考虑的从 B 点所作的与圆周 SNR 相切的那一条直线。因为容易看到，从 B 到 AN 落在 BN 上的垂足 N，其他那些圆周都将与这同一条 BN 相切。

正是由这些圆周上的小弧线所组成的直线 BN，使波 AC 在透明体内传播的运动终止，而且 BN 上的运动比其他地方更大。我们不止一次说过，由于这个原因，这条直线就是波 AC 在它的 C 点到达 B 点时的传播。因为平面 AB 下方的其他任何直线都不象 BN 那样，是所有这些分波的公切线。如果知道波 AC 是怎样逐渐到达 BN 的，需要做的只是在同一图形中画出所有平行于 BN 的直线 KO 以及平行于 AC 的直线 KL。那就可以看到作为一条直线的波 CA，各点接连地变成了屈折的 LKO，在 BN 处再变成一条直线。这一点在前面的论述中已经很明显，没有必要作进一步解释。

在上述图形中，如果画出了与平面 AB 正交于点 A 的直线 EAF，由于 AD 垂直于波 AC，表示入射光线的应当是 DA，而表示折射光线的是垂直于 BN 的 AN，因为光线只不过是波的各个部分行进时沿着的直线。

由此容易识别折射的这种主要性质，即角 DAE 的正弦与角 NAF 的正弦之比总是为同一值，而不管光线 DA 的倾角如何。并且这一比值也是 AE 方向透明物质中的波速与 AF 方向透明物质中的波速之比。因为，假定 AB 为一个圆的半径，那么角 BAC 的正弦就是 BC，角 ABN 的正弦就是 AN。而角 BAC 又等于角 DAE，因为它们加上角 CAE 后是直角。角 ABN 又等于角 NAF，因为它们加上角 BAN 后是直角。因此，角 DAF 的正弦与角 NAF 的正弦之比，就等于 BC 比 AN。而 BC 与 AN 之比又等于 AE 方向物质中的光速与 AF 方向物质中的光速之比；因此，角 DAE 的正弦与角 NAF 的正弦之比也就等于所说的光速之比。

所以，为了看一看当光波进入一种比它源出的那种物质中运动传播更快的物质中时（假定这一比为 3 比 2）折射会是什么样子，只需要重复我们所采用过的解释与论证，仅仅各处用 $\frac{3}{2}$ 来代替 $\frac{2}{3}$ 就行了。在另外一个图中，通过同样的推理求得，当波 AC 上的 C 点到达表面 AB 上的 B 时，波 AC 上的各个部分行进到 BN 那样远，使得垂直于 AC 的 BC 与垂直于 BN 的 AN 之比等于 2 比 3。最后，还有一个同样的比值，是角 EAD 的正弦与角 FAN 的正弦之比。

由此，可以看到光线进入和离开同一透明体的折射的互易关系，即，

如果落在表面 AB 上的光线 NA 被折射到 AD 方向，那么光线 AD 在离开透明体时将被折射到 AN 方向。

也可以看出这种折射中的一个值得注意的现象的原因：这一现象是这样的，超过某一个给定倾角的入射光线 DA 就开始不能进入另外的透明物质。如果角 DAQ 或者角 CBA 取这样的值，使得三角形 ACB 中的 CB 等于或者大于 AB 的 2/3，那么 AN 就不能构成三角形 ANB 的一条边，因为它等于或者大于 AB。因此，任何地方都找不到波 BN 的部分，当然也就找不到属于它的垂线 AN。因而入射光线 DA 不能进入表面 AB。

当波速的比值象我们的例子中那样对于玻璃与空气为 2 比 3 时，要使光线 DA 能够折射穿透，角 DAQ 就必须大于 48 度 11 分，当速度比值十分接近于水与空气的 3 比 4 时，角 DAQ 就必须超过 41 度 24 分。这一点与实验完全一致。

在这里也许会问：既然波 AC 与表面 AB 的相遇应该在另一方的物质中产生运动，那么为什么在那里却没有光线穿过呢？如果还记得我们前面讲过的内容，那么对这个问题的回答就简单了。因为，尽管它在 AB 另一方的物质中产生了大量的分波，但是这些波在同一时刻没有一条公切线（直的或者弯曲的）；于是越过 AB 表面没有一条线终止波 AC 的运动，或者没有任何地方使运动聚集得足以产生光。容易看到这一说法的真实性，假定 CB 比 AB 的 $\frac{2}{3}$ 大，如果以 K 点为中心以 LB 的 $\frac{2}{3}$ 长度为半径画出相应的圆，越过 AB 平面激发的这些波没有公切线。因为这些圆一个包一个并且都通过 B 点。

值得注意的是,从角 DAQ 小于允许折射光线 DA 进入另一种透明材料的角度起，就会发现表面 AB 上发生的内反射在亮度上大多了。通过三棱镜实验很容易实现这一点，而且我们的理论能够为此提供解释。如果角 DAQ 仍然大得足以使光线 DA 穿透，可以很明显地看到，由波的 AC 部分的出来光到达 BN 时，被汇聚到一个最小的空间中。随着角 CBA 或角 DAQ 的变小，波 BN 似乎更快地变小，直到角度减小到刚才所指出的极限时，波 BN 就汇聚成一点。换句话说，当波 AC 上的 C 点到达 B 时，波 AC 的传播 BN 将整个地缩小到同一点 B 上。同样，当 H 到达 K 时，AH 也将整个地缩小到同一点 K 上。由此显而易见，根据前面已交待过的反射定律随着波 AC 到达 AB 表面，将产生大量的沿着那个表面的运动，这些运动也应当在透明体内传播，也应当有特别加强的子波在表面 AB 上产生内反射。

因为入射角 DAQ 减小一点就会使原先不小的 BN 缩小为零(当这个角在玻璃中为 49 度 11 分时，角 BAN 还有 11 度 21 分；而当这个角度只减小了 1 度时，角 BAN 就被减小到 0 度，于是 BN 就被缩小为一点），由此可见，当入射角的取值使光线不再去折射穿过，内反射会从模糊突然变得明亮起来。

现在来考虑通常的外反射，也就是入射角 DAQ 足够大使得折射光线能

穿透表面 AB 时所发生的反射。这种反射应当贴着在透明体外所连接的物质微粒发生。看来，反射是在空气或其他物质的微粒以及以太微粒之中产生的，而且大一些。另一方面，这些物体的外反射是在构成它们的微粒中发生的，这些微粒也比以太的微粒大，因为后者能在它们的缝隙中流动。事实上，在那些实验中还有一些反例，当把空气从容器和管子中抽掉，即使没有空气的微粒的贡献，内反射也能发生。

此外，经验告诉我们，这两种反射差不多一样强，在不同的透明物体中，这些物体的折射越大，反射就越强。于是可以明显看到，玻璃的反射比水强，钻石的反射比玻璃强。

我准备以一个值得注意的定理的论证来结束这个折射理论，该定理与折射理论有关，即位于不同介质中的两点，光线要从其中一点传播到另一点就得照这种方式折射，在连接这两种介质的平面上使光线花费最少的允许时间。在一个平面上的反射，发生的情况完全一样。费马（Fermat）先生第一个指出了折射的这种性质，他同我们一样与笛卡儿先生的观点正好相反，认为光在玻璃和水中比在空气中走得慢些。不过他还假定了一个我们刚才单靠速度的快慢而证明出的正弦的常数比值。更确切些来讲，他不仅假定速度不同而且还假定光线的传播所需的时间最小，并由此推导出正弦的常数比值。他的论证非常长，可以在他的已出版的著作中，以及在笛卡儿先生的通信集中看到。因此，我在这里给出另一个简易的证明。

设 KF 为平面；A 点在光容易传播的介质中，譬如空气，C 点在另外一种很难穿透的介质，例如水中。再假定光线 DA 经过 B 到达 C，在 B 点按照我们前不久证明的定理折射；也即是说，画出与平面正交的 PBQ，使角 ABP 的正弦与角 CBQ 的正弦之比，等于 A 点所处介质中的光速与 C 点所处介质中的光速之比。要证明的是光沿 AB 和 BC 穿过所需要的时间，是各种可能值中最小的一个。首先不妨假定光可以沿其他路径传播，譬如沿 AF 和 FC，折射点 F 与 B 点离 A 远一些；作 AO 垂直于 AB，FO 平行于 AB；BH 垂直于 FO，FG 垂直于 BC。

那么，由于角 HBF 等于角 PBA，角 BFG 等于角 QBC，因而可以得到，角 HBF 的正弦与角 BFG 的正弦之比，等于介质 A 中的光速与介质 C 中的光速之比。而如果我们将 BF 看作为圆的半径，那么这些正弦值就等于直线 HF 与 BG 的长度。于是直线 HF 与 BG 之比，就等于所说的速度比。因此，假定光线为 OF,那么光沿 HF 传播的时间应当等于在介质 C 中沿 BG 传播的时间。而沿 AB 传播的时间又等于沿 OH 传播的时间；于是，沿 OF 传播的时间就等于沿 AB 和 BG 传播的时间。此外，沿 FC 传播的时间又大于沿 GC 传播的时间，因此沿 OFC 传播的时间将大于沿 ABC 传播的时间。同时 AF 又大于 OF，于是沿 AFC 传播的时间将更加大于沿 ABC 传播的时间。

现在，假定光线沿 AK 与 KC 从 A 点到达 C 点；其中折射点 K 比 B 点离 A 点近些，作 CN 为 BC 的垂线，KN 平行于 BC；BM 垂直于 KN，KL 垂直于 BA。

这里，BL 和 KM 是角 BKL 和角 KBM 的正弦；也就是角 PBA 和角 QBC 的正弦。因此，它们之间的比值就等于介质 A 中的光速与介质 C 中的光速之比。于是沿 LB 传播的时间就等于沿 KM 传播的时间；又因为沿 BC 传播的时间等于沿 MN 传播的时间，所以沿 LBC 传播的时间就等于沿 KMN 传播的时间。而沿 AK 传播的时间又大于沿 AL 传播的时间，因此沿 AKN 传播的时间就大于沿 ABC 传播的时间。同时，KC 又比 KN 长，于是沿 AKC 传播的时间将更加大于沿 ABC 传播的时间。由此可见，沿 ABC 传播的时间是最短的可能值；这一点将会得到证实。

第四章　论空气的折射

我们已经说明了在任何均匀物质中构成光的运动是怎样通过球面波传播的。显而易见，当物质不是均匀的，而是使运动在其中一边比另一边传播得更快的一种结构，光的波就不再是球面的：而需要随连续的运动在相同时间里通过的不同距离来确定它们的形状。

因此，我们将首先解释空气中发生的折射，从这里到云层和云层之外。这种折射效应很值得一提：因为通过它们我们常常能看到一些本来已被地球的球体所遮蔽的东西；譬如岛屿以及人们在海上看到的山顶。也正是因为这种效应，太阳和月亮看起来在它们真正升起之前就已经升起来了，而落下去时又似乎迟一些：以至于经常看到在太阳仍然在地平线上出现的同时月亮就被遮暗了。同样，如天文学家所知道的，也是由于这种折射效应，太阳和月亮的高度以及所有星星的高度看起来总是比实际上高一些。不过有一个实验更明显地表现了这种折射效应；实验是在某个位置上固定一个望远镜，使之能观察到半里格或更远距离外的物体，譬如一座尖塔或一栋房子。那么，如果你在一天的不同时间中来观察，并以同一种样子固定望远镜，你就会发现物体上的同一点并不总是出现在望远镜筒孔的中部，而通常在早晨和傍晚当地面上有较多水汽时，这些物体好象升高了一些，以至于有一半或一半以上看不到了；而到正中午当水汽消散时它们显得较低。

那些以为折射现象只在性质不同的透明体的隔离表面上发生的人应当发现，很难对我刚才提到的那些现象给出一个解释。但是根据我们的理论，这件事却是十分容易的。众所周知，我们周围的空气，除了漂浮在曾交代过的以太物质中的自身微粒以外，还充满了因热作用蒸发的水微粒。一些十分明确的实验进一步地证实，如果人们登得更高一些的话，空气的密度将成比例地减小。无论水和空气微粒是否凭借以太微粒参与构成光的运动，反弹都不如以太微粒迅速，即无论这些空气和水的微粒对于以太过程的运动传播造成的对抗与阻碍是否迟滞了以太过程，都可以得出，在以太微粒中飞来飞去的这两种微粒必定使空气从相当高的地方到地面逐渐变得不容易传播光波。

由此，波的形状应该变得接近于本图所示：即，如果 A 是一盏灯或者是一座尖塔上的可见点，那么它发出的波应该向上传播得宽广些，向下不太宽广，而在其他方向则或多或少地接近于两端。由此必然得出，除了与地平线垂直的那一条直线以外，所有与波正交的线都从 A 点的上方穿出。

设把光传到观察者 B 的波为 BC，与波垂直相交的直线为 BD。因为在我们看来我们借以判断物体方位的光线或者直线同到达我们眼睛的波的正交线没有什么两样，所以依照上述说法来理解，显然 A 将被感觉到是位于直

线 BD 上，因而比实际要高。

同样，如果设地面为 AB，大气层的顶部为 CD，这里的 CD 可能不是一个轮廓分明的球面（因为我们知道随着人们登高，空气按比例变得稀薄，使得高处的空气的压力是如此之小），来自太阳的光波以这样一种方式，例如，它们在没有进入大气层 CD 前与直线 AE 正交，则当它们进入大气层后，在高空比在地面附近前进得更快。因此，如果 CA 是把光载至 A 点观察者的波，它的 C 区域将前进得最快；而与这个波正交的直线 AF 决定了太阳的视在位置，比沿 AE 看见的实际的太阳位置要高。由此可能产生以下现象，没有水蒸汽时本来不应该被看到的太阳，由于直线 AE 碰着地面，通过折射在线 AF 上被看到。不过由于水汽稀薄只是些微地改变光波，所以角度 EAF 几乎不会超过半度。而且这些折射并非在所有天气下都是一致的，尤其是对于 2 度到 3 度的小仰角情形，这是由于自地面升起的水汽量的不同而引起的。

这也是为什么尽管在相同的地点观察，在某个时刻一个远距离的物体会被另一个稍近距离的物体隐蔽，而在另一个时刻它却可能被观察到。这个效应的原因在我们将要论及的关于光线的弯曲的内容中，会表现得更为明显。从上面的解释中似乎可以得出一个结论，光波的一小部分的行进或传播就是我们称之为光线的东西。在一个透明度不均匀的大气中，这些光线应该是弯曲的，不再象它们在均匀介质中那样为笔直的。因为正如我们将要证明的那样，光线必定象第 36 页中的图那样，沿着与所有波正交的线 AEB，从物体传送到眼睛；而且也正是这条线决定了位于中间物体能否阻碍我们看到目标。尽管尖塔 A 点看起来似乎升到了 D 点，但由于塔 H 位于二者之间，它还是不会为眼睛 B 所观察到，因为 H 同曲线 AEB 相交了。而曲线下方的塔 E，就不能阻碍人们观察到 A 点。现在，根据地面的空气密度比其上空的大这一事实，光线 AEB 的曲率将变大：以至于在某一时刻它将从顶点 E 的上方穿过，使得眼睛 B 能够观察到 A 点；而在另一时刻它却被同一塔 E 所截断，使得同样的眼睛看不见 A 点。

为了证明这种光线弯曲同我们前面所有的理论是一致的，我们假定 AB 为来自 C 方的光波的一个小部分，而这一光将被我们认为是直线。又假定 AB 同水平面垂直，B 比 A 靠近地面。因为水蒸汽在 A 点的阻尼比在 B 点小，来自 B 点的部分波传播过一个较短距离 BE 时,来自 A 点的分波传播过一个距离 AD，而 AD 与 BE 都与水平面平行。另外，设 FG、HI 等直线由直线 AB 上的各点划向线 DE（DE 是直线或者可被认为是直线），并假定 A 与 B 之间不同高度上大气的不同透明度由这些线来表示；那么当来自 A 点的部分波传播过空间 AD 时，来自 F 点的部分波将传播过空间 FG，来自 H 点的部分波将传播过空间 HI。

如果以 A 和 B 为圆心，画出表示来自这两点的波传播的圆 DK 和 EL，并作直线 KL 同这两个圆相切，很容易看出 KL 这一条直线将是所有以 F、H

等为圆心所画的其他圆的公切线，并且所有切点都将落在垂线 AK 和 BL 所夹的这个线段上。于是，线 KL 将包络来自 AB 上各点的分波的运动；并且在同一时刻，KL 之间的运动将比在其他地方要强，因为无数个圆在一起构成了这条直线。因而 KL 将成为波 AB 部分的传播，正如我们在解释反射和正常折射时所说的那样。显而易见，AK 与 BL 将向空气中不太透明的那个方向倾斜，因为 AK 比 BL 要长并与它平行，所以线 AB 与 KL 被延长后将在 L 那一边相交。而角 K 是直角，因此角 KAB 应为锐角，也就小于角 DAB。如果用上述的同样方法来考察波 KL 部分的传播,就会发现再过一段时间后它将到达 MN，并且垂线 KM 和 LN 比 AK 和 BL 更加倾斜。这足以证实，正如我们所说的那样，光线将沿与所有波正交的曲线传播下去。

第五章　论冰岛水晶的奇异折射

1．有一种取自冰岛——北海中纬度 66 度的一个岛屿的水晶或透明石头，由于它的外形和其他性质，首先是奇异折射性而值得特别注意。尤其是由于在各类透明物体中唯有这一类不遵循关于光线的通常规则，所以我认为有必要仔细地研究奇异折射性的原因。我甚至是不得已而进行这一研究，因为这种水晶的折射似乎推翻了我们先前对于规则折射的解释；恰恰相反，正如以后将会看到的，在同一原理下，水晶的奇异折射有力地证实了我们的解释。在冰岛找到的一些大水晶块中，我看到的有的达 4 到 5 磅重。不过在其他国家也有发现，我就有一些同样类型的水晶，其中一部分是在法国香巴尼的特洛伊斯城（Troyes in Champagne）附近找到的，另外一部分出自于科西嘉岛（Corsica），尽管它们都不太透明而且只是些小片片，简直不能观察到任何折射效应。

2．已公开的关于冰岛水晶的第一手资料来源于伊拉斯莫斯·巴塞林那斯（Erasmus Bartholinus）先生，他已经给出了冰岛水晶及其主要现象的描述。但是在这里我并不准备放弃给出我自己的描述。这里为了给那些可能没看过他的书的人们一些指导，也是由于就某些现象而言，他的观察和我所作的那些观察之间存在着细微差别：因为我非常严谨地考察这些折射性质，使得在着手解释它们的原因之前就有十分的把握。

3．由于这种石头坚硬而且易于被劈开，它应被视为一种云母而不是一种晶体。因为铁钉在它上面弄一个切口，就象在任何其他比重相等的云母或雪花石膏上弄一个切口那样容易。

4．现有的冰岛水晶碎片具有斜平行六面体的外形；六个面中的每一个面都是平行四边形；可以顺着与每两个相对面平行的三个方向劈开。如果你愿意的话，所有的六个面都可以是相等的相似菱形。这里附图表示一片这种水晶。所有的平行四边形的钝角，这里 C 和 D，都是 101 度 52 分。因此锐角（如 A 和 B）为 78 度 8 分。

5．在立体的中，有两个彼此相对的角，如 C 和 E，它们之中每一个都是由三个相等的平面钝角所组成的。其他六个立体角则由二个锐角与一个钝角组成。所有我刚才讲述的内容都已被巴塞林那斯先生在他的论文中同样地说明，我们的一些细微差别只是角度的数值。此外，他还详细叙述了这种水晶的其他一些性质，即当用布摩擦后，它会象琥珀、钻石、玻璃和西班牙蜡一样吸引稻草及其他一些轻小物体。把一片水晶用水盖一天或者更长一段时间，它的表面会失去天然的光泽。如果将浓硝酸泼在水晶上面，尤其是像我所发现的，如果水晶被研成了粉末，会产生起泡现象。通过实验我还发现，它在火中加热时会变成红色，而没有其他变化或减小透明度。尽管如此，非常猛强的火会把水晶溶解。冰岛水晶的透明度几乎不比水和

岩石晶体逊色，并且它还是无色的。但是，光线却以不同方式穿透它，并且产生了那些我正将试图解释其原因的不可思议的折射现象。关于这种水晶的形式与异常结构的推测，将留到本书的末尾。

6．我们已知的所有其他透明体中，只存在着一种单一简单的折射，然而在这种物质中却存在着两种不同的折射。其效应是，透过它所看到的物体，尤其如那些正对它而放置的物体，看起来是双的；并且照在其某一表面上的一束太阳光会自己分裂为两束穿过晶体。

7．对于其他那些透明体，还存在着另一个普遍性的规律，即垂直照在表面的光线将不被折射地笔直穿过，而斜照的光线则总是被折射。但是，在这种晶体中，垂直光线会被折射，也存在着笔直穿过的斜照光线。

8．为了更详细地解释这些现象，首先，假定有一块这种水晶 ABFE。设组成等角立体角 C 的三个平面角之一的钝角 ACB 被直线 CG 分为两个相等的部分。设想晶体被一个过这条直线和边 CF 的平面所分割，该平面应当垂直于表面 AB，并且其在晶体内的截面将构成一个平行四边形 GCFH。我们称这一截面为晶体的主截面。

9．现在，如果我们遮盖住表面 AB，仅在直线 CG 上的 K 点留一个小孔，并将它暴露在太阳下，使得太阳光线从上方垂直地正对它，那么光线 IK 将在 K 点自己分裂为两束，一束将沿 KL 笔直地继续下去，另一束将沿直线 KM 分离开。这里的 KM 位于平面 GCFH 上，并与 KL 构成一个倾向立体角 C 那一边的大约为 6 度 40 分的角；并且当它在晶体的另一面出现时，它又将变得与 IK 平行而沿着直线 MZ。因为在这种异常折射中，由折射光线 MKI 看到的点 M，我们认为是由 I 到达眼睛的，由此必定得出，通过同样的折射，由折射光线 LRI 将看到点 L，结果是倘若离眼睛的距离 KI 非常大的话，LR 将与 MK 平行。那么，点 L 看起来就似乎在直线 IRS 上；但是，在正常折射中，这个点看起来又似乎在直线 IK 上，因此它必定被判断为双的。同样，如果 L 是放在晶体上的一张纸或者其他东西上的一个小孔，当把它翻转过来朝向日光时，孔看起来好象就有两个，两且这两个孔看来随着晶体厚度的增大而彼此分开。

10．另外，如果我们转动晶体，使得一束入射太阳光 NO 将在平面 GCFH 上继续行进，它与 GC 构成 73 度 20 分的角，也就几乎与棱边 CF 平行，CF 与 FH 构成 70 度 57 分的角。那么依据我们将在最后所作的计算，这束光线将在 O 点自己分裂为两束，一束将沿着与 NO 在同一直线的 OP 继续下去，并同样不折射地从晶体的另一侧穿出；另一束将被折射而沿着 OQ 继续下去。必须注意，通过 GCF 或者与之平行的那些平面才是特殊的，位于这些平面上的所有入射光线在进入晶体后，继续保持在这些平面内并变为双重的。我们以后将要看到，与晶体相交的其他那些平面内的光线，情况完全不一样。

11．首先，我通过这些实验和其他一些有关光线在这种晶体中受到的

双重折射的实验认识到，有一种折射是遵循正常规则的，光线 KL 和 OQ 就属于这种折射。这就是我为什么要把这种正常折射从其他折射中区别开来的原因；通过精确的观察来对这种折射进行测量，我发现其入射线与反射线同垂线所夹角的正弦比极其接近 5 比 3，这一结果同巴塞林那斯的发现一样，比岩石晶体或者玻璃的正弦比 3 比 2 要大。

12．精确地进行这些观察的手段如下所述。在置于完全平坦桌面之上的一张纸上,画出黑线 AB 以及另外两条与它垂直相交而又彼此相距的黑线 CED 和 KML。它们之间距离的大小依照所要考察的光线的倾斜多少而确定。然后，把晶体置于交点 E 上，使得线 AB 与晶体下表面的钝角平分线重合或平行。当眼睛位于线 AB 的正上方时，看起来仅是单线，而且还会看见，通过晶体看到的部分与露在晶体外的部分汇集在一条直线上。但是，线 CD 看起来是双的，并且能分出由于正常折射而出现的像。当人们用双眼来观察它时，它似乎比另一个像上升得更高些，或者，把晶体在纸上转一圈，它保持不动，而另一个像移动并又完全移回来。然后，让眼睛位于 I 点（总是保持在与 AB 垂直的平面内），以便看到由线 CD 通过正常折射而形成的像，与它在晶体外的剩余部分成为一条直线。在晶体的表面上标记一个点 H，它在所出现的交点 E 的正上方。再将眼睛向 O 方向移动，并始终保持在与 AB 垂直的平面内，使得由正常折射形成的线 CD 的像，与不经过折射所看到的线 KL，在一条直线上出现。然后在晶体上交点 E 出现的地方标记点 N。

13．那么，就可以知道线 NH、EM 和 HE 的长度与位置，其中 HE 为晶体的厚度。在图上分别描出这些线，并连接 NE 和 NM。NM 与 HE 相交于 P 点。折射比则是 EN 与 NP 的比。这是因为它们之间的比值等于角 NPH 与角 NEP 的正弦比。这两个角则分别等于入射线 NO 与反射线 NE 与表面的垂线所夹的角。我已经说过，这一比值非常精确地等于 5 比 3，并且对于各种倾角的入射线都是如此。

14．我也采用这种观察方式来研究冰岛晶体的异常折射或不规则折射。如上所述，在 E 点的正上方已经找到和标记了 H 点，我就观察线 CD 经过异常拆射造成的外形。让眼睛位于 Q 点，使得这个外形与没有折射的线 KL 在同一条直线上,于是定出了三角形 REH 与 RES,并随之定出了角 RSH 与 RES，即入射线与反射线同垂线所构成的角。

15．但是我发现在这一折射中，ER 与 RS 的比，不象正常折射中那样是一个常数，而是随着入射线倾斜程度的改变而改变。

16．我也发现，当 QRE 成为一条直线时，即当入射线进入晶体不折射时（正如我在这种情形下所断定的，通过异常折射看到的 E 点在线 CD 上出现，看起来象没有折射），角 QRG 如上所述是 73 度 21 分，因而它不是与晶体棱边平行的光线，正象巴塞林那斯所认为的那样，棱边与光线相交，光线是直线而没有折射，因为夹角如我们上面所述仅为 70 度 57 分。为了

使人们不至于凭借它与棱的平行性来研究这种光线的独特性质的缘由，这一点必须引起注意。

17．继续进行寻找这种折射本质的观察，我最终认识到，它遵循以下不平常的规则。按前面的规定，以晶体的主截面作平行四边形 GCFH，单独标出。我发现，来自对侧的两束光线，如这里的 VK 和 SK，当它们的倾角相等时，它们的折射线 KX 和 KT 与底线 HF 相交时，总是使 X 和 T 到 M 的距离同样远，这里 M 是垂直光线 IK 的折射线落到的地方。这种情形对于晶体的其他截面而言，也会发生。不过，在讨论那些还具有其他特性的情形之前，我们将研究一下我曾报告过的那些现象的起因。

正是在采用球面光发射解释普通透明体的折射之后，我才继续有关这种晶体性质的考察，而在此以前我不能够作出任何发现。

18．由于存在着两种不同的折射，我设想也存在着两种不同的光波发射形式，并且其中一种可能在贯穿晶体的以太物质中发生。依据以上的解释，这种物质比构成晶体的微粒多得多，单独存在时是透明的。假定这些波具有普通的球面形式，在晶体内比在晶体外传播得慢，并由此产生上述的折射，我认为波的这种发射是这种石头中观察到的正常折射。

19．对于产生不规则折射的另外一种发射，我曾希望试用椭圆波，或更确切些，回转椭球波来做。依照我解释透明性的最后一种模式，我假定这些波在弥漫于晶体的以太物质中和在构成晶体的微粒中都将一样地传播。在我看来，这些微粒的配置或规则排列都有助于形成回转椭球波（关于这一点，只要求光在某一个方向上传播比其他方向快一点），并且由于其外形和角度是确定不变的，我毫不怀疑在这种晶体中存在着相同和相似微粒的这种排列。对于这些微粒以及它们的构形与分布，我将在本书的结尾提出我的猜测并给出一些证实它们的实验。

20．在观察了呈现六角形结构的普通〔岩石〕晶体内的一种可靠现象之后，我对于我所设想的光波双重辐射就更有把握了，这种晶体因其规则性似乎是由有确定外形并且整齐排列的微粒组成。既然如此，这种晶体就象那些来自冰岛的水晶一样，也会产生双重折射，虽然现象不太明显。从这种晶体上切下一些具有不同截面并抛光了的棱往体，透过它们观察蜡烛的火焰或窗户玻璃格，我都看到，每一个东西都呈现为双的，尽管这些像相距并不远。既然它们老是有这样小的长度，由此我明白了为什么这种物质透明却不能用于望远镜上的原因。

21．依照我先前建立的理论，这种双折射似乎需要光波的一种双重辐射，两种波都是球面的（因为对于这两种波，折射都是规则的），只是其中一束波比另一束进行得慢些。因此，正如我在冰岛水晶情形下所作的那样，只要假定物质是传递这些波的媒介，就十分容易解释这种现象。这样，承认在同一物体中有波的两种辐射就没什么麻烦了。由于可能曾经有人反对，在组成由具有确定外形和规则堆积的相同微粒的两种晶体时，微粒留

下的充满以太物质的空隙不足以去传递我们在那里给定的光波，我假定这些微粒具有一种罕见的构造，更恰当地说，假定它们由其他更小的微粒所组成，以太物质可以自由地在它们之间穿过，从而排除了这一困难。此外，从有关物体是由更小的物质组成的论证，也必定得到这一点。

22．除了球面波外又假定了这些回转椭球波之后，我开始考察它们是否可以用于解释不规则折射现象以及怎样通过这些现象来决定回转椭球的外形与方位：对于这一点，通过以下程序我至少已经取得了预期的成功。

23．我首先考虑到形成的光波的结果，对于垂直照射在透明体的平坦表面上的光线，光波应当这样在其中传播。假定 AB 为表面的露出部分。并且，因为依据前面的理论，来自于遥远光源并垂直于一个平面的光线不是别的，而是平行于那个平面的光波的一部分的入射，所以我假定与 AB 平行并且等于 AB 的直线 RC 为光波的一部分。在这一部分光波中，诸如 RHhC 等无穷多个点将在表面 AB 上交于 AKkB。正如前面在处理折射时解释的那样，这里的这些波必定是半回转椭球形的，而不是从通常折射体最后那些点中的每一个所发出的半球形分波。假定它们的轴（确切地说是长轴直径）与表面 AB 不垂直，如图，回转椭球 SVT 的半轴或者主半径为 AV，它表示当波 RC 到达 AB 之后由 A 点出发的分波。我所指的长轴或长轴半径，是因为同一椭圆 SVT 可以被看作是回转椭圆的截面，它的轴与 AV 垂直。不过就目前而言，一些因素还没有确定，我们不妨只在由这张图所给出的椭圆截面中来考虑这些回转椭球。现在设由 A 点出发的波 SVT 传播时需要某一段时间，由其他的点 KTB 也必定同时传出与 SVT 一样的波，并且处于一样的位置。所有这些半椭圆的公切线应当是波 RC 照在 AB 之后的传播。这些波所处的地方，是由无数多个中心沿着线 AB 上的椭圆弧组成的切线，也是比其他地方的运动总量更多的地方。

24．显然，这根公切线 NQ 平行于 AB，长度与 AB 相等，但并不正对着它，因为它夹在直线 AN、BQ 之间。AN、BQ 是以 A 和 B 为中心的椭圆的长轴，而与它们相配的短轴不在直线 AB 上。通过这种方法，我理解了原先看来十分困难的一件事，即一束垂直于表面进入透明体的光线是怎样受到折射的。人们可以看到，到达孔 AB 的波 RC 从那里继续向前，在平行线 AN 与 BQ 之间传播，而本身又保持与 AB 平行，使得这里的光与通常的折射不同，不是沿着与波垂直的线传播，而是沿着与波斜交的线传播。

25．接下来研究在晶体中这些回转椭球的位置和形状，我认为六个表面的确都能产生一样的折射。取一个平行六面体 AFB，它的钝角立体角 C 由三个相等的平面的组成，设想它中间的三个主截面，其中一个垂直于表面 DC 并通过棱边 CF，另一个垂直于表面 BF 并通过棱边 CA，第三个垂直于表面 AF 并通过棱边 BC；我们知道入射光线在这三个平面内的折射是完全类似的。除非回转椭球的轴就是立体角 C 的轴，否则就没有任何位置能使回转椭球与三个截面有同样的联系。结果我看到，这个立体角的轴，即从

C 点穿过晶体所作的与棱边 CF、CA、CB 有相等倾角的直线，就是确定设想的由晶体内部或者晶体表面的某一点出发的那些回转椭球位置的直线，因为这些回转椭球都应该相似，并且它们的轴互相平行。

26．随后再考虑三个截面中的某一个的平面，即通过 GCF 的平面，它的角度等于 109 度 3 分，因为的 F 上方的角度等于 70 度 57 分。同时，设想一个以 C 点为中心的回转椭球波，我们知道，它的轴必定在这个平面上，并且在下图中我用 CS 来表示它的半轴。通过计算（将与其他内容一起，在讨论的结尾给出）求角 CGS 的值，我得到它为 45 度 20 分。

27．再来了解这个回转椭球的形状，即其椭圆截面的互相垂直半径 CS 与 CP 的比，我认为椭圆与平行于 CG 的直线 FH 的切点 M，应该使 CM 与垂线 CL 成 6 度 40 分的夹角。因为，这么做后，这个椭圆就满足我们以上关于光线垂直照射与垂线 CL 之间有相同倾角的表面时折射的论述。这样安排以后，取 CM 为 100，000，后面将给出的计算求得长轴半径 CP 等于 105，032，短轴半径 CS 等于 93，410，它们的比值非常接近于 9 比 8。因此，这一回转椭球类似于一个被压扁的球，可以通过椭圆绕其短轴旋转而得。我还求得，平行于切线 ML 的半径 CG 的值为 98，779。

28．现在转过来研究倾斜入射光线的折射。依据我们的回转椭球波假设，我发现这些折射依赖于晶体外以太中的光速与晶体内的光速的比例。譬如，假定这个比例使光在晶体中形成回转椭球 GSP，如同刚才说的那样，它在外部形成一个半径等于以后将确定的线段 N 的球，以下就是求入射光线折射的方法。设有一束光线 RC 照射在表面 CK 上。作 CO 垂直于 RC，横切角 KCO 调节 OK，使之等于 N 并垂直于 CO。然后作与椭圆 GSP 相切的线 KI。再过切点 I，联结 IC，它就是所求的光线 RC 的折射。将会看到，这一点的证明同我们用来解释普通折射的证明完全一样。因为，光线 RC 的折射，不是别的而是波 CO 的 C 部分在晶体中继续的行进。在光由 O 到达 K 的时间内波的 H 部分将沿直线 HX 到达表面 CK，并且以 X 点为中心在晶体中产生某种类似于半回转椭球 GSPg 的半回转椭球面分波，位置也一样。回转椭球面分波的长轴直径和短轴直径与线 XV(线 HX 延长到平行于 CO 的 KB 的延长部分）的比，等于回转椭球 GSPg 的长、短轴直径与线 CB 或者 N 的比。显而易见，所有这些在这里由椭圆表示的回转椭球的公切线就是直线 IK。因此，直线 IK 是波 CO 的传播；而 I 点是 O 的传播，这一点与普通折射中的证明一致。

为了寻找切点 I，众所周知的是必须找出 CD，即 CK 和 CG 的比例第三项。作与已知线 CM 平行的线 DI，CM 是与 CG 配对的直径。联结 KI，它与椭圆相切于 I 点。

29．现在，当我们找到了光线 RC 的折射线 CI 后，同样地，作 C_0 垂直于 rC，并遵循前面的论证步骤可以找到从另一边入射的光线 rC 的折射线 Ci。由此可以看到，如果光线 rC 同 RC 的倾斜角度一样，线 Cd 必定等于线

CD，因为 Ck 等于 CK，而 Cg 等于 CG。因此，Ii 被与 DI 和 di 平行的线 CM，在 E 点截为两个相等部分。因为 CM 是与 CG 配对的直径，所以 Ii 平行于 gG。于是，如果把折射线 CI 与 Ci 延长到切线 ML，相交于 T 与 t 点，则 MT 与 Mt 相等。这样，通过我们的假设，很好地解释了上述现象，即考虑到与晶体表面平行的方向上的偏离，如果有两束光线以相同的倾角但从相对的两边入射，如这里的光线 RC 与 rC，那么它们的折射线将同样地偏离垂直于晶体表面入射光线的折射线所沿着的那条线。

30．为了求与 CP、CS、CG 成比例的线 N 的长度，必须通过对晶体截面上的不规则折射的观测来决定。我发现，N 与 GC 的比值只比 8 比 5 稍小一点。考虑到以后我将谈到的其他一些观测和现象，我取 N 等于 156，T962，求得半径CG等于98，779，使得这一比值为8比$5\frac{1}{29}$。N与CG的这一比值可以称为折射比。再经过有关求解不规则折射的处理方法一段说明后，这种表示方法与玻璃中的 3 比 2 一样。

31．在下图中，与以前那样，取晶体表面 gG，椭圆 GPg，线段 N，以及垂直入射光线 FC 的折射线 CM，其中 CM 偏离 FC6 度 40 分。再假定另外有一束光线 RC，求它的折射线。

以 C 为中心，CG 为半径作圆周 gRG，它与光线 RC 相交于 R 点。作 RV 垂直于 CG。再作 CV，使它与 CD 之比等于 N 与 CG 之比。作 DI 平行于 CM，它与椭圆 gMG 相交于 I 点；再连接 CI，它就是所求的光线 RC 的折射线。它可以这样证明。

取 CO 垂直于 CR，横切角 OCG，调节 OK 使之等于 N 并与 CO 垂直，同时画出直线 KI。如果能证明出 KI 是与椭圆在 I 点相切的直线，那么，至此 CI 是光线 RC 的折射线的证明就很明显了。因为角 RCO 是直角，所以容易看出，直角三角形 RCV 与 KCO 相似。于是，CK 与 KO 之比就等于 RC 与 CV 之比。而 KO 等于 N，RC 等于 CG，则 CG 与 CV 之比就等于 CK 与 N 之比。通过作图，CV 与 CD 之比就跟 N 与 CG 之比一样。那么，CG 与 CD 之比也就跟 CK 与 CG 之比一样。因为 DI 平行于 CG 的配对直径 CM，所以 KI 与椭圆在 I 点相切；这一点尚须证明。

32．人们发现，正如在普通介质的折射中，入射光线和折射光线与垂线之间夹角的正弦之比为一个常数那样，在 CV 与 CD 或 CV 与 IE 之间也存在着这么一个比例常数。也就是说，入射光线与垂线之间夹角的正弦，和椭圆中这一光线的折射线与直径 CM 之间的水平截距,它们之间也存在着这么一个比例常数。如上所述，CV 与 CD 之比等于 N 与半径 CG 之比。

33．在改变话题以前，我在这里作点补充，把这种晶体的普通折射和不规则折射放在一起比较时，下述事实值得注意，即如果 ABPS 是光在某一段时间间隔内在晶体内传播开的回转椭球（如上所述，这种传播方式适用于不规则折射），那么内切球面 BVST 就适用于普通折射情况下光在这同一时间间隔中的传播。

我们在这前面已经指出，线段 N 是光在空气中传播的球面波的半径，而在晶体内，光通过回转椭球 ABPS 传播。N 与 CS 的比等于 156，962 比 93，410。如上所述，普通折射的比等于 5 比 3；也就是说，N 作为空气中球面光波的半径，在同样的时间间隔内，光在晶体内的传播也会构成一个球面，不过它的半径与 N 的比应该等于 3 比 5。那么 156，962 与 93，410之比等于5比3再减去 $\frac{1}{41}$。因此，对于晶体中的规则折射光足够接近并且可能精确地沿球面 BVST 运动，而对于晶体中的不规则折射，光沿回转椭球面 BPSA 运动，并且在晶体外的空气中沿半径为 N 的球面运动。

按照我们所作的假设，尽管光在晶体中有两种不同的传播方式，显然只有在垂直于回转椭球的轴 BS 的方向上，光的传播才会比其他方向快些。而在其他方向上，即在不行于轴 BS（晶体的钝角上的轴）的方向上，光的速度相同。

34．我现在要指出，对于刚才已经看到的折射比，必然导致一个值得注意的性质，倾斜照射在晶体表面的光线不经过折射进入晶体。作与以前一样的假定，取光线 RC 与同一表面 gG 成 73 度 20 分的角 RCG，倾斜入射到晶体的同一边（关于这种光线我们在前面已经提到过）。如果采用以上交代过的步骤来研究折射线 CI，就会发现它与 RC 精确地构成一条直线。实验一致表明，这条光线完全没有偏转。这一点在下面的计算中会得到证实。

与前面一样，取 CG 或者 CR 等于 98，779；CM 等于 100，000，角 RCV 等于 73 度 20 分，则 CV 等于 28，330。因为 CI 是光线 RC 的折射线，所以 CV 与 CD 之比等于 156，962 与 98，779 之比，即等于 N 与 CG 之比；于是 CD 等于 17，828。

既然 gD,DC 的乘积与 DI 的平方之比等于 CG 的平方与 CM 的平方之比，则 DI 或者 CE 等于 98，353。而 CM 与 MT 之比，又等于 CE 与 EI 之比，于是 MT 等于 18，127。把它加上 11，609 长的 ML（即取 CM 为长等于 100，000 的半径时，6 度 40 分角 LCM 的正弦），得到 LT 等于 27，936。它与 LC99，324 的比等于 CV 与 VR 的比 29，938，即 73 度 20 分角 RCV 的余角的正切值与半径之比。由此看出 RCIT 是一条直线，这一点已得到证明。

35．此外，依据我们以下的论证可以看到，通过晶体的另一个表面出现的光线 CI 应当十分笔直地穿出。它表明这种晶体中得到的折射可逆性关系，与其他透明体一样。换句话说，如果光线 RC 遇到晶体 CG 后折射成 CI，折射线 CI 从晶体的平行对平面中出来，取为 IB，它的折射线 IA 平行于光线 RC。

作与上述同样的假定，取 CO 垂直于 CR，表示波的一部分，它在晶体中的延续为 IK，于是 C 点沿直线 CI 传播，而 O 点到达 K 点。现在，如果取与前段时间同样长的第二段时间，波 IK 上的 K 点在这段时间里将沿平行并且等于 CI 的直线 KB 前进，因为波 CO 上的每一点到达表面 CK 后，都应

该象 C 点那样在晶体中继续进行传播，并且在这同样的时间内以 I 点为中心，在空气中产生一个半径 IA 等于 KO 的球面分波。因为 KO 也是在相等时间内穿过的。同样，如果考虑波 IK 上的其他点，譬如 h，它将沿着 hm 平行于 CI 向前，与表面 IB 相交，而 K 点穿过等于 hm 的距离 Kl。而当它走完剩下的一段 lB 时，以 m 点为中心将产生一个半径为 mn 的分波。mn 与 lB 之比，等于 IA 与 KB 之比。由此或见，半径为 mn 的波与半径为 IA 的波将有相同的切线 BA。晶体之外光波 IK 各点与以太表面 IB 相碰所形成的球面分波，情形也是一样。于是，当光由 K 点到达 B 点时，光波 IK 在晶体外精确地传播到切线 BA。因此，垂直于 BA 的 IA 是光线 CI 穿出晶体后的折射线。那么很明显，由于 IB 等于 CK，IA 等于 KO，并且角 A 和角 O 都是直角，故 IA 平行于入射光线 RC。

由此可见，根据我们的假设，折射的可逆性关系在晶体中与在普通的透明体中一样好的成立。事实上，观测所得到的结果正是这样。

36．现在我考虑晶体的其他截面及其折射，正如将要看到的那样，许多值得注意的现象都与它们相关。

设 ABH 为一块平行六面体水晶，它的上表面 AEHF 是一个完整菱形，它的纯角被直线 EF 平分，锐角被垂直于 FE 的直线 AH 平分。

我们以下要考虑的截面通过线 EF 与 EB，同时还与平面 AEHF 正交。这一截面上的折射与普通介质中的折射一样。过入射线并且与晶体表面正交的那个平面，正是求折射线的平面。但是，这种晶体的其他每个截面的折射却具有如下奇异性质：折射线总是离开入射光线所在的垂直于表面的那个平面，朝晶体倾斜的方向偏转。我们将揭示出这些现象的原因，首先是过 AH 的截面的现象，同时按照我们的假设给出如何确定折射线。设过 AH 并与平面 AFHE 正交的平面上，有入射光线 RC；在这种晶体内求折射线。

37.设 AH 与 FE 相交在中心 C 上,光在晶体内传播形成半椭球面 QGggM。再假定它与平面 AEHF 相截的椭圆为 QGqg，长轴直径为 Qq，位于线 AH 上。Qq 也必定是回转椭球面的长轴直径之一；因为回转椭球的轴位于通过 EFB 并与 QC 垂直的平面上，所以 QC 也与回转椭球面的这个轴垂直，因此 QCq 是回转椭球的长轴直径之一。而这个椭圆的短轴半径 Gg 与 Qq 的比，已在前面的第 27 节中所给出，等于 CG 与回转椭球长轴半径 CR 之比，即 98，779 比 105，032。

设光在晶体中以 C 为中心形成回转椭球面 QGqgM 的时间内在空气中穿过的距离为线段 N。在 CR 与 AH 的平面内，作 CO 垂直于 CR。横切角 ACO，调节直线 OK，使之等于 N 并与 CO 垂直。它与直线 AH 的交点为 K。因此，假定 CL 垂直于晶体 AEHF 的表面，CM 为垂直照射在这一表面上的光线的折射线。并过直线 CM 和 KCH 作一平面，在回转椭球面截得半边椭圆 QMq。由于角 MCL 给定为 6 度 40 分，这个半边椭圆被给定了。的确，依据第 27 节作出的解释，与回转椭球面在 M 点相切的平面，应当平行于平面 QGq，其

中 M 点是直线 CM 与回转椭球面的交点。如果过 K 点作 KS 平行于 Gg，它也与椭圆 QGq 在 Q 点的切线 QX 平行。如果设想一个过 KS 并与回转椭球面相切的平面，切点就必然在椭圆 QMq 上，因为通过 KS 的这个平面，以及与回转椭球面在 M 点相切的平面，都平行于回转椭球面的切线 QX。证明将在本书的结尾给出。设这个切点为 I。作 KC、QC 和 DC 使之成比例。作 DI 平行于 CM，连接 CI。CI 就是所求的光线 RC 的折射线。显然，如果认为垂直于光线 RC 的 CO 是光波的一部分，我们可以证明当 O 点到达 K′点时，C 点在晶体内可以到达 I 点。

38.正如论反射的那一章中的一样,在证明入射光线与反射光线总是位于垂直于反射面的同一个平面时，我们考虑了光波的宽度，在这里我们也同样必须考虑光波 CO 在直径 Gg 上的宽度。取宽度 Cc 在角 E 那边，平行四边形 COoc 为光波的一部分。作出平行四边形 CKkc，CIic，KIik 和 OKko。在线段 Oo 到达晶体表面上的 Kk 的时间内,波 COoc 上的各点都将沿平行于 OK 的直线到达矩形 Kc，此外，从它们的入射点出发，在晶体内产生与回转半椭球 QMq 相似并且位置一样的回转半椭球分波。在 Oo 到达 Kk 同一时刻，所有这些回转半椭球面必定与平行四边形 KIik 相切。这是很容易理解的，因为在这些回转椭球中,所有那些中心沿着线段 CK 的回转半椭球都与这一平面在线 KI 上相切（这一点可以用我们求通过 EF 的主截面上斜射光线的折射的方法来证明）。那些中心位于线 Cc 上的回转半椭球都与同一平面 KI 相切于直线 Ii。所有这些半回转椭球面都与回转半椭球面 QMq 相似。由于平行四边形 Ki 与所有这些回转椭球面相切，当 Oo 到达 Kk 时，这同一个平行四边形正好是波 COoc 在晶体内的传播，因为它构成了运动的终端，而且也因为在这里出现的运动量比在其他任何地方都大。于是，可以看到波 COoc 上的 C 点传播到 I 点，也就是说，光线 RC 被折射成了 CI。

由此注意到，晶体这一截面的折射比等于线 N 与半径 CQ 的比。依照前面给出的过 FE 的截面情形的同样方法,可以方便地找到所入射光线的折射线。证明也相同。显然，这里所说的折射比小于过 FEB 的截面上的折射比，因为在那里这一比值等于 N 与 CG 的比，即 156，962 比 98，779，非常接近于 8 比 5；而在这里这一比值等于 N 与回转椭球面的长轴半径 CQ 之比，为 156，962 比 105，032，非常接近于 3 比 2，只不过稍小一点。这一点同实验观测中的发现完全吻合。

39．此外，反射比的不同导致了这种晶体的一个非常奇异的效应。把它放在一张写了字母或者作了其他任何标记的纸上，如果人的双眼从过 EF 的截面的上方进行观察，就会看到，不规则折射使这些字母上升，比人眼从过 AH 的截面所看到的要高些。通过与折射比为 5 比 3 的晶体普通折射相比较，这种上升的差别就显示出来了。在普通折射中，字母总是上升得一样高，并且比在不规则折射上升得高些。人们看到的字母和写这些字母的纸好象在同时处于两个不同的层次。当眼睛处于第一种位置时，即位于过

AH 的平面，这两个层次的距离得比当眼睛位于过 EF 的平面的另一种位置时大四倍。

我们将证明折射造成的这个效应。它可以使我们依据眼睛的不同位置同时确定晶体下方放置的物体的一点的视在位置。

40．首先让我们看一下，过 AH 的平面的不规则折射，把晶体的底部提高了多少。设图中的平面分别表示经过 Qq 和 CL 的截面，在这一截面中有一束光线 RC。与前面一样，设过 Qg 与 CM 的半椭圆平面，朝前一个倾斜，倾角为 6 度 40 分。这一平面中，CI 就是光线 RC 的折射线。

如果现在考虑晶体底部的点 I，被观测的光线 ICR、Icr 在点 Cc 处同样地折射离 D 点的距离应该相等。这两条光线在 Rr 进入两只眼睛。确实，I 点看起来似乎上升到了直线 RC 与 rc 的交点 S 上。S 位于垂直于 Qq 的 DP 上。如果作 DP 的垂线 IP，它位于晶体的底部。长度 SP 就是点 I 在底面上的视在上升高度。

在 Qq 上作半圆，它与光线 CR 相交于 B，过 B 作 BV 垂直于 Qq。与前面一样，取这一截面中的折射比等于线段 N 与半径 CQ 的比。

那么，以上在第 31 节中已经证明，作为求折射线的方法，VC 与 CD 之比等于 N 与 CQ 之比；而 VB 与 DS 之比，等于 VC 与 CD 比。因此，VB 与 DS 之比，就等于 N 与 CQ 之比。设 ML 垂直于 CL。因为我假定眼睛 Rr 离晶体一英尺左右，因而角 RSr 就很小，VB 可以被视为等于半径 CQ，DP 等于 CL。于是 CQ 与 DS 之比，就等于 N 与 CQ 之比。而 N 的值等于 156，962，CM 等于 100，000，CQ 等于 105，032。于是 DS 就等于 70，283。BL 等于 99，324，是 6 度 40 分角 MCL 的余角的正弦。在这里 CM 被取为半径。那么，被认为是等于 CL 的 OP，与 DS 之比就等于 99，324 与 70，283 之比。由此，这一截面的折射引起的 I 点上升高度就求出来了。

41．现在，在上图之前的那个图形中，作过 EF 的截面。设 CMg 是在第 27 节和 28 节中考虑过的半椭圆，它是切割以 C 点为中心的回转椭球面波而得到的。在椭圆上取 I 点，为晶体的底部。设被观测的折射光线 ICR 与 ICr 到达眼睛，CR 与 Cr 对于晶体表面 Gg 有相同倾角。由此，如果作 ID 平行于 CM，距高 DC 与 Dc 相等。其中我假定 CM 为垂直照射在 C 点上的入射光线的折射线。通过第 28 节中的证明，容易看到这一点。的确，点 I 看起来应该出现在 RC 直线与 rc 延长线的交点 S 上，落在垂直于 Gg 的线 DP 上。如果作 IP 垂直于 DP，距离 PS 就是点 I 的视在上升高度。在 Gg 上作半圆，与 CR 相交于 B。从 B 点作 BV 垂直于 Gg。设 N 与 GC 的比为这一截面的折射比，与第 28 节一样。由于 CI 就是半径 BC 的折射线，DI 平行于 CM，根据我们在第 31 节中的证明，VC 与 CD 之比就必定等于 BV 与 DS 之比。而 BV 与 DS 之比，又等于 VC 与 CD 之比。作 ML 与 CM 平行。因为我还是假定眼睛离晶体很远，BV 可认为等于半径 CG，因此，DS 将是线段 N 与 CG 的比例第三项。DP 也可认为第于 CL。那么，CG 等于 98，778， CM 等于 100，

000，N 等于 156，962。于是，DS 就等于 62，163。而 CL 也确定了，等于 99，324，与第 34 节和第 40 节中所说的一样。由此，PD 与 DS 之比就等于 99，324 与 62，163 之比。这样人们就能够得到由于这一截面的折射使底部的点 I 上升的高度。显然，这一高度比在前面那个截面折射造成的上升高度要大，因为在那里的 PD 与 DS 之比等于 99，324 比 70，283。

通过晶体的正常折射，我们以上曾经说过，其折射比为 5 比 3，点 I 或者点P从底部上升的高度，等于高度DP的$\frac{2}{5}$。如图所示，由表面Cc同样折射的光线 PCR 与 Pcr 来观察 P 点，这一点必然出现在垂线 PD 的 S 上，它是 RC 与 rc 延长线的交点。已知线 PC 与 CS 之比等于 5 比 3，因为它们分别等于角 CSP 或角 DSC 的正弦与角 SPC 的正弦。因为 PD 与 DS 之比，被认为等于 PC 与 CS 之比，而两只眼睛 Rr 又假定离晶体很远，所以上升高度PS将等于PD的$\frac{2}{5}$。

42．如果取直线 AB 为晶体的厚度，点 B 在底部，按所求得的上升高度在C、D、E点上分割这一直线，使得AE等于AB的$\frac{3}{5}$，AB与AC之比等于 99，324 与 70，283 之比，AB 与 AD 之比等于 99，324 与 62，163 之比。AB 的分割如图所示。人们发现，这与实验完全符合。换句话说，如果把眼睛放在沿菱形的短轴切割晶体的平面之上，规则折射将把字母提高到 E 点，而且会看到，放置字母的底面被不规则折射提高到了 D 点。而如果把眼睛放在沿菱形的长轴切割晶体的平面之上，规则折射将象前面一样把字母提高到 E 点，但是不规则折射则只将它们提高到 C 点。这使得间距 CE 等于原先看到的间距 ED 的四倍。

43．在这里，我仅指出一点，对于眼睛的两种位置，由不规则折射产生的像，都不出现在由规则折射产生的像的正下方，而是随着离开晶体的等边立体角的多少而偏离。事实上，这是根据所有关于不规则折射作出的论证而得的。尤其是由最后这些论证表明，点 I 通过不规则折射出现在垂线 DP 的 S 上，在这条线上，点 P 应当是通过规则折射产生的像，而不是 I 点的像，它几乎在同一点的正上方，比 S 高一些。

除了我们刚才考察过的两个位置以外，关于眼睛放在其他位置时点 I 的视在上升高度，通过不规则折射产生的像总是出现在高度 D 与 C 之间。D 和 C 是当人绕着静止晶体从上往下看时逐一地出现的。所有这些仍然同我们的假设一致。除了我们已经研究过的两种截面以外，我在这里给出求晶体的其他截面中不规则折射的方法以后，人们就会相信这一点。取晶体的一个表面，设这个表面上有一椭圆 HDE。椭圆的中心 C，就是光传播的回转椭球面的中心。回转椭球的截面就是这个椭圆。设入射光线为 RC，求它的折射线。

作一平面通过光线 RC，它与椭圆 HDE 的面垂直，并沿直线 BCK 把它截

断。在过 RC 的同一平面中作 CO 垂直于 CR。横截着角 OCK，调节 OK 使之垂直于 OC 并等于线段 N。其中，我假定线段 N 是光在晶体内传播过回转椭球 HDEM 的时间内，它在空气中走过的路程。在椭圆 HDE 的平面中，过点 K 作 KT 垂直于 BCK。那么，如果通过直线 KT 作一个与回转椭球面在 I 点相切的平面，直线 CI 就是光线 RC 的折射线。这一点由第 36 节中的论证容易推导出来。

但是，必须证明怎样确定切点 I。作一条平行于线 KT 的线 HF，它与椭圆 HDE 相切。设切点为 H。再沿 CH 作一条直线与 KT 相交于 T。设想一个过 CH 和 CM（我假定它是垂直入射光线的折射线）的平面。该平面把回转椭球切为椭圆截面 HME。依据本章结尾部分将要证明的引理，过直线 KT 并与回转椭球面相切的平面，的确与椭圆 HME 上的一点相切。这一点就是我们要求的 I 点，因为过 PK 所作的平面，只能与回转椭球面相切于一点。点 I 很容易确定，因为只需要用我们前面给出的方法，在椭圆平面上由 T 点作切线 TI 就可以了。由于椭圆 HME 是给定的，它的配对半径为 CH 和 CM；因为过 M 点所作的平行于 HE 的直线同椭圆 HME 相切，正如我们在第 27 节和第 23 节中所看到的，这一点得自于下述事实，即过 M 点所作的平行于平面 HDE 的平面，与回转椭球面相切于 M 点。此外，对于过光线 RC 和 CK 的平面，这一椭圆的位置也是给定的。由此就容易找到光线 RC 的折射线 CI 的位置。

必须注意，同一椭圆 HME 适用于寻找任何可能位于过 RC 与 CK 的平面中的其他光线的折射线。因为依据前不久引用的引理，每一个平行于直线 HF 或 TK，并与回转椭球面相切的平面，都与这个椭圆相切。

为了看一看由我们的假定所推导出的每一种现象是否与事实上的观察一致，我已经非常详细地考察了这种晶体的不规则折射的性质。这么做并没有对我们的假定和原理提供丝毫的证明。但是我打算在这里附加的内容，却再一次不可思议地证实了他们。这就是：这种晶体中存在着不同的截面，由它们构成的表面所产生的折射，依据前面的理论作出的预言精确地与他们应该的结果一样。

为了解释这些截面是什么，设 ABKF 是通过晶体 ACK 的轴的立截面，在它上面有一个光在晶体中以 C 点为中心传播的回转椭球的轴 SS。将 SS 从中间垂直截断的直线，PP，就是一个长轴半径中的一个。

在由平行于晶体相对外表面的天然截面中，这里用线 GG 来表示，依据我们前面理论中的解释，表面上的折射将由回转半椭球面 GNG 来决定。同样地，过 NN 用一个垂直于平行四边形 ABKF 的平面来切割晶体，在这个表面上发生的折射由回转半椭球面 NGN 来决定。如果过 PP 用一个垂直的平行四边形的平面切割晶体，那么在这一表面上发生的折射就应该由回转半椭球面 PSP 来决定。对于其他情形，也是一样。不过我发现，如果平面 NN 几乎与平面 GG 垂直，在 A 边作角 NCG 等于 90 度 41 分，那么回转半椭球面

NGN 就变得与回转半椭球面 GNG 类似，因为平面 NN 与 GG 以相同的倾角 45 度 20 分倾向于轴 SS。因此，如果我们的理论是真实的，必定有这样的结论，过 NN 的截面所形成的表面，应该同过 GG 的截面所形成的表面产生的折射一样。不仅截面 NN 的表面如此，而且所有能够以 45 度 20 分角度与这一轴倾斜的平面，它们所形成的截面也是一样。因此，存在着无穷多个平面，它们与晶体的天然表面或者与晶体劈裂面中的任何一个平行的截面，产生完全一样的折射。

我还看到，用一个过 PP 并与轴 SS 垂直的平面切割晶体时，这一表面的折射应该能使垂直入射光线在那里不发生偏转。而对于斜射的光线，就总是为与规则折射不同的一种不规则折射。在这一折射下，晶体下面的物体上升的高度将比在另外的那种折射下低些。

同样地，用任意一个过轴 SS 的平面，譬如本图中的平面，来切割晶体时，垂直入射光线应该不受折射；而对于斜射光线，不规则折射依入射光线所在平面的位置而不同。

这些情况事实上也是如此。于是，我毫不怀疑地认为在任何地方都可能得到类似的成功。由此我得出结论，人们可以用这种水晶制造出类似于那些自然形状晶体的固体，它们可以在它们所有表面上产生与自然表面上一样的规则折射和不规则折射。不过它们不是沿着平行于它们表面的方向，而是以完全另外一种方式劈裂的。人们还可以利用它来仿造锥体，这些锥体可以有四边形、五边形、六边形或者人们需要的任何多边形的底面，除了底面以外它们的表面可以同晶体的天然表面一样地产生折射，而不折射垂直入射的光线。这些表面应该同晶体的轴成 45 度 20 分的角度，底面应该是垂直于这条轴的截面。

最后，人们还可以利用它来制造三棱镜或者人们所需要的任何多面棱镜，不管是棱面还是底面都不能折射垂直入射光线，尽管它们都能对倾斜入射的光线产生双折射。立方体被包括在这些棱镜中，它的底面是垂直于晶体轴的截面，而其他面则是平行于这一轴的截面。

从所有这些进一步看到，引起不规则折射的原因根本不是由于这种晶体的构成具有薄层排列并且能在三个方向劈开。企图在这里寻找原因是徒劳的。

为了使那些有这种石头的人能够通过自己的经验来发现我刚才讲过的事实，我准备在这里陈述我切割和抛光它所采用的步骤。使用宝石工匠的切割轮或者采用锯开大理石所用的方法，切割是容易的。但是抛光却很困难，并且采用普通的方法，人们不仅不能使它们透明而且还经常会破坏表面的光滑。

通过多次试验以后，我最后发现这一操作不能使用金属板，而应该使用一块粗糙的并且不光滑的镜子玻璃。在这块玻璃上放上细沙和水以后，人们可以采用同加工眼镜玻璃那样的方法一点一点地把晶体磨平，只是要

逐渐减少材料。然而我还不能使它完全清晰透明；但是这些表面所需要的均匀性，已经使人们比在劈裂石头得到的总是有些不均匀的表面，能更好地观察到折射效应。

即使表面只是一般地光滑，如果人们把它放在油或者蛋清上摩擦，它会变得相当透明，使得折射在里面能十分清晰地被鉴别。要想抛光天然表面以消除其不均匀性，这种辅助手段是特别需要的；因为人们无法使它们象其他截面表面一样明亮，那些越不接近这些天然平面的截面就越能很好地被抛光。

在结束关于这种晶体的论著以前，我准备补充述说我在写完所有前面内容后发现的另一个奇异现象。尽管我至今还无法找到其原因，我也不愿因此而放弃对它的叙述，而使别人有机会研究它。看来似乎有必要在我刚才所作的假定之外，再作进一步的假定。经过这么多次的试验所证实了的假定，不会因此而失去它们的可行性。

这一现象是，取两块这种水晶，并把其中一块放在另一块之上。更确切地说，在两块水晶间空开一段距离，并固定它们。如果其中一块的所有边都与另一块的那些边平行，那么一条光线，譬如 AB 将在第一块上依两种折射，规则折射和不规则折射，分为两条，即，BD 和 BC。然后它们进入另一块晶体，每一条光线在那里穿过，而本身不会再进一步分裂成为两条。不过，受到规则拆射的那一条，如这里的 DG，将在 GH 再次受到规则折射，另外一条 CE 在 EF 受到不规则折射。这种现象不仅出现在这种排列下，而且还出现在每一块晶体的主截面位于同一平面内的其他所有情形下。这里并不要求两个相邻表面平行。从空气中入射到下面的晶体的光线 CE 和 DG 为什么不象原先的光线 AB 那样分裂自己，这一点很不可思议。也许有人会说，光线 DG 在穿透上面的一块晶体时失去了用于不规则折射的物质运动所必需的某些东西；而同样地，CE 则失去了用于规则折射的物质运动所必需的那些东西。但是又有另外一种现象推翻了这一推理。这种现象是，使两块晶体的主截面平面垂直放置时不论相邻的两个表面是否平行，来自规则折射的那束光线如 DG，在下面一块晶体上将只受不规则折射；相反，来自不规则折射的那束光线，如 CE，将只受到规则折射。

除了我刚提到的那些情形以外，在无穷个其他所有的位置，光线 DG 和 CE 经过下面的晶体的折射，再次将它们各自分为两条。因此一条光线 AB 成为四条光线，对应着晶体之间的不同位置，有时候它们同样亮，有时候它们中间的一些比另一些亮。不过把它们聚集到一起也不会比单条光线 AB 更亮。

保持光线 CE 和 DG 不变，考虑对下面的晶体位置的依赖，如何使它们都分裂为两条，如何使它们都不分裂，以及光线 AB 在上面如何分开的。似乎不得不得出结论，光波在穿过第一块晶体时，由它带来了某种结构或者某种排列。当它遇到处于某一位置的第二个晶体结构时，它们就变成能用

于两种折射的两种不同类型的物质，而遇到另一位置的第二个晶体时，它们只变成这两种物质中的一种。至今我还没有找到令我满意的答案来解释这是怎么发生的。

那么就把这个课题留给别人去做。我将转到关于这种晶体的不规则外形的原因，以及为什么它能容易地沿平行于它的任意一个表面的三个方向劈开上来。

有许多物体，植物、无机物和结晶盐，它们都是由某一规则角度和规则外形构成。在花中，有些花的花瓣是按规则的多边形排列的，多边形的边数可以为 3、4、5 或者 6，但不能更多。无论就这一多边形外形而言，带是就它为什么不能超过 6 而言，都值得好的研究。

岩石晶体通常生长为六面体的棒，而得到的钻石则呈现为四顶点和四个抛光面。有一种扁平岩石由各边稍微内弯的圆角五边形一个正对着一个地堆叠起来。由海水生成的灰盐颗粒，多数呈立方体形，或者至少为角形体。而在其他类型的盐的结晶体和糖的结晶体中，总可以找到有相当平坦表面的其他一些立角体。小雪片总是呈六角星形落下，而且有时是有直边的五角形。在开始结冰的水中，我经常观察到一种扁平而又薄的冰片，它中间的光线分裂为 60 度角倾斜的光线。所有这些情况都值得仔细研究，以确定大自然在那里怎样和以什么方式起作用。不过它还不是我现在彻底处理这些现象的目的。看来，一般来讲，这些产物中出现的规则性是组成它们的小而不可见的相同微粒排列的结果。至于冰岛水晶，如果存在着一些由细小圆形微粒构成的四面体，譬如 ABCD。微粒不是球形的而是扁椭球形，由椭圆 GH 绕其短轴 EF 旋转而得到（EF 与长轴之比约为 1 与 8 的平方根之比）——我认为 D 点的立体角将等于这一晶体的钝角等面角。进一步，我认为如果这些微粒轻轻地粘在一起。在打破这个四面体时，它就顺着平行于那些粘结点的平面裂开。采用这种方法，容易看出，由此可以形成与另一张图中表示的棱柱形晶体。原因是，按这种方式裂开时，一个完整的层片很容易同其相邻的层片分离。由于每一个椭球必定只与相邻层片的三个椭球分离，而且这三个椭球中只有一个与它的扁表面接触，另外两个在边上。这些表面能够轮廓分明地光滑地分开的原因是，如果相邻表面的任何椭球要从所依附的正在分离的表面上跑出来，它必须与连接它的其他六个椭球分开，其中四个椭球是以扁表面紧贴着它。那么，由于不仅晶体的顶角而且它的分裂方式，都与我们的观察恰好一致，就有理由相信微粒就是这样的形状和这样的排列。

鉴于巴塞林那斯先生提到，他曾偶然发现过一些三角锥体，这种棱柱形水晶极有可能是由锥体的裂解形成的。但是若一个物体内部只是由那些小椭圆组成和堆叠，不管它的外部形状如何，依据我刚才作解释的推理，在破裂时的确会产生一样的棱柱体。是否还有其他原因来证实我们的猜想，是否不存在与此矛盾的原因存在，有待于再研究。

也许有人反对说，这样构成的晶体还能够依另外两种方式劈开；一种是沿着与锥体底面平行的平面，即三角形 ABC；另一个平面平行于沿着与 GH、HK、KL 连线标志的平面。我认为对于这两种情况而言，虽然它们都是可能的，但是比平行于锥体三个平面中任何一个的那些情况要困难得多。因此，在敲击晶体使其破裂时，它总是顺着这三个平面裂开，而不是顺着另外两个方向裂开。如果有许多具有上述外形的椭球，把它们排列成为一个锥体，就会看到为什么那两种分割方式比较困难。因为在与底面平行的分割方式中，每个椭球必须与其在扁平表面上粘接的三个椭球分开，这种粘接比在边上的粘接更紧。另外，这种分割也不会沿着整个层片发生，因为一层中的每一个椭球几乎不会被同层中围着它的六个椭球束缚住，它们只是在边上接触它；因而它很容易与邻层粘连在一起。由于同样的原因，其他的椭球也会与它粘连，这就导致了不均匀的表面。通过实验也能看到，在一个稍微粗糙石头上研磨晶体时，直接对着等边立体角，人们确实发现沿着这一方向非常容易弄碎它，而以后抛光时采用这一方式弄平表面时就很困难。

关于沿平面 GHKL 分割的另一种方式,可以看到每一个椭球必须同邻层的四个椭球分开，其中两个椭球与它在扁平表面上粘接，另外两个在边缘上。因而这一种分割方式同样比平行于晶体的某一个表面的分割方式困难。正如我们已经说过的，在这种分割方法中，每个椭球同邻层的三个椭球分开，而这三个椭球中只有一个同它在扁平表面上相接触，另外两个仅仅在边缘。

从以上最后一种方式，使我认识到晶体中存有薄层的，却是我所拥有的一块半磅重的晶体。就象以上提到的用平面 GHKL 劈裂棱柱那样，沿着纵长方向劈开它，颜色看来就象是通过整平面散开的彩虹，即使已裂开的两块仍旧连在一起。所有这一切都证明，这种晶体的结构确实如我们以上所述。对此，我再补充以下实验：用小刀沿某一天然表面来刮晶体，如果从等边钝角的方向下刮，即从锥体顶点向下刮，就会发现这样刮很困难；但是，如果反向刮，就能容易地弄出一个割口。这显然是小椭球的位置所决定的。在前一种方式中，小刀会在椭球上面滑动，但在后一种方式下，小刀将从下部就象刮鱼鳞一样刮动他们。

我不准备讨论有关这么多相似而且一样大的微粒产生的任何问题，也不准备讨论它们为何如此完美地排列；无论它们是先形成再集中，还是在形成时就迅速这么排列，在我看来，都有可能。要得出这么深奥的真理，所需求的知识将远大于我们已有的知识。我只顺便补充一点，按上述假设，与轴平行排列的各个小椭球，成为形成椭球形光波的原因之一。

本章已经假定的计算

巴塞林那斯先生在他的有关这种晶体的论著中，取表面上的钝角为101度，我说的是101度52分。他指出他直接在晶体上测量了这些角度。要很精确地测量是困难的，因为象图中的棱CA和CB通常是弯曲不直的。于是，为了更准确些，我宁愿去实际地测量钝角。这些钝角使表面CBDA、CBVF彼此倾斜，换句话说，作CN垂直于FV，CO垂直于DA，形成的角OCN就是这个钝角。我发现这个角度等于105度，并且它的补角CNP应该等于75度。

为了由此求钝角BCA，设想一个以C为中心的球面，在它上面有一个球面三角形，由包围立体角C的三个平面横截形成。在这个等边三角形（即另一个图中的ABF）中，我发现它的每一个角应该为105度，即等于角OCN；而每条边对应的角度应该为角ACB、ACF或者BCF。再作弧FQ垂直于边AB，并在Q点将它分为两个相等部分。三角形FQA就有一个在Q点的直角，一个等于105度的A角，一个等于一半A角即52度30分的角。因此斜边AF将等于101度52分。弧AF就等于图中这种晶体的ACF角的大小。

在同一图中，如果平面CGHP切割晶体使得它平分钝角ACB和角MHV。在第10节中已经指出，角 CFH应该等于70度57分。这一点在上述的球面三角球ABF中也容易看出来。显然，孤FQ与晶体中的角CFH的补角GCF一样大。现在已求得弧FQ等于109度3分。于是它的补角70度57分，就是角CFH的大小。

在第26节中指出，直线CS，取上图中的CH，是晶体的轴时，也就是说，它与三条边CA、CB和CF倾斜相同的角度GCH等于45度20分。这一点也可以通过上述球面三角形方便地算出。作平分BF并与FQ相交于S点的弧AD，点S就是三角形的中心。很容易看出，弧SQ等于表示晶体的图中角GCH的大小。在直角三角形QAS中，已知A等于52度30分，边AQ等于50度56分；因此边SQ就等于45度20分。

在第27节中需要证明，以C点为中心的椭圆PMS，与直线MD在M点相切，CM与垂直于DM的CL构成的角MCL等于6度40分，而短轴半径CS与CG（它与MD平行）构成45度20分的角GCS。——我说，它需要证明，若CM等于100，000，椭圆的长轴半径PC就等于105，032，而短轴半径CS等于93，410。

延长CP和CS，使它们与切线DM相交于D和Z点。从切点M作MN和MO与CP和CS垂直。因为角SCP和角GCL是直角，所以角DCL就等于45度20分的角GCS。把45度20分的角LCP减去6度40分的角LCM，得38度40分的角MCP。考虑长为100，000的半径CM，38度40分角的正弦MN就等于62，079。在直角三角形MND中，MN与ND之比就等于半径与45度20分的正切之比（因为角NMD等于角DCL或者角GCS），即等于100，000与101，170之比。由此得出，ND等于63，210。不过，CM等于100，000时，NC等于78，079，因为NC是38度40分角MCP的补角的正弦。因此，

整条线段 DC 等于 141，289。由于 MD 与椭圆相切而，DC 与 CN 的比例中项的 CP，等于 105，032。

同样，因为角 OMZ 等于角 CDZ 或 LCZ，等于 44 度 40 分，是角 GCS 的补角。所以，半径与 44 度 40 分角的正切之比等于 OM 即 78，079 与 OZ 即 77，176 之比。而 OC 等于 62，479，因为 OC 等于 MN，即 38 度 40 分角 MCP 的正弦。因此整条线段 CZ 等于 139，655，而 CZ 与 CO 的比例中项 CS，等于 93，410。

在同一个地方，我们曾指出 GC 等于 98，779。为了证明这一点，在同一图中，作 PE 平行于 DM，与 CM 相交于 E。在直角三角形 CLD 中，边 CL 等于 99，324（CM 等于 100，000），这是因为 CL 是 6 度 40 分角 ICM 的补角的正弦。又由于角 LCD 为 45 度 20 分，与角 GCS 相等，所以边 LD 等于 100，486。于是，减去 ML 即 11，609 之后，留下 MD 等于 88，877。那么 CP 即 105，032 与 PC 即 66，070 之比，等于 CD（它等于 141，289）与 DM 即 88，877 之比。而 PE 的平方同 Cg 的平方之比，等于 ME 与 EH 之积（确切地说，CM 与 CE 的平方差）同 MC 的平方之比，也等于 PE 的平方与 gC 的平方之比。那么 DC 与 CP 的平方差，与 CD 的平方之比，也等于 PE 的平方与 gC 的平方之比。而 DP、CP 与 PE 已知，由此求得 GC 等于 98，779。

已经假定的引理

如果一个回转椭球面与一条直线相切，同时又有两个或者更多的平面与这条直线平行，尽管它们彼此之间不平行，所有与这条直线和平面相联结的点位于同一个椭圆上。该椭圆由一个通过回转椭球中心的平面形成。

设 LED 为回转椭球，它与线 BM 在点 B 相切，也与平行于这条直线的平面在点 O 和点 A 相切。需要证明点 B、O、A 位于同一个椭圆上，这个椭圆是回转椭球上由经过其中心的平面产生的。

经过线 BM，点 O 和 A，作彼此平行的一些平面，把回转椭球截成椭圆 LBD、POP 和 QAQ；这些椭圆相似并且具有类似的位置。它们的中心 K、N、P 都在该回转椭球的同一条直径上。这条直径也是经过回转椭球中心的平面截成的椭圆的直径。它与所说的三个椭圆平面正交。所有这些都在阿基米得（Archimedes）的《圆锥体与球体》（Conoids and Spherods）一书的定理 15 中给出了证明。此外，过点 O 和 A 所作的后两个平面，在切割与回转椭球在这个点相切的两个平面时，形成直线 OH 和 AS。很容易看到，这两条直线与 BM 平行，并且所有这三条直线 BM、OH 和 AS 在 B、O 和 A 点与椭圆 LBD、POP 和 QAQ 相切，由于它们位于这些椭圆平面内，同时又位于回转椭球相切的那些平面内。现在假定点 B、O 和 A 作有直线 BK、ON 和 OR 穿过各椭圆的中心，如果过这些中心又已作有与切线 BM、OH 和 AS 平行的直径 LD、PP 和 QQ，那么这些直径与前面说的 BK、ON 和 AR 将是共轭（配

对）的。因为这些椭圆相似并且同样地放置，它们的直径 LD、PP 和 QQ 又互相平行，所以，它们的共轭直径 BK、ON 和 AR 必定互相平行。同时如上所述，这些中心 K、N 和 R 在回转椭球的同一条直径上，所以这些平行线 BK、ON 和 AR 必定位于过回转椭球直径的同一平面。结果，点 R、O 和 A 就在这个平面截成的那个椭圆上。这一点已得到证实。显然，如果除了点 O 和 A 以外，还存在着其他平行直线 BM 的平面与回转椭球相切的切点。证明也是一样的。

第六章
论起折射和反射作用的透明体的形状

在阐明了如何根据我们关于不透明体和透明介质性质提出的假设得到反射和折射的特性之后，我将在这里给出一种简易而自然的采取同样原理的实用图形推导方法，通过折射或反射，这些图形可以根据需要发散或汇集光线。尽管到目前为止我还没有看到利用折射图形的工具，这不仅因为按照这些图形以必需的精度加工望远镜片有困难，而且还因为折射本身存在着一种妨碍光线完好一致的性质，牛顿先生已用实验作了充分的证实，我也不愿放弃这一发现，可以说因为它表现了它的特征，还因为它发现了折射光线与反射光线的统一描述，进一步证实了我们的折射理论。还有，将来或许有人会找到目前尚未发现的用途。

为了着手讨论这些图形，先假设需要找到一个表面 CDE，它把来自 A 点的光线汇聚到点 B。而该表面的峰为直线 AB 上的给定点 D。我认为无论折射还是反射，只要使表面象这样，从 A 点到曲线 CDE 上的各点，再从这些点到聚焦点的光程（这里的光程是直线 AC 和 CB，直线 AL 和 LB，以及直线 AD 和 DB）的传播时间相等。运用这个原则求这些曲线就变得容易了。

对于反射表面，因为直线 AC 与 CB 的和应该等于 AD 与 DB 的和，显然 DCE 应当是一个椭圆。而对于折射，假定已知介质 A 与 B 中的光速比，例如为 3 比 2（如我们所知，这与折射中的正弦比是一样的），只需作 DH 等于DB的$\frac{3}{2}$；并以A点为中心画段弧FC，与DB相交于F。再以B点为中心，以等于FH的$\frac{2}{3}$的BX为半径，画另一段孤。两段弧的交点为所求的曲线应该通过的那些点中的一个。因为该点是按这种方法找到的，很容易立即证明沿 AC、CB 所需要的时间等于沿 AD、DB 所需要的时间。

假定直线 AD 表示光在空气中经过这段距离 AD 所需要的时间，显然，等于DB的$\frac{3}{2}$的DH，表示光在介质中沿DB所需要的时间，因为随着速度减小，所需要的时间成比例增加。于是，整个直线 AH，将表示沿 AD、DB 所需要的时间。同样，直线 AC 或 AF 表示沿 AC 所需要的时间。等于 CB 的$\frac{3}{2}$的FH，表示在介质中沿CB所需要的时间。因此，整条线AH表示沿AC、CB 所需要的时间。由此可见，沿 AC、CB 所需要的时间等于沿 AD、DB 所需要的时间。同样可以证明，如果 L 与 K 是曲线 CDF 上的另外的一些点，那么沿 AL、LB 所需要的时间以及沿 AK、RB 所需要的时间，也总是用直线 AH 所表示。于是，等于上述沿 AD、DB 所需要的时间。

为了进一步地证明通过这些曲线旋转形成的表面，使所有自 A 点到达它们的光线，以同样的方式趋向 B 点，假定曲线上有一点 K，距离 D 比 C 远些，以致直线 AK 落在从外部折射的曲线上。以 B 点为中心作弧 KS，它与 BD 相交于 S，与直线 CB 相交于 R。再以 A 点为中心作弧 DN，与 AK 相交于 N。

因为沿 AK 和 KB 所需要的时间，等于沿 AC 和 CB 所需要的时间，如果从前者扣除沿 KB 的时间，并从后者扣除沿 RB 的时间，那么剩下来沿 AK 的时间等于沿 AC 和 CR 两部分的时间。因此，光沿 AK 传播的时间里，它也沿 AC 传播并且又以 C 为中心以 CR 为半径在介质中形成了一个球面分波。因为 CB 与圆周 KS 正交，所以该分波与此圆周相切于 R。同样地，如果人们考虑曲线上的另一点 L，得到当光沿 AK 传播时，它也沿 AL 传播并又以 L 为中心形成一个与上述圆周 KS 相切的分波。曲线 CDE 上的其他所有点都是如此。那么，在光到达 K 点时，弧 KRS 将包络自 A 点出发经过 DCK 的传播的光运动。因此，这段圆弧构成由 A 点发源的波在介质中的传播；可以由弧 DN，或者由其他离中心点 A 更近的弧来表示。而弧 KRS 上的各个部分将顺序沿垂直于它们的直线传播，也就是说，沿趋向中心 B 的直线传播（可以用我们以上证明球面波是沿来自其中心的直线传播的这一方法来证明），并且正是波的各个部分的光程本身构成了光线。显然：所有这些光线都趋向于 B 点。

也可以用下述方法来决定用作折射的曲线上的 C 点和其他所有点：在 G 点分割 DA，使 DG 等于 DA 的 $\frac{2}{3}$；以 B 点为中心，作圆弧 CX，与 BD 相交于 X；再以 A 为中心作另一圆弧，半径 AF 等于 GX 的 $\frac{3}{2}$；或说得确切些，

如上述作了圆弧 CX 之后，只需要作直线 DF 等于 DX 的 $\frac{3}{2}$，再以 A 为中心画出弧 FC；显而易见，这两种构造方法都将回归于我们前面所讲的第一种方法。并且通过后一种方法可以看到，这些曲线正是笛卡儿先生在他的《几何学》中称之为的第一类卵形曲线。

在这种卵形曲线中只有其中的一部分适用于折射即 DK，如果 AK 是切线，K 是终点。至于其他部分，笛卡儿指出，如果有某种特性能使光强（或者，我们应当说是光速，但他不会这么说，因为他认为光的运动是瞬时的）按 3 比 2 的比例增加的材料制成镜面，那么它可以用于反射。但是我们曾经证明，在我们关于反射的解释中，镜面的物质是不可能产生这一现象的，它完全是不可能的。

从有关这种卵形曲线的论证出发，很容易找到一种图形将平行入射线汇聚到一点。采取同样的考虑，只是假定 A 在无穷远处发出平行的光线，卵形曲线就变成了正椭圆，其图形同卵形曲线的没有什么两样，只是先前

为圆周上一段弧的 FC，在这里变成了一条垂直于 DB 的直线。因为光波 DN 也同样由一条直线表示，不难看出这一波上所有点沿平行 DB 的直线传播到表面 KD，然后朝向点 B 并于同一时刻到达那里。至于用作反射的椭圆，显然它在这里变成了一条抛物线，因为它的焦点 A 可以被视为与另一个焦点 B 相距无穷远，B 就是这条抛物线的焦点，所有平行于 AB 的光线的反射线都趋向它。这些效应的证明与前面的证明一样。

通过代数计算很容易得到，用于折射的曲线 CDE 是一个椭圆，它的长轴半径与焦距之比为 3 比 2，即折射比。给定 DB 为 a，它的未确定的垂线 DT为x，TC为y；则FB为a－y；CB为$\sqrt{xx+aa-2ay+yy}$。而曲线的性质要求TC的$\frac{2}{3}$与CB之和等于DB，正如在上述图形中所要求的那样，因而方程式应为$\frac{2}{3}y+\sqrt{xx+aa-2ay+yy}$等于a。这一方程简化后为，$\frac{5}{6}ay-yy$等于$\frac{5}{9}xx$。也就是说，作了DO等于DB的$\frac{6}{5}$后，DF与FO的乘积将等于FC平方的$\frac{9}{5}$倍。由此可见，DC是一个椭圆，其轴DO与特性参数之比为9比5；于是 DO 的平方与焦距的平方之比为 9 比 9—5，即 9 比 4，因此 DO 与焦距之比为 3 比 2。

此外，如果假定 B 点在无穷远，我们会发现 CDE 不再是第一类卵形曲线而是一个正抛物线，它使来自 A 点的光线变得平行。结果，那些在透明体内平行的光线在外面汇聚于 A 点。必须注意，CX 与 KS 变成了垂直于 BA 的直线，因为它们表示中心在无穷远处的圆上的弧。垂线 CX 与弧 FC 的交点为 C 点，这一点是曲线所应该通过的点。同理，光波 DN 上的所有部分到达表面 KDE 之后，平行地同时地到达 KS 直线。它的证明同第一类卵形曲线的证明一样。另外，同前面同样简单的计算发现，这里的 CDE 是一个抛物线，其轴线DO等于AD的$\frac{4}{5}$，特性参数等于AD。由此，很容易证明出DO与焦距之比为 3 比 2。

这是圆锥曲线用于折射的两种情形，同笛卡儿在他的《折光学》（Dioptrique）中所作的解释一样，他首先发现了关于折射中这些曲线的用途，以及我们刚才讨论的第一类卵形曲线的用途。第二类卵形曲线适用于汇聚于一给定点的光线，在这种卵形曲线中，如果接受光线的表面的顶点为 D，那么另一个顶点将位于 B 和 A 之间，或者落在 A 点以外，其具体位置依据 AD 与 DB 之比值的大小而定。后一种情形，与笛卡儿称之为第三类卵形曲线中的情形相同。

第二类卵形曲线的求解和图形与第一类卵形曲线的情况相同，其作用的证明也相同。不过值得注意的一点是，这一类卵形曲线在一种情形下将变成为完全的圆，即当 AD 与 DB 的比和折射比相同时。在这里该比值应如我在很久以前所观察到的那样为 3 比 2。第四类卵形曲线能运用于一些不

可能存在的反射，没有必要提出来了。

至于笛卡儿先生发现这些曲线的方法，由于他本人没有对此作过说明，在我所知道之前也没有谁对此作过说明，因而在这里我顺带提一下我对这一点的看法。假定我们想要找一个由曲线 KDE 旋转而成的表面，使从 A 点入射的光线转向点 B。那么考虑已知的另一条这样的曲线，它顶点 D 在直线 AB 上。用 G、C、F 等点将它分割成无穷多小段，从这些点向 A 点作直线，表示入射光线。再从这些点向 B 点作另外的直线，然后以 A 点为中心画弧 GL、CM、FN、DO，它们与来自 A 点的光线在 L、M、N、O 等点相交。通过点 K、G、C、F，画弧 KQ、GR、CS、FT，它们又与传播向 B 点的光线在 Q、R、S、T 等点相交。又假定直线 HKZ 与该曲线在 K 点相交。

那么，AK 为入射光线，KB 则为它在介质内的折射线，依据笛卡儿先生所知道的折射定律，必定可以得到的 ZKA 的正弦值与角 HKB 的正弦值之比为 3 比 2，这一比值就是玻璃的折射比。确切地讲，角 KGL 的正弦值与角 GKQ 的正弦值之比，应该等于该比值，这里已考虑到 KG、GL、KQ 短小而认为它们是直线。如果 GK 取为圆的半径，这些正弦值就是 KL 与 GQ。于是，LK 与 GQ 之比就为 3 比 2；MG 比 CR、NC 比 FS、OF 比 DT 也是同样的比值。那么所有前者之和与所有后者之和的比，也应当等于 3 比 2。通过延长弧 DO 与 AK 相交于 X，KX 就是前者的和。延长弧长 Q 与 AD 相交于 Y，后者的和就是 DY。于是 KX 与 DY 之比就应该等于 3 比 2。由此可见，曲线 KDE 有以下性质，即从曲线上某一点，臂如 K，作直线 KA 和 KB，AK 超出 AD 的部分与 DB 超出 KB 的部分之比为 3 比 2。可以类似地证明在这条曲线上任意取另外一点，譬如 G，AG 超出 AD 的部分 VG，与 BD 超出 DG 的部分 DP 之比，也为同样的比值 3 比 2。通过这一原则，笛卡儿先生在他的《几何学》中构造出了这些曲线，并且他还很容易地认识到，在平行光情形下这些曲线将变成为抛物线与椭圆。

现在，让我们回到我们自己的方法上，并着一看，当玻璃的一边为给定图形时，另一边所要求的曲线是如何通过我们的方法毫无困难地找到的。这一给定图形不仅可以是平面，球面或者某一圆锥截面（这是笛卡儿提出该问题时所给出的限制，他把这一问题的解决留给了后人），而且还可以是完全任意的图形，也就是说，通过旋转任意给定曲线听得到的图形，对于给定曲线，人们只需要知道如何画出它的切线就可以了。

假定给定图形是通过某一曲线 AK 绕轴 AV 旋转而得到的，并且玻璃在这一边接收到来自 L 点的光线。此外，假定玻璃中部的厚度 AB 为已知，并且我们要求光线完全汇聚在点 F 上，无论发生在表面 AK 上的第一次折射如何。

我认为这一问题的唯一要求是构成另一表面的周线 BDK 应当这样：光线从 L 点到表面 AK，再从那里到表面 BDK 以及再到点 F 的行程应当处处时间相等，并且在每一情形下所需要的这一时间都等于光沿直线 LF 穿过所需

要的时间，而直线 LF 的 AB 部分位于玻璃之中。

假定 LG 是照在弧 AK 上的一束光线。它的折射线 GV 将由过 G 点作出切线来确定。GV上的点D必须满足FD加上DG的$\frac{3}{2}$，再加上直线GL，等于FB加上BA的$\frac{3}{2}$，再加上直线AL。很清楚，它们的和是一个给定的长度。确切地讲，从其中减去已知的 LG 的长度之后，只需要在 VG 的范围内调整FD，使得FD与DG的$\frac{3}{2}$之和等于一个给定直线的长度就可以了。这是一个简明的问题：D 点是曲线 BDK 应该通过的那些点之一。同样，画出另外一束光线 LM，找出其折射线 MO 之后，在这一直线上可找到点 N，如此下去进行所需要的次数。

为了证实这一曲线的作用，以 L 为中心画一圆弧 AH，与 LG 相交于 H；以F为中心画圆弧BP，再在AB上作AS等于HG的$\frac{3}{2}$；作SE等于GD。考虑到 AH 是 L 点发源的光波,A 点的光波必定在它从 H 段到达 G 点的时间里，沿 AS 进入透明体。如上所述，假定折射比为 3 比 2。我们知道从 G 点入射的光波从那里沿线 GD 传播，因为 GV 是光线 LG 的折射线。因为 GD 与 SE 相等，在光波由 G 点到达 D 点的时间里，位于 S 点的另一段光波将到达 E 点。但当后者由 E 点传播到 B 点时，位于 D 点的那段波就已经将它的分波传播到空气中，分波的半径 DC（假定分波与 DF 相交于 C 点）等于 EB 的$\frac{3}{2}$，因为介质外的光速与介质内的光速比为3比2。于是很容易证明，这个光波与弧BP在点C相切。由于在作图中，FD＋$\frac{3}{2}$DG＋GL等于FB＋$\frac{3}{2}$BA＋AL；减去相等的量LH与LA，那么余下的量FD＋$\frac{3}{2}$DG＋GH等于FB＋$\frac{3}{2}$BA。又从一边减去GH，从另一边减去与之相等的$\frac{3}{2}$AS，余下的量FD＋$\frac{3}{2}$DG就等于FB＋$\frac{3}{2}$BS。而$\frac{3}{2}$DG又等于$\frac{3}{2}$ES，因此FD就等于FB与$\frac{3}{2}$BE之和。同时DC等于$\frac{3}{2}$EB，从两边减去这些相等长度后，余下的CF等于 FB。由此显而易见，当光线从 L 点沿 LB 到达 B 点时，半径为 DC 的那个波，将同时与弧 BP 相切。可以类似地证明在这一时刻顺着其他光线，譬如LM、MN 传播的光运动到达弧 BP。由此可以得出，正如经常说到的，穿过玻璃厚度以后的光波 AH 的传播，为球面波 BP，上面的各段将沿直线即光线，向中心点 F 传播。这一点已得到证实。同样，这些曲线在所有可能假定的情况下都能被找到，将在我附加的一两个例子中得到充分证实。

设有一个给定的玻璃表面 AK，它是由曲线 AK 绕轴 BA 旋转而成的，其

中 AK 可以是直线也可以是曲线。又设轴上有一给定的点 L。玻璃的厚度 BA 也给定；需要求的是另一个表面 KDB，它能将其接收到的平行于 AB 的光线偏转，使得它们在给定表面 AK 再次折射后能全部汇聚到 L 点。

从点 L 向给定直线 AK 上的某一点作直线 LG，并把它看作一束光线，那末可以求出它的折射线 GD。并且当这条线沿一边或者另一边延长后，与直线 BL 相交，其交点在这里为 V 点。又作 AB 的垂线 BC，由于我们假定了光线互相平行，所以它表示来自无穷远点 F 的光波。光波 BC 上的各部分将同时到达 L 点，更确切地说，发源于 L 点的光波的各个部分，将同时到达直线 BC。为此，必须在线 VGD 上找到点 D，使得在作了 DC 平行于 AB 之后，CD加上$\frac{3}{2}$DG再加上GL的和，可以等于$\frac{3}{2}$AB加上AL；或更确切地讲，从两边减去给定的GL，CD加上$\frac{3}{2}$DG必定等于一个给定长度。与前面的作图相比这已是一个较为简单的问题。这样找到的 D 点将是曲线应该通过的那些点之一。证明将与前面的相同。据此，也可以证明，来自 L 点的光波在穿过玻璃 KAKB 之后，将呈直线形，如 BC；也就是说，光线将变得平行。由此相反地可以得到，照射在表面 KDB 上的平行光将汇聚于 L 点。

再假定有一给定的表面 AK，它有绕 AB 轴旋转而得到的任何所需要的形状。假定中部的玻璃厚度为 AB，又假定点 L 是玻璃后方的轴上的给出的一个点；同时假定照在表面 AK 上的光线是朝向这个点的。我们需要的是求一个表面 BD，它能使从玻璃中出来的光线，看起来似乎是玻璃前方的点 F 出来的。

在线 AK 上取任意一点 G，然后作直线 IGL，它的 GI 部分将表示入射的一束光线，其折射线 GV 就可以求出。必须在这条折射线上找到点 D，曲线 DB 应该通过它。假定点 D 已经找到：在距高 LG 大于 LA 时，以 L 为中心作圆弧 GT，与直线 AB 相交于 T。不然的话，必须以同一中心画弧 AH，与直线 LG 相交于 H 点。这段圆弧 GT（或者另外一种情况下的 AH）将表示一束入射的光波，它的光线朝向点 L。同样，以 F 点为中心作圆弧 DQ，表示一束由 F 点发源的光波。

于是，光波 TG 在穿过玻璃以后，必然形成波 QD。由此我观察到，光在玻璃中沿 GD 传播所需要的时间，必定等于它沿 TA、AB 以及 BQ 三段所需要的时间，其中仅有AB段在玻璃中。或者更确切地说，作AS等于$\frac{2}{3}$AT之后，我注意到，$\frac{3}{2}$GD应该等于$\frac{3}{2}$SB加上BQ。把它们从FD或FQ中减去之后，FD减去$\frac{3}{2}$GD应该等于FB减去$\frac{3}{2}$SB。最后的这个差，是一个给定长度。我们所需要做的所有事情，就是从给定点 F 作与 VG 相交的直线 FD，使得它满足以上所述。这是一个与用于这些作图方法中的第一个问题十分

类似的一个问题。在那个问题中，FD加上$\frac{3}{2}$GD应等于一个给定的长度。

在证明中，必须注意，由于弧 BC 落在玻璃内，所以必须设想一个与之同心的并位于 QD 另一边的弧 RX。那么，证明了光波 GT 上的 G 段到达 D 点的同时，T 段到达 Q 点，就很容易作图得出，当 Q 段到达 R 点时，在 D 点产生的分波将与弧 RX 相切。于是这一圆弧应同时包络来自波 TG 的光运动；在这里所有其他的光波都被包括在内。

揭示了寻找这些用于完全汇聚光线的曲线的方法之后，剩下的就是要解释一件值得注意的情形，即有关球面、平面或者其他表面的不同等折射，如果忽略了这种情形，就会使人们怀疑我们先前重申过几次的观点，即光线与沿着与光波垂直的直线传播。

在某一情形下，例如，如图所示，光线平行照射在球面 AFE 上面折射后彼此相交于不同点。在透明体中，与聚焦光线正交的光波会是什么样子呢？它们不会是球面的。当所说的这些光线开始彼此相交时，光波又会变成什么样子呢？通过对这一困难的解决，我们将看到产生了一些值得注意的东西，尽管光波不会继续完整，但也决不会中断，正如它们穿过依据要求设计的玻璃时我们所看到的那样。

依据上面的证明，从球面顶点所作的与平行于入射光线的轴正交的直线 AD，表示光波。当光波的 D 段到达球形表面 AGE 上的 E 点时，它的其他部分将也到达同一表面上的 F、G、H 等点，并以这些点为中心形成球面部分波。与所有这些分波相切的表面 EK，为光从 D 段到达 E 点的时间内波 AD 的继续传播。如果我们设想在凸形曲线 ENC 上放有一条松开的细线，它的末端 E 构成了曲线 EK，那么线 EK 不是一段圆弧，而是另一条曲线 ENC 的渐屈线。ENC 同所有平行的光线的反射线 HL、GM、FO 等相切。假定了这种曲线是这样作成的，我们将证明由中心点 F、G、H 等形成的光波都与它相切。

曲线EK以及其他由曲线ENC以不同长度的细线作出的渐进展开曲线与所有的光线 HL、GM、FO 等正交，使得这些光线在两条这种曲线之间所夹的部分都相等。这一点取自于我们的《摆钟论》（de Motu Pendulorum）中的证明。假定入射光线互相之间距离十分接近，如果我们考虑其中的两束，RG 与 TF，作 GQ 垂直于 RG。如果我们再假定与 GM 在 P 点相交的曲线 FS，是由从 F 点开始的曲线 NC 的渐进展开，其中这一点 F 也即线 FS 所延伸到的地方。我们可能假设小段 FP 是一条垂直于光线 GM 的直线，同样，假设弧 GF 是一条直线。而 GM 是光线 RG 的折射线，并且 FP 又与它垂直，正如以上解释笛卡儿的发现时所证实的那样，QF 与 GP 之比必定为 3 比 2，即折射比。对于其他所有小孤 GH、HA 等，情况也类似。也就是说，在包围它们的那些四边形中，与轴平行的边与其对边之比等于 3 比 2。于是，其中一组之和与另一组之和的比，也等于 3 比 2。换句话说，假定 V 为曲线 EK 与光线 FO 的交点，TF 与 AS 之比，DE 与 AK 之比，以及 BE 与 SK 或者 DV 之比，

都等于 3 比 2。而作直线 FB 垂直于 DE，BE 与光在透明体外传播从 F 点发出的球面波的半径之比也为 3 比 2。显而易见，在 V 点，光线 FM 与光波相交，与曲线 EK 正交。因此，光波同曲线 EK 相切。用同样的方法可以证明，对于以上提到的所有由点 G、H 等产生的那些光波，情况也是如此。在波 ED 上的 D 段到达 E 点时，它们到达曲线 EK。

现在开始讨论在光线彼此交叉之后，光波会变成什么样子。结论是，它们将由此扭弯，并由两个邻接的部分组成，其中一部分是曲线 ENC 在一个方向上的一条渐屈线，而另外一部分是同一条曲线在相反方向上的一条渐屈线。于是，波 KE 向聚焦位置前进时变成 abc，其中 ab 由 c 端固定的曲线 ENC 上 bc 的渐屈线形成，bc 由 E 端固定的 bE 的渐屈线形成。同一光被随后变成为 def，再变成为 ghk，并最终变成为 Cy。并由此光波的传播不再扭弯，而总是沿着曲线 ENC 的渐屈线行进，递变为末端在 C 的某条直线。

在这条曲线上甚至有一个部分 EN 是笔直的，其中 N 是从球面中心 x 所作的垂直于光线 DE 的折射线上的垂足。这里假定折射线与球面相切。光波的扭弯从 N 点开始，一直到曲线 c 的末端。它通过取 AC 比 Cx 等于折射比 3 比 2，可以作出。

曲线 NC 上可能需要的其他一些点，可以利用巴罗（Barrow）先生在他的《光学讲义》（LectionesOpticoe）一书的第 12 节中为别的目的而证明的一个定理来求得。值得注意的是，需要找出与这条曲线长度相等的一条直线。因为它与线 NE 之和等于已知的线 CK。由于 DE 与 AL 之比等于折射比，所以从 CK 中减去 EN 后，余下的部分就等于曲线 NC。

同样，在凹球面镜反射中扭弯的波也可以求得。假定 ABC 是过轴线的一个内凹半球面的某一截面，半球面的中心为 D，它的轴 DB 平行于入射光。所有这些照在四分之一圆周 AB 上的光线的反射线，都将与端点 E 是半球面焦点的曲线 AFE 相切，换句话说，该点将半径 BD 分为两个相等部分。该曲线应当通过的这些点可以通过下述方法找到。过 A 点作某一弧 AO，并作长度为其 2 倍的另一弧 OP。再在 F 点把弦 OP 分割，使得 FP 部分为 FO 部分的三倍。那么，F 即为所求的一个点。

因为平行光线仅仅是照在凹形表面上的平行于 AD 的光波的垂线，当它们顺次地传播到表面 AB 时，它们通过反射形成了扭弯的光波。这种光波由两条曲线组成，它们是曲线 AFE 在两个相反方向的渐屈线。因而，取 AD 为入射波，当 AG 部分到达表面 AI 时，即当 G 段到达 I 点时，曲线 HF 与 FI 一起构成了波 AG 部分的传播，其中曲线 HF 与 FI 分别是从 F 点出发的曲线 FA、FE 的渐屈线。此后不久，当 AK 部分到达表面 AM 时，K 段到达 M 点，曲线 LN 与 NM 将一起构成这个部分的波的传播。这种扭弯的光波将这样继续传播下去，直至 N 点到达焦点 E。用凹面镜对着太阳，可以在烟雾或者扬尘中看到曲线 AFE。应当知道，即当一个圆 EB 在另一个以 D 为中心

以 ED 为半径的圆中滚动时，不是别的，而唯有这一条曲线是 E 点在圆 EB 的圆周上画出的曲线。因而它是一种摆线，可以通过几何方法来求那些点。

与前面曲线的测定方法极为类似，利用这些波可以证明和求出，它的长度正好等于球面直径的$\frac{3}{4}$。虽然也可以使用其他一些方法，我从选题中略去了它们。由四分之一圆弧，直线 BE 和曲线 EFA 所围成的面积 AOBEFA，等于扇形 DAB 面积的四分之一。