电磁通论（下）

第一章

磁学的初等理论

371．]人们发现，某些物体，例如被称为磁石的一种铁矿石、地球本身以及经过某种处理的钢铁，具有下述的性质，并称为“磁体”。

如果一个磁体在地球表面附近除地磁极以外的任何地方被悬挂起来，使得它可以绕一个竖直轴而自由转动，则一般说来它将倾向于使自己沿着一个确定的方位，而如果从该方位上被扰动，它就将在该方位附近进行振动。一个没被磁化的物体并不具备这样的倾向，而是在任何方位上都同样处于平衡。

372．]经发现，作用在磁体上的力，倾向于使磁体中叫做“磁体轴线”的一条确定的线和空间中一条叫做“磁力的方向”的定线相平行。

让我们假设，磁体被悬挂得可以绕一个固定点而向一切方向自由转动。为了消除重力的影响，我们可以假设这个点就是它的重心。设磁体达到了一个平衡位置。在磁体上标出两个点，并记下它们在空间中的位置。然后，让磁体达到一个新的平衡位置，并注意磁体上两个标志点在空间中的位置。

既然在两个位置上磁体的轴线都和磁力的方向相重合，我们就必须找出在运动前后在空间中占据相同位置的那条线。由不变形物体的运动理论可知，这样一条线总是存在的，而和实际运动相等价的一种运动可以通过绕该线的简单转动来实现。为了求得这条线，把每一标志点的起始位置和终末位置连结起来，并作这些连线的垂直平分面。二平面的交线就将是所求的线，它指示着磁体轴线的方向和磁力在空间中的方向。上述这种方法在确定这些方向时是不方便的。当处理磁学测量时，我们还将回到这一课题上来。

经发现，在地面上的不同部分，磁力的方向是不同的，如果注意磁体轴线指向北方的一端，就会发现磁轴所沿的方向通常是从真实经线偏开一个一定的角度的，而二标志端点的整体则在北半球向下倾斜，而在南半球向上倾斜。

磁力方向从真正北方向西的偏转，叫做“磁偏角”。磁力方向和水平面之间的夹角，叫做“磁倾角”。这两个角度确定了磁力的方向，而当磁力强度也为已知时，磁力就是完全确定的了。地面不同部分的这三个要素之值的测量，它们按照观测地点和观测时间的变化方式的讨论，以及磁力及其变化的原因的考察，就构成“地磁”科学。

373．]现在让我们假设，若干个磁体的轴线已经确定，而每一磁体指向北方的一端也已标出。这时，如果其中一个磁体是自由悬挂的，而另一个磁体被带到了它的附近，那就会发现，两个标志端互相推斥，一个标志端和一个未标志端互相吸引，而两个未标志端也互相推斥。

如果磁体是长棒形或长线形的，而且是沿着纵向而均匀磁化的（参阅第 284 节），那就会发现，当一个磁体的一端和另一磁体的一端相距很近时，力就显示得最为强烈；而这种现象就可以通过一种假设来加以说明，即假设各磁体的相似端互相推斥，其不相似端互相吸引，而各磁体的中间

部分则没有显著的相互作用。

一个细长磁体的两端，通常叫做它的“极”。在沿长度均匀磁化的无限细磁体的事例中，两个端点就起着力心的作用，而磁体的其余部分则没有磁作用。在所有实际的磁体中，磁化都不是绝对地均匀，从而没有任何单个的点可以被看成磁极。然而，通过应用仔细磁化的细长棒，库仑却作到了两个相似磁极之间的力定律的建立（磁极间的媒质为空气）[①]。

二相同磁极之间的推斥力沿二极之连线，其数值等于二极强度的乘积除以极间距离的平方。

374．]这一定律，当然假设每一磁极的强度是用某种单位来量度的，该单位的大小可由定律的叙述推知。

单位磁极是一个指北的极，而且当在空气中和另一个单位磁极相距为一个单位时，它就会以单位的力推斥那个磁极，此处单位力的定义和第 6 节中的定义相同。一个指南的磁极被看成负的。

如果 m_1 和 m_2 是两个磁极的强度，l 是二者之间的距离，而 f 是推斥力，各量都以数字来表示，则有

$$f=\frac{m_1m_2}{l_2}$$

但是，如果[m]、[L]和[F]是磁极、长度和力的具体单位，则有

$$f[f]=[\frac{m}{L}]^2\frac{m_1m_2}{l^2},$$

由此即得

$$[m^2]=[L^2F]=[L^2\frac{ML}{T^2}],$$

或 $[m]=[L\frac{3}{2}T^{-1}M\frac{1}{2}]$.

因此，单位磁极的量纲就是长度的 $\frac{3}{2}$ 次方、时间的（-1）次方和质量的 $\frac{1}{2}$ 次方。这种量纲是和在第41、42节中用完全相同的方法确定的电荷静电单位的量纲相同的。

375．]这一定律的精确性，可以认为已由库仑的扭秤实验所确立，并已由高斯和韦伯的实验以及许多磁观测站的所有观测员的实验所证实。那些观测员们每天都在进行着磁学量的测量，而假如力定律是错的，他们就会得出互相矛盾的结果。这一定律也通过它和电磁现象的定律的一致性而得到了更多的支持。

376．]我们一直称之为磁极强度的这个量，也可以叫做“磁量”，如果我们除了在磁极方面观察到的那些性质以外并不给“磁”指定别的性质的话。

既然“磁量”之间的力定律和数值相同的“电量”之间的力定律具有相同的数学形式，关于磁的许多数学处理就必然和关于电的处理相类似。然而也存在磁体的另外一些性质，他们是必须牢记的和可能在物体的电学性质方面提供某些启示的。

[①] Coulomb.Mém.del'Acad.1785,p.603,并见 Biot'sTraitédePhysique,tomeiii.

一个磁体的磁极之间的关系

377．]磁体一极的磁量，和另一极的磁量等值而导号，或者，说得更普遍一些就是：

在每一个磁体中，总的磁量（代数地算起来）是零。

因此，在一个在磁体所占之空间中是均匀而平行的力场中，作用在磁体的标志端上的力，就和作用在未标志端上的力恰好相等、反向而平行，从而二力之和就是一个静力矩，它倾向于使磁体的轴线转到一个确定的方向上，但是并不会沿任何方向而推动整个的磁体。

这一点，可以很容易地通过把磁体放入一个小容器并把容器浮在水面上来加以证明。容器将转到某一方向，以便磁体轴线尽可能地和地球磁力的方向相接近，但是却不存在整个容器沿任何方向的运动，因此就并不存在北向力对南向力的超额，也不存在相反的超额。根据一个事实也可以证明，一块钢铁的磁化并不会改变它的重心，并不会在一些纬度上使重心沿着轴线向北偏移。由转动现象确定的质心是保持不变的。

378．]如果对一个细长磁体的中部进行检验，就会发现那里并不具备任何磁性。但是如何在该点把磁体打断，则会发现两段物体在断点处各有一个磁极，而且这个新磁极是和该段原有的另一磁极正好相等而相反的。不论是通过磁化，或是通过打断磁体，或是通过任何别的办法，都是不可能得到一个具有不相等的磁极的磁体的。

如果把一个细长磁体打成若干短段，我们就将得到一系列短磁体，其中每一磁体的各极都和原始长磁体的各极具有接近相同的强度。这种磁极的增多不一定是能量的增大，因为我们必须记得，由于它们的互相吸引，我们在打断磁体以后必须作功才能使各段分开。

379．]现在，让我们把磁体的各段像从前那样摆在一起。在每一个接头处，将有两个正好相等而反号的磁极互相接触着，从而它们对任一其他磁极的合作用都将为零。因此，这样重新组合起来以后，磁体就将和以前具有相同的性质，就是说，它在两端各有一极，二者相等而异号，而其二极之间的部分则不显示任何磁作用。

既然在这一事例中我们知道长磁体是由一些小的短磁体组成的，而且现象又和在未打断磁体时的情况相同，那么我们就可以认为，甚至在未被打断以前，磁体也是由一些小的粒子组成的，其中每一粒子都有两个相等而异号的极。如果我们假设所有的磁体都是由这样的粒子组成的，那就显而易见，既然每一个粒子中的磁量代数和为零，整个磁体的总磁量也必为零，或者换句话说，它的磁极将具有相等的强度和相反的种类。

“磁质”学说

380．]既然磁作用的定律和电作用的定律具有完全相同的形式，赋予电现象以单“流体”或二“流体”之作用的那些相同的理由，就可以用来论证一种或两种“磁质”的存在，它可能是也可能不是“流体”。事实上，若只在纯数学的意义下来运用，一种磁质学说是不会无法解释现象的，如果新的规律被自由地引用来说明各个实际事实的话。

这些新规律之一必须是，磁流体不能从磁体的一个分子或粒子转移到它的另一个分子或粒子，而磁化过程则只是每一粒子中两种流体在某种程度上互相分离，这就使得一种流体在粒子的一端更加集中，而另一种流体则在粒子的另一端更加集中。这就是泊松的学说。

按照这种学说，一种可磁化物体的一个粒子，和一个已绝缘的不带电荷的小导体相仿佛；按照二流体学说，这种导体含有无限而正好相等的两种电的数量。当有一个电动势作用在这个导体上时，它就造成两种电的分离，而使它们在导体的对面两侧显示出来。按照这种学说，磁化力将以相仿的方式使起初处于中和状态的两种磁质互相分开，并使它们出现在被磁化粒子的面对面的两侧。

在某些物质中，例如在软铁或其他那些不可能被永久磁化的磁性物质中，当施感力消失时，这种磁状态将像导体的起电那样随之而消失[①]。在另一些物质中，例如在硬钢中，这种磁状态不易发生，而一旦发生，它在施感力被取消时也还会存留下来。

这种情况是用下列说法来表达的：在后一事例中，存在一种"顽滞力"(Coercive Force)，它倾向于阻止磁化的改变，而要增强或减弱一个磁体的性能，必先克服这个顽滞力。在起电物体的事例中，这种顽滞力将对应于一种电阻，而这种电阻和在金属中观察到的电阻不同，它在低于某值的电动势下将和完全的绝缘相等价。

这种关于磁的学说，正如关于电的对应学说一样，显然对于事实来说是太宽松的，它需要用一些人为的条件来加以限制。因为它不仅没有给出任何理由来说明何以一个物体不会因为含有更多的两种流体而不同于另一物体，而且它还使我们能够说出含有过多的一种流体的一个物体将有什么样的性质。确实，关于这样的一个物体何以不能存在，倒是提出了一种理由的，但是这种理由只是作为一种事后的想法而被引用了来解释这一特定事实的。它并不是从这一学说中自动生长出来的。

381．]因此，我们必须寻求一种表达模式，它不会表达得太多，而且也将为由新事实发展而成的新想法的引用留下余地。我想，如果我们从认为一个磁体的粒子是"极化的"来开始，我们就将得到这样的表达模式。

"极化"一词的意义

如果一个物体的粒子具有一些和物体中某一直线或方向有关的性质，而且当物体保持着这些性质而被转动，以使这一方向反向时，如果粒子的这些性质相对于其他物体也反向，则按照这些性质来说，粒子就叫做极化的，而这些性质就叫做构成一种特定的极化。

例如，我们可以说物体绕一条轴线的转动就构成一种极化。因为，如果在转动继续进行中轴线方向被颠倒过来，则物体对空间来说将是向反方向转动的。

通有电流的一个导电粒子可以说是极化的，因为，如果把粒子倒过来，而粒子中的电流则相对于粒子来说仍沿相同的方向在流动，则电流在空间中的方向将是反了向的。

简短地说,如果任何一个数学量或物理量具有在第 11 节中定义了的那种矢量的性质，则这种有向量所属于的任何一个物体或粒子就可以被说成是"极化的"①，因为在有向量的两个方向或两个极上，它是具有相反的性质的。

例如，地球的两极是和它的转动有关的，从而各极就具有不同的名称。

"磁极化"一词的意义

[①] {参阅第 56 页的脚注。}

382．]当把一个物体的各粒子的状态说成磁极化时，我们的意思就是，一个磁体所能分成的那些最小部分中的每一个部分，都具有某些和通过粒子的一个确定方向有关的性质，该方向叫做粒子的“磁化轴”，而且，和这个轴的一端有关的那些性质，是与和另一端有关的那些性质相反的。

指定给粒子的那些性质，是和我们在整个磁体中观察到的那些性质同一种类的，而在假设各粒子具有这些性质时，我们所肯定的只是我们可以通过把磁体打成小块来证明的情况，因为我们发现其中每一小块都是一个磁体。

一个磁化粒子的性质

383．]设体积元 dxdydz 是磁体的一个粒子。让我们假设，粒子的性质就是一个磁体的性质，该磁体的正极强度是 m，而它的长度是 ds．于是，设 P 是空间中的任意点，它离正极的距离是 r 而离负极的距离是 r'，则由正极在P点引起的磁势将是 $\frac{m}{r}$，而由负极在P点引起的磁势将是 $-\frac{m}{r'}$，或者写成

$$v=\frac{m}{rr'}(r'-r) \qquad (1)$$

如果二极之间的距离 ds 很小，我们就可以令

$$r'-r=ds\cos c \qquad (2)$$

式中 c 是从磁体画到 P 点的矢量和磁体轴线之间的夹角[①]，或者，在这种极限下就有

$$v=\frac{mds}{r^2}\cos c \qquad (3)$$

磁矩

384．]均匀纵向磁化的棒形磁体的长度和它的正极强度的乘积，叫做它的“磁矩”。

磁化强度

一个磁性粒子的磁化强度，就是它的磁矩和体积之比。我们将用 I 来代表它。

磁体任一点处的磁化，可以用磁化强度和磁化方向来定义。该方向可以用它的方向余弦 λ、μ、ν 来定义。

磁化分量

磁体一点处的磁化（作为一个矢量或有向量），可以用它相对于各座标轴的三个分量表示出来。把这些分量写成 A、B、C，就有

$$A=I\lambda,\ B=I\mu,\ C=I\nu, \qquad (4)$$

而 I 的数值就由方程

$$I^2=A^2+B^2+C^2 \qquad (5)$$

来给出。

385．]如果我们所考虑的磁体部分是微分体积元 dxdydz，而 I 代表这一体积元的磁化强度，则它的磁矩是 Idxdydz。将方程(3)中的 mds 代成比式，并记得

$$r\cos c=\lambda(\xi-x)+\mu(\eta-y)+\nu(\zeta-z), \qquad (6)$$

[①] {这一轴线的正方向是从负极指向正极的。}

式中ξ、η、ζ是从点(x，y，z)画起的矢量 r 的端点座标，我们就得到由点(x，y，z)上的磁化体积元在点(ξ、η、ζ)上引起的势

$$\left\{A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)\frac{1}{r^3}dxdydz \qquad (7)\right.$$

为了求出由一个有限大小的磁体在点(ξ，η，ζ)上引起的势，我们必须对包含在磁体所占空间中的各个体积元求这个表示式的积分，或者说，

$$V = \iiint \left\{A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z)\right\}\frac{1}{r^3}dxdydz. \qquad (8)$$

分部积分，比式就变成

$$V = \iint A\frac{1}{r}dydz + \iint B\frac{1}{r}dzdx + \iint C\frac{1}{r}dxdy - \iiint \frac{1}{r}(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz})dxdydz,$$

式中前三项的双重积分是在磁体的表面上求的，而第四项的三重积分则是在表面内的空间中求的。

如果 l、m、n 代表从面积元 ds。向外画的法线的方向余弦，我们就可以像在第 21 节中那样把前三项的和式写成

$$\iint (lA + mB + mC)\frac{1}{r}ds,$$

式中的积分遍及于磁体的整个表面。

如果现在我们引用由方程组

σ=lA+mB+nC，

$$\rho = -(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz})$$

来定义的两个新符号σ和ρ，则势的表示式可以写成

$$V = \iint \frac{\sigma}{r}dS + \iiint \frac{\rho}{r}dxdydz$$

386．]这一表示式和由一个物体所引起的电势的表示式完全相同；在该物体的表面上，有一个面密度为σ的面电荷，而在它的整个体积中则有一个体密度为ρ的体电荷。因此，如果我们假设σ和ρ就是我们曾经称之为“磁质”的那种假想物质分布的面密度和体密度，由这一假想分布所引起的势就将和由磁体之每一体积元的实际磁化所引起的势完全相同。

面密度σ就是磁化强度 I 在面积的外向法线方向上的分量，而体密度ρ就是磁体中给定点上的磁化强度的“敛度”（参阅第 25 节）。

这种把一个磁体的作用表示成由一种“磁质”分布所引起的作用的方法，是很方便的，但是我们必须永远记得，这只是一种表示一组极化粒子之作用的人为方法。

关于一个磁体性粒子对另一磁性粒子的作用

387．]如果我们像在关于球谐函数的一章的第 129b 节中那样令

$$\frac{d}{dh} = l\frac{d}{dx} + m\frac{d}{dy} + n\frac{d}{dz}, \qquad (1)$$

式中 l、m、n 是轴线 h 的方向余弦，则由原点上磁轴平行于 h_1 而磁矩为 m_1 的一个磁性分子所引的势应是

$$V_1=-\frac{d}{dh_1}\frac{m_1}{r}=\frac{m_1}{r^2}\lambda_1, \qquad (2)$$

式中）λ_1 是 h_1 和 r 之间的夹角的余弦。

其次，如果在矢径 r 的端点上放上第二个磁性分子，其磁矩为 m_2 而其磁轴平行于 h_2，则由一个分子对另一个分子的作用而引起的势能将是

$$W=m_2\frac{dV_1}{dh_2}=-m_1m_2\frac{d^2}{dh_1dh_2}(\frac{1}{r}), \quad (3)$$

$$=\frac{m_1m_2}{r^3}(\mu_{12}-3\lambda_1\lambda_2), \qquad (4)$$

式中 μ_{12} 是二轴线所夹之角的余弦，而 λ_1、λ_2 是各轴线和 r 所夹之角的余弦。

其次让我们确定第一个磁体倾向于使第二个磁体绕其中心而转动的那一力偶的矩。

让我们假设，第二个磁体在垂直于某一第三个轴线 h_3 的平面内转过了一个角度 $d\Psi$，则反抗磁力所作的功将是 $\frac{dW}{d\phi}d\phi$，而作用在磁体上的各力在这一平面上的力矩将是

$$-\frac{dW}{d\phi}=-\frac{m_1m_2}{r^3}(\frac{d\mu_{12}}{d\phi}-3\lambda_1\frac{d\lambda_2}{d\phi}) \qquad (5)$$

因此，作用在第二个磁体上的实际力矩可以看成两个力偶矩之和，其中一个力偶在在平行于二磁体之轴线的平面内起作用，并以一力偶矩

$$\frac{m_1m_2}{r^3}\sin(h_1h_2) \qquad (6)$$

而倾向于使二轴线之间的夹角增大，而第二个力偶则在通过 r 和第二个磁体的轴线的平面内起作用，并倾向于使这些方向之间的夹角减小，其力偶矩是

$$\frac{3m_1m_2}{r^3}\cos(rh_1)\sin(rh_2), \qquad (7)$$

式中 (rh_1)、(rh_2)、(h_1h_2) 表示各线 r、h_1、h_2 之间的夹角[①]。

为了确定沿着平行于一条线 h 的方向而作用在第二个磁体上的力，我们必须计算

$$-\frac{dW}{dh_3}=m_1m_2\frac{d^3}{dh_1dh_2dh_3}(\frac{1}{r}), \qquad (8)$$

$$=-m_1m_2\frac{\underline{|3!}\,Y_3}{r^4}，\text{根据第129c节，}$$

---

① 如果 θ_1、θ_2 是各磁体轴线和 r 之间的夹角，Ψ 是分别包含第一个和第二个磁体的轴线及 r 的平面之间的夹角，则有 于是作用在第二个磁体上的力偶，就和两个力偶相等价，其中一个力偶的轴线是 r，而且倾向于使 ψ，增大的力偶矩 $-dW/d\psi$ 是 另一个力偶位于 r 和第二个磁体之轴线的平面内，其倾向于使 θ_2 增大的方偶矩 $-dW/d\theta_2$ 是 这些力偶是和由(6)和(7)给出的力偶相等价的。}

$$=3\frac{m_1m_2}{r^4}\left\{\lambda_1\mu_{23}+\lambda_2\mu_{31}+\lambda_3\mu_{12}-5\lambda_1\lambda_2\lambda_3\right\}\text{，根据第133节，}\quad(9)$$

$$=3\lambda_3\frac{m_1m_2}{r^4}(\mu_{12}-5\lambda_1\lambda_2)+3\mu_{13}\frac{m_1m_2}{r^4}\lambda_2+3\mu_{23}\frac{m_1m_2}{r^4}\lambda_1\quad(10)$$

如果我们假设实际的力是由三个分别沿 r、h_1 和 h_2 方向的力 R、H_1 和 H_2 合成的，则沿 h_3 方向的力是

$$\lambda_3R+\mu_{13}H_1+\mu_{23}H_2.\quad(11)$$

既然 h_3 的方向是任意的，我们就应该有

$$\left.\begin{aligned}&R=\frac{3m_1m_2}{r^4}(\mu_{12}-5\lambda_1\lambda_2,\\&H_1=\frac{3m_1m_2}{r^4}\lambda_2,H_2=\frac{3m_1m_2}{r^4}\lambda_1\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

力 R 是一个倾向于使 r 增大的推斥力；H_1 和 H_2 分别沿着第一个和第二个磁体的轴线而作用在第二个磁体上。

这种关于两个小磁体之间的作用力的分析，是由泰特教授在 1860 年 1 月份的 QuarterlyMath.Journ.上利用四元数分析而最初给出的。并请参阅他关于四元数的著作第二版的第 442—443 节。

特殊位置

388．](1)如果 λ_1 和 λ_2 各等于 1，也就是说，如果两个磁体的轴线位于同一直线上而且方向相同，则 $\mu_{12}=1$，

而二磁体之间的力是一个推斥力

$$x\,R+H_1+H_2=-\frac{6m_1m_2}{r^4}\quad(13)$$

负号表示它实际上是一个吸引力。

(2)如果 λ_1 和 λ_2 是零，而 μ_{12} 是 1，则二磁体的轴线互相平行而垂直于 r，而力则是一个推斥力

$$\frac{3m_1m_2}{r^4}.\quad(14)$$

在这两种事例中，任何力偶都是不存在的。

(3)如果 $\lambda_1=1$ 而 $\lambda_2=0$ 则 $\mu_{12}=0$　(15)

作用在第二个磁体上的力将是 $\frac{3m_1m_2}{r^4}$，沿着它的轴线的方向；力矩将是 $\frac{2m_1m_2}{r^4}$，并倾向于把它转得和第一个磁体相平行。这就和单独一个力 $\frac{3m_1m_2}{r^3}$ 相等价，该力沿着平行于第二个磁体轴线的方向而起作用，并和 r 相交于从 m_2 算起的 2/3 的长度处[①]。

[①] {在事例(3)中，第一磁体叫做“正指”第二磁体，而第二磁体则为“侧向”第一磁体。我们很容易利用公式(6)和(7)证明，假如第一磁体是“侧向”第二磁体的，则作用在第二磁体上的力偶将是 m1m2/r3。因此，当致偏磁体“正指”时，力偶将是当它为“侧向”时的二倍。高斯曾经证明，假如力定律是和极间距离的 p 次方成反比的，则致偏磁体为“正指”时的力偶将是它为“侧向”时的 p 倍。通过比较这些情况下的力

图 1

例如，在图 1 中，两个磁体被浮在水面上，m_2 位于 m_1 的轴线方向上，但是它自己的轴线却垂直于 m_2 的轴线。如果把两个分别和 m_1 及 m_1 刚性连接着的点 A、B 用一个弹簧 T 连接起来，则体系将处于平衡，如果 T 和直线 m_1m_2 在从 m_1 到 m_2 的 1/3 距离处垂直相交的话。

(4)如果我们让第二个磁体绕着它的中心而自由转动,直到它达到一个稳定平衡位置时为止，则 W 对 h_2 而言将是一个极小值，从而由 m_2 引起的沿 h_1 方向的分力将是一个极大值。因此，如果我们希望利用中心位置给定的一些磁体来在给定点上沿给定方向产生尽可能大的磁力，则为了确定这些磁体的轴线的适当方向来产生这一效应，我们只须把一个磁体沿着给定的方向而放在给定点上，并观察当第二个磁体的中心位于另一给定点上时它的轴线的稳定平衡方向。于是，各磁体就必须摆得使它们的轴线沿着第二个磁体的轴线所指示的那些方向了。

图 2

设第二个磁体位于一个对它的方向而言为稳定的平衡位置上，那么，既然作用在它上面的力偶为零，第二个磁体的轴线就必然和第一个磁体的轴线位于同一平面上。由此就有

$$(h_1h_2)=(h_1r)+(rh_2)，(16)$$

而既然力偶是

$$\frac{m_1m_2}{r^3}(\sin(h_1h_2)-3\cos(h_1r)\sin(rh_2), \qquad (17)$$

则当此力偶为零时我们就有

$$\tan(h_1r)=2\tan(rh_2)，(18)$$

或者写作 $\tan H_1m_2R = 2\tan Rm'_2H_2$． （19）

当这一位置已经被第二个磁体所占据时，W 的值就变成

$$m_2\frac{dV_1}{dh_2},$$

式中 h_2 是由 m_2 在 m_2 处引起的力线的方向。由此即得

$$W=-m_2\sqrt{\frac{dV_1}{dx}^2+\frac{dV_1}{dy}^2+\frac{dV_1}{dz}^2} \qquad (20)$$

因此，第二个磁体将倾向于向着合力更大的地方运动。

作用在第二个磁体上的力，可以分解成力 R 和力 H_1，在这一事例中，R 永远是指向第一磁体的一个吸引力；力 H_1 是平行第一磁体的轴线的。我们有

$$R=3\frac{m_1m_2}{r^3}\frac{4\lambda_1^2}{\sqrt{3\lambda_1{}^2+1}}, H_1=3\frac{m_1m_2}{r^4}\frac{\lambda_1}{\sqrt{3\lambda_1{}^2+1}} \qquad (21)$$

偶，我们可以比利用扭秤更精确地检证平方反比定律。}

在本卷后面所附的图版十四中，画出了二维空间中的力线和等势面。引起这些力线和等势面的磁体被假设为两个长的圆棒，其截面由图中的两个空白圆面积来代表；这些圆棒是沿着箭头的方向而横向磁化的。

如果我们记得沿着力线是有一种张力的，那就很容易看到，每一个磁体都将倾向于按顺时针的方向而转动。

作为一个整体，位于右方的那个磁体也将倾向于向纸面上方运动，而位于左方的那个磁体则将倾向于向纸面下方运动。

放在磁场中的一个磁体的势能

389．]设 V 是由对所考虑的那个磁体起着作用的任一磁体系引起的磁势。我们将把 V 叫做外磁力的势。如果有一个强度为 m 而长度为 ds 的小磁体被摆得正极位于势为 V 的一点而负极位于势为 V'的一点，则这个磁体的势能将是 m(V-V')，或者，如果 ds 是从负极向正极测量的，则势能是

$$m\frac{dV}{ds}ds \qquad (1)$$

如果 I 是极化强度，而λ、μ、ν是它的方向余弦，我们就可以写出 mds=Idxdydz，

和 $$\frac{dV}{ds}=\lambda\frac{dV}{dx}+\mu\frac{dV}{dy}+v\frac{dV}{dz},$$

最后，如果 A、B、C 是极化分量，就有

A=λI，B=μI，C=vI，

于是磁体元的势能表示式(1)就变成

$$(A\frac{dV}{dx}+B\frac{dV}{dy}+C\frac{dV}{dz})dxdydz \qquad (2)$$

为了求出一个有限大小的磁体的势能，我们必须针对每一个磁体元求这一表示式的积分。于是我们就得到

$$W=\iiint(A\frac{dV}{dx}+B\frac{dV}{dy}+C\frac{dV}{dz})dxdydz \qquad (3)$$

这就是磁体相对于它所在的磁场而言的势能的值。

在这儿，势能是用磁化分量和由外因引起的磁力的分量表示出来的。

通过分部积分，我们可以用磁质的分布和磁势来表示它，于是就有

$$W=\iint(Al+Bm+Cn)VdS-\iiint V(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz})dxdydz, \qquad (4)$$

式中 l、m、n 是面积元 dS 上的法线的方向余弦。如果我们把在第 365 节中给出的磁质的面密度和体密度的表示式代入这一方程中，则势能表示式变为

$$W=\iint V\sigma dS+\iiint V\rho dxdydz \qquad (5)$$

我们可以把(3)式写成

$$W=-\iiint(A\alpha+B\beta+C\gamma)dxdydz, \qquad (6)$$

式中α、β和γ是外磁力的分量。

论一个磁体的磁矩和轴线

390．〕如果外磁场在磁体所占据的空间中到处都在方向和大小上是均匀的，则各分量α、β、γ将是常量，而如果我们写出

$$\iiint Adxdydz=lK，\iiint Bdxdydz=mK，\iiint Cdxdydz=nK，(7)$$

式中的积分遍及磁体的全部物质，则 W 的值可以写成

W=-K(lα+mβ+nγ)。　　　　　　　　　　　　(8)

在这一表示式中，l、m、n 是磁体轴线的方向余弦，而 K 是磁体的磁矩。如果■是磁体轴线和磁力■的方向所夹的角，则 W 的值可以写成

W=-K■cosc。(9)

如果磁体是悬挂着并可以绕着一条竖直轴线而转动的，就如在一个普通指南针的事例中那样，那就可以用φ来表示磁体轴线的方位角，而用θ来表示轴线对水平面的倾角。设地磁力的方向有一个方位角δ和一个倾角ξ，则有

α=■cosζcosδ，β=■cosζsinδ，γ=■sinζ(10)

l=cosθcosφ，m=cosθsinφ，n＝sinθ；(11)

由此即得 W=-K■{cosζcosθcos(φ-δ)+sinζsinθ}。(12)

倾向于使磁体绕竖直轴线转动而增大其φ角的力矩是

$$-\frac{dW}{d\phi} = -K■\cos\zeta\cos\theta\sin(\phi-\delta)。\qquad (13)$$

磁体的势的体谐函数展式

391.〕设 V 是由位于点(ξ，η，ζ)上的一个单位磁极所引起的势。在点(x，y，z)上，V 的值是

$$V=\{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

这一表示式可以按中心位于座标原点上的球谐函数展开。于是我们就有

$V=V_0+V_1+V_2+\cdots$。(2)

式中 $V=\frac{1}{r}$，r是从原点到点（ξ，η，ζ）的距离。　　(3)

$$V_1=\frac{\xi x+\eta y+\zeta z}{r^3}, \qquad (4)$$

$$V_2=\frac{3(\xi x+\eta y+z\zeta)^2-(x^2+y^2+z^2)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{2r^5},\cdots \qquad (5)$$

为了确定当磁体位于用这个势来表示的力场中时的势能值，我们必须在第 389 节方程(3)的 W 表示式中对 x，y，z 求积分而把ξ，η，ζ和 r 看成常量。

如果我们只考虑由 V_0、V_1和 V_2所引入的各项，则结果将依赖于下列这些体积分，

$$lK=\iiint Adxdydz，mK=\iiint Bdxdydz，nK＝\iiint Cdxdydz；(6)$$

$$L=\iiint Axdxdydz，M=\iiint Bydxdydz，N=\iiint Czdxdydz；(7)$$

$$P=\iiint(Bz+Cy)dxdydz，Q=\iiint(Cx+Az)dxdydz，$$

$$R=\iiint(Ay+Bx)dxdydz \qquad (8)$$

于是我们就得到一个磁体受到位于点(ξ，η，ζ)上的单位磁极的作用时的势能的值

$$W = K\frac{l\xi + m\eta + n\zeta}{r_3}$$
$$+ \xi^2(2L - M - N) + \eta^2(2M - N - L)$$
$$+ \zeta^2(2N - L - M) + 3(P\eta\zeta + Q\zeta\xi + R\zeta n) + \cdots (9)$$

这一表示式也可以看成一个单位磁极受到一个磁体的作用时的势能，或者简单地看成磁体在点(ξ，η，ζ)上引起的势。

一个磁体的中心及其主轴线和副轴线

392.〕这一表示式可以通过改变座标轴的方向和座标原点的位置来加以简化。首先，我们将使 x 轴的方向平

行于磁体的轴线。这就等于令

$l=1$，$m=0$，$n=0$。(10)

如果我们保持各轴的方向不变而把座标原点移到点(x'，y'，z')上，则各体积分 lK、mK 和 nK 将保持不变，而其他的积分则将变化如下：

$L'=L-lKx'$，$M'=M-mKy'$，$N'=N-nKz'$；(11)

$P'=P-K(mz'+ny')$，$Q'=Q-K(nx'+lz')$，$R'=R-K(ly'+mx')$。(12)

现在，如果我们令 x 轴平行于磁体轴线，并令

$$x' = \frac{2L - M - N}{2K}，y' = \frac{R}{K}，z' = \frac{Q}{K}， \qquad (13)$$

则对于新座标轴来说，M和N的值都保持不变在而L'的值则变成

$\frac{1}{2}(M + N)$。P保持不变，而Q和R则变为零。因此我们就可以把势写成

$$k\frac{\xi}{r^3} + \frac{\frac{3}{2}(\eta^2 - \zeta^2)(M - N) + 3P\eta\zeta}{r^5} + \cdots \qquad (14)$$

于是我们就找到了一个相对于磁体为固定的点，而当取这个点作为座标原点时，势函数的第二项将取最简单的形式。因此我们就把这个点定义为磁体的中心，而通过中心沿着以前称之为磁体轴线的那个方向画出的轴，则可以定义为磁体的主轴。

通过使 y 轴和 z 轴绕着 x 轴而转过一个角度，该角度等于其正切为

$\frac{P}{M - N}$的那个角度的二分之一，我们就可以进一步简化结果。这将使P变为零，而势函数的最后形式就可以写成

$$k\frac{\xi}{r^3} + \frac{3}{2}\frac{(\eta^2 - \zeta^2)(M - N)}{r^5} + \cdots \qquad (15)$$

这就是一个磁体的势函数中头两项的最简单形式。当 y 轴和 z 轴取这种位置时，它们就可以叫做磁体的副轴。

我们也可以通过找到座标原点的一个位置来确定磁体的中心，对于那个位置来说，在一个单位半径的球面上求出的势函数第二项的平方的面积分是一个极小值。

按照第 141 节，必须取极小值的那个量就是

$4(L^2+M^2+N^2-MN-NL-LM)+3(P^2+Q^2+R^2)$。(16)

由于原点位置的改变而引起的这个量的值的改变，可以由方程(11)和(12)推出。因此极小值的条件就是

$$\left.\begin{aligned}2l(2L-M-N)+3nQ+3mR=0\\2m(2M-N-L)+3lR+3nP=0\\2n(2N-L-M)+3mP+3tQ=0\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

如果我们令 l=1，m=0，n=0，这些条件就变成

2L-M-N=0，Q=0，R=0，(18)

这就是在前面的探讨中利用了的条件。

这种探讨可以和把由一个有重物质体系引起的势展开的那种探讨相对比。在后一事例中，最适宜取作原点的一点就是体系的重心，而最方便的座标轴就是通过该点的几个惯量主轴。在磁体的事例中，和重心相对应的一点位于磁轴上的无限远处，而我们称之为磁体中心的那个点是和重心性质不同的一个点。量 L、M、N 对应于一个物质体的惯量矩，而 P、Q、R 则对应于惯量积，只不过 L、M 和 N 不一定是正量。

当把磁体的中心取作原点时，第二阶球谐函数具有瓣谐形式，其轴线和磁体轴线相重合，而这一情况对于任何其他的点都是不成立的。

当磁体在这一轴线的所有各侧都为对称时，例如在一个旋成图形的事例中，包括二阶谐函数的那一项就根本不出现。

393.〕在地球表面的所有各部分，除了两极附近的某些部分以外，一个磁体的一端总是指向北方，或者说至少是指向偏北的方向的，而其另一端则总是指向偏南的方向的。在谈到磁体的各端时，我们将采用流行的办法，即指北的一端叫做磁体的北端，而把指南的一端叫做它的南端。然而，当我们用磁质学说的语言来叙述问题时，我们将利用“玄武”(Boreal)和“朱雀”(Austral)二词。玄磁性是一种假想的物质，被假设为在地球的北半部最为丰富；而朱磁性则是在地球的南半部更丰富的那种假想磁质。一个磁体的北端的磁性是朱磁性，而其南端的磁性是玄磁性。因此，当我们谈到一个磁体的北端和南端时，我们并不是把那个磁体和看成一个大磁体的地球相比拟，而只是表达当磁体可以自由活动时它所力图采取的位置而已。另一方面，当我们想要比较假想的磁流体在磁体中和在地球中的分布时，我们就将利用“玄磁性”和“朱磁性”这些更加夸饰的名词。

394.〕在谈到一个磁力场时，我们将用“磁北方”一词来表示当一个磁针被放在力场中时它的北端所指的方向。

在谈到磁力线时，我们将永远假设它是从磁南方画向磁北方的，而且我们将把这一方向称为正方向。同样，一个磁体的磁化方向，用从磁体的南端画向北端的一条线来表示，而磁体指北的一端被算作正端。

我们将把朱磁性即磁体指北的一端上的磁性叫做正磁性。如果我们用 m 来代表它的数值，则磁势是

$$V=\sum\left(\frac{m}{r}\right),$$

而磁力的正方向就是 V 减小的方向。

第二章

磁力和磁感

395．〕我们已经确定了由一个磁体在一个给定点上引起的磁势（第385 节），该磁体的磁化在它的物质的每一点上都是已给定的。我们已经指明，数学结果可以用磁体中每一个体积元的实际磁化表示出来，或是用一种假想的“磁质”分布表示出来；那种磁质的一部分集中在磁体的表面上，而其另一部分则散布在它的整个体积中。

这样定义的磁势，不论所给之点是在磁体之外或之内，都是用相同的数学过程来求出的。作用在位于磁体之外任一点上的一个单位磁极上的力，像在对应的电学问题中一样用相同的微分过程来从势函数求出。如果这个力的分量是 α、β、γ，则有

$$\alpha=-\frac{dV}{dx},\quad \beta=-\frac{dV}{dy},\quad \gamma=-\frac{dV}{dz} \qquad (1)$$

为了用实验来测定磁体内部一点上的磁力，我们首先必须把一部分磁化了的物质弄走，以形成一个空腔，而在这个空腔中我们将放进〔测量用的〕磁极。一般说来，作用在磁极上的力将依赖于这一空腔的形状，并依赖于各个腔壁和磁化方向所成的角。因此，在谈到磁体内部的磁力时，为了避免混淆，就有必要指定测量磁力时所在的空腔的形状和位置。很明显，当空腔的形状和位置已经指定时，空腔中放上磁极的那个点就必须被认为不再是位于磁体物质之内的，从而测定力的普通方法也就立刻成为可用的了。

396．〕现在让我们考虑一个磁体的一部分，假设在磁体内部磁化的方向和强度都是均匀的。在磁体的这一部分中，设有一个柱状空腔被挖出，空腔的轴线平行于磁化的方向。另外，设有一个单位强度的磁极被放在了轴线的中点上。既然这一柱体的母线是沿着磁化方向的，在弯曲的柱面上就不会有磁质的表面分布，而既然柱体的圆形端面是垂直于磁化方向的，那里就会有一种均匀的表面分布，其面密度在负端为 I 而在正端为-I。

设柱体轴线的长度为 2b，而柱体的半径为 a，于是由表面分布引起的作用在位于轴线中点上的一个磁极上的力，就是来自正端圆盘的吸引力和来自负端圆盘的推斥力。这两个力是相等而同向的，而其合力就是

$$R=4\pi I\left(1-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \qquad (2)$$

由这一表示式可以看出，力并不依赖于空腔的绝对尺寸而是依赖于柱体的长度和直径之比。因此，不论我们把空腔弄得多小，由腔壁上的表面分布所引起的力一般都将保持为有限。

397．〕迄今为止，我们一直假设在挖出空腔的那一磁体部分中磁化是均匀的和到处方向相同的。当磁化并不是如此限定时，一般说来就有假想磁质的一种分布存在于整个磁体的物质中。柱体的挖除将带走这种分布的一个部分。但是，既然相似图形中各对应点上的力正比于图形的线度，由磁质体密度而来的作用在磁极上的力的改变量〔即由挖出空腔而造成的改变量〕，就将随着空腔尺寸的减小而无限地减小，而由腔壁上的面密度引起的效应则一般将会保持有限。

因此，如果我们假设柱体的尺寸足够小，以致被挖走的部分的磁化可以看成到处都平行于柱体轴线并具有常值大小 I，则作用在位于柱状空腔的轴线中点上的一个磁极上的力将由两个力合成。其中第一个力就是由磁体外表面上的磁质分布以及除所挖空腔以外整个磁体内部的磁质分布所引起的力。这个力的分量，就是按照方程(1)而由势函数导出的α、β和γ。第二个力就是沿着柱体的轴线而作用的力 R，其方向是磁化的方向。这个力的值依赖于柱状空腔的长度和直径之比。

398．〕事例Ⅰ．设这一比值很大，或者说，设柱体的的直径比它的长度小得多。把R的表示式按 $\frac{a}{b}$ 的幂次展开，我们就有

$$R = 4\pi I\left\{\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2} - \frac{3}{8}\frac{a^4}{b^4} + \cdots\right\}, \qquad (3)$$

这是当令 b 和 a 之比趋于无限大时就会变为零的一个量。因此，当空腔是轴线平行于磁化方向的一个很细的柱体时，空腔中的磁力就不会受到柱体两端的表面分布的影响，从而这个力的分量就简单地是α、β、γ而此处

$$\alpha = -\frac{dV}{dx}, \quad \beta = -\frac{dV}{dy}, \quad \gamma = -\frac{dV}{dz}, \qquad (4)$$

我们将把这种形状的空腔中的力定义为磁体内部的磁力。威廉·汤姆孙爵士曾把这种定义称为磁力的“极定义”(Polardefini-tion)。当我们有机会把这个力看成一个矢量时，我们将用■来代表它。

399．〕事例Ⅱ．设柱体的长度比它的直径小得多，以致柱体变成一个很薄的圆盘。把R的表示式按 $\frac{b}{a}$ 的幂次展开，它就变成

$$R = 4\pi I\left\{1 - \frac{b}{a} + \frac{1}{2}\frac{b^3}{a^3} - \cdots\right\} \qquad (5)$$

当把 a 和 b 的比值取为无限大时，这个表示式的最终值就是 4πI。

因此，当空腔的形状是其平面垂直于磁化方向的一个薄圆盘时，放在轴线中点上的一个单位磁极就受到起源于盘子的圆形表面上的表面磁性的一个沿磁化方向的力 4πI[①]。

既然 I 的分量是 A、B 和 C，这个力的分量就是 4πA、4πB 和 4πC。这个力必须和分量为α、β、γ的那个力合成在一起。

400．〕设用矢量■代表作用在单位磁极上的实际力，用 a、b 和 c 代表它的分量，则有

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A, \\ b &= \beta + 4\pi B, \\ c &= y + 4\pi C, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

[①] 关于其他形状的空腔中的力。1．任意窄缝——起源于表面磁化的力是 4πIcos，并着裂缝平面的法线方向∈此处∈是该法线和磁化方向之间的夹角。当裂缝平行于磁化方向时，力就是磁力■；当裂缝垂直于磁化方向时，力就是磁感■。2．在其轴线和磁化方向成一角度∈的一个无限拉长的柱体中，由表面磁性引起的力是 2πIsin∈，并在包含轴线和磁化方向的平面内垂直于轴线。　向。

我们将把其平面垂直于磁化方向的一个中空圆盘中的力定义为磁体中的“磁感”。威廉·汤姆孙爵士曾把这一定义叫做磁力的“电磁定义”。

磁化$\Im$、磁力■和磁感■这三个矢量，是用矢量方程

$$\blacksquare = \blacksquare + 4\pi\blacksquare \qquad (7)$$

来互相联系的。

磁力的线积分

401.〕既然在第 398 节中定义的磁力是由磁体的表面上的和整个体积中的自由磁质引起的，而且是不受空腔之表面磁质的影响的，它就可以由磁体之势的普遍表示式直接推得，而从点 A 到点 B 沿任意曲线计算的磁力的线积分就是

$$\int_A^B \left(a\frac{dx}{ds}+\beta\frac{dy}{ds}+\gamma\frac{dz}{ds}\right)ds = V_A - V_B, \qquad (8)$$

式中 V_A 和 V_B 分别代表 A 点和 B 点的势。

磁感的面积分

402.〕通过曲面 S 的磁感〔通量〕，定义为下列积分的值：

$$Q = \iint \blacksquare \cos c dS, \qquad (9)$$

式中■代表面积元 dS 上的磁感的量值，c 代表磁感方向和面积元法线之间的夹角，而积分应遍及整个的曲面，该曲面可以是闭合的，也可以是以一条闭合曲线为其边界的。

如果 a、b、c 代表磁感的分量，而 l、m、n 代表法线的方向余弦，则面积分可以写成

$$Q = \iint (la + mb + nc) dS \qquad (10)$$

如果把磁感的各个分量代换成第 400 节中给出的用磁力分量和磁化分量表示出来的那些值，我们就得到

$$Q = \iint (l a + m\beta + n\gamma) dS + 4\pi \iint (lA + mB + nC) dS \qquad (11)$$

现在我们将假设求积分时所在的曲面是一个闭合曲面，并考察等式右端两项的值。

既然磁力和自由磁质之间的关系与电力和自由电荷之间的关系具有相同的数学形式,我们就可以把在第 77 节中给出的结果应用于 Q 值中的第一项。为此，我们用磁力分量α、β、γ来代替在第 77 节中给出的电力分量 X、Y、Z，并用闭合曲面中自由磁质的代数和 M 来代替自由电荷的代数和 e。

于是我们就得到一个方程

$$\iint (l\alpha + m\beta + n\gamma) dS = 4\pi M \qquad (12)$$

既然每一个磁粒子都有两个数值相等而符号相反的极，粒子的磁质的代数和就是零。因此，完全位于闭合曲面 S 之内的那些粒子就不会对 S 内的磁质代数和有任何贡献。因此 M 的值就只依赖于被曲面 S 所交截的那些磁粒子。

试考虑磁体的一个体积元，设其长度为 s，截面积为 k^2，并沿着它的长度而被磁化，使得它的磁极强度为 m。这一体积元的磁矩将是 ms，而既然磁化强度 I 等于磁矩和体积之比，我们就有

$$I = \frac{m}{k^2} \qquad (13)$$

设这个小磁体被曲面 S 所交截，而其磁化方向和曲面之外向法线的夹角为，则有

$$k^2 = dScosc' \qquad (14)$$

此处 dS 代表交截面积。这一磁体的负极-m 位于曲面 S 内部。因此，如果我们用 dM 来代表这一小磁体对 S 内部自由磁质的那一部分贡献，就有

dM=-m=-Ik²，

=-Icosc'dS。(15)

为了求出闭合曲面 S 内部自由磁质的代数和 M，我们必须在该闭合曲面上求这一表示式的积分，于是就有

$$M = -\iint Icosc'dS，$$

或者，用 A、B、C 代表磁化分量，用 l、m、n 代表外向法线的方向余弦，就得到

$$M = -\iint（lA + mB + nC）dS \qquad (16)$$

这就给出了方程(11)右端第二项中的积分的值。因此，该方程中的 Q 的值就可以由方程(12)和(16)求出，

Q=4πM-4πM=0，(17)

或者说，通过任一闭合曲面的磁感的面积分都是零。

403.〕如果把微分体积元 dxdydz 的表面取成所涉及的闭合曲面，我们就得到一个方程

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0 \qquad (18)$$

这就是磁感分量永远满足的管状条件。

既然磁感的分布是管状的，通过以一条闭合曲线为边的任意曲面的磁感就只依赖于曲线的形状和位置，而不依赖于曲面本身的形状和位置。

404.〕每一点都满足条件

la+mb+nc=0(19)

的曲面，叫做无磁感面，而两个这种曲面的交线叫做无磁感曲线。因此，一条曲线 s 可以是无磁感曲线的条件就是

$$\frac{1}{a}\frac{dx}{ds} = \frac{1}{b}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{c}\frac{= dz}{ds} \qquad (20)$$

通过一条闭合曲线上每一点的一族磁感线，形成一个管状的曲面，叫做一个“磁感管”。

通过一个管子的任一截面的磁感都是相同的。如果磁感为 1，则此管叫做“单位磁感管”。

如果按照磁感线和磁感管来理解,则法拉第[①]关于磁力线和磁力管的一切议论都是数学地正确的。

磁力和磁感在磁体外面是等同的，但是在磁体物质的内部，他们却必须仔细地加以区分。

在一个均匀磁化的直棒磁体中，由磁体本身引起的磁力在磁体内部和外面的空间中都是从我们称之为正极的指北极到负极即指南极的。

另一方面，磁感却在磁体外面从正极到负极，而在磁体内部从负极到

[①] Exp.Res.seriesxxviii.

正极，从而磁感线和磁感管都是一些回头的或循环的图形。磁感作为一个物理量的重要性，我们当学到电磁现象时就会更清楚地看出。当磁场是用一条运动导线来加以探测，就如在法拉第的 Exp. Res. 3076 中那样时，直接被测的就是磁感而不是磁力。

磁感的矢势

405.〕既然正如我们已经在第 403 节中指明了的那样，通过以一条闭合曲线为边的曲面的磁感是依赖于该闭合曲线而不依赖于闭合曲线所限定的曲面的，那就必然能够利用一种只依赖于该曲线而不涉及形成曲线之罩膜的一个曲面之画法的过程，来确定通过闭合曲线的磁感。

这一点可以通过求出和磁感■相联系着的一个矢量■来达成，这时■沿闭合曲线的线积分应该等于■在以闭合曲线为边的一个曲面上的面积分。

如果在第 24 节中把 F、G、H 看成■的分量而把 a、b、c 看成■的分量，我们就得到这些分量之间的关系式

$$a=\frac{dh}{dy}-\frac{dG}{dz},b=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx},c=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy} \qquad (21)$$

其分量为 F、G、H 的矢量■，叫做磁感的矢势。

如果有一个磁矩为 m 而其磁化轴线的方向为(λ，μ，ν)的磁分子位于座标原点上，则由第 387 节可知，距原点为 r 的一个点(x，y，z)上的势是

$$-m(\lambda\frac{d}{dx}+\mu\frac{d}{dy}+v\frac{d}{z})\frac{1}{r};$$

$$\therefore c=m(\lambda\frac{d^2}{dxdz}+\mu\frac{d^2}{dydz}+v\frac{d^2}{dz^2})\frac{1}{r},$$

利用拉普拉斯方程，此式可以写成

$$m\frac{d}{dx}(\lambda\frac{d}{dz}-v\frac{d}{dx})\frac{1}{r}-m\frac{d}{dy}(v\frac{d}{dy}-\mu\frac{d}{dz})\frac{1}{r}$$

a、b 各量也可以按同样方式来处理。

由此即得

$$F=m(v\frac{d}{dy}-\mu\frac{d}{dz})\frac{1}{r},$$

$$=\frac{m(\mu z-)}{r^3}$$

利用对称性，由此式也可求出 G 和 H。于是我们就看到，由一个位于原点上的磁化粒子在一个给定点上引起的矢势，在数值上等于粒子的磁矩除以矢径的平方并乘以磁化轴线和矢径之夹角的正弦，而矢势的方向则垂直于磁化轴线和矢径的平面，而且对于一个沿磁化轴线的正方向看过去的眼睛来说，矢径是沿着顺时针的方向画出的。

由此可见，对于任意形状的磁体来说，若在点(x，y，z)处的磁化分量是 A、B、C，则点(ξ，η，ζ)上的矢势分量是

$$\left.\begin{aligned}F&=\iiint(B\frac{dp}{dz}-C\frac{dp}{dy})dxdydz,\\G&=\iiint(C\frac{dp}{dx}-A\frac{dp}{dz})dxdydz,\\H&=\iiint(A\frac{dp}{dy}-C\frac{dp}{dx})dxdydz,\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

式中为了方便，用 p 代表了点(ξ，η，ζ)和点(x，y，z)之间的距离的倒数，而积分则遍及于磁体所占的空间。

406.〕第 385 节中磁力的标势或普通的势，当用同样的符号表示出来时就是

$$V=\iiint(A\frac{dp}{dx}+B\frac{dp}{dy}+C\frac{dp}{dz})dxdydz\qquad(23)$$

记得 $\frac{dp}{dx}=-\frac{dp}{d\xi}$ 并记得积分

$$\iiint A(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2})dxdxdydz$$

当点(ξ，η，ζ)位于积分域内时的值是-4π(A)，而当它不位于积分域内时的值是零，此处(A)是 A 在点(ξ，η，ζ)上的值，我们就得到磁感之 x 分量的表示式如下：

$$\begin{aligned}a&=\frac{dH}{d\eta}-\frac{dG}{d\zeta}\\&=\iiint\left\{A(\frac{d^2p}{dyd\eta}+\frac{d^2p}{dzd\zeta})-B\frac{d^2p}{dxd\eta}-C\frac{d^2p}{dxd\zeta}\right\}dxdydz\\&=-\frac{d}{d\xi}\iiint\left\{A\frac{dp}{dx}+B\frac{dp}{dy}+C\frac{dp}{dz}\right\}dxdydz\\&-\iiint A(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2})dxdydz\end{aligned}\qquad(24)$$

比式的第一项，显然就是 $-\frac{dV}{d\xi}$，或者说是磁力的分量α。

第二项中的被积分式对每一体积元都为零，只有包含点(ξ，η，ζ)的体积元例外。如果 A 在点(ξ，η，ζ)上的值是(A)，则很容易证明第二项的值是 4π(A)，此处(A)在磁体外面的所有各点上显然都是零

现在我们可以把磁感的 x 分量写成

α=α+4π(A)，(25)

这是和第 400 节中给出的那些方程的第一个方程相等同的一个方程。关于 b 和 c 的方程也将和第 400 节中的方程相一致。我们已经看到，磁力■是通过哈密顿算符▽的应用而从标量磁势 V 推出的，从而我们可以像在第 17 节中一样地写出

$$■=-\nabla V,\qquad(26)$$

而且这个方程是在磁体之外或之内都成立的。

由现在的考察可以看出，磁感■是通过同一算符的应用而从矢势■导

出的，而且结果是在磁体之内和之外都能成立的。

这一算符对一个矢量函数的应用，通常将给出一个标量和一个矢量。然而，我们曾称之为矢量函数之敛度的那个标量部分，当矢量函数满足管状条件

$$\frac{dF}{d\xi}+\frac{dG}{d\eta}+\frac{dH}{d\zeta}=0 \qquad (27)$$

时将等于零。通过求方程组(22)中 F、G、H 的表示式的导数，我们发现各该量是满足这一条件的。

因此我们可以写出磁感和它的矢势之间的关系式

■=▽■，

这可以用文字表示出来，即磁感等于矢势的旋度。参阅第 25 节。

第三章

磁管和磁壳
论特殊形式的磁体

407.〕如果形如导线的一种磁性物质的细长丝到处沿纵向而被磁化，则细丝的任一截面和该截面上平均磁化强度的乘积，叫做磁体在该截面上的强度。如果细丝在截面处被切成两段而不改变其磁化，则两个表面在分开以后将被发现具有相等而异号的表面磁量，其中每一磁量都在数值上等于磁体在该截面处的强度。

一条磁性物质细丝，如果磁化得在每一截面上都具有相同强度而不论截面取在沿轴线的何处，就叫做一条“磁管”。如果 m 是磁管的强度，ds 是它的一个长度元，而 s 是从磁体的负极向正极测量的，设 r 是这一长度元到一个给定点的距离，而 c 是 r 和长度元的磁化轴线之间的夹角，则由这一长度元在所给点上引起的势是

$$\frac{m ds \cos c}{r^2} = -\frac{m dr}{r^2 ds} ds$$

把这一表示式对 s 求积分，以照顾到磁管的所有各长度元，就得到磁管的势函数

$$V = m(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r^2}),$$

式中 r_1 是磁管的正极到测量磁势所在之点的距离，而 r_2 是磁管的负极到该点的距离。

因此，由一条磁管引起的势，从而还有它的一切磁效应，都只依赖于磁管的强度及其两个端点的位置，而完全不依赖于它在二点之间的形状，不依赖于它是直的还是弯的。

因此，一条磁管的两个端点，就可以在一种直接的意义下被称为它的两个极。

如果磁管形成一条闭合的曲线，则由它引起的势在每一点上都为零，因此这样一条磁管不能产生任何的磁作用，而且，不在某一点上把它切断并将断点分开，它的磁化也就不可能被发现。如果一个磁体可以划分为若干磁管，而且各磁管不是形成闭合曲线就是在磁体的外表面上有其端点，则磁体的磁化叫做管状的，而且，既然磁体的作用完全取决于各磁管端点的作用，假想磁质的分布就将是完全的面分布。

因此，磁化为管状的条件就是

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dz} = 0,$$

式中 A、B、C 是磁体任一点上的磁化分量。

408.〕一条纵向磁化的、其强度沿长度而变化的细丝，可以设想为由一束不同长度的磁管构成，所有通过一个给定截面的磁管的强度之和，就是细丝在该截面上的磁性强度。因此，任何一条纵向磁化的丝，可以叫做

[①] 见 SirW.Thnomson's‘MathematicalTheoryofMagnetism,’Phil.Trans.,June1849 和 June1850,或 ReprintofPapersonElectrostaticsandMagnetism,p.340.

一条“复杂磁管”。

如果一条复杂磁管在任一截面上的强度是 m，则由它的作用而引起的势

$$V=-\int\frac{m}{r^2}\frac{dr}{ds}ds$$ 式中m为变量

$$=\frac{m_1}{r_1}-\frac{m_2}{r_2}-\int\frac{1}{r}\frac{dm}{ds}ds$$

这就表明，除了在这一事例中强度可以不相等的二端点的作用以外，还存在一种由假想磁质沿丝长的分布所引起的作用，而这种分布的线密度是

$$\lambda=-\frac{dm}{ds}$$

磁壳

409.〕如果磁性物质的一个薄壳是沿着到处和表面相垂直的方向而被磁化的，则任一点上的磁化强度乘以

该点的薄壳厚度，就叫做磁壳在该点的“强度”。

如果一个磁壳的强度到处相同，它就叫做一个“简单磁壳”；如果强度逐点变化，磁壳就可以被设想为由若干个简单磁壳叠加在一起而构成。因此它就叫做一个“复杂磁壳”。

设 dS 是磁壳上一点 Q 处的一个面积元，而Φ是磁壳强度，则由这一磁壳元在任意点 P 处引起的势是

$$dV=\Phi\frac{1}{r^2}dS\cos c,$$

式中 c 是矢量 QP 或 r 和磁壳正表面上的外向法线之间的夹角。

但是，如果 dω是 dS 在 P 点所张的立体角，

$r^2d\omega=dS\cos c$，

则有 $dV=\Phi d\omega$，

从而在简单磁壳的事例中就有

$V=\Phi\omega$，

或者说，由一个磁壳在任一点上引起的势，等于它的强度和它的边界在所给点所张立体角的乘积[①]。

410.］同样的结果可以用另一种办法求得，那就是假设磁壳被放在任何一个磁力场中，并确定由于磁壳的放入而引起的势能。

如果 V 是面积元 dS 处的势，则由这一面积元引起的能量是

$$\phi\left(l\frac{dV}{dx}+m\frac{dV}{dy}+n\frac{dV}{dz}\right)ds,$$

或者说,能量就是磁壳强度乘以由磁壳元 dS 引起的 dV/dv 的那一部分面积分。

因此，按所有这样的磁壳元求积分，由磁壳在场中的位置而引起的能量，就是磁壳强度和磁感在磁壳面积上的积分的乘积。既然这一面积分对任何两个具有相同的边界线而在二者之间并不包含任何力心的曲面来说是相同的，磁壳的作用就只依赖于它的边界线。

[①] 这一定理归功于高斯，GeneralTheoryofTerrestrialMagnetism,§38.

现在假设力场是由强度为 m 的一个磁极引起的。我们已经看到(第 76 节的引理），在边界线给定的一个曲面上求的面积分，等于磁极强度和边界线在磁极那儿所张立体角的乘积。因此，由磁极和磁壳的相互作用而引起的能量就是

φm(

而由格林定理可知，这个量就等于磁极强度和磁壳在磁极那儿引起的势的乘积。因此磁壳引起的势就是Φω

411．]如果一个磁极 m 从一个磁壳的负侧的任一点开始，并沿着空间中的一条任意路径绕过边界线而运动到磁壳正侧和起始点很靠近的一点，则立体角将连续变化，并在过程中增大 4π。磁极所作的功将是 4πΦm，从而磁壳正侧任一点上的势，将比负侧一个邻近点上的势大 4πΦ。

如果一个磁壳形成一个闭合曲面，则磁壳外面的势到处为零，而磁壳内部空间中的势则到处是 4πΦ；它是正的，若磁壳的正面是朝里的。因此，这样一个磁壳就对放在壳外或壳内的任何磁体都不作用任何力。

412．]如果一个磁体可以划分为一些简单磁壳，而各该磁壳不是闭合的就是其边界线位于磁体的表面上，则磁性的分布叫做“层状”分布。如果φ是一个点当从一个给定位置沿着磁体内部的一条路线而运动到一个点(x，y，z)时所穿过的所有各磁壳的强度之和，则层状磁化的条件是

$$A=\frac{d\phi}{dx},B=\frac{d\phi}{dy},C=\frac{d\phi}{dz},$$

这样地完全确定着任一点上的磁化的这个量φ，可以叫做“磁化势”。它必须被认真地和“磁势”区分开来。

413．]一个可以分成复杂磁壳的磁体，叫做具有磁性的一种复杂层状分布。这样一种分布的条件是，磁化线的分布必须使得有可能画出一组和他们正交的曲面。这一条件由众所周知的方程

$$A(\frac{dC}{dy}-\frac{dB}{dz})+B(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx})+C(\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy})=0$$

来表示。

管状和层状磁体的势函数形式

414．]一个磁体的标势的普遍表示式是

$$V=\iiint(A\frac{dp}{dx}+B\frac{dp}{dy}+C\frac{dp}{dz})dxdydz,$$

式中 p 代表由位于(ξ，η，ζ)处的一个单位磁极在点(x，y，z)上引起的势，或者换句话说，它代表从测量磁势之点(ξ，η，ζ)到引起磁势的磁体元所在之点(x，y，z)的距离的倒数。

这个量可以分部求积分，正如在第 96、386 节中那样

$$V=\iint p(al+Bm+Cn)dS-\iiint p(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz})dxdydz,$$

式中 l、m、n 代表磁体表面的一个面积元 dS 上的外向法线的方向余弦。

当磁体是管状的时，第二项中的被积函数在磁体内部的每一点上都为零，从而三重积分为零，从而在磁体之内或之外的任一点上，磁势都由第一项中的面积分来给出。

因此，当磁体表面的每一点上的磁化法向分量为已知时，一个管状磁

体的标势就是完全确定的，而且它是和磁体内部的磁管形状无关的。

415．]在一个层状磁体的事例中，磁化由磁化势φ来确定，即有

$$A=\frac{d\phi}{dx},B=\frac{d\phi}{dy},C=\frac{d\phi}{dz}$$

因此 V 的表示式就可以写成

$$V=\iiint(\frac{d\phi}{dx}\frac{dp}{dx}+\frac{d\phi}{dy}\frac{dp}{dy}+\frac{d\phi}{dz}\frac{dp}{dz})dxdydz$$

把这一表示式分部求积分，就得到

$$V=\iint\phi(l\frac{dp}{dx}+m\frac{dp}{dy}+n\frac{dp}{dz})dS-\iiint\phi(\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2})dxdydz$$

第二项为零，除非点(ξ，η，ζ)被包含在磁体内部；在那种事例中，该项变为 4π(φ)，此处(φ)是φ在点(ξ，η，ζ)上的值。面积分可以用从(x，y，z)到(ξ，η，ζ)的直线γ以及该直线和 dS 上的外向法线之间的夹角θ表示出来，于是势函数就可以写成

$$V=\iint\frac{1}{r^2}\phi\cos\theta dS+4\pi(\phi)$$

式中的第二项，当点(ξ，η，ζ)并不位于磁体物质内时当然等于零。由这一方程来表示的势 V，甚至在φ突然变为零的磁体表面上也是连续的。因为，如果我们写出

$$\Omega=\iint\frac{1}{r^2}\phi\cos\theta dS,$$

而且Ω_1是Ω在刚刚位于表面内部的一个点上的值，而Ω_2是它在刚刚位于表面外面并和前面那个点很靠近的一个点上的值，就有

$$\Omega_2=\Omega_1+4\pi(\phi),$$

或者说 $V_2=V_1$.

因此Ω这个量在磁体的表面上是连续的。

磁感分量和Ω的联系由方程组

$$a=-\frac{d\Omega}{dx},b=-\frac{d\Omega}{dy},c=-\frac{d\Omega}{dz}$$

来表示。

416．]在层状磁性分布的事例中，我们也能简化磁感的矢势。

它的 x 分量可以写成

$$F=\iiint(\frac{d\phi}{dy}\frac{dp}{dz}-\frac{d\phi}{dz}\frac{dp}{dy})dxdydz$$

通过分部求积分，我们可以把这个量写成面积分的形式

$$F=\iint\phi(m\frac{dp}{dz}-n\frac{dp}{dy}dS),$$

或者写成

$$F=-\iint p(m\frac{d\phi}{dz}-n\frac{d\phi}{dy})dS$$

矢势的其他分量，也可以通过适当的代换而据这一表示式写出。

论立体角

417．]我们已经证明，在任一点上，由一个磁壳引起的势等于由磁壳

边界线所张的立体角乘以磁壳的强度。由于我们在电流理论中将有机会涉及立体角，现在我们将解释一下立体角是怎样量度的。

定义 一条闭合曲线在一个给定点上所张的立体角，由一个球面上的一块面积来量度；球面的中心位于所给之点，球面的半径为一个单位，而所取的面积则由当矢径描绘该闭合曲线时它和曲面的交点的运动轨迹来限定。这一面积的是正是负，按照从所给点看来该面积是位于矢径路径的左侧或右侧来决定[①]。

设(ξ ，η ，ζ)是所给的点，而(x，y，z)是闭合曲线上的一个点。座标 x，y，z 是 s 的函数，s 即从一个给定点算起的曲线长度。这些座标是 s 的周期函数；每当 s 增加一个等于闭合曲线全长度的量时，正数就重复一次。

我们可以根据这样的定义来直接计算立体角ω。利用以(ξ ，η ，ζ)为中心的球座标，并令

$x-\xi = r\sin\theta\cos\phi$，$y-\eta = r\sin\theta\sin\phi$，$z-\zeta = r\cos\theta$，我们通过积分就能求出球面上任意曲线的面积

$\omega = \int(1-\cos\theta)d\phi$，

或者，利用直角座标，就有

$$\omega = \int d\phi - \int_0^s \frac{z-\xi}{r\left\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right\}}\left[(x-\xi)\frac{dy}{ds}-(y-\eta)\frac{dx}{ds}\right]ds$$

积分是沿曲线 s 计算的。

如果 z 轴穿过闭合曲线一次，则第一项为 2π。如果 z 轴并不穿过闭合曲线，则此项为零。

418．]这种计算立体角的方法涉及座标轴的在某种程度上带有任意性的一种选择，从而它并不是只依赖于闭合曲线的。因此，为了几何学上的适当性，可以谈谈下面这种并不涉及任何曲面画法的方法。

当从一个给定点画起的矢径描绘出一条闭合曲线时，设有一个通过所给点的平面在闭合曲线上滚动，以致这个平面逐次成为曲线上每一点的切面。设从所给点开始画一条单位长度的直线使它垂直于这个平面。当平面沿闭合曲线滚动时，这条垂线的端点将描绘出第二条闭合曲线。设第二条闭合曲线的长度为σ，则第一条闭合曲线所张的立体角是

$\omega = 2\pi - \sigma$.

这一结果可以从一条众所周知的定理推出。那定理就是，单位半径的球面上一条闭合曲线所限定的面积，以及这一极座标曲线的周长，在数值上等于球面上一个大圆的周长。这种想法有时在求一个直线图形所张的立体角时是方便的。我们的目的是要形成物理现象的一种清晰的概念。对于这种目的来说，下述的办法是更合用的，因为它并不会用到问题之物理数据以外的任何构想。

419．]设在空间中给定了一条闭合曲线 s．而我们必须求出 s 在一个给定点 P 上所张的立体角。如果我们把这个立体角看成边界线和闭合曲线相重的一个单位强度的磁壳所引起的势，我们就必须把它定义为一个单位

[①] {当要确定一条已给闭合曲线对它所张立体角的那个点是运动的时，如果我们假设矢径沿曲线的运动方向永远相同，则球上的面积可以看成正的。若当从球心看过去时该面积是位于球的一侧，即矢径端点的运动显得是顺时针进行的那一侧；它是负的，如果情况想反的话。}

磁极在从无限远处运动到点 P 时反抗磁力而作的功。因此，如果 σ 是磁极向 P 点运动过来时所沿的路径，则磁势必然是沿这一路径的一个线积分的结果。它也必将是沿闭合曲线 s 的一个线积分的结果。因此，立体角表示式的正确形式，必将是按两条曲线 s 和 σ 来计算的一个二重积分。

当 P 位于无限远处时，立体角显然是零。当 P 逐步靠近时，从运动点看来的闭合曲线就显得是逐渐张开的，从而整个的立体角就可以设想为是当运动点靠近过来时由闭合曲线上不同线段元的表观运动来生成的。

当 P 点径由线段元 dσ 从 P 运动到 P′时，我们用 ds 来代表的闭合曲线之线段元 QQ′将相对于 P 而改变其位置,而单位球上和 QQ′相对应的直线则将在球面上扫过一个面积，我们可以把这个面积写成

$d\omega = \Pi ds d\sigma$. (1)

为了求出 Π，让我们假设 P 为固定而闭合曲线却平行于自身而移动了一段等于 PP′但方向相反的距离 dσ．P 点的相对运动将和实际事例中相同。

在这种运动过程中，线段元 QQ′将生成一个平行四边形的面积，其二边分别平行于并等于 QQ′和 PP′．如果我们以这个平行四边形为底而以 P 为顶点来画出一个角锥体，则这个角锥体的立体角就将是我们正在寻求的增量 dω．

为了确定这一立体角的值,设 Q 和 Q′分别是 ds 及 dσ 和 PQ 之间的夹角，并设 φ 是这两个角度的平面之间的夹角，于是平行四边形 ds．dσ 的 PQ 或 γ 的垂面上的投射面积就将是

$ds d\sigma \sin\theta \sin\theta' \sin\phi$，

而既然这一面积等于 $\gamma^2 d\omega$，我们就有

$$d\omega = \Pi ds d\sigma = \frac{1}{r^2}\sin\theta\sin\theta'\sin\phi X s d\sigma, \qquad (2)$$

由此即得

$$\Pi = \frac{1}{r^2}\sin\theta\sin\theta'\sin\phi, \qquad (3)$$

420．]我们可以用 γ 及其对 s 和 σ 的微分系数来把角 θ、θ′和 φ 表示出来，因为

$$\cos\theta = \frac{dr}{ds}, \cos\theta' = \frac{dr}{d\sigma}, \text{而} \sin\theta\sin\theta'\cos\phi = r\frac{d^2r}{ds d\sigma} \qquad (4)$$

于是我们就求得 Π^2 的值如下：

$$\Pi^2 = \frac{1}{r^4}[1-(\frac{dr}{ds})^2][1-(\frac{dr}{d\sigma})^2] - \frac{1}{r^2}(\frac{d^2r}{ds d\sigma})^2 \qquad (5)$$

用直角座标来表示的第三个 Π 表示式可以由下述考虑来得出：立体角为 dω 而边长为 γ 的那个角锥体的体积是

$$\frac{1}{3}r^3 d\omega = \frac{1}{3}r^3\Pi ds d\sigma$$

但是这个角锥体的体积也可以用 r、ds 和 dσ 在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影来表示成这九个投影的行列式，而我们则必须取这个行列式的第三个部分。于是，作为 Π 的值，我们就得到

$$\Pi = -\frac{1}{r^3}\begin{vmatrix} \xi - x, \eta - y, \zeta - z, \\ \frac{d\xi}{d\sigma}, \frac{d\eta}{d\sigma}, \frac{d\zeta}{d\sigma} \\ \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \end{vmatrix} \qquad (6)$$

这一表示式给出Π的值，而不带方程(5)所引入的正负号方面的含糊性。

421．]现在，闭合曲线在 P 点所张立体角ω的值就可以写成

$$\omega = \iint \Pi ds d\sigma + \omega_0, \qquad (7)$$

式中对 s 的积分是沿着整个闭合曲线计算的，而对σ的积分则从曲线上的一个固定点 A 计算到点 P．常数ω_0就是立体角在点 A 上的值。如果 A 位于离闭合曲线的无限远处，则ω_0为零。

ω在任一点 P 上的值和 A、P 之间的曲线形状无关，如果该曲线并不穿过磁壳本身的话。如果磁壳是无限薄的，而 P 和 P′是相距很近的两个点，但是 P 位于磁壳的正表面上而 P′位于它的负表面上,则曲线 AP 和 AP′必然位于磁壳边界相反的两侧，于是 PAP′就是一条曲线，它和无限短的线段 P′P 一起形成绕过边界线的一条闭合曲线。ω在 P 点的值比在 P′点的值大 4π，这也就是一个单位半径的球面的面积。

因此，如果画一条闭合曲线使它穿过磁壳一次，或者换句话说，如果它和磁壳的边界线互相穿套一次，则在这两条曲线上计算的积分$\iint \Pi ds d\sigma$的值将是4π．

因此，当看成只依赖于闭合曲线 s 和任意曲线 AP 时，这个积分就是一个多值函数的实例。因为，如果我们沿着不同的路径从 A 移动到 P，则积分将有不同的值，全看曲线 AP 穿过曲线 s 的次数而定。

如果 A 和 P 之间曲线的一种形状可以不经过和曲线 s 相交的连续变动而变换成另一种形状，则积分在这两条曲线上将有相同的值，但是，如果它在变动中和闭合曲线相交 n 次，则积分值将相差 4πn．

设 s 和σ是空间中任意两条闭合曲线，如果它们并不互相穿套，则在两条曲线上各计算一次的积分是零。如果他们沿同一方向互相穿套 n 次，则积分的值为 4πn．然而，也可能有两条曲线沿相反的方向而交替穿套，以致他们不可分离地互相扭结在一起，尽管积分的值是零。见图 4．

这个积分表示着一个磁极当在一个闭合电流的附近描绘一条闭合曲线时外界对它作的功，它也指示着两条闭合曲线之间的几何学联系；正是由于高斯发现了这个积分，才使他因为自从莱布尼兹、欧勒和范德蒙德以来“位置几何学”的进步之慢而深感遗憾。然而我们现在却有些进步可以报告，这主要归功于黎曼、亥姆霍兹和李斯廷。

422．]现在让我们考察沿闭合曲线对 s 求积分的结果。方程（7)中Π的一项是

[①] {Π的正负号可以通过考虑一个简单事例来最容易地得出；为此目的，一个垂直于盘面而被磁化的圆盘的事例是很合用的。}

$$-\frac{\xi-x d\eta dz}{r^3 d\sigma ds}=\frac{d\eta}{d\sigma d\xi}\left(\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}\right) \qquad (8)$$

如果我们为了简单而写出

$$F=\int\frac{1}{r}\frac{dx}{ds}ds, G=\int\frac{1}{r}\frac{dy}{ds}ds, H=\int\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}ds, \quad (9)$$

式中的积分沿着闭合曲线 s 计算一周，则Π的这一项可以写成

$$\frac{d\eta}{d\sigma}\frac{d^2H}{d\xi ds},$$

而$\int \Pi ds$中的对应项则为

$$\frac{d\eta}{d\sigma}\frac{dH}{d\xi}$$

现在，把Π的各项归并起来，我们就可以写出

$$-\frac{d\omega}{d\sigma}=-\Pi ds$$

$$=\left(\frac{dH}{d\eta}-\frac{dG}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{d\sigma}+\left(\frac{dF}{d\xi}-\frac{dH}{d\xi}\right)\frac{d\eta}{d\sigma}+\left(\frac{dG}{d\xi}-\frac{dF}{d\eta}\right)\frac{d\zeta}{d\sigma} \qquad (10)$$

这个量显然就是ω的减少率，即磁势沿曲线σ绕行时的减少率；或者换句话说，它就是 dσ 方向上的磁力。通过逐次假设 dσ 和 x、y 及 z 轴方向一致，我们就得到磁力分量的值

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=-\frac{d\omega}{d\xi}=\frac{dH}{d\eta}-\frac{dG}{d\zeta},\\ \beta&=-\frac{d\omega}{d\eta}=\frac{dF}{d\zeta}-\frac{dH}{d\xi},\\ \gamma&=-\frac{d\omega}{d\zeta}=\frac{dG}{d\xi}-\frac{dF}{d\eta}\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

各量 F、G、H 是一个磁壳的矢势分量，该磁壳的强度为 1 而其边界线是 s．他们并不像标势ω那样是一些有着一系列值的函数，而在空间的每一点上都完全确定。

由以一条闭合曲线为边界的一个磁壳在一点 P 上引起的矢势，可以用下述的几何作图方法求得。

设一点 Q 沿闭合曲线而运动，其速度在数值上等于该点到 P 的距离；再设第二个点 R 从一个固定点 A 开始，其运动速度的方向永远平行于 Q 的速度，但其速度的数值等于 1，当 Q 已经沿闭合曲线运行了一周时，作连线 AR，于是线段 AR 就在方向上和量值上表示由闭合曲线在 P 点引起的矢势。

放在磁场中的一个磁壳的势能

423．]我们在第 410 节中已经证明，放在势为 V 的磁场中的一个强度为φ的磁壳的势能是

$$M=\phi\iint\left(l\frac{dV}{dx}+m\frac{dV}{dy}+n\frac{dV}{dz}\right)dS, \qquad (12)$$

式中 l、m、n 是磁壳正侧的外向法线的方向余弦，而积分遍布于磁壳的面积上。

现在，借助于磁场的矢势，可以把这个面积分变换成一个线积分，而且我们可以写出

$$M=-\phi\int(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{dx}+H\frac{dz}{ds})ds, \qquad (13)$$

式中的积分应沿形成磁壳之边界的闭合曲线 s 计算一周，而从磁壳的正侧看去 ds 的方向应是逆时针的。

如果现在我们假设磁场是由强度为φ′的第二个磁壳引起的，我们就可以由第 416 节或第 405 节的结果直接定出 F 的值。如果 l′、m′、n′是第二个磁壳的面积元 ds′上的外向法线的方向余弦，我们就有

$$F=\phi'\iint(m'\frac{d}{dz'}\frac{1}{r}-n'\frac{d}{dy'}\frac{1}{r})dS',$$

式中γ是面积元 ds′和第一磁壳边界线上一点之间的距离。

现在，这个面积分可以变换成一个沿第二磁壳边界线的线积分，那就是

$$\phi'\int\frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'}ds' \qquad (14)$$

同样即得

$$G=\phi\int\frac{1}{r}\frac{dy'}{ds'}ds'$$

$$H=\phi'\int\frac{1}{r}\frac{dz'}{ds'}ds'$$

把这些值代入 M 的表示式中，我们得到

$$M=-\phi\phi'\iint\frac{1}{r}(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}+\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'})dsds', \qquad (15)$$

式中的积分沿 s 计算一周并沿 s′计算一周。这一表示式给出由两个磁壳的相互作用而来的势能，而且正如理所当然的那样当把 s 和 s′互换时表示式是不变的。这在电流理论中是一个很重要的物理量。如果我们用 c 来代表线段元 ds 和 ds′的方向之间的夹角，则 s 和 s′的势可以写成

$$\iint\frac{\cos c}{r}dsds' \qquad (16)$$

这显然是一个具有长度量纲的量。

第四章

感生磁化

424．]迄今为止，我们一直把磁体中的磁性分布看成一种明确给出的研究数据。除了在曾经设想磁体被打成小块或是一些小块被从磁体取走而并不改变任何部分的磁化的那些推理段落以外，我们对磁化是永久的或暂时的问题并未作出任何假设。

现在我们必须参照磁化所能被产生或被改变的方式来考虑物体的磁化。经发现，保持在平行于地球磁力的方向上的一根铁棒，会变成有磁性，其二极和地球的各极相反，或者说它是采取罗盘指针处于稳定平衡时的位置。

放在磁场中的任何一块软铁，都被发现为显示磁性。如果它被放在场中磁力较大的部分，例如放在一个蹄形磁铁的两极之间，则软铁的磁性变强。如果铁块被从磁场中取出，则它的磁性大大减弱或完全消失。如果铁的磁性完全依赖于它所在的场中的磁力，而当从场中取出时磁性就消失，则它叫做“软铁”。在磁的意义上是软的铁，在字面的意义上也是软的。它很容被弄弯并得到永久的变形，而且很不容易被弄断。

当从磁场中被取出时仍保持其磁性的铁，叫做“硬铁”。这样的铁不像软铁那样容易达成其磁状态。锤击手续或任何其他种类的振动，能使硬铁在磁力的影响下更容易达成磁状态，并使它当磁化力被取消时更容易离开磁状态[①]。磁性上硬的铁也更难弯曲而更易于折断。

锻造、轧制、拉丝和突然冷却等过程倾向于使铁变硬，而退火过程则倾向于使铁变软。

硬钢和软钢之间的磁性差别，也像它们的机械差别一样，是比硬铁和软铁之间的差别大得多的。软钢几乎像铁一样容易被磁化和被去磁，而最硬的钢则是制造我们希望长久使用的磁体的最好材料。

铸铁虽然比钢含有更多的碳，但是却不像钢那样易于保持磁性。

假如一个磁体可以磁化得使它的磁化分布不会被它能受到的任何磁力所改变，它就将可以称为一个刚性磁化的物体。唯一已知的满足这种条件的物体就是里边通有恒定电流的一个传导电路。

这样一个电路显示磁学性质，从而可以叫做一个电磁体，但是它的磁学性质却不受其他场中的磁力的影响。我们将在第四编中回到这一课题上来。

一切实际的磁体，不论是用硬化的钢做成还是用磁石做成的，都被发现为会受到外来作用的任何磁力的影响。

为了科学的目的，区分永久磁化和暂时磁化是方便的；这时把永久磁化定义为不依赖于磁力而存在的磁化，把暂时磁化定义为依赖于磁力而存在的磁化。然而我们必须注意，这种区分并不是建筑在一种有关可磁化物质之内在本性的知识上的，它只是一种为了使计算和现象发生关系而引入的一个假说的表达方法而已。在第五章中，我们将回到物理的磁化理论上

[①] {厄翁（Phil.Trans.Partii.1885）曾经证明，当不受到振动和去磁力的影响时，软铁可以比最硬的钢保持其更大的磁性。}

来。

425．]在目前，我们将考察暂时磁化，所依据的假设是，物质中任一粒子的磁化，只依赖于作用在该粒子上的磁力。这个磁力可以部分地起源于外界的原因，并部分地起源于附近各粒子的暂时磁化。

借助于磁力的作用而这样磁化了的一个物体，叫做被感应磁化了，而其磁化则叫做由磁化力所感生的。

由一个给定磁力所感生的磁化，在不同的物质中是不同的。在最纯的和最软的铁中，感生磁化最大，这时磁化和磁力之比可以达到 32，甚至达到 45[①].

其他的物质，例如金属镍和金属钴，可以达到一种较低的磁化程度，而且人们发现，当受到足够强的磁力作用时，所有的物质都会显示极性。

当磁化和磁力方向相同，就像在铁、镍、钴等等中那样时，物质就叫做“顺磁性的”、“铁磁性的”或简称为“磁性的”物质。当感生磁化和磁力方向相反，就像在铋等等中那样时，物质就被说成是“抗磁性的”。

在所有的这些抗磁性物质中，磁化和产生磁化的磁力之比都是非常小的，在铋中仅为$-\frac{1}{400000}$，而铋是已知的最高度抗磁性的物质。

在结晶的、形变的和组织化的物质中，磁化的方向并不总是和引起磁化的磁力的方向相一致。相对于固定在物体内的座标轴来说，磁化分量和磁力分量之间的关系，可以用一组三个线性方程来表示。我们即将证明，在这些方程所包含的九个系数中，只有六个是独立的。有关这一类物体的现象，叫做“磁晶现象”。

当放在一个磁力场中时，晶体倾向于转入适当的取向，以使最大顺磁感应或最小抗磁感应的轴线和磁力线相平行。见第 436 节。

在软铁中，磁化的方向和该点磁力的方向相重合，而且对于小值的磁力来说磁化近似地正比于磁力[①]。然而，当磁力亡大时，磁化却增加得较慢一些，而且由第六章中所描述的那些实验将可看出，存在一个磁化的极限值，而不论磁力的值是什么，磁化都不能超过这个值。

在下面的简略感生磁理论中，我们将从一种假设开始，那就是，磁化正比于磁力，并且和磁力共线。

感生磁化系数的定义

426．]设■是在物体中任意点上像在第 398 节中那样定义的磁力，而$\mathfrak{I}$是该点的磁化，则$\mathfrak{I}$和■之比叫做“感生磁化系数”。

用 κ 代表这个系数，则感生磁的基本方程是

$\mathfrak{I}$=k■(1)

系数 κ 对铁磁性和顺磁性物质来说是正的，对铋及其他抗磁性物质来说是负的。它在铁中可高达｛1600｝，而且在镍和钴的事例中也被说成是大的，但在所有其他的事例中它都是一个很小的量，不超过 0.00001.

力■部分地起源于被感生磁化的物体外部的那些磁体，部分地起源于物体本身的感生磁化。这两部分都满足有势条件。427．]设 V 是由物体外

[①] Thalén,NovaActa,Reg.Soc.Sc.,Upsal,1863｛厄翁（见前引文献）已经证明，这个比值可以高达 279，而且，如果铁丝在受到磁力作用时经过摇动，则比值甚至可以达到 1600．｝

[①] ｛瑞利勋爵（Phil．Mag．23,p．225,1887）曾经证明，当磁 大时二者就不再成正比了。｝

面的磁体所引起的势，而Ω是由感生磁化所引起的势，那么，如果 U 是由这两种原因所引起的实际的势，则有

U＝V＋Ω(2)

设磁力■沿 x、y、z 方向的分量是α、β、γ，而磁化ℑ的分量是 A、B、C，则由方程(1)得到

$$\left.\begin{aligned} A &= ka, \\ B &= k\beta, \\ C &= k\gamma, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

将这些方程分别乘以 dx、dy、dz 并相加，我们就得到

Adx+Bdy+Cdz=k(αdx+βdy+γdz).

但是，既然α、β和γ是由势 U 推得的，我们就可以把右端写成—kdU.

因此，如果 k 在物质中到处为常量，则上式的左端也必然是 x、y 和 z 的一个函数的全微分。用φ代表这个函数，则上式变成

dφ=-kdU(4)

式中

$$A=\frac{d\phi}{dx},\ B=\frac{d\phi}{dy},\ C=\frac{d\phi}{dz}, \quad (5)$$

因此，磁化是层状的，正如在第 412 节中定义的那样。在第 385 节中已经证明，如果ρ是自由磁量的体密度，则有

$$\rho=-(\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}),$$

由于存在方程(3)，上式变为

$$\rho=-x(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz})$$

但是，由第 77 节就有

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=-r\pi\rho$$

因此得到

(1+4πk)ρ=0

由此即得，在整块物质中应有

ρ=0，(6)

从而磁化既是层状的，也是管状的。

因此，除了在物体的边界面上以外，不存在任何自由磁量。如果ν是表面的内向法线，则磁量的面密度是

$$\sigma=-\frac{d\phi}{dv} \qquad (7)$$

因此，由这一磁化在任意一点上引起的势Ω，可以由下列的面积分求得：

$$\Omega=\iint\frac{\sigma}{r}ds \qquad (8)$$

Ω的值将到处是有限的和连续的，而且在表面的内外都将满足拉普拉斯方程。如果我们用一个撇号来区分表面外部的Ω值，而且，如果 ν′是外向法线，则我们在表面上得到

$\Omega' = \Omega$；(9)

$$\frac{d\Omega}{dv} + \frac{d\Omega'}{dv'} = -4\pi\sigma,$$ 根据第786节，

$$= 4\pi\frac{k\phi}{dv}\sigma,$$ 根据（7），

$$= -4\pi k\frac{dU}{dv},$$ 根据（4），

$$= -4\pi k\left(\frac{dV}{dv} + \frac{d\Omega}{dv}\right),$$ 根据(2)．

因此我们可以写出第二个表面条件式

$$(1 + 4\pi k)\frac{d\Omega}{dv} + \frac{d\Omega'}{dv'} + 4\pi k\frac{dV}{dv} = 0 \qquad (10)$$

由此可见，在一个以曲面 S 为边界并受到其势为 V 的磁力的作用的均匀各向同性的特体中，感性磁量的确定可以归结为下列的数学问题。

我们必须求出满足下列条件的两个函数Ω和Ω′：在曲面 S 内部，Ω必须是有限和连续的，而且必须满足拉普拉斯方程。

在曲面 S 的外面，Ω′必须是有限和连续的，它在无限远处必须变为零，而且它必须满足拉普拉斯方程。

在曲面本身的每一点上，Ω=Ω′，而且Ω、Ω′和 V 沿法线求的方向导数必须满足方程(10)。

这种处理感生磁量问题的方法，是由泊松提出的。他在自己的论著中使用的一个量 k 和这里的 k 并不相同，而是和它有下列的关系：

$4\pi k(k-1)+3k=0$．(11)

我们在这里采用的 k 这个系数，是由 F.E.诺依曼引入的。

428．]感生磁的问题，也可以通过像法拉第那样引入我们称之为“磁感”的那个量来用另一种办法处理。磁感■、磁力■和磁化$\Im$之间的关系，由方程

■=■$+4\pi\Im$(12)

来表示。

用磁力来表示感生磁化的方程是

$\Im$=k■(13)

因此，消去$\Im$，我们就得到其磁化由磁力感生而成的物质中的磁感和磁力之间的关系式如下：

■=$(1+4\pi\kappa)$■．(14)

在最普遍的事例中，κ可以不仅是物质中各点位置的函数，而且是矢量■的方向的函数。但是在我们现在考虑的事例中，κ却是一个数字量。

如果写出

$\mu=1+4\pi\kappa$，(15)

我们就可以把μ定义成磁感和磁力之比，而且我们可以把这一比值叫做物质的磁感本领，以别于感生磁化系数κ．

如果用 U 来代表由外界原因所引起的势 V 和感生磁化所引起的势Ω合成的总磁势，我们就可以表示磁感分量 a、b、c 和磁力分量α、β、γ如下：

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu\alpha = -\mu\frac{dU}{dx}, \\ b &= \mu\beta = -\mu\frac{dU}{dy}, \\ c &= \mu\gamma = -\mu\frac{dU}{dz}, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

各分量 a、b、c 满足管状条件

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0 \qquad (17)$$

由此可见，势 U 必须在 μ 为常量处的每一点上满足拉普拉斯方程

$$\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}=0, \qquad (18)$$

也就是必须在均匀物质或真空中的每一点上满足该方程。

在表面本身上，设 ν 是指向物质内部的法线而 ν′ 是外向法线，如果物质外部各量的符号用一个撇号来区分，则磁感的连续性条件是

$$a\frac{dx}{d\nu}+b\frac{dy}{d\nu}+c\frac{dz}{d\nu}+a'\frac{dx}{d\nu'}+b'\frac{dy}{d\nu'}+c'\frac{dz}{d\nu'}=0; \qquad (19)$$

或者，由方程(16)就得，

$$\mu\frac{dU}{d\nu}+\mu'\frac{dU'}{d\nu'}=0 \qquad (20)$$

磁体外面的磁感系数 μ′ 将是 1，除非周围的媒质是磁性的或抗磁性的。

如果把 U 的值用 V 和 Ω 表示出来，并把 μ 的值用 κ 表示出来，我们就得到以前用泊松法求得的同一方程(10).

当从磁感和磁力的关系方面来看它时，感生磁的问题是和在第 310 节中给出的那种各向异性媒质中的传导电流的问题确切对应的。

磁力从磁势中导出，恰恰和电力从电势中导出完全一样。

磁感是一个具有流量本性的量，而且像电流一样满足同样的连续性条件。

在各向同性媒质中，磁感依赖于磁力的方式，恰恰和电流依赖于电动势的方式相对应。

一个问题中的磁比感本领，对应于另一问题中的电导率。因此汤姆孙在他的 TheoryofInducedMagnetism(Reprint，1872，p.484)[《感生磁理论》]中曾称这个量为媒质的“磁导率”。

现在我们作好准备来从我所认为的法拉第观点考虑感生磁的理论了。

当磁力作用在任何一种媒质上时，不论媒质是磁性的、抗磁性的还是中性的，它都会在媒质中引起一种叫做“磁感应”的现象。磁感是一种具有流量本性的有向量，而且像电流及其他流量那样地满足相同的连续性条件。

在各向同性媒质中，磁力和磁感方向相同，而且磁感是磁力和我们曾用 μ 来代表之的一个叫做磁感系数的量的乘积。在真空中，磁感系数是 1。在可以受到感生磁化的物体中，磁感系数是 1+4πκ=μ，式中 κ 是已经定义为感生磁化系数的那个量。

429．〕设μ、μ′是两种媒质的分界面两侧的μ值，如果V、V′是两种媒质中的势，则两种媒质中指向分界面的磁力是$\frac{dV}{dv}$和$\frac{dV'}{dv'}$．

通过面积元 dS 的磁感通量，沿指向 dS 的方向计算，在两种媒质中分别是$\mu\frac{dV}{dv}dS$和$\mu'\frac{dV'}{dv'}dS$．

既然流向 dS 的总通量为零，就有

$$\mu\frac{dV}{dv}+\mu'\frac{dV'}{dv'}=0$$

但是，由关于密度为σ的表面附近的势的理论可知，

$$\frac{dV}{dv}+\frac{dV}{dv'}+4\pi\sigma=0$$

由此即得，

$$\frac{dV}{dv}(1-\frac{\mu}{\mu'})+4\mu\sigma=0$$

如果κ_1是系数为μ的媒质中表面磁化和法向力之比，我们就有

$$4\pi k_1=\frac{\mu-\mu'}{\mu'}$$

由此可见，按照μ是大于或小于μ′，κ_1将是正的或负的。如果我们令μ=4πκ+1 和 dμ′=4πκ′+1，就有

$$k_1=\frac{k-k'}{4\pi k'+1}$$

在这一表示式中，κ和κ′是由在空气中进行的实验推得的第一种和第二种媒质的感生磁化系数,而κ_1是当被第二种媒质所包围时第一种媒质的感生磁化系数。

如果κ′大于κ，则κ_1是负的，或者说第一种媒质的表观磁化是和磁化力方向相反的。

例如，如果一个充有顺磁性铁盐之稀水溶液的容器被挂在同种盐类的较浓溶液中并受到一个磁体的作用，则容器将运动，就像是沿着和当一个磁体被悬在同一地点时所将采取的方向相反的方向而被磁化了那样。

这一点可以用一条假说来加以解释；其假说就是，容器中的溶液确实是沿着磁力的方向而被磁化的，但是容器周围的溶液却是更强地沿着同一方向而被磁化的。因此，容器就像是放在两个强磁体之间的一个弱磁体，三者都沿着相同的方向而被磁化，从而相反的极互相接触。弱磁体的北极指向强磁体北极所指的同一方向，但是，既然它是和较强磁体的南极接触着的，在它的北极附近就有一些多余的南磁量，这就使得弱磁体显得像是沿相反的方向而被磁化了一样。

然而，在某些物质中，即使当它们被悬挂在所谓的真空中时，它们的表观磁化也是负的。

如果我们假设真空的κ=0，则这些物质的κ将是负的。然而却从来不曾发现任何具有数值上大于$\frac{1}{4\pi}$的负κ的物质，因此一切已知物质的μ都是正的。

κ为负从而μ小于 1 的物质，叫做“抗磁性物质”。κ为正而μ大于 1 的物质叫做“顺磁性物质”或“铁磁性物质”，或者简称为“磁性物质”。

当我们在第 832—845 节中讨论到电磁现象时,我们将考虑抗磁性质和顺磁性质的物理理论。

430.〕磁感应的数学理论是由泊松[①]最初提出的。他的理论所依据的，是二磁流体假说，这是和二电流体学说有着相同的数学优点和物理困难的一个假说。然而，为了解释为什么一块软铁可以通过感应来被磁化，而却不能充以数量不相等的两种磁质，泊松就假设了一般的物质是磁流体的非导体，而且只有物质的某些小部分才含有处于自由状态从而可以服从所受作用力而运动的磁流体。物质中的这些小的磁性元，每个都含有数量恰好相等的两种磁流体，而且在每一磁性元的内部，磁流体是可以完全自由地运动的，但是磁流体却绝不能从一个磁性元转入另一个磁性元中。

因此，问题就和关于若干个小的导电物体的问题属于同一类型，那些小导体是散布在一种介电绝缘的媒质中的。这些导体可以具有任意的形状，如果它们是小的并且互不接触的话。

如果它们是一些沿着同一公共方向排列的长形物体，或者，如果它们在一个方向上比在另一个方向上更加密集，则正如泊松本人已经证明的那样，媒质将不是各向同性的。因此，为了避免无用的复杂性，泊松就考虑了这样一种事例：每一个磁形元都是球形的，而且它们的分布并不偏向于任何轴线。他假设了，物质的单位体积中所含各磁性元的总体积是κ.

我们在第 314 节中已经考虑了一种媒质的电导率，在那种媒质中，分布得有一些另一种媒质的小球。

如果媒质的电导率是μ_1而小球的电导率是μ_2，则我们已经求得复合体系的电导率是

$$\mu=\mu_1\frac{2\mu_1+\mu_2+2k(\mu_2-\mu_1)}{2\mu_1+\mu_2-k(\mu_2-\mu_1)}$$

令$\mu_1=1$而$\mu_2=\infty$，此式就变为

$$\mu=\frac{1+2k}{1-k}$$

这个量μ就是由一些理想导电的小球分布在一种电导率为 1 的媒质中而形成的复合媒质的电导率，单位媒质体积中小球的总体积为κ.

μ这个符号也代表一种媒质的磁感系数，该媒质包括一些磁导率为无限大的小球，分布在一种磁导率为 1 的媒质中。

我们将称之为“泊松磁系数”的κ这个符号，代表的是各磁性元的和物质的总体积之比。

κ这个符号被称为“诺依曼磁感系数”。它比泊松的系数更适用。

我们将把符号μ叫做“磁感系数”。它的优点在于能使我们很容易地把磁的问题翻译成有关电和热的问题。

这三个符号的关系如下：

[①] Mémoiresdel’Institut,1824，p.247.

$$k=\frac{4\pi k}{4\pi k+3},k=\frac{\mu-1}{\mu+2},$$

$$k=\frac{\mu-1}{4\pi},k=\frac{3k}{4\pi(1-k)},$$

$$\mu=\frac{1+2k}{1-k},\mu=4\pi k+1$$

如果我们按照塔伦[①]有关软铁的实验令 κ=32，就会得到 κ $=\frac{134}{135}$．按照泊松的理论，这就是磁分子的总体积和铁的总体积之比。在一个空间中堆满相等的小球，是不可能作到使它们的体积和空间总体积之比如此接近于 1 的，而且也很难想像铁的这么大一部分体积都被刚性的分子所占满，不论这些分子是什么形状。这是我们之所以必须放弃泊松假说的理由之一。其他的理由将在第六章中加以论述。当然，泊松的数学探讨的价值并不会减小，因为这种探讨不是建筑在他的假说上，而是建筑在感生磁化的实验事实上的。

[①] Recherchessurlesproprietésmagnétiquesdufer，NovaActa，Upsal，1863.

第五章

磁感应的特殊问题

中空球壳

431．〕一个磁感问题的完备解的第一个例子，是由泊松针对一个受到任意磁力作用的中空球壳而给出的。为了简单，我们将假设磁力的源位于球壳外面的空间中。如果用 V 代表由外部磁体系引起的势，我们就可以把 V 展成体谐函数的级数

$V=C_0S_0+C_1S_1r+\cdots+C_iS_iR^i+\cdots(1)$

式中 γ 是从球壳中心量起的距离，S_i 是 i 阶的面谐函数，而 C_i 是一个系数。

设球壳的外半径为 a_2 而内半径为 a_1，并设由球壳的感生磁量所引起的势是Ω。函数Ω的形式，通常在球内空间、球壳物质和球外空间中是不同的。如果把这些函数展成球谐函数的级数并只注意包含面谐函数 S_i 的各项，我们就会发现，如果Ω_1是对应于球壳内部的空间的函数，则Ω_1的展式必然是由形如 $A_1S_0\gamma^i$的正的谐函数构成的，因为势一定不能在半径为 a_1 的球内变为无限大。

在 γ 介于 a_1 和 a_2 之间的球壳物质中，级数可以既包含 γ 的正次幂也包含 γ 的负次幂而形如

$A_2S_ir^i+B_2S_ir^{-(i+1)}$

在球壳外面，γ 大于 a_2，既然不论 γ 多大级数也必须收敛，我们就必将只有 γ 的负次幂，形如

$B_3S_ir^{-(i+1)}$

函数Ω所必须满足的条件是：它必须是 1°有限的，2°连续的，3°在无限远处变为零，4°到处满足拉普拉斯方程。

由 1°，就有 $B_1=0$.

由 2°，当 $\gamma=a_1$ 时应有

$(A_1-A_1)a_1-B^{2i+1}=0(2)$

而当 $\gamma=\alpha_2$ 时应有

$(A_2-A_3)a_2^{2i+1}+B_2-B_3=0(3)$

由 3°就有 $A_3=0$，而条件 4°是到处满足的，因为各函数是一些谐函数。

但是，除了这些条件以外，由于有第 427 节中的方程(10)，还有另外一些条件必须在内表面和外表面上得到满足。

在 $\gamma=a_1$ 的内表面上，有

$$(1+4\pi k)\frac{d\Omega_2}{dr}-\frac{d\Omega_1}{dr}+4\pi k\frac{dV}{dr}=0, \qquad (4)$$

而在 $\gamma=a_2$ 的外表面上则有

$$-(1+4\pi k)\frac{d\Omega_2}{dr}+\frac{d\Omega_3}{dr}-4\pi k\frac{dV}{dr}=0 \qquad (5)$$

由这些条件，我们得到两个方程

$(1+4\pi k)\{iA_2a_1^{2i+1}-(i+1)B_2\}-iA_1a_1^{2i+1}+4\pi kiC_ia_1^{2i+1}=0$，(6)

$(1+4\pi k)\{iA_2a_2^{2i+1}-(i+1)B_2\}+(i+1)B_3+4\pi kiC_ia_2^{2i+1}=0$；(7)

而且，如果令

$$N_i=\frac{1}{(1+\pi k)(2i+1)^2+(4\pi k)^2i(i+1)(1-\frac{a_1}{a_2})^{2i+1})}, \qquad (8)$$

我们就得到

$$A_1=-(4\pi k)^2i(i+1)(1-(\frac{a_1}{a_2})^{2i+1})N_iC_i, \qquad (9)$$

$$A_2=-4\pi ki[2i+1+4\pi k(i+1)(1-(\frac{a_1}{a_2})^{2i+1}]N_iC_i, (10)$$

$$B_2=4\pi ki(2i+1)a_1^{2i+1}N_iC_i, \qquad (11)$$

$$B_3=-4\pi ki\{2i+1+4\pi(i+1)\}(a_2^{2i+1}-a_1^{2i+1})N_iC_i \, (12)$$

把这些量代入谐函数展式中，就得到由球壳的磁化所引起的那一部分磁势。量 N_i 永远是正的，因为 $1+4\pi\kappa$ 不可能为负。由此可知 A_1 永远为负，或者换句话说，磁化球壳在壳内一点上的作用永远和外磁力的作用相反，不论球壳是顺磁性的还是抗磁性的。球壳内部的合磁势的实际值是

$(C_i+A_1)S_i\gamma^i$，

或者写作

$(1+4\pi\kappa)(2i+1)^2N_iC_iS_ir^i$．(13)

432．〕当像在软铁的事例中一样 κ 是一个大数时，球壳内的磁力只是外磁力的一个很小的分数，除非球壳十分地薄。

用这种办法，W．汤姆孙爵士曾经通过把他的海上电流计封装在一个软铁管中，来使该电流计不致受外磁力的影响。

433．〕具有最大的实用重要性的事例就是 i=1 的事例。这时就有：

$$N_1=\frac{1}{9(1+4\pi k)+2(4\pi k)^2(1-(\frac{a_1}{a_2})^3)}, \qquad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=-2(4\pi k)^2(1-(\frac{a_1}{a_2})^3)N_1C_1\\
A_2&=-4\pi k[3+8\pi k(1-(\frac{a_1}{a_2})^3)]N_1C_1,\\
B_2&=12\pi ka_1^3N_1C_1,\\
B_3&=-4\pi k(3+8\pi k)(a_2^3-a_1^3)N_1C_1
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

在这一事例中，空壳内部的磁力是均匀的，其量值等于

$$C_1+A_1=\frac{9(1+4\pi k)}{9(1+4\pi k)+2(4\pi k)^2(1-(\frac{a_1}{a_2})^3)}C_1 \qquad (16)$$

如果我们希望通过测量一个空壳中的磁力并把它和外磁力相比较而来确定κ，则球壳厚度的最佳值可由下列方程求得：

$$1-\frac{a_1{}^3}{a_2{}^3}=\frac{91+4\pi k}{2(4\pi k)^2} \qquad (17)$$

{这个$\frac{a_1}{a_2}$值使$\frac{d}{dk}\{1+\frac{A_1}{C_1}\}$成为一个最大值，因此，当$\frac{(C_1+A_1)}{C_1}$的误差给定时，k 的对应误差是尽可能地小的。} 这时，壳内的磁力是壳外的磁力的二分之一。

既然在铁的事例中κ是一个介于 20 和 30 之间的数，球壳的厚度就应该大约是它的半径的百分之二。这种方法只有当κ较大时才是可用的。当它很小时，A_1的值就变得微乎其微了，因为它是依赖于κ的平方的。

对于一个具有很小球形空腔的几乎是实心的球来说，我们有

$$\left.\begin{aligned}A_1&=-\frac{2(4\pi k)^2}{(3+4\pi k)(3+8\pi k)}C_1,\\ A_2&=-\frac{4\pi k}{3+4\pi k}C_1,\\ B_3&=-\frac{4\pi k}{3+4\pi k}C_1a_2{}^3\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

全部的这种探索，也可以从第 312 节中所给出的关于球壳导电的探索直接推得，只要在那儿所给出的表示式中令$\kappa_1=(1+4\pi\kappa)\kappa_2$，并记得导电问题中的$A_1$和$A_2$等价于磁感应问题中的$C_1+A_1$和$C_1+A_2$就行了。

434.〕二维空间中的对应解,图解式地表示在本卷末尾的图版十五上。在离开中心有一个距离处，磁感线接近水平；图中表示的是磁感线受到一个圆柱的干扰时的情况，圆柱被横向磁化，并放在它的稳定平衡位置上。和这组曲线相正交的曲线代表等势面，其中一个是圆柱面。大的虚线圆代表一个顺磁性物质圆柱的截面，圆内那些作为外部磁感线之延长线的水平虚线代表物质内部的磁感线。竖直的虚直线代表内部的等势面，它们和外部的一组等势面也是相接连的。可以看到，磁感线在物质内部被画得较密，而等势面则被顺磁性圆柱隔开得较远一些，而按照法拉第的说法就是，顺磁性圆柱能够比周围的媒质更好地传导磁感线。

如果把竖直的直线族看成磁感线而把水平的直线族看成等势面，我们首先就得到一个在力线中位于其不稳定平衡位置上的横向磁化的圆柱的事例，这时圆柱会使力线散开。其次，把大的虚线圆看成一个抗磁性圆柱的截面，圆内的虚直线和外面的曲线一起，就代表一种抗磁性物质把磁感线排开和把等势面拉近的效应，而这种物质是比周围媒质更差地传导磁感线的。

磁化系数在不同方向上有不同值的一个球的事例

435.〕设α、β、γ是任意点上的磁力分量，A、B、C 是磁化分量，则这些量之间的最普遍的线性关系由下列方程组给出：

$$\left.\begin{aligned}A&=\gamma_1\alpha+p_3\beta+q_2\gamma\\ B&=q_3\alpha+\gamma_2\beta+p_1\gamma,\\ C&=P_2\alpha+q_1\beta+\gamma_3\gamma,\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

式中的系数γ、p、q 是九个磁化系数。

现在让我们假设，这就是一个半径为为 a 的球的内部的磁化情况，而且物质内的每一点上的磁化都是均匀的和同方向的，其分量为 A、B、C.

让我们再假设，外部的磁化力也是均匀的和平行于一个方向的，而且它的分量是 X、Y、Z.

因此，V 的值就是

V=-(Xx+Yy+Zz)，(2)

而由第 391 节可知，磁化球外面的势Ω′的值就是

$$V = -(X_x + Y_y + Z_2), \qquad (2)$$

磁化球内部的势Ω的值是

$$\Omega = \frac{4\pi}{3}(Ax + By + Cz) \qquad (4)$$

球内的实际势是 V+Ω，因此，关于球内的磁力分量，我们将有

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= X - \frac{4}{3}\pi A, \\ \beta &= Y - \frac{4}{3}\pi B, \\ \gamma &= Z - \frac{4}{3}\pi C \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

由此即得

$$\left.\begin{aligned} &(1+\frac{4}{3}\pi r_1)A + \frac{4}{3}\pi p_3 B + \frac{4}{3}\pi q_2 C = r_1 X + p_3 Y + q_2 Z, \\ &\frac{4}{3}\pi q_3 A + (1+\frac{4}{3}\pi r_2)B + \frac{4}{3}\pi p_1 C = q_3 X + r_2 Y + p_1 Z, \\ &\frac{4}{3}\pi p_2 A + \frac{4}{3}\pi q_1 B + (1+\frac{4}{3}\pi r_3)C = p_2 X + q_1 Y + r_3 Z \end{aligned}\right\}(6)$$

求解这些方程，我们得到

$$\left.\begin{aligned} A &= \gamma_1' X + p_3' Y + q_2' Z, \\ B &= q_3' X + \gamma_2' Y + p_1' Z, \\ C &= p_2' X + q_1' Y + \gamma_3' Z, \end{aligned}\right\}(7)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} D' r_1' &= r_1 + \frac{4}{3}\pi(r_3 r_1 - p_2 q_2 + r_1 r_2 - p_3 q_3) + (\frac{4}{3}\pi)^2 D, \\ D' + p_1' &= p_1 - \frac{4}{3}\pi(q_2 q_3 - p_1 r_1), \\ D' q_1' &= q_1 - \frac{4}{3}\pi(p_2 p_3 - q_1 r_1), \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

此处 D 是方程组(6)右端的系数行列式，而 D′是其左端的系数行列式。

只有当系数组 p、q、γ是对称的，即当 p 式的系数等于对应的 q 式的系数时，新的系数组 p′、q′、γ′才是对称的。

436．〕倾向于使球体绕着 x 轴从 y 轴转向 z 轴的力偶矩[①]，通过考虑由一个元体积引起的力偶并对球体
求力偶矩之和来得出。结果就是

$$L=\frac{4}{3}\pi a^3(\gamma B-\beta C)$$

$$=\frac{4}{3}\pi a^3\{p_1'Z^2-q_1'Y^2+(r_2'-r_3')YZ+X(q_3'Z-p_2'Y)\}(9)$$

如果我们令

X=0，Y=Fcosθ，Z=Fsinθ，

这就对应于一个位于 yz 平面上并和 y 轴成一个角度θ的磁力 F．如果在这个力保持恒定时使球转动，则每转一周力对球作的功将是$\int^{2\pi} Ld\theta$但是

这个功等于

$$\frac{4}{3}\pi^2a^3F^2(p_1'-q_1')$$

由此可见，为使转动的球不致变成取之不尽的能源，应有 $p_1'=q_1'$；同理应有 $p_2'=q_2'$和 $p_3'=q_3'$．

这些条件表明，在原有的方程组中，第三个方程中 B 的系数等于第二个方程中 C 的系数，余类推。因此，方程组是对称的，而当相对于磁化主轴写出时，各方程就变成

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{r_1}{1+\frac{4}{3}\pi r}X,\\B&=\frac{r_2}{1+\frac{4}{3}\pi r_2}Y,\\C&=\frac{r_3}{1+\frac{4}{3}\pi r_3}Z\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

倾向于使球体绕 x 轴而转动的力偶矩是

$$L=\frac{4}{3}\pi a^3\frac{r_2-r_3}{(1+\frac{4}{3}\pi r_2)(1+\frac{4}{3}\pi r_3)}YZ\qquad(12)$$

在多数事例中，不同方向上的磁化系数之差是很小的，因此，如果γ代表系数平均值，我们就可以令

① ［系数 p 和 q 的相等可以证明如下：设作用在球上的力使它绕着一个方向余弦为λ、μ、ν的直径转了一个角δθ，若用 W 代表球的能量，则由第 436 节得到 但是，如果座标轴是固定在球中的，则转动的结果将导致δX=（Yν-Zμ）δθ，⋯．因此我们可以令 既然转动的球不能变成一种能源，上式右端的表示式就必须是一个全微分。于是，既然 A、B、C 是 X、Y、Z 的线性函数，W 就必然是 X、Y、Z 的二次函数，由此立刻得到所要的结果。并请参阅 Sir W.Thomson,s Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism,pp.480—481.]

$$L=\frac{2}{3}\pi a^3\frac{r_2-r_3}{(1+\frac{4}{3}\pi r)^2}F^2\sin 2\theta \qquad (13)$$

这就是倾向于使一个晶体球绕着 x 轴而从 y 轴转向 z 轴的力[力矩]。它永远倾向于使最大磁系数轴（或最小抗磁系数轴）转得和磁力线相平行。

二维空间中的对应事例已表示在图版十六上。

如果我们假设该图的上方是向北的，此图就代表受到一个圆柱的干扰的力线和等势面，该圆柱是横向磁化的，其北极一面向着东方。合力倾向于使圆柱从东向北转动。大的虚线圆代表一个结晶物质的柱体的截面，该柱体沿着从东北到西南的一条轴线的磁感系数大于它沿着从西北到东南的轴线的磁感系数。圆内的虚线代表磁感线和等势面，二者在这一事例中并不是互相正交的。作用在柱体上的合力显然倾向于使柱体从东向北转动。

437.〕放在均匀而平行的磁力场中的一个椭球体的事例，是由泊松用一种很巧妙的方式求了解的。

如果 V 是一个任意形状的具有均匀密度 ρ 的物体在点(x，y，z)上引起的引力势，则 $-\frac{dV}{dx}$ 应是由同一物体的磁量所引起的势，如果物体被沿着x方向而均匀磁化到强度为$I=$ ρ 的话。因为，$-\frac{dV}{dx}\sigma x$在任意点上的值，就是物体的势 V 对另一值 V′的超额，此处 V′就是当物体沿着 x 方向运动了一段距离 -δx 时的势的值。

如果我们假设物体移动了一个距离 -δx，而且它的密度从 ρ 变成了 -ρ（就是说，它不再是由引力物质构成的而是由斥力物质构成的了)，则 $-\frac{dV}{dx}\sigma x$将是由这样两个物体所引起的势。现在考虑物体的任意一个元部分，设其体积为 δv．它的质量是 ρδv，而与此对应，就有一个移动后的物体元，其质量为 -ρδv，并位于距离 -δx 处。这两个物体元的效应是和一个强度为 ρδv 而长度为 δx 的磁体的效应相等价的。磁化强度通过把物体元的磁矩除以它的体积来求得。结果就是 ρδx．

因此，$-\frac{dV}{dx}\sigma x$就是一个沿x方向而磁化到强度 ρδx的物体的磁势，而 $-\frac{dV}{dx}$ 就是磁化到强度 ρ 的物体的磁势。

这个势也可以从另一角度来加以考虑。物体被移动了一个距离 -δx 并由密度为 -ρ 的物质所构成。在物体在其两个位置上所共同占据的整个空间区域中，密度到处为零，因为，就其引力而言，两个相等而异号的密度将互相抵消。因此，剩下来的只是一个壳，一边是正物质另一边是负物质，从而我们可以认为合势就是由这物质引起的。在外向法线和 x 轴的夹角为∈的地方，壳的厚度是 δxcos∈而其密度为 ρ．因此面密度就是 ρδxcos∈，而在势为 $-\frac{dV}{dx}$ 的事例中则面密度为 ρcos∈．

用这种办法，我们可以求出沿给定方向而均匀磁化的任意物体的磁势。现在，如果这种均匀磁化起源于磁感应，则物体内部所有各点上的磁化力也必须是均匀而平行的。

这个力包括两部分，一部分由外界原因引起，另一部分由物体磁化引起。因此，如果外磁力是均匀而平行的，则由磁化所引起的磁力挖物体内部的所有各点上也必将是均匀而平行的。因此，为了使这一方法可以导致磁感问题的一个解，$\frac{dV}{dx}$就必须在物体内部是座标x、y、z的一个线性函数，从而V就必须是座标的二次函数。

现在，我们所熟知的V在物体内部是座标的二次函数的事例，只有那些物体的边界面是某些完全的二次曲面的事例，而其中这样一个物体为有限大小的唯一事例就是当物体为一椭球体时的事例。因此我们将对椭球体的事例应用这一方法。

设椭球的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

而Φ_0代表定积分

$$\int_0^\infty \frac{d(\phi^2)}{\sqrt{(a^2\phi^2)(b^2+\phi^2)(c^2+\phi^2)}} \quad (2)$$ [①]

于是，如果我们令

$$L=4\pi abc\frac{d\Phi_0}{d(a^2)},M=4\pi abc\frac{d\Phi_0}{d(b^2)},N=4\pi abc\frac{d\Phi_0}{d(c^2)}, \quad (3)$$

则势在椭球内的值将是

$$V_0=-\frac{\rho}{2}(Lx^2+My^2+Nz^2)+\text{常量。} \quad (4)$$

如果椭球是沿着其方向余弦为l、m、n的方向而磁化到均匀强度I的，则磁化分量是

A=Il，B=Im，C=In，

而由这一磁化在椭球内部引起的势则是Ω=-1(Llx+Mmg+Nnz).(5)

如果外磁化力是■而其分量为 X、Y、Z，则它的势将是 V=-(Xx+Yy+Zz).(6)

因此，物体内部任一点上的实际磁化力的分量就是 X+AL，Y+BM，Z+CN.(7)

磁化和磁化力之间的最普遍的关系，由包含着九个系数的三个线性方程来给出。然而，为了满足能量守恒的条件，在磁感应的事例中这九个系数中的三个系数必须等于另外三个系数，从而我们就应该有

$$\left.\begin{aligned}A&=k_1(x+4L)+k'_3(Y+BM)+k'_2(Z+CN),\\B&=k'_3(X+4L)+k_2(Y+BM)+k'_1(Z+CN),\\C&=k'_2(X+AL)+k'_1(Y+BM)+k_3(Z+CN),\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

根据这些方程，我们可以由X、Y、Z求出A、B和C，而这就将给出问题的最普遍的解。

这时，椭球外面的势就将是由椭球的磁化所引起的势再加上由外磁力所引起的势。

438.〕唯一具有实际重要性的事例就是

① 参阅 ThomsonandTait'sNaturalPhilosophy，§525,2ndEdition.

$$\kappa'_1=\kappa'_2=\kappa'_3=0 \quad (9)$$

的事例。

这时我们就有

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{k_1}{1-k_1L}X,\\ B&=\frac{k_2}{1-k_2M},\\ C&=\frac{k_3}{1-k_3L}Z \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

如果椭球有两个轴是相等的，而且它的形状属于扁平型，则有

$$b=c=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}; \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} L&=-4\pi\left(\frac{1}{e^2-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}}\sin^{-1}e\right),\\ M=N&=-2\pi\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\sin^{-1}e-\frac{1-e^2}{e^2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

如果它的形状属于细长型，则有

$$a=b=\sqrt{1-e^2c}; \qquad (13)$$

$$\left.\begin{aligned} L=M&=-2\pi\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1-e^2}{2e^3}\log\frac{1+e}{1-e}\right)\\ N&=-4\pi\left(\frac{1}{e^2}-1\right)\left(\frac{1}{2e}\log\frac{1+e}{1-e}-1\right) \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

在球的事例中，e=0，故有

$$L=M=N=-\frac{4}{3}\pi. \quad (15)$$

在平板式的椭球的事例中，L 的值在极限下等于-4π，而 M 和 N 变为$-\pi^2\frac{a}{c}$。

在细长卵形的椭球的事例中，L 和 M 趋近于一个值-2π，而 N 趋近于一个形式

$$-4\pi\frac{a^2}{c^2}\left(\log\frac{2c}{a}-1\right),$$

并当 e=1 时变为零。

由这些结果可以看出：

(1)当磁化系数κ很小时，不论它为正为负，感生磁化将近似地等于磁化力乘以 k，而几乎和物体的形状无关。

(2)当κ是一个很大的量时,磁化主要依赖于物体的形状而几乎和κ的确切值无关，只除了作用在一个细长椭球上的纵向力的事例以外，该椭球是如此地细长，以致尽管κ很大而 Nk 却是一个小量。

(3)假如κ的值可以为负而等于$\frac{1}{4\pi}$，我们在垂直作用在一个平盘上的磁化力的事例中就将得到无限大的磁化。这一结果的荒谬性，就证实了我们在第428节中给出的结论。

由此可见，只要κ很小，就可以利用任意形状的物体来作测定κ值的实验，例如在一切抗磁性物体以及除铁、镍、钴以外的一切磁性物体的事例中就是这种情况。

然而，如果像在铁的事例中那样κ是一个大数，则利用球形或扁平形的物体来作实验就是不适于测定κ的；例如，在球体的事例中，如果像在某些种类的铁中那样κ=30，则磁化和磁化力之比将等于1比4.22，而假如κ为无限大，则这一比值将等于1比4.19，因此，磁化测定中的很小误差将导致κ值中的很大误差。

但是，如果我们使用一块很长的卵形铁，只要Nk和一相比还有中等的大小，我们就可以由磁化的测定来推知κ的值，而N值越小则κ值将越准确。

事实上，如果Nk被弄得足够小，则N本身方面的一个小误差将不会引入多大误差，因此我们可以使用任意形状的长物体，例如长丝或长棒，而不一定使用卵形体[①]。然而我们必须记得，只有当Nk还远小于1时这种代换才是允许的。事实上，平头长柱上的磁量分布是和长卵形体上的分布并不相像的，因为在柱端附近自由磁是很集中的，而在卵形体的事例中自由磁的密度却和到赤道的距离成正比。

然而，圆柱上的电的分布，却确实可以和卵形体上的分布相比拟，正如我们已经在第152节中看到的那样。

这些结果也使我们能够理解，当一个永磁体具有细长形状时，为什么它的磁矩可以达到大得多的值。假若我们必须垂直于盘面的方向来把一个圆盘磁化到强度I，然后就把它放置不管，则内部各粒子将受到一个等于4πI的恒定的去磁力，而这个去磁力即使还不足以破坏一部分磁化，它也会很快地作到这一点，如果受到一些振动或温度变化的促进的话[②]。

假如我们要横向地磁化一个柱体，则去磁力将只是2πI.

假如磁体是一个球，则去磁力将是$\frac{4}{3}\pi I$

在一个横向磁化的圆盘中，去磁力是$\pi^2\frac{a}{c}I$，而在一个纵向磁化的长卵形体中，去磁力是最小的，它等于$4\pi\frac{a^2}{c^2}I\log\frac{2c}{a}$。

因此，一个细长的磁体，比一个粗短的磁体更不容易失去其磁性。

作用在沿三个轴线具有不同磁系数的一个椭球上并倾向于使它绕x轴转动的力矩是

$$\frac{4}{3}\pi abc(BZ-CY)=\frac{4}{3}\pi abcYZ\frac{k_2-k_3+k_2k_3(M-N)}{(1-k_2M)(1-k_3N)}$$

[①] {如果使用长丝，它们的长度至少应为直径的300倍。}

[②] 磁感所将有的值。}

因此，如果 κ_2 和 κ_3 很小，这个力就将主要依赖于物体的结晶品质而不依赖于它的形状，如果它的各方线度相差并不悬殊的话；但是，如果 κ_2 和 κ_3 相当大，就像在铁的事例中那样，力就会显著地依赖于物体的形状，而物体就会转动得使自己的长轴平行于力线。假如可以得到一个足够强的然而却是均匀的磁力场，则一个细长的各向同性的抗磁性物体也会转动，以使自己的最长的线度和磁力线相平行[①]。

439.]一个旋转型椭球在任意磁力作用下的磁化分布问题，曾由 J.诺依曼[②]研究过。基尔霍夫[③]把这种方法推广到了任意力作用下的无限长圆柱的事例。

在他的著作的第 17 节中,格林曾对受到平行于柱轴的均匀外力 X 作用的一个有限长圆柱中的磁量分布作出了探讨。尽管这种探讨中的某些步骤并不是很严格，所得结果却很可能大致代表了这一最重要事例中的实际磁化。它肯定很好地表示了从 κ 很大的柱体事例到 κ 很小的柱体事例的过渡，但是它在抗磁性物质那样的 κ 为负数的事例中却是完全失效的。

格林发现，在一个半径为 α 而长度为 $2l$ 的圆柱上，距柱体中点为 x 距离处的自由磁量线密度是

$$\lambda=\pi kXpa\frac{e^{\frac{px}{a}}-e^{-\frac{px}{a}}}{e^{\frac{pl}{a}}+e^{-\frac{pl}{a}}}$$

式中 p 是应由下列方程中求出的一个数字：

$$0.231863-2\log_e p+2p=\frac{1}{\pi kp^2}$$

下面是 p 和 κ 的一些对应值。

k	p	k	p
∞	0	11.802	0.07
336.4	0.01	9.137	0.08
62.02	0.02	7.517	0.09
48.416	0.03	6.319	0.10
29.475	0.04	0.1427	1.00
20.185	0.05	0.0002	10.00
14.794	0.06	0.0000	∞
		负数	虚数

当圆柱的长度远大于它的半径时，柱体中点每一侧的总的自由磁量就理所当然地是

$M=\pi a^2kX$。

---

① {这种效应依赖于 κ 的平方，将在第 440 节中研究的力依赖于 κ 的一次方；因此，既然抗磁性物体的 κ 是很小的，后一种力就将胜过本节所讨论的这种倾向，只有特例除外。}

② Crelle，bd.xxxvii(1848).

③ Crelle,bd.xlviii(1854).

在这些磁量中，一个量$\frac{1}{2}pM$是位于柱体的端平面上的

[①]，

而从总量M的重心到柱端的距离是$\frac{a}{p}$。

当κ很小时p就很大，从而几乎所有的自由磁都位于柱体的两端。当κ增大时p就减小，而自由磁就分散在离柱端较大的距离处。当κ是无限大时，柱体任意点上的自由磁将简单地正比于从该点到中点的距离，这种分布和均匀力场中的一个导体柱上的电荷分布相仿。

440．]在除了铁、镍、钴以外的所有物质中，磁化系数都很小，以致物体的感生磁化只引起磁场中的力的很小变化。因此，作为初级近似，我们可以假设物体内部的实际磁力和物体不存在时的磁力相同。因此，作为初级近似，物体的表面磁化就是$k\frac{dV}{dv}$，此处$\frac{dV}{dv}$是由外部磁体引起的磁势在表面的内向法线方向上的增加率。现在如果算出由这一表面磁化所引起的势，我们就可以用它来得到第二级近似。

为了在这种初级近似下求出由磁量分布所引起的机械能量，我们必须求出在物体的整个表面上计算的面积分

$$E=\frac{1}{2}\iint kV\frac{dV}{dv}dS$$

现在，我们在第100节中已经证明，这一积分等于在物体所占的整个空间中计算的体积分

$$E=-\frac{1}{2}\iiint k\left(\overline{\frac{dV}{dx}}\Big|^2+\overline{\frac{dV}{dy}}\Big|^2+\overline{\frac{dV}{dz}}\Big|^2\right)dxdydz,$$

或者，如果R是合磁力，则有

$$E=-\frac{1}{2}\iiint kR^2dxdydz$$

现在，既然在一个位移δx上磁力对物体所作的功是Xδx，此处X是x方向上的机械力，而且，既然

$\int X\sigma x+E=$常量，

就有

$$X=-\frac{dE}{dx}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\iiint kR^2dxdydz=\frac{1}{2}\iiint k\frac{d\cdot R^2}{dx}dxdydz,$$

而这就表明，作用在物体上的力，就仿佛使物体的每一部分都从R^2较小的地方运动到R^2较大的地方一样，而作用在单位体积上的力则是

$$\frac{1}{2}k\frac{d\cdot R^2}{dx}.$$

如果像在抗磁性物体中那样κ是负的，则正如法拉第所首次证明的那样，这个力是从磁场的较强部分指向它的较弱部分的。在抗磁性物体的事例中观察到的多数作用，都取决于这一性质。

---

① {柱体正端的圆柱面上的自由磁量 假设端平面上的密度和x=l时的圆柱面上的密度相同，则端平面上的磁量是 于是总的自由磁量就是 当plα很大时，这个量就等于

船舶的磁学

441．]差不多磁科学的每一个部分，都在航海中有其用处。地磁对罗盘指针的定向作用，是在太阳和星星都隐没时确定船舶航程的唯一方法。指针对直实子午线的偏角，起初似乎是罗盘在航海方面的应用的一种障碍，但是，当这一困难通过磁力海图的绘制而被克服以后，看来磁偏角本身就很可能会帮助海员确定他的船的位置了。

航海中的最大困难，一直是经度的确定；但是，既然磁偏角在同一经度平行线的不同点上是不同的，一种磁偏角的观测和有关纬度的知识一起，就将使海员能够在磁力海图上定出自己的位置了。

但是，近年以来，人们在造船中大量地使用了钢铁，以致不照顾到船舶本身作为一个磁性物体而对指针发生的作用，罗盘的使用就是不可能的了。

正如我们已经看到的那样，确定一块任意形状的铁在地球磁力的影响下的磁量分布，即使铁块没有受到机械胁变或其他干扰的影响也是一个很困难的问题。

然而，在现在这一事例中，部题却通过下面的考虑而得到了简化。

罗盘被假设为放在船上，其中心位于船上的一个固定点，而且离任何的铁质都很远，以致指针的磁性并不在船上感生任何可觉察的磁性。罗盘指针的体积被假设为很小，以致我们可以认为指针每一点上的磁力都是相同的。

船上的铁被假设为只有两种。

(1)按恒定方式被磁化了的硬铁。

(2)其磁化由地球或其他磁体所感生的软铁。

严格说来我们必须承认，最硬的铁也不仅能够受到感应而且会以各种方式损失其一部分所谓的永久磁化。

最软的铁也能够保持其所谓的剩磁化。铁的实际性质并不能通过它由以上定义的硬铁和软铁所合成来准确地加以表示。但是已经发现，当一只船受到地球磁力的作用而没有受到气候的任何反常作用的影响时，可以假设船的磁性部分地起源于永久磁化而部分地起源于感应，而当把这种假设应用于罗盘的改正时是可以得出足够准确的结果的。

作为罗盘变化理论之基础的那些方程,是由泊松在第五卷 Mémoires de l’Institut，p.533(1824)上给出的。

包含在这些方程中的唯一和感生磁性有关的假设就是，如果起源于外界磁性的一个磁力 X 在船舶的铁中引起一种感生磁化，而这种感生磁化对罗盘指针作用一个其分量为 X'、Y'、Z'的干扰力，那么，如果外磁力按一个给定的比例而发生了变化，则干扰力的分量将按相同的比例而发生变化。

确实，当作用在铁上的磁力很大时，感生磁化就不再和外磁力成正比了，但是对于由地球所引起的那样大小的磁力来说，这种比例性的欠缺却是不可觉察的。

因此在实践中我们就可以假设，如果一个其值为 1 的磁力通过船上铁器的媒介而对罗盘指针作用一个 x 分量为 α、其 y 分量为 d 而其 z 分量为 g 的干扰力，则由一个沿 x 方向的力 X 所引起的干扰力的分量将是 αX、dX 和 gX。

因此，如果我们假设把座标轴固定在船上，使得 x 轴指向船头，y 轴指向右舷，而 z 轴指向龙骨，如果 X、Y、Z 代表地球磁力在这些方向上的分量，而 X'、Y'、Z' 代表地球和船作用在罗盘指针上的合磁力的分量，则有

$$\left.\begin{aligned} X' &= X + aX + by + cZ + P, \\ Y' &= Y + dX + eY + fZ + Q, \\ Z' &= Z + gX + hY + kZ + R \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

在这些方程中，a、b、c、d、e、f、g、h、k 是依赖于船上软铁的数量、布置及其感应性能的九个常系数。

P、Q、R 是依赖于船只的永久磁化的常量。

很显然，如果磁感是磁力的线性函数，则这些方程是充分普遍的，因为它们不多不少，恰恰是一个矢量作为另一矢量之线性函数的最普遍的表示式。

也可以证明，它们并不是太普遍的，因为，通过铁的一种适当布置，任何一个系数都可以被弄得独立于其他系数而变。例如，一根细长的铁棒在纵向磁力的作用下会获得磁极，其中每一磁极的强度在数值上等于棒的截面乘以磁化力再乘以感生磁化系数。一个对棒为横向的磁力会产生弱得多的磁化，其效应在几倍直径的距离处就几乎是觉察不到的。

如果在罗盘指针的前方在向船头方向量去的 x 距离处放一根长铁棒，那么，设棒的截面是 A 而它的磁化系数是 κ，则磁极强度将是 AκX，而如果$A = \frac{ax^2}{k}$，则这个磁极对罗盘指针作用的力将是aX。可以假设棒很长，以致另一个磁极对罗盘的效应可以忽略不计。

这样，我们就得到了使系数 α 具有任何需要的值的办法。如果我们把截面为 B 的另一根棒放得有一个端点位于同一点上，即位于向船头量去的 x 距离处，而棒的长度则伸向右舷，且其远处的一极对罗盘并不发生可觉察的效应，则由这个棒引起的干扰力将是沿着 x 方向的，而且是等于$\frac{BkY}{x^2}$的，或者，如果$B = \frac{bx^2}{k}$，则力将是bY。

因此这个棒就将引入系数 b。

从同一点伸向下方的第三根棒将引入系数 C。系数 d、e、f 可以用从罗盘右侧的一点伸向船头、右舷和下方的三根棒来引入，而 g、h、κ 则由从罗盘下面的一点沿上述三个方向摆放的三根棒来引入。

由此可见，九个系数中的每一个系数，都可以通过适当摆放的铁棒来分别地加以改变。

各量 P、Q、R 不过是作用在罗盘上的力的分量，该力起源于船的永久磁化以及由这种永久磁化所引起的那一部分感生磁化。方程组(1)的一种全面讨论，以及船的真实磁学航向和罗盘所示航向之间的关系的全面讨论，已由阿乞巴耳德·斯密茨先生在海军部的《罗盘偏差手册》(Manual of the Deviation of the Compass)中给出。

那里给出了一种研究问题的很有价值的图解方法。取一个固定点作为原点，从该点开始作一直线，其方向和大小代表着作用在罗盘指针上的实际磁力的水平部分。在船只转来转去而使它的船头逐次采取不同的方位

时，这条直线的端点就描绘出一条曲线，曲线上的每一点都对应于一个特定的方位。

这样一条曲线叫做“磁迹图”(Dygogram)，利用这种图，可以按照船只的磁学航向来给出作用在罗盘上的力的方向和大小。

磁迹图有两种型式。在第一种型式中，曲线画在一个平面上，而该平面在船只转动时是固定在空间中的。在第二种型式中，曲线是画在相对于船为固定的平面上的。

第一种磁迹图是帕斯卡蚶线，第二种磁迹图是椭圆。关于这些曲线的作图和使用，以及许多在数学家看来很有兴趣而在航海家看来也很重要的定理，请读者参阅海军部的《罗盘偏差手册》。

第六章

感生磁的韦伯理论

442.]我们已经看到，泊松假设了铁的磁化就在于每一磁分子内部的两种磁流体的分离。如果我们希望避免关于存在磁流体的假设，我们也可以用另一种形式来叙述同一理论；我们可以说，当磁化力作用在铁的分子上时，每一个分子都会变成一个磁体。

韦伯的理论与此不同。他假设，即使在加上磁化力以前，铁分子也永远是一些磁体，但是，在普通的铁中，各分子的磁轴是不偏不倚地指向各个方向的，从而整块的铁就不会显示任何磁性。

当一个磁力作用在铁上时，它就倾向于把分子的轴都转到同一个方向，这样就会使整块的铁变成一个磁体。

假如所有分子的磁轴都已摆得互相平行，铁就会显示它所能获得的最大磁化强度。因此，韦伯的理论就蕴涵了一个极限磁化强度的存在，从而关于存在这样一个极限的实验证据就是这种理论所必需的。显示着对一个磁化极限值的趋近的实验，曾由焦耳[①]J．密勒[②]以及厄翁和娄[③]作出。

比兹[④]关于在磁力的作用下沉积出来的电解铁(electrotypeiron)的实验，提供了有关这一极限的最全面的证据。

一条银导线涂了漆，在漆层上划开一条很细的纵向开口，以露出很细的一条金属。然后把这条导线浸入一种铁盐的溶液中，并放入磁场中，使开口沿着一条磁力线的方向。用这根导线作为通过溶液的一个电流的阴极，铁就会一个分子一个分子地沉积在导线的很窄地暴露部分上。然后就对这样形成的一个铁的细丝进行磁的检验。经发现，对于如此小的一部分铁来说，它的磁矩是很大的，而当使一个强大的磁力沿相同方向作用上去时，却发现暂时磁化的增量很小，而永久磁化则并不改变。沿相反方向而作用的一个磁力将立刻使细丝回到按普通方式而被磁化的铁的状况。

韦伯理论认为，在这一事例中，磁化力在每一分子的沉积时刻就把它的磁轴摆到了相同的方向上；这种理论是和观察到的现象符合得很好的。

比兹发现，当电解在磁化力的作用下继续进行时，后来沉积下来的铁的磁化强度就将较小。当各个分子肩并肩地被排在早先已经沉积下来的那些分子旁边时，它们的磁轴或许会偏离磁力线的方向，因此只有在很细的铁条纹的事例中才能得到近似的平行性。

如果像韦伯所假设的那样，铁分子本来就已经是一些磁体，则在它们的电沉积过程中足以使它们的磁轴平行排列的任何磁力，都将足以在沉积丝中产生最高的磁化强度。

另一方面，如果铁分子并不是磁体而只是能够受到磁化，则沉积丝的磁化将依赖于磁化力，其方式和一般软铁依赖于磁化力的方式相同。比兹的实验没有为后一假说留下任何余地。

[①] AnnalsofElectricity,iv.p.131,1839;Phil.Mag.[4]iii.p.32.

[②] Pogg.Ann.lxxix.p.337,1850.

[③] Phil.Trans.1889.A.p.221.

[④] Pogg.cxi.1860.

443．]现在我们将像韦伯那样假设，在铁的每单位体积中共有 n 个磁性分子，而每个磁性分子的磁矩是 m。假如所有分子的磁轴都已摆得相互平行，则单位体积的磁矩将是

M＝nm，

而且这就将是铁所能得到的最大磁化强度。

韦伯假设，在普通铁的非磁化状态中，各分子的磁轴是杂乱无章地沿各个方向摆放的。

为了表示这一点，我们可以假设画出了一个球，而且从球心画一些半径，分别和 n 个分子中的每一个分子的磁轴方向相平行。这些半径的端点的分布，将代表各分子的磁轴的分布。在普通铁的事例中，这 n 个点是均匀地分布在球面的各个部分上的，因此，其磁轴和 x 轴的夹角小于α的分子的数目就是

$$\frac{n}{2}(10\cos\alpha),$$

而其磁轴和 x 轴的夹角介于α和α+dα之间的分子的数目就是

$$\frac{n}{2}\sin\alpha da$$

这就是一块从来未被磁化的铁中的分子分布。

现在让我们假设，使一个磁力 X 沿着 x 轴的方向而作用在铁上，并考虑其磁轴起先和 x 轴成α角的一个分子。

如果这个分子是可以完全自由地转动的，它就会把自己转到磁轴平行于 x 轴的位置，而假如所有的分子都是这样的，则我们将发现最小的磁化力都将足以引发最高的极化程度。然而事实却不是这样的。

各分子并不把他们的磁轴转得平行于 x 轴，而这不是因为每一个分子都受到一个倾向于保持其原始方向的力的作用，就是因为整个分子体系的相互作用引起了一种与此等价的效应。

韦伯作为最简单的假设而采用了前一种假设。它假设，当受到偏转时，每一个分子都倾向于以一个力而返回其原始位置；这个力和一个沿原始磁轴方向作用的磁力 D 所将产生的力相同。

因此，磁轴所实际采取的位置，就是沿着 X 和 D 的合力方向的。

设 APB 代表一个球的截面，球的半径以一定的比例代表着力 D。

设半径 OP 平行于某一特定分子在其原始位置上的磁轴。

设 SO 按相同的比例代表被假设为从 S 向 O 而起作用的磁化力 X。这样，如果分子受到一个沿 SO 方向的力 X 和一个平行于分子磁轴之原始方向 OP 的力 D 的作用，则其磁轴将转到 SP 的方向，也就是 X 和 D 的合力的方向。

既然各分子的磁轴起初是沿着一切方向的，P 就可以是球面上随便哪一个点。在 X 小于 D 的图 5 中，磁轴的末位置 SP 可以取任意方向，但却不是完全随便的，因为磁轴转向 A 的分子将比磁轴转向 B 的分子更多。在 X 大于 D 的图 6 中，分子的磁轴将全都包括在和球面相切的锥面 TST＇中。

因此，按照 X 是小于还是大于 D，就有两种不同的事例。

设α=AOP，即分子磁轴对 x 轴的初倾角。

θ=ASP，即磁轴在受到力 X 的倾转时的倾角。

β=SPO，即偏转角。

SO=X，即磁化力[①]。

OP=D，即倾向于回返初位置的力。

SP=R，即 X 和 D 的合力。

m=分子的磁矩。

于是，倾向于使角θ减小的由 X 引起的力偶矩就是

$mL=mX\sin\theta$，

而倾向于使θ增大的由 D 引起的力偶矩就是

$mL=mD\sin\beta$。

令这些值相等并记得$\beta=\alpha-\theta$，我们就得到

$$\tan\theta=\frac{D\sin\alpha}{X+D\cos\alpha} \qquad (1)$$

以确定偏转后的磁轴方向。

其次我们应该求出力 X 在物体中引起的磁化的强度，而为此目的，我们必须把每一个分子的磁矩投影到 x 轴上，然后把所有这些分量加起来。

分子磁矩沿 x 轴方向的分量是

$m\cos\theta$。

其磁矩之初倾角介于α和α+dα之间的分子数是

$$\frac{n}{2}\sin\alpha d\alpha$$

因此我们必须记得θ是α的函数并计算积分

$$I=\int_0^\pi\frac{mn}{2}\cos\theta\sin\alpha d\alpha \qquad (2)$$

我们可以把θ和α都用 R 表示出来，于是被积分式就变成

$$-\frac{mn}{4x^2D}(R^2+X^2-D^2)dR, \qquad (3)$$

它的不定积分是

$$-\frac{mnR}{12X^2D}(R^2+3X^2-3D^2)+C \qquad (4)$$

在第一种事例中，即当 X 小于 D 时，积分限是从 R=D+X 到 R=D-X。在第二种事例中，即当 X 大于 D 时，积分限是从 R=X+D 到 R=X-D。

当 X 小于 D 时，有

$$I=\frac{2}{3}\frac{mn}{D}X \qquad (5)$$

当 X 等于 D 时，有

$$I=\frac{2}{3}mn \qquad (6)$$

当 X 大于 D 时，有

[①] {作用在磁体内部一个磁极上的力是不确定的，它依赖于磁极所在的空腔的形状。例如力 X 是不确定的，因为，既然我们关于分子磁体的形状及布置一无所知，那也就没有任何理由假设力是一种形状的空腔中的那个力而不是另一种形状的空腔中的那个力。于是，看样子，除非作出别的假设，我们似乎应该令 $X=X_0+pI$，式中 X_0 是外磁力而 p 是我们只知道它介于 0 和 4π之间的一个常数。在铁中，I 比 X_0 大得多；由于有这种事实，这里的不确定性就更加讨厌，因为包含不确定性的那一项可以是两项之中更加重要得多的一项。}

$$I = mn(1-\frac{1}{3}\frac{D^2}{X^2}); \qquad (7)$$

而当 X 变为无限大时则有

I=mn(8)

按照韦伯①所采用的这种理论的形式，当磁化力从 0 增大到 D 时，磁化就按相同的比例而增大。当磁化力达到 D 这个值时，磁化是极限值的三分之二。当磁化力进一步增大时，磁化不是无限地增大而是趋于一个有限的极限。

图 7

磁化的规律如图 7 所示。图中的磁化力是从 0 向右算起的，而磁化则用纵座标来代表。韦伯自己的实验给出了和这一规律符合得令人满意的结果。然而，也可能 D 值并不是对同一块铁中的所有分子都相同，从而从由 0 至 E 的直线到 E 以后的曲线的过渡也可能并不像图中所示的那样突然。

444．]这种形式的理论并不能对剩磁化作出任何说明，而人们发现，当磁化力被取消以后，剩磁化是存在的。因此我曾经想到，有必要检查再作出一条假设的后果，这条假设牵涉到分子的平衡位置可以永久性地改变的条件。

让我们假设，如果被偏转了任意一个小于 β_0 的角度 β，磁性分子的轴线在致偏力被取消时将返回其原始位置，但是，如果偏转角 β 超过 β_0，则当致偏力被取消时磁轴并不会回返到原始位置，而是将永久性地偏转一个角度 $\beta-\beta_0$，这个角度可以叫做分子的永久取向[①]。

这条关于分子偏转规律的假设，并不能认为是建筑在任何有关物体之内部结构的确切知识上的，这只不过是我们由于对事情的真实情况全无所知而采取的一种追随韦伯所提示的猜想的想像方式而已。

设 $L=D\sin\beta_0$，(9)

那么，如果作用在一个分子上的力偶矩小于 mL，就不会有任何永久偏转；但是，如果力偶矩超过了 L，那就会出现平衡位置的永久改变了。

为了追索这一假设的后果，设作中心在 O 点而半径为 OL=L 的一个球。

只要 X 还小于 L，一切情况就将和以前考虑过的事例中的情况相同；但是，一旦 X 超过了 L，它就将开始引起某些分子的永久偏转。

让我们考虑图 8 中的事例，这时 X 大于 L 而小于 D。以 S 为顶

点作一个双锥面和球 L 相切。设这个锥面和球 D 交于 P 及 Q。那么，如果一个分子的磁轴在它的初位置上是位于 OA 和 OP 之间或 OB 和 OQ 之间的，则它将偏过一个小于 β_0 的角度，从而就不会有永久偏转。但是，如果分子的磁轴起初位于 OP 和 OQ 之间，则将有一个力矩大于 L 的力偶作用在分子上并使它偏转到位置 SP 上，而当力 X 停止作用时，分子并不会回返原来的取向而是采取永久偏转的方向 OP。

让我们令

$L=X\sin\theta_0$ 式中 θ_0=PSA 或 QSB，

于是，按照以前的假说其磁轴将具有介于 θ_0 和 $\pi-\theta_0$ 之间的 θ 值

---

① {麦克斯韦所真正作出的，似乎并不是本节叙述的这条假设，而是在第 445 节的脚注中论述的那种假设。}

图 8 图 9

的所有那些分子，在力 X 的作用过程中都将被弄得具有 θ_0 这个值。

因此，在力 X 的作用过程中，那些在偏转以后磁轴位于半顶角为 θ_0 的双锥面的任一片内的分子，都将像在以前的事例中一样地排列，但是，那些按照以前的理论其磁轴将位于两片锥面之外的分子却将永久性地受到偏转，使得它们的磁轴将在锥面指向 A 的那一片附近形成一种密集带。

随着 X 的增大，属于 B 点周围那一锥面的分子数就持续减小，而当 X 变为等于 D 时，所有的分子就都已被迫离开了它们从前的平衡位置，而转到 A 点周围的锥面一带了；因此，当 X 变得大于 D 时，所有的分子就将形成锥面的一部分或密集在锥面附近了。

当力 X 被撤消时，在 X 小于 L 的事例中一切情况就都会返回原始的状态。当 X 介于 L 和 D 之间时，将有一个围绕 A 点的而其半顶角为

$$AOP=\theta_0+\beta_0$$

的锥面，和一个围绕 B 点的而其半顶角为

$$BOQ=\theta_0-\beta_0$$

的锥面。在这些锥面内部，分子的磁轴是均匀分布的。但是，其磁轴的原始方向位于这两个锥面之外的所有分子，却都已经被驱离了它们的原始位置而在 A 点周围的锥面附近形成了密集带。

如果 X 大于 D，则 B 点周围的圆锥将完全分散，而起先形成这一圆锥的所有分子将被转化成 A 点周围的密集带，而其倾角则是 $\theta_W+\beta_0$。

445．]用和以前相同的办法处理这一事例[①]，我们就能求得在力 X 作用期间的暂时磁化强度，此处的 X 是
被假设为作用在以前从示被磁化过的铁上的。
当 X 小于 L 时，

$$I=\frac{2}{3}M\frac{X}{D}$$

当 X 等于 L 时，

$$I=\frac{2}{3}M\frac{L}{D}$$

当 X 介于 L 和 D 之间时，

[①] [正文中给出的结果，除了一点小小的例外，都可以按照下述的手续得出。第 444 节中的修订理论的叙述如下：一个磁性分子的磁轴，如果偏转了一个小于 β_0 的角 β，则当致偏力被撤消时将返回其原始位置；但是，当偏转超过了 β_0 时，倾向于反抗偏转的力就会垮掉而允许分子偏转到和其偏转为 β_0 的分子相同的方向，而当致偏力被撤消时，分子就将采取一个方向，平行于其偏转本为 β_0 的那种分子的方向。这个方向可以叫做分子的永久取向。在 X＞L＜D 的事例中，磁矩的表示式 I 包括两个部分。第一部分是由锥面 AOP 和 BOQ 中的分子引起的，可以按照和第 443 节中的方法完全相同的方法来求出，只要适当注意到积分限就行了。参照图 8，我们按照以上的理论叙述就能求得表示式的第二部分 经过化简，这两部分就共同给出正文中的结果。当 X＞D 时，积分又是包括两部分，其中一部分正如在第 443 节中那样应在圆锥 AOP 上计算。第二部分是（见图 9） 经过化简以后，这一事例中的 I 的值和正文中所给的值在第三项上 给数值表的影响就是，当 X=6、7、8 时，对应的 I 值将是 887、917、936。这些变化并不会改变图 10 中所给的暂时磁化曲线的一般特点。图 8 的事例中的 I＇值是 图 9 的事例中的 I＇值可按类似的方式求出。]

$$I = M\left\{\frac{2}{3}\frac{X}{D} + (1-\frac{L^2}{X^2})\left[\sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{X^2}{D^2}-\frac{L^2}{D^2}}\right]\right\}$$

当 X 等于 D 时，

$$I = M\left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(1-\frac{L^2}{D^2})^{\frac{3}{2}}\right\}$$

当 X 大于 D 时，

$$I = M\left\{\frac{1}{3}\frac{X}{D} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{D}{X} + \frac{(D^2-L^2)^{\frac{3}{2}}}{6X^2D} - \frac{\sqrt{X^2-L^2}}{6X^2D}(2X^2-3XD+L^2)\right\}$$

当 X 为无限大时，

I=M。

当 X 小于 L 时，磁化服从以前的规律，而且是和磁化力成正比的。一旦 X 超过了 L，磁化就会有一个更快的增加率，因为这时有些分子开始被从一个圆锥转送到另一个圆锥。然而，随着形成负圆锥的分子数的减少，这种迅速的增大很快就会停止，而最后磁化就会达到极限值 M。

假若我们必须假设不同的分子具有不同的 L 值和 D 值，我们就会得到不同的磁化阶段区别得并非如此明显的一种结果。

由磁化力 X 引起而当该力已被撤消时才能观察到的剩磁化 I' 如下所述：

当 X 小于 L 时，没有剩磁化。

当 X 介于 L 和 D 之间时，

$$I' = M(1-\frac{L^2}{D^2})(1-\frac{L^2}{X^2})$$

当 X 等于 D 时，

$$I' = M(1-\frac{L^2}{D^2})$$

当 X 大于 D 时

$$I' = \frac{1}{4}M\left\{1-\frac{L^2}{XD} + \sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}}\sqrt{1-\frac{L^2}{X^2}}\right\}^2$$

当 X 为无限大时

$$I' = \frac{1}{4}M\left\{1+\sqrt{1-\frac{L^2}{D^2}}\right\}^2$$

如果令

M=1000，L=3，D=5，

我们就得到下列的暂时磁化和剩磁化的值

磁化力	暂时磁化	剩磁化
X	I	I′
0	0	0
1	133	0
2	267	0
3	400	0
4	729	280
5	837	410
6	864	485
7	882	537
8	897	575

剩磁化曲线在 X=L 时开始，并趋近于一条渐近线．其纵座标=0.81M。

必须记得，这样求得的剩磁对应于一种情况，即当外力被撤消时并不存在任何起源于物体本身之磁性分布的去磁力。因此，这种计算只适用于很长的纵向磁化的物体。在短粗物体的事例中，剩磁将由于自由磁的反作用而有所减小，其方式正如有一个反向的外磁化力作用在物体上一样[①]。

446.]在这种理论中我们作出了如此多的假设和引用了

如此多的调节常量；这样一种理论的科学价值，并不能单纯地根据它和某一组实验的数值符合来加以评估。如果它还有任何价值，那就是因为它使我们能够对一块铁中在磁化过程中出现的变化得到一种思维形象。为了检验理论，我们必须把它应用于这样一个事例：一块铁在受到一个磁化力 X_1 的作用以后又受到一个磁化力 X_1 的作用。

如果新力 X_1 是沿着和 X_0 的作用方向相同的方向(我们将称之为正方向)而作用的，那么，如果 X_1 小于 X_0，则它将不会引起分子的任何永久取向，从而当 X_1 被撤消以后，剩磁化将和由 X_0 所引起的相同。如果 X_1 大于 X_0，则它所引起的效应将和 X_0 不曾起过作用时的效应完全相同。

但是，让我们假设 X_1 是沿负方向而作用的，并且让我们假设

X_0=Lcosecθ_0，而 X_1=-Lcosecθ_1

当 X_1 在数值上增大时，θ_1 就减小。X_1 将引起其永久偏转的第一批分子，就是形成 A 点周围的锥面之密集带的那些分子[①]，以及当未受偏转时有

[①] {试考虑这样一个事例：一块铁沿正方向受到一个磁力的作用，该磁力从零增加到个足以产生永久磁化的值 X0，然后又减小到零。很显然，按照上述的理论，由于给予某些分子磁体以永久性的取向，对于磁化力的一个给定值来说，磁化强度在磁化力减小时将比减小时将比在磁化力增加时为大．因此，铁在磁场中的行为将依赖于他的以前处理．这一效应被厄翁称为“磁滞”，他充分地研究了这种效应（见 Phil．Trans．Part Ⅱ，1885）。然而，第 445 节中给出的理论却不能解释厄翁所发现的现象的全部。因为，如果我们在上一事例中在减小了磁力之后又增大它，则针对一个值 X1＜X0 来说，磁化强度的值应该和磁力第一次减小到 X1 时相同。然而厄翁的研究却表明情况不是这样。这些研究以及类似的研究的一种简短介绍，将在本书的补遗卷中给出。}

[①] {这里假设，在图 8 和图 9 中，P 点是位于 C 点的右方的。}

一个倾角 $\theta_0+\beta_0$ 的那些分子。

一旦 $\theta_1-\beta_0$ 变到小于 $\theta_0+\beta_0$，去磁过程就将开始。既然这时 $\theta_1=\theta_0+2\beta$，去磁开始时所要求的力 X_1 就将小于引起磁化的力 X_0。

假如 D 值及 L 值对所有的分子来说都是相同的，则 X_1 的很小增量就将把所有磁轴倾角为 $\theta_0+\beta_0$ 的分子都转到一个磁轴对负轴 OB 的倾角为 $\theta_1+\beta_0$ 的位置上去。

虽然去磁并不是按一种如此突然的方式发生的，但是它却发生得相当迅速，以致给过程的这种解释模式提供了某种支持。现在让我们假设，通过取一个反向力 X_1 的适当值，我们在撤消 X_1 后恰好使铁块完全去了磁。

现在，各分子的磁轴将不会像在一块从来未被磁化的铁中那样完全随便地分布在一切方向上，而是将形成三组。

(1)在一个围绕正极而半顶角为 $\theta_1-\theta_0$ 的锥面内，分子的磁轴保持在他们的原始位置上。

(2)在一个围绕负极而半顶角为 $\theta_0-\beta_0$ 的锥面内，情况也如此。

(3)所有其他分子的磁轴方向形成一个围绕负极的锥面，而其倾角为 $\theta_1+\beta_0$。

当 X_0 大于 D 时，第二组是不存在的。当 X_1 大于 D 时，第一组也不存在。

因此，尽管在外观上去了磁，铁的状态却是和一块从来未经磁化的铁的状态不同的。

为了证明这一点，让我们考虑一个沿正方向或负方向而作用的磁化力 X_2 的效应。这样一个力的第一种永久效应将发生在磁轴和负方向成角 $\theta_1+\beta_0$ 的第三组分子上。

如果 X_2 是沿负方向作用的，则一旦 $\theta_2+\beta_0$ 变成小于 $\theta_1+\beta_0$，也就是说一旦 X_2 变成大于 X_1，它就将开始产生永久性的效应。但是，如果 X_2 是沿正方向作用的，则一旦 $\theta_2-\beta_0$ 变成小于 $\theta_1+\beta_0$，也就是说当 $\theta_2=\theta_1+2\beta_0$ 即当 X_2 还比 X_1 小得多时，X_2 就将开始再引起铁的磁化。

因此，由我们的假说可以看出：

当一块铁受到一个力 X_0 的磁化时，不加上一个大于 X_0 的力就不能使它的剩磁有所增加。一个小于 X_0 的反向力就足以使它的剩磁有所减少。

如果铁被一个反向力所完全去磁，不加上一个大于 X_1 的力就不能沿反方向把它磁化，但是一个小于 X_1 的正向力却足以开始沿原有的方向而把它再磁化。

这些结果是和瑞奇①、雅考比②、马瑞安尼尼③以及焦耳④所实际观察到的结果相一致的。

关于铁及钢的磁化和磁力的及机械胁变的关系的一种很全面的论述，已由魏德曼在他的《动电》一书中给出。他通过磁化的效应和扭变的效应

① Phil.Mag.3,1833.

② Pogg.,Ann.,31,367,1834.

③ Ann.de.ChimieetdePhysique,16,pp.436and448,1846.

④ phil.Turans.,1856,p.287.

的一种仔细比较已经证明，我们通过有关线材之暂时扭变和永久扭变的实验而导出的关于弹性和塑性的概念，可以同等适当地应用于铁及钢的暂时磁化和永久磁化。

447.]马吐西[⑤]发现，一个硬铁棒在受到磁化力时的拉伸，会增大其暂时磁化[⑥]。这一点曾由外尔泰姆加以证实。在软铁棒的事例中，磁性会因拉伸而减小。

一根铁棒的永久磁性当棒被拉伸时就增大，当它被压缩时就减小。因此，如果一块铁首先沿着一个方向被磁化然后沿着另一方向被拉伸，则磁化的方向将倾向于趋近拉伸的方向。如果它被压缩，则磁化的方向将倾向于变得和压缩方向相垂直。

这就解释了魏德曼的一个实验的结果。在一条竖直的导线中由上向下通一个电流。如果在电流正在通过或在它已经停止以后，把导线按右手螺旋方向加以扭转，则导线的下端变成一个北极。

在这儿，向下的电流对导线的每一部分沿切线方向进行磁化，正如字母 NS 所指示的那样。

沿右手螺旋方向对导线的扭转，使得 ABCD 这一部分沿对角线 AC 而被拉伸，并沿对角线 BD 而被压缩。因此，磁化方向就倾向于趋近 AC 而背离 BD，于是下端就变成北极而上端就变成南极。

磁化对磁体尺寸的影响

448.]焦耳[①]在 1842 年发现,当一根铁棒被围绕它的一个线圈中的电流所磁化时，它就会变长。后来他[②]又通过把铁棒放在一个玻璃管里的水中来证明了，铁的体积并不会因为磁化而变大，从而他就得出结论说，它的横向线度缩小了。

最后，他使一个电流通过一根铁管的轴线并由管外返回，这样就使铁管变成了一条闭合的磁管。经发现，铁管的轴线在这一事例中是缩短了的。

他发现，在纵向压力下，一根铁棒当被磁化时也会伸长。然而，当铁棒受到相当大的纵向拉力时，磁化的效应却是使它缩短。在一根硬钢丝的事例中，磁化力的效应却总是使钢丝缩短，不论钢丝是处于拉力还是处于压力作用之下。长度的改变只有当磁化力还在起作用时才是存在的，没有观察到由钢的永久磁化而引起的任何长度变化。

焦耳发现，铁导线的伸长近似地正比于实际磁化的平方，从而一个去磁电流的最初效应就是使导线缩短[①]。另一方面，他发现，对拉力作用下的铁导线和对钢来说，缩短效应是正比于磁化强度和磁化电流的乘积而变的。

魏德曼发现，如果一根竖直导线被磁化得上端成为南极，并且由上向

[⑤] Ann.dechimieetdePhysigue,53.p.385,1858.

[⑥] {威拉利曾经证明，只有当磁化力小于某一临界值时，这种结论才是对的，但是当磁化力超过临界值时，拉伸却会引起磁化强度的减小；Pogg.Ann.,126，p.87,1865．正文中关于软铁棒之行为的论述，对于小胁变和弱磁场是不成立的。}

[①] Sturgeon’sAnnalsofElectricity,vol.viii．p．219.

[②] Phil.Mag.,xxx1847.

[①] {歇耳福·比德外耳曾经证明，当磁化力很大时，磁体的长度是随磁化力的增大而减小的。proc.Roy.Soc.xl.P.109.}

下在导线中通一个电流，如果导线的下端是自由的，则从上向下看去时，导线的下端是按顺时针的方向而扭转的；或者换句话说，导线将像一个右手螺旋那样地发生扭转，如果纵向电流和磁化电流之间的关系是右手关系的话。

在这一事例中，电流的作用和由早先存在的磁化而造成的合磁化，是沿着右手螺旋的方向而围绕导线的。因此，这种扭转就似乎表明，当铁受到磁化时，它就沿着磁化的方向而膨胀并沿着垂直于磁化的方向而收缩。这是和焦耳的结果相一致的。

关于磁化理论的进一步发展，请参阅第 832—845 节。

第七章

磁学测量

449．]主要的磁学测量就是一个磁体的磁轴和磁矩的测定，以及一个给定位置上的磁力的方向和强度的测定。

既然这些测量是在地面附近进行的，磁体就总是既受到地磁的作用又受到重力的作用的，而且，既然各个磁体是用钢做成的，它们的磁性就部分地是永久磁性而部分地是感生磁性。永久磁性会被温度的变化、被强烈感应和被激烈的敲打所改变；感生磁性会随着外磁力的每一次变化而变化。

观察作用在一个磁体上的力的最方便办法就是使磁体可以绕着一条竖直轴线而自由转动。在普通的罗盘中，这是通过把磁体平衡地支放在一个支轴上来作到的。支轴的尖端越细，干扰磁力作用的摩擦力矩就越小。为了更精密的观察，磁体是用无扭转的丝线悬挂起来的；这种悬线是一根单丝或几根丝合并成的一条线，每根丝互相平行，各自负担尽可能相等的部分重量。这样一根线的扭力比同样强度的金属线的扭力要小得多，而且可以借助于磁体的方位而计算出来，而由支轴的摩擦所引起的力则不是这样的。通过转动装在固定螺母中的螺丝，悬线可以升高或降低。悬线是绕在螺丝的螺纹上的，因此当螺丝转动时悬线永远沿同一竖直线悬挂着。

悬线下面挂着一个水平的圆圈，上有刻度，叫做“ 扭转圆 ”；另外还挂着一个附有指针的镫形器，可以任意调节，以使指针和扭转圆上的任一刻度相重合。镫形器的造型使得磁棒可以放在上面，使其轴线水平，其四个侧面中的任一侧面都可以朝上。

为了保证零扭转，把一个和磁体重量相同的非磁性物体放在镫形器上，并定出平衡时的扭转圆位置。

磁体本身是一块硬淬火的钢。按照高斯和韦伯的研究，它的长度至少要是它的最大横向线度的八倍。当磁体内部的磁轴方向之永久性是最首要的考虑时，这一点是必要的。当所要求的是运动的及时性时，磁体就应该短一些，而当观察磁力的突然变化时，甚至宜于使用一根横向磁化的棒，并把它挂得最长的线度位于竖直方向[①]。

450．]磁体上附有测定其角位置的装置。为了普通的目的，磁体的两端做成两个尖，而在它的下面装一个刻度图；利用这个刻度圆，就可以用肉眼读出两个尖端的位置，这时人眼应位于通过悬线和磁针尖端的平面上。

为了更精确的观察，一个平面镜被固定在磁体上，使得镜面的法线尽可能接近地和磁化轴相重合。这就是高斯和韦伯所采用的方法。

另一种方法是在磁体的一端装一个透镜，而在其另一端装一个用玻璃制成的标尺，透镜和标尺之间的距离等于透镜的主焦距。标尺零点和透镜光心的连线应该尽可能接近地和磁轴相重合。

因为这些确定悬挂仪器之角位置的光学方法在许多物理研究中是有很大重要性的，我们将在这里一劳永逸地考虑考虑它们的数学理论。

[①] Joule,Puoc.Phil．Soc.,Manchester.,Nov.29,1864.

镜尺法的理论

我们将假设，要测定其角位置的那件仪器是可以绕着一个竖直轴转动的。这个轴通常是悬挂仪器的一根悬丝或金属线。镜面必须真正是平面，这样，一个毫米标尺就可以通过反射而在离镜面数米处被看到。

镜面中点上的法线应该通过悬挂轴线，而且应该是严格水平的。我们将把这一法线称为仪器的准直线(line of collimation)。大致地确定了准直线在所要进行的实验过程中的平均方向以后，在镜面前面的一个适当距离上，在略高于镜面的水平面的地方架起一个望远镜来。

这个望远镜可以在竖直平面内运动，它指向悬丝上略高于镜面的地方，另外再在视线上设立一个固定的标记，标记到物镜的距离等于镜面到物镜的距离的两倍。如果可能的话，仪器应该安装得使这个标记是在一面墙上或在其他固定物体上。为了同时在望远镜中看到标记和悬丝，可以在物镜上加一个盖子，盖子上沿着竖直的直径开一细缝。在进行别的观察时应把这个盖子取掉。然后调节望远镜，使得标记可被清楚地看到和望远镜焦点上竖丝相重合。然后把一根铅垂线调节得切近地通过物镜光心的前面并位于望远镜的下方。在望远镜下方恰好在铅垂线之后的位置上装一个具有相等刻度的标尺，使它被通过标记、悬丝和铅垂线的平面所垂直平分。标尺和物镜的离地高度之和应该等于镜面的离地高度的两倍。现在，望远镜既已指向镜面，观察者就将在望远镜中看到标尺的反射像。如果标尺上被铅垂线穿越的那一部分显得是和望远镜的竖丝相重合的，镜面的准直线就是和标记及物镜光心的平面相重合的。如果竖丝和标尺上的任何其他刻度相重合，准直线的角位置就应如下求出：

设纸面是水平的，而不同的点就投影在这一平面上。设 O 为望远镜物镜的中心，P 为固定标记：P 和望远镜竖丝相对于物镜来说是共轭焦点。设 M 是 OP 和镜面的交点。设 MN 是镜面的法线，则 OMN=θ 是准直线和固定平面所夹的角。设 MS 是 OM 和 MN 的平面上的一条满足 NMS=OMN 的直线，则 S 是通过反射将被看到和望远镜竖丝相重合的那一部分标尺。现在，既然 MN 是水平的，投影在图上的角度 OMN 和 NMS 就是相等的，从而 OMS=2θ。由此即得 OS=OMtan2θ。

因此我们必须按标尺的刻度来量度 OM；然后，如果 s_0 是标尺上和铅垂线相重合的度数，而 s 是观察到的度数，则有

$$S-S_0=OM\tan 2\theta,$$

由此就可以求出 θ。我们在量度 OM 时必须记得，如果镜子是由背面镀银的玻璃构成的，则竖直反射面是在玻璃前表面后边一段距离 $\frac{t}{\mu}$ 处，此处 t 是玻璃的厚度而 μ 是折射率。

我们也必须记得，如果悬线并不通过反射点，则 M 的位置将随 θ 而变。因此，如果可能，最好使镜子的中心和悬线相重合。

也值得建议把标尺作成以悬线为轴的凹圆柱面的形状，特别是当有必要观察大的角度变化时。这样，角度就立即是按圆周测量的，用不着查正切表。标尺应该仔细调节，使得柱轴和悬丝相重合。标尺上的数字应该永

远沿同一方向从一端排到另一端，以避免负读数。图 15 代表必须和镜面及倒向望远镜一起应用的一个标尺的中间部分。

当运动较慢时，这种观察方法是最好的。观察者坐在望远镜旁，并看到标尺的像运动着向右或向左而通过望远镜的竖丝。利用他旁边的一个时钟，他可以记下标尺上一个给定的刻度通过竖丝的时刻，或是记下在给定秒数通过竖丝的标尺刻度，而且他也可以记录每一次振动的两端界限。

当运动更快时，就将不可能读出标尺刻度，只除了在振动极限的静止时刻以外。可以在标尺的一个已知的刻度上作一个明显记号，并注意这个记号的通过时刻。

当仪器很轻而力又是变化的时，运动就会如此地灵活而迅速，以致通过一个望远镜来进行的观察将成为无用的。在这一事例中，观察者可以直接注视标尺，并观察由一个灯投射到标尺上的竖丝像的运动。

很显然，既然经过镜面反射和物镜折射而成的标尺像是和竖丝相重合的，那么，如果充分照明，竖丝的像就将和标尺相重合。为了观察这一点，房间必须遮暗，并使一个灯的会聚光线向着物镜而射在竖丝上。在标尺上，就看到一片光亮上面竖立着竖丝的暗影。它的运动可用眼睛追踪，而它停在那儿的那个标尺刻度就可以经过注视而定下来，并且被从容不迫地读出。如果想要注意光点通过标尺上一个给定地点的时刻，可以在那儿放一根针或一根光亮的金属丝，这样当光点通过时就会看到闪光。

通过用薄膜上的小孔来代替叉丝，像就变成一个在标尺上左右运动的小光点；而通过把标尺换成一个用时钟装置使之绕水平轴面转动的上面卷有作图纸的圆筒，光点就在上面描出一条曲线，而这条曲线可以在事后被弄成可见的。这条曲线的每一个横座标对应于一个特定的时刻，而其纵座标则指示镜子在该时刻的角位置。按照这种方法，已经在丘市观测站和其他观测站上建立了连续记录地磁之所有要素的自动系统。

在某些事例中，望远镜被略去，而一根竖丝则被放在它后面的一个灯所照亮，而镜面则是一个凹面镜，它在标尺上造成竖丝的像，那是一个光斑上的一道黑线。

451．]在丘市的可携式仪器中，磁体被做成了一个管子，一端装有透镜，而另一端则装有标尺，经过调节，标尺位于透镜的主焦面上。光由标尺后面射入，通过透镜以后用一个望远镜来加以观察。

既然标尺是位于透镜的主焦面上的，来自任一标尺刻度处的光就都会从透镜平行射出，而如果望远镜是聚焦在无限远处的，它就会使标尺的像和望远镜的叉丝相重合。如果一个给定的标尺刻度和叉丝交点相重合，则该刻度和透镜光心的连线必然平行于望远镜的准直线。通过固定磁体而移动望远镜，我们可以确定标尺刻度的角度值；然后，当磁体被挂起而望远镜的位置为已知时，我们就能通过读出和叉丝相重合的标尺刻度来测定磁体在任一时刻的位置。

望远镜架在一个臂上，这个臂的中心位于悬丝的直线上，而望远镜的位置则通过仪器方位圆上的游标来读出。

这种安排对于一个小的可携式磁强计是合用的；在那种磁强计中，整个仪器都装在同一个三脚架上，而且由偶然干扰所造成的振动将很快地衰减掉。

磁体轴线方向的确定和地磁方向的确定

452．]设在一个磁体内画一个座标系；假设磁体是一个长方体，座标系的 z 轴沿磁体长度的方向，而 X 轴和 y 轴垂直于其他侧表面。

设 l、m、n 和λ、μ、ν分别是磁轴及准直线和这些座标轴之间的夹角。

设 M 是磁体的磁短，H 是地磁的水平分量，Z 是竖直分量，而δ是 H 的从北向西计算的方位角。

设ζ是观察到的准直线的方位角，a 是镫形器的方位角，而β是扭转圆上的指针读数，于是 a-β就是悬丝下端的方位角。设γ是当没有扭力时的α—β的值，则倾向于使α减小的扭力矩就将是

τ(α-β-γ)，

式中τ是依赖于悬丝本性的扭转系数。

为了确定 x 轴和准直线在 xz 平面上的夹角λ_x，固定镫形器，使得 y 轴竖直向上，z 轴指北而 x 轴指西，然后观察准直线的方位角ζ。然后取下磁体，把它绕 z 轴转一个π角再放在这个反了个儿的位置上，然后观察当 y 轴向下而 x 轴指西时的准直线方位角ζ′，

$$\zeta=\alpha+\frac{\pi}{2}-\lambda_x, \qquad (1)$$

$$\zeta'=\alpha-\frac{\pi}{2}+\lambda_x \qquad (2)$$

由此即得

$$\lambda_x=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta) \qquad (3)$$

其次，把镫形器挂在悬丝上并把磁体放上去，仔细地调节它以作到 y 轴竖向上，于是倾向于使α增大的力矩就是

$$MH\sin m\sin(\sigma-\alpha-\frac{\pi}{2}+l_x)-\tau(\alpha-\beta-\gamma); \quad (4)$$

式中l_x是 x 轴和磁轴在 xz 平面上的投影之间的夹角。

但是，如果ζ是观察到的准直线的方位角，则有

$$\zeta=\alpha+\frac{\pi}{2}-\lambda_x, \qquad (5)$$

于是力[矩]就可以写成

$$MH\sin m\sin(\sigma-\zeta+l_x-\lambda_x)-\tau(\zeta+\lambda_x-\frac{\pi}{2}-\beta-\gamma) \quad (6)$$

当仪器处于平衡时，这个量对一个特定的ζ值变为零。

当仪器永不停止而必须在一种振动状态下来加以观察时，对应于平衡位置的ζ值可以用一种即将在第 735 节中加以描述的方法来进行计算。

当扭力矩远小于磁力矩时，我们可以用$\delta-\zeta+\iota_x-\lambda_x$来代替它的正弦。

如果我们使扭转圆的读数β取两个值β_1和β_2，而ζ_1和ζ_2是对应的ζ值，则有

$MH(\zeta_2-\zeta_1)\sin m=\iota(\zeta_1-\zeta_2-\beta_1+\beta_2)$，(7)

或者，如果我们令

$$\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\zeta_1-\zeta_2-\beta_1+\beta_2}\tau$$

则有

τ=τ′MHsinm，(8)

而方程(6)除以 MHsinm 后就变成

$$\sigma-\zeta+l_x-\lambda_x\tau'(\zeta+\lambda_x-\frac{\pi}{2}-\beta-\gamma)=0 \quad (9)$$

如果我们现在把磁体翻过来，使得 y 轴向下，并调节仪器直到 y 轴确切竖直，而如果这时ζ′是方位角的新值，而σ′是对应的倾角，则

$$\sigma'-\zeta'-l_x+\lambda_x-\tau'(\zeta'-\lambda_x+\frac{\pi}{2}-\beta-\gamma)=0, \quad (10)$$

由此即得

$$\frac{\sigma+\sigma'}{2}=\frac{1}{2}(\zeta+\zeta')+\frac{1}{2}\tau'\left\{\zeta+\zeta'-2(\beta+\gamma)\right\} \quad (11)$$

现在必须调节扭转圆，使得τ′的系数尽可能接近于零。为此目的，我们必须确定当没有扭力时的α—β的值γ此点可以这样作到：放上一个和磁体等重的非磁性棒，并在平衡状态下测定α—β。既然τ′很小，测定时并不要求多大的精确度。另一种方法是利用一个和磁体等重的扭转棒，

里边含有一个很小的磁体，其磁矩是主磁体之磁矩的$\frac{1}{n}$倍。既然τ并不改变，τ′就将变成 nτ′，而如果ξ_1和ξ_1'是利用扭转棒求得的ξ值，就有

$$\frac{\sigma+\sigma'}{2}=\frac{1}{2}(\zeta_1+\zeta_1')+\frac{1}{2}n\tau'\left\{\zeta_1+\zeta_1'-2(\beta+\gamma)\right\} \quad (12)$$

从(11)中减去此式，即得

$$2(n-1)(\beta+\gamma)=(n+\frac{1}{\tau'})(\zeta_1 1+\zeta_1')-(1+\frac{1}{\tau'})(\zeta+\zeta') \quad (13)$$

既经用这种办法求出了β+γ的值，就应该改变扭转圆的读数，直到在仪器的普通位置下尽可能近似地作到

ζ+ζ′-2(β+γ)=0，（14）

这时，既然τ′是一个很小的数，而且它的系数也很小，τ′值和γ值的微小误差就不会引起δ表示式中第二项的值的多大变化，而τ′和γ正是我们知道最不准确的两个量。

磁倾角δ的值可以用这种办法相当精确地求出，如果它在实验过程中保持不变，从而我们可求假设δ′=δ的话。当要求很大的精确度时，必须照顾到δ在实验时间内的变化。为此目的，必须在观察ζ值的各个相同时刻对另一个悬挂着的磁体进行观察。如果η、η′是观察到的对应于ζ和ζ′的第二个磁体的方位角，而δ和δ′是对应的δ值，则有

δ-δ=η′-η (15)

由此可见，为了求出δ值，我们必须在(11)式中加一个改正量

$$\frac{1}{2}(\eta-\eta')$$

因此，第一次观察时的倾角就是

$$\sigma=\frac{1}{2}(\zeta+\zeta'+\eta-\eta')+\frac{1}{2}\tau'(\zeta+\zeta'-2\beta-2\gamma) \quad (16)$$

为了求出磁体内部的磁轴方向，从(9)减去(10)并加上(15)，即得

$$l_x=\lambda_x+\frac{1}{2}(\zeta-\zeta')-\frac{1}{2}(\eta-\eta'+2\lambda-\boldsymbol{\pi}) \quad (17)$$

使棒的两面分别朝下来重复进行实验，即令 x 轴竖直向上和竖直向下，我们就可以求出 m。如果准直线是可以调节的，它就必须被调得尽可能近似地重合，这样由于磁体并不是正好翻转而引起的误差就可以尽可能地小[①]。

关于磁力的测量

453．]最重要的磁力测量就是确定一个磁体的磁矩 M 和确定地磁水平分量强度的那些测量。通常这是通过结合运用两个实验的结果来进行的，一个实验确定这两个量的比值，而另一个实验则确定它们的乘积。

由一个磁矩为 M 的无限小的磁体在磁轴正方向的延线上离磁体中心为 r 处一点引起的磁力强度是

$$R=2\frac{M}{r^3} \quad (1)$$

而且是沿 r 方向的。如果磁体具有有限的大小，但却是球形的，而且是沿着轴线方向均匀磁化的，则上述的力值仍是准确的。如果磁体是一个长度为 2L 的圆柱形磁棒，则

$$R=2\frac{M}{r^3}(1+2\frac{L^2}{r^2}+3\frac{L^4}{r^4}+\cdots) \quad (2)$$

如果磁体是任意种类的，只要它的一切线度都远小于 r，则有

$$R=2\frac{M}{r^3}(1+A_1\frac{1}{r}+A_2\frac{1}{r^2}+\cdots), \quad (3)$$

式中 A_1、A_2 等等是一些依赖于磁棒之磁化分布的系数。

设 H 是任意地方的地磁水平分量的强度。H 是指向磁北方的。设 r 是向磁西方量度的，则 r 终点上的力将是向北的 H 和向西的 R。合力将和磁子午面夹一个角度，设向西量度为 θ，而且

$R=H\tan\theta$。(4)

因此，为了测定 $\frac{R}{H}$，我们可以进行如下：

既经确定了磁北的方向，把一个尺寸不应该太大的磁体像在前面的实验中那样悬挂起来，而致偏磁体 M 则摆在悬挂磁体的正磁东方，在同一水平面内，从它的中心到悬挂磁体中心的距离为 r。

M 的磁轴要仔细地调到水平，并指向 r 的方向。在拿过 M 来以前和在把它摆好以后，对悬挂磁体进行观察。设 θ 是观察到的偏角，如果应用近似公式(1)，我们就有

$$\frac{M}{H}=\frac{r^3}{2}\tan\theta; \quad (5)$$

或者，如果我们应用公式(3)，就有

[①] 参阅论文‘ImperfectInrersion,’byW.Swan.Trans.R.S.Edin.vol.xxi(1855),p.349

$$\frac{1}{2}\frac{H}{M}r^3\tan\theta = 1 + A_1\frac{1}{r} + A_2\frac{1}{r^2} + \cdots \qquad (6)$$

这儿我们必须记得，尽管偏角θ可以观察得很精确，磁体中心之间的距离 r 却是一个不容易准确测定的量，除非两个磁体都是固定的，而且它们的中心是用记号标明了的。

这种困难可以克服如下：

磁体 M 放在一个刻了度的标尺上，标尺沿东西方向伸向悬挂磁体的两侧。M 两端之间的中点被认为是磁体的中心。这个点可以在磁体上标出，它的位置可以在标尺上观测，或者也可以观测其两端的位置并取算术平均值。设这个平均值为 s_1，并设悬挂磁体的悬丝延线和标尺相交于 s_0，就有 $r_1=s_1-s_0$，式中 s_1 为精确地已知而 s_0 为近似地已知。设θ是当 M 在这一位置上时观察到的偏角。

现在把 M 反向，就是说，把它两端颠倒过来摆在标尺上，这时 r_1 将相同，但是 M 和 A_1、A_2 等等则将变号，因此；如果 Q_2 是向西的偏角，则有

$$-\frac{1}{2}\frac{H}{M}r_1^3\tan\theta_2 = 1 - A_1\frac{1}{r_1} + A_2\frac{1}{r_1^2} - \cdots \qquad (7)$$

取(6)和(7)的算术平均值，即得

$$\frac{1}{4}\frac{H}{M}r_1^3(\tan\theta_1 - \tan\theta_2) = 1 + A_2\frac{1}{r_1^2} + A_4\frac{1}{r_1^4}\cdots \qquad (8)$$

现在把 M 移到悬挂磁体的西边，并把它的中心放在标尺上刻度为 $2s_0-s_1$ 的地方。设当轴线位于第一位置上时的偏角是 θ_3，而当位于第二位置上时的偏角是 θ_4，则有

$$r_1 + r - \sigma, r_2 = r + \sigma \qquad `(10)$$

以及 $$\frac{1}{2}(r_1^n + r_2^n) = r^n\left\{1 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\sigma^2}{r^2} + \cdots\right\}; \qquad (11)$$

而且，当测量作得很小心时，$\frac{\sigma^2}{r^2}$ 是可以忽略不计的，因此我们确信可以取 r_1^n 和 r_2^n 的算术平均值作为 r^n。

因此，取(8)和(9)的算术平均值，即得

$$\frac{1}{8}\frac{H}{M}r^3(\tan\theta_1 - \tan\theta_2 + \tan\theta_3 - \tan\theta_4) = 1 + A_2\frac{1}{r^2} + \cdots, \quad (12)$$

或者，利用

$$\frac{1}{4}(\tan\theta_1 - \tan\theta_2 + \tan\theta_4 - \tan\theta_4) = D$$

即得

$$\frac{1}{2}\frac{H}{M}Dr^3 = 1 + A_2\frac{1}{r^2} + \cdots$$

454．]现在我们可以认为 D 和 r 是能够被准确测定的。量 A_2 在任何情况下都不会超过 $2L^2$，此处 L 是磁体长度的一半，因此，当 r 比 L 大得多时，我们就可以略去含 A_2 的一项并立即定出 H 和 M 之比。然而我们却不能假设 A_2 等于 $2L^2$，因为它可以较小，而且对于其最大线度和磁轴横交的磁体来说 A_2 甚至可以是负的。含 A_4 的项和所有更高次的项，可以毫无问题地

忽略不计。

为了消失 A_2，利用距离 r_1、r_2、r_3 等等来重作实验，设 D_1、D_2、D_3 等等是 D 的值，则有

$$D_1=\frac{2M}{H}(\frac{1}{r_1{}^3}+\frac{A_2}{r_1{}^5})，D_2=\frac{2M}{H}(\frac{1}{r_2{}^3}+\frac{A_2}{r_2{}^t})$$，等等，等等。

如果我们假设这些方程的可几误差是相同的（而它们也将是相同的，只要它们仅仅依赖于 D 的测定），另外，如果不存在关于 r 的不确定性，那么，根据当每一方程的可几误差被假设为相同时不准测量之组合理论的普遍规则，用 r^{-3} 乘每一个方程并把结果加起来，我们就得到一个方程；而用 r^{-5} 乘每一个方程并把结果加起来，我们就得到另一个方程。

对于$D_1r_1{}^{-3}+D_2r_2{}^{-3}+D_3r_3{}^{-3}+\cdots$，

让我们写出

$\Sigma(dr^{-3})$

并利用关于其他符号组之和的类似表示式，则两个结果方程可以写成

$$\Sigma(Dr^{-3})=\frac{2M}{H}\left\{\Sigma(r^{-6}+A_2\Sigma(r^{-8})\right\},$$

$$\Sigma(Dr^{-5})=\frac{2M}{H}\left\{\Sigma(r^{-8})+A_2\Sigma(r^{10})\right\},$$

由此即得

$$\frac{2M}{H}\left\{\Sigma(r^{-6})\Sigma(r^{-10})-[\Sigma(r^{-8})]^2\right\}$$
$$=\Sigma(Dr^{-3})\Sigma(r^{-10})-\Sigma(Dr^{-5})\Sigma(r^{-8}),$$

以及

$$A_2\left\{\Sigma(Dr^{-3})\Sigma(r^{-10})-\Sigma(Dr^{-5})\Sigma(Dr^{-8})\right\}$$
$$=\Sigma(Dr^{-5})\Sigma(Dr^{-6})-\Sigma(Dr^{-3})\Sigma(Dr^{-8})$$

由这些方程推得的 A_2 应该小于磁体 M 的长度平方的一半。如果它不是这样的，我们就可以推想观测中有些不对头的地方。这种观测和化简的方法，是由高斯在 <磁学协会的第一份报告>（FirstReportoftheMagneticAssociation）中给出的。

当观察者只能在距离 r_1 和 r_2 处进行两组实验时，由这些实验导出的 $\frac{2M}{H}$ 值和A_2值就是

$$Q=\frac{2M}{H}=\frac{D_1r_1{}^5-D_2r_2{}^5}{r_1{}^2-r_2{}^2},\qquad A_2=\frac{D_2r_2{}^3-D_1r_1{}^3}{D_1r_1{}^5-D^2r_2{}^5}r_1{}^2r_2{}^2$$

如果 δD_1 和 δD_2 是观察到的偏角 D_1 和 D_2 的实际误差，则计算结果 Q 的实际误差将是

$$\delta D=\frac{r_1{}^5\delta D_1-r_2{}^5\delta D_2}{r_1{}^2-r_2{}^2}$$

如果我们假设误差 δD_1 和 δD_2 是独立的，而且其中每一个的可几误差是 δD，则 Q 的计算值中的误差的可几值将是 δQ，此处

$$(\delta Q^2)=\frac{r_1^{10}+r_2^{10}}{(r_1^2-r_2^2)^2}(\delta D)^2$$

如果我们假设，其中一个距离已经给定，譬如说较小的那个距离已经给定，则较大的那个距离的值可以适当确定以使δQ 取最小值。这一条件导致一个 r_1^2 的五次方程，它只有一个大于 r_2^2 的实根,由此得到 r_1 的值是

r_1=1.3189Tr_2。

如果只进行一次观测，则最佳条件出现在

$$\frac{\delta D}{D}=\sqrt{3}\frac{\delta}{r}$$

时[①]，式中δD 是一次偏角测量中的可几误差，而δr 是一次距离测量中的可几误差。

正弦法

455.〕我们刚才描述了的方法可以叫做“正切法”，因为偏角的正切是磁力的一种量度。

如果线段 r_1 不是沿东西方向测量而是被调节得垂直于偏转以后的磁体的轴，则 R 仍和以前相同，但是，为了使悬挂的磁体可以垂直于 r，力 H 在 r 方向上的分量必须和 R 相等而反向。因此,如果θ是偏角,则有 R=Hsinθ。

这种方法叫做“正弦法”。只有当 R 小于 H 时这种方法才是可以应用的。

丘市可携式的仪器就是采用的这种方法。悬挂的磁体挂在仪器的一个部件上，那个部件和望远镜及装有致偏磁体的臂一起转动，而整体的转动就在方位圆上被测量。

仪器首先被调节，使得望远镜的轴线和磁体在未受扰状态中的准直线的平均位置相重合。如果磁体是振动的，则通过观察透明标尺的振动极限并对方位圆读数进行适当的改正来求出磁北方的真实方位。

然后，致偏磁体就被放在一个直杆上，该直杆通过仪器的转动轴而和望远镜的轴线相垂直，而且调节得使致偏磁体的轴线位于一条通过悬挂磁体之中心的直线上。

然后整个的转动仪器被调节，直到悬挂磁体的准直线再次和望远镜的轴线相重合，而如果有必要，新方位就要借助于振动极限上的刻度读数来加以改正。

改正后的方位角之差就给出偏角。在此以后，我们就像在正切法中那样地操作,只除了在 D 的表示式中要用 sinθ来代替 tanθ。在这种方法中，用不着有关悬丝扭力的改正，因为悬丝、望远镜和磁体的相对位置在每一次观察中都是相同的。

在这种方法中，两个磁体的轴永远互相垂直，因此长度的改正可以作得更正确。

456.〕即已这样测量了致偏磁体的磁矩和地磁水平分量之比，其次我们就必须通过确定当同一磁体偏离磁子午面时地磁倾向于使它转动的那一

---

① 见 Airy'sMagnetism.

① {在这一事例中，忽略含 A2 的项，我们就有 而当 时此式即取最小值。}

力偶矩来求出上述二量的乘积。

进行这种测量的方法有二：动态法和静态法。在动态法中，观察的是磁体在地磁作用下的振动时间；在静态法中，磁体在一个可测量的静力偶和磁力[偶]之间保持平衡。

动态法要求的仪器比较简单，而且在绝对测量方面也比较精确，但是却要用颇长的时间。静态法几乎可以进行瞬时的测量，从而在追踪磁力强度的变化中是有用的，但是它却要求更精密的仪器，而且在绝对测量方面也不是那么精确。

振动法

磁体被适当悬挂，使它的磁轴为水平，并使它沿很小的弧而发生振动。振动用已经描述的任何方法来进行观察。

在标尺上选定一个点，和振动弧的中点相对应。把沿正方向而通过标尺上这个点的时刻观测出来。如果在磁体回到同一点以前还有足够的时间，则把沿负方向通过这一点的时刻也观测出来。继续进行这种工作，直到观测了 n＋l 次正向通过和 n 次负向通过时为止。如果振动太快而无法逐次观测，则每振动三次或五次观测一次，但要注意使观测到的通过是正负交替的。

设观测到的时间是 T_1、T_2、T_{2n+1}，如果我们令

$$\frac{1}{n}(\frac{1}{2}T_1+T_3+T_5+\cdots+T_{2n-1}+\frac{1}{2}T_{2n+1})=T_{n+1},$$

$$\frac{1}{n}(T_2+T_4+\cdots+T_{2n-2}+T_{2n})=T'_{n+1};$$

则正通过的平均时间 T_{n+1} 应该和负通过的平均时间 T'_{n+1} 相符合，如果点选得适当的话。这些结果的平均值被取为中点通过的平均时间。

在多次振动已经发生之后，但是在振动不再是清楚而规则的以前，观测者应进行另一系列的观测，由此他就可以推出第二系列的中点通过的平均时间。

根据第一或第二观测系列来计算振动周期，观测者应该能够确定在二系列的中点通过时间之间的时间阶段中已经发生过的振动次数。用这一振动数去除两个系列的中点通过之平均时间之间的时间阶段，就得到平均振动时间。

然后，利用和在摆观测中所用的同一种公式，观测到的振动时间可以折算成无限小振幅的振动时间，而且，如果发现振动的振幅是迅速递减的，就还要有一种关于阻力的改正，见第 740 节。然而，当磁体是用悬丝挂着的而振动弧又只有几度时，这些改正都是很小的。

磁体的运动方程是

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}+MH\sin\theta+HM\tau'(\theta-y)=0,$$

式中 θ 是磁轴和力 H 的方向之间的夹角，A 是磁体和悬置装置的惯量矩，M 是磁体的磁矩，H 是水平磁力的强度，MHι′是扭转系数：τ′像在第 452 节中那样地确定，而且是一个很小的量。平衡时的 θ 值是

$$\theta_0=\frac{\tau'\gamma}{1+\tau'},$$

这是一个很小的角，对很小的振幅值来说，方程的解是

$$\theta = C\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\alpha\right)+\theta_0,$$

式中 T 是周期，α是一个常数，C 是振幅，而且

$$T^2=\frac{4\pi^2 A}{MH(1+\tau')};$$

由此我们就得到 MH 的值，

$$MH=\frac{4\pi^2 A}{T^2(1+\tau')}$$

这里的 T 是由观测定出的一次完全振动所需的时间。惯量矩 M 是针对磁体而一劳永逸地求出的；如果它有一种规则的外形，就可以通过称重和量度来求出，或是通过和一个惯量矩已知的物体相对应的动力学手续来求出。

把这种MH值和以前求得的$\frac{M}{H}$值结合起来，我们就得到

$$M^2=(MH)\left(\frac{M}{H}\right)=\frac{2\pi^2 A}{T^2(1+\tau')}Dr^3,$$

以及

$$H^2=(MH)\left(\frac{H}{M}\right)=\frac{8\pi^2 A}{T^2(1+\tau')Dr^3}$$

457.〕我们曾经假设，H 和 M 在两个实验系列中保持恒定，H 的涨落可以通过即将描述的双线磁强计的同时观察来确定，另外，如果磁体已经使用颇久，而且在实验过程中并未受到什么温度变化或撞击的影响，则依赖于永久磁性的那一部分 M 可被假设为常量。然而，所有的钢质磁体都能够获得依赖于外磁力的感生磁性。

现在，当应用于偏角实验时，磁体是被放成磁轴取东西方向的，因此地磁是沿横向而作用在磁体上，从而并不倾向于增大或减小 M.当磁体是在振动中使用时，它的磁轴是南北向的，于是地磁的作用就倾向于在轴的方向上对它进行磁化，并从而使它的磁矩增加一个量 kH，此处 k 是一个必须通过对磁体进行实验来求出的系数。

有两种方法可以避免这种误差来源而不必计算 k，即适当安排实验，使得磁体在用来使另一磁体发生偏转时和在自己摆动时都处于相同的条件之下。

我们可以把致偏磁体摆得磁轴指北，到悬挂磁体中心的距离为 r，而且直线r和磁子午面之间有一个余弦$\sqrt{\frac{1}{3}}$为的夹角。于是，致偏磁体对悬挂磁体的作用就将垂直它自己的方向，而且等于

$$R=\sqrt{2}\frac{M}{r^3}$$

在这儿，M 是当磁轴正如在振动实验中那样指北时的磁矩，因此用不着关于感应的任何改正。

然而,这种方法是极其困难的,因为致偏磁体的微小位移将引起很大的误差，而且，由于用翻转致偏磁体的办法来进行改正在这儿是不适用的，因此这种方法一般不被采用，除非目的在于确定感应系数。

在下述方法中，磁体在振动中不会受到地磁的感应；这种方法起源于J．P．焦耳博士[①]。

制备两个磁体，使它们的磁矩尽可能近似地相等。在偏角实验中，这些磁体被分别地使用，或者，它们也可以同时摆在悬挂磁体的两侧以引起较大的偏角。在这些实验中,地磁的感应力是垂直于磁轴的。

设把其中一个磁体挂起来，而把另一个磁体摆得和前一磁体相平行，其中心位于悬挂磁体的中心的正下方，其磁轴指向相同的方向。固定磁体作用在悬挂磁体上的力是和地磁作用力方向相反的。如果使固定磁体慢慢向悬挂磁体靠拢，振动时间就会增加，直到在某一点上平衡不再稳定时为止，而越过了这一点，悬挂磁体将在反向位置附近进行振动。通过按这种方式进行实验，就能找出固定磁体的一个位置；在该位置上，固定磁体将恰好中和地磁对悬挂磁体的影响。两个磁体被联成一体，以便互相平行，它们的磁轴指向相同的方向，二者之间的距离就是刚刚通过实验求得的那个距离。然后它们就被用通常的方式挂起来，并沿着很小的圆弧一起振动。

下面的磁体恰能中和地磁对上面磁体的影响，而既然二磁体具有相等的磁矩，上面的磁体也将中和地球对下面磁体的感应作用。

因此，M 值在振动实验中和在偏角实验中是相同的，从而任何关于感应的改正都是不必要的。

458.〕确定水平磁力强度的最精确的方法，就是我们刚刚描述过的方法。然而，整个系列的实验并不能在比一小时短得多的时间内足够精确地完成，因此，发生在几分钟的时间之内的强度变化都将观察不到。因此就需要一种不同的方法来观察磁力在任一时刻的强度。

静态方法就在于用一个在水平面上起作用的静力偶来使磁体发生偏转。如果 L 是这个力偶的矩，M 是磁体的磁矩，H 是地磁的水平分量，而 θ 是偏角，则有

$$MH\sin\theta=L.$$

由此可见，如果 L 作为 θ 的函数为已知，则 MH 可以求得。

力偶 L 可以用两种方法得到，像在普通扭秤中那样利用一条悬线的扭变弹性来得到，或是像在双线悬置中那样利用被悬挂的仪器的重量来得到。

在扭秤中，磁体固定在一根竖直金属丝的下端，其上端可以转动，而它的转动可以利用一个扭转圆来加以量度。

于是我们就有

$$L=\tau(\alpha-\alpha_0-\theta)=MH\sin\theta,$$

此处 α_0 是当磁体的轴和磁子午线相重合时的扭转圆读数,而 α 是实际的读数。如果扭转圆被转动，使得磁体几乎垂直于磁子午面，从而

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\theta',$$

那就会有

$$\tau(\alpha-\alpha_0-\frac{\pi}{2}+\theta')=MH(1-\frac{1}{2}\theta'^2),$$

或者写作

[①] Proc.Phil.S．，Manchester，March19，1867．

$$MH=\tau(1+\frac{1}{2}\theta^2)(\alpha-\alpha_0-\frac{\pi}{2}+\theta')$$

通过观察磁体在平衡时的偏角θ'，我们可以在τ为已知时算出 MH.

如果我们只想知道 H 在不同时刻的相对值，那就既不必知道 M 也不必知道τ。

通过在同一金属丝上挂一个非磁性物体并观察其振动时间，我们就很容易用绝对单位来测量τ。这时，如果 A 是物体的惯量矩而 T 是一次完整振动的时间，则有

$$\tau=\frac{4\pi^2 A}{T^2},$$

对应用扭秤的主要反对意见就在于，零读数α_0肯定是要变化的。在由磁体转向指北的倾向所引起的恒定扭力作用之下，金属丝将逐渐获得一种永久性的扭变，因此就有必要每过一段时间就重新测定扭转圆的零读数。

双线悬置

459.]用两根金属丝或纤维来悬挂磁体的方法，是由高斯和韦伯引入的。由于双线悬置在许多电学仪器中都会被用到，我们将比较仔细地考察考察它。这种悬置的一般外貌如图 16 所示，而图 17 则代表各悬丝在一个水平面上的投影。

AB 和 A′B′是两条悬丝的投影。

AA′和 BB′是两条悬丝的上端连线的和下端连线。

a 和 b 是线段 AA′和 BB′的长度。

α和β是它们的方位角。

W 和 W′是悬丝张力的竖直分量。

Q 和 Q′是它们的水平分量。

h 是 AA′和 BB′之间的竖直距离。

作用在磁体上的力是：它的重量，由地磁引起的力偶，悬丝的扭力（如果有的话）和它们的张力。在这些力中，地磁和张力的效应具有力偶的性质。由此可见，张力的合力必然包括一个等于磁体重量的竖直力和一个力偶。因此，张力的竖直分量之和是沿着其投影为 O 点的那条直线的；该点就是 AA′和 BB′的交点，而其中每一条线段都是按照 W′和 W 之比在 O 点被分割的。

张力的水平分量形成一个力偶，从而它们是量值相等而方向[反]平行的。用 Q 代表其中一个力，它们所形成的力偶的矩就是

L=Q．PP′，(1)

式中 PP′是平行线 AB 和 A′B′之间的距离。

为了求得 L 的值，我们有力矩方程

Qh=W．AB=W′.A′B′,(2)

和几何方程

(AB＋A′B′)PP′=absin(α－β)，(3)

由此即得

$$L=Q\cdot pp'=\frac{ab}{h}\frac{WW'}{W+W'}\sin(\alpha-\beta) \qquad (4)$$

如果 m 是悬挂着的仪器的质量，g 是重力强度，则有

$W+W'=mg$. (5)

如果也写出

$W-W'=nmg$, (6)

我们就有

$$L=\frac{1}{4}(1-n^2)mg\frac{ab}{h}\sin(\alpha-\beta) \quad (7)$$

因此，当 n 为零时，也就是当所悬物体的重量由两条悬丝平均负担时，L 的值就相对于 n 来说是一个最大值。

为了把悬丝的张力调成相等,我们可以观察振动时间并把它调到最小值，或者，我们也可以像在图 16 中那样把悬丝的上端接在一个滑轮上，滑轮绕轴旋转直到张力相等时为止，这样我们就得到一种自动调节的装置。

两根悬丝的上端之间的距离用另外两个滑轮来控制。悬丝下端之间的距离也是可以调节的。

通过这种张力调节，由悬丝张力所引起的力偶就变成

$$L=\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin(\alpha-\beta)$$

由悬丝张力引起的力偶矩具有如下形式：

$\tau(\gamma-\beta)$,

式中 r 是二悬丝的扭转系数之和。

当 $\alpha=\beta$ 时各悬丝应该没有扭转，因此我们可以取 $\gamma=\alpha$. 由水平磁力引起的力偶矩具有形式

$MH\sin(\delta-\theta)$,

式巾 δ 是磁偏角，而 θ 是磁体轴线的方位角。如果我们假设磁体轴线平行于 BB'，或者说假设 $\beta=\theta$，我们就可以既避免引用不必要的符号而又不会牺牲普遍性。

于是，运动方程就变成

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}=MH\sin(\sigma-\theta)+\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin(\alpha-\theta)+\tau(a-\theta) \quad (8)$$

这种仪器的主要位置有三。

(1)当 α 近似地等于 δ 时。如果 T_1 是这一位置上一次完整振动的时间，则有

$$\frac{4\pi^2A}{T_1^2}=\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg+\tau+MH \quad (9)$$

(2)当 α 近似地等于 $\delta+\pi$ 时。如果 T_2 是这一位置上一次完整振动的时间，现在磁体的北端转得指向南方了，于是就有

$$\frac{4\pi^2A}{T_2^2}=\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg+\tau-MH \quad (10)$$

这一方程右端的量，可以通过减小 a 或 b 而弄得要多小就有多小，但是它不能被弄成负值，不然磁体的平衡就会变成非稳定的了。在这一位置上，磁体就形成一种仪器，可以用来使磁力方向的微小变化成为可觉察的。

因为，当 $\theta-\delta$ 非常近似地等于 π 时，$\sin(\delta-\theta)$ 就近似地等于 $\theta-\delta-\pi$，从而我们就得到

$$\theta=\alpha-\frac{MH}{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg+\tau-MH}(\sigma+\pi-\alpha) \qquad (11)$$

通过减小最后一个分式中的分母，我们可以把θ的改变量弄得远远大于δ的改变量。必须注意，这一表示式中的δ的系数是负的，因此，当磁力向一边转动时，磁体就向另一边转动。

(3)在第三种位置上，悬置装置的上部被转动，直到磁体的轴线近似垂直于磁子午面时为止。

如果我们令

$$\theta-\sigma=\frac{\pi}{2}+\theta'\text{，和 }\alpha-\theta=\beta-\theta'\text{，} \qquad (12)$$

则运动方程可以写成

$$A\frac{d^2\theta'}{dt^2}=-MH\cos\theta'+\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin(\beta-\theta')+\tau(\beta-\theta) \qquad (13)$$

如果当 $H=H_0$ 而 $\theta'=0$ 时达到平衡，则有

$$-MH_0+\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin\beta+\beta\tau=0, \qquad (14)$$

而如果 H 是和一个小角 θ′相对应的水平力的值，则有

$$H=H_0(1-\frac{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\cos\beta+\tau}{\frac{1}{4}\frac{ab}{h}mg\sin\beta+\tau\beta}\theta') \qquad (15)$$

为了使磁体能够处于稳定平衡，第二项中分式的分子必须为正，但是，它越接近于零，仪器在指示地球水平分量的强度值变化方面将越灵敏。

估计力之强度的静态方法依赖于一种仪器的作用，该仪器本身对不同的力值将有不同的平衡位置。因此，在磁体上加一个小镜子，使它把一个光点投射在用时钟装置带动的一个感光表面上，就可以画出一条曲线，而由这条曲线，就可以按照我们暂时假设其为任意的一种标度来确定力在任意时刻的强度。

460.]在一个观测站中,人们利用肉眼观察或利用自动摄影法来保持一种偏角和强度的连续记录制度。在这种观测站中，偏角和强度的绝对值，以及一个磁体之磁轴的位置和磁矩，都可以在很大的精确度下被测定。

因为，磁偏计在每一时刻给出受到一个恒定误差影响的偏角，而双线磁强计则给出乘以一个恒定系数的每一时刻的强度。在实验中，我们用 $\delta'+\delta_0$ 来代替δ,式中δ′是磁偏计在所给时刻的读数而 δ_0 是未知然而恒定的误差，从而 $\delta'+\delta_0$ 就是该时刻的真实偏角。

同样，我们用 CH′来代替 H. 此处 H′是磁强计按任意标度的读数，而 C 是把这种读数换算到绝对单位的一个未知而恒定的因子，从而 CH′就是该时刻的水平力。

测定各量之绝对值的那些实验，必须在离磁偏计和磁强计足够远的地方进行，以便不同的磁体不会明显地互相影响。必须记下每一次观测的时刻，并把对应的δ′值和 H′代进去。然后处理各方程，以求得磁偏计的恒定误差 δ_0 和必须乘在磁强计读数上的系数 C. 求得了这些量，两种仪器上的读数就都可以用绝对单位表示出来了。然而，绝对测量必须时常重作，

以照顾到可能发生在各磁体之磁轴和磁矩方面的那些变化。

461．]测定地磁竖直分量的方法不曾发展到同样的准确程度。竖直力必须作用在一个绕水平轴而转动的磁体上。喏，一个绕水平轴而转动的物体的不能被弄得和一个用悬丝挂起并绕竖直轴而转动的物体一样对小力的作用十分敏感。此外，磁体的重量比作用在它上面的磁力要大得多，以致由于不对称的膨胀等等所造成的一个微小的质心位移将比磁力的颇大变化对磁体的位置发生更大的影响。

因此，竖直力的测量，或者说竖直力和水平力的比较，就是磁测制度中最不完善的部分。

磁力的竖直部分通常是通过总力方向的测定而从水平力导出的。

如果 i 是总力和它的水平分量之间的夹角，它就叫做磁倾角；另外，如果 H 是已经求得的水平力，则竖直力是 Htani 而总力是 Hseci.

磁倾角用一个“倾角针”来求得。

理论的磁倾针是一个磁体，它有一个通过其质心并垂直于其磁轴的转轴。转轴的两端作成很细的圆柱状，圆柱的中轴和通过质心的直线相重合。这两个柱状的轴端放在两个水平的平面上，可以在上面自由滚动。

当转轴取磁的东西向时，指针就可以在磁子午面内自由转动，而如果仪器调节得很完善，磁轴就将使自己沿着总磁力的方向。

然而，实际上并不能把一个倾角针调节得使它的重量不会影响它的平衡位置，因为，即使它的质心起初是位于转轴之柱状端的中心线上的，当针被稍稍弯曲或发生不对称的膨胀时，质心也会不再位于这一直线上的。另外，由于磁力和重力之间的互相干扰，一个磁体的质心的测定也是一种很困难的手续。

让我们假设针的一端和支轴的一端都被标记了出来。设在针上画了一条实在的或假想的线，我们将称之为准直线。这条线的位置在一个竖直的圆上读出。设θ是这条线和零刻度半径之间的夹角，在此我们将假设零刻度半径是水平的。设λ是磁轴和准直线之间的夹角，因此，当针在它的位置上时，磁轴和水平面之间的夹角就是θ＋λ.

设 p 是从质心到转轴在上面滚动的那个平面的垂线，则不论

滚动表面的形状如何，p 都将是θ的一个函数。如果转轴两端的滚动部分都是圆的，我们就有一个形如

$$p=c-a\sin(\theta+\alpha),\quad(1)$$

的方程，式中α是质心到滚动部分之中心连线的距离，而α是这一连线和准直线之间的夹角。

如果 M 是磁体的磁矩，m 是它的质量，g 是重力[强度]，I 是总磁力，而 i 是倾角，则由能量的守恒可知，当存在一种稳定平衡时，量

$$MI\cos(\theta+\lambda-i)-mgp\quad(2)$$

必须对θ来说有一个极大值，或者说，

$$\begin{aligned}MI\sin(\theta+\lambda-i)&=-mg\frac{dp}{d\theta},\\&=mga\cos(\theta+\alpha),\qquad(3)\end{aligned}$$

如果转轴的两端呈圆柱状的话。

另外，如果 T 是在平衡位置附近振动的周期，则有

$$MI + mga\sin(\theta+\alpha) = \frac{4\pi^2 A}{T^2} \quad (4)$$

式中 A 是针对转轴而言的惯量矩，而θ由(3)来确定。

在测定倾角时，用一个位于磁子午面内和向西刻度的倾角圆取一个读数。

设θ_1是这个读数，于是我们就有

$MI\sin(\theta_1+\lambda-i)=mga\cos(\theta_1+\alpha)$. (5)

现在把仪器绕竖直轴转过 180°，使得刻度变成向东，而如果现在读数为θ_2，则有

$MI\sin(\theta_2+\lambda-\pi+i)=mga\cos(\theta_2+\alpha)$. (6)

从(5)中减去(6)，并记得θ_1近似地等于 i，θ_2近似地等于$\pi-i$，而λ是一个小角，从而和 MI 相比 mgaλ可以忽略不计，于是就有

$MI(\theta_1-\theta_2+\pi-2i)=2mga\cos i\cos\alpha$.(7)

现在把磁体从它的支架上取下并把它放在第 453 节中的磁偏角仪器上，以利用一个悬挂磁体的偏角来指示它自己的磁矩，于是就有

$$M = \frac{1}{2}r^3HD, \qquad (8)$$

式中 D 是偏角的正切。

其次把针的磁性颠倒过来并通过观察其正切为 D′的一个新偏角来测定其新磁矩 M′，而距离则和以前相同，于是

$$M' = \frac{1}{2}r^3HD', \qquad (9)$$

式中　$MD'=M'D$(10)

然后再把它放在支架上并取两个读数θ_3和θ_4,其中θ_3近似于$\pi+i$而θ_4近似于$-i$，于是

$$M'I\sin(\theta_3+\lambda'-\pi-i) = mga\cos(\theta_3+\alpha) \quad (11)$$

$$M'I\sin(\theta_4+\lambda+i) = mga\cos(\theta_4+\alpha) \qquad (12)$$

由此就像以前一样得到

$M'I(\theta_3-\theta_4-\pi-2i)=-2mga\cos i\cos a$(13)

和(7)相加，就得到

$$MI(\theta_1-\theta_2+\pi-2i) + M'I(\theta_3-\theta_4-\pi-2i) = 0, \qquad (14)$$

或者写成

$D(\theta_1-\theta_2+\pi-2i)+D'(\theta_3-\theta_4-\pi-2i)=0$(15)

由此我们就得到倾角，

$$i = \frac{D(\theta_1-\theta_2+\pi)+D'(\theta_3-\theta_4-\pi)}{2D+2D'}, \quad (16)$$

式中 D 和 D′是由磁针分别在第一磁化和第二磁化中所引起的偏角的正切。

在利用倾角针来进行观测时，竖直轴应调节得使磁体转轴所在的那个平面在每一方位角上都为水平。磁体被磁化得 A 端下倾。把磁体放好，其转轴位于支撑平面上，而当圆的平面位于磁子午面内和圆的刻度面向东时取观测值。磁体的每一端都借助于读数显微镜来进行观察；显微镜装在一

个臂杆上，并沿着倾角圆的同心圆而运动。使显微镜的叉丝和磁体上一个记号的像相重合，然后臂杆的位置就借助于一个游标来在倾角圆上读出。

于是我们就在刻度向东时得到 A 端的一个观测值和 B 端的一个观测值。必须观测两端，为的是消除由于磁体的转轴和倾角圆并不同心而引起的任何误差。

然后把刻度转成向西，并进行更多的两次观测。

然后把磁体翻转，使它的转轴反向，并注视着磁体的另一面来再进行四次观测。

然后把磁体的磁化倒转，使得 B 端下倾，测定其磁矩并在这一状态下取八个观测值，而这十六个观测值结合起来，就给出真实的倾角。

462．]曾经发现，尽管作得极其细心，由用一个倾角圆求得的观测值导出倾角，仍和由用另一个倾角圆在同一地点求得的观测值导出倾角颇不相同。布劳恩先生曾经指出了由于转轴的椭圆性而引起的效应，并指出了怎样通过用磁化到不同强度的磁体取得观测值来进行改正。

这种方法的原理可以叙述如下。我们将假设，任何一次观测的误差都是一个不超过一度的小量。我们也将假设，有一未知的然而却是规则的力作用在磁体上，把它干扰得离开其正确位置。

如果 L 是这个力的力矩，θ_0是真实倾角，而θ是观测到的倾角，则有

$$L=MI\sin(\theta-\theta_0), \quad (17)$$

$$=MI(\theta-\theta_0), \quad (18)$$

式中$\theta-\theta_0$是小量。

显然，M 变得越大，磁针就越接近于它的正确位置。现在，设测定倾角的手续进行两次，第一次使磁化等于磁针可能达到的最大磁化 M_1，第二次使磁化等于 M_2，这是一个小得多的值，但仍能使读数清晰可辨而误差也还不致很大。设θ_1和θ_2是从这两组观测值推得的倾角，而 L 是对每次测定中的八个位置而言的未知干扰力〔矩〕的平均值——我们将假设这个平均值在两次测定中是相同的。于是就有

$$L=M_1I(\theta_1-\theta_0)=MI(\theta_2-\theta_0), \quad (19)$$

由此即得

$$\theta_0=\frac{M_1\theta_1-M_2\theta_2}{M_1-M_2}, L=M_1M_2I\frac{\theta_1-\theta_2}{M_2-M_1} \qquad (20)$$

如果我们发现若干次实验给出近似相等的 L 值，我们就可以认为θ_0必然是和倾角的真实值很相近的。

463．]焦耳博士近来制造了一个倾角圆。在这种倾角圆中，磁针的转轴不是在水平的玛瑙平面上滚动而是套在两根丝线或蛛丝上。悬丝的两端固定在一个灵敏天平的两臂上。于是磁针的转轴就在悬丝的两个套儿上滚动，而焦耳博士发现，它的运动自由性是比在玛瑙平面上滚动时大得多的。

在图 18 中，NS 是磁针；CC′是转轴，这是一条直的柱状金属丝；而 PCQ 和 P′C′Q′是转轴在上面滚动的悬丝。PCQ 是天平，由支持在一根金属丝 O′O′上的一个双重的弯杠杆构成；O′O′架在一个叉状架的尖齿上，成水平方向；另外天平还有一个用螺丝上下调节的平衡器，以使天平

位于 O′O′周围的一个随遇平衡的位置上。

为了使磁针当在悬丝上滚动时处于随遇平衡，重心必须既不升高也不降低。因此，在磁针的滚动中，距离 OC 必须保持不变。这一条件将得到满足，如果天平的两臂 OP 和 OQ 是相等的，而且悬丝是垂直于两臂的。

焦耳博士发现，磁针不应该长过五英寸。当它长达八英寸时，针的弯曲就倾向于使表观倾角减小一分的一个分数。磁针的转轴起初是一段钢丝，通过在一个砝码的拉伸下烧到赤热而被拉直，但是焦耳博士却发现，有了新的悬置，就不必再用钢丝了，因为铂乃至标准金就是够硬的了。

天平连接在一根金属丝 O′O′上；O′O′长约一英尺，水平地张在一个叉子的两齿之间。这个叉子通过支撑整个仪器的三脚架上的一个圆来转动其方位。一小时可以进行六次完整的倾角观测，而单独一次观测的平均误差是一分角度的一个分数。

曾经建议，剑桥物理实验室中的倾角针应该借助于一个双像仪器来进行观察。这种仪器包括两个全反射棱镜，像在图 19 中那样装在一个竖直的刻度圆上，从而反射面可以绕着一个水平轴而转动．该水平轴近似地和悬挂着的倾角针的转轴延线相重合。磁针借助于放在棱镜后面的一个望远镜来观察，从而针的两端就可以同时被看到，如图 20 所示。通过绕着竖直圆的中轴转动棱镜，可以使画在针上的两条直线的像互相重合。于是针的倾角就可以根据竖直圆的读数来确定。

沿着倾角直线的磁力的总强度 I 可以根据在已经描述过的四个位置上的振动时间 T_1、T_2、T_3、T_4 来推出如下：

$$I=\frac{4\pi^2 A}{2M+2M'}\left\{\frac{1}{T_1{}^2}+\frac{1}{T_2{}^2}+\frac{1}{T_3{}^2}+\frac{1}{T_4{}^2}\right\}$$

M 和 M′的值必须用以上描述的偏转和振动的方法来求出,而 A 是磁针绕其转轴的惯量矩。

利用悬挂磁体来进行的观测是更加精确得多的，因此通常是借助于方程

$$I=H\sec\theta$$

来根据水平力推求总力，式中 I 是总力，H 是水平力，而θ是倾角。

464.〕测定倾角的手续是很麻烦的，它不适于用来确定磁力的连续变化。用于连续观测的最方便的仪器是竖直力磁强计。这简单的就是平衡在刀口上而其磁轴近似水平地处于稳定平衡的一个磁体。

如果 z 是磁力的竖直分量，M 是磁矩，而θ是磁矩和水平面之间的小夹角，则有

$$MZ\cos\theta=mga\cos(a-\theta),$$

式中 m 是磁体的质量，g 是重力[强度]，a 是从重心到悬置轴线的距离，而α是通过轴及重心的平面和磁轴之间的夹角。

由此可见，对于竖直力的微小改变量δZ 来说，既然θ很小，将有磁体之角位置的一个改变量δθ，使得

$$M\delta Z=mga\sin(a-\theta)\delta\theta.$$

在实践中，这种仪器并不是用来测定竖直力的绝对值，而是用来记录

其微小的变化。

为此目的，只要知道当 $\theta=0$ 时的 Z 的绝对值以及 $\frac{dZ}{d\theta}$ 的值就够了。

当水平力和倾角为已知时，Z 的值由方程 $Z=H\tan\theta_0$ 求得，式中 θ 是倾角而 H 是水平力。

为了求出由 Z 的一个给定改变量所引起的偏转，取一个磁体把它放在轴线为东西向的位置上，并使它的中心在磁偏计之东或之西的 r_1 距置处，正如在偏角实验中那样。设偏角的正切为 D_1. 然后把它放得轴线沿竖直方向，而其中心在竖直力磁强计之上或之下的 r_2 距离处，并设在磁强计中引起的偏角的正切为 D_2. 那么，如果致偏磁体的磁矩是 M′，则有

$$2M = Hr_1{}^3D_1 = \frac{dZ}{d\theta}r_2{}^3D_2$$

由此即得

$$\frac{dZ}{d\theta} = H\frac{r_1{}^3D_1}{r_2{}^3D_2}$$

竖直力在任意时刻的实际值是

$$Z = Z_0 + \theta\frac{dZ}{d\theta},$$

式中 Z_0 是当 $\theta=0$ 时的 Z 值。

为了在一个固定观测站上对磁力的变化进行连续的观测，单线磁偏计、双线水平力磁强计和天平竖直力磁强计是最方便的仪器。

在一些观测站上，现在已在用钟表装置带动的专用纸上描绘摄影曲线，以便在任何时刻都对三种仪器上的指示形成一种连续的纪录。这些曲线表示着力的三个垂直分量对他们的标准值的改变量。磁偏计给出指向平均磁西方的力，双线磁强计给出指向磁北方的力的改变量，而天平磁强计则给出竖直力的改变量。这些力的标准值，或者说这些力在各仪器示数为零时的值，是通过对绝对偏角、水平力和倾角的频繁观测来推得的。

第八章

关于地磁

465.〕我们关于地磁的知识，是由对于磁力在任一时刻在地面上的分布的研究以及对于这一分布在不同时刻的变化的研究导出的。

任一地点和任一时刻的磁力，当它的三个座标为已知时，就是已知的。这三个座标可以在力的偏角或方位角、对水平面的倾角和总强度的形式下被给出。

然而，考察磁力在地面上的普遍分布的最方便的方法，就在于考虑力的三个分量的量值，即

$$\left.\begin{aligned} X &= H\cos\delta，\text{指向西北}，\\ Y &= H\sin\delta，\text{指向正西}，\\ Z &= H\tan\theta，\text{竖直向下}，\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

式中 H 代表水平力，δ代表偏角，而θ代表倾角。

如果 V 是地面上的磁势而我们把地球看成一个半径为 a 的球，则有

$$X = -\frac{1}{a}\frac{dV}{dl}, \quad Y = -\frac{1}{a\cos l}\frac{dV}{d\lambda}, \quad Z = \frac{dV}{dr}, \qquad (2)$$

式中 l 是纬度，λ是经度，而 r 是从地心算起的距离。

关于地面上的 V 的一种知识，可以只依赖于有关水平力的观测而得出如下。

设 V_0 是真实北极上的 V 值，那么，沿任一子午线求线积分，我们就得到

$$v = -a\int_{\frac{\pi}{2}} Xdl + V_0 \qquad (3)$$

这就是该子午线上纬度为 l 处的势的值。

于是，如果我们知道每一点上的指北分量 X 的值，又知道北极上的 V 值 V_0，就可以求出地面上每一点的势。既然力并不依赖于 V 的绝对值而是依赖于 V 的导数，那也就没有必要指定任何特定的 V_0 了。

任意点上的 V 值可被定出，如果我们知道沿任意子午线的 X 值和整个地面上的 Y 值的话。

令

$$V_2 = -a\int_{\frac{\pi}{2}} Xdl + V_0, \qquad (4)$$

式中的积分沿所给的子午线从极点计算到纬度 l，于是就有

$$V = V_1 - a\int_0^{\lambda} Y\cos l d\lambda \qquad (5)$$

式中的积分沿 l 纬度线从已给的经度 λ_0 计算到所要考虑的点。这种方法意味着，必须在地面上进行完备的磁勘测，以便在给定的时期知道地面上每一点的 X 值、Y 值或 X 和 Y 的值。我们实际上知道的是若干观测站上的磁力分量。在地球上的各个开化部分，这样的观测站是比较多的；在其他的部分，却有大片的地面是我们并不掌握其数据的。

磁勘测[①]

466.〕让我们假设，在最大线度为几百英里的一个中等大小的国家中，在适当分布在全国各地的相当多的观测站上已经作出了关于偏角和水平力的观测。

在这一区域内，我们可以假设 V 的值能够足够精确地用公式

$$V=\text{常量}-a(A_1 l+A_2\lambda+\frac{1}{2}B_1 l^2+B_2 l\lambda+\frac{1}{2}B_3\lambda^2+\cdots),\qquad(6)$$

来表示，由此即得

$X=A_1+B_1 l+B_2\lambda$，(7)

$Y\cos l=A_2+B_2 l+B_3\lambda$ (8)

设共有 n 个站，它们的纬度是 l_1、l_2 等等而它们的经度是 λ_1、λ_2 等等，并设每一个站上的 X 和 Y 都已测出。

令

$$l_0=\frac{1}{n}\Sigma(l),\lambda_0=\frac{1}{n}\Sigma(\lambda),\qquad(9)$$

l_0 和 λ_0 可以叫做中心站的纬度和经度。令

$$X_0=\frac{1}{n}\Sigma(X),Y_0\cos l_0=\frac{1}{n}\Sigma(Y\cos l),\ (10)$$

于是 X_0 和 Y_0 就是假想的中心站上的 X 值和 Y 值，于是就有

$X=X_0+B_1(l-l_0)+B_2(\lambda-\lambda_0)$ (11)

$Y\cos l=Y_0\cos l_0+B_2(l-l_0)+B_3(\lambda-\lambda_0)$ (12)

我们有 n 个形如(11)的方程和 n 个形如(12)的方程。如果我们用 ζ 来代表测定 X 时的可几误差，而用 η 来代表测定 $Y\cos l$ 时的可几误差，我们就可以假设二者起源于 H 和 δ 的观测误差，并根据这一假设来计算 ξ 和 η。

设 H 的可几误差是 h 而 δ 的可几误差是△，既然

$dX=\cos\delta\,.\,dH-H\sin\delta\,.\,d\delta$，

就有

$\xi^2=h^2\cos^2\delta+\triangle^2H^2\sin^2\delta$.

同理可得

$\eta^2=h^2\sin^2\delta+\triangle^2H^2\cos^2\delta$.

如果 X 和 Y 对由形如(11)和(12)的方程给出的值而言的改变量远远超过观测的可几误差，我们就可以断定这些改变量是由地域性的吸引力引起的，而这时我们就没有任何理由不认为 ξ 和 η 之比等于 1。

按照最小二乘式法，我们把形如(11)的方程乘以 η 而把形如(12)的方程乘以 ξ，以便它们的可几误差相同。然后我们把每一个方程乘以 B_1、B_2 或 B_3 中一个未知量的系数并把结果加起来，这样就得到可以求出 B_1、B_2、B_3 的三个方程，即

$P_1=B_1b_1+B_2b_2$,

[①] {读者应参阅 Rü ckerandThorpe 的论文‘AMagneticSurveyoftheBritishIsles，’Phil．Trans.，1890，A，pp．53—328．}

$\eta^2P_2+\xi^2Q_1=B_1\eta^2b_2+B_2(\xi^2b_1+\eta^2b_3)+B_3\xi^2b_2$，

$Q_2=B_2b_2+B_3b_3$；

在这些方程中，我们为了方便使用了下列符号：

$b_1=\Sigma(l^2)-nl_0^2, b_2=\Sigma(l\lambda)-nl_0\lambda_0, b_3=\Sigma(\lambda^2)-n\lambda_0^2$

$P_1=\Sigma(lX)-nl_0X_0, Q_1=\Sigma(lY\cos l)-nl_0Y_0\cos l_0$,

$P_2=\Sigma(\lambda X)-n\lambda_0X_0, Q_2=\Sigma(\lambda Y\cos l)-nl_0Y_0\cos l_0$,

通过计算 B_1、B_2 和 B_3 并代入方程(11)和(12)中，我们可以求出勘测界限以内任一点上的 X 值和 Y 值而不受地区性干扰的影响；经发现，当观测站附近存在像大多数火成岩那样的磁性岩石时，地区性干扰就是存在的。

只有在磁学仪器可以运往各地并在许多观测站上安装起来的那种国家，这种勘测才可以作到。对于世界上的其他部分来说，我们必须满足于利用在相距很远的较少观测站的数据之间进行内插的办法来求出地磁要素的分布。

467.〕现在让我们假设，通过这种手续，或是通过等价地绘制各磁性要素之等值线图的作图手续，X 和 Y 的

值，从而还有势 V 的值，在整个的地球表面上都是已知的。下一步就是要把 V 展成球谐函数的级数了。

假如地球在它的全部体积内都是沿同一方向而均匀磁化的，V 就将是一个一阶的谐函数，磁子午线将是通过两个对面磁极的大圆，磁赤道将是一个大圆，磁赤道的所有各点上的水平力将相等，而如果 H_0 是这个常量，则任一其他点上的值将是 $H=H_0\cos l'$，式中 l' 是磁纬度。竖直力将是 $Z=2H_0\sin l'$，而如果 θ 是倾角，则 $\tan\theta$ 将等于 $2\tan l'$.

在地球的事例中，磁赤道被定义为无倾角的曲线。它并不是球体的大圆。

磁极被定义为没有水平的点，或者说是倾角为 90° 的点。共有两个这样的点，一个在北半球，一个在南半球，但它们却并不是正好对面，而且它们的连线并不平行于地球的磁轴。

468.〕磁极就是地面上 V 值为极大值或极小值，或为稳定值的那些点。

在势为极小值的任一点上，倾角针的北端将竖直向下，而如果把一个罗盘指针放在该点附近的任何地方，则其北端将指向该点。在势为极大值的点上，倾角针的南端将指向下方，而在该点附近，罗盘指针的南端将指向该点。

如果在地球的表面上有 p 个 V 的极小值，那就必然有 p-1 个另外的点，在那儿，倾角针的北端是指向下方的，但是当使罗盘指针沿圆周绕该点运动一周时，指针的转动却并不是使北端永远指向该点，而是有时北端指向该点，而有时南端指向该点。如果我们把势为极小值的各点叫做真北极，则这些另外的点可以叫做赝北极，因为罗盘指针对它们并不忠实。如果共有 p 个真北极，那就必有 p—1 个赝北极；同样，如果共有 q 个真南极，那就必有 q—1 个赝南极。同名磁极的数目必须是奇数，因此曾经流行一时的认为共有两个北极和两个南极的观念是不对的。按照高斯的意见，地球表面上事实上只有一个真北极和一个真南北，从而没有任何赝极。这两个极的连线并不是地球的直径，而且它也并不平行于地球的磁轴。

469.〕大多数关于地磁本性的早期探索，都力图把它表示成一个或多

个磁棒的作用结果，而磁棒各极的位置则是有待确定的。高斯是第一个通过把势函数展成体谐函数的级数来用一种完全普遍的方式表示了地磁分布的人，他定出了前四阶体谐函数的系数。这些系数共有 24 个；3 个属于一阶函数，5 个属于二阶函数，7 个属于三阶函数，而 9 个属于四阶函数。经发现，为了对地磁的实际状态作出一种尚称精确的表示，所有这些项都是必要的。

试图定出观测到的磁力的哪一部分起源于外因和哪一部分起源于内因

470.〕现在让我们假设，我们已经得到了地球磁势的一种球谐函数的展式，和地球表面每一点上水平力的方向及量值相容，这样，高斯就已经指明，如何根据观测到的竖直力来确定磁力是地球内部的磁化和电流之类的原因引起的呢，还是有某一部分是由地球表面以外的原因所直接引起的。设 V 是展成球谐函数之双级数的实际磁势。

$$V = A_1 \frac{r}{a} + \cdots + A_1 (\frac{r}{a}) + \cdots$$

$$+ B_1 (\frac{r}{a})^{-2} + \cdots + B_i (\frac{r}{a})^{-(i+1)} + \cdots$$

第一个级数代表由地球外部的原因所引起的那一部分势，而第二个级数则代表由地球内部的原因所引起的那一部分势。水平力的观测向我们提供的是当 r=a=地球的半径时这两个级数之和。其 i 次项是

$V_i = A_i + B_i$

竖直力的观测给我们以

$$Z = \frac{dV}{dr},$$

而其 aZ 的 i 次项是

$$aZ_i = iA_i - (i+1)B$$

由此即得，由外因引起的部分是

$$A_i = \frac{(i+1)V_i + aZ_i}{2i+1},$$

而由内因引起的部分是

$$B_i = \frac{iV_i - aZ_i}{2i+1}$$

V 的展式迄今只是针对在或接近某一年代的 V 的平均值算出的。看来这一平均值并没有任何部分是由地球以外的原因所引起的。

471.〕关于 V 的改变量展式的日因部分和月因部分的形式，我们知道得不够清楚，不足以利用这种方法来确定这些改变量是否有任何部分起源于从外界作用过来的磁力。然而可以肯定，正如斯通内先生和钱伯斯先生已经证明的那样，假设太阳和月亮是一些磁体，这些改变量的主要部分也不可能起源于太阳和月亮的任何直接的磁作用[①]。

[①] 布拉格的赫尔施坦教授曾经发现了各磁要素的一种周斯变化，其周斯为 26.33 天，几乎正好等于太阳的朔望转动，正如由太阳赤道附近的黑子的观测所推知的那样。这种根据它对磁针的效应来发现太阳的未被看到的整体转动时间的方法，是地磁学对天文学的借贷偿还的第一次支付．请参阅 Anzeiger der k．Akad．,Wien, june 15,1871.见 Proc．R．S，16，1871．

472．〕曾经注意到的磁力的主要变化如下。

Ⅰ．较规则的变化

(1)日因变化，依赖于一天内的钟点和一年内的时序。

(2)月因变化，依赖于月球的时间角以及它的其他位置要素。

(3)这些变化并不在不同的年份中重复出现,而是受到一种周期更长的即约为十一年的变化的影响。

(4)除此以外，地磁的状态还有一种久期变化，它自从有地磁勘测以来就一直在进行着，而且正在引起各地磁要素的变化，其量值远大于任何小周期变化的量值。

Ⅱ．干扰

473．〕除了较规则的变化以外，各地磁要素还会受到或大或小的突然干扰的影响。曾经发现，这些干扰在一

段时间之内会比在别的时期更强，而且在干扰较大的时期内规则变化的规律会受到掩盖，尽管那些规律在干扰较小的时期内是很清楚的。因此，曾对这些干扰给予了很大的注意，而且曾经发现，特定种类的干扰在一天的某些时候以及在某些季节和时期更容易发生，尽管每一次干扰是十分无规则地出现的。除了这些更加普通的干扰以外，还偶然有些大干扰的时期，在那种时期内，地磁会在一两天内受到很强的干扰。这叫做“磁暴”。个体的干扰有时会在相距很远的观测站上同时被观测到。

艾瑞先生曾经发现，格林威治的干扰的一个很大的部分，和安装在附近的土内的电极所收集到的电流相对应，而且是电流将对磁体直接产生的一种干扰，如果地电流保持其实际的方向而通过放在磁体下面的一根导线的话。

曾经发现，每十一年就有一个最大干扰时期，而且这个时期看来是和太阳黑子数目最多的时期相对应的。

474．〕我们被地磁的研究所带入的探索领域是既深且广的。

我们知道，太阳和月亮都对地磁有影响。曾经证明，这种作用并不能通过假设太阳和月亮是磁体来加以解释。因此作用是间接的。

在太阳的事例中，部分的影响可能是热作用，但是在月亮的事例中我们却不能把作用归之于这种原因。也有可能，这些物体的吸引力通过在地球内部发生胁变而引起地球内部早已存在的磁性的一些变化(第447节)，并从而通过一种潮汐作用而造成一些半昼夜的变化吧？

但是，和地磁的很大的久期变化相比，所有这些变化的数量都是很小的。

什么原因，地球外部的或其内部深处的原因，引起地磁的如此巨大的变化，以致磁极会慢慢地从大地的一部分移动到另一部分呢？当我们考虑到大地球的磁化强度完全可以和我们克服了许多困难才在我们的钢铁磁体中造成的磁化强度相比时，如此巨大的一个物体中的这些巨大变化，就迫使我们作出结论说，我们还不熟悉自然界中最强有力的作用之一，它的活动场所位于地球内部的深处，而要获得有关那种地方的知识，我们可用的手段是很少的[①]。

[①] {巴耳福·斯提瓦特曾经建议，周日变化是由大气上层区域的稀薄空气中的感生电流引起的，当这种空气扫过地球的磁力线而运动时，这种电流就会出现。舒斯特近来在 Phil．Trans．A，1889，p．467 上通过

第四编

电磁学

第一章

电磁力

475.〕许多不同的观察者都曾注意到，在某些事例中，物体中或其附近的放电不必要地引起或破坏了他们的

磁性，而人们也对磁和电之间的关系作出过各式各样的猜想，但是，直到汉斯·克里斯蒂安·奥斯特[①]在对哥本哈根的少数几个高年级学生所作的一次私人演讲中观察到连着电池两极的一根导线会影响它附近的一个磁体时为止，这些现象的规律，以及这些关系的形式却都是完全未知的。奥斯特在所标时间为 1820 年 7 月的一篇为〈关于磁体附近的电冲突效应的实验〉(Experimentacircaef-fectumConflictusElectriciinAcumMagneticam) 的论文中发表了他的发现。

关于磁体和带电物体的关系的实验曾经进行过，但是直到奥斯特力图确证一条导线被电流所加热的效应时为止，这些实验都毫无结果。然而奥斯特却发现，电流本身而不是导线的加热，才是作用的原因，而且“电冲突是以一种转动的方式而起作用的”；就是说，放在一根通有电流的导线附近的一个磁体，倾向于使自己垂直于导线，而且当使磁体绕着导线而运动时，它将永远以相同的一端指向导线。

476.〕因此，看样子，在载有电流的导线周围的空间中，一个磁体会受到的力的作用，这些力依赖于导线的位置和电流的强度。因此，这些力起作用的那个空间，可以被看成一个磁场，而且我们可以用在研究普通磁体附近的场时已经用过的同样方法来研究它，即通过追踪力线的走向并在每一点上测量力的强度来研究它。

477.〕让我们从一根载有电流的无限长直导线的事例开始。假若一个人设想自己立在导线的位置上，使电流从他的头流向他的脚，则一个自由悬挂在他面前的磁体将使自己在电流的作用下用原来指北的一端指向他的右手。

磁力线到处都垂直于通过导线而画出的平面，从而就是一些圆，每一个圆都位于导线的垂面内，而导线则通过圆心。如果使磁体从左向右沿其中一个圆绕行一周，则磁体指北的一极将受到一个力的作用，而这个力是永远指向磁体的运动方向的。

478.〕为了比较这些力，假设导线是竖直的，而其电流是向下的，设把一个磁体放在一个可以绕竖直轴线自由转动的仪器上，而其轴线和导线相结合。经发现，在这种情况下，电流并没有使整个仪器以电流本身为其轴线而发生转动的任何效应。由此可见，竖直电流对磁体两极的作用是这样的：以电流为轴线，两个力的力矩是相等而反向的。设 m_1 和 m_2 分别是两个极的强度，r_1 和 r_2 是它们离导线中轴的距离，T_1 和 T_2 是在两个磁极处由

格林方法的应用已经证明，这些干扰的较大部分是在地球表面上方有其起源的。}

① 汉斯汀教授在一封信中对奥斯特的发现作了另一次叙述，见 theLifeFaradaybyDr.BenceJones,vol.ii.p.395.

电流引起的磁力强度，则作用在 m_1 上的力是 m_1T_1，而既然它是垂直于轴线的，它的力矩就是 $m_1T_1r_1$．同理，作用在另一极上的力矩是 $m_2T_2r_2$，而既然没有观察到任何运动，那就有

$$m_1T_1r_1+m_2T_2r_2=0$$

但是我们知道，在一切磁体中都有

$$m_1+m_2=0$$

由此即得

$$T_1r_1=T_2r_2,$$

或者说，由一个无限长的直电流引起的电磁力垂直于电流并和离开电流的距离成反比。

479．〕既然乘积 Tr 依赖于电流强度，它就可以作为电流的一种量度。这种测量方法是不同于建筑在静电现象上的测量方法的，而且既然这种测量依赖于电流引起的磁现象，它就被称为“电磁测量制”。在电磁制中，如果 i 是电流，则有

$$Tr=2i$$

480．〕如果导线被取作 z 轴，则 T 的直角分量是

$$X=-2i\frac{y}{r^2},\qquad Y=2i\frac{x}{r^2},\quad Z=0$$

此处 Xdx+Ydy+Zdz 是一个全微分，即下式的全微分：

$$2i\tan^{-1}\frac{y}{x}+C$$

由此可见，场中的磁力可以由一个势函数导出，正如在以前的若干例子中一样，但是在这一事例中，势却是一个具有一系列无限多个值的函数，各值之间的公共差为 $4\pi i$.然而，势对各座标的微分系数却在每一点上有一个确定的单一的值。

电流附近的场中的一个势函数的存在，并不是能量守恒原理的一种不言而喻的结果，因为，在一切实际的电流中，都存在一种电源电能的连续消耗，以克服导线的电阻，因此，除非这种消耗的数量是精确已知的，人们就总可以推测电池的一部分能量曾被用来对一个沿回线运动的磁体作功。事实上，如果一个磁极 m 沿着一条绕过导线的闭合曲线而运动一周，则实际作的功是 $4\pi mi$．只有在并不绕过导线的闭合路径上，力的线积分才是零。因此，在目前，我们必须认为力定律和势函数的存在是建筑在已经描述过的实验的证据上的。

481．〕如果考虑一条无限长直线周围的空间，我们就会看到它是一个循环空间，因为它会回到自己中来。如果我们现在设想有一个平面或任意别的曲面从这条直线开始而在直线的一侧伸展到无限远处，这个曲面就可以被看成一个把循环空间简化为非循环空间的壁障。如果从任一固定点开始画一些曲线到达任一另外的点而不空穿过壁障，并把势定义为沿其中任一条曲线计算的力的线积分，则势在任一点上都将有单独一个确定的值。

现在磁场就在一切方面都和一个磁壳所引起的场相等同，该磁壳和这个曲面相重合，而磁壳的强度为 i．这个磁壳在一侧是以无限长的直线为界的。它的边界的其他部分都在离所考虑的这一部分场为无限远的距离处。

482.]在所有实际的实验中，电流都形成一个有限大小的闭合回路。因此我们将比较一个有限电路的磁作用和一个以该电路为边界的磁壳的磁作用。

许多实验，其中最早的是安培的实验而最精确的是韦伯的实验，已经证明,一个小的平面电路在远大于电路线度的距离处引起的磁作用和一个磁体的磁作用相同，该磁体的磁轴垂直于电路的平面，而其磁矩等于电路面积乘以电流强度[①]。如果电路被设想为用一个以电路为边界的曲面所补满并从而形成一个壁障，而且，如果把这个电路换成一个和曲面相重合而强度为 i 的磁壳，则磁壳在一切遥远点上的磁作用将和电流的磁作用相等同。

483.〕到此为止，我们一直假设电路的线度远小于从电路的任一部分到所考察的场的部分的距离。现在我们将假设电路具有完全任意的形状和大小，并检查它在并不位于导线内部的任一点 P 上的作用。下面这种具有重要的几何应用的方法，是由安培为此目的而引入的。

设想有一个以电路为边界而并不通过 P 点的任意曲面 S。在这个曲面上画两组相交的曲线，这样就把曲面分成了一些元部分，它们的线度远小于它们到 P 点的距离，也远小于曲面的曲率半径。

沿着其中每一个元部分的边界，设想有一个强度为 i 的电流在流动，其巡回方向在一切元部分中都和原电路中的方向相同。

在形成二相邻面积元之分界线的任何线段中，都有两个相等强度 i 的电流沿着相反的方向在流动。

同一位置上两个相等而反向的电流的效应绝对地是零，不论我们在什么方面来考虑电流。因此它们的磁效应为零。各个元电路上并不如此被中和的部分，只有那些和原电路相重合的段落。因此，各个元电路的总效应，就和原电路的效应相等价。

484.〕现在，既然每一个元电路都可以看成一个离 P 点的距离远大于其线度的平面小电路，我们就可以把它代换成一个强度为 i 而以元电路为其边界的元磁壳。元磁壳在 P 点的磁效应和元电路的磁效应相等价。全部的元磁壳构成一个强度为 i、和曲面 S 相重合并以原电路为其边界的磁壳，从而整个磁壳在 P 点的磁作用就和原电路的磁作用相等价。

很显然，电路的作用是和任意画出来补满电路的曲面 S 的形状无关的。我们由此就看到，一个磁壳的作用只依赖于它的边界的形状而不依赖于磁壳本身的形状。这个结果我们以前在第 410 节中已经得到，但是了解它可以怎样从电磁的想法推得也是很有教育意义的。

因此，电路在任意点上引起的磁力，就在量值和方向上是和由一个磁壳所引起的磁力相等的，该磁壳以电路为边界而不通过该点，磁壳的强度在数值上等于电流的强度。电路中电流的方向是和磁壳的磁化方向这样联系着的：假如一个人把他的双脚站在磁壳上我们称之为正面的并倾向于朝北的那一面上，则他面前的电流将是从右向左的。

485.〕然而，对那些位于磁壳物质之内的点来说，电路的磁势却不同于磁壳的磁势。

[①] {Ampère，Théoriedesphénomènesélectrodynamiques,1826；Weber,ElektrodynamischeMaasbes-timmungen（AbhandlungenderK(niglichS(chs.GesellschuftzuLeipzig,1850—1852.）}

如果ω是磁壳在 P 点所张的立体角，当磁壳的正侧或指北侧向着 P 点时立体角为正时，则任一并不位于磁壳内部的点上的磁势是ωφ，此处φ是磁壳的强度。在磁壳本身物质内部的任一点上，我们可以假设磁壳分成强度为ϕ_1和ϕ_2的两部分，此处$\phi_1+\phi_2=\phi$，而所考虑的点则位于ϕ_1的正侧和ϕ_2的负侧。这一点上的势是

$$\omega(\phi_1+\phi_2)-4\pi\phi_2$$

在磁壳的负侧，势变成φ(ω-4π)。因此，在这一事例中，势是连续的，而且在每一点上具有单一而确定的值。另一方面，在电流的事例中，每一并不位于导线本身内部的点上的磁势等于 iω，此处 i 是电流的强度，而ω是一个电路在该点上所张的立体角，当从 P 点看来电流是逆时针运行时立体角被取为正。

量 iω是一个具有一系列无限多个值的函数，各值的公共差是 4πi。然而，iω对座标的微分系数却在空间的每一点上都有单一而确定的值。

486.〕如果一个细长而柔硬的管性磁体被放在一个电路的附近，则磁管的北极和南极将倾向于沿相反的方向而绕着导线运动，而且，假如它们可以自由地服从磁力，则磁体最后将绕着导线缠成一个闭合的线圈。假若能够得到只有一个极的磁体，或得到磁极的强度不相等的磁体，则这样一个磁体将绕着导线而向一个方向不停地转动，但是，既然每个磁体的极事实上是相等而反号的，这样的结果就绝不会发生。然而，通过使磁体的一个极可以绕着导线继续转动而另一个极却不能，法拉第曾经指明了如何引起磁体的一个极绕一个电流的连续转动。为了使这种过程可以无限地重复进行，整个的磁体在每一周转动中必须从电流的一侧被搬到另一侧。为了作到这一点而不打断电的流动，电流被分成了两支，而且当一支被断开以允许磁体通过时，电流就经由另一支流过。法拉第为此目的而应用了一个圆形的汞槽，如第 491 节中的图 23 所示。电流经由导线 AB 而进入槽中，并在 A 点分支，而在流经弧 BQP 和 BRP 后在 P 点重新合并，然后电流就经过导线 PO、汞杯 O 和 O 下面的一根竖直导线而流走。

磁体(图中未画出）被安装得可以绕着一个通过 O 点的竖直轴而转动，导线 OP 也随之而转。磁体穿过汞槽的开口，一个极譬如说北极在汞槽平面的下方，而另一极则在其上方。当磁体和导线 OP 绕着竖直轴而转动时，电流就逐渐从槽中位于磁体前方的支路转移到位于磁体后方的支路中去，于是在每一次完整的转动中磁体都从电流的一侧过渡到另一侧。磁体的北极沿方向 N—E—S—W 而绕着向下的电流转动，而如果ω、ω′是圆形槽在两个极上所张的立体角(不计正负），则电磁力在每一次完整转动中所作的功是

$$mi(4\pi-\omega-\omega')$$

式中 m 是任一极的强度，而 i 是电流强度[①]。

[①] [这一问题可以讨论如下：参照着第 491 节中的图 23，让我们取 OP 的任一位置并引入假想的平衡电流即 i 沿 BO 而 x、y 沿 OB.当连接在 OP 上的磁体被移动了整整一周时，被假设为沿 ABOZ 而运行的电流 i 对南极并不作功，因为该极描述了一条并未绕过电流的闭合曲线。然而北极却描述了一条确实绕过电流的闭合曲线，从而对该极作的功是 4πmi.现在我们必须估算电路 BPOB 中的电流 x 和电路 BRPOB 中的电流 y 的效应。北极是位于这些电路平面的下方的，它的势将是 而南极的势是 式中ωθ和ω′θ是 BOP 在两个极上所张的立体角，而ω、ω′是圆形槽所张的立体角。总的势是 由此可见，当导线从 OP 沿方向 NESW

487．〕现在让我们力图对一个线性电路附近的磁场状态形成一种概念。

设电路对空间每一点所张的立体角ω的值已被求出，让我们画出ω在上面为常数的一些曲面。这些曲面将是等势面。每一个这种曲面都将以电路为其边界，而任意两个曲面ω_1和ω_2将在电

①[这一问题可以讨论如下：参照着第491节中的图23，让我们取OP的任一位置并引入假想的平衡电流即i沿BO而x、y沿OB.当连接在OP上的磁体被移动了整整一周时,被假设为沿ABOZ而运行的电流i对南极并不作功，因为该极描述了一条并未绕过电流的闭合曲线。然而北极却描述了一条确实绕过电流的闭合曲线，从而对该极作的功是4πmi.现在我们必须估算电路BPOB中的电流x和电路BRPOB中的电流y的效应。北极是位于这些电路平面的下方的，它的势将是

■

而南极的势是

■

式中ω■和ω′■是BOP在两个极上所张的立体角，而ω、ω′是圆形槽所张的立体角。总的势是

■

由此可见，当导线从OP沿方向NESW转回到OP时，势将改变一个量-mi（ω+ω′)。因此电流所作的功就由正文中的公式给出。]{下面是求得这种结果的一种稍许不同的方法：通过各导线和汞槽的电流和一些电流相等价，那就是通过汞槽的圆形电流i-x、通过电路POB的电流i以及通过AB、BO和竖直导线OZ的电流i.圆形电流显然不会引起使任一磁极沿着和电路同轴的圆而运动的任何力。北极在每一周中绕过电路AB、BO和竖直的OZ一次，因此对该极作的功就是4πim．如果Ω和Ω′分别是电路POB在磁体的北极上和南极上所张立体角的数值,则磁体和电路的势能是-mi(Ω+Ω′)。因此，如果θ是角POB，则在每一完整转动中对磁体作的功是

■

因此对磁体作的总功就是

■

路上相交于一个角度$\frac{1}{2}$（$\omega_1-\omega_2$）[①]。

转回到OP时，势将改变一个量-mi（ω+ω′）。因此电流所作的功就由正文中的公式给出。]{下面是求得这种结果的一种稍许不同的方法：通过各导线和汞槽的电流和一些电流相等价，那就是通过汞槽的圆形电流i-x、通过电路POB的电流i以及通过AB、BO和竖直导线OZ的电流i.圆形电流显然不会引起使任一磁极沿着和电路同轴的圆而运动的任何力。北极在每一周中绕过电路AB、BO和竖直的OZ一次，因此对该极作的功就是4πim．如果Ω和Ω′分别是电路POB在磁体的北极上和南极上所张立体角的数值，则磁体和电路的势能是-mi（Ω+Ω′）。因此，如果θ是角POB，则在每一完整转动中对磁体作的功是 因此对磁体作的总功就是mi{4π－（ω＋ω′）．}

[①] {这一点可以推导如下：考虑曲面ω1上靠近二等势面交线处的一个点P，设O是交线上靠近P的一个点，那么就以O为心画一个单位半径的球面。电路在P点上所张的立体角，将由单位球上被曲面ω1在O点的切面以及由电路在离O点某距离处的形状来确定的一个不规则锥面所切割下来的面积来量度。现在考虑曲

本卷末尾的图版十八，代表由一个圆形电流所引起等势面的一个截面。小圆圈代表导线的截面，图的下方的水平线是通过圆电流的中心而垂直于

其平面的直线。图中画了24个等势面，对应于一系列相差为$\frac{\pi}{6}$的ω值。

它们是旋成曲面，以上述垂线为其公共轴。它们显然是扁的图形，在轴的方向上较扁。它们在电路的曲线上相交于 15°的角。

作用在一个等势面的任一点处的一个磁极上的力垂直于该等势面，并且和相邻等势面之间的距离成反比。图版十八中围绕着导线截面的那些闭合曲线就是力线。它们是根据 W.汤姆孙爵士的论文《漩涡运动》[②]而画出的。

一个电路对任一磁性体系的作用

488.〕现在我们能够由磁壳理论来推论一个电路对它附近的任一磁性体系的作用了。因为，如果我们画一个磁壳，其强度在数值上等于电流强度，而其边界在位置上和电路相重合，而磁壳本身并不通过磁性体系的任何部分，则这个磁壳对磁性体系的作用将和电路的作用相等同。

磁性体系对电路的反作用

489.〕由此，应用作用和反作用相等而反向的原理，我们就得到这样的结论：磁性体系对电路的机械作用和它对一个以电路为其边界的磁壳的作用相等同。一个强度为φ的位于势为 V 的磁力场中的磁壳，由第 410 节可知其势能等于

$$\phi\iint\left(l\frac{dV}{dx}+m\frac{dV}{dy}+n\frac{dV}{dz}\right)dS,$$

式中 l、m、n 是从面积元 dS 的正侧画起的法线的方向余弦，而积分则展布在磁壳的表面上。

现在考虑面积分

$$N=\iint(la+mb+nc)dS,$$

式中 a、b、c 是磁感分量。这个积分代表通过磁壳的磁感数量，或者按照法拉第的语言，它就代表代数地计算的从负侧向正侧穿过磁壳的磁感线的数目，这时把沿相反方向穿过磁壳的磁感线算作负的。

记得磁壳并不属于引起势 V 的那一磁性体系，从而磁力就等于磁感，我们就有

$$a=-\frac{dV}{dx},\quad b=-\frac{dV}{dy},\quad c=-\frac{dV}{dz},$$

而且我们可以把 M 的值写成

M=-φN

面ω2 上一个靠近 O 点的点 Q.电路在这个点上所张的立体角，将由以 O 为心的单位球上曲面ω2 在 O 点的切面以及一个不规则锥面所切割下来的面积来量度，而如果 P 和 Q 很靠近，这个锥面就将和以前的锥面相同。因此，二立体角之差就是两个切面之间的半月形面积，而这个面积就是二切面之间的夹角的两倍，也就是曲面ω1 和ω2 的交角的两倍，于是曲面之间的交角就是

[②] Trans.R.S.Edin.,Vol.xxv.p.217.(1869).

如果δx_1代表磁壳的任一位移，而X_1代表促进这一位移的力，则由能量守恒原理应有

$$X_1 \sigma x_1 + \sigma M = 0$$

或者写成

$$X_1 = \phi \frac{dN}{dx_1},$$

现在我们已经确定了和磁壳的任一给定位移相对应的力的性质。它推动或阻碍位移，全看位移将使通过磁壳的磁感线数目增大或减小而定。

这一点对等价的电路也是成立的。电路的任一位移将受到推动或阻碍，全看位移是增大或减小沿正方向穿过电路的磁感线数目而定。

我们必须记得，磁感线的正方向就是一个磁体的指北极倾向于沿该线运动的那个方向，而当一条磁感线的方向和电路中玻璃电的流动方向之间成右手螺旋的前进方向和转动方向之间的关系时，该磁感线就是沿正方向穿过电路的。

490．〕很明显，和整个电路的任一位移相对应的力，可以立刻就由磁壳理论导出。但这并不是一切。如果电路的一部分是可以变形以致可以独立于其他部分而移动的，我们就可以通过把磁壳分划成用可变形接头连结着的足够多的小块，来使磁壳能够发生相同种类的位移。由此我们就得出结论说，如果由于电路任一部分沿给定方向的位移而使穿过电路的磁感线数目的所增大，则这种位移将受到作用在电路上的电磁力的推动。

因此，电路的每一部分都受到一个力，促使它切割磁感线，以使电路可以包围更多的磁感线，而力在这一位移过程中作的功，在数值上就等于所增加的磁感线数目乘以电流强度。设通有电流强度 i 的电路上的一个元线段 ds 平行于自身而运动了一段距离δx，它就将扫过一个平行四边形的面积，该平行四边形的各边分别平行于 ds 和δx.

如果磁感用■来代表而其方向和平行四边形的法线成一个角度∈，则对应于这一位移的 N 的增量可以通过将平行四边形的面积乘以■cos∈来求得。这种运算的结果用一个平行六面体的体积来几何地加以表示，该平行六面体的各个棱在方向和量值上分别代表δx、ds 和■. 这个量算作正的，如果当我们按照此处所给的次序指向这些方向时，指示器是按顺时针的方向绕着平行六面体的对角线而转动的[①]。这个平行六面体的体积等于 Xδx。

如果θ是 ds 和■之间的夹角，则以 ds 和■为边的那个平行四边形的面积是 ds.■sinθ，而如果η是位移δx和平行四边形的法线之间的夹角，则平行六面体积是

ds.■$\sin\theta . \delta x \cos\eta = \delta N$.

现在

X$\delta x = i\delta N = i ds.$■$\sin\theta\, \delta x \cos\eta$，

从而

X=ids.■$\sin\theta\cos\eta$就是投影在δx方向上的推动位移 ds 的力。

[①] {在这个法则中，ds 是沿 i 的方向画出的，在观察者被假设为位于平行六面体上δx、ds 和■所由出发的那个角上。}

因此这个力的方向是垂直于平行四边形的，而其量值则等于 i.ds.■ sinθ。

这就是一个平行四边形的面积，该平行四边形的各边在量值和方向上代表着 ids 和■.因此，作用在 ds 上的力，在量值上就用这个平行四边形的面积来代表，而在方向上则用平行四边形的法线来代表；法线的正向是这样规定的：当一个右手螺旋从电流元 ids 的方向转向磁感■的方向时，螺旋前进的方向就是法线的正

①{在这个法则中，ds 是沿 i 的方向画出的，在观察者被假设为位于平行六面体上δx、ds 和■所由出发的那个角上。}

■图 22

向。

我们可以用四元数的语言来表述这个力的方向和量值；我们说，这个力就是电流元矢量 ids 乘以磁感矢量■所得结果的矢量部分。

491.〕于是我们就全面地确定了作用在位于磁场中的一个电路的任一部分的力。如果电路被用任何方式来推动，使它经历了各种的形状和位置以后又回到原来的地方，而且电流强度在运动过程中保持不变，则电磁力所作的总功将是零。既然这一点对电路的任意循环运动都是正确的，那就可以知道，用电磁力来使一个恒定强度的线性电路的任何部分反抗摩擦力等等而保持一种连续的旋转运动，是不可能的。

然而，如果在电流进程的某一段落上，电流从一个导体过渡到另一导体，而这两个导体可以相对滑动，则产生连续转动是可能的。

当一个电路中的一个导体和一个平滑固体或一种流体的表面有一种滑动接触时，电路就不能再看成单一的强度恒定的线性电路，而必须看成两个或更多个强度可变的电路的体系了；在这样的体系中，电流是适当分配的，就是说，在 N 正在增加的电路中电流具有正方向，而在 N 正在减小的电路中则电流有负方向。

例如，在图 23 所代表的仪器中，OP 是一个活动的导体；它的一端放在一个汞杯 O 中，而其另一端则浸入一个和 O 同心的圆形汞槽中。

图 23

电流沿 AB 进入，并在圆槽中分成两部分；其中一部分 x 沿着圆弧 BQP 流动，而另一部分 y 则沿着 BRP 流动。这些电流在 P 点汇合并沿着活动导体 PO 和电极 OZ 而流向电池的锌极。沿 PO 和 OZ 的电流的强度是 x+y,即 i。

在这儿，我们有两个电路。一个是 ABQPOZ，其电流强度为 x，沿正方向运行；另一个是 ABRPOZ，其电流强度为 y，沿负方向运行。

设■是磁感，并设它的方向向上而垂直于圆槽的平面。

当 OP 沿逆时针的方向转过一个角θ时，第一个电路的面积增大 $\frac{1}{2}OP^2$θ，而第二个电路的面积减小同一数量。既然第一个电路中的电流强度是x，它所作的功就是$\frac{1}{2}x.OP^2$．θ．■；而既然第二个电路中的电流强度是—y，它所作的功就是$\frac{1}{2}y.\ OP^2$．θ■．因此，所作的总功就是

$\frac{1}{2}(x+y)OP^2$．θ■或$\frac{1}{2}$i．OP^2．θ■，

只依赖于 PO 中的电流强度。由此可见，如果 i 被保持为恒定，臂 OP 就被一个均匀的力推动着沿圆周不停地转动；这个力的力矩是$\frac{1}{2}$i．OP^2．■如果像在北半球一样■是向下的，而且如果电流是向内的，则转动将是沿负方向的，即沿 PQBR 方向的。

492．〕现在我们能够从磁体和电流的相互作用过渡到一个电路对另一个电路的作用了。因为我们知道，一个电路 C_1 对任一磁性体系 M_2 而言的磁学性质，等同于一个磁壳 S_1 的磁学性质，该磁壳的边界和电路相重合，而其强度在数值上等于电流的强度。设磁性体系 M_2 是一个磁壳 S_2，则 S_1 和 S_2 之间的相互作用等同于 S_1 和一个电路 C_2 之间的相互作用，该 C_2 和 S_2 的边界相重合，其电流强度等于 S_2 的强度；而且后一相互作用又等同于 C_1 和 C_2 之间的相互作用。

因此，两个电路 C_1 和 C_2 之间的相互作用，等同于对应磁壳 S_1 和 S_2 之间的相互作用。

我们在第 423 节中已经考察过边界为闭合曲线 s_1 和 s_2 的两个磁壳的相互作用。如果我们令

$$M=\int_0^{s_2}\int_0^{s_1}\frac{\cos\in}{r}ds_1ds_2,$$

式中∈是线元 ds_1 和 ds_2 的方向之间的夹角，r 是它们之间的距离，一次积分是沿 s_2 计算的，而另一次积分则是沿 s_1 计算的，而且，如果我们把 M 叫做两条闭合曲线 s_1 和 s_2 的势，则由两个以 s_1 和 s_2 为边界而其强度为 i_1 和 i_2 的磁壳的相互作用而引起的势能是

$$-i_1i_2M,$$

而促进任一位移 δx 的力 X 就是

$$i_1i_2\frac{dM}{dx}$$

关于由任一电路的存在而引起的作用在另一电路的任一部分上的力的全部理论，都可以从这一结果推演出来。

493．〕我们在本章中所采用的方法，是法拉第的方法。我们在下一章中将按照安培的方法而从一个电路的一部分对另一电路的一部分的直接作用开始。在本章中我们不这样作，而是首先必须证明一个电路和一个磁壳对一个磁体产生相同的效应，换句话说，我们要确定由电路引起的磁场的本性。其次我们证明，一个电路当放在任一磁场中时会和一个磁壳受到相同的力。这样我们就能确定作用在位于任一磁场中的电路上的力。最后，通过假设磁场是由第二个电路引起的，我们就能确定一个电路对另一电路的整体或任一部分的作用。

494．〕让我们把这种方法应用于一个事例：一个无限长的直电流作用在一个平行直导体的一部分上。让我们假设，一个电流 i 在第一个导体中竖直向下流动。在这种情况下，一个磁体的指北端将指向一个从电流的轴线朝磁体看去的人（头上脚下）的右手。

因此，磁感线是一些水平的圆，它们的圆心在电流的轴线上，而它们的正方向是由北向东向南再向西。

设把另一个向下的竖直电流放在第一个电流的正西方。在那儿，由第一个电流引起的磁感线是指向北方的。作用在第二个电路上的力的方向，通过把一个右手螺旋的扳手柄从最下方即电流的方向转向北方即磁感的方向来确定。这时螺旋将向东运动，就是说，作用在第二个电路上的力是指向第一个电流的，或者普遍地说，既然现象只依赖于各电流的相对位置，两个载有同向电流的电路是互相吸引的。

用同样的方式，我们可以证明两个载有异向电流的电路是互相推斥的。

495．〕正如我们在第 479 节中已经证明的那样，在离强度为 i 的长直电流的 r 距离处，磁感强度是

$$2\frac{i}{r}$$

由此可见，和第一个导体相平行并载有强度为 i′而方向相同的电流的第二个导体的一个部分，将被一个力

$$F = 2ii'\frac{a}{r}$$

吸向第一个导体，此处 a 是那一导体部分的长度，而 r 是离开第一个导体的距离。

既然 a 和 r 之比是一个数字量而和这些长度的绝对量度无关，两个电流的乘积当用电磁单位制来测量时就必须具有力的量纲，由此可见单位电流的量纲就是

$$[i] = [F^{\frac{1}{2}}] = [M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$$

496．〕确定作用在一个电路上的力的方向的另一种方法，就是考虑电流的磁作用和其他电流及磁体的磁效应的关系。

如果在载有电流的导线的一侧，由电流引起的磁效应是和由其他电流引起的磁效应同向或接近同向的，则在导线的另一侧这些力将是反向或接近反向的，而且，作用在导线上的力将从二力互相加强的一侧指向二力互相反对的一侧。

例如，如果一个向下的电流被放在一个指向北方的磁力场中，它的磁作用将在西侧指向北方而在东侧指向南方的。由此可知，二力在西侧互相加强而在东侧互相反对，从而电路就将受到一个从西向东的力的作用。

在本卷末尾的图版十七中，小圆圈代表载有向下的电流的导线的一个截面，导线放在一个指向图左的均匀磁力场中。导线下方的磁力大于导线上方的磁力。因此导线将被促使从图的下方运动向图的上方。

497．〕如果两个电流位于同一平面内但是并不平行，我们也可以应用这一原理。设一个导体是一根位于纸面上的无限长的直导线。在电流的右侧[①]，磁力是向下作用的，而在其左侧则是向上作用的。对于由同一平面内第二个电流的任意短段引起的磁力来说，情况也相同。如果第二个导体位于第一个导体的右侧，则磁力将在它的右侧互相加强而在它的左侧互相反

[①] ｛电流的右侧就是一个观察者的右侧，其人背靠纸面，而电流从他的头流向他的脚。｝

对。由此可见，载有第二个电流的电路将受到一个力的作用，把它从自己的右侧推向左侧。这个力的量值只依赖于第二个电流的位置而不依赖于它的方向。如果第二个电路是放在第一个电路的左侧的，则它将被从左推向右。

由此可见，如果第二个电流是和第一个电流同向的，则它的电路会被吸引；如果是反向的，则被推斥；如果它是垂直于第一个电流并向离此远去的方向流动的，则它会被迫使沿第一个电流的方向而运动；而如果它是向着第一个电流而流动的，则它会被迫使沿着和第一个电流的方向相反的方向而运动。

在考虑两个电流的相互作用时，用不着记住我们曾经力图用一个右手螺旋来阐明的电和磁之间的关系。即使我们忘掉了那些关系，只要我们始终坚持二种关系形式中的一种，我们就将得到正确的结果。

图 24 用一个右手螺旋来表示的电流和磁感线之间的关系

498．〕现在让我们把在此以前已经研究过的电路的磁现象综述一下。

我们可以设想电路是一个伏打电池和一根连接电池两极的导线，或是一个温差的电装置，或是一个充电的莱顿瓶和一根连接其正、负极的导线，或是沿着一个确定的路径产生电流的任何其他的位置。

电流要在它的附近产生磁现象。

如果画一条任意的闭合曲线并沿着整条曲线计算磁力的线积分，那么，如果闭合曲线并不和电路互相穿套，则线积分是零，但是，如果它和电路互相穿套，以致电流穿过这条闭合曲线，则线积分是 $4\pi i$，而且这个值是正的，如果沿闭合曲线的积分方向和一个沿电流流向而穿过曲线的人所看到的时针转动方向相重合的话。在一个沿着积分方向在曲线上运动着而穿过电路的人看来，电流的方向将和时针转动方向相同。我们可以用一种说法来表达这一情况，那就是说，这两条闭合曲线的方向之间的关系，可以通过沿着电路和积分路径各画一个右手螺旋来加以表达。如果当我们穿过其中一条闭合曲线时看到它的螺纹线的转动方向和另一个螺旋的前进方向相重合，则线积分为正，而在相反的情况下则线积分为负。

499．〕注线积分 $4\pi i$ 只依赖于电流的流量而不依赖于任何别的东西。它并不依赖于电流所通过的导体的本性，例如它不依赖于这一导体是一种金属，一种电解质，还是一种非理想导体。我们有理由相信，甚至当并不存在真正的导电而是只有一种电位移的变化时，例如像当充电或放电时发生在莱顿瓶的玻璃中的情况那样，电的运动的磁效应也是完全相同的。另外，线积分的值 $4\pi i$ 也不依赖于闭合曲线画在什么样的媒质中。不论闭合曲线是完全在空气中画出的，还是经过了一个磁体、一块软铁或任何别的顺磁性或抗磁性的物质，积分值都是相同的。

500．〕当一个电路被放在一个磁场中时，电流和场的其他组成之间的相互作用依赖于磁感在以电路为边界的任一曲面上的面积分。如果通过电路整体或其一部分的运动，这个面积分可以增大，则将有一个机械力倾向于使导体或其部分按照给定的方式而运动。

使面积分增大的那种导体运动，就是垂直于电流方向而扫过磁感线的导体运动。

图 25 用三个右手螺旋来表示的运动正方向和转动之间的关系

如果画一个平行四边形，使它的各边平行于并正比于任一点上的电流强度和同一点上的磁感,则作用在导体的单位长度上的力在数值上等于[正比于]这个平行四边形的面积；这个力垂直于平行四边形的面积，它的方向就是当从电流的方向向磁感的方向转动一个右手螺旋时螺旋中轴前进的方向。

由此我们就得到磁感线的一种新的电磁性的定义。它就是永远和作用在导体上的力相垂直的那种曲线。

它也可以定义成这样的曲线：如果有一个电流沿此线运行，则载有这一电流的导体将不会受到任何力。

501．〕必须认真记住，促使一个载流导体扫过磁力线而运动的机械力，不是作用在电流上而是作用在电流所通过的导体上的。如果导体是一个转动圆盘或一种流体，它就将服从这个力而运动，而这种运动可能和它所载有的电流的一种位置变化相伴随，也可能不和这种位置变化相伴随。[但是，如果电流可以在一个固定的导体或导线网路中自由地选取任意路径，则当使一个恒定的力作用在体系上时，电流通过导体的路径并不会发生永久性的变化，而在某种被称为感生电流的瞬变现象已经衰退以后，人们就将发现电流的分布是和没有任何磁力在起作用时的电流分布相同的。][1]

唯一对电流起作用的力就是电动力，这种力必须和本章所考虑的机械力区别开来。

①{霍耳先生曾经发现（Phil.Mag.ix.p.225,x.p.301,1880)，一个稳定的磁场确实会使多数导体中的电流分布发生微小的变化，从而正文中方括号内的说法必须被认为只是近似地对的。}

[1] {霍耳先生曾经发现（Phil.Mag.ix.p.225,x.p.301,1880），一个稳定的磁场确实会使多数导体中的电流分布发生微小的变化，从而正文中方括号内的说法必须被认为只是近似地对的。}

第二章

安培关于电流的相互作用的研究

502.〕我们在上一章中已经考虑了由一个电路所引起的磁场的本性，也考虑了作用在位于一个磁场中的载流导体的机械作用力。由此出发，我们接下去通过确定由一个电路引起的磁场对另一个电路的作用，来考虑了一个电路对另一个电路的作用。但是，几乎就在奥斯特的发现刚刚发表以后，一个电路对另一电路的作用是由安培用一种直接的方式来最初研究了的。因此我们将给出安培方法的一个轮廓，而在下一章中再回到本论著所用的方法中来。

指导了安培的那些想法，属于种那种承认远距作用的体系，而且我们将发现，建筑在这些想法上的一种引人注目的思辨和考察的过程，已经由高斯、韦伯、F.E.诺依曼、黎曼、比提、C.诺依曼、洛仑茨以及别的人进行过，而且在新事实的发现和电理论的形成方面都得到了引人注目的结果。参阅第 846—866 节。

我所企图彻底追随的想法，是那些关于作用通过一种媒质从一部分传到相邻部分的想法。这些想法曾由法拉第广泛应用，而他们的数学形式的发展，以及结果和已知事实的对比，曾经是我在若干已发表论文中的目标。从一种哲学观点出发来对两种在原理上如此完全相反的方法的结果进行的比较，必将在研究科学思维的条件方面导致宝贵的资料。

503.〕安培关于电流的相互作用的理论，是建筑在四件实验事实和一条假设上的。

安培的基本实验，全都是曾被称为比较力的零点法的实例。参阅第 214 节。在零点法中，不是通过向物体传送运动的动力学效应来测量力，也不采用使力和一个物体的重量或一根悬丝的弹性相平衡的静力学方法，而是使由相同的起源引起的两个力同时作用在已径处于平衡的一个物体上，而并不造成任何效应，这就表明这两个力本身是互相平衡的。这种方法对于比较电流在通过不同形状的电路时的效应来说是特别有价值的。通过把所有的导体接成一个连续的系列，我们就可以保证电流的强度在它的行程的每一点上都相同，而且，既然电流在整个行程的所有各点上几乎是同时开始的，我们就可以通过观察一个物体完全不受电流的开始或停止的影响，来证明由电流的作用而引起的对一个悬挂物体的力是互相平衡的。

504.〕安培秤就是一个可以绕竖直轴而转动的很轻的架子，上面装有一根形成两个面积相等的电路的导线；两个电路位于相同的或平行的平面内，而两个电路中的电流则是沿相反向流动的。这种装置的目的是要消除地磁对导线的影响。当一个电路可以自由运动时，它就倾向于把自己摆得可以包围尽可能多的磁感线。如果这些磁感线是由地磁引起的，对于一个位于竖直平面内的电路来说，这一位置就将是电路平面采取磁东磁西的方位，而电路流向则和太阳的表观运动方向相反。

通过把位于平面内载有方向相反的电流的两个等面积的电路刚性地连接在一起，就可以形成一种不受地磁影响的、从而被称为“无定向的”组合，见图 26。然而，这种装置却会受到起源于一些电流或磁体的力的作用；那些电流或磁体离它足够近，以致对两个电路的作用并不相同。

505．〕安培的第一个实验是关于两个相等的电流的效应的，两个电流很靠近而方向相反。一根包有绝缘材料的导线被从中间摺成双股，并被放在无定向秤的一个电路附近。当使一个电流通过导线和秤时，秤的平衡不受干扰，表明两个相距很近而方向相反的相等电流是互相中和的。如果不是用两根并在一起的导线，而是把一根绝了缘的导线放在一根金属管的中间，而电流通过导线并由金属管返回，则管外的作用不仅近似地而且是准确地等于零。这一原理在电学仪器的制造中是有很大重要性的，因为它提供了一种使电流通入并流出任一电流计或其他仪器的适当手段，可以保证电流在往来于仪器中时并不产生任何电磁效应。在实践中，一般把导线并在一起也就够了，这时必须注意使他们互相之间很好地绝缘，但是，在他们经过仪器的敏灵部件的地方，最好是把一个导体做成管状而把另一个导体做成管中的导线。请参阅第 683 节。

506.〕在安培的第二个实验中，其中一根导线被弯上了一些小的弯曲，但是在它的每一部分，仍然和和直导线靠得很近。经发现，通过曲导线并由直导线返回的一个电流，对无定向秤并无影响。这就证明，通过导线之任一弯曲部分的电流的效应，是和通过由部分两端之连接直线的相同电流的效应相等价的，如果弯曲导线的任何部分都不是离直导线很远的话。由此可见，一个电路的任一元段都和两个或更多个分量元段相等价，分量元段和合元段之间的关系与分位移和合位移或分速度和合速度之间的关系相同。

507．〕在第三个实验中，一个只能沿其长度的方向而运动的导体代替了无定向秤。电流在一些空间固定点上进入和离开这一导体，而且经发现，放在导体附近的任何闭合电路都不能移动导体。

图 27

在这一实验中，导体是一根挂在架子上的圆弧形导线，可以绕竖直轴而转动。圆弧是水平的，其圆心在竖直轴上。两个小槽中注有汞，凸形的汞表面离出于槽面以上。二槽被放在圆弧下面，调节得汞面触及导线。导线为铜质，经过很好的汞齐化。电流从一个槽中通入，流经二槽之间的圆弧部分并从另一槽中流出。这样，圆弧的一部分就通有电流，而圆弧在同时又可以颇为自由地沿着它自己的方向运动。现在可以使任意的电流或磁体向这个活动导体靠近，而并不引起使它沿自身长度的方向发生运动的最小的倾向。

508．〕在第四个实验中，和无定向秤一起，使用了两个电路；其中每一个，都和秤中的一个电路相似，但是其中之一即 C，却具有 n 倍的线度，而另一个即 A，则具有 1/n 的线度。这些电路被放在我们称之为 B 的秤电路的两侧，并且它们相对于秤电路来说是相似地摆放的，C 到 B 的距离是 B 到 A 的距离的 n 倍。电流的方向和强度，在 A 和 C 中都是相同的。它在 B 中的方向可以相同或相反。在这些情况下就发现，只要各电路具有上述的关系，不论三个电路的形状和距离是什么，B 都会在 A 和 C 的作用下处于平衡。

既然整体电路之间的作用可以看成是由各电路元段之间的作用引起

的，我们就可以应用确定这些作用的下述方法。

设图 28 中的 A_1、B_1、C_1 是三个电路中的对应元段，并设 A_2、B_2、C_2 是各电路其他部分的对应元段。于是，B_1 对 A_2 而言的状况就和 C_1 对 B_2 而言的状况相似，但是 C_1 和 B_2 的距离和尺寸却分别是 B_1 和 A_2 的距离和尺寸的 n 倍。如果电磁力的定律是距离的函数，则不论其形式和性质如何，B_1 和 A_2 之间的作用都可以写成

$$F = B_1.A_2 f（\overline{B_1A_2}）ab，$$

而 C_1 和 B_2 之间的作用可以写成

$$F' = C_1.B_2 f（\overline{C_1B_2}）be$$

式中 a、b、c 是 A、B、C 中的电流强度。但是

$nB_1 = C_1$，$nA_2 = B_2$，$n\overline{B_1A_2} = \overline{C_1B_2}$，而$a = c$.

由此即得

$$F' = n^2 B_1.A_2 f（n\overline{B_1A_2}）ab，$$

而由实验可知此力等于 F，因此我们就有

$$n^2 f（n\overline{A_2B_1}）= f（\overline{A^2B_1}）；$$

或者说，力是反比于距离的平方而变的[①]。

509.〕参照这些实验可以注意到，每一个电流都形成一个闭合的回路。安培所用的由电池产生的电流当然是形成闭合回路的。人们可能假设，在导体通过一个火花而放电的事例中，我们似乎有一种形成一条开放的有限的线段的电流，但是，按照本书的观点，即使这一事例也是一个闭合回路的事例。还不曾作过有关非闭合电流之相互作用的任何实验。因此，任何关于两个电路元的相互作用的说法都不能说是建筑在纯实验的基础上的。确实，我们可以把电路的一部分弄成活动的，以确定其他电流对它的作用，但是这些电流和活动部分中的电流一起，必然形成一些闭合回路，因此实验的最终结果就是一个或多个闭合电流对一个闭合电路的整体或部分的作用。

510.〕然而，在现象的分析中，我们却可经把一个闭合电路对它自己的或另一电路的一个元段的作用看成若干个分开的力的合力；那些分开的力依赖于第一个电路可以为了数学的目的而被设想分成的那些分开的部分。

这只是作用力的一种数学的分析，从而是完全合理的，不论这些力是否真正分别地起作用。

511.〕我们将从考虑空间中代表电路的两条曲线之间的以及这些曲线的元线段之间的纯几何关系开始。

图 29

设空间中有两条曲线。在其中每一条曲线上各取一固定点，从该点开始在曲线上沿确定的方向测量弧长。设 A、A′是这两个点。设 PQ 和 P′Q′是两条曲线上的线段元。

[①]｛关于这一实验导致平方反比定律的另一种证明在第 523 节中给出，而且读者也许会觉得那证明比以上的证明更加简单和更有说服力。｝

设

$$\left.\begin{aligned}&AP = s，\quad A'P' = s'，\\&PQ = ds，P'Q' = ds',\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

并设距离 PP'用 r 来代表。设角 P'PQ 用θ来代表，PP'Q'用θ'来代表，并设这些角的平面之间的夹角用η来代表。

两个线段元之间的相对位置由它们之间的距离 r 用三个角度θ、θ'及η来充分确定，因为，如果这些量已经给定，则它们的相对位置就像它们形成同一刚体的各部分一样的完全确定了。

512.〕如果我们使用直角坐标，并设 x、y、z 为 P 的座标，x'、y'、z'为 P'的座标，并用 l、m、n 和 l'、m'、n'分别代表 PQ 和 PQ'的方向余弦，则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{ds}=l,\frac{dy}{ds}=m,\frac{dz}{ds}=n,\\&\frac{dx'}{ds'}=l',\frac{dy'}{ds'}=m',\frac{dz'}{ds'}=n',\end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

以及

$$\left.\begin{aligned}&l(x'-x)+m(y'-y)+n(z'-z)=r\cos\theta,\\&l'(x'-x)+m'(y'-y)+n'(z'-z)=-r\cos\theta',\\&U'+mm'+nn'=\cos\in,\end{aligned}\right\}(3)$$

式中∈是各线段元本身的方向之间的夹角，从而

$\cos\in=-\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\eta$．(4)

再者

$r^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$，(5)

由此即得

$$r\frac{dr}{ds}=-(x'-x)\frac{dx}{ds}-(y'-y)\frac{dy}{ds}-(z'-z)\frac{dz}{ds},$$
$$=-r\cos\theta$$

同理可得

$$r\frac{dr}{ds'}=(x'-x)\frac{dx'}{ds'}+(y'-y)\frac{dy'}{ds'}+(z'-z)\frac{dz'}{ds'},$$
$$=-r\cos\theta';\qquad (6)$$

而且，对s'求的导数，即得

$$\left.\begin{aligned}&r\frac{d^2r}{dsds'}+\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds'}=-\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'}-\frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'}-\frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'},\\&=-(u'+mm'+nn'),\\&=-\cos\in\end{aligned}\right\}\qquad (7)$$

因此我们可以把三个角θ、θ'，和η以及辅助角∈用 r 对 s 和 s'的微分系数表示出来如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\cos\theta=-\frac{dr}{ds},\\
&\cos\theta'=-\frac{dr}{ds'},\\
&\cos\epsilon=-\frac{d^2 r}{dsds'}-\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'},\\
&\sin\theta\sin\theta'\cos\eta=-r\frac{d^2 r}{dsds'}
\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

513.〕其次我们将考虑，可以用什么方式来数学地设想线段元 PQ 和 P'Q'将会相互发生作用，而当这样作时，我们在起初并不假设它们的相互作用力一定是沿着它们的连线的。

我们已经看到，可以假设每一线段元被分解成一些别的线段元，如果这些分量当按照矢量加法的法则结合起来时将作为它们的合量而给出原有的线段元的话。

图 30

因此我们将认为 ds 被分解成沿 r 方向的 cosθds=α和在平面 P'PQ 内沿垂直于 r 的方向的sinθds=β.我们也将认为 ds'被分解成沿 r 之反方向的 cosθ'ds'=α'，平行于β之测量方向的 sinθ'cosηds'=β'和垂直于α'及β'的 sinθ'sinηds'=γ'。

一方面是分量α和β，另一方面是α'、β'γ'，让我们考虑二者之间的作用。

(1) α和α'位于同一直线上。因此他们之间的力必然沿这一直线。我们将假设这是一个吸引力，等于

Aαα'ü'，

式中 A 是 r 的一个函数，而 i、i'分别是 ds 和 ds'中的电流强度。这个表示式满足随着 i 和随着 i'而变号的条件。

(2) β和β'互相平行，并垂直于他们的连线。他们之间的作用力可以写成

Bββ'ü'

这个力显然是沿着β和β'的连线的，因为它必然位于β和β'所在在平面内，而且如果我们沿相反的方向测量β和β'，这个表示式的值将保持不变，这就表明，如果它代表一个力，这个力就没有沿β的分量，从而必然是沿着 r 的。让我们假设，当这个表示式为正时，它就代表一个吸引力。

(3) β和 r'互相垂直并垂直于他们的连线。有着这种关系的电路元之间的唯一可能的作用就是一个轴线平行于 r 的力偶。我们现在关心的是力，因此我们将对这个力偶不予考虑①。

① {人们可能会反驳说，我们没有理由假设在这一事例中就不存在力，因为，例如说有一个力作用在β在，该力垂直于β又垂直于 r'，而其方向则是当按照右手螺旋的转动使 r'绕β转过 90°时所将得到的方向，而这样的规则就指示一个力，它满足这样的条件：如果两个电路元件中有一个变号而不是两个都变号，则力将反向。假设这样的力并不存在的理由就是，力的方向将只取决于电流的方向，而不会取决于他们的相对位置。例如，如果图 30 中的 P'不是位于 P 的右方而是位于 P 的左方，则力将从电路元之间的一个推斥力变成

(4)如果α和β'互相作用，则他们之间的作用力必须写成

Cαβ'ü'

如果我们反转测量β'的方向，这个表示式就会变号。因此它必然不是代表一个沿β'方向的力就是代表一个位于α和β'的平面内的力偶。既然我们不研究力偶，我们将认为它是一个沿β'方向作用在α上的力。

当然也有一个相等的力沿相反的方向作用在β'上。

根据同样的理由，我们有一个力

Caγ'ü'

①{人们可能会反驳说，我们没有理由假设在这一事例中就不存在力，因为，例如说有一个力作用在β在，该力垂直于β又垂直于 r'，而其方向则是当按照右手螺旋的转动使 r'绕β转过 90°时所将得到的方向,而这样的规则就指示一个力，它满足这样的条件：如果两个电路元件中有一个变号而不是两个都变号，则力将反向。假设这样的力并不存在的理由就是，力的方向将只取决于电流的方向，而不会取决于他们的相对位置。例如，如果图 30 中的 P'不是位于 P 的右方而是位于 P 的左方，则力将从电路元之间的一个推斥力变成一个吸引力。}

沿着γ'方向而作用在α，和一个力

Cβα'ü'

沿着和β的测量方向相反的方向而作用在β上。

514．〕将结果综合起来，我们发现对 ds 的作用是由下列各力组成的：

$$\left.\begin{aligned} X &= (A\alpha\alpha'+B\beta\beta')ii' \text{ 沿r的方向，}\\ Y &= C(\alpha\beta'-\alpha'\beta)ii' \text{ 沿}\beta\text{的方向，}\\ Z &= C\alpha\gamma'ii' \text{ 沿}\gamma'\text{的方向。}\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

让我们假设，对 ds 的作用是三个力的合力，即沿 r 方向的 Rü'dsds'，沿 ds 方向的 Sü'dsds'和沿 ds'方向的 S'ü'dsds'；于是，用θ、θ'和η表示出来，就有

$$\left.\begin{aligned} &R = A + 2C\cos\theta\cos\theta' + B\sin\theta\sin\theta'\cos\eta,\\ &S = -C\cos\theta',\ S = C'\cos\theta.\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

用 r 的微分系数表示出来，就有

$$\left.\begin{aligned} &R = A + 2C\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - Br\frac{d^2r}{dsds'},\\ &S = C\frac{dr}{ds'},\quad S' = -C\frac{dr}{ds}\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

用 l、m、n 和 1'、m'、n'表示出来，就有

$$\left.\begin{aligned} &R = -(A+2C+B)\frac{1}{r^2}(l\xi + m\eta + n\zeta)(l'\xi + m\eta + n\zeta) + B(u' + mm' + nn'),\\ &S = C\frac{1}{r}(l'\xi + m'\eta + n'\zeta), S' = C\frac{1}{r}(l\xi + m\eta + n\zeta),\end{aligned}\right\}(12)$$

式中ξ、η、ζ分别代表 x'-x、y'-y 和 z'-z.

515．〕其次我们必须计算有限电流 s'对有限电流 s 作用的力，电流 s

一个吸引力。}

从 s=0 的 A 点延伸到使它具有值 s 的 P 点。电流 s'从 s'=0 的 A'点延伸到使它具有值 s'的 P'点。其中任一电流上各点的座标是 s 的函数或 s'的函数。

如果 F 是点的位置的任一函数，我们就将利用下标(s，0)来标明它的值从 A 到 p 的增量，例如

$F_{(s,0)}=F_p-F_A$.

当电路闭合时这样的[增量]函数必照为零。

设 A'P'对 AP 作用的总力的分量是 ii'X、ii'Y 和 ii'Z．于是 ds'对 ds 作用

的平行于X的分力就是$ii'\frac{d^2X}{dsds'}dsds'$.

由此即得

$$\frac{d^2X}{dsds'}=R\frac{\xi}{r}+Sl+S'l' \qquad (13)$$

按(12)式把 R、S 和 S'的值代入，记得

$$l'\xi+m'\eta+n'\zeta=r\frac{dr}{ds'}, \qquad (14)$$

并按 l、m、n 集合各项，我们就得到

$$\begin{aligned}\frac{d^2X}{dsds'}&=l\left\{-(A+2C+B)\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}\xi^2+C\frac{dr}{ds'}+(B+C)\frac{l'\xi}{r}\right\}\\&+m\left\{-(A+2C+B)\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'}\xi\eta+C\frac{l'\eta}{r}+B\frac{m'\xi}{r}\right\}\\&+n\left\{-(A+2C+B)\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}\xi\zeta+C\frac{l'\zeta}{r}+B\frac{n'\xi}{r}\right\} \qquad (15)\end{aligned}$$

既然 A、B 和 C 是 r 的函数，我们就可以写出

$$p=\int_r^\infty(a+2C+B)\frac{1}{r^2}dr,Q=\int_r^\infty Cdr,(16)$$

积分是从 r 到∞计算的，因为当 r=∞时 A、B、C 为零。

由此即得

$$(A+B)\frac{1}{r^2}=-\frac{dp}{dr},\text{和}C=-\frac{dQ}{dr} \qquad (17)$$

516．〕现在，我们由安培的第三个平衡事例可知，当 s'是一个闭合的电路时作用在 ds 上的力是垂直于 ds 的，或者换句话说，力在 ds 本身的方向上的分量是零。因此，让我们通过取 l=1、m=0、n=0 来把 x 轴的方向弄成平行于 ds．于是方程(15)就变成

$$\frac{d^2X}{dsds'}=\frac{dP}{ds'}\xi^2-\frac{dQ}{ds'}+(B+C)\frac{l'\xi}{r} \qquad (18)$$

为了求出作用在ds的单位长度上的力$\frac{dX}{ds}$，我们必须对s'求这一表示式的积分。对第一项进行分部积分，我们就得到

$$\frac{dX}{ds}=(P\xi^2-Q)_{(s',0)}-\int_0^{s'}(2Pr-B-C)\frac{l'\xi}{r}ds' \qquad (19)$$

当 s'是一个闭合电路时，这一表示式必为零。第一项将自动地等于

零。然而第二项一般在闭合电路的事例中将不为零，除非积分号下的量恒为零。由此可见，为了满足安培的条件，我们必须令

$$P=\frac{1}{2r}(B+C) \qquad (20)$$

517.〕现在我们们可消去 P 而求得■的普遍值了：

$$\frac{dX}{ds}=\left\{\frac{B+C\xi}{2}\frac{\xi}{r}(l\xi+m\eta+n\zeta)+Q\right\}$$

$$+m\int\frac{B-C}{2}\frac{m'\xi-l'\eta}{r}ds'-n\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{l'\zeta-n'\xi}{r}ds' \qquad (21)$$

当 s'是一个闭合电路时此式的第一项为零，而如果我们令

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{n'\eta-m'\zeta}{r}ds',\\ \beta'&=\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{l'\zeta-n'\xi}{r}ds',\\ \gamma'&=\int_0^{s'}\frac{B-C}{2}\frac{m'\xi-l'\eta}{r}ds',\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

式中的积分沿闭合回路 s'计算，我们就可以写出

同理可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{dX}{ds}&=m\gamma'-n\beta,\\ \frac{dY}{ds}&=n\alpha'-l\gamma',\\ \frac{dZ}{ds}&=l\beta-m\alpha'\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

各量α'、β、γ'有时被称为电路 s'对 P 点而言的决定分量(determinants)。他们的合量被安培称为电磁作用的准线。

由方程可见，分量为 $\frac{dX}{ds}ds$、$\frac{dY}{ds}ds$和 $\frac{dZ}{ds}ds$的力既垂直于ds又垂直于这一准线,而且在数值上是由以 ds 和准线为边的平行四边形的面积来代表的。

用四元数的语言来说，作用在 ds 上的力，是准线和 ds 的乘积的矢量部分。

既然我们已经知道准线和由电路 s'中的单位电流引起的磁力是同一个东西，今后我们就将把准线叫做由该电路引起的磁力。

518.〕现在我们将完成两个有限的、不论闭合与否的电路之间的作用分力的计算了。

设ρ是 r 的一个新函数，满足

$$\rho=\frac{1}{2}\int_r^{\infty}(B-C)dr, \qquad (24)$$

则由(17)和(20)可得

$$A+B=r\frac{d^2}{dr^2}(Q+\rho)-\frac{d}{dr}(Q+\rho), \qquad (25)$$

而方程(11)变成

$$\left.\begin{aligned} &R=-\frac{d\rho}{dr}\cos\in+r\frac{d^2}{dsds'}(Q+\rho),\\ &S=-\frac{dQ}{ds'},\quad S'=\frac{dQ}{ds}\end{aligned}\right\}\qquad(26)$$

利用这些分力值，方程(13)就变为

$$\frac{d^2X}{dsds'}=-\cos\in\frac{d\rho}{dr}\frac{\xi}{r}+\xi\frac{d^2}{dsds'}(Q+\rho)-l\frac{dQ}{ds'}+l'\frac{dQ}{ds},$$

$$=\cos\in\frac{d\rho}{dx}+\frac{d^2\{(Q+\rho)\xi\}}{dsds'}+l'\frac{d\rho}{ds}\qquad(27)$$

519．〕现在令

$$F=\int_0^{s'}l\rho ds,G=\int_0^{s'}m\rho ds,H=\int_0^{s'}n\rho ds,(28)$$

$$F'=\int_0^{s'}l'\rho ds,G=\int_0^{s'}m'\rho ds,H=\int_0^{s'}n'\rho ds,(29)$$

这些方程在空间的任一给定点上都有定值。当各电路是闭合的时，它们就对应于各电路的矢势的分量。

设 L 是 r 的一个新函数，满足

$$L=\int_0^{s'}r(Q+\rho)dr,\qquad(30)$$

并设 M 是二重积分

$$\int_0^{s'}\int_0^{s'}\rho\cos\in dsds',\qquad(31)$$

此式当各电路是闭合的时就变成他们的相互作用势，于是(27)就可以写成

$$\frac{d^2X}{dsds'}=\frac{d^2}{dsds'}\left\{\frac{dM}{dx}-\frac{dL}{dx}+F-F'\right\}\qquad(32)$$

520．〕在给定的积分限间对 s 和 s'求积分，我们就得到

$$X=\frac{dM}{dx}-\frac{d}{dx}(L_{pp'}-L_{Ap'}-L_{A'P'}+I_{AA'}),$$

$$+F_{P'}-F_{A'}-F'_{P}+F'_{A},\qquad(33)$$

此处 L 的下标指示距离 r，而 L 就是该距离的函数，F 和 F'的下标指示它们在那里取值的各点。

Y 和 Z 的表示式可以仿照此式写出。分别用 dx、dy、dz 乘这些分量，我们就得到

$Xdx+Ydy+Zdz=DM-D(L_{pp'}-L_{AP'}-L_{A'P}+L_{AA'})-(F'dx+G'dy+H'dz)(_{(P-A)}+(Fdx+Gdy+Hdz)_{(P'-A')}(34)$

式中 D 是全微分的符号。

既然 Fdx+Gdy+Hdz 通常并不是 x、y、z 的一个函数的全微分，对于其中有一个电流并不闭合的那些电流来说，通常 Xdx+Ydy+Zdz 就不是一个全微分。

521．〕然而，如果两个电流都是闭合的，含 L、F、G、H、F'、G'、H'的各项就都不存在，从而就有

Xdx+Ydy+Zdz=DM，(35)

式中 M 是两个载有单位电流的闭合电路的相互势。M 这个量表示的是当其

中一传导电路平行于自身而从无限远处移动到它的实际位置上时电磁力对它作的功。任何使 M 增大的位置变化都会受到电磁力的促进。

可以像在第 490、596 节中那样证明，当电路的运动并不平行于它自身时，作用在它上面的力仍然由一个电路对另一电路的势 M 的改变来确定。

522.〕在这种研究中，我们所曾用到的唯一实验事实就是由安培确证的事实，那就是，一个闭合电路对另一电路之任一部分的作用力垂直于那一部分。本研究的每一其他部分都只依赖于和曲线在空间中的性质有关的纯数学的考虑。因此，利用特别适用于表示这种几何关系的一种数学方法即哈密顿的四元数方法的概念和语言，这种推理就可以用一种更加凝练得多和更加恰当得多的形式表达出来。

这一点已由泰特教授在 QuarterlyJournalofMathematics，1866 上和在他的著作 Quaternions，§399 中针对安培的原如研究作过了，而读者也很容易把相同的方法转用到这里给出的更普遍一些的研究方面来。

523.〕到此为止，我们并没有针对 A、B、C 各量作出任何假设，只除了它们是二电路元之间的距离 r 的函数以外。我们其次必须确定这些函数的形式，而为此目的，我们将利用第 508 节中安培的第四个平衡事例。在那里曾经证明，如果一组两个电路的一切线度和距离都按同一比例发生了变化而其电流保持不变，则两个电路之间的作用将保持不变。

现在，对单位电流而言的电路之间的力是 $\frac{dM}{dx}$，而既然此量和体系的线度无关，它就必然是一个数字量。由此可见，M 本身，即二电路之相互势的系数，必然是一个具有长度量纲的量。由方程(31)可以推知，ρ必然是长度的倒数，从而由(24)可知 B—C 必然是长度平方的倒数。但是，既然 B 和 C 和都是 r 的函数，B—C 就必然是 r 平方的倒数或该倒数的倍数。

524.〕我们所采用的倍数依赖于我们的单位制。所谓电磁单位制的名称，是由于这种单位制和早先用于磁学测量的单位制相一致。如果我们采用电磁单位制，则 M 的值应该和分别以两个电路为边界的两个单位强度磁壳的势的值相重合。由第 423 节可知，这一事例中的 M 值是

$$M=\iint\frac{\cos\in}{r}dsds',\qquad(36)$$

积分是在两个电路上沿着正方向计算的。取此式作为 M 的数值并和(31)式相比较，我们就得到

$$\rho=\frac{1}{r},\text{而}B-C=\frac{2}{r^2}\qquad(37)$$

525.〕现在我们可以把电 ds'的作用引起的对 ds 的作用力的分力表示成和实验事实相一致的最普遍形式了。

作用在 ds 上的力由三个吸引力组成，即

$$\left.\begin{aligned}
&Rii'dsds'=\frac{1}{r^2}\left(\frac{drdr}{dsds'}-2r\frac{d^2r}{dsds'}\right)ii'dsds'+r\frac{d^2Q}{dsds'}ii'dsds'\\
&\text{沿}r\text{方向},\\
&Sii'dsds'=-\frac{dQ}{ds'}ii'dsds'\text{沿}ds\text{方向},\\
&\text{以及}Sii'dsds'=\frac{dQ}{ds}ii'dsds'\text{沿}ds'\text{方向},
\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

式中$Q=\int_r^\infty C dr$，而且，既然C是r的一个未知函数，我们就只知道Q是r的某一函数。

526.〕不必作出某种假设，Q 这个量就可以由实验测定；在实验中，主动电流形成一个闭合回路。如果我们像

安培一样假设电路元ds和ds'之间的作用是沿着他们的连线的，则S和S'必然不存在，而Q必然是常量或零。于是力就简化为一个吸引力，其值是

$$Rii'dsds'=\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-2r\frac{d^2r}{dsds'}\right)ii'dsds' \qquad (39)$$

安培在磁单位制被确定的很久以前就进行了这种研究，他使用了其数值为此值之一半的一个公式，那就是

$$jj'dsds'=\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-r\frac{d^2r}{dsds'}\right)jj'dsds' \qquad (40)$$

这里的电流强度是用所谓电动力学单位来量度的。如果 i、i'是用电磁单位来量度的电流强度，而 j、j'是用电动力学单位来量度的同两个电流强度，则显然有

$$jj'=2ii'\text{，或}j=\sqrt{2}i \qquad (41)$$

由此可见，电磁制中的电流单位大于电动力学制中的电流单位，二者之比为$\sqrt{2}$比1。

考虑电动力学单位的唯一意义就在于电流之间的作用力定律的发现者安培本来是采用了这种单位的。在建筑在这种单位上的计算中，$\sqrt{2}$将频繁地出现；这是不方便的，而且电磁单位还有一个很大的优点，那就是它可以和我们所有的磁学公式在数值上互相符合。既然学生很难记住是不是必须乘上或除上一个$\sqrt{2}$，我们从现在起将只使用电磁单位制，正如韦伯和大多数别的作者们所采用的那样。

既然Q的形式和值对迄今作过的至少主动电流永远是闭合电流的任一实验并无影响，那么，如果我们愿意，我们就可以采用任何看来可以简化公式的Q值。

例如，安培假设了两个电路元之间的力是沿着他们的连线的。这就给出Q=0，

$$Rii'dsds'=\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}-2r\frac{d^2r}{dsds'}\right)ii'dsds',S=0,S'=0 \qquad (42)$$

格喇斯曼[①]假设两个沿同一直线的电路元没有相互作用。这就给出

$$Q=-\frac{1}{2r},R=-\frac{3}{2r}\frac{d^2r}{dsds'},S=-\frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds'},S'=\frac{1}{2r^2}\frac{dr}{ds} \qquad (43)$$

如果我们愿意，我们就可以假设相隔一个给定距离的两个电路元之间的吸引力正比于它们之间的夹角的余弦。在这种情况下，就有

$$Q=-\frac{1}{r},R=\frac{1}{r^2}\cos\epsilon,S=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds'},S'=\frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds} \qquad (44)$$

最后，我们也可能假设吸引力和斜向力只依赖于各电路元和他们的连

[①] Pogg.，Ann.64，p.1（1845）

线之间的夹角，那么我们就会有

$$Q=-\frac{2}{r}, R=-3\frac{1}{r^{2}}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}, S=-\frac{2}{r^{2}}\frac{dr}{ds'}, S'=\frac{2}{r^{2}}\frac{dr}{ds} \qquad (45)$$

527.〕在这四种不同的假设中，安培的假设无疑是最好的，因为它是唯一可以把作用在两个电路元上的力弄得不仅相等而反向而且还沿着二电路元之连线的一种假设。

第三章

论电流的感应

528.〕奥斯特关于电流之磁作用的发现，通过一种直接的推理导致了由电流引起的磁化的发现，以及电流之间的机械力的发现。然而，直到 1831 年，已经在若干时间内努力尝试了用磁作用或电作用来产生电流的法拉第，才终于发现了磁电感应的条件。法拉第在他的研究中所用的方法，包括了对实验的一种首尾一贯的依靠，用来作为一种考验他的想法之真确性的手段，也包括了在实验的影响下对概念的一种不断培育。在他已发表的研究中，我们发现这些概念是用一种语言来表达的；那种语言特别适用于一门新生的科学，因为它在那些习惯于已确立的数学的思想形态的物理学家们看来是多少有点陌生的。

安培用以建立了电流之间的机械作用定律的那种实验研究，是科学中最辉煌的成就之一。

整个的东西，理论和实验，就仿佛是充分成长地和全身披挂地从“电学中的牛顿”的头脑中跑出来的一样。它在形式上是完美无缺的，在精确性上是无懈可击的，而且它被总结在一个公式中，由此公式可以推出所有的现象，从而它必将永远成为电动力学中的主导公式。

然而，尽管安培的方法已被塑造成一种归纳的形式，它却无助于我们追溯指引了它的形成的那些想法。我们几乎不能相信安培果真是借助于他所描述的那些实验来发现了作用定律的。事实上，我们不免猜想他本人所告诉我们的情况[①]，就是说，他通过某种他不曾展示给我们的过程而发现了定律，而他在已经建立起了一种十全十美的演证之后，就消毁了借以建立这种演证的那个脚手架的一切痕迹。

另一方面，法拉第却向我们既展示了他那些成功的实验也展示了他那些不成功的实验，既展示了他那些发展成熟的想法也展示了他那些粗略的想法，而读者不论在归纳能力方面比他差了多少，却对他感到同情多于钦佩，而且会被诱使着相信，假若自己有机会，自己也将是一个发现家。因此，每一个学生都应该阅读安培的研究，把它看成叙述科学发现的风格的一种辉煌范例，但是他也应该研习法拉第的著作，以期借助于即将发生在法拉第向他介绍的那些新发现的事实和他自己头脑中那些新生的意念之间的作用和反作用，来培育一种科学精神。

也许是为了对科学有益，法拉第虽然彻底意识到了空间、时间和力的基本形态，但他却不是一个专业的数学家。他并没有被引诱着进入纯数学方面的许多有趣的研究，而假若他那些发现曾经用数学的形式展示出来，它们是会启迪人们去进行那许多研究的。另外，他也并没觉得有责任把他那些结果挤到一种当时的数学口味可以接受的样式中去，或者是把他们用一种数学家们会钻研的形式示出来。因此他就可以随心所欲地作他的正题工作，把他的想法和他的事实协调起来，并且且一种自然的、非专门的语言把它们表达出来。

我决心撰写这本论著，主要就是希望把这些想法弄成一种数学方法的

[①] ThéoriedesphénomènesElectrodynamiquds，p.9.

基础。

529.〕我们习惯于认为宇宙是由一些部分构成的，而数学家们通常是首先考虑单独一个粒子，然后再考虑该粒子和另一粒子的关系，如此等等。一般认为这就是最自然的方法。然而，设想一个粒子却需要一种抽象过程，因为我们的一切感觉都是和一些有广延的物体联系着的，因此，关于在一个在给定时刻存在于我们意识中的全部事物的概念，也许就是和关于任一个体事物的概念同样原始的一个概念。由此可见，有可能存在一种数学方法，在那种方法中，我们从整体进而考虑部分，而不是从部分进而考虑整体。例如，欧几里德在他的第一本书中把一条线设想成由一个点运动而成的，把一个面设想成由一条线扫掠而成的，把一个体设想成由一个曲面生成。但是他也把面定义为体的界面，把线定义为面的边沿，而把点定义为线的端。

按照类似的方式，我们可以把一个物质体系的势设想成通过某种按场中各物体的质量求积分的一种过程而求得的一个函数，或者，我们也可以假设质量本身除了$\frac{1}{4\pi}\nabla^2\psi$的体积分以外并无别的数学意义，此处ψ是势。

在电学研究中，我们可以利用一些公式，他们所包括的量是某些物体距离、以及这些物体中的电量或电流，或者，我们也可以利用包括另一些量的公式，而其中每一个量都在空间中是到处连续的。

在第一种方法中用到的数学手续是沿曲线、在曲面上或在整个的有限空间内部求积分，而在第二种方法中用到的则是偏微分方程和各该方程在整个空间中的积分。

法拉第的方法似乎是和这两种处理方式中的第二种密切联系着的。他从来不认为物体是彼此之间除了距离以外没有任何的东西而存在着，而且是按照距离的某种函数而相互作用着的。他把整个空间设想成一个力场，力线一般是弯曲的，而由任一物体引起的那些力线都从该物体向一切方向延伸，其方向将受到其他物体之存在的影响。他甚至把属于一个物体的力线在某种意义上说成物体本身的一部分[①]，因此在它对远处物体的作用中，它并不能说是在它不存在的地方起作用的。然而在法拉第看来这并不是一个主要的概念。我想他却或许会说，空间的场中是充满了力线的，他们的分布依赖于场中各物体的分布，而作用在每一物体上的机械作用力和电作用力则取决于连接在物体上的力线。

磁电感应现象 530.〕

1．由原电流的变化所引起的感应

设有两个导体电路，“原电路”和“副电路”。原电路中接有电池，利用这个电池，原电流可以被产生、保持、停止或反向。副电路中接有电流计，以指示可能在该电路中形成的任何电流。这个电流计被放在离原电路的所有各部分都很远的地方，以致原电流对它的示数并无可觉察的直接影响。

[①] Exp.Res.，vol.ii.p.293；vol.iii.p.447

[②] 阅读 Faraday'sExperimentalResearches，Seridsiandii.

设原电路的一部分是一条直导线，而副电路的一部分是和这条直导线靠近并平行的另一条直导线，二电路的其他部分全都相距很远。

经发现，在向原电路中的直导线送入一个电流的那一瞬间，副电路中的电流计指示出第二条直导线中有一个反方向的电流。这叫做感生电流。如果使原电流保持恒定，感生电流很快就会消失，而原电流就显得对副电路并无任何影响。如果现在使原电流停止，一个副电流就会被观察到，它是和原电流同向的。原电流的每一变化都在副电路中引起电动势。当原电流增大时，电动势是沿着和电流相反的方向的。当原电流减小时，电动势是沿着和电流相同的方向的。当原电流不变时，不存在任何电动势。

这些感应效应会通过两个电路的靠扰而有所加强。他们也会由于把两个电路作成相距很近的两个圆形或螺线形的线圈而被加强，并且会通过在线圈中放入一棍铁棒或一束铁丝而被更大地加强。

2．由原电路的运动所引起的感应

我们已经看到，当原电路保持不变和静止时，副电流是顽强地不出现的。

现在让原电流保持不变，但是却使原直导线向副直导线靠扰。在靠扰的过程中，将出现一个和原电流反向的副电流。

如果让原电路远离副电路而运动，就会出现一个和原电流同向的副电流。

3．由副电路的运动所引起的感应

如果副电路被移动，则副电流当副导线靠近原导线时和原电流反向，而当副导线离开原导线而运动时和原电流同向。

在所有的事例中，副电流的方向都是使两个导体之间的机械作用力和运动方向相反，当导线互相靠拢时是一个推斥力，当导线互相远离时是一个吸引力。这个很重要的事实是由楞次[①]确定的。

4．由一个磁体和副电路的相对运动所引起的感应

如果我们把原电路换成一个磁壳，其边界和该电路相重合，其强度在数值上等于电路中的电流强度，而其朱表面对应于电路的正面，则由这个磁壳和副电路的相对运动所引起的现象和在原电路未被代换时观察到的现象相同。

531．〕所有这些现象可以总结在一条定律中。当沿正方向穿过副电路的磁感线的数目变化时，就有一个电动势在该电路中起作用，这个电动势是用穿过电路的磁感的减少率来量度的。

532．〕例如，设火车的两根铁轨是和地面绝缘的，但是在其一端却通过一电流计而互相连接，此外并假设电路通过离此端距离为 x 处的车轮和车轴而形成闭路。忽略车轴离铁轨水平面的离度，副电路中的感应就是由地球磁力的竖直分量引起的；在北半球，这一分量指向下方。由此可见，如果铁路的轨距是 b，则电路的水平面积是 bx，而通过它的磁感的面积分是 Zbx，此处 Z 是地球的磁力的竖直分量。既然 Z 是向下的，电路的较低

[①] Pogg.，Ann.xxxi.p.483（1834）.

一面就应该被当作正面，而电路本身的正方向则是北、东、南、西，也就是太阳的表观昼夜运动的方向。

现在让火车开始运动起来，于是 x 就会变化，而电路中就会存在一个电动势，其值为 $-Zb\frac{dx}{dt}$。

如果 x 是增大的，就是说，如果火车是远离轨端而运动的，则这个电动势是沿负方向的，或者说是沿北、西、南、东方向的。因此，通过车轴的电动势的方向是由右向左的。假如 x 是减小的，则电动势的绝对方向将反转，但是既然火车运动的方向也反过来了，车轴中的电动势就仍然是从右向左的，车上的观察者永远被假设为面向前方而运动。在磁针的南端向下倾斜的南半球，一个运动物体中的电动势是由左向右的。

由此我们就得到确定一根通过一个磁力场而运动的导线中的电动势的下述法则。设想把你的头和脚分别放在罗盘指针的指北端和指南端的位置上，把你的脸转向运动的前方，则由运动而引起的电动势将是从左向右的。

533．〕由于这些方向关系是很重要的，让我们再举一个例子。设有一条金属腰带绕在地球的赤道上，还有一条金属线通过格林威治子午线从赤道通到北极。

图 31

制造一个金属的大圆象限弧，其一端支在北极处的支轴上，另一端在赤道处的大腰带上滑动，追随太阳的昼夜运动。沿赤道运动的象限弧将有一个电动势从北极指向赤道。

不论我们假设地球静止而象限弧从东向西运动，还是假设象限弧静止而地球从西向东转动，电动势都将是相同的。如果我们假设地球是转动的，则固定在空间中的一端接触地极而另一端接触赤道的一部分电路中的电动势将是确定的，不论这一部分电路具有什么样的形状。这一部分电路中的电流是从地极流向赤道的。

相对于地球为静止的电路的其他部分也可以有任意的形状，而且可以在地球以内或以外。在这一部分电路中，电流是从赤道流向某一地极的。

534．〕磁电感应的电动势的强度是完全和它在那里起作用的导体物质的本性无关的，而且也是和载有施感电流的导体的本性无关的。

为了证明这一点，法拉第[1]用两根不同金属的导线做成了一个导体；二线之间用丝绸绝缘，它们被扭在一起，其一端焊接了起来。二线的另一端接了一个电流计。这样，两根导线相对于原电路来说就处在相同的状态，但是假若一根导线中的电动势比另一根导线中的电动势更强一些，它就将产生一个电流，这是将由电流计显示出来的。然而他却发现，这样一种组合导体可以受到由感应而引起的最强的电动势的作用，而电流计并不受任何影响。他也发现，不论组合导体是由两根导线构成还是由一根导线和一种电解质构成，电流计都是不受影响的[2]。

由此可见，作用在任一导体上的电动势，只依赖于该导体的形状和运动，以及场中电流的强度、形状和运动。

---

[1] Exp.Res.，195.

[2] Ib.，200.

535.〕电动势的另一种消极性质就是它本身并没有任何引起任何导体的机械运动的倾向，而只有在导体中引起一个电流的倾向。

如果它确实在物体中引起一个电流，则由于电流的存在，确实会有机械运动，但是如果我们阻止电流的形成，则物体并不会自己发生任何机械运动。然而，如果物体是带电的，则电动势将推动物体，正如我们在静电学中已经描述过的那样。

536.〕固定电路中电流的感应定律的实验研究，可以用一种方法来相当精确地进行；在这种方法中，电流计中的电动势，从而还有电流，被调成了零。

例如，如果我们想要证明线圈 A 对线圈 X 的感应等于线圈 B 对线圈 Y 的感应，我们就把第一对线圈 A 和 X 放在离第二对线圈 B 和 Y 足够远的地方。然后我们就把 A 和 B 接在一个电池上，于是我们就能够使相同的原电流沿正方向通过 A 然后再沿负方向通过 B。我们也把 X 和 Y 接在一个电流计上，于是如果有副电流的话，它就会沿相同的方向通过 X 和 Y。

于是如果 A 对 X 的感应等于 B 对 Y 的感应，则当电池接通和开断时电流计将不会指示任何感生电流。

这种方法的精确性随着原电流的强度和电流计对瞬时电流的灵敏性而增加，从而实验要比那些和电磁吸引力有关的实验容易做得多；在那些实验中，导体本身必须很精致地悬挂起来。

比萨的菲利西教授[①]描述了一系列很有教育意义的、设计得很好的这一类实验。

(1)一个电路对另一个电路的感应电动势,和导体的截面积以及制造导体所用的材料无关②。

因为我们可以把实验中的任一电路换成另一个不同截面和不

①AnnalesdeChimie，xxxiv.p.64(1852)，andXuovoCimento，ix.，p.345(1859).

同材料而形状却相同的电路，而并不改变实验结果。

(2)电路 A 对电路 X 的感应等于 X 对 A 的感应。

因为，如果我们把 A 接在电流计电路中而把 X 接在电池电路中，电动势的平衡不会受到扰乱。

(3)感应正比于施感电流。

因为，如果我们已经确证，A 对 X 的感应等于 B 对 Y 的感应，而且也等于 C 对 Z 的感应，我们就可以使电池的电流先通过 A，然后按任意比例在 B 和 C 中分流。然后，如果我们使 X 取反方向而 Y 和 z 取正方向并把它们串联起来接到电流计上,则 X 中的电动势将平衡 Y 和 Z 中的电动势之和。

(4)在一对一对地形成几何相似体系的电路中，感应正比于它们的线度。

因为，如果前面提到的三对电路全都相似，但是第一对电路的线度等于第二对和第三对电路的对应电路之和，那么，如果 A、B 和 C 是串联起来而和电池相接的，而且 X 是反向而 Y 和 Z 是正向串联在一起而和电流计相接的，则平衡将成立。

[①] AnnalesdeChimie，xxxiv.p.64（1852），andXuovoCimento，ix.，p.345（1859）.

(5)由一个 m 匝线圈中的电流在一个 n 匝线圈中引起的电动势,正比于乘积 mn。

537.〕对我们已在考虑的这种实验来说，电流计应该尽可能地灵敏，它的指针应该尽可能地轻，以便对一个很小的瞬变电流作出一种可觉察的显示。关于由运动引起的感应的实验，要求指针具有比较长一些的振动周期，以便反映导体的某些运动而指针离它的平衡位置并不很远。在以前的实验中，电流计电路中的电动势在全部时间内都是处于平衡的，从而没有任何电流通过电流计的线圈。在现在所描述的那些实验中，电动势起初沿

②{如果一种材料或多种材料是磁性的，则这种说法不一定严格正确，因为,在这种事例中,磁力线的分布是会受到的导线中的感生磁性的干扰的。}

一个方向起作用，而后又沿另一个方向起作用，于是就先后引起两个沿相反方向通过电流计的电流，从而我们就必须证明，由这些相继的电流引起的对电流计指针的冲量在某些事例中是相等而反向的。

电流计对瞬变电流之量度的应用的理论，将在第 748 节中进行更详细的考虑。在目前，注意到一点也就够了；那就是，只要电流计指针还离它的平衡位置较近，电流的致偏力就正比于电流本身，而如果电流的整个作用时间远小于指针的振动周期，磁体的末速度就将正比于电流中的总电量。因此，如果两个电流以很快的次序通过电流计，并沿相反的方向传递相等的电量，则指针不会留下任何末速度。

例如，为了证明由原电路的接通和开断而在副电路中引起的感生电流是在数量上相等和在方向上相反的，我们可以适当安排和电池相接的原电路，以便通过按下一个电钮就可以把电流送入原电路中，而手指一松，就可以随时把电路开断。如果电钮被按下了一段时间，则副电路中的电流计将在电钮接通的时刻指示一个和原电流反向的瞬变电流。如果接触被保持，则感生电流将简单地通过并消失。如果我们断开接触，则有另一个瞬变电流沿相反方向通过副电路，而电流计指针就沿相反方向受到一个冲击。但是，如果我们只在一瞬间接通电路然后又把它断开，则两个感生电流将以如此快的顺序通过电流计，以致指针在受到第一个电流的作用时还来不及从它的平衡位置运动开一个可觉察的距离就会被第二个电流所阻止，而且由于这些瞬变电流在数量上确切相等，指针就会完全被阻止住。

如果仔细地注视指针，就会看到它似乎从一个静止位置突然跳到另一个相隔很近的静止位置。

用这种办法我们就能证明，当电路开断时，感生电流中的电量是和电路接通时感生电流中的电量确切相等而流向相反的。

538.〕这种方法的另一种应用由菲利西在他的〈研究〉的第二个系列中给出如下。

永远可以找到副线圈 B 的许多不同的位置，使得原线圈的接通或开断在 B 中并不引起任何感生电流。在这样的情况下，两个线圈的位置被称为相互“共轭”。

设 B_1 和 B_2 是两个这样的位置。如果线圈 B 突然被从位置 B_1 挪动到 B_2，则 B 中瞬变电流的代数和将恰好等于零，于是当 B 的运动完成时电流计指针就保持静止。

这一点是对的，不论线圈 B 是用什么方式从 B_1 挪动到 B_2，也不论原线圈 A 中的电流在挪动过程中是保持不变还是正在变。

另外,设 B'是 B 的任一不和 A 共轭的位置,于是当 B 是在位置 B'上时，A 中电流的接通或开断就在 B 中引起一个感生电流。

设电流是当 B 位于共轭位置 B 时接通的，这时将没有感生电流。把 B 挪动到 B'，那就会有一个由运动引起的感生电流。但是如果把 B 很快地移动到 B'，然后把电流开断，则由电流开断所引起的感生电流将恰好抵消由运动所引起的感生电流的效应，于是电流计指针就将保持静止。由此可见，从一个共轭位置到任一其他位置的运动所引起的电流，和由在该其他位置上的电路开断所引起的电流相等而反向。

既然电路接通的效应和电路开断的效应相等而反向，那就可以推知，当 B 在任一位置 B'上时接通电路的效应，等于在电流通过 A 时把线圈从任一共轭位置 B_1 搬到 B'的效应。

如果二线圈相对位置的变化是通过搬动原电路而不是通过搬动副电路来达成的，则人们发现结果仍相同。

539.〕由这些实验可以推知，当 A 中的电流从 γ_1 变到 γ_2 时，在 A 从 A_1 到 A_2 而 B 从 B_1 到 B_2 的同时运动过程中，B 中的总感生电流只依赖于初状态 A_1、B_1、γ_1 和末状态 A_2、B_2、γ_2，而和体系可以通过的那些中间状态的性质完全无关。

由此可见，总的感生电流一定具有

$$F(A_2,B_2,\gamma_2)-F(A_1,B_1,\gamma_1)$$

的形式，此处 F 是 A、B、γ的一个函数。

关于这个函数的形式，我们由第 536 节知道当不存在运动从而 $A_1=A_2$ 而 $B_1=B_2$ 时，感生电流是和原电流成正比的。因此γ只作为一个乘法因子而出现，另一个因子则是电路 A 和 B 的形状及位置的函数。

我们也知道，这个函数只依赖于 A 和 B 的相对位置而不依赖于它们的绝对位置，因此这个函数必将可以表示成构成二电路的那些电路元之间的距离和夹角的一个函数。

设 M 是这个函数，则总的感生电流可以写成

$$C\{M_1\gamma_1-M_2\gamma_2\},$$

式中 C 是副电路的电导，M_1、γ_1 是 M 和γ的初值，而 M_2、γ_2 是它们的末值。

因此，这些实验就证明，总的感生电流依赖于某量 Mγ的改变量，而这个改变量可以起源于原电流γ的变化，也可以起源于原电路或副电路的任何改变 M 的变化。

540.〕感生电流不是依赖于某个量的绝对值而是依赖于它的改变量，关于这样一个量的概念,是在法拉第的《研究》的早期阶段就被想到了的[①]。他曾观察到，当在一个强度恒定的电磁场中保持静止时，副电路并不显示任何电效应，但是，如果同样这种场状态是突然产生的，副电路中就会有一个电流。另外，如果原电路被从场中取走，或者说场被撤除，那就会有个相反种类的电流。因此，当副电路位于电磁场中时，他就在该电路中认识到一种“物质的特殊的电状况”，他把这种状况叫做“电壮状态”

[①] Exp.Res.，seriesi.60.

(Electrotonic State)。后来他发现，借助于建筑在磁力线上的考虑，他可以不必使用这一概念[①]，但是即使在他最后的《研究》中[②]，他还说过："一次又一次地，关于一种电壮状态[③]的想法曾被现实强加在我的头脑中。"

显示在他已发现的《研究》中的法拉第头脑中的这一想法的整个历史，是相当值得研讨的。在精心思维的指引下，但是没有用到数学计算的帮助，他被一系列实验引导到了关于某种东西之存在的认识，而现在我们知道那种东西是一个数学量，而且甚至可以说是电磁理论中的基本量。但是，既然他是被一种纯实验的路线引导到这一概念的，他就认为它有一种物理的存在，尽管一旦能够用任何更加习见的思维形式来解释现像，他就是很乐于放弃这种学说的。

其他的研究者在很久以后也被一种纯数学的路线引导到了同一个概念，但是就我所知，他们谁也不曾在两个电路的势这一精化了的数学概念中认识到法拉第的关于电壮状态的大胆假说。因此，沿着这些最初把这一课题的规律归结为数学形式的杰出研究者们所指示的路线而接近了这一课题的那些人们，有时就觉得很难领会法拉第在他头两个系列的《研究》以如此奇妙的完备性给出的那些规律的叙述的科学精确性。

法拉第的电壮状态概念的科学价值，就在于它指导人们的思想去把握某一个量，而实际的现象就是依赖于那个量的改变量的。如果不对它进行比法拉第的形式更加进步得多的发展，这一概念是很难用来解释现象的。我们将在第 584 节中再回到这一课题上来。

541.〕在法拉第的手中更加有力得多的,就是那种利用磁力线的方法；当思索他的磁体或电流时，那些磁力线一直是存在于他的心目中的，而且他很有理由地认为[①]，借助于铁屑来显示磁力线，就是对实验家的一种最有价值的帮助。

法拉第认为，这些磁力线不仅用它们的方向表示着磁力的方向，而且用它们的数目和密度表示着磁力的强度，而且他在自己较晚的《研究》中也指明了如何设想单位力线[②],我在本书的不同部分中曾经说明了法拉第在这些力线方面认识到的那些性质和电力及磁力的数学状况之间的关系，也说明了法拉第关于单位力线和力线数目的意念可以怎样在一定的限度内加以数学的精确化。参阅第 82、404、490 节。

在他的第一系列的《研究》[③]中，法拉第清楚地指明了一个部分活动的导体电路中的电流方向如何依赖于活动部分切割磁力线的方式。

在第二个系列中[④],他指明了由一个电流强度或磁体强度的变化而产生的现象，如何通过假设当功率增大或减小时磁力线族就从导线或磁体扩大出来或向它收缩过去来加以解释。

---

① Exp.Res.，seriesii.242.

② Ib.，3269.

③ Ib．，60，1114，1661，1729，1733.

① Bxp.Res.，3234.

② Ib.，3122.

③ Ib.，114.

④ Ib.，238.

我不能肯定当时他以多大程度的明晰性认识了他后来非常明白地建立了的学说[5]，那就是，当切割力线时，一个运动导体就将收集由力线的面积或截面引起的作用。然而，当把第二系列的研究[6]考虑在内时，这却显得并不是关于情况的新观点。

法拉第关于力线之连续性的观念，排除了力线在一个空间中突然无中生有的可能性。因此，如果想令穿过一个导体电路的力线数目发生变化，那就只可能或是通过电路运动而扫过力线，或是通过力线运动而扫过电路来达成。在任一事例中都会有一个电流在电路中产生出来。

在任一时刻穿过电路的磁力线数目，在数学上是和法拉第关于该电路之电壮状态的早期观念相等价的，从而是用 Mγ 这个量来代表的。

只有当在第 69、274 节中把电动势的定义弄得更加确切了以后，我们才算能够把磁电感应的真实定律述叙如下：

在任一时刻沿一个电路起作用的总电动势，是用穿过该电路的磁力线数目的减少率来量度的。

当对时间求了积分时，这一叙述就变成：

沿任一电路起作用的总电动势的时间积分，再加上穿过该电路的磁力线数目，是一个常量。

我们可以不谈论磁力线数目，而谈论穿过电路的磁感，或谈论在以电路为边界的任一曲面上求的磁感的面积分。

我们将再回到法拉第的这一方法上来。在此以前，我们必须列举建筑在其他一些考虑上的感应理论。

楞次定律

542.〕在 1834 年，楞次[1]提出了由安培公式所定义的电流的机械作用现象和由导体的相对运动所引起的电流感应现象之间的下述惊人关系。叙述这样一种关系的一次更早的尝试，曾由瑞奇在同年一月份的《哲学杂志》上作出。但是在这两个事例中感生电流的方向都是叙述错了的。楞次的定律如下：

如果有一个恒定电流在原电路 A 中流动，并通过 A 的运动或副电路 B 的运动而在 B 中感生了一个电流，则这一感生电流的方向将是这样的：通过它对 A 的电磁作用，它将倾向于阻止二电路的相对运动。

以这一定律为基础，F.E.诺依曼建立了他的有关感应的数学理论[1]；在这种理论中，他确立了由原导体或副导体的运动所引起的感生电流的数学定律。他证明了，我们曾称之为一个电路对另一电路的势的 M 这个量，是和我已经联系到安培公式而研究过的一个电路对另一个电路的电磁势相等同的。因此，我们可以认为 F.E.诺依曼已经针对电流的感应来补全了安培曾经应用于电流的机械作用的那种数学处理。

543.〕不久以后，一个具有更大的科学重要性的步骤就由亥姆霍兹在

[5] Ib.，3082，3087，3113.

[6] Ip.，217，&C.

[1] Pogg.，Ann.xxxi.p.483（1834）.

[1] BerlinAkad.，1845andl847.

他的论文《论力的守恒》中给出了[2]，也由工作开始得较晚但独立于亥姆霍兹的 W.汤姆孙爵士[3]作出了。他们证明了，法拉第所发现的电流的感应，可以通过能量守恒原理的应用而从奥斯特和安培所发现的电磁作用中数学地推导出来。

亥姆霍兹所取的是电阻为 R 的导体电路的事例，在电路中，有一个起源于电池装置或温差电装置的电动势在起作用。电路中任意时刻的电流是 I.他假设在电路附近有一个磁体在运动，而其对导体而言的势是 V，于是，在任一很小的时间阶段dt中，由电磁作用传给磁体的能量就是$I\frac{dV}{dt}dt$。

由第 242 节中的焦耳定律，使电路发热所作的功是 I_2Rdt，而电动势 A 为在时间 dt 中保持电流 I 而消耗的功是 AIdt。因此，既然作的功必然等于消耗的功，就有

$$AIdt = I^2Rdt + I\frac{dV}{dt}dt,$$

由此我们就得出电流强度

$$I = \frac{A - \frac{dV}{dt}}{R}$$

现在，A 的值可以是由我们任意选取的。因此，令 A=0，就得到

$$I = -\frac{I}{R}\frac{dV}{dt},$$

或者说，将存在一个由磁体的运动而引起的电流，它等于由一个电动势$-\frac{dV}{dt}$所引起的电流。

在磁体从势为 V_1 的地方到势为 V_2 的地方的运动过程中,总的感生电流就是

$$\int Idt = -\frac{1}{R}\int\frac{dV}{dt}dt = \frac{1}{R}(V_1 - V_2),$$

从而总电流就不依赖于磁体的速度和路径而只依赖于它的初位置和末位置。

亥姆霍兹在他的原始研究中采用了一种单位制，那是建筑在导体中由电流所生的热的量度上的。把电流的单位看成任意的，电阻的单位就是那样一个导体的电阻，即这一单位电流在单位时间内应在该导体中产生单位的势量。这一单位制中的电动势单位，就是为在单位电阻的导体中产生单位电流所要求的电动势。这种单位制的采用，要求在各方程中引入一个量 a，这就是单位热量的机械功当量。由于我们总是采用静电单位制或电磁单位制，这一因子并不出现在此处所给出的方程中。

544.〕亥姆霍兹也导出了当使一个导体电路和一个载有恒定电流的电路发生相对运动时的感生电流[1]。

---

[2] 1847 年 7 月 23 日在柏林物理学会上宣读。译文见 Taylor's‘ScientificMemoirs’，partii.p.114．

[3] Trans.Brit.Ass.，1848，andPhil.Mag.，Dec.1851，并参阅其论文‘TransientElectricCurrents’，Phil.Mag.，June1853.

[1] {在第 543、544 节中给出的证明是不能令人满意的，因为那些证明忽略了可能发生在电流中的任何变化，

①{在第 543、544 节中给出的证明是不能令人满意的，因为那些证明忽略了可能发生在电流中的任何变化，也忽略了由于电路的运动而可能发生在动能方面的任何变化。事实上，仅仅根据能量守恒原理来推导两个电路的感应方程是不可能的，正如不利用除了能量守恒原理以外的任何原理就想推出一个具有两个自由度的体系的运动方程是不可能的一样。

如果对二电路事例应用能量守恒原理，我们就得到个方程，这可以推导如下：设 L、M、N 分别是第一个电路的自感系数、两二个电路的互感系数和第二个电路的自感系数（第 578 节）。设 T_e 是由各电路中的电流所引起的动能，而其余的符号都和第 544 节中的符号相同。于是就有（第 578 节）

$$T_e = \frac{1}{2}LI_1^{\,2} + M_I I_2 + \frac{1}{2}NI_2^{\,2},$$

$$\sigma T_e = \frac{dT_e}{dI_1}\sigma I_1 + \frac{dT_e}{dI_2}\sigma I_2 + \sum \frac{dT_e}{dx}\sigma x, \qquad (1)$$

式中 x 是一个用来协助确定电路位置的任意类型的座标。

既然 T_e 是 I_1、I_2 的二次齐次式，就有

$$2T_e = I_1\frac{dT_e}{dI_1} + I_2\frac{dT_e}{dI_2},$$

由此即得

$$2\sigma T_e = \sigma I_1\frac{dT_e}{dI_1} + I_1\sigma\frac{dT_e}{dI_1} + \sigma I_2 \cdot \frac{dT_e}{dI_2} + I_2\sigma\frac{dT_e}{dl_2} \qquad (2)$$

将(2)式代入(1)式中，即得

$$\sigma T_e = I_1\sigma\frac{dT_e}{dI_1} + I_2\sigma\frac{dT_e}{dI_2} - \sum\frac{dT_e}{dx}\sigma x$$

然而 $\frac{dT_e}{dx}$ 就是作用在体系上的x类型的力，因此，既然我们假设没有任何外力作用在体系上，$\sum\frac{dT_e}{dx}\sigma x$ 就将是由体系的运动所引起的动能 T_m 的增量，于是(3)式就给出

也忽略了由于电路的运动而可能发生在动能方面的任何变化。事实上，仅仅根据能量守恒原理来推导两个电路的感应方程是不可能的，正如不利用除了能量守恒原理以外的任何原理就想推出一个具有两个自由度的体系的运动方程是不可能的一样。如果对二电路事例应用能量守恒原理，我们就得到个方程，这可以推导如下：设 L、M、N 分别是第一个电路的自感系数、两二个电路的互感系数和第二个电路的自感系数（第 578 节）。设 Te 是由各电路中的电流所引起的动能，而其余的符号都和第 544 节中的符号相同。于是就有（第 578 节） 式中 x 是一个用来协助确定电路位置的任意类型的座标。既然 Te 是 I1、I2 的二次齐次式，就有 由此即得 将(2)式代入(1)式中，即得 的增量，于是(3)式就给出 电池在时间δt 内作的功是 在同一时间内产生的热量由焦耳定律给出， 由于能量守恒原理可知，电池所作的功必须等于电路中产生的热量再加上体系能量的增量，于是就有 A1I1σｔ＋A2I2σt=(R1I12+R2I22)σt＋σ(Te+Tm), 将(4)中的σ(Te+Tm)值代入此式，即得 或者写成 感应方程就是使括号中的两个量等于零，但是能量守恒原理却只证明(5)式的左端为零，而不是各括号分别为零．感生电流的方程的一种严格证明将在第 581 节中给出。}

$$\sigma(T_e + T_m) = I_1\sigma\frac{dT_e}{dI_1} + I_2\sigma\frac{dT_e}{dI_2} \qquad (4)$$

电池在时间δt 内作的功是

$A_1 I_1 \sigma t + A_2 I_2 \sigma t$

在同一时间内产生的热量由焦耳定律给出，

$(R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2)\sigma t$

设 R_1、R_2 是电阻，I_1、I_2 是电流，A_1、A_2 是外电动势，而 V 是由每一电路中的单位电流所引起的一个电路在另一个电路上的势，于是我们就像以前那样得到

$$A_1 I_1 + A_2 I_2 = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_1 I_2 \frac{dV}{dt}$$

如果我们假设 I_1 是原电流，而 I_2 比 I_1 小得多以致它并不通过感应而在

I_1 中引起任何可觉察的变化，从而我们可以令 $I_1 = \frac{A_1}{R_1}$，于是就有

$$I_2 = \frac{A_2 - I_1\frac{dV}{dt}}{R_2},$$

这是恰好可以像在磁体的事例中一样加以阐释的一种结果。

如果我们假设 I_2 是原电流而 I_1 比 I_2 小得多，我们就得到 I_1 的表示式

$$I_1 = \frac{A_1 - I_2\frac{dV}{dt}}{R_1}$$

这就证明，对于相同的电流来说，第一电路在第二电路中感生

由能量守恒原理可知，电池所作的功必须等于电路中产生的热量再加上体系能量的增量，于是就有

将(4)中的δ(T■+T■)值代入此式，即得

■

或者写成

■

感应方程就是使括号中的两个量等于零，但是能量守恒原理却只证明(5)式的左端为零，而不是各括号分别为零。感生电流的方程的一种严格证明将在第 581 节中给出。}

的电动势等于第二电路在第一电路中感生的电动势，不论各电路的形状如何。

亥姆霍兹在这一论著中没有讨论由原电流的加强或减弱所引起的感应，或者说没有讨论电流对自己的感应。汤姆孙[①]把同一原理应用到了电流之机械值的确定上，而且他已指出，当功是由两个恒定电流的相互作用所作出时，他们的机械作用就会增加一个相同的数量，从而电池就除了反抗

① MechanicalTheoryofElectrolysis，Phil.Mag.，Dec.1851.

电路的电阻而维持电流所需要的功以外，还必须供应两倍的功[②]。

545.〕电学量的一个绝对测量单位制由 W.韦伯的引入，是科学进步的量重要步骤之一。在和高斯一起把磁学量的测量提高到头等的精确方法之列以后，韦伯就在他的《电动力学测量》是不但着手奠定了确定所用单位的牢固原理，而且开始利用这些单位来在一种未之前闻的精确度下测定一些特定的电学量。不论是电磁单位制还是静电单位制，他们的发展和实际应用都得力于这些研究。

韦伯也搞出了一种电作用的曾遍理论，他由这种理论推出了静电力和电磁力，也推出了电流的感应。我们将在单独一章中考虑这一理论，并考虑它的某些较晚近的发展。参阅第 846 节。

[②] Nichol’sCyclopaediaofPhysicalScience，ed.1860，Article‘Magnetism，DynamicalRela-tionsof，’and.Reprint，§571.

第四章

论一个电流对它自己的感应

546.〕法拉第曾经把他的第九系列的《研究》用于由一根导线中的电流所显示出来的一类现象，该导线形成一个电磁铁的线圈。

金肯先生曾经注意到，尽管不可能通过只包括一对金属板的伏打体系的直接作用来产生一次可觉察的电冲击。但是，如果使电流通过一个电磁铁的线圈，然后使握在两只手中的两导根线的端点脱离接触，却是会感觉到一次强烈的电冲击的。

法拉第证明了，这种现象以及他所描述的另一些现象，都是由他已经观察过的电流对邻近导体的同一种感应作用所引起的。然而在这一事例中，感应作用却是作用在载有电流的那同一个导体上的，而且它更加强烈得多，因为导线本身要比其他导线所能作到的更加靠近不同的电流元。

547.〕然而他却谈到[①]，“最先出现的想法就是，电是带着某种类似动量或惯性的性质而在导线中流动的”。确实，当我们只考虑一根特定的导线时，现象是和充满连续流动的水的管子的现象确切类似的。如果我们在水正流动时突然把管子的一端封住，水的动量就会产生一个突然的压强；这个压强比由水头造成的压强大得多，甚至足以把水管弄裂。如果当主通道关闭时水可以通过一个小口逸出，它就会以一个比由水头造成的速度大得多的速度射出，而如果它可以通过一个阀门进入一个室中，它就会进入该室，即使室内的压强大于由水头造成的压强。

水力扬汲机正是根据这种原理制成的；利用这种机器，可以借助于从低得多的水平面流下来的大量的水来把少量的水提升到一个很大的高度。

548.〕管中液体之惯性的这些效应，只依赖于经由管子流过的液量、管子的长度和管子不同部分的截面。它们不依赖于管子外面的任何东西，也不依赖于管子被弯成什么形状，如果管长不变的话。

对于一根载有电流的导线来说，情况却不是这样的。因为，如果一根长导线被从中间弯成双股，则效应是很小的；如果两股是互相离开的，则效应较大；如果导线被绕成螺绕线圈，则效应更大；如果再在线圈中放入一个铁芯，则效应最大。

再者，如果有第二根导线和第一根导线绕在一起，但是二导线互相绝缘，那么，如果第二根导线并不形成一个闭合电路，则现象仍和以前一样；但是如果第二根导线形成一个闭合电路，则有一个感生电流出现在第二根导线中，而第一根导线中的自感效应就会受到阻滞。

549.〕这些结果清楚地表明，如果现象是由动量引起的，这种动量就肯定不是导线中的电荷的动量，因为载有相同电流的相同导体将按照其形状的不同而显示不同的效应，而且即使它的形状保持不变，一块铁或一个闭合金属电路之类的其他物体的存在也对结果有影响。

550.〕然而，人们的思想一旦认识了自感现象和运动物质体的现象之间的类似性，就很难放弃这一类似性的协助或承认它完全是表面化的或引人误解的。有关物质的基本动力学概念，例如能够通过它的运动而成为动

[①] Exp.Res.，1077.

量和能量的承受者的那种概念，是如此紧密地和我们思想形式交织在一起，以致每当在大自然的任一部分中看到一点它的踪影时，我们都会觉得面前出现一条早晚会导致问题之完全了解的道路。

551．〕在电流的事例中，我们发现了，当电动势开始起作用时，它并不是立即产生足额的电流，而是电流将逐渐增大。在反对的电阻不能平衡它的那段时间内，电动势是在作着什么事呢？它是正在增大电流。

现在，沿着物体的运动方向而作用在物体上的一个普通的力，将增大物体的动量并向它传送动能，或者说传送由于它的运动而具有的作功本领。

与此类似，电动势的未受阻部分曾被用于电流的增强。那么，当这样产生了以后，电流有没有动量或动能呢？我们已经证明它有某种很像动量的东西，它反对被突然停止，它可以在一段短时间内作用一个大的电动势。但是，里边已经建起了电流的一个导体电路具有由于这一电流而作功的本领，而且这种本领并不能说是“很像能量”的某种东西，因为它确确实实就是能量。

例如，如果让电流自行流动，它就将继续流动，直到被电路的电阻所阻止时为止。然而，在它被阻止住以前，它将已经产生了一定数量的热，而以动力学单位计，这一热量就等于起初存在于电流中的能量。

再者，当电流自行流动时，可以通过运动磁体而使它作功，而且由楞次定律可知，这种运动的感应效应将使电流停止，比只有电路的电阻起作用时停止得更快。用这种办法，电流能量的任一部分都可以被转换成机械功而不是转换成热。

552．〕因此，看来一个含有电流的体系就是某种能量的所在之处；而且，既然除了作为一种运动现象以外我们对电流不能形成任何概念[①]，它的能量就必然是动能，也就是运动物体由于它的运动而具有的能量。

我们已经证明，导体中的电荷不能看成我们将在它上面看到能量的那种运动物体，因为一个运动物体的能量并不依赖于物体以外的任何东西，而电流附近其他物体的存在却会改变电流的能量。

因此我们就被引导着探索在导线外面的空间中是否可能有某种运动正在进行着；那种空间并未被电流所占据，而电流的电磁效应却表现在那种空间中。

在目前，我不打算细说在一个地方而不在另一地方寻找这种运动，或是把这些运动看成一种运动而不看成另一种运动的那些理由。

现在我准备作的是检查一条假设的推论，该假设就是，电流的现象是一个运动体系的现象，其运动是由力从体系的一个部分传送到另一部分的，力的性质和规律我们甚至还不曾尝试去规定，因为我们可以通过拉格朗日针对任意连接体系给出的方法来把这些力从运动方程中消去。

在本书的以下五章中，我打算根据一个这一类型的动力学假说来导出电学理论的主要结构，而并不遵循曾经把韦伯和别的探索者们引导到许多引人注目的发现和实验、引导到其中某些是既大胆又美好的观念的那一路径。我曾经选择了这种方法，因为我愿意指明，存在另外一些看待现象的方式，他们在我看来是更加令人满意的，而同时也比那些根据远距作用的

[①] Faraday，Exp.Res.283.

假说来进行的方式更加和本书的前几编所遵循的方法相协调。

第五章

关于一个连接体系的运动方程

553．]在他的《分析力学》的第四节中，拉格朗日曾经给出了一种把一个连接体系之各部分的普通动力学运动方程简化为其数目等于体系之自由度的一些方程的方法。

一个连接体系的运动方程曾由哈密顿以一种不同的形式给出，而且曾经导致了纯运动学之较高深部分的巨大推广[①]。正如我们将发现这是必要的那样，在我们把电现象纳入动力学的范围、把我们的动力学概念纳入一种适合于对物理问题之直接应用的状态的努力中，我们将利用本章来从物理的观点对这些动力学概念作一介绍。

554．]拉格朗日的目的是把动力学置于微积分的管辖之下。他是从利用纯代数量的对应关系式来表示初等动力学关系式开始的，而从这样得出的那些方程，他通过一种纯代数的手续而推得了他那些最后的方程。某些量（表示着由体系的物理联系所引起的体系各部分之间的关系的量）出现在体系各组成部分的运动方程中，而从一种数学的观点看来，拉格朗日的研究就是一种从最后的方程中消去这些量的方法。

在追随这种消去法的步骤时是需要进行计算的思索的，从而我们在思想上必须避免动力学概念的侵入。另一方面，我们的目的却是发展我们的动力学概念。因此我们将利用数学家们的劳动，而把他们的结果从微积分的语言翻译成动力学的语言，以便我们的论述不是唤起关于某种代数运算的思维形象而是唤起有关运动物体的某种性质的思维形象。

动力学的语言已经被那些借助于通俗说法来阐述能量守恒学说的人们所大大扩充了，而且我们即将看到，以下的许多叙述已经由汤姆孙和泰特在《自然哲学》中的研究所暗示过，特别是那种从冲击力理论开始的方法。

我曾经应用了这种方法，以避免除了整个体系的运动所依赖的座标或变量以外还要显露地考虑体系任一部分的运动。无疑很重要的是，学生应该追索体系每一部分的运动和各变量的变化之间的联系，但是在求得和这些联系之特定形式无关的最后方程的过程中，这种追索却是绝非必要的。

变量

555．]一个体系的自由度数，就是为了完备地确定它的位置而必须给出的数据的个数。这些数据可以有不同的形式，但是他们的个数却依赖于体系本身的本性，从而是不能改变的。

为了明确，我们可以设想体系是借助于适当的机件而和一些活动部件连接起来的，其中每一个部件只能沿着一条直线而运动，而不能进行任何别的运动。把其中每一部件和体系连接起来的那种假想的机件，必须被想像为没有摩擦的、没有惯性的和不会通过所加力的作用而发生胁变的。这种机件的用处仅仅在于当把位置、速度和动量指定给在拉格朗日研究中显得是一些纯代数量的各量时比较容易想像。

[①] 参阅 ProfessorCayley’s‘ReportonTheoreticalDynamics，’BritishAssociation,1857；并参阅 ThomsonandTait’sNaturalPhilosophy.

设 q 代表其中一个部件的位置，通过它离开自己的运动直线上一个固定点的距离来定义。我们将用下标 1、2 等等来区分对应于不同部件的 q 值。当我们处理只属于一个部件的一组量时，我们可以略去下标。

当所有变量(q)的值已经给定时，每一个部件的位置就都是已知的，而通过那种假想的机件，整个体系的位形也就确定了。

速度

556．]在体系的运动过程中，位形以某种确定的方式发生变化，而既然每一时刻的位形都是由各变量(q)的值来充分定义的，那么，如果我们知道了各变量(q)的值以及它们的速度

（$\frac{dq}{dt}$，或者采用牛顿的记号$\dot{q}$），

则体系每一部分的速度，以及体系的位形，就都将是完全确定的了。

力

557．]通过各变量之运动的适当控制，和连接的本性相容的任何体系运动都可以被产生。为了通过挪动各活动部件来产生这一运动，必须对这些部件施以力。我们将把必须作用在任一变量 q_r 上的力写成 F_r，力系(F)是在力学上和真正产生这种运动的那个力系（不论它可能是什么样的力系）相等价的（由于有体系的那些连接）。

动量

558．]当一个物体的运动方式适足以使它相对于作用在它上面的力而言的位形永远保持相同时（例如当一个力沿着质点的运动直线作用在单一质点上时），主动力就用动量的增加率来量度。如果 F 是主动力而 p 是动量，则有

$$F=\frac{dp}{dt},$$

由此即得

$$p=\int Fdt$$

一个力的时间积分叫做该力的冲量，从而我们可以断言，动量就是力使物体从静止状态变到一个给定的运动状态时的冲量。

在一个运动连接体系的事例中，位形是以依赖于各速度（$\dot{q}$）的快慢而连续变化的，从而我们不再能够假设动量就是作用在物体上的力的时间积分。

但是任一变量的增量 δ_q 不可能大于 $\dot{q}'\delta t$，此处 δt 是增量发生的时间，而 $\dot{q}'$ 是速度在这段时间中的最大值。在一个体系在永远沿同一直线的力的作用下从静止开始运动的事例中，这个最大速度显然就是末速度。

如果体系的末速度和末位形已经给定，我们就可以设想速度是在一段很小的时间 δt 内传给体系的，原位形和末位形相差若干个量 δq_1、δq_2

等等，它们分别小于$\dot{q}_1\ \delta t$、$\dot{q}_2\ \delta t$等等。

我们所假设的时间增量δt 越短，所加的力就必须越大，但是每一个力的时间积分或冲量将仍为有限值。当时间无限缩短而趋于零时，冲量的极限值就定义为瞬时冲量，而对应于任一变量 q 的动量 p 就定义当体系从静止状态在一瞬间被纳入所给的运动状态时和该变量相对应的冲量。

这种认为动量可以由作用在静止体系上的瞬时冲量来产生的观念，只是作为定义动量之量值的一种方法而被引入的，因为体系的动量只依赖于体系的瞬时运动状态而不依赖于产生这一状态的过程。

在一个连接的体系中，和任一变量相对应的动量通常是所有各变量的速度的一个线性函数，而并不是像在质点动力学中那样简单地和速度成正比。

使体系的速度突然从$\dot{q}_2$、$\dot{q}_2$等等变成$\dot{q}_1'$、$\dot{q}_2'$等等时所需要的冲量，显然等于若干个变量的动量改变量 $p_1'-p_1'$、$p_2'-p_2$等等。

一个小冲量所作的功

559．]力 F_1 在冲量期间所作的功就是力的空间积分，或者说，

$$W=\int F_1 dq_1,$$

$$=\int F_1\dot{q}_1 dt$$

如果$\dot{q}_1'$是速度$\dot{q}_1$在力的作用时间内的最大值而$\dot{q}_1''$是其最小值，则 W 必将小于

$$\dot{q}_1\int Fdt \text{或} \dot{q}_1'(p_1'-p_1)$$

而大于

$$\dot{q}_1''\int Fdt \text{或} \dot{q}_1''(p_1'-p_1)$$

如果我们现在假设冲量$\int Fdt$无限地减小，则$\dot{q}_1'$和$\dot{q}_1''$的值将互相趋近而终于和$\dot{q}_1$的相重合，而且我们可以写出$p_1'-p_1=\delta p_1$，于是所作的功最后就是

$$\sigma W_1=\dot{q}_1\sigma p_1$$

或者说，一个很小的冲量所作的功，在极限下等于冲量和速度的乘积。

动能的增量

560．]当为使一个保守体系开始运动而对它作功时，能量就会被传送给它，而体系就变得能够在达到静止以前反抗阻力而作相等数量的功。

一个体系由于它的运动而具有的能量叫做它的“动能”，而且是由使它运动起来的那些力在所作的功的形式下传送给它的。设 T 是体系的动能，并设它由于分量为δp_1、δp_2等等的一个无限小冲量的作用而变成了 T+δT，那么增量δT 就必然是冲量所作的功的总和，或者，用符号表示出来就是

$$\sigma T = \dot{q}_1 \sigma p_1 + \dot{q}_2 \sigma p_2 + \cdots = \Sigma(\dot{q}\,\sigma p) \quad (1)$$

发果各位形变量和各动量都已给定，体系的瞬时状态就是完全确定的。由此可见，依赖于体系之瞬时状态的动能，可以用各变量(q)和各动量(p)表示出来。这就是哈密顿所引入的表示 T 的方式。当 T 是用这种方式表示出来时，我们将用下标 p 来区分它，于是就把它写成 T_p。

T_p 的全变分是

$$\sigma T_p = \Sigma(\frac{dT_p}{dp}\sigma p) + \Sigma(\frac{dT_p}{dp}\sigma p) \qquad (2)$$

最后一项可以写成

$$\Sigma(\frac{dT_p}{dq}\dot{q}\,\sigma t)$$

此式随 δt 而减小，而当冲量变为瞬时的时终于变为零。

由此可见，使方程(1)和(2)中 δp 的系数相等，我们就得到

$$\dot{q} = \frac{dT_p}{dp}, \qquad (3)$$

或者说，和变量 q 相对应的速度，就是 T_p 对相应动量 p 的微分系数。

我们通过考虑冲击力而得到了这一结果。利用这种方法，我们避免了考虑位形在力的作用时间内的变化。但是，体系的瞬时状态在一切方面都是相同的，不论体系是否通过冲击力的瞬时作用而从静止状态被带到所给的运动状态，或者说，不论它是否以无论多慢的任意方式而到达该状态。

换句话说，各变量以及对应的速度和动量，都只依赖于体系在一个给定时刻的实际运动状态，而不依赖于它的以前历史。

由此可见，不论体系的运动状态被假设为由冲击力所引起还是被假设为由以随便什么方式来起作用的力所引起，方程(3)都是同样成立的。

因此我们现在可以舍去关于冲击了的考虑，以及加在他们的作用时间上的限制和加在位形在各力作用时间内的变化上的限制。

哈密顿运动方程

561．]我们已经证明，

$$\frac{dT_p}{dp} = \dot{q} \qquad (4)$$

设体系以满足加在它的连接上的那些条件的任意方式而进行运动，于是 p 和 q 的变分就是

$$\sigma p = \frac{dp}{dt}\sigma t, \qquad \sigma p = \dot{q}\,\sigma t \qquad (5)$$

由此即得

$$\frac{dT_p}{dp}\sigma p = \frac{dp}{dt}\dot{q}\,\sigma t,$$

$$= \frac{dp}{dt}\sigma q, \qquad (6)$$

从而 T_p 的全变分就是

$$\sigma T_p = \Sigma(\frac{dT_p}{dp}\sigma q + \frac{dT_p}{dp}\sigma p),$$

$$= \Sigma((\frac{dp}{dt} + \frac{dT_p}{dq})\sigma q) \qquad (7)$$

但是动能的增量来源于所加力作的功，或者说，

$\sigma T_p = \Sigma(F\sigma q)$ (8)

在这两个表示式中，所有各变分δq 都是互相独立的，因此我们可以令两个表示式(7)和(8)中每一个变分的系数彼此相等。于是我们就得到

$$F_r = \frac{dp_r}{dt} + \frac{dT_p}{dq_r} \qquad (9)$$

式中的动量 p_r 和力 F_r 属于变量 q_r[①]。

有多少个变量，就有多少个这种形式的方程。这些方程是由哈密顿给出的。他们表明，和任一变量相对应的力都是两项之和。第一项是该变量之动量对时间而言的增加率。第二项是每单位变量增量的动能增加率，这时假设其他的变量和所有的动量都保持不变。

用动量和速度来表示的动能

562．]设 p_1、p_2 等等是在给定时刻的动量而 $\dot{q}1$、$\dot{q}2$ 等等是在该时刻的速度，并设 P_1、P_2 等等和 $\dot{q}_1$、$q\dot{q}_2$ 等等是另一组动量和速度，满足

$p_1 = np_1$，$\dot{q}_1 = n\dot{q}_1$，等等 (10)

很显然，如果 p、$\dot{q}$ 组是自洽的，则 p、q 给也是自洽的。

现在令 n 改变一个δn。力 F_1 所作的功是

$F_1\sigma q_1 = \dot{q}_1\sigma p_1 = \mathring{q}_1 n\sigma n$ (11)

令 n 从 0 增加到 1，体系就从静止状态被带到运动状态（$\dot{q}$，p），而在造成这一运动时所消耗的总功是

$$(\dot{q}_2 p_1 + \dot{q}_2 p_2 + \cdots)\int_0^1 ndn \qquad (12)$$

但是

$$\int_0^1 ndn = \frac{1}{2}$$

而且产生运动时所消耗的功是和动能等价的。由此即得

① {这种证明似乎是有问题的，因为δq 是被假设为等于 $\dot{q}\sigma t$ 即等于 $\frac{dT_p}{dp}$ δt 的，因此我们能够合理地从（7）和（8）推出的只是

[①] {这种证明似乎是有问题的，因为δq 是被假设为等于

$$■\Sigma\left\{\left(\frac{dp_r}{dt}+\frac{dT_p}{dq_r}-p_r\right)\frac{dT_p}{dp_r}\right\}=0. \}$$

$$T_{p\dot{q}}=\frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1+p_2\dot{q}_2+\cdots), \qquad (13)$$

式中$T_{p\dot{q}}$代表用动量和速度表示出来的动能。各变量q_1、$\dot{q}_2$等等并不出现在这一表示式中。

因此动能等于动量及其对应速度之积的总和的二分之一。

当动能用这种方式来表示时，我们就将用符号$T_{p\dot{q}}$来代表它。它只是动量和速度的函数而并不包括那些位形变量本身。

563．]还有第三种表示动能的方法，而事实上这种方法通常认为是基本的方法。通过求解方程组(3)，我们可以把动量用速度表示出来，然后把这些值代入(13)中，我们就将有一个只包含速度和变量的 T 的表示式。当T被表示成这种形式时，我们就将用符号$T_{\dot{q}}$来代表它。这就是动能在拉格朗日方程中被表示的形式。

564．]很显然，既然T_p、$T_{\dot{q}}$和$T_{p\dot{q}}$是同一个量的三种不同的表示式，就有

$$T_p+T_{\dot{q}}-2T_{p\dot{q}}=0$$

或者写成

$$T_p+T_{\dot{q}}-p_1\dot{q}_1-p_2\dot{q}_2-\cdots=0 \qquad (14)$$

由此可见，如果所有各量 p、q 和■都是变化的，就有

$$\left(\frac{dT_p}{dp_1}-\dot{q}_1\right)\sigma p_1+\left(\frac{dT_p}{dp_2}-\dot{q}_2\right)\sigma p_2+\cdots$$

$$+\left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}}-p_1\right)\sigma\dot{q}_1+\left(\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2}-p_2\right)\sigma\dot{q}_2+\cdots$$

$$+\left(\frac{dT_p}{dq_1}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}\right)\sigma q_1+\left(\frac{dT_p}{dq_2}+\frac{dT_{\dot{q}}}{dq_2}\right)\sigma q_2+\cdots=0 \quad (15)$$

各变分δp并不是和各变分δq及δ$\dot{q}$相互独立的，因此我们并不能立即断定方程中每一个变分的系数都等于零。但是，我们由方程组(3)可知，

$$\frac{dT_p}{dp_1}-\dot{q}_1=0,\cdots \quad (16)$$

因此包含各变分δp 的那些项自动地等于零。

剩下来的各变分δ$\dot{q}$和δq现在全都是独立的了，因此我们就通过令δ$\dot{q}_1$等等的系数等于零而得到

$$p_1 = \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1}, p_2 = \frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2}, \cdots; \quad (17)$$

或者说，动量的各个分量是 T■对相应速度的微分系数。

再者，通过令 δq_1 等等的系数等于零，就得到

$$\frac{dT_p}{dq_1} + \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} = 0, \cdots; \qquad (18)$$

或者说，动能对任一变量 q_1 的微分系数是等值而异号的，当 T 被表示成速度的函数而不是表示成动量的函数时。由于有方程(18)，我们可以把运动方程(9)写成

$$F_1 = \frac{dp_1}{dt} - \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1}, \qquad (19)$$

或者写成

$$F_1 = \frac{d}{dt}\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} - \frac{dT_{\dot{q}}}{dq_1} \qquad (20)$$

这就是由拉格朗日给出的运动方程的形式。

565．]在以上的控讨中，我们曾经避免了考虑用速度或用动量来表示动能的那种函数形式。我们曾经指定给它的唯一显函数形式就是

$$T_{pq} = \frac{1}{2}(p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + \cdots), \qquad (21)$$

在这种形式下，动能被表示成了每一动量及其对应速度之积的总和的一半。

就像在方程(3)中那样，我们可以把速度用 T_p 对动量的微分系数表示出来，

$$T_p = \frac{1}{2}(p_1\frac{dT_p}{dp_1} + p_2\frac{dT_p}{dp_2} + \cdots) \qquad (22)$$

这就表明，T_p 是动量 p_1、p_2 等等的二次齐次函数。

我们也可以把各动量用 $T\dot{q}$ 表示出来，而且我们得到

$$T\dot{q} = \frac{1}{2}(\dot{q}_1\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_1} + \dot{q}_2\frac{dT_{\dot{q}}}{d\dot{q}_2} + \cdots) \quad (23)$$

这就表明，T■是各速度 q■、q■等等的二次齐次函数。

如果我们用

---

① 原意如此。这句话显然讲得不够明确，学者可据上面的公式体会其真正含意。——译者

P_{11}代表$\frac{d^2T_{\dot q}}{d\dot q_1^2}$，$P_{12}$代表$\frac{d^2T_{\dot q}}{d\dot q_1 d\dot q_2}$，…，

并用 Q_{11}代表$\frac{d^2T_p}{dp_1^2}$，Q_{12}代表$\frac{d^2T_p}{dp_1dp_2}$，…；

那么，既然$T_{\dot q}$和T_p分别是$\dot q$和p的二次函数，各个P和各个Q就都将只是各变量q的函数而和速度及动量无关。于是我们就得到T的两个表示式：

$2T_{\dot q}=p_{11}\dot q_1^2+2p_{12}\dot q_1\dot q_2+\cdots$，（24）

$2T_p=Q_{11}p_1^2+2Q_{12}p_1p_2+\cdots$，（25）

各动量通过一些线性方程而用速度表示出来，

$p_1=p_{11}\dot q_1+p_{12}\dot q_2+\cdots$（26）

而各速度也通过一些线性方程而用动量表示出来，

$\dot q_1=Q_{11}p_1+Q_{12}p_2+\cdots$（27）

在刚体运动力学的论著中，对应于 P_{11} 的两个下标相同的系数被称为“惯量矩”，而对应于 P_{12} 的两个下标不同的系数被称为“惯量积”。我们可以把这些名称推广到现在所面临的更加普遍的问题；在这种问题中，这些量并不像在刚体的事例中那样是一些绝对的常量，而却是变量 q_1、q_2 等等的函数。

同样，我们可以把形如 Q_{11} 的系数称为“动性矩”(MomentsofMobility)，而把形如 Q_{12} 的系数称为“动性积”。然而，我们并不经常有机会谈到这些动性系数。

566．]一个体系的动能是一个永远为正或者为零的量。因此，不论它是用速度还是用动量表示出来的，各个系数必须保证没有任何的实数变量值可以使T成为负的。因此就有各系数P所必须满足的一套必要条件。这些条件如下：

各系数 P_{11}、P_{12} 等等都必须是正的。

通过在行列式

$$\begin{vmatrix} P_{11}, & P_{12}, & P_{13}, & \cdots\cdots P_{1n} \\ P_{12}, & P_{22}, & P_{23}, & \cdots\cdots P_{2n} \\ P_{13}, & P_{23}, & P_{33}, & \cdots\cdots P_{3n} \\ P_{1n}, & P_{2n}, & P_{3n}, & \cdots\cdots P_{nn} \end{vmatrix}$$

中略去具有下标1的各项，然后再略去具有下标1或2的各项，如此类推而逐次得出的n-1个行列式都必须是正的。

因此，对于n个变量来说，条件的个数就是2n-1，

各系数Q也必须满足种类相同的条件。

567．]在这种关于连接体系动力学之基本原理的概述中，我们没有考虑把体系的各部分连接起来的那种机件。我们甚至没有写出一组方程来表明体系任一部分的运动是怎样依赖于各个变量的变化的，我们曾经把自己

的注意力限制在各个变量、他们的速度和动量以及作用在表示着各个变量的各个部件上的力上。我们仅有的一些假设就是，体系的连接适足以保证时间并不显式地出现在条件方程中，而且能量守恒原理对体系是适用的。

纯动力学方法的这样一种描述并不是不必要的，因为给我们提供了这些方法的拉格朗日及其后继者们一般都把自己限制到了这些原理的一种例示方面，而且，为了把自己的注意力集中在所遇到的各个符号上，他们曾经尽力摒弃了除关于纯数量的概念以外的一切概念，以致不仅避免了图解的应用，而且在一劳永逸地用原始方程中的符号代替了速度、动量和能量以后，就把这些概念也排除掉了。为了能够用普通动力学的语言来谈论这种分析的一些结果，我们曾经尽力把这种方法的主要方程重新翻译成了一种不用符号也能理解的语言。

纯数学的概念和方法的发展，已经使人们有可能通过构成一种动力学的数学理论来揭示出许多真理，而没有数学的训练是不太可能发现这些真理的。因此，如果我们要形成其他科学的动力学理论，我们就必须既精通数学方法又熟悉这些动力学真理。

在追随和任何一门像电学这样的涉及力及其效应的科学有关的概念和术语时，我们必须时刻记得适合于动力学这一基础科学的那些概念，以便我们在这门科学的早期发展过程中可以避免和已经确立了的东西发生矛盾，而当我们的观点变得更加明确了时，我们已经采用了的那种语言也可以成为我们的助力而不是成为我们的障碍。

第六章

电磁现象的动力学理论

568．]我们在第 552 节中曾经证明，当一个电流存在于一个导体电路中时，它就有一种作一定数量的机械功的本领，而且这是和保持电流的任何外电动势都无关的。现在，作功的本领必然是能量，不论它的来源如何，而一切能量都是同一种东西，不论它在形式上可以多么不同。一个电流的能量不是具有存在于物质的实际运动中的那种形式，就是具有存在于由作用在位于某种相对位置的物体之间的力所引起被推动的可能性中的那种形式。

第一种能量，即运动的能量，被称为“动能”，而且在一旦被理解了以后，它就显得是自然界中如此基本的一个事实，以致我们很难设想再把它分解成任何别的东西了。第二种能量，即依赖于位置的能量，被称为“势能”；它是由我们称之为力的东西所引起的，也就是由改变相对位置的那种趋势所引起的。关于这些力，虽然我们可以承认他们的存在是一种明显的事实，但是我们总觉得，对于使物体运动起来的那种机制的每一次解释都形成我们的知识的一种实在的增加。

569．]电流只能被设想成一种运动的现象。法拉第总是力图使他的思想从“电流”和“电流体”之类字眼所暗示的影响下解脱出来，但是就连他也把电流说成“某种进行的东西，而不是一种单纯的排列”[①]。

电流的效应，例如电解效应，以及电从一个物体到另一个物体的传送，都是必须有一定的时间才能完成的一些进行的作用，从而都是具有运动的本性的。

至于电流的速度，我们已经表明我们对它毫无所知；它可以等于每小时十分之一英寸，或等于每秒十万英里[②]。我们对任一事例中电流速度的绝对值都如此无知，以致我们甚至不知道我们所说的正方向是真正的运动方向呢还是它的反方向。然而我们在这里所假设的一切只是电流和某种运动有关。造成电流的原因曾被称为“电动势”。这一名词已经很有裨益地使用了很久，而且从来不曾在科学的语言中引起过麻烦。电动势永远要被理解为只对电起作用，而不是对电存在于其上的那些物体起作用。它永远不应该和只对物体起作用而不对物体中的电起作用的普通的机械力混为一谈。如果我们有一天能够知道了电和普通物质之间的形式化的关系，我们或许就也能知道电动势和普通力之间的关系了。

570．]当普通的力作用在一个物体上而该物体对力退让时，力所作的功就用力和物体退让的数量的乘积来量度。例如，在水被压迫而通过一根水管的事例中，在任一截面处所作的功就用截面上压强和流过截面的水量的乘积来量度。

同样，一个电动势所作的功，是用电动势和在该电动势作用下通过导体截面的电量的乘积来量度的。

[①] Exp.Res.,283.

[②] Exp.Res.,1648.

一个电动势所作的功和一个普通力所作的功属于确切相同的种类，而且二者都是用相同的标准或单位来量度的。

作用在一个导体电路上的电动势所作的功的一部分，用来克服电路的电阻，而这一部分功就由此而转化成热。另一部分功用来产生安培所观察到的电磁现象，在那种现象中一些导体被电磁力弄得运动起来。其余的功用来增加电流的动能，而这一部分作用的效应可以在法拉第所观察到的电流感应现象中被显示出来。因此，我们对电流所知够多，可以把载有电流的一个物质导体体系看成一个作为能量之存在处所的动力学体系了；这里的能量可以一部分是动能而一部分是势能。

这一体系之各部分的连接本性是我们所不得而知的。但是既然我们有一些并不要求有关体系机构的知识的动力学研究方法，我们就可以把他们应用于这一事例。

我们首先将检查，当假设表示体系动能的函数具有最普遍的形式时将得到哪些结论。

571．]设体系由若干个导体电路组成，各电路的形状和位置由一组变量 x_1、x_2 等等的值来确定，变量的个数等于体系的自由度数。

假如体系的总动量是由这些导体的运动引起的，则它将被表示成如下的形式：

$$T=\frac{1}{2}(x_1x_1)\dot{x}_1^2+\cdots+(x_1x_2)\dot{x}_1\dot{x}+\cdots$$

式中符号(x_1x_1)等等代表我们已经称之为惯量矩的那些量,而(x_1x_2)等等则代表惯量积。

设 X＇是所加的倾向于增大座标 x 的力，而 x 的增大也是产生实际运动时所要求的，则由拉格朗日方程可得

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}=X'$$

当 T 代表只由可以看到的运动所引起的动能时，我们将用下标 m 来标明它，例如 T_m。

但是，在一组载有电流的导体中，一部分动能是因为这些电流的存在而存在的。设电的运动以及其运动受电运动的支配的任何东西都由另一组座标 y_1、y_2 等等来确定，则 T 将是这两组座标之一切速度的平方和乘积的齐次函数。因此我们可以把 T 分成三部分：在第一部分 T_m 中，只出现各座标 x 的速度；在第二部分 T_e 中，只出现各座标 y 的速度；在第三部分中，每一项都包括两个座标的速度的乘积，其中一个座标属于 x 组而另一个座标属于 y 组。

因此我们就有

$T=T_m+T_e+T_{me}$，

式中

$$T_m = \frac{1}{2}(x_1 x_1)\dot{x}_1^2 + \cdots (x_1 x_2)\dot{x}_1 \dot{x}_2 + \cdots,$$

$$T_e = \frac{1}{2}(y_1 y_1) y_2 \dot{y}_1^2 + \cdots + (y_1 y_2)\dot{y}_1 \dot{y}_2$$

$$T_{me} = (x_1 y_1)\dot{x}_1 \dot{y}_1 + \cdots$$

572．]在普遍的动力学理论中，每一项的系数都可以是既包括 x 又包括 y 的所有座标的函数。然而在电流的事例中却容易看到，y 类的座标并不出现在各系数中。因为，如果所有的电流都保持恒定，而各个导体也都处于静止，则场的整个状态也将保持不变。但是，在这一事例中，各座标 y是可以变化的，尽管各速度 $\dot{y}$ 是不变的。由此可见，各座标y不能出现在 T 的表示式中，也不能出现在实际过程的任何其他表示式中。

除此以外，由于连续性方程的存在，如果各导体具有线性电路的性质，则只需要用一个变量来表示每一导体中的电流强度。设速度 $\dot{y}_1$、 $\dot{y}_2$ 等等代表若干个导体中的电流强度。

所有的结果也应成立，如果我们考虑的不是电流而是一些柔性管子中的不可压缩的液体流的话。在这一事例中，液流的速度将出现在 T 的表示式中，但是各系数却将只依赖于确定着各管子的形状及位置的那些变量 x。

在液体的事例中，一根管子中液体的运动并不直接影响任一其他管子的运动或管中液体的运动。由此可见，在T_e的值中，只会出现各速度 $\dot{y}$ 的平方而不会出现他们的乘积，而在T_{me}中，任一速度 $\dot{y}$ 是只和属于它自己的管子的那些形如 $\dot{x}$ 的速度相联系的。

在电流的事例中，我们知道这种限制并不成立，因为不同电路中的电流是互相作用的。因此我们必须承认一些包含着形如 $\dot{y}_1 \dot{y}_2$ 之乘积的项的存在，而这就涉及某种运动着的东西的存在，其运动是依赖于两个电流强度 $\dot{y}_1$ 和 $\dot{y}_2$ 的。不论这种运动的东西到底是什么，它都不是局限在载有两个电流的导体的内部，而是或许会扩展到各导体周围的整个空间之中。

573．]其次让我们考虑拉格朗日运动方程在这一事例中所采取的形式。设 X＇是所加的和确定各导体电路之形状及位置的座标之一 x 相对应的力。这是一个通常意义下的力，即一种改变位置的趋势。这个力由下列方程给出：

$$X' = \frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}} - \frac{dT}{dx}$$

我们可以认为这个力是三个部分之和，他们对应于我们把体系的动能分成的那三个部分，从而我们可以用同样的下标来区分他们。于是就有

$X' = X'_m + X'_e + X'_{me}$

X'_m这一部分是依赖于普通的动力学考虑的那一部分，从而我们用不着留意它。

既然T_e并不包含$\dot{x}$，T'_e的表示式中的第一项就是零，从而它的值就简化为

$$X'_e = -\frac{dT_e}{dx}$$

这就是必须作用在一个导体上以平衡电磁力的那个机械力的表示式，而且此式表明，这个力是用座标 x 的变化所引起的纯动电能量的减小率来量度的。唤起外机械力之作用的电磁力 X_e 和 X'_e 相等而反向，从而是用和座标 x 之增量相对应的动电能量增加率来量度的。既然依赖于电流的平方和乘积，X_e 的值就将保持不变，如果我们使所有的电流反向的话。

X ' 的第三部分是

$$X'_{me} = \frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{d\dot{x}} - \frac{dT_{me}}{dx}$$

量T_{me}只包含形如的乘积，从而$\frac{dT_{me}}{d\dot{x}}$是各电流强度$\dot{y}$的线性函数。因此第一项就依赖于各电流强度的变化率，并指示一个作用在导体上的力；这个力当各电流不变时是零，它按照各电流强度的增大或减小而为正或为负。

第二项不是依赖于电流的变化而是依赖于电流的实际强度。既然它对这些电流来说是一个线性函数，当电流变号时它也就会变号。既然每一项都包含一个速度$\dot{x}$，当各导体静时它就会等于零。也有一些项起源于$\frac{dT_{me}}{d\dot{x}}$中$\dot{y}$的系数的时间变化；这些说法也适用于他们。

574.〕既然很重要的是确定动能的任何部分是否具有包括着普通速度和电流强度之乘积的 T_{me} 的形式，很仔细的对这一课题进行一些实验就是很有必要的。作用在迅速运动物体上的力的测定是困难的。因此让我们注意依赖于电流强度之变化的第一项。

如果动能的任一部分依赖于一个普通的速度和一个电流的强度的乘积，则当速度和电流同向或反向时或许最容易观察它。因此让我们取一个匝数很大的线圈，用一根很细的竖直悬线挂起来，使它的各匝都处于水平位置，而且线圈可以绕着一条竖直轴线而转动，既可以沿着线圈中电流的方向转动也可以反着电流的方向而转动。

既然当线圈中有电流时地磁水平分量的作用将倾向于使线圈绕着一个水平轴而转动，我们就将假设地磁的水平分量是借助于一些固定的磁体而确切中和了的，或者假设实验是在地球的磁极上作的。一个竖直的小镜被装在线圈上，以检测方位方面的任何运动。

现在设使一个电流沿北—西—南—东的方向通过线圈。假如电是像水那样的一种液体，沿着导线而流动，那么，在电流开始的时刻，以及在速度增大的时间内，就要求加一个力来产生液体在绕着线圈流动时的角动量，而且，既然这个力必须由悬线的弹性来提供，在开始时线圈就将沿着相反的方向即西—南—东—北的方向而转动，而且这种转动将被小镜检测出来。在使电流停止时，小镜就会有另一次运动，这一次是沿着和电流相

同的方向而转动的。

任何这种现象还都不曾被观察到。这样一种作用如果存在，它就将是很容易通过下述的特点而和已经知道的电流作用区别开来的。

(1)只有当电流的强度变化时，例如在接通或开断电流时，这种作用才会出现，而在电流不变时则不出现。

所有已知的电流的机械作用都依赖于电流的强度而不依赖于变化率。感生电流事例中的电动势不能和这种电磁作用混为一谈。

(2)当在场的一切电流都反向时，这一作用的方向也反转。当所有的电流都反向时，所有已知的电流的机械作用都保持不变，因为它们是依赖于这些电流的平方和乘积的。

假如任何这样一种作用被发现了，我们就将能够把所说的正、负电中的一种看成一种实在的物质，从而我们就将能够把电流描述成这种物质沿着一个特定方向的真实运动。事实上，假如电运动不论怎样可以和普通物质的运动相比拟，则形如 T_{me} 的项将存在，而且它们的存在将由机械力 X_{me} 显示出来。

菲希诺尔设想，电流就是相等的正电和负电在同一导体中沿相反方向的流动；按照这种假设，第二类的项 T_{me} 应该为零，因为属于正电流的每一项都和一个属于负电流的相等而异号的项相伴随，从而依赖于这些项的现象就将不存在。

然而在我看来，尽管我们由于认识到电流和物质性的液体流之间的许多类似性而获益匪浅，我们还是必须小心地避免作出没有实验资料保证的任何假设，而且，迄今还没有任何实验证据可以指明电流是否果然是一种实在物质的流动，或是不是一种双重流动，或电流的速度以英尺每秒计是大还是小。

关于这些问题的一种知识将至少意味着电的一种完全的动力学理论的开始；在那种理论中，我们将不是像在本书中一样把电作用看成一种由未知的原因所引起的、只服从动力学的普遍定律的现象。而是把它看成物质之已知部分的已知运动的结果；在那种理论中，不仅是运动的总效应和最后结果，而且还有运动的整个中间机制和细节都将被看成研究的对象。

575．〕

X_{me} 的第二项即 $\frac{dT_{me}}{dx}$ 的实验研究更加困难，因为它涉及作用在迅速运动物体上的力的效应的观察。

图 34 所示的我在 1861 年制造的仪器,是打算用来测试这一种力的存在的。

电磁铁 A 可以在一个圆环中绕水平轴 BB＇而转动，圆环本身则绕竖直轴而转动。

设 A、B、C 分别是电磁铁对线圈轴线、水平轴 BB＇和第三条轴线 CC＇而言的惯量矩。

设 θ 是 CC＇和竖直线之间的夹角，φ是轴 BB＇的方位角，而ψ是线圈中电的运动所依赖的一个变量。

于是电磁铁的动能 T 就可以写成

$$2T = A\dot{\phi}\sin\theta + B\dot{\theta}^2 + C\dot{\phi}^2\cos^2\theta + E(\dot{\phi}\sin\theta + \dot{\psi})^2$$

式中 E 是可以称为线圈中的电的惯量矩的一个量。

如果Θ是所加力倾向于使θ增大的力矩，我们由动力学方程就得到

$$\Theta = B\frac{d^2\theta}{dl^2} - \left\{(A-C)\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + E\dot{\phi}\cos\theta(\dot{\phi}^2\sin\theta + \dot{\psi})\right\}$$

令所加的倾向于使ψ增大的力Ψ等于零，我们得到

$$\dot{\phi}\sin\theta + \dot{\psi} = \gamma,$$

这是一个常量，我们可以认为它代表线圈中的电流强度。

如果 C 比 A 大一些，Θ就将是零，而当

$$\sin\theta = \frac{E\gamma}{(C-A)\dot{\phi}}$$

时绕 BB＇的平衡就将是稳定的。

这个θ值依赖于电流强度γ的值，而且按照电流方向的不同而为正或为负。

电流通过线圈的轴承 B 和 B＇而进入线圈中，轴承通过和放在竖直轴上的金属环相摩擦的弹簧片而和电池相接。

为了确定θ的值，在 C 上放了一个纸质圆盘，一条平行于 BB＇的直径把圆盘分成两半，一半涂成红色而另一关涂成绿色。

设仪器正在转动中，当θ为正时就在 C 处看到一个红色的圆，其半径大致地表示着θ的值。当θ为负时，就在 C 处看到一个绿色的圆。

通过套在和电磁铁相连的螺丝上的螺母，可以把 CC＇调成一个主轴，并使它的惯量矩刚刚超过绕轴 A 的惯量矩，这样就把仪器弄得对力的作用很敏感，如果力存在的话。

实验中的主要困难起源于地球磁力的干扰，它使电磁铁像一个倾角针那样地起作用。由于这种原因，所得到的结果是很粗略的，但是甚至当把一个铁芯插入线圈中，而使它成为一个强力的电磁铁时，也没有能够得到关于θ的任何变化的任何证据。因此，如果一个磁体包含着迅速转动的物质，则这种转动的角动量和我们所能量度的任何量相比都必然是很小的，而且我们迄今还没有关于由转动的机械作用得出的关于 T_{me} 项的存在的任何证据。

576.〕其次让我们考虑作用在电流上的力，也就是电磁力。设 Y 是由感应引起的有效电动势，则必须由外界作用在电路上以平衡 Y 的电动势是 Y＇=-Y，从而由拉格朗日方程就有

$$Y = -Y' = -\frac{d}{dt}\frac{dT}{dy} + \frac{dT}{dy}$$

既然 T 中没有任何含座标 y 的项，上式中的第二项就是零，而 Y 就简化为它的第一项。由此可见，电动势不可能存在于一个载有恒定电流的静止体系中。

此外，如果我们把 Y 分成和 T 的三个部分相对应的三部分 Y_m、Y_e 和 Y_{me}，我们就发现，既然 T_m 不包含 $\dot{y}$，应有 $Y_m = 0$。

我们也得到

$$Y_e = -\frac{d}{dt}\frac{dT_e}{d\dot{y}}$$

这里的 $\frac{dT_e}{d\dot{y}}$ 是各电流的线性函数，而这一部分电动势就等于这一函数的变化率。这就是由法拉第发现了的感生电动势。以后我们还将更详细地考虑它。

577.〕我们由依赖于速度和电流之乘积的那一部分 T 就得到

$$T_{me} = -\frac{d}{dt}\frac{dT_{me}}{dy}$$

现在，$\frac{dT_{me}}{d\dot{y}}$ 是各导体的速度的线性函数。因此，如果 T_{me} 的任何项是实际存在的，那就将有可能通过只改变各导体的速度而不依赖于一切存在的电流来产生一个电动势。例如，在第 574 节的悬挂线圈的事例中，当线圈静止而我们使它突然绕着竖直轴而转动起来时，就会有一个正比于这一运动之加速度的电动势开始起作用。当运动变成均匀的时，这个电动势将消失，而当运动减速时电动势就会反向。

喏，很少有什么科学观测是可以作得比用一个电流计来确定一个电流存在或不存在的观测更加精确的。这种方法的灵敏度远远超过用来测量作用在一个物体上的力的大多数装置的灵敏度。因此，假如任保电流可以用这种办法来产生，他们就将会被发现，即使他们是很微弱的。他们将在下述的特征方面和普通的感生电流有所不同。

(1)他们将完全依赖于各导体的运动,而一点也不依赖于场中已有的电流强度或磁力。

(2)他们将不是依赖于各导体的绝对速度而是依赖于各导体的加速度，也依赖于各速度的平方和乘积，而且他们当加速度变成减速度时也会变化，即使绝对速度是相同的。

喏，在实际观察过的一切事例中，感生电流完全依赖于场中电流的强度和变化，而且不可能在一个没有磁力和没有电流的地方被激起。既然他们依赖于各导体的运动，他们就依赖于这些运动的绝对速度，而不是依赖于速度的变化。

这样，我们就有三种检测形如 T_{me} 的项之存在的方法，其中任何一种方法都还一直不曾导致正面的结果。我曾经比较细心地指出了这些方法，因为在我看来很重要的是，我们在和真实的电学理论如此关系密切的一个问题上应该获取所能得到的最大量的证据。

然而，既然迄今不曾得到有关这种项的任何证据，我现在就将根据一个假设来进行工作，那就是，这些项并不存在，或者至少是并不引起可觉察的效应。这是一条将使我们的动力学理论大为简化的假设。然而我们将来会有机会讨论磁和光的关系，以证明构成光的那种运动会出现在涉及构成磁的运动的一些项中。

第七章

电路理论

578.〕我们现在可以把我们的注意力限制在体系的依赖于各电流强度的平方和乘积的那一部分动能上。我们可以把这种动能称为动电能量。依赖于各导体之运动的那一部分动能属于普通的动力学，而我们已经看到依赖于速度和电流之乘积的部分是并不存在的。

设 A_1、A_2 等等代表不同的导体电路。设他们的形状和相对位置用一些变量 x_1、x_2 等等来确定，变量的个数等于力学体系的自由度数。我们将把这些变量叫做“几何变量”。

设 y_1 代表自时间 t 开始以来已经通过导体 A_1 的一个给定截面的电量。电流强度将用这个量的流数[fluxion，即导数] $\dot{y}_1$ 来代表。

我们将把 $\dot{y}_1$ 叫做实际电流，而把 y_1 叫做积分电流。对于体系中的每一个电路，各有一个这样的变量。

设 T 代表体系的动电能量。它是对各电流强度而言的一个二次齐次函数，其形式是

$$T=\frac{1}{2}L_1\dot{y}_1^2+\frac{1}{2}L_2\dot{y}_2^2+\cdots+M_{12}\dot{y}_1\dot{y}_2+\cdots,\qquad(1)$$

式中各系数 L、M 等等是各几何变量 x_1、x_2 等等的函数。电变量 y_1、y_2 等等并不进入表示式中。

我们可以把 L_1、L_2 等等叫做电路 A_1、A_2 等等的电惯量矩，而把 M_{12} 叫做两个路 A_1、A_2 的电惯量积。当我们想要避免使用动力学理论的语言时，我们将把 L_1 叫做电路 A_2 的自感系数，而把 M_{12} 叫做电路 A_1 和 A_2 的互感系数。M_{12} 也叫做电路 A_1 对电路 A_2 而言的势。这些量只依赖于各电路的形状和相对位置。我们将发现，在电磁单位制中，它们是一些具有长度量纲的量。

对 $\dot{y}_1$ 微分T，我们就得到一个量 p_1；这个量在动力学理论中可以叫做对应于 y_1 的动量。在电学理论中，我们将把 P_1 叫做电路 A_1 的动电动量。它的值是

$$p_1=L_1\dot{y}_1+M_{12}\dot{y}_2+\cdots$$

因此，电路 A_1 的动电动量就等于它自己的电流乘以它的自感系数，再加上其他电路的电流分别乘以 A_1 和各该电路的互感系数所得之乘积的和。

电动势

579.〕设 E 是由化学电池或温差电池之类的原因加在电路 A 上的电动势，它将独立于磁电感应而产生一个电流。

设R是电路的电阻，则由欧姆定律可知，需要一个电动势$R\dot{y}$来克服阻力，剩下一个电动势来改变电路的动量。把对应的力称为 Y'，我们就由普遍方程得到

$$Y'=\frac{dp}{dt}-\frac{dT}{dy},$$

但是既然 T 不含 y，后一项就是不出现的。

由此可见，由动势的方程是

$$E-R\dot{y}=Y'=\frac{dp}{dt},$$

或作

$$E=R\dot{y}+\frac{dp}{dt}$$

因此所加电动势就是两项之和。第一项，$R\dot{y}$，是反抗阻力而保持电流$\dot{y}$所需要的。第二项是增加电磁动量P所需要的。这就是必须由和磁电感应无关的电源供给的电动势。仅仅起源于磁电感应的电动势显然是$-\frac{dp}{dt}$，或者说是电路之动电动量的减小率。

电磁力

580.〕设 X'是由外界原因所引起的倾向于增大变量 x 的机械力。由普遍方程可得

$$X'=\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}$$

既然动电能量的表示式并不包含速度（$\dot{x}$），右端的第一项就不出现，从而我们就得到

$$X'=x\frac{dT}{dx}$$

此处 X'是需要用来平衡起源于电学原因的力的外力。通常人们把这个力看成反抗电磁力的反作用；我们将把电磁力写成 X，它和 X'相等而反向。

由此即得

$$X=\frac{dT}{dx},$$

或者说，倾向于增大任一变量的电磁力等于对该变量每单位增量而言的动电能量增加率，若这时各电流保持不变。

如果各电流在电动势作动 W 的一次位移中由电池来保持不变，则体系的动电能量将同时增大一个量 W。由此可见，除了由于在电路中产生热而消耗的能量以外，电池还要消耗双倍的能量即 2W。这一点是由 W. 汤姆孙爵士①首先指出的。请把这一结果和第 93 节中的静电性质作一比较。

二电路事例

① Nichol'sCyclopaediaofthePhysicalSciences,ed.1860,article‘Magnetism,DynamicalRe-lationsof.’

581.〕设 A_1 被称为“原电路”而 A_2 被称为“副电路”。体系的动电能量可以写成

$$T=\frac{1}{2}L\dot{y}_2^2+M\dot{y}_1\dot{y}_2+\frac{1}{2}N\dot{y}_2^2$$

式中 L 和 N 分别是原电路的副电路和自感系数，而 M 是他们的互感系数。

让我们假设，除了由原电路的感应所引起的电动势以外，没有任何别的电动势作用在副电路上。于是我们就有

$$E_2=R_2\dot{y}_2+\frac{d}{dt}(M\dot{y}_1+N\dot{y}_2)=0$$

把这一方程对 t 求积分，我们就有

$R_2y_2+M\dot{y}_1+N\dot{y}_2=C$,即为常量，

式中 y_2 是副电路中的积分电流。

测量一个短时间内的积分电流的方法将在第 748 节中加以描述，而且在多数事例中是不难保证副电流的持续时间为很短的。

设用撇号来标明方程中各变量在时间 t 的末时刻的值，如果 y_2 是积分电流，或者说是在时间 t 内流过副电路的一个截面的总电量，则有

$$R_2y_2=M\dot{y}_1+N\dot{y}_2-(M'\dot{y}_1'+N'\dot{y}_2')$$

设副电流完全是由感应引起的。如果在时间 t 开始以前原电流不变而各导体都处于静止，则副电流的初值 y_2 必为零。如果时间够长，可以允许副电流衰减完毕，则它的末值也为零，于是方程就变为

$$R_2y_2=M\dot{y}_1-M'\dot{y}_1'$$

在这一事例中，副电路的积分电流依赖于$M\dot{y}_1$的初值和末值。

感生电流

582.〕

让我们在开始时假设原电路是开断的，或者说 $\dot{y}_1=0$；设在电路接通时有一个电流 $\dot{y}_1$ '被建立了起来。

确定副积分电流的方程是

$$R_2y_2=-M'\dot{y}_1'$$

当各电路互相并排而方向相同时，M'是一个正量。因此，当原电路被接通时就在副电路中感应出一个负电流。

当原电路被开断时，原电流就停止，从而感生的积分电流就是 y_2，且有

$$R_2y_2=M\dot{y}_1$$

在这一事例中，副电流是正的。

如果原电流保持不变而各电路的形状和相对位置变化以致 M 变成了 M'，则积分副电流是 y_2，而

$$R_2 y_2 = (M - M')\dot{y}_1$$

在两个电路相并排而方向相同的事例中，当电路间的距离增大时 M 就减小。因此感生电流当距离增大时为正而当距离减小时为负。

二电路之间的机械作用

583.〕设 x 是二电路之形状及相对位置所依赖的几何变量之一，倾向于增大 x 的电磁力就是

$$X = \frac{1}{2}\dot{y}_1^2 \frac{dL}{dx} + \dot{y}_1 \dot{y}_2 \frac{dM}{dx} + \frac{1}{2}\dot{y}_2^2 \frac{dN}{dx}$$

如果和 x 的变化相对应的体系运动使得每一个电路都像一个刚体那样地运动，则 L 和 N 将不依赖于 x，从而方程将简化为

$$x = \dot{y}_1 \dot{y}_2 \frac{dM}{dx}$$

由此可见，如果原电流和副电流符号相同，则作用于电路之间的力将倾向于使他们运动以增大 M。

如果二电路是并排的而二电流是沿相同方向流动的，则 M 将由于二电路的靠拢而增大。由此可见，力 x 在这一事例中是一个吸引力。

584.〕两个电路相互作用的整个现象，不论是电流感应现象还是二者之间的机械力，都依赖于我们已称之为互感系数的 M。由二电路的几何关系来推算这个量的方法已在第 524 节中给出，但是在下一章的探讨中我们将并不假设有关这个量的数学形式的知识。我们将认为它已从关于感应的实验中推得，例如已经通过当把副电路突然从一个给定的位置挪动到无限远处或掷动到我们已知其 M=0 的位置上时观测积分电流而求得。

注｛开文迪什实验室有一个由麦克斯韦设计的仪器，它很清楚地例示了电流的感应定律。

这个仪器如图 34a 所示。P 和 Q 是两个圆盘。P 的转动代表原电路，Q 的转动代表副电路。两个圆盘通过一个差动齿轮而互相连接。中间的轮子携带一个飞轮，其惯量矩可以通过向里或向外移动重物来加以改变。副电路的电阻用一根绳子的摩擦来代表，绳子绕在 Q 上并用一个弹性带子来保持拉紧。如果 P 被弄得转动起来（电流在原电路中开始流动），则圆盘 Q 将向相反的方向转动（当原电流开始时副电路中出现反向电流）。当 P 的转动速度变成均匀的时，Q 就是静止的（当原电流不变时副电路中没有电流）；如果圆盘 P 受到阻止，Q 就开始沿着 P 的原有转动方向而转动（当原路被开断时副电路中出现正向电流）。铁芯的增强感应的效应可以通过增大飞轮的惯量矩来加以演示。｝

第八章

利用副电路来勘查场

585．〕我们在第 582、583、584 节中已经证明，原电路和副电路之间的电磁作用依赖于一个用 M 来代表的量，这是两个电路的形状及相对位置的一个函数。

虽然 M 这个量和两个电路的势事实上是相同的，而那个势的数学形式和性质我们已在第 423、492、521、539 节中由磁现象和电磁现象推出，但是我们在这儿将只字不提那些结果而从一个新的基础重新开始；这时我们除了在第七章中叙述了的那些动力学理论的假设以外不再作任务别的假设。

副电路的动电动量包括两部分（第 578 节）：一部分是 Mi_1，依赖于原电流 i_1；另一部分是 Mi_2，依赖于副电流 i_2。现在我们要研究第一部分。我们用 p 来代表它，即

$p=Mi_1$。(1)

我们也将假设原电路是固定的，而原电流也是不变的。p 这个量，即副电路的动电动量，在这一事例中将只依赖于副电路的形状和位置，于是，如果取任一闭合曲线作为副电路，并选定一个沿着曲线的方向作为正方向，则这条闭合曲线的 p 值是确定的。假若当初取了相反的沿曲线的方向作为正方向，则量 p 的符号将相反。

586．〕既然量 P 依赖于电路的形状和位置，我们就可以假设，电路的每一部分都对 p 的值有某些贡献，而且电路的每一部分的贡献都只依赖于该部分的形状和位置，而并不依赖于电路的其他部分的位置。

这一假设是合理的，因为我们现在考虑的并不是一个各部分可能而且确实互相作用的电流，而只是一个电路，也就是电流可能沿着它运行的一条闭合曲线，从而这只是一个纯几何的图形，它的各个部分是不能被设想为彼此有什么物理的作用的。

因此我们可以假设，由线段元 ds 贡献的那一部分是 Jds，此处 J 是一个依赖于 ds 之位置及方向的量。由此可见，p 的值可以表示成一个线积分

$$p=\int J ds, \qquad (2)$$

式中的积分要沿电路计算一周。

587．〕其次我们必须确定 J 这个量的形式。首先，如果 ds 的方向倒转，则 J 将变号。由此可见，如果两个电路 ABCE 和 AECD 具有一个公共部分 AEC，但是这一部分在两个电路中是沿相反方向计算的，则两个电路 ABCE 和 AECD 上的 P 值将等于由该二电路合成的电路 ABCD 上的 P 值。

因为，依赖于线段 AEC 的那一部分线积分在两个分电路中是相等而反号的，从而当加在一起时将互相抵消，剩下来的只是依赖于 ABCD 的外边界的那些线积分部分。

同样我们可以证明，如果一个以一条闭合曲线为边界的曲面被分成任意多个部分，如果其中每一个部分的边界线被看成一个电路，而每一个电路的正绕行方向和最外的闭合曲线的正绕行方向相同，则闭合曲线上的 P

值等于所有各电路的 P 值之和。请参阅第 483 节。

588.〕现在让我们考虑曲面的一个部分，其线度和曲面的主曲率半径相比是如此地小，以致法线方向在该部分内部的变化可以忽略不计。我们也将假设，如果把任何一个很小的电路从一部分平行移动到另一部分，则小电路的 p 值不会有很大的变化。如果曲面部分的线度远小于它离原电路的距离，情况显然就是如此的。

如果在曲面的这一部分上画一条任意的闭合曲线，则其 P 值将正比于其面积。

因为，任何两个电路的面积都可以分成许多大小相同并有相同的 P 值的面积元。两个电路的面积之比等于他们所含的面积元数目之比，从而二电路的 P 值也有相同的比值。

由此可见，作为曲面上面积元 dS 之边界的电路的 p 值应有

$$IdS$$

的形式，式中 I 是一个依赖于 dS 的位置及其法线方向的量。因此我们就有 P 的一个新表示式

$$p = \iint IdS, \qquad (3)$$

此处的双重积分是在以电路为边的曲面上计算的。

589.〕设 ABCD 是一个电路，其中 AC 是一个线段元，短得可以看成直线。设 APB 和 CQB 是同一平面上相等的面积，于是小电路 APB 和 CQB 的 p 值将相同。或者说，P(APB)=p(CQB)。

由此可见

p(APBQCD)=p(ABQCD)+p(APB)，

=p(ABQCD)+p(CQB)，

=p(ABCD)，

或者说，用折线 APQC 来代替直线 AC，并不会改变 P 值，如果电路的面积并未显著地改变的话。事实上，这就是由安培的第二个实验确立了的原理（第 506 节），在那个实验中曾经证明，一个曲折的部分和一个直部分相等价，如果曲折部分的任何段都和直线部分相距不很远的话。

因此，如果代替了 ds，我们画出三个线段元 dx、dy、dz，他们是一个接一个地画出并从 ds 的起点到达 ds 的终点而形成一条连续路径的，如果 Fdx、Gdy、Hdz 是分别对应于 dx、dy、dz 的线积分元，则有

Jds=Fdx+Gdy+Hdz。(4)

590.〕现在我们能够确定 J 这个量依赖于 ds 的方向的那种方式了。因为由(4)即得

$$J = F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds} \qquad (5)$$

这就是一个矢量投影在 ds 方向上的那一部分的表示式，该矢量 x、y、z 在各轴上的投影分别是 F、G、H。

如果把这个矢量写成 ρ，而把从原点到电路上一点的矢量写成 ρ，则电路元将是 dρ，而 Jds 的四元数表示式将是

$$-S.\ ud\rho$$

现在我们可以把方程(2)写成下列形式了：

$$p=\int(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds})ds,$$

或作

$$p=-\int S\cdot u d\rho. \qquad (7)$$

矢量及其分量 F、G、H 依赖于 ds 在场中的位置而不依赖它被画出的方向。因此他们是 ds 的座标 x、y、z 的函数而不是 ds 的方向余弦 ι 、m、n 的函数。

矢量 u 在方向和量值上代表一个电动强度的时间积分，该电动强度就是当原电路突然断开时一个位于点(x，y，z)上的粒子所将经受到的。因此我们将把它叫做点(x，y，z)上的“动电动量”。它是和我们在第 405 节中在磁感之矢势的名义下研究过的那个量相等同的。

任一有限线段或电路的动电动量就是路径各点上动电动量沿该路径的分量的线积分。

591．〕其次让我们确定元长方形 ABCD 的 P 值，长方形的各边是 dy 和 dz，其绕行方向是从 y 轴方向转向 z 轴方向。

设元电路的重心 O 的座标为 x_0、y_0、z_0，并设这一点上的 G 值和 H 值是 G_0 和 H_0。

长方形第一个边的中点A的座标是y_0和$z_0-\frac{1}{2}dz$。对应的G值是

$$G=G_0-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}dz+\cdots, \qquad (8)$$

而起源于 A 边的 P 值部分近似地是

$$G_0dy-\frac{1}{2}\frac{dG}{dZ}dydz \qquad (9)$$

同理得到，

在B边上，$H_0dz+\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}dydz,$

在C边上，$-G_0dy\frac{1}{2}dydz,$

x 在C边上，$-H_0dz+\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}dydz$

把这四个量加起来，我们就得到长方形上的 P 值，即

$$p=(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz})dydz \qquad (10)$$

如果我们现在假设三个新量 a、b、c，满足

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz},\\ b&=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx},\\ c&=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy},\end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

并把这三个量看成一个新矢量■的分量，则由第 24 节的定理四，我们

可把■沿任一回路的线积分用■在以该回路为边的一个曲面上的面积分表示出来，于是就有

$$p=\int\left(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds}\right)ds=\iint(la+mb+nc)dS,\quad(11)$$

或者写成

$$p=\int T．■\cos\in ds=\iint T．■\cos\eta dS,\quad(12)$$

式中∈是■和 ds 之间的夹角，η是■和 dS 上方向余弦为 l、m、n 的法线之间的夹角，而 T．■和 T．■代表■和■的数值。

把这一结果和方程(3)相比较，就显然可知该方程中的 I 等于■cos η，或者说等于■在 dS 的法线上的投影。

592．〕我们已经看到（第 490、541 节），按照法拉第的理论，电路中的电磁力及感应现象，依赖于穿过该电路的磁感线数目的变化。喏，这些线的数目是用磁感在以电路为边的任一曲面上的面积分来数学地表示的。由此可见，我们必须把矢量■及其分量 a、b、c 看成我们已经熟悉的磁感及其分量。

在此处的探讨中，我们打算从在上一章中叙述了的动力学原理出发并尽可能少地求助于实验来导出这一矢量的性质。当把作为数学探讨的结果而出现的这一矢量和我们通过有关磁体的实验而知道了它的性质的磁感等同看待时，我们并没有背离这一方法，因为我们并没有把任何新的事实引入到理论中来，而是只给一个数学量加上了一个名称，而这种作法的恰当性是按照数学量的各关系式和该名称所指示的那一物理量的各关系式的一致性来判断的。

既然矢量■出现在一个面积分中,它就显然属于第 12 节所描述的那种流量密度的范畴。另一方面，矢量■却属于力的范畴，因为它是出现在一个线积分中的。

593．]在这儿，我们必须回忆关于量的和方向的正负的约定，其中某些约定已在第 23 节中叙述过。我们采用右手座标系，就是说，如果沿着 x 轴的方向放一个右手螺旋，而螺旋上的螺母是沿着正方向即从 y 方向转向 z 方向而被转动的，则螺母将沿着 x 的正方向而在螺旋上前进。

我们也把玻璃电和指北磁极算作正的。一个电路或一条电感线的正方向就是正电的运动方向或它倾向于运动的方向，而一条磁感线的正方向就是一个罗盘指针的指北极所指的方向。请参阅第 498 节的图 24 和第 501 节的图 25。

我们建议学生自选一种在他看来是最有效的方法来把这些约定牢记在心中，因为要记住关于在以前是不同的两种方式中到底选用哪一种来进行叙述的规则，比记住从多种方式中选出一种方式的法则还要困难得多。

594．]其次我们必须由动力学原理导出通过磁场而作用在一个载流导体上的电磁力的表示式，以及作用在磁场中的一个导体内的电上的电动势的表示式。我们所采用的数学方法可以和法拉第[①]借助于一根导线来探测场的实验方法相对比，也可以和我们在第 490 节中利用一种建筑在实验上的方法已经作到的那些事情相对比。我们现在必须作的就是确定由副电路形状的给定变化所引起的对该电路动电动量 p 的值的影响。

[①] Exp.Res.，3082，3087，3113。

设 AA′、BB′是两个平行的直导体，用一个形状可以任意的导电弧 C 来互相连接，并用一个直导体 AB 来互相连接；AB 可以平行于自身而在导体轨道 AA′和 BB′上滑动。

设把这样形成的电路看成副电路，并把方向 ABC 取作正方向。

设滑动部分平行于自身而从位置 AB 滑到了位置 A′B′。我们必须确定滑动部分的位移所引起的电路之动电动量 p 的变化。

副电路由 ABC 变成了 A′B′C′，因此由第 597 节可得

p=(A′B′C)-p(ABC)=p(AA′BB′)。(13)

因此我们必须确定平行四边形 AA′B′B 上的 p 值。如果这个平行四边形足够小，以致我们可以忽略磁感的方向和量值在它的平面的不同各点上的变化，则由第 591 节可知，p 的值是■cosη．AA′B′B，式中■是磁感，而η是它和平行四边形 AA′B′B 的正向法线之间的夹角。

我们可以用一个平行六面体的体积来几何地表示上述结果；该平行六面体的底是平行四边形 AA′B′B，而它的一个棱是在方向和量值上都代表磁感■的一个线段 AM。如果平行四边形位于纸面上，而 AM 的方向由纸面向上，或者说得更普遍些，如果电路 AB 的方向、磁感 AM 的方向和位移 AA′的方向当按循环次序来看时形成一个右手系，则平行六面体的体积取作正值。

这个平行六面体的体积就代表由于滑动部分从 AB 到 A′B′的位移而引起的副电路之 P 值的增量。

作用在滑动部分上的电动势

595．]由第 597 节可知，滑动部分的运动在副电路中引起的电动势是

$$E=-\frac{dp}{dt}\quad(14)$$

如果我们假设 AA′是单位时间内的位移，则 AA′将代表速度，而平行六面体将代表 $\frac{dp}{dt}$，从而由方程（14）可知它就代表沿负方向BA的电动势。

由此可见，由于滑动部分 AB 在磁场中的运动而引起的作用在该部分上的电动势，用其各棱在方向和量值上代表速度、磁感和滑动部分本身的一个平行六面体的体积来表示，而且当这三个方向具有右手循环的次序时电动势为正。

作用在滑动部分上的电磁力

596．]设 i_2 代表副电路中沿正方向 ABC 的电流，则当 AB 从位置 AB 滑到位置 A′B′上时电磁力对它作的功是(M′-M)$i_i i_2$，此处 M 和 M′是 AB 的初位置和末位置上的 M_{12} 值。但是(M′-M)i_1 等于 p′-p，而且是用以 AB、AM 和 AA′为棱画出的平行六面体的体积来表示的。因此，如果我们用一条平行于 AB 的线来表示 AB.i_2，则这条线和磁感 AM 以及位移 AA′所包含的平行六面体将表示在这一位移时间内所作的功。对于一个给定大小的位移来说，当位移垂直于以 AB 和 AM 为边的平行四边形时功为最大。因此电磁力就用以 AB 和 AM 为边的平行四边形的面积乘以 i_2 来表示，而其方向沿着

这一平行四边形的法线，该法线画得使 AB、AM 和法线成右手循环的次序。磁感线的四种定义

597．]如果滑动部分的运动方向 AA′和磁感的方向 AM 相重合，滑动部分的运动就不会引起电动势，而如果 AB 载有一个电流，它也不会有沿 AA′而滑动的趋势。再者，如果滑动部分 AB 的方向和磁感的方向 AM 相重合，则 AB 的任何运动都不会引起电动势，而且 AB 中的一个电流也不会使 AB 受到机械力的作用。

因此我们就可以用四种不同的方式来定义磁感线。(1)如果一个导体平行于自身而沿着磁感线运动，该导体就不会受到电动势的作用。

(2)如果一个载流导体可以沿着一条磁感线而自由运动，则该导体不会有如此运动的倾向。

(3)如果一个线性导体在方向上和一条磁感线相重合，而且被迫使平行于自身而沿任一方向运动，则该导体不会受到沿其长度方向的电动势的作用。

(4)如果一个载有电流的线性导体在方向上和一条磁感线相重合，则该导体不会受到任何机械力的作用。电动强度的普遍方程

598．]我们已经看到，作用在副电路上的由感应引起的电动势 E 等于 $-\frac{dp}{dt}$，此处

$$p=\int(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds})ds \qquad (1)$$

为了确定 E，让我们对 t 求被积函数的导数；这时要记得，如果副电路是运动的，则 x、y、z 是时间的函数。我们得到

$$\begin{aligned}E=&-\int(\frac{dF}{dt}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dt}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dt}\frac{dz}{ds})ds\\&-(\frac{dF}{ds}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dx}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dx}\frac{dz}{ds})\frac{dx}{dt}ds\\&-\int(\frac{dF}{dy}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dy}\frac{dz}{ds})\frac{dy}{dt}ds\\&-\int(\frac{dF}{dz}\frac{dx}{ds}+\frac{dG}{dz}\frac{dy}{ds}+\frac{dH}{dz}\frac{dz}{ds})\frac{dz}{dt}ds\\&-\int(F\frac{d^2x}{dsdt}+G\frac{d^2y}{dsdt}+H\frac{d^2z}{dsdt})ds \qquad (2)\end{aligned}$$

现在考虑第二行中的积分并按照第591节中的方程组（A）把 $\frac{dG}{dx}$ 和 $\frac{dH}{dx}$ 的值代入此式。于是这一行就变成

$$-\int(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{ds})\frac{dx}{dt}ds,$$

此式也可以写成

$$-\int(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}+\frac{dF}{ds})\frac{dx}{dt}ds$$

用同样办法处理第三行和第四行并计算含 $\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}$ 和 $\frac{dz}{ds}$ 的各项；这时

要记得

$$\int(\frac{dF}{ds}\frac{dx}{dt}+F\frac{d^2x}{dsdt})ds=F\frac{dx}{dt}, \qquad (3)$$

从而当沿闭合曲线计算时积分为零，于是即得

$$E=\int(c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt})\frac{dx}{ds}ds$$
$$+\int a\frac{dz}{dt}-c\frac{dx}{dt}-\frac{dG}{dt})\frac{dy}{ds}ds$$
$$+\int(b\frac{dx}{dt}-\frac{dy}{dt}-\frac{dH}{dt})\frac{dz}{ds}ds \qquad (4)$$

我们可以把这一表示式写成下列形式：

$$E=\int(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds})ds, \qquad (5)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}P&=c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx},\\ Q&=a\frac{dz}{dt}-c\frac{dx}{dt}-\frac{dG}{dt}-\frac{d\Psi}{dy},\\ R&=b\frac{dx}{dt}-a\frac{dy}{dt}-\frac{dH}{dt}-\frac{d\Psi}{dz},\end{aligned}\right\} \quad \text{电动强度方程组（B）}$$

引入含新量ψ的各项是为了使 P、Q、R 的表示式具有普遍性。当沿闭合曲线求积分时，这些项将不出现。因此，从我们现在所面对的问题来看，量ψ是中间性的，因为现在的问题正是要确定沿电路的电动势。然而我们即将发现，我们可以给ψ指定一个确定的值，而且它在一种确定的定义下代表(x，y，z)点的电势。方程(5)中积分号下的表示式代表作用在电路元 ds 上的电动强度。

如果我们用 T．，来代表 P、Q、R 的合矢量的数值，并用∈来代表这一合矢量的方向和 ds 的方向之间的夹角，我们就可以把方程(5)写成

$$E=\int T\text{．■}\cos\in ds \ (6)$$

矢量■就是运动电路元 ds 上的电动强度。它的方向和量值依赖于 ds 的位置和运动，也依赖于磁场的变化，但并不依赖于 ds 的方向。因此我们现在就可以不必考虑 ds 形成电路之一部分的这一事实,而只把它看成一个运动物体上受到电动强度■作用的一部分。电动强度早在第 68 节中已经定义过了。它也被称为合电场强度，也就是位于该点上的一个单位正电荷所将受到的力。现在我们已经在磁场中的运动物体的事例中求得了由一个变化的电体系所引起的这个量的最普遍的值。

如果物体是一个导体，则电动势将产生一个电流；如果物体是一个电介体，则电动势将只产生电位移。

电动强度，或者说作用在一个粒子上的力，必须和作用在一个曲线弧上的电动势仔细地区分开来；后一个量是前一个量的线积分。请参阅第 69 节。

599．]其分量由方程组(B)来定义的电动强度依赖于三种情况。其中第一种就是粒子在磁场中的运动。依赖于这种运动的那一部分力由每一方程

右端的前两项来表示。它依赖于粒子扫过磁感线的速度。如果■是一个表示着速度的矢量，而■是另一个表示着磁感的矢量，那么，如果■$_1$是依赖于运动的那一部分电动强度，就有

■$_1$=V．■■,(7)

或者说，这一部分电动强度就等于磁感和速度之乘积的矢量部分；这就是说，电动强度的量值用以速度和磁感二矢量为边的平行四边形的面积来表示，其方向沿这一平行四边形的法线，而法线的画法要使速度、磁感和电动强度成右手循环的次序。

方程组(B)中每一方程的第三项依赖于磁场的时间变化率。这可以起源于原电路中电流的时间变化率，也可以起源于原电路的运动。设■$_2$是依赖于这些项的那一部分电动强度。它的分量是

$$-\frac{dF}{dt},-\frac{dG}{dt}\text{和}-\frac{dH}{dt},$$

而这些就是矢量 $-\frac{d■}{dt}$ 或 -■的分量。由此可见

■$_2$=-■(8)

方程组(B)中每一方程的最后一项是由函数ψ在场的不同部分中的变化引起的。我们可以把由这种原因引起的这个第三部分电动强度写成

■$_3$=-■Ψ(9)

因此，由方程组(B)定义的电动强度就可以写成四元数的形式如下

$$■=V．■■-■-\nabla\Psi \qquad (10)$$

当所参照的座标系是在空间中运
动的时对电动强度方程组的修订

600．]设x'、y'、z'是相对于一个在空间中运动着的直角座标系而言的一点的座标，并设x、y、z是相对于固定座标系而言的同一点的座标。

设运动系的原点相对于固定系的速度的分量是u、v、ω，而其角速度分量是ω_1、ω_2、ω_3，而且让我们选择各固定座标轴使他们在给定的时刻和各运动座标轴相重合，于是在两个座标轴中有所不同的量将只是那些对时间求了导数的量。如果 $\frac{\sigma x}{\sigma y}$ 代表和运动座标系刚性连接着的点的分速度，而 $\frac{dx}{dt}$ 和 $\frac{dx'}{dt}$ 代表任何一个具有相同瞬时位置的点分别相对于固定座标系和运动座标系的分速度，则有[①]

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\sigma x}{\sigma t}+\frac{dx'}{dt}, \qquad (1)$$

其他分速的方程与此相似。

由一个固定形状的物体的运动理论可知，

[①] 此处引用了伽利略座标变换。——译者

$$\left.\begin{aligned}\frac{\sigma x}{\sigma t}=u+\omega_2 z-\omega_3 y,\\ \frac{\sigma y}{\sigma t}=v+\omega_3 x-\omega_1 z,\\ \frac{\sigma z}{\sigma t}=w+\omega_1 y-\omega_2 x\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

既然F是一个有向量的平行于x轴的分量，如果$\frac{dF'}{dt}$是$\frac{dF}{dt}$相对于运动座标系而言的值，则可以证明

$$\frac{dF}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{\sigma x}{dt}+\frac{df}{dy}\frac{\sigma y}{\sigma t}+\frac{dF}{dz}\frac{\sigma z}{\sigma t}+G\omega_3-H\omega_2+\frac{dF}{dt}\qquad(3)$$

把由方程组（A）导出的$\frac{dF}{dy}$和$\frac{dF}{dz}$的值代入此式中，并记得由（2）应有

$$\frac{d}{dx}\frac{\sigma x}{dt}=0,\frac{d}{dx}\frac{\sigma y}{\sigma t}=\omega_3,\frac{d}{dx}\frac{\sigma z}{\sigma t}=-\omega_2,\qquad(4)$$

我们得到

$$\frac{dF'}{dt}=\frac{dF}{dx}\frac{\sigma x}{\sigma t}+F\frac{d}{dx}\frac{\sigma x}{\sigma t}+\frac{dG}{dx}\frac{\sigma y}{\sigma t}+\frac{d}{dx}\frac{\sigma y}{\sigma t}+\frac{dH}{dx}\frac{\sigma z}{\sigma t}+H\frac{d}{dx}\frac{\sigma z}{\sigma t}$$

$$-c\frac{\sigma y}{\sigma t}+b\frac{\sigma z}{dt}+\frac{dF}{dt}\qquad(5)$$

如果我们现在令

$$-\Psi'=F\frac{\sigma x}{\sigma t}+G\frac{dy}{\sigma t}+H\frac{\sigma z}{\sigma t},\qquad(6)$$

就有

$$\frac{dF'}{dt}=-\frac{d\Psi'}{dx}-c\frac{\sigma y}{\sigma t}+b\frac{\sigma z}{\sigma t}+\frac{dF}{dt}\qquad(7)$$

由(B)可知，相对于固定座标系来说，电动强度平行于 x 轴的分量 P 的方程是

$$P=c\frac{dy}{dt}-b\frac{dz}{dt}-\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx},\qquad(8)$$

把相对于运动座标系而言的各量的值代入此式，我们就得到相对于运动座标系而言的P′的方程如下：

$$P'=c\frac{dy'}{dt}-b\frac{dz'}{dt}-\frac{dF'}{dt}-\frac{d(\Psi+\Psi')}{dx}\qquad(9)$$

601．]由这一方程看来，不论导体的运动是相对于固定座标系还是相对于运动座标系而言的，电动强度都是用同一种型式的公式来表示的，唯一的不同就是在运动座标系的事例中必须把电势ψ换成ψ+ψ′。

在电流是出现在一个导体电路中的一切事例中，电动势都是沿电路计算的线积分，

$$E=\int(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds})ds,\qquad(10)$$

ψ的值并不出现在这一积分中，从而ψ′的引入对积分值毫无影响。因此，在涉及闭合电路及电路中的电流的一切现象中，我们所用的座标系是固定

的还是运动的就全都无所谓了。请参阅第 668 节。

关于作用在一个通过磁场的载流导体上的电磁力

602．]我们在第 583 节的普遍探索中已经看到，如果 x_1 是确定着副电路之位置及形状的变量之一，而 X_1 是作用在副电路上而倾向于增大这一变量的力，则有

$$X_1=\frac{dM}{dx_1}i_1i_2 \qquad (1)$$

既然 i_1 是和 x_1 无关的，我们就可以写出

$$Mi_1=p=\int(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds})ds, \qquad (2)$$

于是关于 X_1 的值我们就有

$$X_1=i_2\frac{d}{dx_1}\int(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds})ds \qquad (3)$$

现在让我们假设，位移就是使电路上的每一点沿 x 方向移动一个距离 δx，此处 δx 可以是 s 的任意连续函数，从而电路的不同部分是互相独立地运动的，而电路则保持为连续的和闭合的。

另外，设 X 是沿 x 方向作用在从 s=0 到 s=s 的电路部分上的总力，则和电路元 ds 相对应的那一部分力将是 $\frac{dX}{ds}ds$。于是我们就将得到力在位移过程中所作的功的下列表示式：

$$\int\frac{dX}{ds}\sigma x ds=i_2\int\frac{d}{d\sigma x}(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds})\sigma x ds, \qquad (4)$$

式中的积分是沿着闭合曲线计算的，此时要记得 δx 是 s 的一个任意函数。因此我们可以按照第 598 节中对 t 微分的同样方式来完成对 δx 的微分，这时要记得。

$$\frac{dx}{d\sigma x}=1,\frac{dy}{d\sigma x}=0,\text{而}\frac{dz}{d\sigma x}=0 \qquad (5)$$

于是我们就得到

$$\int\frac{dX}{ds}\sigma x ds=i_2\int(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds})\sigma x ds+i_2\int\frac{d}{ds}(F\sigma x)ds \qquad (6)$$

当积分沿闭合曲线计算时，最后一项就变为零，而既然方程必须对一切形式的函数 δx 都成立，我们就必须有

$$\frac{dX}{ds}=i_2(c\frac{dy}{ds}-b\frac{dz}{ds}), \qquad (7)$$

这个方程就给出作用在任一单位电路元上的平行于 x 方向的力，平行于 y 轴的和平行于 z 轴的力是

$$\frac{dY}{ds}=i_2(a\frac{dz}{ds}-c\frac{dx}{ds}), \qquad (8)$$

$$\frac{dZ}{ds}=i_2(b\frac{dx}{ds}-a\frac{dy}{ds}) \qquad (9)$$

作用在电路元上的合力在方向上和量值上由四元数表示式 $i_2V.d\rho$ ■

来给出，式中 i_2 是电流的量值，dρ和■是表示着电路元和磁感的两个矢量，而乘积是按哈密顿意义来理解的。

603．]如果导线不应该被看成一条线而应该被看成一个体，我们就必须用一些表示着单位体积的力和单位面积的电流的符号来把作用于在线段元上的力表示出来。

现在令 X、Y、Z 代表按单位体积来计算的分力，并令 u、v、ω代表按单位面积来计算的电流的分量。于是，如果 S 代表我们将假设为很小的导体截面，则电路元ds的体积将是Sds，而$u=\frac{i_2}{S}\frac{dx}{ds}$。由此可见方程(7)将变成

$$\frac{XSds}{ds}=S(vc-wb), \qquad (10)$$

或作

同理

$$\left.\begin{aligned} X&=vc-wb,\\ Y&=wa-uc,\\ Z&=ub-va \end{aligned}\right\}\text{（电磁力方程组）}\quad (C)$$

在这里，X、Y、Z 是作用在导体的一个体积元上的电磁力的分量除以该体积元的体积；u、v、ω是针对单位面积来计算的通过体积元的电流的分量，而 a、b、c 是也针对单位面积来计算的该体积元处的磁感分量。

如果矢量$\Im$在量值和方向上表示作用在导体的单位体积上的力，而■表示通过它的电流，则有

$\Im$=V. ■■(11)

[第 598 节中的方程组(B)可以用下列方法证明，此法导源于麦克斯韦教授的<电磁场的一种动力学理论>一文，见 Phil. Trans.1865，pp. 459—512。

-p 的时间变化率可以分成两部分，一部分依赖于电路的运动而另一部分则不依赖于导体的运动。后一部分显然是

$$-\int\left(\frac{dF}{dt}dx+\frac{dG}{dt}dy+\frac{dH}{dt}dz\right)$$

为了求出前一部分，让我们考虑形成电路之一部分的一个弧δs；让我们设想这个弧是以分量为 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 的速度v而沿着导轨运动的，导轨可以被认为是平行的，这时电路的其余部分被假设为保持静止。于是我们可以假设运动弧生成一个小的平行四边形，其法线的方向余弦是

$$\lambda,\mu,\nu=\frac{n\dot{y}-m\dot{z}}{v\sin\theta},\frac{l\dot{z}-n\dot{x}}{v\sin\theta},\frac{m\dot{x}-l\dot{y}}{v\sin\theta}$$

式中 l、m、n 是δs 的方向余弦，而θ是 v 和δs 之间的夹角。

为了验证λ、μ、ν的符号，我们可以取$m=-1$而$\dot{x}=v$；这时它们就变成 0、0、-1，正如在一个右手座标系中所应该出现的那样。

现在设 a、b、c 是磁感的分量，于是由于δs 在时间δt 中的运动，我们就有

δp=(aλ+bμ+cv)vδtδssinθ。

如果我们假设电路的每一部分都以类似的方式而运动，则总的效果将是整个导体的运动，而导轨中的电流在两个相邻弧的每一事例中都互相抵消。因此，由电路的运动所引起的-p 的时间变化率就是

$$-\int\{a(n\dot{y}-m\dot{z})+\text{两个类似的项}\}ds。$$

沿电路求积分，即得

$$=\int(c\dot{y}-b\dot{z})dx+\text{两个类似的积分。}$$

第 602 节中关于电磁力分量的结果，可以从上面的δP 的表示式中推导出来；就是说，令弧δs 沿方向 l′、m′、n′运动一个距离δs′，就有

δP={l′(cm-bn)+两个类似的项}δsδs′。

现在设 X 是作用在弧 s 上的力的 x 分量，则对单位电流来说，我们由第 596 节即得

$$\frac{dX}{ds}=\frac{dp}{dx}$$

$$=cm-bn]$$

{电磁场方程组

如果假设电流永远是沿着闭合电路运行的，我们就可以不必引入矢势而导出一些方程，而这些方程将确定电磁场的状态。

因为，设 i 是任意一条我们将假设它为静止的电路中的电流强度。由这一电流引起的动电能量 T 是

$$i\iint(la+mb+nc)dS,$$

式中 dS 是以电路为边界的一个曲面上的面积元。

由此可见，电路中倾向于增大i的总电动势即 $-\frac{d}{dt}\frac{dT}{di}$ 就等于

$$-\iint(l\frac{da}{dt}+m\frac{db}{dt}+n\frac{dc}{dt})dS;$$

因此，如果 X、Y、Z 是电动强度的分量，就有

$$(1)\int(Xdx+Ydy+Zdz)=-\iint(l\frac{da}{dt}+m\frac{db}{dt}+n\frac{dc}{dt})dS;\quad(1)$$

但是由斯托克斯定理，此式左端等于

$$\iint\{l(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz})+m(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx})+n(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy})\}dS$$

使这一积分和方程(1)的右端相等，既然包围电流的曲面是完全任意的，我们就得到

$$\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}=-\frac{da}{dt},$$
$$\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}=-\frac{db}{dt},$$
$$\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}=-\frac{dc}{dt}$$

这些方程，以及在比电阻为σ的导体中的各关系式

$$4\pi\mu=-\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz},$$
$$r\pi v=\frac{da}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},$$
$$4\pi\omega=\frac{d\beta}{dx}-\frac{da}{dy},$$
$$\mu=\frac{X}{\sigma},v=\frac{Y}{\sigma},\omega=\frac{Z}{\sigma}$$

或在比感本领为 K 的绝缘体中的各关系式

$$\mu=\frac{K}{4\pi}\frac{dX}{dt},v=\frac{K}{4\pi}\frac{dY}{dt},\omega=\frac{K}{4\pi}\frac{dZ}{dt}$$

一起，就足以确定电磁场的状态了。任一曲面上的边界条件是，垂直于曲面的磁感应该连续，而平行于曲面的磁力也应该连续。

这种研究电磁场的方法的一种优点就在于它的简单性。这种方法曾受到亥维赛先生的大力支持。然而它却不像正文中的方法那样普遍，因为正文中的方法即使在电流并不是永远在闭合电路中运行时也能适用。}

第九章

电磁场的普遍方程组

604．]在我们关于电动力学的理论讨论中，我们是从一条假设开始的，那就是，一组载流电路形成一个动力学体系，体系中的电流可以看成一些速度，而和这些速度相对应的各个座标本身并不出现在方程中。由这一假设可以推知，体系的动能就其对电流的关系来看是各电流的一个二次齐次函数，其中的各个系数只依赖于各电路的形状和相对位置。假设了这些系数已由实验或其他方法求出，我们用纯动力学的推理导出了电流的感应定律，以及电磁吸引力的定律。在这种探讨中，我们引用了一个电流组的动电能量的概念、一个电路的电磁动量的概念以及两个电路的相互势的概念。

然后我们就着手借助于副电路的各种位形来勘查了场，并从而被引导到了一个在场中任一点上都有确定的量值和方向的矢量■的概念。我们把这个矢量叫做该点的电磁动量。这个量可以看成一个电动强度的时间积分，而如果把所有的电流突然从场中撤走，那就会在该点上引起这个电动强度。这个量是和在第 405 节中已经作为磁感之矢势而研究过的那个量相等同的。它的平行于 x、y、z 的分量是 F、G、H。一个回路的电磁动量就是■在回路上的线积分。

然后我们就利用第 24 节中的定理回来把■的线积分变换成了另一个矢量■的面积分；这个矢量的分量是 a、b、c，而且我们发现，由导体的运动而引起的感应现象以及电磁力的现象都可以用■表示出来。我们把■命名为磁感，因为它的性质和法拉第所研究过的磁感线的性质相等同。

我们也建立了三组方程。第一组(A)是磁感方程组，把磁感用电磁动量表示了出来。第二组(B)是电动强度方程组，把电动强度用导体扫过磁感线的运动和电磁动量的变化率表示了出来。第三组(C)是电磁力方程组，把电磁力用电流和磁感表示了出来。在所有这些事例中，电流都应该被理解为实际的电流，即不仅包括传导电流而且包括电位移的变化。

磁感■就是我们在第 400 节中已经考虑过的那个量。在一个未磁化的物体中，它和作用在一个单位磁极上的力相等同，但是如果物体是永久性地被磁化或是通过感应而被磁化了的，它就将是作用在一个位于物体中的扁平空腔中单位磁极上的力，空腔的平面垂直于磁化的方向。■的分量是 a、b、c。

由定义了 a、b、c 的方程组(A)可以推得

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0$$

这在第 403 节中已经证明正是磁感的一种性质。

605．]不同于磁感，我们曾经把一个磁体内部的磁力定义为作用在在一个位于细长空腔中的单位磁极上的力，该空腔的长轴平行于磁化的方向。这个量用■来代表，它的分量用 a、β、γ，来代表。请参阅第 398 节。

如果ℑ是磁化强度，而 A、B、C 是它的分量，则由第 400 节得到

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha + 4\pi A, \\ b &= \beta + 4\pi B, \\ c &= \gamma + 4\pi C, \end{aligned}\right\} \text{（磁化方程组）（D）}$$

我们可以把这些方程叫做磁化方程组，而且他们表明，在电磁单位制中，看成一个矢量的磁感■是两个矢量在哈密顿意义下的和，那两个矢量就是磁力■和乘以 4π 的磁化$\mathfrak{I}$，或者说，

■=■+4π$\mathfrak{I}$

在某些物质中，磁化依赖于磁力，而且这是用在第 426 节和第 435 节中给出的感生磁性的方程组表示了的。

606．]研究到这个地方，我们已经根据纯动力学的考虑导出了一切结果而根本没有提及电和磁方面的定量实验。我们所曾用到的实验知识，仅在于承认了一些由理论推出的抽象的量就是一些由实验发现了的具体的量，并且用了一些名词来代表他们，这些名词指示着各该量的物理关系而不是它们的数学起源。

利用这种办法，我们曾经指出了电磁动量■作为一个在空间中从一部分到另一部分而变化着的矢量的存在，而且由此出发，我们曾经通过数学的手续而推得了作为一个导出矢量的磁感■。然而我们并不曾用到关于由场中的电流分布来确定■或■的任何资料。为此目的，我们必须找出这些量和电流的数学联系。

我们从承认永久磁体的存在开始，各该磁体的相互作用满足能量守恒原理。除了服从这一原理，即认为作用在一个磁极上的力必须可以从一个势函数导出以外，我们在磁力定律方面并不提出任何假设。

然后我们就观察电流和磁体之间的作用，而且我们发现，一个电流对一个磁体的作用方式和另一个磁体对那个磁体的作用方式在表观上相同，如果这另一个磁体的强度、形状和位置都调节得适当的话；而且我们也发现，磁体对电流的作用方式也和另一个电流对该电流的作用方式相同。这些观察不一定被假设为是和力的实际测量相伴随的。因此他们不应该被看成是提供着数值资料的，他们只不过在给我们提出供考虑的问题方面是有用的而已。

这些观察所提出的问题是，在许多方面和由磁体产生的磁场相似的由电流产生的磁场，是不是在和势的关系方面也和前一种磁场相似？

一个载流电路在它周围的空间中产生一些磁效应，他们和由一个以电路为边界的磁壳所产生的磁效应确切相同；这一事实的证据已经在第 482—485 节中叙述过了。

我们知道在磁壳的事例中是存在一个势的；这个势在磁壳物质之外的一切点上都有确定的值，但是它在磁壳两侧的两个邻近点上的值却相差一个有限的量。

如果一个电流周围的磁场和一个磁壳周围的磁场相似，则作为磁力的线积分而求出的磁势对于两条积分曲线来说将相同，如果其中一条曲线可以通过不和电流相交的连续运动而转化为另一条曲线的话。

然而，如果一条积分曲线不能不和电流相交而转化为另一条积分曲线，则磁力沿一条曲线的线积分将和它沿另一条曲线的线积分相差一个依赖于电流强度的量。因此，由一个电流引起的磁势就具有一系列无限多个

彼此之间有一公共差的值，而特定的值则依赖于积分曲线的画法。在导体物质的内部，并不存在磁势之类的量。

607．]假设了一个电流的磁作用有一个这样的磁势，我们就开始来数学地表示这一假设了。

首先，如果一条闭合曲线并不包围电流，则磁力在这条闭合曲线上的线积分为零。

其次，如果电流沿正方向穿过闭合曲线一次，而且只穿过一次，则线积分有一个确定的值，而这个值就可以用来作为电流强度的一种量度。因为，如果闭合曲线按任何连续方式改变其形状而并不切割电流，则线积分将保持不变。

在电磁单位制中，磁力沿一条闭合曲线的线积分在数值上等于穿过闭合曲线的电流乘以 4π。

如果我们把其边为 dy 和 dz 的长方形取作闭合曲线，则磁力沿长方形各边的线积分是

$$\left(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz}\right)dydz,$$

而如果 u、v、ω是电流的分量，则穿过该长方形的电流是

udydz。

将此式乘以 4π并使它和线积分的结果相等,我们就得到一个方程

同理即得
$$\left.\begin{aligned}4\pi u &= \frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz},\\ 4\pi v &= \frac{da}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},\\ 4\pi 2 &= \frac{d\beta}{dx}-\frac{da}{dy},\end{aligned}\right\}\text{（电流方程组）（E）}$$

当每一点上的磁力已经给定时，这一方程组就能确定电流的方向和量值。

当没有任何电流时，这些方程就和条件

adx+βdy+γdz=-DΩ

相等价，或者说，在场中没有电流的一切点上，磁力可以从一个磁势中导出。

把方程组(E)中的各式分别对 x、y 和 z 求导数并相加，我们就得到方程

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0,，$$

此式就表明，分量为 u、v、w 的电流服从一种不可压缩的液体的运动条件，而且它必然是沿着闭合的路线在流动的。

这—方程，只有当我们把 u、v、w 看成那种既由真正的导电又由电位移的变化所引起的电的流动的分量时才是正确的。

关于由电介质中电位移的变化所引起的电流的电磁作用，我们掌握的实险证据非常少，但是把电磁定律和非闭合电流的存在互相协调起来的极大困难，就是我们之所以必须承认由电位移的变化所引起的瞬变电流存在的许多原因之一。这些电流的重要性，当我们考虑到光的电磁理论时就会

被看出。

608.〕我们现在已经确定了和奥斯特、安培及法拉第所发现的那些现象有关的各主要量之间的关系。为了把这些量和在本论著的前几编中描述了的现象联系起来，还需要另外一些关系式。

当电动强度作用在一个物质体上时，它就在物质体中产生两种电效应，而法拉第称这两种效应为“感应”和“传导”；第一种效应在电介体中最为突出，而第二种效应在导体中最为突出。

在本书中，静电感应是用我们称之为电位移的那个量来量度的。这是一个有向量或矢量，我们曾经用■来代表它，并用 f、g、h 来代表它的分量。

在各向同性的物质中，电位移和产生它的电动强度同向，并和电动强度成正比，至少当电动强度的值很小时是如此。这一事实可以用一个方程表示出来，即

$$■ = \frac{1}{4\pi}K■,\text{（电位移方程）}\quad\text{(F)}$$

式中 K 是物质的介电本领。请参阅第 68 节。

在并非各向同性的物质中，电位移■的分量 f、g、h 是电动强度■的分量 P、Q、R 的线性函数。

电位移方程组的形式和在第 289 节中给出的电传导方程组的形式相仿。

这些关系可以用下述说法来表达：K 在各向同性的物体中是一个标量，但在别的物体中却是一个作用在矢量■上的线性矢量函数。

609.〕电动强度的另一种效应就是传导。作为电动强度之结果的电传导定律是由欧姆建立的，而且是在本书第二编的第 241 节中已经解释过的。这些定律总结为一个方程

■=C■，（电传导方程)(G)

式中■是一点上的电动强度，■是传导电流的密度，其分量为 p、q、r，而 C 是物质的电导率；在各向同性物质的事例中 C 是一个简单的标量，但在其他物质中却变成一个作用在矢量■上的线性矢量函数。这个函数的形式已在第 298 节中在笛卡尔座标下给出。

610.〕本论著的主要特点之一就在于一个学说，它主张电磁现象所依赖的真实电流■和传导电流■并不相同，而是在估计总的电荷运动时必须把电位移■的时间变化率考虑在内，因此我们必须写出

$$■ = ■ + \dot{■}\text{，（真实电流方程）}\quad\text{(H)}$$

或者，用分量表示出来，就是

$$\left.\begin{aligned} u &= p + \frac{df}{dt}, \\ v &= q + \frac{dg}{dt}, \\ w &= r + \frac{dh}{dt} \end{aligned}\right\}\quad\text{(H*)}$$

611.〕既然■和■都依赖于电动强度■，我们就可以把真实电流■用电动强度表示出来，于是就有

$$■=(C+\frac{1}{4\pi}K\frac{d'}{dt})■ \qquad (I)$$

或者，在 C 和 K 为常量的事例中就有

$$\left.\begin{aligned} u&=CP+\frac{1}{4\pi}K\frac{dP}{dt},\\ v&=CQ+\frac{1}{4\pi}K\frac{dQ}{dt},\\ w&=CR+\frac{1}{4\pi}K\frac{dR}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (I^*)$$

612.〕任意一点上的自由电荷的体密度可以通过方程

$$\rho=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz} \qquad (J)$$

而由电位移的分量求得。

613.〕电荷的面密度是

$\sigma=lf+mg+nh+l'f'+m'g'+n'h'$,(K)

式中 l、m、n 是从曲面指向电位移分量为 f、g、h 的那种媒质的法线的方向余弦，而 l'、m'、n'是从曲面指向电位移分量为 f'、g'、h'的那种媒质的法线的方向余弦。

614.〕当媒质的磁化完全是由作用在它上面的磁力所感生的时，我们就可以写出感生磁化方程

■=μ■(L)

式中μ是磁导系数，它可以被看成一个标量或一个作用在■上的线性矢量函数，随媒质是否各向同性而定。

615.〕这些关系式可以看成我们所曾考虑过的各量之间的主要关系式。他们可以互相联立，以消去其中某些量，但是我们目前的目的不在于获得数学公式的紧凑性而在于表示我们对之有所知的每一种关系。消去一个表示着有用概念的量，在我们目前的探索阶段上将不是一种收获而是一种损失。

然而却有一种结果，是我们可以通过把方程组(A)和(E)结合起来而求得的，而且是具有很大重要性的。

如果我们假设，除了在载流电路的形式下以外场中没有其他的磁体，则我们一直保留了的磁力和磁感之间的区别将不复存在，因为只有在磁化了的物质中这些量才是彼此不同的。

按照即将在第 833 节中加以阐释的安培的假说，我们所说的磁化物质的性质是由分子性的电路引起的，因此只有当我们考虑大块的物质时，我们的关于磁化的理论才是适用的，而如果我们的数学方法被假设为能够把发生在个体分子中的过程照顾在内，则这些方法将只会看到电路而看不到任何别的东西，从而我们就将发现磁力和磁感是互相等同的。然而，为了能够随心所欲地应用静电单位制或电磁单位制，我们将保留系数μ，并记住它在电磁单位制中的值是 1。

616.〕由第 591 节的方程组(A)，磁感的分量是

$$a=\frac{dH}{dy}-\frac{dD}{dz},$$
$$b=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx},$$
$$c=\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}$$

由第 607 节的方程组(E)，电流的分量由下列方程组给出：

$$\left.\begin{aligned}4\pi u&=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz},\\4\pi v&=\frac{da}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},\\4\pi w&=\frac{d\beta}{dx}-\frac{da}{dy}\end{aligned}\right\}$$

按照我们的假说，a、b、c 是分别和μα、μβ、μγ相等同的。因此我们就得到{当μ为常数时}，

$$4\pi\mu u-\frac{d^2G}{dxdy}-\frac{d^2F}{dy^2}-\frac{d^2F}{dz^2}+\frac{d^2H}{dzdx} \qquad (1)$$

如果我们写出

$$J=\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}, \qquad (2)$$

并写出[①]

$$\nabla^2=-\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right), \qquad (3)$$

我们就可以把方程(1)写成

$$\left.\begin{aligned}4\pi\mu u&=\frac{dJ}{dx}+\nabla^2F,\\\text{同理},4\pi\mu v&=\frac{dJ}{dy}+\nabla^2G,\\4\pi\mu w&=\frac{dJ}{dz}+\nabla^2H,\end{aligned}\right\}(4)$$

如果我们写出

$$\left.\begin{aligned}F'&=\mu\iiint\frac{u}{r}dxdydz,\\G'&=\mu\iiint\frac{v}{r}dxdydz,\\H'&=\mu\iiint\frac{w}{r}dxdydz,\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

就有

$$X=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{J}{r}dxdydz, \qquad (6)$$

[①] 此处应用了负号，为的是使我们的表示式和应用四元数的表示式相一致。

式中γ是从体积元(x、y、z、)到所给点的距离，而积分是遍及于全部空间的。于是即得

$$F = F' - \frac{dX}{dx},$$

$$G = G' - \frac{dX}{dy},$$

$$H = H' - \frac{dX}{dz} \quad (7)$$

量X从方程组(A)中消失了，从而它是和任何物理现象都没有联系的。如果我们假设它到处等于零，J就将也到处等于零。略去方程组(5)中各量上的撇号，该方程组就将给出■的各分量的真实值。

617.〕因此，作为■的一种定义，我们可以把它看成电流的矢势，它和电流之间的关系类似于标势和引起标势的物质之间的关系，而且也是用一个类似的积分手续求得的。这个积分手续可以描述如下：

设从一个给定点开始画一个在量值和方向上表示着一个给定的电流元除以电流元到该给定点的距离的数值。设针对每一电流元都画了这样的矢量。这样得到的所有各矢量的合矢量就是全部电流的矢势。既然电流是一个矢量性的量，它的势也是一个矢量。请参阅第422节。

当电流的分布已经给定时，就存在一种、而且只存在一种■值的分布，使得■到处都为有限的和连续的，并满足方程

Δ2■=4πμ■，S．Δ■=0,

而且在离电体系为无限远处变为零。这个值就是由方程(5)所给出的那个值，该方程可以写成四元数的形式，

$$■ = \mu \iiint \frac{■}{r} dxdydz$$

各电磁方程的四元数表示式

618.〕在本论著中，我们曾经努力避免了任何要求读者具有四元数计算知识的推理过程。与此同时，当必要时，我们曾经毫不迟疑地引用了矢量概念。当我们有机会用一个符号来代表一个矢量时，我们曾经用了德文字母，因为不同矢量的数目是如此之大，以致哈密顿所喜爱的符号很快就会不够用了。因此，每当用了一个德文字母时，它就代表一个哈密顿式的矢量，它既表示矢量的量值又表示矢量的方向。矢量的分量用罗马字母或希腊字母来表示。

我们必须考虑的主要矢量是：

	（矢量符号　分量）
一个点的矢径	pxyz
一个点上的电磁动量	■FGH
磁感	■abc
（全）电流	■uvw
电位移	■fgh
电动强度	■PQR
机械力	■XYZ

一个点的速度 ■或 $\dot{p}\ \dot{x}\ \dot{y}\ \dot{z}$

磁力 .... ■ α β γ

磁化强度 .... ■ABC

传导电流 .... ■pqr

我们也有下列的标量函数：

电势Ψ。

磁势（在它存在之处）Ω。

电荷密度 e。

磁“质”密度 m。

除此以外，我们还有指示着每一点上的媒质性质的下列各量：

C．电流的传导率。

K，介电感应本领。

μ，磁感应本领。

这些量在各向同性的媒质中是ρ的简单标量函数，但是在普遍情况下则是作用在他们被应用上去的那些矢量函数上的线性矢量算符。K 和μ肯定都是自轭的，而 C 或许也如此。

619．〕磁感方程组(A)的第一个方程是

$$a=\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz},$$

现在该方程组可以写成下列形式了：

■＝V．∇■，

式中■是算符

$$i\frac{d}{dx}+j\frac{d}{dy}+k\frac{d}{dz},$$

而 V 则表示应取这一运算结果的矢量部分。

既然■是满足条件 S．∇■=0 的，∇■就是一个纯矢量，从而符号 V 是不必要的。

电动势方程组(B)的第一个方程是

$$P=c\dot{y}-b\dot{z}-\frac{dF}{dt}-\frac{d\Psi}{dx},$$

现在该方程组变成了

■=V．■■-■-∇Ψ

机械力方程组(C)的第一个方程是[①]■

现在该方程组变成了

■＝■A＋e■－mΔΩ

磁化方程组(D)的第一个方程是

a＝a＋4πA，

现在该方程组变成了

■＝■＋4πℑ

电流方程组(E)的第一个方程是

[①] 改正归功于 G．F．斐兹杰惹教授，见 Trans.R.S.Dublin，1883.}

$$4\pi u = \frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz},$$

现在该方程组变成了

4π■＝V．∇■

由欧姆定律可知，传导电流的方程是

■=C■

电位移的方程是

$$D = \frac{1}{4\pi} K■$$

既由电传导又由电位移的变化所引起的全电流的方程是

■=■+■

当磁化起源于磁感应时，有

■=μ■

为了确定电荷的体密度，我们也有

e=S．∇■

为了确定磁的体密度，有

m=S．■■

当磁力可以由一个势导出时，有

■=-∇Ω

第九章附录

如果电磁场中包含一些具有不同磁导率的物质,则表示式(5)一般是并不准确的，因为，在那种事例中，在两个不同磁导率的分界表面上，通常会有自由磁 这就会在矢势的表示式中引起一些项,由第35页上的方程(22)来表示。如果两种媒质的磁导率是μ_1和μ_2，分界面两侧的矢势分量F_1、G_1、H_1和F_2、G_2、H_2来代表，而 l、m、n 是分界面法线的方向余弦，那么，两种媒质的分界面上的边界条件就包括两部分：第一，既然法向磁感是连续的，就有

$$l(\frac{dH_1}{dy}-\frac{dG_1}{dz})+m(\frac{dF_1}{dz}-\frac{dH_1}{dx})+n(\frac{dG_1}{dx}-\frac{dF_1}{dy})$$

$$=l(\frac{dH_2}{dy}-\frac{dG_2}{dz})+m(\frac{dF_2}{dz}-\frac{dH_2}{dx})+n(\frac{dG_2}{dx}-\frac{dF_2}{dy});$$

第二，既然沿分界面的[分]磁力是连续的，就有

$$\frac{\frac{1}{\mu_1}(\frac{dH_1}{dy}-\frac{dG_1}{dz})-\frac{1}{\mu_2}(\frac{dH_2}{dy}-\frac{dG_2}{dz})}{l}$$

$$=\frac{\frac{1}{\mu_1}(\frac{dF_1}{dz}-\frac{dH_1}{dx})-\frac{1}{\mu_2}(\frac{dF_2}{dz}-\frac{dH_2}{dx})}{m}$$

$$=\frac{\frac{1}{\mu_1}(\frac{dG_1}{dx}-\frac{dF_1}{dy})-\frac{1}{\mu_2}(\frac{dG_2}{dx}-\frac{dF_2}{dy})}{n}$$

表示式(5)通常并不满足这些边界条件。因此，最好认为 F、G、H 是由方程

$$\nabla^2F=4\pi\mu u$$

$$\nabla^2G=4\pi\mu v$$

$$\nabla^2H=4\pi\mu w$$

以及上述那些边界条件来给出的。}

{当导体是运动的时,看来假设方程组(B)中的Ψ就代表静电势是并不合理的，因为麦克斯韦在推导这些方程时舍去了一项

$$-\frac{d}{ds}(F\frac{dx}{dt}+G\frac{dy}{dt}+H\frac{dz}{dt}),$$

理由是这一项当沿着一条闭合回路求积分以后将变为零。如果我们把这一项加进去，则Ψ不再是静电势而是该势

$$F\frac{dx}{dt}+G\frac{dy}{dt}+H\frac{dz}{dt}$$

之和。

这一点对一个曾经吸引了很多注意力的问题有一种重要的应用；那就是一个在磁场中以角速度ω绕竖直轴而转动的球的问题，设磁场中的磁力是竖直的并等于 c．假设球的转动已经达到稳定状态，方程组(B)在这一事例中就变成

$$P = c\omega x - \frac{d\Psi}{dx},$$

$$Q = c\omega y - \frac{d\Psi}{dy},$$

$$R = -\frac{d\Psi}{dz}$$

既然球是一个处于稳定状态的导体，而且$\frac{P}{\sigma}$、$\frac{Q}{\sigma}$、$\frac{R}{\sigma}$是电流的分量，那就有

$$\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} = 0;$$

由此即得

$$2c\omega = \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2}$$

这一方程通常被诠释为意味着在整个球内有一种体密度为—cω/2π的电荷分布，然而只有当我们假设■是静电势时这种诠释才是合理的。

如果我们适应着导出方程组(B)的那种研究来假设φ是静电势，而

$$\Psi = \phi + F\frac{dx}{dt} + G\frac{dy}{dt} + H\frac{dz}{dt},$$

或者，在这一事例中就是

Ψ＝Φ＋ω(Gx-Fy)，

那么，既然

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}\right)(Gx - Fy) = 2\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right),$$

$$= 2c,$$

我们就看到，由于

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{d^2\Psi}{dy^2} + \frac{d^2\Psi}{dz^2} = 2c\omega,$$

故有

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2} = 0;$$

就是说，在整个球体中并不存在自由电荷的分布。

因此，在电磁场的各个方程中，并没有任何东西引导我们去假设一个转动的球体中会含有自由电荷。

用球极座标和柱座标来表示的电磁场的方程

如果 F、G、H 分别是矢势沿矢径、子午线和纬度平行线的分量，a、b、c 是磁感在这些方向上的分量，α、β、γ是磁力在这些方向上的分量，而 u、v、w 是电流在这些方向上的分量，则我们可以很容易地证明

$$a=\frac{1}{r^2\sin\theta}\{\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta H)-\frac{d}{d\phi}(rg)\},$$

$$b=\frac{1}{r\sin\theta}\{\frac{dF}{d\phi}-\frac{d}{dr}(r\sin\theta H)\},$$

$$c=\frac{1}{r}\{\frac{d}{dr}(rG)-\frac{dF}{d\theta}\};$$

$$4\pi u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\{\frac{d}{d\theta}(r\sin\theta\gamma)-\frac{d}{d\phi}(r\beta)\},$$

$$4\pi v=\frac{1}{r\sin\theta}\{\frac{da}{d\phi}-\frac{d}{dr}(r\sin\theta\gamma)\},$$

$$4\pi w=\frac{1}{r}\{\frac{d}{dr}(r\beta)-\frac{da}{d\theta}\}$$

如果 P、Q、R 是电动强度沿矢径、子午线和纬度平行线的分量，则有

$$\frac{db}{dt}=-\frac{1}{r\sin\theta}\{\frac{dP}{d\phi}-\frac{d}{r}(r\sin\theta R)\},$$

$$\frac{dc}{dt}=-\frac{1}{r}\{\frac{d}{dr}(rQ)-\frac{dP}{d\theta}\}$$

如果柱座标是ρ、θ、Z，而 F、G、H 是矢势平行于ρ、θ、Z 的分量，a、b、c 是磁感在这些方向上的分量，α、β、γ是磁力在这些方向上的分量，u、v、w 是电流在这些方向上的分量，则有

$$a=\frac{1}{\rho}\{\frac{dH}{d\theta}-\frac{d}{dz}\}(\rho G),$$

$$b=\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{d\rho},$$

$$c=\frac{1}{\rho}\{\frac{d}{d\rho}(\rho G)-\frac{dF}{d\theta}\};$$

$$4\pi u=\frac{1}{\rho}\{\frac{d\gamma}{d\theta}-\frac{d}{dz}(\rho\beta)\}.$$

$$4\pi v=\frac{da}{dz}-\frac{d\gamma}{d\rho},$$

$$4\pi\omega=-\frac{1}{\rho}\{\frac{d}{d\rho}(\rho\beta)-\frac{da}{d\theta}\}$$

如果 P、Q、R 是电动强度沿ρ、θ、Z 的分量，则有

$$\frac{da}{dt}=-\frac{1}{\rho}\{\frac{dR}{d\theta}-\frac{d}{dz}\}(\rho Q),$$

$$\frac{db}{dt}=-\{\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{d\rho}\},$$

$$\frac{dc}{dt}=-\frac{1}{\rho}\{\frac{d}{d\rho}(\rho Q)-\frac{dP}{d\theta}\}$$

第十章

电学单位的量纲

620．〕每一个电磁量都可以参照基本量长度、质量和时间的单位来加以定义。如果我们从第 65 节中所给出的那种电量的定义开始，我们就可以利用包括着某一电磁量和电量的方程来得到每一个电磁量的单位，这样得到的单位制叫做“静电单位制”。

另一方面，如果我们从第 374 节所给出的那种磁极的单位开始，我们就会得到同一套量的一种不同的单位制。这种单位制和前一种单位制并不一致，叫做“电磁单位制”。

我们将从叙述不同单位之间在两种单位制中都成立的那些关系式开始，然后我们按照每一单位制作出各单位的一个量纲表。

621．〕我们将把我们所必须考虑的主要量配成对。在前三对中，每一对中两个量的乘积都是一个能量或功。在后三对中，每一对量的乘积都是对单位体积而言的能量。

前三对

静电对

	符号
(1)电量	e
(2)电动势，或电势	E
磁对	
(3)自由磁量，或磁极强度	m
(4)磁势	Ω
动电对	
(5)一个电路的动电动量	p
(6)电流	C

后三对

静电对	
(7)电位移（用面密度来量度）	■
(8)电动强度	■
磁对	
(9)磁感	■
(10)磁力	■
动电对	
(11)一点处的电流强度	■
(12)电路的矢势	■

622．〕下述各关式在这些量之间成立。首先，既然能量的量纲是 $\left[\frac{L^2M}{T^2}\right]$，而单位体积的能量的量纲是 $\left[\frac{M}{LT^2}\right]$，我们就有以下的量纲方程：

$$[eE]=[m\Omega]=[pC]=\left[\frac{L^2M}{T^2}\right], \qquad (1)$$

$$[\blacksquare\blacksquare]=[\blacksquare\blacksquare]=[\blacksquare\blacksquare]=\left[\frac{M}{LT^2}\right] \quad (2)$$

其次，既然 e、p 和■分别是 C、E 和■的时间积分，就有

$$\left[\frac{e}{c}\right]=\left[\frac{p}{E}\right]=\left[\frac{\blacksquare}{\blacksquare}\right]=[T] \qquad (3)$$

第三，既然 E、Ω和 p 分别是■，■和■的线积分，就有

$$\left[\frac{E}{\blacksquare}\right]=\left[\frac{\Omega}{\blacksquare}\right]=\left[\frac{p}{\blacksquare}\right]=[L]^{①}(4)$$

最后，既然 e、C 和 m 分别是■、■和■的面积分，就有

$$\left[\frac{e}{\blacksquare}\right]=\left[\frac{C}{\blacksquare}\right]=\left[\frac{m}{\blacksquare}\right]=[L^2] \qquad (5)$$

623.〕这十五个方程并不是独立的，而且，为了导出所包含的十二个单位的量纲，我们还需要另一个方程。然而，如果我们把 e 或 m 看成一个独立的单位，我们就能导出其余各

①[我们也有■=[■].]

量的含有 e 或 m 的量纲。

$$(1)[e] \quad =[e] \quad =\left[\frac{L^2M}{mT}\right]$$

$$(2)[E] \quad =\left[\frac{L^2M}{eT}\right]=\left[\frac{m}{T}\right]$$

（3）和（5）$[p]=[m]=\left[\frac{L^2M}{eT}\right]=[m]$

（4）和（6）$[C]=[\Omega]=\left[\frac{e}{T}\right] \quad =\left[\frac{L^2M}{mT^2}\right]$

$$(7)[\blacksquare] \quad =\left[\frac{e}{L^2}\right] \quad =\left[\frac{M}{mT}\right]$$

$$(9)\ [\blacksquare] \quad =\left[\frac{M}{eT}\right] \quad =\left[\frac{m}{L^2}\right]$$

$$(10)[\blacksquare] \quad =\left[\frac{e}{LT}\right] \quad =\left[\frac{LM}{mT^2}\right]$$

$$(11)[\blacksquare] \quad =\left[\frac{e}{L^2T}\right] \quad =\left[\frac{M}{mT^2}\right]$$

$$(12)[\blacksquare] \quad =\left[\frac{LM}{eT}\right] \quad =\left[\frac{m}{L}\right]$$

624.〕这些量中的前十个量的关系可以利用下面的排列显示出来：

①

e，■，■，C和Ω	E，■，m，p
m和p，■，■，E	C和Ω，■，■，e

第一行中的各量通过一些运算而从 e 导出，第二行中各对应量也通过相同的运算而从 m 导出。可以看到，第一行中各量的顺序恰好和第二行中各量的顺序相反。每一行中的第四个量在分子上包含着第一个符号，而每一行中的后四个量则在分母上包含着该符号。

以上给出的所有这些关系，不论我们采用什么单位制都是正确的。

625.〕具有一定科学价值的只有静电单位制和电磁单位制。静电单位制是建筑在第 41、42 节中的电量单位的定义上的，而且是可以由下一方程导出的：

$$■=\frac{e}{L^2};$$

此式表明，一个电量 e 在距离 L 处一点上引起的合电场强度，通过将 e 除以 L^2，来求得。代入量纲方程(1)和(8)中，我们就得到

$$\left[\frac{LM}{eT^2}\right]=\left[\frac{e}{L^2}\right],\left[\frac{m}{LT}\right]=\left[\frac{M}{mT}\right],$$

由此，在静电单位制中就有

$$[e]=\left[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right],\quad m=[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}]$$

电磁单位制是建筑在第 374 节中关于磁极强度单位的一种完全相似的定义上的。这种定义导致

$$■=\frac{m}{L^2},$$

由此，在电磁单位制中就有

$$\left[\frac{e}{LT}\right]=\left[\frac{M}{eT}\right],\left[\frac{LM}{mT^2}\right]=\left[\frac{m}{L^2}\right],$$

$$[e]=\left[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}\right],[m]=\left[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right],$$

由这些结果，我们就得到其他各量的量纲。

626.〕

量纲表

	量纲		
	符号	在静电制中	在电磁制中
电量	………e	$\left[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$	$\left[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}\right]$
电动强度的线积分	……E	$\left[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$	$\left[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}\right]$

		静电制	电磁制
磁量 电路的动电动量	…… $\left\{\begin{matrix} m \\ p \end{matrix}\right\}$	$\left[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}\right]$	$\left[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$
电流 磁势	……… $\left\{\begin{matrix} C \\ \Omega \end{matrix}\right\}$	$\left[L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}\right]$	$\left[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$
电位移 面密度	……■	$\left[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$	$\left[L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}\right]$
电动强度	……■	$\left[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$	$\left[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}\right]$
磁感	………■	$\left[L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}\right]$	$\left[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$
磁力	……■	$\left[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}\right]$	$\left[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$
一点上的电流强度	…■	$\left[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-2}\right]$	$\left[L^{-\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$
矢势	……■	$\left[L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}\right]$	$\left[L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}\right]$

627.〕我们已经按照他们出现的次序考虑过这些量的配对乘积。他们的比值在某些事例中是有科学重要性的。于是就有

	符号	静电制	电磁制
$\frac{e}{E}$ = 一个集电器的电容	q	$[L]$	$\left[\frac{T^2}{L}\right]$
$\frac{P}{C}$ = $\left\{\begin{matrix}\text{电路的自感系数} \\ \text{或电磁本领}\end{matrix}\right\}$	L	$\left[\frac{T^2}{L}\right]$	$[L]$
$\frac{■}{■}$ = 电介质的比感本领	K	$[0]$	$\left[\frac{T^2}{L^2}\right]$
$\frac{■}{■}$ = 磁感本领	μ	$\left[\frac{T^2}{L^2}\right]$	$[0]$
$\frac{E}{C}$ = 导体的电阻	R	$\left[\frac{T}{L}\right]$	$\left[\frac{L}{T}\right]$
$\frac{■}{■}$ = 物质的比电阻	γ	$[T]$	$\left[\frac{L^2}{T}\right]$

628.〕如果长度、质量和时间的单位在两种单位制中是相同的，则电量的一个电磁单位中所含有的静电单位倍数在数值上等于某一个速度，其绝对值和所用基本单位的大小无关。这个速度是一个重要的物理量，我们将用 v 来代表它。

一个电磁单位所含静电单位的倍数

对 e，C，Ω，■，■，■来说………………v.

对m，p，E，■，■，■，来说……………… $\frac{1}{v}$.

对静电电容、介电感应本领和电导率来说是 $\frac{1}{v^2}$。

确定速度 v 的几种方法将在第 768—780 节中给出。

在电磁单位制中，空气的磁比感本领被假设为等于 1，因此这个量在静电单位制中用 $\frac{1}{v^2}$ 来代表。

电学单位的实用制

629.〕在这两种单位制中，电磁制对那些从事于电磁电报的实用电学家们来说用处较大。然而，如果长度、时间和质量的单位是在其他科学工作中通用的那些，例如米或厘米、秒和克，则电阻和电动势的单位将太小，以致要表示出现在实用中的那些量就必须用一些非常大的数字，而电量和电容的单位又将太大，以致只有一些极小的分数才会出现在实用中。因此，实用电学家们曾经采用了一套电学单位，这是依据一个大的长度单位和一个小的质量单位而通过电磁单位制推导出来的。

为此目的而使用的长度单位是一千万米，或者说近似地等于地球子午线的四分之一的长度。

时间的单位仍和从前一样是秒。

质量的单位是 10^{-11} 克，或者说是一亿分之一毫克。

由这些基本单位导出的电学单位曾经根据一些杰出的电学发现者来命名。例如电阻的实用单位是“欧姆”，并且是用大英科学促进协会所发布的在第 340 节中描述了的那种电阻线卷来代表的。在电磁制中，它用一个 10，000，000 米/秒的速度来代表。

电动势的实用单位叫做“伏特”，它和一个丹聂耳电池的电动势相差不大。拉提摩·克拉克先生近来曾经发明了一种很稳定的电池，其电动势几乎确切地等于 1.454 伏特。

电容的实用单位叫做“法拉”。在一伏特的电动势作用下在一秒种内流过一欧姆电阻的电量，等于由一伏特的电动势在电容为一法拉的电容器上产生的电荷。

人们发现，这些名称的使用在实用上比不断重复“电磁单位”一词并附带说明各单位所依据的特定基本单位要方便得多。

当必须测量很大的量时，可以把原有单位乘以一百万并在它的名称前加一个“兆”字来形成一个新的单位。

同样，通过在前面加一个“微”字，就可以形成一个小的单位，它是原有单位的一百万之一。

下表给出在不同时期被采用的不同单位制中的这些实用单位的值。

基本单位	实用单位	大英协会报告 1863	汤姆孙	韦伯
长度	地球象限孤	米	厘米	毫米
时间	秒	秒	秒	秒
质量	10^{-11}克	克	克	毫克

电阻	欧姆	10^7	10^9	10^{10}
电动势	伏特	10^5	10^8	10^{11}
电容	法拉	10^{-7}	10^{-9}	10^{-10}
电量	法拉（充电到一伏特）	10^{-2}	10^{-1}	10

第十一章

论电磁场中的能量和胁强

静电能量

630．]体系的能量可以分成“势能”和“动能”。由带电而引起的势能已经在第 85 节中考虑过了。它曾被写成

$$W=\frac{1}{2}\Sigma(e\Psi), \qquad (1)$$

式中 e 是电势为Ψ处的电荷，而求和遍及于存在电荷的一切地方。如果 f、g、h 是电位移的分量，则体积元 dxdydz 中的电量是

$$e=(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz})dxdydz, \qquad (2)$$

从而 $$W=\frac{1}{2}\iiint\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\Psi dx\ dy\ dz, \qquad (3)$$

式中的积分遍及于整个空间。

631．]把这一表示式分部积分，并记得当从一个有限带电体系的一个给定点算起的距离 r 变为无限大时，势Ψ就变成一个 r^{-1} 级的无限小量，而 f、g、h 就变成 r^{-2} 级的无限小量，就可以把表示式简化成

$$W=-\frac{1}{2}\iiint(f\frac{d\Psi}{dx}+g\frac{d\Psi}{dy}+h\frac{d\Psi}{dz})dxdydz, \qquad (4)$$

式中的积分遍及于整个空间。

如果我们现在把电动强度的分量写成P、Q、R而不写成 $-\frac{d\Psi}{dx}$，$-\frac{d\Psi}{dy}$ 和 $\frac{d\Psi}{dz}$，我们就得到

$$W=-\frac{1}{2}\iiint(Pf+Qg+Rh)dxdydz \text{①} \qquad (5)$$

由此可见，如果我们假设整个场的静电能量存在于场中电力和电位移不为零的每一部分中而不是只局限在可以找到电荷的地方，这个能量也将是相同的。

单位体积中的能量是电动强度和电位移的乘积的一半乘以这两个矢量之间的夹角。

在四元数语言中这就是 $-\frac{1}{2}S$．■■．

①{这一静电能量表示式在本书第一卷中是根据静电力可由势函数导出的假设而推得的。当电动强度的一部分是由电磁感应引起的时，这种证明就不再成立了。然而，如果我们采取一种观点，即认为这一部分能量起

[①] {这一静电能量表示式在本书第一卷中是根据静电力可由势函数导出的假设而推得的。当电动强度的一部分是由电磁感应引起的时，这种证明就不再成立了。然而，如果我们采取一种观点，即认为这一部h2 ，则势能将只依赖于电介质的极化而不论这种极化是如何产生的.于是，既然

源于电介质的极化状态而且等于每单位体积$\frac{1}{8\pi K}$（$f^2 - g^2 + h^2$），则势能将只依赖于电介质的极化而不论这种极化是如何产生的.于是，既然

$$\frac{f}{4\pi k} = P, \quad \frac{g}{4\pi k} = Q, \quad \frac{h}{4\pi k} = R,$$

能量就将等于每单位体积$\frac{1}{2}$（$Pf + Qg + Rh$）.}

磁能量

[1]632．]我们可以利用和在第 85 节的带电事例中所用的方法相仿的方法来处理由磁化引起的能量。如果 A、B、C 是磁化的分量，而α、β、γ是磁力的分量，则由第 389 节可知磁体系的势能是

$$-\frac{1}{2}\iiint(A\alpha + B\beta + C\gamma)dxdydz, \qquad (6)$$

积分遍及于磁化物质所占据的空间。然而，这一部分能量却将在一种我们即将求得的形式下包含动能。

633．]当没有电流时，我们可变换这一表示式如下，我们知道，

$$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = 0 \qquad (7)$$

因此，由第 97 节可知，如果正像当不存在电流时在磁现象中永远成立的那样有

$$\alpha = -\frac{d\Omega}{dx}, \beta = -\frac{d\Omega}{dy}, \gamma = -\frac{d\Omega}{dz}, \qquad (8)$$

则有

$$\iiint(a\alpha + b\beta + c\gamma)dxdydz = 0 \qquad (9)$$

积分遍及于整个空间，或者写作

$$\iiint\{(\alpha + 4\pi A)\alpha + (\beta + 4\pi B)\beta + (\gamma + 4\pi C)\gamma\}dxdydz = 0 \qquad (10)$$

由此可见，由一个磁体系引起的能量是

$$-\frac{1}{2}\iiint(A\alpha + B\beta + C\gamma)dxdydz = \frac{1}{8\pi}\iiint(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)dxdydz,$$

$$= \frac{1}{8\pi}\iiint \blacksquare^2 dxdydz \qquad (11)$$

动电能量

634．]在第 578 节中，我们已经把一个电流组的动能表示成下列形式：

$$T = \frac{1}{2}\Sigma(pi), \qquad (12)$$

式中 p 是一个电路的电磁动量，而 i 是在电路中流动着的电流的强度，求和遍及所有的电路。

但是我们在第 590 节中已经证明，p 可以表示成一个形式如下的线积分：

---

[1] 见本章末尾的附录 I。

$$p=\int(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds})dx, \qquad (13)$$

式中 F、G、H 是点(x，y，z)上电磁动量■的分量，而积分是沿闭合回路 s 计算的。因此我们就得到

$$T=\frac{1}{2}\Sigma i\int(F\frac{dx}{ds}+G\frac{dy}{ds}+H\frac{dz}{ds})ds \qquad (14)$$

如果 u，v，w 是传导电路中任一点上的电流密度的分量，而 S 是覆盖在电路上的曲面，我们就可以写出

$$i\frac{dx}{ds}+uS, \quad i\frac{dy}{ds}=uS, \quad i\frac{dz}{ds}=uS, \qquad (15)$$

而且我们也可以把体积元写成

Sds=dxdydz，

于是我们现在就得到

$$T=\frac{1}{2}\iiint(Fu+Cv+Hw)dxdydz, \qquad (16)$$

式中的积分应该遍及于空间中存在电流的每一部分。

635．]现在让我们把 u、v、w 代换成由第 607 节中的方程组(E)给出的用磁力的分量α、β、γ表示出来的他们的值，于是我们就得到

$$T=\frac{1}{8\pi}\iiint\{F(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz})+G(\frac{da}{dz}-\frac{d\gamma}{dx})+H(\frac{d\beta}{dx}-\frac{da}{dy})\}dxdydz, \quad (17)$$

式中的积分遍及于包含了所有电流的那一部分空间。

如果我们进行分部积分，并且记得在很大距离处α、β和γ具有r^3的数量级（而且在两种媒质的分界面上 F、G、H 和切向磁力都是连续的），我们就会发现，当积分扩展到全部空间时，表示式就简化为

$$T=\frac{1}{8\pi}\iiint\{\alpha(\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz})+\beta(\frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx})+\gamma(\frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy})\}dxdydz \quad (18)$$

由第 591 节中的磁感方程组(A),我们可以把小括号中的各量代换成磁感分量 a、b、c，于是动能就可以写成

$$T=\frac{1}{8\pi}\iiint(a\alpha+b\beta+c\gamma)dxdydz, \qquad (19)$$

式中的积分应该遍及于空间中磁力和磁感的值异于零的每一个部分。

这一表示式的括号中的那个量，就是磁感和磁力在磁感方向上的投影的乘积。

在四元数的语言中，此式可以简单地写成

-S．■■，

式中■是磁感，其分量为 a、b、c，而■是磁力，其分量为α、β、γ．

636．]因此，体系的动能可以或是表示成在存在电流的地方求的积分。或是表示成在存在磁力的每一部分场中求的积分。然而，第一个积分是假设各电流直接互相发生远距作用的那种理论的自然表示，而第二个积分则对力图用各电流之间的空间中的某种中介作用来解释电流间的作用的那种理论是合适的。由于我们在本书中曾经采用了后一种研究方法，我们就很自然地把第二个表示式取作动能的最重要的表示形式。

按照我们的假说，我们认为动能是存在于任何有磁力的地方的，就是说，在一般情况是存在于场的每一部分中的。单位体积的能量是

$-\frac{1}{8\pi}$S．■■，而且这种能量是以物质的某种运动的形式而存在于空间的每一部分中的。

当我们讨论到法拉第关于磁对偏振光的效应的发现时，我们将举出相信有磁力线的地方就有物质绕该磁力线的转动的理由。请参阅第 821 节。

磁能量和动电能量的比较

637．]我们在第 423 节中已经求出，强度分别为φ和φ′而又分别以闭合曲线 s 和 s′为边界的两个磁壳，其相互势能是

$$-\phi\phi'\iint\frac{\cos\in}{r}dsds',$$

式中∈是 ds 和 ds′的方向之间的夹角，而 r 是他们之间的距离。

我们在第 521 节中也求得,载有电流 i 和 i′的两个电路 s 和 s′所引起的相互能量是

$$ii'\iint\frac{\cos\in}{r}dsds'$$

如果 i、i′分别等于φ、φ′，则磁壳之间的机械力等于对应载流电路之间的机械力，而且方向也相同。在磁壳的事例中，力倾向于减小他们的相互势能；在电路的事例中，力倾向于增大他们的相互能量，因为这种能量是动能。

通过磁化物质的任何布置来造成一个在一切方面都和一个载流电路相对应的体系是不可能的，因为磁体系的势在空间中的每一点上都是单值的，而电体系的势则是多值的。但是通过一些无限小电路的适当布置来造成一个在一切方面都和任一磁壳相对应的体系却是可能的，如果我们在计算势时所取的积分曲线不许穿过任何一个这种小电路的话。这一点将在第 833 节中更充分地加以解释。

磁体在远处的作用是和载流电路在远处的作用完全等同的。因此我们就力图把他们归之于相同的原因；而既然我们不能借助于磁体来解释电流，我们就必须采取另一种办法，即借助于分子电路来解释磁体。

638．]在本书第三编中关于磁现象的研究中，我们没有试图解释在一段距离上的磁作用，而只是把这种作用看成了一种基本的经验事实。因此我们假设了一个磁体系的能量是势能，并假设了当体系的各部分被作用在他们上的磁力所推动时这一势能是减小的。

然而，如果我们认为各磁体的性质起源于在他们的分子内部运行着的电流，他们的能量就是动能，而他们之间的力就将倾向于使他们沿一种方向而运动，以致如果各电流强度保持不变则动能将会增大。

这种解释磁性的方式也要求我们放弃在第三编中所用的方法；在那种方法中，我们把磁体看成了一种连续的和均匀的物体，其最小的部分和整体具有相同的磁性。

现在我们必须认为一个磁体含有为数虽多但却是有限的一些电路，因此它就在本质上具有一种分子性的而不是连续的结构。

如果我们假设我们的数学工具是如此地粗糙，以致我们的积分曲线不可能穿过一个分子电路，并假设我们的体积元中含有为数甚巨的磁分子，我们就仍会得到和第三编的结果相类似的结果；但是，如果我们假设我们

的数学工具更加精致并能够用来研究发生在分子内部的一切情况，我们就必须放弃旧有的磁性理论而采用安培的理论；这种理论除了由电流组成的磁体以外不承认任何别的磁体。

我们必须把磁能量和电磁能量都看成动能并给予他们以相同的正负号，正如在第 635 节中的作法那样。

在下面，尽管我们偶尔也像在第 639 节等处那样试图使用旧的磁性理论，但是我们却将发现，只有当像在第 644 节中那样放弃旧理论而采用安培的分子电流理论时，我们才能得到一种完全自洽的理论体系。

因此场的能量只有两部分，静电能或势能

$$W=\frac{1}{2}\iiint(Pf+Qg+Rh)dxdydz,$$

和电磁能或动能

$$T=\frac{1}{8\pi}\iiint(a\alpha+b\beta+c\gamma)dxdydz$$

关于作用在位于电磁场中的物体的一个体积元上的力

作用在一个磁体元上的力

[①]639．]设一物体被磁化到磁化强度分量为 A、B、C 的程度，并位于磁力分量为 α、β、γ 的场中，则它的体积元 dxdydz 的势能是

$-(A\alpha+B\beta+C\gamma)dxdydz$．

由此可见，如果促使体积元沿 x 方向移动而不转动的力是 $X_1dxdydz$，则

$$X_1=A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx},\qquad(1)$$

而如果倾向于使体积元绕着 x 轴而从 y 向 z 转动的力偶矩是 Ldxdydz，则

$L=B\gamma-C\beta$ (2)

和 y 轴及 z 轴相对应的力及力矩可以通过适当的代换来写出。

640．]如果被磁化的物体载有其分量为 u、v、w 的电流，则由第 603 节中的方程组(C)可知将存在一个其分量为 X_2、Y_2、Z_2 的附加的力，其中 X_2 由下式给出：

$X_2=uc-wb$．(3)

由此可得，既起源于分子的磁性又起源于通过物体的电流的总力就是

$$X=A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta\gamma}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx}+uc-wb\qquad(4)$$

各量 a、b、c 是磁感的分量，而且是通过在第 400 节中给出的方程组来和磁力的分量 α、β、γ 相联系的：

$$\left.\begin{aligned}a&=\alpha+4\pi A,\\b&=\beta+4\pi B,\\c&=\gamma+4\pi C,\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

电流的分量 u、v、w 可以通过第 607 节中的方程组而用 α、β、γ 表

---

① 参阅本章末尾的附录 II。

示出来

$$\left.\begin{aligned}4\pi u&=\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz},\\4\pi v&=\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx},\\4\pi w&=\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

由此即得

$$X=\frac{1}{4\pi}\left\{(a-\alpha)\frac{d\alpha}{dx}+(b-\beta)\frac{d\beta}{dx}+(c-\gamma)\frac{d\gamma}{dx}+b(\frac{d\alpha}{dy}-\frac{d\beta}{dx})+c(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx})\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left\{a\frac{d\alpha}{dx}+b\frac{d\alpha}{dy}+c\frac{d\alpha}{dz}-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\}\qquad(7)$$

由第 403 节可得

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0\qquad(8)$$

把这个方程(8)乘以 a 并除以 4π，我们就可以把所得结果和(7)相加，于是就得到

$$X=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{d}{dx}\left[a\alpha-\frac{1}{2}(a^2+\beta^2+\gamma^2)\right]+\frac{d}{dy}[b\alpha]+\frac{d}{dz}[c\alpha]\right\},\qquad(9)$$

另外由(2)也得到

$$L=\frac{1}{4\pi}(b-\beta)\gamma-(c-\gamma)\beta),\quad(10)$$

$$=\frac{1}{4\pi}(b\gamma-c\beta),\qquad(11)$$

式中 X 是按单位体积来计算的沿 x 方向的力，而 L 是绕该轴的力矩（每单位体积）。

关于用一种处于胁强状态的媒质
来对这些力作出的解释

641．]让我们用一个形如 P_{hk} 的符号来代表对单位面积而言的任意种类的胁强，此处的第一个下标 h 表明胁强被假设作用于其上的那个面积的法线平行于 h 轴，而第二个下标 k 则表明位于面积之正侧的那一部分物体作用在位于面积之负侧的那一部分物体上的胁强是平行于 k 轴的。

h 和 k 两个方向可以相同，在那种事例中胁强就是一种直胁强。他们也可以互相斜交，在那种事例中胁强就是一种斜胁强；或者，他们也可以互相垂直，在那种事例中胁强就是一种切胁强。

各胁强不会在物体的元部分中引起任何转动趋势的条件是

$P_{hk}=P_{kh}$.

然而，在一个磁化物体的事例中却存在这样一种转动趋势，从而在普通胁强理论中成立的这一条件是并没有得到满足的。让我们考虑作用在物体之元部分 dxdydz 的六个面上的各胁强的效应，这时取座标原点作为该元部分的重心。

正表面dydz的x值是$\frac{1}{2}dx$，这一表面上的力是

$$\left.\begin{aligned}&\text{平行于x，}(P_{xx}+\frac{1}{2}\frac{dp_{xx}}{dx}dx)dydz=X_{+x},\\&\text{平行于y，}(P_{xy}+\frac{1}{2}\frac{dp_{xy}}{dx}dx)dydz=Y_{+x},\\&\text{平行于z，}(P_{xz}+\frac{1}{2}\frac{dp_{zz}}{dx}dx)dydz=Z_{+x}\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

作用在反面上的力$-X_{-x}$、$-Y_{-x}$、$-Z_{-x}$可以通过令 dx 变号而从这些表示式求得。我们可以用同样的方式把作用在体积元之每一其他表面上的力系表示出来，力的方向用大写字母来指示，而它的作用面则用下标来指示。

如果 Xdxdydz 是作用在体积元上的平行于 x 的总力，则有

$$\begin{aligned}Xdxdydz&=X_{+x}+X_{+y}+X_{x+z}+X_{-x}+X_{-y}+X_{-z},\\&=(\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{yx}}{dy}+\frac{dp_{zr}}{dz})dxdydz,\end{aligned}$$

由此即得

$$X=\frac{d}{dx}P_{xx}+\frac{d}{dy}P_{yx}+\frac{d}{dz}P_{zx}\qquad(13)$$

如果 Ldxdydz 是倾向于使体积元绕着 x 轴而从 y 向 z 转动的力矩，则有

$$\begin{aligned}Ldxdydz&=\frac{1}{2}dy(Z_{+y}-Z_{-y})-\frac{1}{2}dz(y_{+x}-y_{-z})\\&=(P_{yz}-P_{zy}dxdydz),\end{aligned}$$

由此即得

$$L=P_{yz}-P_{zy}\qquad(14)$$

把由方程(9)及(10)给出的和由方程(13)及(14)给出的X及L的值互相比较一下，我们就发现，如果令

$$\left.\begin{aligned}&P_{xx}=\frac{1}{4\pi}\left\{a\alpha-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\},\\&P_{yy}=\frac{1}{4\pi}\left\{b\beta-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\},\\&P_{zz}=\frac{1}{4\pi}\left\{b\beta-\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right\},\\&P_{yz}=\frac{1}{4\pi}b\gamma,P_{zy}=\frac{1}{4\pi}c\beta,\\&P_{zx}=\frac{1}{4\pi}c\alpha,P_{zz}=\frac{1}{4\pi}a\gamma,\\&P_{xy}=\frac{1}{4\pi}a\beta,P_{yx}=\frac{1}{4\pi}b\alpha,\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

则起源于以这些值作为分量的那一胁强系的力，将在对物体中每一体积元的效应方面是和起源于磁化及电流的力互相静力学等价的。

642．]通过令 x 平分磁力方向和磁感方向之间的夹角，并把 y 轴取在这些方向的平面上，而其方向指向磁力一边，就很容易找出以这些量为其分量的那种胁强的本性。

如果我们用■代表磁力的数值，用■代表磁感的数值，并用 2∈代表他们的方向之间的夹角，就有

$$\left.\begin{aligned}&\alpha = \blacksquare\cos\in, \beta = -\blacksquare\sin\in, \gamma = 0,\\ &a = \blacksquare\cos\in, b = -\blacksquare\sin\in, c = 0;\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned}&P_{xx} = \frac{1}{4\pi}(+\blacksquare\blacksquare\cos^2\in - \frac{1}{2}\blacksquare^2),\\ &P_{yy} = \frac{1}{4\pi}(-\blacksquare\blacksquare\sin^2\in - \frac{1}{2}\blacksquare^2),\\ &P_{zz} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{2}\blacksquare^2),\\ &P_{yz} = P_{zx} = P_{zy} = P_{xz} = 0,\\ &P_{xy} = \frac{1}{4}\blacksquare\blacksquare\cos\in\sin\in,\\ &P_{yx} = \frac{1}{4\pi}\blacksquare\blacksquare\cos\in\sin\in\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

由此可见，胁强状态可以被看成由下列各量组成：

(1)一个 $=\frac{1}{8\pi}\blacksquare^2$ 的沿一切方向的压强。

(2)一个 $=\frac{1}{4\pi}\blacksquare\blacksquare\cos^2\in$ 的沿磁力方向和磁感方向之夹角分角线的张力。

(3)一个 $=\frac{1}{4}\blacksquare\blacksquare\sin^2\in$ 的沿该二方向之外角分角线的压强。

(4)一个 $=\frac{1}{4\pi}\blacksquare\blacksquare\sin 2\in$ 的力偶矩，倾向于使位于该二方向之平面内的每一物质元从磁感方向向着磁力方向而发生转动。

在流体或未磁化的固体中，磁感永远是和磁力同方向的。在这种事例中，∈=0，而当令 x 轴和磁力的方向相重合时，就有

$$P_{xx} = \frac{1}{4\pi}(\blacksquare\blacksquare\frac{1}{2}\blacksquare^2), P_{yy} = P_{zz} = -\frac{1}{8\pi}\blacksquare^2, \qquad (18)$$

而切胁强则不复存在。

因此，在这种事例中，胁强就是一个液体压强 $\frac{1}{8\pi}\blacksquare^2$ 和一个沿着力线的张力 $\frac{1}{4\pi}\blacksquare\blacksquare$。

643．]当不存在磁化时，■=■，于是胁强就进一步得到简化，变成一个等于 $\frac{1}{8\pi}\blacksquare^2$ 的沿力线的张力和一个数值上等于 $\frac{1}{8\pi}\blacksquare^2$ 的沿一切垂直于力线的方向的压强。这种重要事例中的胁强分量是

$$\left.\begin{aligned}
P_{xx} &= \frac{1}{8\pi}(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2),\\
P_{yy} &= \frac{1}{8\pi}(\beta^2 - \gamma^2 - \alpha^2),\\
P_{zz} &= \frac{1}{8\pi}(\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2),\\
P_{yz} &= P_{zy} = \frac{1}{4}\pi\beta\gamma,\\
P_{zx} &= P_{zz} = \frac{1}{4}\gamma\alpha,\\
P_{xy} &= P_{yx} = \frac{1}{4\pi}\alpha\beta
\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

由这些胁强引起的作用在一个媒质体积元上的 x 分力，当折算成单位体积的力时是

$$X = \frac{d}{dx}P_{xx} + \frac{d}{dy}P_{yx} + \frac{d}{dz}P_{xx},$$

$$= \frac{1}{4}\left\{\alpha\frac{d\alpha}{dx} - \beta\frac{d\beta}{dx} - \gamma\frac{d\gamma}{dx}\right\} + \frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\beta}{dy} + \beta\frac{d\alpha}{dy}\right\}\frac{1}{4\pi}\left\{\alpha\frac{d\gamma}{dz} + \gamma\frac{d\alpha}{dz}\right\},$$

$$= \frac{1}{4\pi}\alpha\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) + \frac{1}{4\pi}\gamma\left(\frac{d\alpha}{dz} - \frac{dr}{dx}\right) - \frac{1}{4\beta}\left(\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy}\right)$$

现在，

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 4\pi m,$$

$$\frac{d\alpha}{dz} - \frac{dy}{dx} = 4\pi v,$$

$$\frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dy} = 4\pi w,$$

式中 m 是朱磁质对单位体积而言的密度，而 v 和 w 分别是垂直于 y 和 z 的电流强度。由此即得

同理也得
$$\left.\begin{aligned}
X &= \alpha m + v\gamma - w\beta,\\
Y &= \beta m + w\alpha + v\gamma,\\
Z &+ \gamma m + u\beta - v\alpha,
\end{aligned}\right\}$$
（电磁力方程组）（20）

644．]如果我们采用安培和韦伯关于磁性物体和抗磁性物体之本性的理论，并假设磁性极化和抗磁性极化是由分子电流所引起的，我们就能排除假想的磁质，并且在任何地方都有 m=0，即

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz} = 0 \qquad (21)$$

于是电磁力方程组就变成

$$\left.\begin{aligned}
X &= v\gamma - w\beta,\\
Y &= w\alpha - u\gamma,\\
Z &= u\beta - v\alpha
\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

这些就是按单位体积来看的机械力的分量。磁力的分量是α、β、γ，而电流的分量是 u、v、w。这些方程是和已经建立了的那些方程相等同的。（第 603 节，方程组(C)。）

645．]在借助于媒质中的一种胁强状态来解释电磁力时，我们只是在追随法拉第[①]的观念,即认为磁力线倾向于自己缩短而且当并排存在时就互相推斥。我们所作的一切就是用数学语言来表示沿磁力线的张力的值以及垂直于磁力线的压强的值，并证明这样假设为存在于媒质中的胁强状态实际上就能产生观察到的作用在载有电流的导体上的力。

关于这种胁强状态在媒质中被引起和被保持的方式，我们还没有肯定过任何东西。我们只曾证明，有可能设想电流的相互作用依赖于周围媒质中的一种特定的胁强，而不是一种直接的和即时的远距作用。

任何一种借助于媒质的运动或用其他方式来对胁强状态作出的进一步解释，应被看成理论的一个另外的和独立的部分，它的成立或垮台并不影响我们目前的观点。请参阅第 832 节。

在本书第一编第 108 节中我们证明了观察到的静电力可被设想为是通过周围媒质中的一种胁强状态的介入而起作用的。现在我们针对电磁力作了同样的事情，而剩下来要考察的就是，关于能够支持这些胁强状态的一种媒质的观念是否能够和其他的已知现象相容，或者说，我们是否必须认为这种观念没有成果而把它放弃掉。

在一个既存在电磁作用又存在静电作用的场中，我们必须假设在第一编中描述了的那种静电胁强是叠加在我们刚才还在考虑的电磁胁强上的。

646．]如果我们假设总的地磁力是 10 大英单位（格令，英尺，秒），正如在英国情况差不多是如此的那样，则沿力线的张力是每平方英尺 0.128 格令重。焦耳[①]用电磁铁得到的最大的磁张力约为每平方英寸 140 磅重。

附录 I

[导源于克勒克·麦克斯韦教授致克瑞斯托教授的一封信的下列注释，对第 389 节和第 632 节来说是重要的。

在第 389 节中，由于放在磁力分量为α_2、β_2、γ_2的磁场中而其磁化分量为 A_1、B_1、C_1 的一个磁体的存在而引起的能量是

$$-\iiint(A_1\alpha_2+B_1\beta_2+C_1\gamma_2)dxdydz,$$

此处的积分以磁体为限，因为在任何别的地方 A_1、B_1、C_1 都为零。但是，总的能量却具有如下的形式

$$-\frac{1}{2}\iiint\left\{(A_1+A_2)(\alpha_1+\alpha_2)+\cdots\right\}dxdydz,$$

积分遍及于空间中存在磁化物体的每一部分，而 A_2、B_2、C_2 代表磁体外面任何一点上的磁化分量。

于是总能量就包括四个部分：

[①] Exp.Res.3266，3267，3268．

[①] Sturgeon’sAnnnalsofElectricity,vol.v.p.187（1840）；orPhilosophicalMagazine,Dec.1851．

$$-\frac{1}{2}\iiint(A_1\alpha_1+\cdots)dxdydz, \qquad (1)$$

如果磁体的磁化是固定的，则这一部分能量不变；

$$-\frac{1}{2}\iiint(A_2\alpha_1+\cdots)dxdydz, \qquad (2)$$

而由格林定理，此式等于

$$-\frac{1}{2}\iiint(A_1\alpha_2+\cdots)dxdydz, \qquad (3)$$

以及

$$-\frac{1}{2}\iiint(A_2\alpha_2+\cdots)dxdydz \qquad (4)$$

我们可以假设最后一式起源于固定的磁化，从而是一个常量。

因此，看成固定磁化了的活动磁体的能量中的变化部分，就是表示式(2)和(3)之和，即

$$-\iiint(A_1\alpha_2+B_1\beta_2+C_1\gamma_2)dxdydz$$

磁体的移动将改变 α_2、β_2、γ_2 的值而不改变 A_1、B_1、C_1 的值。记得这一点，我们就能求出作用在磁体上的力沿任一方向 ϕ 中的分量：

$$\iiint(A_1\frac{d\alpha}{d\phi}+B_1\frac{d\beta_2}{d\phi}+C_1\frac{d\gamma_2}{d\phi})dxdydz$$

如果我们不是有一个磁体而是有一个被感应磁化了的物体，则力的表示式也应该相同；就是说，写出 $A_1=\kappa a$ 等，我们就得到

$$\iiint k(\alpha\frac{d\alpha_2}{d\phi}+B\frac{d\beta_2}{d\phi}+\gamma\frac{d\gamma_2}{d\phi})dxdydz$$

在这一表示式中，a 代替了 a_1+a_2，余类推，但是如果磁化物体很小或是 κ 很小，则和 a_2 相比 a_1 可以忽略不计，于是力的表示式就像在第 440 节中那样变成

$$\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{2}\iiint k(\alpha^2+\beta_2+\gamma^2)dxdydz$$

当一个感应本领很小的由感应而磁化的物体被带到无限远处时，磁力所作的功只是对被固定磁化到同一初强度的同一物体作的功的一半，因为当感生磁体被带走时它的强度是会逐步消失的。]

附录 II

[对于第 639 节中的由磁力引起的单位体积媒质的势能表示式曾经提出一些反对意见，其理由是，当在第 389 节中求得这一表示式时，我们假设了分力 α、β、γ 可以从一个势函数推出，而在第 639—640 节中则情况并非如此。这种反驳也波及于力 X 的表示式，它是能量的空间变化率。这一注释的目的就在于提出一些倾向于肯定正文之准确性的想法。]

{为了计算的方便，可以把作用在一块载流磁性物质上的力分成两部分：(1)由于电流的存在而作用在体积元上的力，(2)由体积元中的磁性所引起的力。第一部分将和作用在一个非磁性物质体积元上的力相同，其分量分别是

$\gamma v - \beta w$

$\alpha w - \gamma u \begin{cases} u、v、w\text{是电流的分量，} \\ \alpha、\beta、\gamma\text{是磁力的分量。} \end{cases}$

$\beta u - \alpha v$

为了计算第二个力，设想从磁性物质中切出一个细柱，柱体的轴线平行于磁化的方向。

如果 I 是磁化强度，则作用在单位体积之磁体上的平行于 X 的力是

$$I\frac{da}{ds},$$

或者，如果 A、B、C 是 I 的分量，则有

$$A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{b\alpha}{dy}+C\frac{d\alpha}{dz},$$

或者写成

$$A\frac{d\alpha}{dx}+B(\frac{d\beta}{dx}-4\pi w)+C(\frac{d\gamma}{dx}+4\pi v)$$

因此，作用在体积元上的平行于 X 的总力就是

$$\gamma v-\beta w+A\frac{d\alpha}{dx}+B(\frac{d\beta}{dx}-4\pi w)+C(\frac{d\gamma}{dx}+4\pi w),$$

或者写成

$$v(\gamma+4\pi C)-w(\beta+4\pi B)+A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+c\frac{d\gamma}{dx},$$

即

$$vc-vb+A\frac{d\alpha}{dx}+B\frac{d\beta}{dx}+C\frac{d\gamma}{dx},$$

这就是正文中的表示式。}

第十二章

电流层

647．]一个“电流层”就是导电物质的一个无限薄的层，两侧都以绝缘媒质为界，从而电流可以在层内流动，但除了在某些称为“电极”的点上以外却不能从层中逸出，而电流就是经由那些电极而进入层中和流出层外的。

为了传导一个有限大小的电流，一个实在的层必须有一个有限的厚度，从而必须被看成一个三维的导体。然而，在许多事例中，从以上定义的那种电流层的电学性质来推出一个实在导电层或一薄层螺绕线圈的电学性质却在实际上是很方便的。因此我们可以把一个任意形状的曲面看成一个电流层。既经选定了这一曲面的一侧作为正侧以后，我们将永远假设在曲面上画出的任何曲线都是从曲面的正侧来观察的。在一个闭合曲面的事例中，我们将把它的外侧看成正侧。然而请参阅第 294 节，在那里，电流的方向被定义成了从电流层的内侧所看到的方向。

电流函数

648．]设把曲面上的一个固定点 A 取作原点，并在曲面上从 A 到另一点 P 画一条曲线。设在单位时间内从左侧向右侧而越过这条曲线的电量是 ϕ，则 ϕ 叫做点 P 上的“电流函数”。

电流函数只依赖于 P 点的位置,而且对于曲线 AP 的任意两种形状来说都是相同的，如果曲线可以不扫过一个电极而通过连续的运动从一种形状变换成另一种形状的话。因为曲线的这两种形状将包围一个面积，而面积上不存在任何电极，从而越过其中一条曲线而进入这一面积的电量必将越过另一条曲线而流走。

如果 s 代表曲线 AP 的长度，则从左向右而越过 ds 的电流将是

$\frac{d\phi}{ds}ds$。

如果 ϕ 在任一曲线上为常量，则不会有电流越过它。这样的曲线叫做“电流线”或“流线”。

649．]设 ψ 为层上任一点的电势，则沿一条曲线之任一线段元 ds 的电动势将是

$$-\frac{d\psi}{ds}ds,$$

如果除了起源于电势差的电动势以外不存在任何别的电动势的话。

650．]现在我们可以假设，层上一点的位置由该点的 ϕ 值和 ψ 值来确定。设 ds_1 是交截在两条流线 ϕ 和 $\phi+d\phi$ 之间的等势线 ψ 的线段元的长度，并设 ds_2 是交截在两条等势线 ψ 和 $\psi+d\psi$ 之间的流线 ϕ 的线段元的长度，我们可以把 ds_1 和 ds_2 看成层上的面积元 $d\phi d\psi$ 的边。沿 ds_2 方向的电动势 $-d\psi$ 产生越过 ds_1 的电流 $d\phi$．

设层上长度为 ds_2 而宽度为 ds_1 的一个部分的电阻为

$$\sigma\frac{ds_2}{ds_1},$$

式中σ是层的对单位面积而言的比电阻，于是就有

$$d\psi=\sigma\frac{ds_2}{ds_1}d\phi,$$

由此即得

$$\frac{ds_1}{d\phi}=\sigma\frac{ds_2}{d\psi}$$

651．]如果层的材料在所有各方向上是同样导电的，则 ds_1 垂直于 ds_2。在均匀电阻的导电的事例中，σ为常量，而如果令ψ=σψ′，我们就有

$$\frac{\sigma s_1}{\sigma s_2}=\frac{\sigma\phi}{\sigma\psi'},$$

而各流线和各等势线就把层面划分成一些小方块。

由此可以推知，如果 ϕ_1 和 ψ_1' 是φ和ψ′的共轭函数（见第 183 节），曲线 ϕ_1 就可以是一个层中的流线，对该层来说曲线 ψ_1' 是对应的等势线。当然，一个事例就是 $\phi_1=\psi'$ 而 $\psi'=-\phi$ 时的事例。在这个事例中，等势线变成了流线而流线变成了等势线[①]。

如果我们已经针对任一特例得出了有关一个任意形状的均匀层中的电流分布的解，我们就能按照在第 190 节中给出的方法而利用共轭函数的适当变换来推出另一事例中的分布。

652．]其次我们必须确定一个电流层的磁作用，这时假设电流是完全限制在层中的，没有任何电极把电流送入层中或传出层外。

在这一事例中，电流函数φ在每一点上都有一个确定的值，所有的流线都是互不相交的闭合曲线，尽管任一流线都可以和自己相交。

试考虑层上介于流线φ和φ+δφ之间的带状部分。层的这一部分是一个传导电路，它里边有一个强度为δφ的电流在φ大于所给值的那一部分层中沿正方向而运行。这个电路的磁效应，在并不位于磁壳物质之内的任一点上和一个强度为δφ的磁壳的效应相同。让我们假设，磁壳和电流层上φ值大于所给流线的φ值的那一部分相重合。

从φ具有最大值的流线开始到φ具有最小值的流线为止画出相继的流线，我们就把电流层分成一系列电路。把每一个电路代换成和它相对应的磁壳，我们就发现电流层的磁效应在任何并不位于电流层厚度之内的点上都和一个复杂磁壳的效应相同，该复杂磁壳的任意点上的强度是 C+φ，此处 C 是一个常量。

如果电流层是有界的，我们就必须在边界线上令 C+φ=0．如果电流层形成一个闭合的或无限的曲面，就没有任何条件可以确定常量 C.

653．]电流层每一侧的任一点上的磁势，正如在第 415 节中一样由下列表示式给出：

$$\Omega=\iint\frac{1}{r^2}\phi\cos\theta dS,$$

[①] 参阅 Thomson,Camb.Math.Journ.,vol.iii.p.286.

式中 r 是所给点离面积元 ds 的距离，而θ是 r 的方向和从 ds 的正面画起的法线方向之间的夹角。

这一表示式给出了并不位于电流层厚度之内的一切点上的磁势，而我们知道，对于载有电流的导体内部各点来说，是不存在什么矢势的。

Ω的值在电流层上是不连续的，因为，如果Ω_1是它在刚好位于电流层之内的一点上的值,而Ω_2是它在和第一个点很靠近但刚刚位于电流层之外的一个点上的值，则有

$$\Omega_2 = \Omega_1 + 4\pi\phi,$$

式中φ是层上该点处的电流函数。

垂直于层的磁力分量的值是连续的，在层的两侧都相同。平行于流线的磁力分量也是连续的，但是垂直于流线的切向分量却在层上并不连续。如果 s 是在层上画出的一条曲线的长度,则磁力沿 ds 方向的分量在层的负侧为$-\frac{d\Omega_1}{ds}$而在层的正侧为$-\frac{d\Omega_2}{ds} = -\frac{d\Omega_1}{ds} - 4\pi\frac{d\phi}{ds}$。

因此，磁力在正侧的分量比在负侧的分量大了一个量$-4\pi\frac{d\phi}{ds}$。在一个给定的点上，这个量当 ds 垂直于电流线时将有最大值。

关于一个具有无限大电导率的层中的电流的感应

654．]在第 579 节中已经证明，在任一电路中都有

$$E = \frac{dp}{dt} + Ri,$$

式中 E 是所加的电动势，p 是电路的动电动量，R 是电路的电阻，而 i 是电路中的电流。如果不存在所加的电动势也不存在电阻，则$\frac{dp}{dt} = 0$，或者说 p 是常量。

喏，在第 588 中已经证明，电路的动电动量 p 是用穿过电路的磁感的面积分来量度的。因此，在一个没有电阻的电流层的事例中，穿过在曲面上画出的任一闭合曲线的磁感的面积分都必然是常量，而这就意味着，磁感的法何分量在电流层的每一点上都保持为常量。

655．]因此，如果磁场由于附近的磁体运动或电流变化而以任意方式发生了变化，则电流层中就会开始出现一些电流，以致他们的磁效应和磁体或电流的磁效应结合起来，将使磁感的法向分量在层的每一点上都保持不变。如果最初没有磁作用，而层中也没有电流，则磁感的法向分量将在层的每一点上永远为零。

因此，层就可以被看成对磁感来说是不可透过的，从而磁感线将在层上受到偏转，其方式和一个无限大均匀导电物质中电流的流线由于一个形状相同而用无限大电阻的材料作成的层的引入而受到偏转的那种方式完全相同。

如果层形成一个闭合的或无限大的曲面，则在其一侧可能发生的任何磁作用都不会在其另一侧产生任何磁效应。

平面电流层的理论

656．]我们已经看到，一个电流层的层外磁作用和一个磁壳的体外磁作用相等价，该磁壳的每一点上的强度在数值上等于电流函数φ．当层是一个平面层时，我们就可以把确定电磁效应所必需的一切量都用单独一个函数 P 表示出来，这个函数就是由一层展布在平面上并带有面密度φ的假想物质所引起的势函数。P 的值当然就是

$$P=\iint\frac{\phi}{r}dx'dy', \qquad (1)$$

式中 r 是从计算 P 的一点(x，y，z)到平面上面积元 dx′dy′所在之点(x′，y′，0)的距离。

为了求出磁势，我们可以把磁壳看成由平行于 xy 平面的两个表面组成。第一个表面的方程是$z=\frac{1}{2}c$，其面密度是$\frac{\phi}{c}$；第二个表面的方程是$z=-\frac{1}{2}c$，其面密度是$-\frac{\phi}{c}$．

由这些表面引起的势，分别是

$$\frac{1}{c}P_{(z-\frac{c}{2})} \text{和} \frac{1}{c}P_{(x+\frac{c}{2})},$$

式中的下标表明，在第一个表示式中要把z代成$z=-\frac{c}{2}$，而在第二个表示式中要把z代成$z+\frac{c}{2}$。按照泰勒定理来把这些表示式展开，把他们相加，然后取 c 为无限小，我们就得到由层在其外面任一点上引起的磁势

$$\Omega=-\frac{dP}{dz} \qquad (2)$$

657．]量 P 对层的平面来说是对称的，从而当把 z 换成-z 时是不变的。

磁势Ω当把 z 换成-z 时将变号。

在层的正表面上，

$$\Omega=-\frac{dP}{dz}=2\pi\phi \qquad (3)$$

在层的负表面上，

$$\Omega=-\frac{dP}{dz}=-2\pi\phi \qquad (4)$$

在层的内部，如果它的磁效应起源于它的物质的磁化，则磁势将从正表面上的 2πφ连续地变化到负表面上的-2πφ。

如果层中含有电流，则层内的磁力并不满足具有一个势函数的条件。然而层内的磁力却是完全确定的。

法向分力，

$$\gamma=-\frac{d\Omega}{dz}=\frac{d^2P}{dz^2}, \qquad (5)$$

在层的两侧以及在整个层的物质中是相同的。

如果α和β是在正表面上平行于 x 和平行于 y 的磁力分量，而α′和β′是负表面上的对应分量，则有

$$\alpha=-2\pi\frac{d\phi}{dx}=-\alpha' \qquad (6)$$

$$\beta=-2\pi\frac{d\phi}{dy}=-\beta' \qquad (7)$$

在层的内部，各分量从α和β连续地变到α′和β′。

把由电流层引起的矢势的分量 F、G、H 和标势Ω联系起来的方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{dH}{dy}-\frac{dG}{dz}&=-\frac{d\Omega}{dz},\\ \frac{dF}{dz}-\frac{dH}{dx}&=-\frac{d\Omega}{dy},\\ \frac{dG}{dx}-\frac{dF}{dy}&=-\frac{d\Omega}{dz},\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

将得到满足，如果我们令

$$F=\frac{dP}{dy},G=-\frac{dP}{dx},H=0 \qquad (9)$$

我们也可以通过直接求积分来得到这些值,例如在 F 的情况{如果μ到处等于 1 则我们由第 616 节得到}，

$$F=\iint\frac{u}{r}dx'dy'=\iint\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dy'}dx'dy',$$

$$=\int\frac{\phi}{r}dx'-\iint\phi\frac{d}{dy'}\frac{1}{r}dx'dy'$$

既然积分运算要在无限大的平面层上进行估计，而第一项在无限远处变为零，表示式就会简化为第二项；而通过把

$-\frac{d}{dy'}\frac{1}{r}$ 代换成 $\frac{d}{dy}\frac{1}{r}$

并记得φ依赖于 x′和 y′而不依赖于 x、y、z，我们就得到

$$F=\frac{d}{dy}\iint\frac{\phi}{r}dx'dy',$$

$=\frac{dP}{dy}$，根据(1)。

如果Ω′是由层外的任何磁体系或电体系引起的磁势，我们就可以写出

$$P'=-\int\Omega' \quad dz, \qquad (10)$$

于是，关于由这一体系引起的矢势的分量，我们就将有

$$F'=\frac{dP'}{dy},\quad G'=-\frac{dP'}{dx},\quad H'=0, \qquad (11)$$

658．]现在让我们假设层是固定的并确定层上任意点处的电动强度。

设 X 和 Y 分别是平行于 x 和 y 的电动强度的分量，则我们由第 598 节得到｛把Ψ改成ψ）

$$X = -\frac{d}{dt}(F + F') - \frac{d\Psi}{dx}, \qquad (12)$$

$$Y = -\frac{d}{dt}(G + G') - \frac{d\psi}{dy} \qquad (13)$$

如果层的电阻率是均匀的并等于σ，则有

$$X = \sigma u, \quad Y = \sigma v \qquad (14)$$

式中 u 和 v 是电流的分量；而如果φ是电流函数，则

$$u = \frac{d\phi}{dy}, v = -\frac{d\phi}{dx} \qquad (15)$$

但是由方程(3)可知，在电流层的正表面上有

$$2\pi\phi = -\frac{dP}{dz},$$

因此方程(12)和(13)就可以写成

$$-\frac{\sigma}{2\pi}\frac{d^2P}{dydz} = -\frac{d^2}{dydt}(P + P') - \frac{d\psi}{dx}, \qquad (16)$$

$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{d^2P}{dxdz} = \frac{d^2}{dxdt}(P + P') - \frac{d\psi}{dy}, \qquad (17)$$

此处各表示式的值是和层的正表面相对应的。

如果把第一式对 x 求导数，把第二式对 y 求导数，并把结果加起来，我们就得到

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} = 0 \qquad (18)$$

唯一满足这一方程并在层的每一点上都为有限和连续而且在无限远处变为零的函数就是

ψ=0．(19)

由此可见，一个具有均匀电导率的无限大平面层中的电流的感应是并不和层的不同部分的电势差相伴随的。

将这一ψ值代入并把方程(16)和(17)求积分，我们就得到

$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{dP}{dz} - \frac{dP}{dt} - \frac{dP'}{dt} = f(z, t) \qquad (20)$$

既然层中电流的值是通过对 x 或 y 求导数来得出的，z 和 t 的任意函数就将消失。因此我们将对这种函数不予考虑。

如果我们也把 $\frac{\sigma}{2\pi}$ 用单独一个代表某一速度的符号R来代替，则P和P′之间的方程将变为

$$R\frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dt} + \frac{dP'}{dt} \qquad (21)$$

659．]让我们首先假设不存在对电流层起作用的外界磁体系。因此我们可以假设 P′=0．于是事例就变成一个不受外界作用的电流系，但是各电流却通过他们的互感而相互作用，而同时又因层的电阻而消耗他们的能量。结果由下列方程来表示：

$$R\frac{dP}{dz} = \frac{dP}{dt}, \qquad (22)$$

它的解是

$$P = F\{x, y, (z\_Rt)\} \tag{23}$$

由此可见[①]，层的正侧其座标为 x、y、z 的任意点上在时刻 t 的 P 值，等于一点 x、y、(z+Rt)上在时刻 t=0 的 P 值。

因此，如果在一个无限大的均匀平面层中激起一些电流然后不再影响它，财它在层的正侧任一点上的磁效应，将和使电流保持不变而使层沿其负侧法线方向以一个常速度 R 而运动时的磁效应相同。由于实际事例中的电流衰减而引起的电磁力的减弱，用假想事例中距离的增大所引起的力的减弱来准确地代表。

660．]把方程(21)对 t 求积分，我们就得到

$$P + P' = \int R \frac{dP}{dz} dt$$

(24)如果我们假设起初 P 和 P′都是零，而一个磁体或电磁体突然被磁化或从无限远处搬过来，以致使 P′的值突然从零变成了 P′，那么，既然(24)式右端的时间积分随时间而变为零，我们在最初的时刻就必然在层的表面上得到 P′=-P′.

因此，由引起 P′的那一体系的突然引入而在层中激起的电流系，恰好分布得足以在层的表面上抵消由那一体系引起的磁效应。

因此，在层的表面上，从而也在层负侧的一切点上，初电流系就产生一种恰好和磁体系在正侧产生的效应相等而反向的效应。我们可以用一种说法来表示这一情况；那就是说，电流的效应和磁体系的一个像的效应相等价，那个像在位置上和原体系相重合，但是在磁化方向及电流方向上却和原体系相反。这样的像叫做负像。

层中的电流在层的正侧一点上的效应，和磁体系的一个正像

①[方程(20)和(22)已被证实为只有在层的表面上即当 z=0 时才是正确的。表示式(23)普遍地满足(22)。从而在层的表面上也满足(22)。它也满足问题的其他条件，从而是一个解。“任何别的解必然和这个解差一个闭合电流系，这些电流依赖于层的初状态但并不是由任何外因引起的，从而它们必然很快地衰减。”请参阅克勒克·麦克斯韦教授的论文，见 RoyalSoc.Proc,xx.pp.160—168．]

在层的负侧所产生的效应相等价，这时对应点的连线被层所垂直平分。

因此，由层中的电流在层的任一侧的一点上引起的作用，可以看成由和该点异侧的一个磁体系的像所引起的作用；这个像是一个正像或负像，随该点位于层的正侧或负侧而定。

661．]如果层的导电率为无限大，则 R=0，从而(24)式的右端为零，于是像就将代表层中的电流在任何时刻的效应。

在实在层的事例中，R 具有某一个有限的值。因此，刚刚描述的那种像就只能在突然引入磁体系以后的最初时刻代表电流的效应。电流将立即开始衰减，而这种衰减的效应将准确地得到表示，如果我们假设两个像开

[①] [方程(20)和(22)已被证实为只有在层的表面上即当 z=0 时才是正确的。表示式(23)普遍地满足(22)。从而在层的表面上也满足(22)。它也满足问题的其他条件，从而是一个解。“任何别的解必然和这个解差一个闭合电流系，这些电流依赖于层的初状态但并不是由任何外因引起的，从而它们必然很快地衰减。”请参阅克勒克·麦克斯韦教授的论文，见 RoyalSoc.Proc,xx.pp.160—168．]

始以常速度 R 从他们的原始位置而沿着由层画起的法线方向运动的话。

662．]现在我们已经准备好，可以考察由位于层的正侧的任何一个磁体系或电磁体系 M 在层中感应出来的电流系了，这时 M 的位置和强度可以按任意方式发生变化。

和以前一样，设 P′是通过方程(3)、(9)等等来据以导出这一体系之直

接作用的那个函数，则 $\frac{dP'}{dt}\alpha$ 将是和由 $\frac{dM}{dt}\alpha$ 来表示的体系相对应的函数。这个量就是 M 在时间 δt 中的增量，它可以看成本身就表示着一个磁体系。

如果我们假设在时刻t在层的负侧构成了体系 $\frac{dM}{dt}\alpha$ 的一个正像，则由这个像在层的正侧的任一点上引起的磁作用将和在 M 变化以后的最初时刻由这种变化在层中感应出来的电流的磁作用相等价；而且这个像将继续和层中的电流相等价，如果它一旦形成就以常速度 R 沿负 z 方向而运动的话。

如果假设在每一相继的时间元中都构成一个这样的像，而且它一旦形成就开始以速度 R 由层离去，我们就将得到一种像列的观念，列中的最后一个像正在形成中，而所有其余的像则正在像一个刚体那样以速度 R 而离开层。

663．]如果 P′是起源于磁体系之作用的一个随便什么样的函数，我们就可以通过下述手续来求出起源于层中的电流的对应函数 P，而这种手续不过是像列理论的符号表示而已。

设 P_τ 代表 P（起源于层中电流的函数）在时刻 t-τ 在点(x，y，z+Rτ)上的值，并设 P'_τ 代表 P′（起源于磁体系的函数）在时刻 t-τ 在点(x，y，-(z+Rτ)上的值。于是就得到

$$\frac{dP_\tau}{d\tau}=R\frac{dP_\tau}{dz}-\frac{dP_\tau}{dt}, \qquad (25)$$

从而方程(21)就变成

$$\frac{dP_\tau}{d\tau}=\frac{dP'_\tau}{dt}, \qquad (26)$$

而对 τ 从 τ=0 积分到 τ=∞，我们就得到作为函数 P 的值的

$$P=-\int\frac{dP'_\tau}{dt}d\tau \qquad (27)$$

由此我们就将像在方程(3)、(9)等等中一样通过导数而得出层的一切性质。[①]

①{这种证明可以安排如下：设■τ是 P 在时刻 t-τ 在点 x、y、-(z+Rτ)的值，其余的符号和正文中的相同。于是既然■是 x、y、z+Rτ、t-τ

[①] {这种证明可以安排如下：设■τ是 P 在时刻 t-τ 在点 x、y、-（z+Rτ）的值，其余的符号和正文中的相同。于是既然■τ是 x、y、z+R■、t-τ 的函数，我们就有 而既然由前面的小注可知方程(21)在场中一切点上都得到满足而不仅仅是在平面上得到满足，我们就有 由此即得 但是既然 P 在任何点上都和在对平面层而言的像点上具有相同的值，我们就有 ■τ＝Pτ 由此即得

的函数，我们就有

$$\frac{d\blacksquare_\tau}{d\tau}=R\frac{d\blacksquare_\tau}{dz}-\frac{d\blacksquare_\tau}{dt};$$

而既然由前面的小注可知方程(21)在场中一切点上都得到满足而不仅仅是在平面上得到满足，我们就有

$$\frac{d\blacksquare_\tau}{d\tau}=\frac{dP'}{dt},$$

由此即得

$$\blacksquare_\tau=-\int_0^\infty\frac{dP'_\tau}{dt}d\tau;$$

664．]作为此处所示手续的一个例子，让我们考虑以均匀速度沿直线而运动的一个具有单位强度的单独磁极的事例。

设磁极在时刻 t 的座标是

$\xi=ut$，$\eta=0$，$\zeta=c+\blacksquare t$.

在时刻 t-τ 求得的磁极之像的座标是

$\xi=u(t-\tau)$，$\eta=0$，$\zeta=-(c+\blacksquare(t-\tau)+R_\tau)$，

而如果 r 是这个像离开点(x，y，z）的距离，则

$$r^2=(x-u(t-\tau))^2+y^2+(z+c+\blacksquare(t-\tau)+R_\tau)^2$$

为了求出由像列引起的势，我们必须计算积分

$$-\frac{d}{dt}\int_0^\infty\frac{dr}{r}$$

如果我们写出

$Q^2=u^2+(R-\blacksquare)^2$，

则有

$$\int_0^\infty\frac{d\tau}{r}=-\frac{1}{Q}\log\left\{Qr+u(x-ut)+(R-\blacksquare)(z+c+\blacksquare t\right\}+\text{一个无限大的项},$$

但是当对 t 微分时后一项就会消失，因为这一表示式中的 r 值是通过在上面的 r 表示式中令 r=0 来求得的。把这一表示式对 t 求导数并令 t=0，我们就得到由像列引起的磁势

但是既然 P 在任何点上都和在对平面层而言的像点上具有相同的值，我们就有

$\blacksquare_\tau=P$

由此即得

$$P_\tau=-\int_0^\infty\frac{dP'_\tau}{dt}d\tau$$

$$\Omega=\frac{1}{Q}\frac{Q\dfrac{\blacksquare(z+c)-ux}{r}-u^2-\blacksquare^2+R\blacksquare}{Qr+ux+(R-\blacksquare)(z+c)}$$

通过对 x 或 z 求这一表示式的导数，我们就得到任意点上分别平行于 x 或 z 的磁力分量；而通过在这些表示式中令 x=0、z=c 以及 r=2c，我们就得到作用在运动磁极本身上的各分力的值如下：

$$X=-\frac{1}{4c^2}\frac{u}{Q+R-\blacksquare}\left\{1+\frac{\blacksquare}{Q}-\frac{u^2}{Q(Q+R-\blacksquare)}\right\},$$

665．]在这些表示式

$$Z=-\frac{1}{4c^2}\left\{\frac{\blacksquare}{Q}-\frac{u^2}{QQ+R-\blacksquare}\right\}.$$

中，我们必须记得运动被假设为在所考虑的时间以前就已经进行了一段无限长的时间。因此我们就不应该把■看成一个正量，因为不然的话磁极就必曾在一段有限的时间内穿过层。

如果我们令 u=0 而■为负，则 x=0，而

$$Z=\frac{1}{4c^2}\frac{\blacksquare}{R+\blacksquare},$$

或者说当磁极向层靠近时它就受到层的推斥。

如果令■=0，我们就得到 $Q^2=u^2+R^2$，

$$X=-\frac{1}{4c^2}\frac{uR}{Q(Q+R)}\text{和}Z=\frac{1}{4c^2}\frac{u^2}{Q(Q+R)}.$$

分力代表一种阻力，沿着和磁极运动方向相反的方向而作用在磁极上。对于给定的 R 值来说，X 当 u=1.27R 时有极大值。

① {这些表示式可以写成更简单的形式：

$$X=-\frac{1}{4c^2}\frac{R}{Q}\frac{u}{R+R-\blacksquare},$$

$$Z=\frac{1}{4c^2}(1-\frac{R}{Q})\}$$

当层是一个非导体时，R=∞而 X=0.

当层是一个理想导体时，R=0 而 X=0.

分力 Z 代表层对磁极的一个推斥力。它随速度的增大而增大，而最后当速度为无限大时变成 $\frac{1}{4c^2}$．当R为零时它也具有同一个值。

666．]当磁极沿着一条平行于层的曲线而运动时，计算就变得更加繁复，但是很容易看出，像列之最靠近的部分的效应就在于产生一个沿着和磁极运动方向相反的方向而作用在磁极上的力。直接跟在这一部分后面的那一部分像列的效应，和其磁轴在某一时间以前平行于磁极运动方向的一个磁体的效应种类相同。既然这一磁体的最近磁极是和运动磁极同名的，力就包括两部分：一部分是推斥力，另一部分是一个平行于以前的的运动方向的力，但其方向是向后的。这个力可以分解成一个阻力和一个指向运动磁极的路径的凹侧的力。

667．]我们的探讨不足以使我们能够解决那种由于导电层的不连续性或具有边界而致使电流系不能完全形成的事例。

然而很容易看出，如果磁极是平行于层的边沿而运动的，则靠近边沿的电流将被削弱。由此可见，由这些电流所引起的力将较小，从而就不仅会有一个较小的阻力，而且，既然推斥力在靠近边沿的那一侧是最小的，磁极就会受到指向边沿的吸引力。

① {这些表示式可以写成更简单的形式：

阿喇戈旋转盘的理论

668．]阿喇戈发现[1]，放在一个旋转着的金属盘附近的磁体会受到一个倾向于使它随盘而转动的力，尽管当盘为静止时在它和磁体之间是没有作用力的。

这种旋转盘的作用起初被认为是起源于一个新种类的感生磁化，直到法拉第[1]利用盘子通过磁力场的运动而在盘中感应出来的电流来解释了它为止。

为了确定这些感生电流的分布以及他们对磁体的影响，我们可以利用已经求得的关于受到运动磁体作用的一个静止导电层的结果，这时我们要用到在第 600 节中给出的相对于运动座标系来处理电磁方程的方法。然而，既然这个事例有一种特殊的重要性，我们就将用一种直接的方式来处理它；我们将从这样一条假设开始：磁体的各个极都离盘的边沿很远，以致导电层的有界性的效应可以忽略不计。

利用以前各节(656—667)中的相同符号，我们就求得｛第 598 节中的方程组(B)，将Ψ改写成ψ｝分别平行于 x 和 y 的电动强度分量

$$\left.\begin{aligned}\sigma u &= \gamma\frac{dy}{dt}-\frac{d\psi}{dx},\\ \sigma v &= -\gamma\frac{dx}{dt}-\frac{d\psi}{dy},\end{aligned}\right\}\qquad (1)$$

式中γ是磁力垂直于盘的分量。

如果我们把 u 和 v 用电流函数φ表示出来，就有

$$u=\frac{d\phi}{dy},\ v=-\frac{d\phi}{dx},\qquad (2)$$

而如果盘子是以角速度ω而绕 z 轴转动的，就有

$$\frac{dy}{dt}=\omega x,\ \frac{dx}{dt}=-\omega y\qquad (3)$$

把这些值代入方程组(1)中，我们就得到

$$\sigma\frac{d\phi}{dy}=\gamma\omega x-\frac{d\psi}{dx},\qquad (4)$$

$$-\sigma\frac{d\phi}{dx}=\gamma\omega y-\frac{d\psi}{dy}\qquad (5)$$

用 x 乘(4)式而用 y 乘(5)式并相加，我们就得到

$$\sigma(x\frac{d\phi}{dx}-y\frac{d\phi}{dx})\gamma\omega(x^2+y^2)-(x\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{dy})\qquad (6)$$

用 y 乘(4)式而用-x 乘(5)式并相加，我们就得到

$$\sigma(x\frac{d\phi}{dx}+y\frac{d\phi}{dy})=x\frac{d\psi}{dy}-y\frac{d\psi}{dx}\qquad (7)$$

如果现在我们把这些方程用 r 和θ表示出来，此处

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ (8)

---

[1] AnnalesdeChimieetdePhysique,Tome32,pp.213—223，1826．

[1] Exp.Res.,81．

则这些方程变成

$$\sigma\frac{d\phi}{d\theta}=\gamma\omega r^2-r\frac{d\psi}{dr}, \qquad (9)$$

$$\sigma r\frac{d\phi}{dr}=\frac{d\psi}{d\theta}. \qquad (10)$$

方程(10)可以得到满足，如果我们假设 r 和 θ 的一个任意函数并令

$$\phi=\frac{d\chi}{d\theta} \qquad (11)$$

$$\psi=\sigma r\frac{d\chi}{dr} \qquad (12)$$

把这些值代入方程(9)中，该方程就变成

$$\sigma(\frac{d^2\chi}{d^2}+r\frac{d}{dr}(r\frac{d\chi}{dr}))=\gamma\omega r^2 \quad (13)$$

用σ r^2 去除一下并回到座标 x 和 y，此式就变成

$$\frac{d^2\chi}{dx^2}+\frac{d^2\chi}{dy^2}=\frac{\omega}{\sigma}\gamma \qquad (14)$$

这就是理论的基本方程，它表示了函数 X 和磁力垂直于盘的分量γ之间的关系。

设 Q 是由以面密度 X 分布在盘上的吸引性的假想物质在盘的正侧任一点上引起的势。

在盘的正表面上，有

$$\frac{dQ}{dz}=-2\pi\chi. \qquad (15)$$

由此可见，方程(14)的左端变成

$$\frac{d^2\chi}{dx^2}+\frac{d^2\chi}{dy^2}=-\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dz}(\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}). \qquad (16)$$

但是，既然 Q 在盘外面的所有各点上都满足拉普拉斯方程，那就有

$$\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}=-\frac{d^2Q}{dz^2}. \qquad (17)$$

而方程(14)就变成

$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{d^3Q}{dz^3}=\omega\gamma. \qquad (18)$$

再者，既然Q是由分布χ所引起的势，那么由分布φ或者说由 $\frac{d\chi}{d\theta}$ 所引起的势就将是 $\frac{dQ}{d\theta}$. 由此我们就得到由盘中的电流所引起的磁势的表示式

$$\Omega_1=-\frac{d^2Q}{d\theta dz}, \quad (19)$$

而关于由电流引起的磁力垂直于盘的分量就有

$$\gamma_1=-\frac{d\Omega}{dz}=\frac{d^3Q}{d\theta dz^2}. \quad (20)$$

如果 Q_2 是由外界磁体引起的磁势，而且我们写出

$$P' = -\int \Omega_2 dz, \qquad (21)$$

则由各该磁体引起的磁力垂直于盘的分量将是

$$\gamma^2 = \frac{d^2 P'}{dz^2}. \qquad (22)$$

现在，记得

$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$，

我们就可以把方程(18)写成

$$\frac{\sigma}{2\pi}\frac{d^3 Q}{dz^3} - \omega\frac{d^3 Q}{d\theta dz^2} = \omega\frac{d^2 P'}{dz^2}. \quad (23)$$

对z求两次积分并把$\dfrac{\sigma}{2\pi}$写成R，就有

$$(R\frac{d}{dz} - \omega\frac{d}{d\theta})Q = \omega P'. \quad (24)$$

如果用从盘轴量起的距离 r 以及两个满足

$$2\xi = z + \frac{R}{\omega}\theta, \quad 2\zeta = z - \frac{R}{\omega}\theta, \qquad (25)$$

的新变量 ξ 和 ζ 把 P 和 Q 的值表示出来，则通过对 ζ 求积分，方程(24)就变成

$$Q = \int \frac{\omega}{R} P' d\zeta. \qquad (26)$$

669．]当把这个表示式的形式和在第 662 节中给出的方法联系起来加以考虑时，它就表明盘中电流的磁作用是和磁体系的一个螺纹线状的像列的作用相等价的。

如果磁体系只包括单独一个强度为一单位的磁极，则螺纹线将位于一个柱面上，该柱面的轴线就是盘子的轴线，而柱面则通过磁极。螺纹线将从磁极对盘而言的光学像的位置开始。相邻螺纹之间的平行于轴线的距离将是 2π■．像列的磁效应将和螺纹线受到磁化时的效应相同，如果磁化到处是沿着垂直于轴线的螺纹线切线方向的，而其磁化强度则恰好使每一小部分螺纹线的磁矩在数值上等于该部分在盘面上的投影长度。

关于对磁极的影响的计算将是很繁复的，但是很容易看到这种影响包括以下各部分：

(1)一个平行于盘的运动方向的拖曳力。

(2)一个从盘开始的推斥力。

(3)一个指向盘轴的力。

当磁极靠近盘的边沿时，这些力中的第三个力可能被在第 667 节中指出了的那个指向盘沿的力所超过[①]。

所有这些力都由阿喇戈观察到了，并且由他在 1826 年的 An-nales de Chimie 上描述过了。也请参阅 Felici，inTortolini’sAnnals，iv，p.173(1853)，andv，P.35；andE.Jochmann，inCrelle'sJournal，lxiii，PP.158and329；alsoinPogg，Ann，cxxii，P.214(1864)。在后一篇论文中，

[①] {如果 a 是一个磁极离盘轴的距离，c 是它在盘上的高度，我们就可以证明，对于很小的ω来说，作用在磁极上的拖曳力是 m2aω/8c2R，斥力是 m2aω28c2R2，而指向盘轴的力是 m2aω24cR2．}

给出了确定各电流对他他们自己的感应所必需的方程，但是这一部分作用在结果的后来计算中却被略去了。此处所给出的像方法发表在 1872 年 2 月 15 日的 ProceedingsoftheRoyal Society 上。

球形电流层

670.]设φ是一个球形电流层上任一点 Q 处的电流函数,而 P 是由展布在球面上而面密度为φ的一个假想物质层在一个给定点上引起的势，现在要求作为 P 的函数来求出电流层的磁势和矢势。

用 a 代表球的半径，用 r 代表从球心到一个给定点的距离，而用 p 代表给定点和球面上电流函数为φ的那个点 Q 之间的距离的倒数。

电流层在任何一个并不位于层物质内部的点上的作用，和一个其

图 39

强度在任何一点上都在数值上等于电流函数的磁壳的作用相等同。

按照第 410 节，磁壳和一个位于点 P 的单位磁极之间的相互势是

$$\Omega=\iint\phi\frac{dp}{da}dS.$$

既然 p 是 r 和 a 的一个-1 次的齐次函数，就有

$$a\frac{dp}{da}+r\frac{dp}{dr}=-p,$$

或者写成

$$\frac{dp}{da}=-\frac{1}{a}\frac{d}{dr}(pr),$$

而且也有

$$\Omega=-\iint\frac{\phi}{a}\frac{d}{dr}(pr)dS.$$

既然 r 和 a 在整个面积分的计算中都为常量，就有

$$\Omega=-\frac{1}{a}\frac{d}{dr}((r\iint\phi pdS).$$

但是，如果 P 是由面密度为φ的一个假想物质层所引起的势，则

$$P=\iint\phi pdS,$$

而电流层的磁势Ω就可以用 P 表示出来如下：

$$\Omega=-\frac{1}{a}\frac{d}{dr}(Pr).$$

671．]我们可以根据第 416 节中的表示式来确定矢势的 x 分量 F，

$$F=\iint\phi(m\frac{dp}{d\zeta}-n\frac{dp}{d\eta})ds,$$

式中ξ、η、ζ是面积元 dS 的座标，而 l、m、n 是法线的方向余弦。既然层是一个球面，法线的方向余弦就是

$$l=\frac{\xi}{a},\quad m=\frac{\eta}{a},\quad n=\frac{\zeta}{a},$$

但是

$$\frac{dp}{d\zeta}=(y-\eta)p^3=-\frac{dp}{dz},$$

而且

$$\frac{dp}{d\eta}=(y-\eta)p^3=-\frac{dp}{dy}\text{，}$$

于是就得到

$$m\frac{dp}{d\zeta}-n\frac{dp}{d\eta}=\left\{\eta(z-\zeta)-\zeta(y-\eta)\right\}\frac{p^3}{a},$$

$$=\left\{z(\eta-y)-y(\zeta-z)\right\}\frac{p^3}{a},$$

$$=\frac{z}{a}\frac{dp}{dy}-\frac{y}{a}\frac{dp}{dz}\text{。}$$

乘以 ϕdS 并在球面上求积分，我们就得到

$$F=\frac{z}{a}\frac{dP}{dy}-\frac{y}{a}\frac{dP}{dz}\text{。}$$

同理可得，$G=\frac{x}{a}\frac{dP}{dz}-\frac{z}{a}\frac{dP}{dx},$

$$H=\frac{y}{a}\frac{dP}{dx}-\frac{x}{a}\frac{dP}{dy}\text{。}$$

分量为 F、G、H 的矢量■显然垂直于矢径 r，而且也垂直于其分量为 $\frac{dP}{dx}$，$\frac{dP}{dy}$ 和 $\frac{dP}{dz}$ 的那个矢量。如果我们定出半径为 r 的球面和按照等差间隔而表示着 P 值的那些等势面的交线，则这些交线的方向将指示■的方向，而其密度则将指示这一矢量的量值。

按照四元数的语言，就有

$$■=\frac{1}{a}V\text{．}\rho\nabla P\text{。}$$

672．]如果作为球内的 P 值，我们假设

$$P=A\left(\frac{r}{a}\right)^i Y_i\text{，}$$

式中 Y_i 是 i 阶的球谐函数，则在球外将有

$$P'=A\left(\frac{a}{r}\right)^{i+1} Y_i\text{。}$$

既然 $\left(\frac{dP}{dr}-\frac{dP'}{dr}\right)_{r=a}=4\pi\phi$，电流函数 ϕ 就由下列方程给出：

$$\phi=\frac{2i+1}{4\pi}\frac{1}{a}AY_i\text{。}$$

球内的磁势是

$$\Omega=-(i+1)\frac{1}{a}A\left(\frac{r}{a}\right)^i Y_i\text{，}$$

而球外的磁势是

$$\Omega'=i\frac{1}{a}A\left(\frac{a}{r}\right)^{i+1} Y_i\text{。}$$

例如，设要借助于绕成球壳状的一根导线来在壳内产生一个均匀磁力 M．在这一事例中，球内的磁势是一个一阶的体谐函数，其形式是

$\Omega=-Mr\cos\theta$，

式中M是磁力。由此即得$A=\frac{1}{2}a^2M$，而

$$\phi=\frac{3}{8\pi}M a\cos\theta.$$

因此，电流函数和到球的赤道面的距离成正比，从而任何两个小圆之间的匝数必须正比于二圆之间的距离。

如果N是总匝数而γ是每一匝中的电流强度，则

$$\phi=\frac{1}{2}N\gamma\cos\theta.$$

由此可得，线圈内的磁力是

$$M=\frac{4\pi}{3}\frac{N\gamma}{\alpha}.$$

673．]现在让我们确定一种绕线方法，来在球内产生一个具有二阶带谐体函数形式的磁势

$$\Omega=-3\frac{1}{a}A\frac{r^2}{a^2}(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}),$$

此处

$$\phi=\frac{5}{4\pi}\frac{A}{a}(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}).$$

如果总匝数是N，则极点和极角距离θ之间的匝数是$\frac{1}{2}N\sin^2\theta$.

纬度45°处的匝数最密。在赤道上，绕线方向改变，而在另一半球上的各匝是反向绕成的。

设γ是导线中的电流强度，则在球壳内部有

$$\Omega=-\frac{4\pi}{5}N\gamma\frac{r^2}{a^2}(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}).$$

现在让我们考虑形如一条平面闭合曲线的导体，放在球壳内部的任何地方，而其平面垂直于球壳的轴线。为了求得它的感应系数，我们必须令$\gamma=1$并在曲线所包围的平面上求$-\frac{d\Omega}{dz}$的面积分。

喏，我们有

$$\Omega=-\frac{4\pi}{5a^2}N\left\{z^2-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\},$$

以及

$$-\frac{d\Omega}{dz}=\frac{8\pi}{5a^2}Nz.$$

因此，如果S是闭合曲线所包围的面积，则感应系数是

$$M=\frac{8\pi}{5a^2}NSz.$$

如果这个导体中的电流是γ′，则由第583节可知将有一个沿z方向的作用力Z，此处

$$Z=\gamma\gamma'\frac{dM}{dz}=\frac{8\pi}{5a^2}NS\gamma\gamma',$$

而既然此式并不依赖于 x、y、z，这个力就将是相同的，不论电路放在壳

内的什么地方。

674．]设一物体沿 z 方向被磁化到强度 I，通过把这个物体换成其形状如物体的表面而其电流函数是

$$\phi = Iz \quad (1)$$

的一个电流层，就可以把在第 437 节中描述了的由泊松给出的方法应用到这个电流层上。层中的电流将是出现在平行于 xy 面的平面的，而沿着厚度为 dz 的一个薄片运行的电流强度将是 Idz．

这一电流层在其外部任一点上引起的磁势将是

$$\Omega = -I\frac{dV}{dz}\text{；} \quad (2)$$

{式中 V 是当面密度为 1 时由层引起的重力势。}在球内的任一点上，磁势将是

$$\Omega = -4\pi Iz - I\frac{dV}{dz}\text{．} \quad (3)$$

矢势的分量是

$$F = I\frac{dV}{dy}\text{，} G = -I\frac{dV}{dx}\text{，} H = 0\text{．} \quad (4)$$

这些结果可以应用于出现在实际中的若干事例。

675．](1)任意形状的平面电路。

设 V 是由一个任意形状的而其面密度为 1 的平面层所引起的势。如果我们把这个平面层换成一个强度为 I 的磁壳或换成一个沿其边界运行的强度为 I 的电流，则Ω的值和 F、G、H 的值将是上面所给出的那些。

(2)对于一个半径为 a 的实心球来说，

$$V = \frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{r}\text{，当}r\text{大于}a\text{时，} \quad (5)$$

$$V = \frac{2\pi}{3}\left(3a^2 - r^2\right)\text{，当}r\text{小于}a\text{时。} \quad (6)$$

由此可得，如果球被沿 z 方向磁化到强度 I，则磁势将是

$$\Omega = \frac{4\pi}{3}I\frac{a^3}{r^3}\text{，在球外，} \quad (7)$$

$$\Omega = \frac{4\pi}{3}Iz\text{，在球内。} \quad (8)$$

如果球不是被磁化而是沿着等距的圆周绕上了导线，设其平面相距一个单位距离的两个小圆之间的总电流强度为 I，则球外的Ω值仍和从前一样，但在球内却有

$$\Omega = -\frac{8\pi}{3}Iz\text{．} \quad (9)$$

这就是在第 672 节中已经讨论过的那个事例。

(3)沿着给定的直线而被均匀磁化的一个椭球的事例已经在第 437 节中讨论过了。

如果椭球被在平行而等距的平面上绕有导线，则椭球内部的磁力将是均匀的。

(4)一个柱状的磁体或螺线管

676．]如果物体是一个截面形状为任意的柱体，两端的底面垂直于它的母线，如果 V_1 是由一个和柱体的正底面相重合的面密度为 1 的平面层在点(x、y、z)上引起的势，而 V_2 是由一个和负底面相重合的面密度为 1 的平面层在同一点上引起的势，设柱体是沿纵向被均匀磁化到单位强度的，则点(x，y，z)上的势将是

$$\Omega = V_1 - V_2 \text{．} \quad (10)$$

如果柱体不是一个被磁化了的物体而是在上面均匀地绕了导线，每单位长度上的匝数是 n，而且导线中通有强度为γ的电流，则螺线管外的磁势仍和从前一样是

$$\Omega = n\gamma(V_1 - V_2)\text{，} \quad (11)$$

但是在由螺线管及其两个平面端所限定的空间中却有

$$\Omega = n\gamma(-4\pi z + V_1 - V_2)\text{．} \quad (12)$$

磁势在螺线管的平面端上是不连续的，但磁力却是连续的。

如果正负平面端的质心分别到点(x，y，z)的距离 r_1、r_2 和螺线管的横向线度相比是很大的，我们就可以写出

$$V_1 = \frac{A}{r_1}\text{，}\ V_2 = \frac{A}{r_2}\text{，} \quad (13)$$

式中 A 是每一截面的面积。

因此，螺线管外面的磁力是很小的，而螺线管内部的磁力则近似地是平行于轴的正方向并等于 4πnγ的一个力。

如果柱体的截面是一个半径为 a 的圆，则 V_1 和 V_2 的值可以表示成在 ThomsonandTait，sNaturalPhilosophy，Art．546，Ex．II．中给出的球谐函数的级数，

$$V = 2\pi\left\{-rP_1 + a + \frac{1}{2}\frac{r^2}{a}P_2 - \frac{1.1}{2.4}\frac{r^4}{a^3}P_4 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{r^6}{a^5}I_6 - \cdots\right\}\text{，}$$

$$\text{当 } r < a \text{ 时，} \quad (14)$$

$$V = 2\pi\left\{\frac{1}{2}\frac{a^2}{r} - \frac{1.1}{2.4}\frac{a^4}{r^3}P_2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}\frac{a^6}{r^5}P_4 - \cdots\right\}\text{，当 } r > a \text{ 时。} \quad (15)$$

在这些表示式中，r 是从螺线管的一个圆形端的中心到点(x，y，z)的距离，而带谐函数 P_1、P_2 等等则是对应于 r 和柱轴之间的夹角θ的那些函数。

其中第一个表示式对z的微分系数当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时是不连续的，但是我们必须记得，在螺线管的内部，我们必须在由这一表示式导出的磁力上加一个纵向力 4πnγ。

677．]现在让我们考虑一个很长螺线管，它长得使依赖于到端点的距离的各项在我们所考虑的空间部分中可以忽略不计。

穿过在螺线管内部画出的任一闭合曲线的磁感是 4πnγA′，此处 A′是曲线在垂直于螺线管轴线的平面上的投影面积。

如果闭合曲线位于螺线管之外，则当它包围螺线管时穿过它的磁感是 4πnγA，此处 A 是螺线管截面的面积。如果闭合曲线并不包围螺线管，则穿过它的磁感是零。

如果一根导线在螺线管上绕了 n′匝，则它和螺线管之间的感应系数是

$M=4\pi nn'A$.(16)

通过假设这些匝和螺线管上的 n 匝相重合，我们就发现，在离两端足够远的地方，螺线管的单位长度的自感系数是

$L=4\pi n^2A$.(17)

在一个螺线管的端点附近，我们必须照顾到那些依赖于螺线管平面端上的假想磁量分布的项。这些项的效应，就是使螺线管和一个包围它的电路之间的感应系数小于当电路在远离两端处绕过一个很长的螺线管时它所具有的值 $4\pi nA$.

让我们考虑具有相同长度 l 的两个同轴圆柱螺线管。设外面一个螺线管的半径是 c_1，它上面绕有每单位长度 n_1 匝的导线。设里面一个螺线管的半径为 c_2，其单位长度上的匝数是 n_2，于是，如果我们忽略端效应，则二螺线管间的感应系数是

$M=Gg$，(18)

式中 $G=4\pi n_1$，(19)

而 $g=\pi c_2^2 l n_2$(20)

678.]为了确定螺线管的正端的效应，我们必须计算形成内管之端面的一个圆盘对外管的感应系数。为此目的，我们取在方程(15)中给出的 V 的第二个表示式并把它对 r 求导数。然后我们用 $2\pi r^2 d\mu$ 去乘这个表示式并把它从 $\mu=1$ 到 $\mu=\dfrac{z}{\sqrt{z^2+c_1^2}}$ 对 μ 求积分。这就给出在离正端 z 距离处对外螺线管上单独一匝而言的感应系数。然后我们把这一结果乘以 dz 并从 z=l 到 z=0 对 z 求积分。最后我们再把结果乘以 n_1n_2，于是就得到其中一个管端在减小感应系数方面的效应。

于是我们就得到两个柱状螺线管之间的互感系数 M 的表示式，

$$M=4\pi^2 n_1 n_2 c_2^2 (l-2c_1 a)，(21)$$

式中

$$a=\frac{1}{2}\frac{c_1+l-r}{c_1}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2.3}\frac{c_2^2}{c_1^2}(1-\frac{c_1^3}{r^3})$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{4.5}\frac{c_2^4}{c_1^4}(-\frac{1}{2}-2\frac{c_1^5}{r^5}+\frac{5}{2}\frac{c_1^7}{r^7}+\cdots)，(22)$$

此处为了简单用 r 代替了 $\sqrt{l^2+c_1^2}$.

由此可见，在计算两个同轴螺线管的互感系数时，我们必须在表示式(20)中用改正过的长度 $l-2c_1a$ 来代替真实长度 l；在这种改正中，人们假设从每一端上切掉了一个等于 ac_1 的部分。当螺线管和它的外半径相比是很长的时，就有

$$a=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}\frac{c_2^2}{c_1^2}-\frac{1}{128}\frac{c_2^4}{c_1^4}+\cdots.(23)$$

679.]当一个螺线管有若干层导线而其直径的单位长度上有 n 层时，在一个厚度 dr 上就有 ndr 层，从而我们就有

$G=4\pi\int n^2 drg=\pi l\int n^2 r^2 dr$. (24)

设导线的粗细是均匀的，而感应发生在一个外螺线管和一个内螺线管之间，外管的外半径和内半径分别是 x 和 y，而内管的外半径和内半径分别是 y 和 z，那么，忽略端效应，就有

$$Gg=\frac{4}{3}\pi^2 ln_1{}^2(x-y)(y^3-z^3). \quad (25)$$

当 x 和 z 给定而 y 可以变化时，此式有极大值的条件是

$$x=\frac{4}{3}y-\frac{1}{3}\frac{z^3}{y^2} \qquad (26)$$

对于一个无铁心的感应机来说，此式给出了原线圈和副线圈的厚度之间的最佳关系。

如果存在一个半径为 z 的铁心，则 G 仍和以前一样，但是 g 却变成

$$g=\pi l\int n^2(r^2+4\pi kz^2)dr, \qquad (27)$$

$$=\pi ln^2\left(\frac{y^3-z^3}{3}+4\pi kz^2(y-z)\right). \quad (28)$$

如果 y 已给定，则使 g 有极大值的 z 值是

$$z=\frac{2}{3}y\frac{12\pi k}{12\pi k+1}. \qquad (29)$$

当就像在铁的事例中那样k是一个很大的数时，就近似地有$z=\frac{2}{3}y$.

如果我们现在令 x 保持不变而令 y 和 z 变化，则当 k 很大时得到 Gg 的最大值条件如下：

x∶y∶z∶∶4∶3∶2．(30)

设一个长螺线管的外半径和内半径为 x 和 y，并有一个半径为 z 的长铁芯，则它的单位长度的自感系数是

$$4\pi\int_y^x\left\{\pi\int_\rho^x n^2(\rho^2+4\pi kz^2)dr+\pi\int_y^\rho n^2(r^2+4\pi kz^2)dr\right\}n^2 d\rho,$$

$$=\frac{2}{3}\pi^2 n^4(x-y)^2(x^2+2xy+3y^2+24\pi kz^2). \quad (31)$$

680．]到此为止，我们一直假设导线具有均匀的粗细。现在我们将确定不同层中导线粗细的变化所必须遵循的定律，以求在原线圈或副线圈的一个给定的电阻值下得到互感系数的一个极大值。

设在螺线管的每单位长度上绕有 n 匝导线，而单位长度的导线的电阻是 ρn^2。

整个螺线管的电阻是

$$R=2\pi\rho l\int n^4 r dr. \qquad (32)$$

在 R 的给定值下，G 具有极大值的条件是■，式中 C 是某一常量。

这就给出n^2正比于$\frac{1}{r}$，或者说，外管的导线粗细必须和该层半径的平方根成正比。

为了在给定的 R 值下 g 可以取极大值，应有

$$n^2 = C(r + \frac{4\pi kz^2}{r})\text{。} \quad (33)$$

由此可见，如果铁芯不存在，则内管的导线粗细应和该层半径的平方根成反比；但是，如果有一个磁化本领很高的铁芯，则导线的粗细应该更近似于和半径的平方根成正比。

无端的螺线管

681．]如果一个物体是由一个平面图形 A 绕着一条在它的平面上而不与它相交的轴线旋转而生成的，它就会有一个环的形状。如果这个环上绕有导线，使得各匝导线都位于通过环的轴线的平面上，而其总匝数是 n，则导线层的电流函数是$\phi = \frac{1}{2\pi} n\gamma\theta$，式中 θ 是对环轴而言的方位角。

如果Ω是环内的磁势而Ω′是环外的磁势，则有

$\Omega - \Omega' = -4\pi\phi + C = -2n\gamma\theta + C$.

在环外，Ω′必须满足拉普拉斯方程并在无限远处变为零。由问题的本性可知它必然只是 θ 的函数。唯一满足这些条件的Ω′值是零。因此就有

$\Omega' = 0$，$\Omega = -2n\gamma\theta + C$.

环内任一点上的磁力垂直于通过环轴的平面，而且等于$2\pi\gamma\frac{1}{r}$，式中 r 是到环轴的距离。环外没有任何磁力。

如果一条闭合曲线的形状由作为 s 之函数的它的描迹点的座标 z、γ 和 θ 来给出，此处 s 是从一个固定点算起的曲线的长度，则穿过闭合曲线的磁感可以通过沿曲线求矢势的积分来求得。矢势的分量是

$$F = 2n\gamma\frac{xz}{r^2}, \quad G = 2n\gamma\frac{yz}{r^2}, \quad H = 0\text{。}$$

于是就得到

$$2n\gamma\int_0^s \frac{z}{r}\frac{dr}{ds}ds,$$

积分沿曲线计算，如果整条曲线都位于环内的话。如果曲线完全位于环外但是包围了环，则穿过曲线的磁感是

$$2n\gamma\int_0^{s'} \frac{z'}{r'}\frac{dr'}{ds'}ds' = 2n\gamma a,$$

式中a是线性量$\int_0^{s'} \frac{z'}{r'}\frac{dr'}{ds'}ds'$，而带撇的座标不是属于闭合曲线而是属于螺线管上的单独一匝导线的。

因此，穿过包围了环的任何一条闭合曲线的磁感都是相同的，而且都等于 2nγa．如果闭合曲线并不包围环，则穿过它的磁感是零。

设有第二条导线以任意方式绕在环上，不一定和环相接触，但是却包围环共 n′次。穿过这条导线[电路]的磁感是 2nn′γa，从而一个线圈对另一线圈的感应系数 M 就是 M=2nn′a．

既然这是完全不依赖于第二条导线的形状和位置的，这些导线如果载有电流的话也不会受到作用于他们之间的任何机械力。通过令第二条导线和第一条相重合，我们就得到螺线环的自感系数

$L = 2n^2a$.

第十三章

平行电流

柱状导体

682．]在很重要的一类电装置中，电流是由一些截面近似均匀的圆柱导线来传导的；这些导线或是直的，或是他们的曲率半径远远大于他们的横截面的半径。为了作好准备来数学地处理这样的装置，我们将从一个事例开始。在这个事例中，电路包括两个很长的平行导体，两端用另外的导体互相连接，而我们将把自己的注意力集中在离导体两端很远的那一部分电路上，以便他们并非无限长这一事实不会对力的分布有任何可觉察的影响。

我们将把 z 轴取得平行于导体的方向，于是，由所考虑的那一部分场中的装置的对称性可知，一切事物都将依赖于矢势的平行于 z 的分量 H.

由方程组(A)可知，磁感的分量变成

$$a=\frac{dH}{dy}, \qquad (1)$$

$$b=-\frac{dH}{dx}, \qquad (2)$$

c=0.

为了保持普遍性，我们将假设磁感系数为μ，于是就有 a=μα，b=μβ，式中α和β是磁力的分量。

第 607 节中的电流方程组(E)给出

$$v=0,4\pi w=\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy}. \quad (3)$$

683．]如果电流是离 z 轴的距离 r 的函数，而我们写出

x=rcosθ和 y=rsinθ，(4)

并且用β来代表沿着一个方向的磁力，在那个方向上θ是垂直于通过 z 轴的平面来量度的，那么我们就有

$$4\pi w=\frac{d\beta}{dr}+\frac{1}{r}\beta=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(\beta r). \qquad (5)$$

考虑一个截面,由 xy 平面上的一个以原点为心而以 r 为半径的圆包围而成，如果 C 是通过这一截面的总电流，则有

$$C=\int_0^r 2\pi rw\,dr=\frac{1}{2}\beta r. \quad (6)$$

因此就可以看到，由分布在以 z 轴为公共轴的一些柱状层中的电流在给定点上引起的磁力，只依赖于通过介于所给点和轴线之间的那些层的电流的总强度，而不依赖于电流在不同柱状层中的分布。

例如，设导体是一条半径为 a 的均匀导线，并设通过导线的总电流为 C，于是，如果电流是均匀地分布在截面的一切部分上的，则 w 将是常量而

$$C=\pi wa^2. \qquad (7)$$

设 r 小于 a，通过半径为 r 的一个圆形截面的电流就是 $C'=\pi ur^2$. 由

此可见，在导线内部的任一点上，

$$\beta = \frac{2C'}{r} = 2C\frac{r}{a^2}. \quad (8)$$

在导线外面，

$$\beta = 2\frac{C}{r}. \quad (9)$$

在导线的材料内并不存在磁势，因为在一个载有电流的导体内，磁力并不满足有势的条件。

在导线外面，磁势是

$$\Omega = -2C\theta. \qquad (10)$$

让我们假设，导体不是一条导线而是一根金属管子，其外半径和内半径是 a_1 和 a_2，那么，如果 C 是通过管状导体的电流，则

$$C = \pi w(a_1^2 - a_2^2). \qquad (11)$$

在管内，磁力是零。在管子的金属中，r 介于 a_1 和 a_2 之间，我们有

$$\beta = 2C\frac{1}{a_1^2 - a_2^2}(r - \frac{a_2^2}{r}), \qquad (12)$$

而在管外，则

$$\beta = 2\frac{C}{r}, \qquad (13)$$

这个值是和电流通过实心导线时的值相同的。

684．]任一点上的磁感是 $b=\mu\beta$，而既然由方程(2)可有

$$b = -\frac{dH}{dr}, \quad (14)$$

那就得到

$$H = -\int \mu\beta dr. \qquad (15)$$

管外的 H 值是

$$A - 2\mu_0 C \log r, \qquad (16)$$

式中 μ_0 是管外空间中的 μ 值，而 A 是一个常量，其值依赖于返回电流的位置。

在管子的物质中，

$$H = A - 2\mu_0 C \log a_1 + \frac{\mu C}{a_1^2 - a_2^2}(a_1^2 - r^2 + 2a_2^2 \log\frac{r}{a_1}). \quad (17)$$

在管内的空间中，H 是常量而且

$$H = A - 2\mu_0 C \log a_1 + \mu C(1 + \frac{2a_2^2}{a_1^2 - a_2^2}\log\frac{a_2}{a_1}). \quad (18)$$

685．]设电流由一个返回电流来补全，返回电流沿一条平行于第一条管子的导线或管子而流动，二电流的轴线之间的距离是 b．为了确定体系的动能，我们必须计算积分

$$T = \frac{1}{2}\iiint Hwdxdydz. \quad (19)$$

如果我们把注意力集中在体系的一个部分，该部分介于两个垂直于导体的轴线而相距为 l 的平面之间，则表示式变为

$$T=\frac{1}{2}l\iint Hw\,dx\,dy. \quad (20)$$

如果用一个撇号来区分属于返回电流的量，则我们可以把此式写成

$$\frac{2T}{l}=\iint Hw'dx'dy'+\iint H'w\,dx\,dy+\iint Hw\,dx\,dy+\iint H'w'dx'dy'. \quad (21)$$

既然电流在管外任一点上的作用和把相同的电流集中在管轴上时的作用相同，返回电流的截面上的 H 平均值就是 $A-2\mu_0 C\log b$，而正向电流的截面上的 H′平均值就是 $A'-2\mu_0 C'\log b$. 由此可见，在 T 的表示式中，前两项可以写成

$$AC'-2\mu_0 CC'\log b, \text{和} A'C'-2\mu_0 CC'\log b.$$

按照通常的方法来求这些项的积分，把结果加起来并记得 $C+C'=0$，我们就得到动能T的值。把这个值写成 $\frac{1}{2}LC^2$，式中L是由两个导体构成的体系的自感系数，我们就得到长度为 l 的那一部分体系的自感系数

$$\frac{L}{l}=2\mu_0\log\frac{b^2}{a_1a_1'}+\frac{1}{2}\mu\left[\frac{a_1^2-3a_2^2}{a_1^2-a_2^2}+\frac{4a_2^4}{(a_1^2-a_2^2)^2}\log\frac{a_1}{a_2}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\mu'\left[\frac{a_1'^2-3a_2'^2}{a_1'^2-a_2'^2}+\frac{4a_2'^4}{(a_1'^2-a_2'^2)^2}\log\frac{a_1'}{a_2'}\right]. \quad (22)$$

如果各导体是实心的导线，则 a_2 和 a_2' 为零，而

$$\frac{L}{l}=2\mu_0\log\frac{b^2}{a_1a_1'}+\frac{1}{2}(\mu+\mu'). \text{[①]} \quad (23)$$

只有在铁导线的事例中我们才有必要在计算他们的自感时照顾磁感应现象。在其他的事例中，我们可以令 μ_0、μ 和 μ' 都等于 1。导线的半径越小，他们之间的距离越大，则自感越大。两

段导线之间的推斥力 R 的计算

686．]由第 580 节，我们得到倾向于增大 b 的力为

$$X=\frac{1}{2}\frac{dL}{db}C^2,$$
$$=2\mu_0\frac{l}{b}C^2, \quad (24)$$

而当像在空气中那样 $\mu_0=1$ 时，此式就和安培的公式相一致。

687．]如果各导线的长度和他们之间的距离相比是很大的，我们就可以利用自感系数来确定起源于电流的作用的导线的张力。

如果 Z 是这种张力，则

$$Z=\frac{1}{2}\frac{dL}{dl}C^2,$$
$$=C^2\left\{\mu_0\log\frac{b^2}{a_1a_1'}+\frac{\mu+\mu'}{4}\right\}. \quad (25)$$

[①] {如果各导线是磁性的，则在他们中感应出来的磁性将扰动磁场，从而我们就不能应用以上的推理。方程(22)、(23)和(25)只有当 $\mu=\mu'=\mu_0$ 时才是严格正确的。}

在安培的一个实验中，平行导体是用一个导线浮桥来互相连接的两个汞槽。当一个电流从一个槽的端点流入而沿槽流到浮动导线的一端，并经过浮桥而沿着第二个槽流回时，浮桥就沿着槽而运动，以增长电流所流过的那一部分汞。

泰特教授曾经简化了这一实验的电学条件。他把导线换成了一个漂浮着的充了汞的玻璃虹吸管，这样电流在它的全程中就是在汞中流动的了。

这一实验有时也被举出，以证明一个电流的位于同一直线上的两个电流元是互相推斥的，并从而证明指示了共线电流元之间的这种推斥力的安培公式比没有给出共线电流元之间的任何作用的格喇斯曼公式更加正确。请参阅第 526 节。

但是，很显然，既然安培公式和格喇斯曼公式对闭合电路来说都给出相同的结果，而且我们在实验中只能有闭合的电路，那么实验的任何结果就都不能对这些理论中的任何一种理论更有利些。

事实上，两种理论都导致和以上已经给出的推斥力值恰恰相同的值；在这些公式中，平行导体之间的距离 b 都显现为一个重要的因素。

当各导体的长度并不比他们之间的距离大得多时，L 值的形式就会变得更加复杂一些。

688.〕当导体之间的距离减小时，L 的值就减小。这种减小过程的极限就是当导体互相靠紧时，也就是当 $b=a_1+a_1'$ 时。在这种事例中，如果 $\mu_0=\mu=\mu'=1$，就有

$$L=2l\left\{\log\frac{(a_1+a_1')^2}{a_1a_1'}+\frac{1}{2}\right\}\qquad(26)$$

当 $a_1=a_1'$ 时此式有极小值，那时就有

$$\begin{aligned}L&=2l\left(\log 4+\frac{1}{2}\right),\\&=2l(1.8863),\\&=3.7726l.\qquad(27)\end{aligned}$$

这就是当一根圆柱形的导线从中间对折合并在一起时的最小的自感值，导线的总长度为 2l。

既然两部分导线必须是互相绝缘的，自感就绝不会真正达到这个极限值。通过用扁平的金属片来代替圆柱形导线，自感可以不受限制地被减小。

关于沿一个柱状导体产生一个变强度电流时所需要的电动势

689.〕当一根导线中的电流具有变化的强度时，由电流对自己的感应所引起的电动势在导线截面的不同地方是不同的，这通常既是时间的函数又是离导线轴的距离的函数。如果我们假设圆柱状的导体由一束全都形成同一电路的一部分的导线沟成，以致电流被迫在线束截面的每一部分上具有均匀的强度，则我们迄今一直使用的方法将是严格适用的。然而，如果我们假设圆柱状的导体是一个实心的物体，而电流可以在该物体中服从着电动势而自由地流过，电流强度就不会在不同的离柱距离处是相同的，而

电动势本身也将依赖于电流在导线的不同柱状层中的分布。

任一点上的矢势 H、电流密度 w 和电动强度，都必须被看成时间和离导线轴的距离的函数。

通过导线截面的总电流 C 和沿着电路而起作用的电动势 E 都要被看成变量，他们之间的关系是我们必须求出的。

作为 H 的值，让我们假设

$H=S+T0+T1r^2+\cdots+Tnr^2n+\cdots$，(1)

式中 S、T_0、T_1 等等是时间的函数。

于是，由方程

$$\frac{d^2H}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dH}{dr}=-4\pi w, \qquad (2)$$

我们就得到

$-\pi w=T_1+\cdots+n^2T_nr^{2n-2}+\cdots$。(3)

如果ρ代表物质之单位体积的比电阻，则任一点上的电动强度是ρw，这个电动强度可以借助于第598节中的方程组(B)而用电势ψ和矢势H表示出来，

$$\rho w=-\frac{d\Psi}{dz}-\frac{dH}{dt}, \quad (4)$$

或者写成

$$-\rho w=\frac{d\Psi}{dz}+\frac{dS}{dt}+\frac{dT_0}{dt}+\frac{dT_1}{dt}r^2+\cdots\frac{dT_n}{dt}r^{2n}+\cdots. \quad (5)$$

比较方程(3)和(5)中的 r 同次幂的系数，就得到

$$T_1=\frac{\pi}{\rho}(\frac{d\Psi}{dz}+\frac{dS}{dt}+\frac{dT_0}{dt}), \quad (6)$$

$$T_2=\frac{\pi}{\rho}\frac{1}{2^2}\frac{dT_1}{dt}, \qquad (7)$$

$$T_n=\frac{\pi}{\rho}\frac{1}{n^2}\frac{dT_{n-1}}{dt}. \qquad (8)$$

由此我们可以写出

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{d\Psi}{dz}, \qquad (9)$$

$$T_0=T, \quad T_1=\frac{\pi}{\rho}\frac{dT}{dt}, \quad \cdots \quad T_n=\frac{\pi^n}{\rho^n}\frac{1}{(n!)^2}\frac{d^nT}{dt^n}. \quad (10)$$

690.〕为了求出总电流 C，我们必须在半径为 a 的导线截面上求出 w 的积分，

$$C=2\pi\int_0^a wrdr. \quad (11)$$

将方程(3)中的πw 值代入此式，我们就得到

$C=-(T_1a2+\cdots+nT_na^{2n+}\cdots)$。(12)

导线外面任一点上的 H 值只依赖于总电流 C 而不依赖于该电流在导线内的分布方式。因此我们可以假设 H 在导线表面上的值是 AC，此处 A 是要根据电路的一般形状而通过计算来确定的一个常量。当 r=a 时令 H=AC，我们就得到

$$AC=S+T_0+T_1a^2+\cdots+T_na^{2n}+\cdots. \quad (13)$$

如果我们写出 $\frac{\pi a^2}{\rho}=a$，则a是单位长度导线的电导值，从而我们就有

$$C=-(a\frac{dT}{dt}+\frac{2a^2}{1^2.2^2}\frac{d^2T}{dt^2}+\cdots+\frac{na''}{(n!)^2}\frac{d^nT}{dt''}+\cdots)，(14)$$

$$AC-S=T+a\frac{dT}{dt}+\frac{a^2}{1^2.2^2}\frac{d^2T}{dt^2}+\cdots+\frac{a''}{(n!)^2}\frac{d^nT}{dt''}+\cdots，(15)$$

为了从这些方程中消去 T，我们首先必须把方程(14)反转过来。于是我们得到

$$a\frac{dT}{dt}=-C+\frac{1}{2}a\frac{dC}{dt}-\frac{1}{6}a^2\frac{d^2C}{dt^2}+\frac{7}{144}a^3\frac{d^3C}{dt^3}-\frac{39}{2880}a^4\frac{d^4C}{dt'}+\cdots.$$

我们由(14)和(15)也得到

$$a(A\frac{dC}{dt}-\frac{dS}{dt})+C=\frac{1}{2}a^2\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{1}{6}a^3\frac{d^3T}{dt^3}+\frac{1}{48}a^4\frac{d^4T}{dt^4}+\frac{1}{720}a^5\frac{d^5T}{dt^5}+\cdots.$$

由最后二式，我们就得到

$$l(A\frac{dC}{dt}-\frac{dS}{dt})+C+\frac{1}{2}a\frac{dC}{dt}-\frac{1}{12}a^2\frac{d^2C}{dt^2}+\frac{1}{48}a^3\frac{d^3C}{dt^3}$$
$$-\frac{1}{180}a^4\frac{d^4C}{dt^4}+\cdots=0 \qquad (16).$$

如果 l 是线路的总长度，R 是它的电阻，而 E 是由除了电流对自己的感应以外的其他原因所引起的电动势，则有

$$\frac{dS}{dt}=\frac{E}{l},a=\frac{1}{R}, \qquad (17)$$

$$E=RC+l(A+\frac{1}{2})\frac{dC}{dt}-\frac{1}{12}\frac{l^2}{R}\frac{d^2C}{dt^2}+\frac{1}{48}\frac{l^3}{R^2}\frac{d^3C}{dt^3}-\frac{1}{180}\frac{l}{R^3}\frac{d^4C}{dt^4}+\cdots. \quad (18)$$

此式右端的第一项 RC，代表按照欧姆定律而克服电阻所需要的电动势。

第二项，$l(A+\frac{1}{2})\frac{dC}{dt}$ 代表在电流在导线截面的每一点上都有均匀强度的假说下将会用来增大电路之动电动量的电动势。其余各项代表对这个值的改正量，其起因是电流在离导线轴不同距离处并不具有均匀强度这一事实。实际的电流系比电流被约束得在整个截面上具有均匀强度的那种假想情况具有更大的自由。因此使电流强度发生一种迅速变化所要求的电动势就比按照上述假说所将要求的电动势稍小一些。

电动势的时间积分和电流的时间积分之间的关系是

$$\int Edt=R\int Cdt+l(A+\frac{1}{2})C-\frac{1}{12}\frac{l^2}{R}\frac{dC}{dt}+\cdots. \quad (19)$$

如果在开始时电流有一个常值 C_0，而在时间过程中它上升到 C_1 并从此不再变化，则包括 C 的微分系数的各项在两个积分限上都为零,从而就有

$$\int Edt=R\int Cdt+l(A+\frac{1}{2})(C_1-C_0)，(20)$$

这是和电流在整个导线中均匀分布时的动电冲量相同的值[①]。

[①] {如果导线中的电流是周期性的并按照 eipt 的规律而变化的，则当不再假设μ等于 1 时可以把和(18)相对应的方程写成　于是体系就表现得像是电阻为　而自感为　那样。因此，当电流是振动的时，有效的电阻就会增大而有效的自感就会减小。正如麦克斯韦所指出的那样，这种效应是由电流分布的改变所引起的。当电流是交流时，它就不再均匀地分布在导体的截面上，而是有一种离开中部而向导体的表面靠拢的趋势，因为这样就将减小自感，从而也将减小动能。适应着一条普遍的动力学定律，体系的惯性会使电流倾向于适当的分布，以便在通过任一截面的总电流为给定的条件下使动能具有尽可能小的值；而且，当体系动量反转方向的迅速程度增大时，这种趋势就会越来越强烈。考查一下第 685 节的方程{22}就可以看到，通过使电流在导线表面附近比在它的内部分布得更集中，就会减小体系的自感，从而也减小给定电流下的动能，因为这就对应于电流通过管状导体而流动的情况，而方程{22}表明，管状导体的自感是小于半径相同的实心导线的自感的。由于电流向管壁的集中会使通电的面积变小，我们就很容易理解为什么电阻在交变电流下会比在恒稳电流下更大。由于这个问题具有很大的重要性，这里将给出更多一些的结果，其证明见本书的“补遗卷”。也请参阅 Rayleigh，Phil.Mag．XXI．p．381。电流和电动势的关系由一个方程来表示，式中 n2=4πμip/ρ，而 J0 是零阶的贝塞耳函数。由这个函数所满足的方程　我们就有

式中 S2、S4、S6…是下一方程的根的二次方、四次方、六次方…的倒数：　或者写成　于是，利用牛顿的方法，我们就得到　当μ=1 时此式和(18)是一致的。如果 na 很大，这个级数就是不方便的，但是在那种事例中就有 J0′（ina）=-iJ0（ina）；Heine'sKugelfunctionen，p．248，2ndEdition．因此，当电流变化很很快以致μpa2/ρ是一个大量时，就有　而既然　就有　于是单位长度的电阻是　并随 p 的增大而无限增大。单位长度的自感是　而且当 p 是无限大时趋于一个根限 A。导线内部一点上的磁力可被证明为　当 na 很大时，就有　因此，如果 r=a-x，离导线表面的距离为 x 处的磁力就是　于是，如果 n 是很大的，则当我们从表面后退时磁力从而还有电流强　在 n 中，这些效应在铁导线中就会比在用非磁性金属做成的导线中更加明显得多。}

关于平面上两个图形之间的
几何平均距离②

691.〕当计算在一个具有任意给定截面的直导体中流动的电流作用在一个截面也已给定的平行导体中的电流上的电磁作用力时，我们必须求出积分

$$\iiint \log r dxdydx'dy',$$

式中 dxdy 是第一个截面的面积元，dx'dy'是第二个截面的面积元，而 r 是这些面积元之间的距离，积分首先遍及第一个截面的每一面积元，然后遍及第二个截面的每一面积元。

如果我们现在定义一条直线 R，使得上一积分等于

$A_1A_2\log R$，

式中 A_1A_2 两个截面的面积，则 R 的长度将是相同的，不论所采用的是什么长度单位和对数制。如果我们假设各截面被分成一些同样大小的面积元，则线 R 的长度乘以面积元对的数目就将等于各对面积元的距离的对数和。在这儿，R 可以看成所有各对面积元的距离的几何平均值。显然，R 的值必然介于 r 的最大值和最小值之间。

如果 R_AR_B 两个图形 A 和 B 离开第三个图形 C 的几何平均距离，而 R_{A+B} 合图形离开 C 的几何平均距离，则有

$(A+B)\log R_{A+B}=A\log R_A+B\log R_B$。

借助于这一关系式，当已知各部分图形的 R 值时我们就能确定一个组合图形的 R 值。

举例 692.〕(1)设 R 是从点 O 到直线 AB 的平均距离。设 OP 垂直于 AB，则有

$$AB(\log R+1)=AP\log OA+PB\log OB+OP\,A\widehat{O}B。$$

(2)从一条长度为 C 的直线的两端开始向同一侧画两条长度各为 a 和 b 的垂线（图 42），则有

$$ab(2\log R+3)=(c^2-(a-b)^2)\log\sqrt{c^2+(a-b)^2}+c^2\log c$$
$$+(a^2-c^2)\log\sqrt{a^2+c^2}+(b^2-c^2)\log\sqrt{b^2+c^2}$$
$$-c(a-b)\tan^{-1}\frac{a-b}{c}+ac\tan^{-1}\frac{a}{c}+bc\tan^{-1}\frac{b}{c}$$

(3)对于其延长线相交于 O 点的两条直线 PQ 和 RS 来说（图 43），有

$PQ.RS(2\log R+3)=\log PR(2OP.ORsin^2O-PR^2\cos O)$

$+\log QS(2OQ.OSsin^2O)-QS^2\cos O)$

$-\log PS(2OP.OSsin^2O-PS^2\cos O)$

$\log QR(2OQ.ORsin^2O-QR^2\cos O)$

$$-\sin O\{OP^2.\ S\widehat{P}R-OQ^2.\ SQR+OR^2.\ PRQ-QS^2.\ P\widehat{A}Q\}.$$

(4)对于一点 O 和一个长方形面积 ABCD 来说(图 44)，设 OP、OQ、OR、OS 为到各边的垂线，则有

---

① {在这些例子中，所有的对数都是自然对数。}

$$\begin{aligned}AB.AD(2\log R+3)=&2.OP.OQ\log OA+2.OQ.OR\log OB\\&+2.OR.OS\log OC+2.OS.OP\log OD\\&+OP^2\,D\hat{O}A+OQ^2,A\hat{O}B\\&+OR^2\,B\hat{O}C+OS^2.\ C\hat{O}D.\end{aligned}$$

(5)两个图形并不一定是不同的,因为我们可以求出同一图形上每两个点之间的距离的几何平均值。例如，对于一条长度为 a 的直线来说，有

$$\log R=\log a-\frac{3}{2},$$

或者写成

$$R=ae^{-\frac{3}{2}},$$
$$R=0.22313a.$$

(6)对于边长为 a 和 b 的长方面积来说，

$$\log R=\log\sqrt{a^2+b^2}-\frac{1}{6}\frac{a^2}{b^2}\log\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}-\frac{1}{6}\frac{b^2}{a^2}\log\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}}+\frac{2}{3}\frac{a}{b}\tan^{-1}\frac{b}{a}+\frac{2}{3}\frac{b}{a}\tan^{-1}\frac{a}{b}-\frac{25}{12}.$$

当长方形是一个边长为 a 的正方形时，有

$$\log R=\log a+\frac{1}{3}\log 2+\frac{\pi}{3}-\frac{25}{12},$$
$$R=0.44705a.$$

(7)一个点到一条圆周曲线的几何平均距离,等于它到圆心的距离和圆的半径这两个量中较大的一个量。

(8)因此，任一图形到以两个同心圆为边的一个圆环的几何平均距离，如果图形完全位于环外就等于该图形到圆心的几何平均距离，但是如果它完全位于环内，则

$$\log R=\frac{a_1{}^2\log a_1-a_2{}^2\log a_2}{a_1{}^2-a_2{}^2}-\frac{1}{2},$$

式中 a_1 和 a_2 是环的外半径和内半径。在这一事例中，R 和位于环内的图形的形状无关。

(9)环上所有各对点的几何平均距离，由方程

$$\log R=\log a_1-\frac{a_2{}^4}{(a_1{}^2-a_2{}^2)^2}\log\frac{a_1}{a_2}+\frac{1}{4}\frac{3a_2{}^2-a_1{}^2}{a_1{}^2-a_2{}^2}.$$

来求得。

对于一个半径为 a 的圆面积来说，此式变成

$$\log R=\log a-\frac{1}{4},$$

或者写作

$$R=ae^{-\frac{1}{4}},$$

$R=0.7788a$。

对于一条圆周曲线来说，此式变成

$$R=a。$$

{对于半轴长为 a 和 b 的一个椭圆面积来说，有

$$\log R=\log\frac{a+b}{2}-\frac{1}{4}.\Bigg\}$$

693.〕当计算一个截面均匀而曲率半径远大于横截面线度的线圈的自感系数时，我们首先用已经描述过的方法来确定截面上每一对点的距离的几何平均值，然后再计算具有所给形状的彼此隔开这样一个距离的两个线状异体之间的互感系数。

当线圈中的电流为 1 而且电流在截面的所有各点上均匀分布时，这样求得的结果就将是自感系数。

但是，如果线圈共有 n 匝，我们就必须把已经求得的系数乘以 n^2，这样我们就将得到自感系数，所根据的假设是导线的各匝填满了线圈的截面。

但是导线是圆柱状的，而且是用绝缘材料包着的，因此电流就不是均匀地分布在截面上而是集中在截面的某些部分上的，而这就会增大自感系数。除此以外，相邻导线中的电流并不是和在一条给定导线中均匀分布的那种电流具有相同的导电截面。

起源于这些考虑的各个改正量，可以用几何平均距离法来确定。他们正比于线圈中整条导线的长度，并且可以表示成我们必须乘在导线长度上以得出正确的自感系数的一个数字。

设导线的直径是 d，导线被包以绝缘材料，并绕成一个线圈。我们将假设导线的各个截面是按正方形次序排列的，如图 45 所示；而且我们也将假设，每一条导线的轴线和其次一条导线的轴线之间的距离，不论在线圈的宽度方向上还是在它的深度方向上都是 D，D 显然大于 d。

我们首先必须确定单位长度的直径为 d 的柱状导线比单位长度的边长为 D 的方截面导线在自感方面多出的量，或者说，

$$\begin{aligned}&2\log\frac{R\text{对正方形而言}}{R\text{对圆开言}}\\&=2(\log\frac{D}{d}+\frac{4}{3}\log 2+\frac{\pi}{3}-\frac{11}{6})\\&=2\ (\log\frac{D}{d}+0.1380606)\ 。\end{aligned}$$

八条最近的圆柱导线对所考虑的导线的感应作用，比对应的八条方导线对中间那条方导线的感应作用要小 2×(0.01971)[①]。

对于相距更远的导线来说，改正量可以忽略不计，而总的改正量就可以写成

[①] {为了得到这一结果，我们注意：对圆柱导线来说，平均距离是他们圆心之间的距离；对两条并排的正方形导线来说，平均距离是 . 请参阅 Mzxwell，Trans. R. S. Edinburgh，p. 733，1871—72。曾经盛情地重算了这种改正量的克瑞先生发现，采用了麦克斯韦的数字，改正量是 2× 0.019635 而不是 2× 0.019671。这种工作如下：对于 8 根方截面导线有 对于圆柱导线有 由此即得 以及 这就给出总的改正量为 然而也有可能，在计算这一改正量时，麦克斯韦曾经使用比在他的论文中给出的准确到更多小数位的一些平均距离值。}

$$2(\log_e \frac{D}{d} + 0.11835)$$

因此最后的自感值就是

$$L = n^2 M + 2l\left(\log_e \frac{D}{d} + 0.11835\right),$$

式中 n 是匝数，l 是导线的长度，M 是相距为 R 的两个具有线圈之平均导线的形状的电路之间的互感，此处 R 是截面上各对点之间的几何平均距离。D 是相邻导线之间的距离，而 d 是导线的直径。

第十四章

圆电流

由一个圆电流引起的磁势

694.〕由一个载有单位电流的电路在一个给定点上引起的磁势，在数值上等于该电路对该点所张的立体角；参阅第 409、485 节。

当电路是圆形的时，立体角就是一个二次锥面的立体角；而当所给点位于锥面的轴线上时，曲面就变成一个正圆锥面。当点不位于轴线上时，锥面是一个椭圆锥面，而立体角就在数值上等于它在单位半径的球面上切出的球面椭圆的面积。

这个面积可以借助于第三类椭圆积分来表示成有限数的项。我们将发现，把它展成球谐函数的无限级数是更加方便的，因为利用这样的级数来一般地进行数学运算的简易性，不仅仅抵消了计算足以保证实际精确度的若干项时的繁琐性。

为了保持普遍性起见，我们将假设原点位于圆的轴线上，也就是说位于通过圆心而垂直于图形平面的直线上。

设 O 是圆心（图 46），C 是轴线上我们取作原点的那个点，H 是圆上的一点。

C 为心，以 CH 为半径画一个球。圆将位于这一球面上，并将形成一个角半径 a 的小圆。

设

CH=c，

OC=b=ccosa，

OH=a=csina。

设 A 是球的极点，Z 是轴线上的任意点，并设 CZ_1=z。

设 R 是空间中的任意点，并设 CR=r，而 ACR=Q。

设 P 是 CR 和球面相交的一点。

由圆电流引起的磁势等于由一个以电流为边界而具有单位强度的磁壳所引起的磁势。既然磁壳表面的形式只要以圆为边界就行，我们就可以假设它和球的表面相重合。

我们在第 670 节中已经证明，如果 V 是由展布在球面上小圆内部的面积上的一个单位面密度的物质层所引起的势，则由一个以相同的圆为边界而具有单位强度的磁壳所引起的磁势ω就是

$$\omega=-\frac{1}{c}\frac{d}{dr}(rV)。$$

因此我们首先必须求出 V。

设所给的点位于圆的轴线上的 Z 点，则由球面上位于 P 点的面积元 dS 在 Z 点引起的那一部分势是

$$\frac{dS}{ZP}$$

这个量可以展成下列两个球谐函数级数中的一个：

$$\frac{dS}{c}\left\{P_0+P_1\frac{z}{c}+\cdots+P_i\frac{z^i}{c^i}+\cdots\right\},$$

$$\frac{dS}{z}\left\{P_0+P_1\frac{c}{z}+\cdots+P_i\frac{c^i}{z^i}+\cdots\right\},$$

第一个级数当 z 小于 c 时是收敛的,而第二个级数当 z 大于 c 时是收敛的。

写出

$dS=-c^2 d\mu d\phi$，

并在 0 到 2π 的界限内对φ积分，并在 cosα和 1 的界限内对μ积分，我们就得到

$$V=2\pi c\left\{\int_{\cos a}^{1}P_0 d\mu+\cdots+\frac{z^i}{c^i}\int_{\cos a}^{1}P_i d\mu+\cdots\right\}，\quad(1)$$

$$V'=2\pi\frac{c^2}{z}\left\{\int_{\cos a}^{1}P_0 d\mu+\cdots+\frac{c^i}{z^i}\int_{\cos a}^{1}P_i d\mu+\cdots\right\}，\quad(1')$$

由 P_i 的本征方程就有

$$i(i+1)P_i+\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_i}{d\mu}\right]=0$$

由此即得

$$\int_{\mu}^{1}P_i d\mu=\frac{1-\mu^2 dP_i}{i(i+1)d\mu}(2).$$

这个方程当 i=0 时不成立，但是既然 $P_0=1$，就有

$$\int_{\mu}^{1}P_0 d\mu=1-\mu.\quad(3)$$

既然函数 $\frac{dP_i}{d\mu}$ 出现在这一探讨的每一部分之中，我们就将用一个简写符号 P_i' 来代表它。和若干i值相对应的 P_i' 值在第698节中给出。

现在，通过把 z 换成 r，并用θ的同阶带谐函数分乘每一项，我们就能针对任一点 R 写出 V 的值，而不论 R 是否位于轴线上了。因为 V 必然能够被展成系数适当的θ的带谐函数的级数。当θ=0 时，每一个带谐函数都变为 1，而 R 就位于轴线上。由此可见，各个系数就是位于轴线上的一点处的 V 的展式中的那些项。于是我们就得到两个级数

$$V=2\pi c\left\{1-\cos\alpha+\cdots+\frac{\sin^2\alpha}{i(i+1)}\frac{r^i}{c^i}P_i'(a)P_i(\theta)+\cdots\right\}，\quad(4)$$

$$V'=2\pi\frac{c^2}{r}\left\{1-\cos\alpha+\cdots+\frac{\sin^2\alpha r^i}{i(i+1)c^i}P_i'(a)P_i(\theta)+\cdots\right\}，\quad(4')$$

695.〕现在我们可以利用第 670 节中的方法来由一个方程求出电路的磁势ω了，那就是

$$\omega=-\frac{1}{c}\frac{d}{dr}(Vr).\quad(5)$$

于是我们就得到两个级数

ω=-2π{1-cosα+⋯

$$+\frac{\sin^2\alpha r^i}{i}\frac{r^i}{c^i}P_i'(a)，P_i(\theta)+\cdots\Bigg\}，\quad(6)$$

$$\omega'=2\pi\sin^2\alpha\Bigg\{\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}P_i'(a)P_i(\theta)+\cdots$$

$$+\frac{1}{i+1}\frac{c^{i+1}}{r^{i+1}}P_i'(a)P_i(\theta)+\cdots\Bigg\}.\ (6')$$

级数(6)对一切小于 C 的 r 值为收敛，而级数(7)对一切大于 C 的 r 值为收敛。在球面上，r=c，两个级数当θ大于α时也就是在不被磁壳所占据的各点上给出相同的ω值，但是当θ小于α时，也就是在磁壳上的各点上，却有

ω'=ω+4π(7)

如果我们取圆心O作为座标原点，我们就必须令α $=\frac{\pi}{2}$，而两个级数就变为

$$\omega=-2\pi\Bigg\{1+\frac{r}{c}P_i(\theta)+\cdots+$$

$$(-)^s\frac{1.3\cdots(2s-1)}{2.4\cdots2s}\frac{r^{2s+1}}{c^{2s+1}}P_{2s+1}(\theta)+\cdots\Bigg\}，(8)$$

$$\omega=+2\pi\Bigg\{\frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}P_1(\theta)+\cdots+$$

$$(-)^s\frac{1.3\cdots(2s+1)}{2.4\cdots(2s+2)}\frac{c^{2s+2}}{r^{2s+2}}P_{2s+1}(\theta)+\cdots\Bigg\}，(8')$$

式中所有球谐函数的阶次都是奇数[①]。

关于两个圆电流的势能

696.〕让我们在开始时假设和电流等价的两个磁壳各为两个同心球的一部分，二球的半径是 c_1 和 c_2，而 c_1 较大（图 47）。让我们也假设两个磁壳的轴线互相重合，并假设 α_1 是由第一个磁壳的半径在 C 点上所张的角，而 α_2 是由第二个磁壳

①一个圆所张的立体角的值，可以用更直接的方法得出如下：一个圆在位于轴线上的一点 Z 上所张的立体角很容易证明为

$$\omega=2\pi(1-\frac{2-\cos\alpha}{HZ})$$

把这一表示式按球谐函数展开，我们就分别对应于 z 小于 c 和 z 大于 c 的位于轴线上的各点得到ω的展式：

[①] 一个圆所张的立体角的值，可以用更直接的方法得出如下：一个圆在位于轴线上的一点 Z 上所张的立体角很容易证明为 把这一表示式按球谐函数展开，我们就分别对应于 z 小于 c 和 z 大于 c 的位于轴线上的各点得到ω的展式： 很容易证明，这些结果是和正文中的结果相一致的。

$$\omega = 2\pi\left\{(\cos\alpha+1)+(P_i(a)\cos\alpha - P_0(a))\frac{z}{c}+\cdots\right.$$

$$\left.+(P_i(a)\cos\alpha - P_{i-i}(a))\frac{z^i}{c^i}+\cdots\right\},$$

$$\omega' = 2\pi\left\{(P_i(a)\cos\alpha - (P_i(a))\frac{c}{z}+\cdots\right.$$

$$\left.+(P_i(a)\cos\alpha - P_{i+1}(a))\frac{c^{i+1}}{z^{i+1}}+\cdots\right\},$$

很容易证明，这些结果是和正文中的结果相一致的。的半径在 C 点上所张的角。

设ω_1是由第一个磁壳在它内部任一点上引起的磁势，则把第二个磁壳搬到无限远处时所需要的功是在第二个磁壳上计算的一个面积分

$$M = -\iint \frac{d\omega_1}{dr}dS$$

的值。由此即得

$$M = \int_{\mu_2}^{1}\frac{d\omega_1}{dr}2\pi c_2{}^2 d\mu_2,$$

$$= 4\pi^2\sin^2 a_1 c_2{}^2\left\{\frac{1}{c_1}P_1{}'(a_1)\int_{\mu_2}^{1}P_1(\theta)d\mu_2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{c_2{}^{i-1}}{c^i}P_i'(a_1)\int_{\mu_2}^{1}P_i(\theta)d\mu_2+\cdots\right\},$$

或者，把第 694 节的方程(2)中的积分值代入此式，就得到

$$M = 4\boldsymbol{\pi} 2\sin^2\boldsymbol{\alpha} 1\sin^2\boldsymbol{\alpha}{}_2 c_2\left\{\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1}P_i{}'(a_1)P_1{}'(a_1)P_1{}'(a_2)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{i(i+1)}\frac{c_2{}^i}{c_1{}^i}P_i'(a_1)P_i'(a_2)+\cdots\right\}.$$

①

697.〕其次让我们假设，其中一个磁壳的轴线以 C 为心发生一次转动，以致它现在和另一个磁壳的轴线成一角度 θ（图 48）。我们只要把 θ 的带谐函数引入到 M 的这一表示式中就行了。于是我们就得到更普遍的 M 值，

$$M = 4\pi^2\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2 c_2{}^2\left\{\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1}P_1'(a_1)P_1'(a_2)P_1(\theta)+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{i(i+1)}\frac{c_2{}^i}{c_1{}^i}P'(a_1)P_i'(a_2)P_i(\theta)\right\}.$$

①

这就是由两个单位强度的圆电流的相互作用所引起的势能；两个电流的相对位置是，通过圆心的法线以角度 Q 相交于一点 C，从而圆周到 C 点的距离是 c_1 和 c_2，其中 c_1 较大。

---

① 见前页脚注。

图 48

如果任一位移 dx 将改变 M 的值，则沿位移方向作用着的力是

$$X=\frac{dM}{dx}$$

例如，如果其中一个磁壳的轴线可以绕 C 点而自由转动以引起 Q 的变化，则倾向于增大 θ 的力矩是Θ，此处

$$\Theta=\frac{dM}{d\theta}$$

完成微分计算并记得

$$\frac{dP_i(\theta)}{d\theta}=-\sin\theta P_i^{'}(\theta),$$

式中$P_i^{'}$的意义和在以前的方程中的意义相同，就得到

$$\Theta=-4\pi^2\sin^2\alpha_1\sin^2\alpha_2\sin\theta c_2\left\{\frac{1}{2}\frac{c_2}{c_1}P_1'(a_1)P_1'(a_2)P_1'(\theta)+\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{1}{i(i+1)}\frac{c_2{}^i}{c_1{}^i}P_i'(a_1)P_i'(a_2)P_i'(\theta)\right\}$$

698.〕既然 P_i' 的值经常出现在这些计算中，下面这个前六阶的函数值表可能是有用的。在这个表中，μ 代表 cosθ 而 v 代表 sinθ．

$P_1'=1$，

$P_2'=3\mu$，

$$P_3'=\frac{3}{2}(5\mu^2-1)=6(\mu^2-\frac{1}{4}v^2),$$
$$P_4'=\frac{5}{2}\mu(7\mu^2-3)=10\mu(\mu^2-\frac{3}{4}v^2),$$
$$P_5'=\frac{15}{8}(21\mu^4-14\mu^2+1)=15(\mu^4-\frac{3}{2}\mu^2v^2+\frac{1}{8}v^4),$$
$$P_6'=\frac{21}{8}\mu(33\mu^4-30\mu^2+5)=21\mu(\mu^4-\frac{5}{2}\mu^2v^2+\frac{5}{8}v^4)$$

699.〕有时用以下一些线性量来表示 M 的级数式是方便的。

设 a 是较小电路的半径，b 是电路的平面离原点的距离，而 $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

设 A、B 和 C 是较大电路的各个对应量。

于是 M 的级数式就可以写成

$$M=1.2.\pi^2\frac{A^2}{C^3}\alpha^2\cos\theta$$
$$+2.3.\pi^2\frac{A^2B}{C^5}a^2b(\cos^2\theta-\frac{1}{2}\sin^2\theta)$$
$$+3.4.\pi^2\frac{A^2(B^2-\frac{1}{4}A^2)}{C^7}a^2(b^2-\frac{1}{4}a^2)(\cos^3\theta-\frac{3}{2}\sin^2\theta\cos\theta)$$
$$+\cdots$$

如果我们令 θ=0，两个圆就变成平行的并具有相同的轴线。为了确定

他们之间的吸引力，我们可以对 b 求 M 的导数。于是我们就得到

$$\frac{dM}{db}=\pi^2\frac{A^2a^2}{C^4}\left\{2.3\frac{B}{C}+2.3.4\frac{B^2-\frac{1}{4}A^2}{C^3}b+\cdots\right\}$$

700．〕当计算长方形截面的线圈的效应时，我们必须把已经求得的各表示式对线圈的半径 A 和对线圈平面离原点的距离 B 求积分，并把积分展布在线圈的宽度和深度上。

在某些事例中，直接积分是最方便的，但是也有另外一些事例，那时下列的近似方法会导致更有用的结果。

设P是x和y的任一函数，并设需要求出求出的$\overline{P}$值，此处

$$\overline{P}xy=\int_{-\frac{1}{2}x}^{+\frac{1}{2}x}\int_{-\frac{1}{2}y}^{+\frac{1}{2}y}P\,dx\,dy.$$

在这一表示式中，$\overline{P}$是P在积分限中的平均值。

设 P_0 是当 x=0 和 y=0 时的 P 值，则利用泰勒定理来展开 P，即得

$$P=P_0+x\frac{dP_0}{dx}+y\frac{dP_0}{dy}+\frac{1}{2}x^2\frac{d^2P_0}{dx^2}+\cdots.$$

在积分限内积分这一表示式并将所得结果除以xy，我们就得到$\overline{P}$的值，

$$\overline{P}=P_0+\frac{1}{24}(x^2\frac{d^2P_0}{dx^2}+y^2\frac{d^2P_0}{dy^2})$$
$$+\frac{1}{1920}(x^4\frac{d^4P_0}{dx^4}+y^4\frac{d^4P_0}{d4^4})+\frac{1}{576}x^2y^2\frac{d^4P_0}{dx^2dy^2}+\cdots.$$

在线圈的事例中，设外半径和内半径分别是$A+\frac{1}{2}\xi$和$A-\frac{1}{2}\xi$，并设各线匝平面到原点的距离介于$B+\frac{1}{2}\eta$和$B-\frac{1}{2}\eta$之间，则线圈的宽度是η而其深度是 ζ，这些量远小于 A 或 B.

为了计算这样一个线圈的磁效应，我们可以把第 695 节中的级数(6)和(6′)中的相继各项写成下列形式：

$$G_0=\pi\frac{B}{C}(1+\frac{1}{24}\frac{2A^2-B^2}{C^4}\xi^2-\frac{1}{8}\frac{A^2}{C^4}\eta^2+\cdots),$$
$$G_1=2\pi\frac{A^2}{C^3}\ \ 1+\frac{1}{24}\ \frac{2}{A^2}-15\frac{B^2}{C^4}\ \ \xi^2+\frac{1}{8}\frac{4B^2-A^2}{C^4}\eta^2+\cdots,$$
$$G_2=3\pi\frac{A^2B}{C^5}\left\{1+\frac{1}{24}(\frac{2}{A^2}-\frac{25}{C^2}+\frac{35A^2}{C^4})\xi^2+\frac{5}{24}\frac{4B^2-3A^2}{C^4}\eta^2+\cdots\right\},$$
$$G_3=4\pi\frac{A^2(B^2-\frac{1}{4}A^2)}{C^7}+\frac{\pi}{24}\frac{\xi^2}{C^{11}}\{C^4(8B^2-12A^2$$
$$+35A^2B^2(5A^2-4B^2)\}+\frac{5}{8}\frac{\pi\eta^2}{C^{11}}A^2\{A^4-12A^2B^2+8B^4\},$$

等等，等等；

$$g_1 = \pi a^2 + \frac{1}{12}\pi\xi^2,$$

$$g_2 = 2\pi a^2 b + \frac{1}{6}\pi b\xi^2,$$

$$g_3 = 3\pi a^2(b^2 - \frac{1}{4}a^2) + \frac{\pi}{8}\xi(2b^2 - 3a^2) + \frac{\pi}{4}\eta^2 a^2,$$

等等，等等。

G_0、G_1、G_2 等等的量属于大线圈。在 r 小于 C 的各点上，ω的值是

$$\omega = -2\pi + 2G_0 - G_1 r P_1(\theta) - G_2 r^2 P_2(\theta) - \cdots$$

g_1、g_2 等等的量属于小线圈。在 r 大于 C 的各点上，ω′的值是

$$\omega' = g_1 \frac{1}{r^2} P_1(\theta) + g_2 \frac{1}{r^3} P_2(\theta) + \cdots$$

当通过每一线圈的截面的总电流都为 1 时，一个线圈相对于另一线圈而言的势是

$$M = G_1 g_1 P_1(\theta) + G_2 g_2 P_2(\theta) + \cdots$$

用椭圆积分来求 M

701．〕当两个圆的圆周之间的距离和小圆的半径相比具有中等大小时，已经给出的级数并不是迅速收敛的。然而，在每一事例中，我们都可以利用椭圆积分来求出两个平行圆的 M 值。

因为，设 b 是二圆连心线的长度，并设这一直线垂直于二圆的平面，并设 A 和 a 是二圆的半径，则有

$$M = \iint \frac{\cos \in}{r} ds ds',$$

积分展布在两条曲线上。

在这一事例中，有

$$r^2 = A^2 + a^2 + b^2 - 2Aa\cos(\phi - \phi'),$$

$$\in = \phi - \phi',\ ds = a d\phi,\ ds' = A d\phi',$$

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{Aa\cos(\phi - \phi')d\phi d\phi'}{\sqrt{A^2 + a^2 + b^2 - 2A\alpha\cos(\phi - \phi')}}$$

$$= -4\pi\sqrt{Aa}\left\{(c - \frac{2}{c})F + \frac{2}{c}F\right\},$$

式中

$$c = \frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + b^2}},$$

而 F 和 E 是以 C 为模的完全椭圆积分。

由此，记得

$$\frac{dF}{dc} = \frac{1}{c(1-c^2)}\left\{E - (1-c^2)F\right\}，\quad \frac{dE}{dc} = \frac{1}{c}(E - F)，$$

并记得 c 是 b 的函数，我们就得到

$$\frac{dM}{db} = \frac{\pi}{\sqrt{Aa}} \frac{bc}{1-c^2}\left\{(2 - c^2)E - 2(1-c^2)F\right\}.$$

如果 r■和 r■代表 r 的最大值和最小值，则

$r_1^2=(A+a)^2+b^2$，$r_2^2=(A-a)^2+b^2$，

而如果取一个角γ，使它满足$\cos\gamma=\frac{r_2}{r_1}$，则

$$\frac{dM}{db}=-\pi\frac{b\sin\gamma}{\sqrt{Aa}}\left\{2F_\gamma-(1+\sec^2\gamma)E_\gamma\right\},$$

式中F_γ和E_γ代表以$\sin\gamma$为模的第一类和第二类完全椭圆积分。

如果$A=a$，则$\cot\gamma=\frac{b}{2a}$，而

$$\frac{dM}{db}=-2\pi\cos\gamma\left\{2F_\gamma-(1+\sec^2\gamma)E_\gamma\right\}.$$

$-\frac{dM}{db}$这个量就代表当每一电流都等于1时两个平行的圆形电路之间的吸引力。

有鉴于M这个量在电磁计算中的重要性，已经在角γ值的60度到90度之间按6′的间隔造了$\log(M/4\pi\sqrt{Aa})$值的表，这种值只是c的函数，从而也只是γ的函数。这个表见本章的一个附录。

M的第二个表示式

M的一个有时更便于应用的表示式，是通过令$c_1=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$而得到的；在这种情况下，就有

① $M=8\pi\sqrt{Aa}\frac{1}{\sqrt{c_1}}\left\{F(c_1)-E(c_1)\right\}$.

圆电流的磁力线的画法

702.〕磁力线显然位于通过圆的轴线的平面上，而在每一条磁力线上M值是不变的。

试利用勒让德的表来针对足够多的θ值算出

$K_\theta=\frac{\sin\theta}{(F_{\sin\theta}-E_{\sin\theta})^2}$的值。

在纸上画出直角坐标的x轴和z轴{原点在圆心上，而z轴为圆的轴线}，

并以点$x=\frac{1}{2}a(\sin\theta+\operatorname{cosec}\theta)$为心，以$\frac{1}{2}a(\operatorname{cosec}\theta-\sin\theta)$为半径画一个圆。对于这个圆上的所有各点来说，$c_1$的值都将是$\sin\theta$．由此可见，对于这个圆上的所有各点来说，都有

$$M=8\pi\sqrt{Aa}\frac{1}{\sqrt{K_\theta}}\text{和}A=\frac{1}{64\pi^2}\frac{M^2K_\theta}{a}.$$

喏，A就是针对它来求了M值的那个x值。因此，如果我们画一条x=A的直线，它就会和圆相交于M具有给定值的两点。

使M按等差序列取一系列值，A的值就是一系列平方项。因此，画一系列平行于z的直线，使他们的x取已经求得的那些A值，则这些直线和

圆相交的各点，就将是对应的力线和圆相交的那些点。

如果我们令 m=8πa 而 M=nm，则有

$A=x=n^2K_\theta a$.

我们可以把 n 叫做力线的指示数(index).

这些力线的形状在本卷末尾的图版十八上给出。这是根据 W．汤姆孙爵士在他的论文<涡旋运动>[①]中给出一张图复制而成的。

703.〕如果一个具有给定轴线的圆的位置被认为是由圆心和轴上一个固定点之间的距离 b 以及圆的半径 a 来确定的，则这个圆对任何一个不论什么样的磁体或电流的体系而言的感应系数 M 都满足下列的方程：

$$\frac{d^2M}{da^2}+\frac{d^2M}{db^2}-\frac{1}{a}\frac{dM}{da}=0. \quad (1)$$

为了证明这一点，让我们考虑当 a 或 b 变化时被圆所切割的磁力线的条数。

(1)设 a 变成 a+δa 而 b 保持不变。在变化过程中，扩大着的圆在它自己的平面上扫过了一个宽度为 δa 的环形面积。

如果 V 是任一点上的磁势，而 y 轴平行于圆的轴线，则垂直于圆环平面的磁力是 $-\frac{dV}{dy}$.

为了求出通过环形面积的磁感，我们必须计算积分

$$-\int_0^{2\pi} a\delta a\frac{dV}{dy}d\theta,$$

但是这个量代表由 a 的变化而引起的 M 的改变量，或者说代表 $\frac{dM}{da}\delta a$. 由此即得

$$\frac{dM}{da}=-\int_0^{2\pi} a\frac{dV}{dy}d\theta. \quad (2)$$

(2)设 b 变成 b+δb 而 a 保持不变。在变化过程中，圆扫过一个半径为 a 而长度为 δb 的柱面。{而穿过这一柱面的力线就是那些不再穿过圆的力线。}

任一点上垂直于这一曲面的磁力是 $-\frac{dV}{dr}$，式中r是离轴线的距离。由此即得

$$\frac{dM}{db}=\int_0^{2\pi} a\frac{dV}{dr}d\theta. \quad (3)$$

对 a 求方程(2)的导数而对 b 求方程(3)的导数，我们就得到

$$\frac{d^2M}{da^2}=-\int_0^{2\pi}\frac{dV}{dy}d\theta-\int_0^{2\pi} a\frac{d^2V}{drdy}d\theta, \quad (4)$$

$$\frac{d^2M}{db^2}=-\int_0^{2\pi} a\frac{d^2V}{drdy}d\theta. \quad (5)$$

由此即得

① Trans.R.S.Edin,vol.xxv.p.217(1869).

$$\frac{d^2M}{da^2}+\frac{d^2M}{db^2}=-\int_0^{2\pi}\frac{dV}{dy}d\theta，(6)$$

$$=\frac{1}{a}\frac{dM}{da}，据(2)。$$

把最后一项移到左端，我们就得到方程(1)。

当弧间距离远小于各圆的半径时两个平行圆的感应系数

704.〕在这一事例中，我们可以由已经给出的椭圆积分当他们的模近似于 1 时的展式推得 M 的值。然而下述的方法却是电学原理的一种更直接的应用。

初级近似

设 a 和 a+c 是二圆的半径而 b 是他们的平面之间的距离，则他们的圆周之间的最短距离由下式给出：

$$r=\sqrt{c^2+b^2}。$$

我们必须求出由一个圆中的单位电流所引起的穿过另一圆的磁感。

我们将从假设两个圆位于平面上开始。考虑半径为 a+c 的那个圆上的一段小弧 δs。在圆的平面上离 δs 中心的距离是 ρ 而此距离和 δs 的方向成一角度 θ 的一个任意点上，由 δs 引起的磁力垂直于该平面并等于

$$\frac{1}{\rho^2}\sin\theta\sigma s。$$

为了计算这个力在半径为 a 的圆上的面积分，我们必须求出下列积分的值：

$$2\sigma s\int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}\pi}\int_{r_2}^{r_1}\frac{\sin\theta}{\rho}d\theta d\rho，$$

式中 r_1、r_2 是方程

$r^2-2(a+c)\sin\theta\, r+c^2+2ac=0$，

的根，也就是说，

$$r_1=(a+c)\sin\theta+\sqrt{(a+c)^2\sin^2\theta-c^2-2ac}，$$
$$r_2=(a+c)\sin\theta-\sqrt{(a+c)^2\sin^2\theta-c^2-2ac}，$$

另外并有

$$\sin^2\theta_1=\frac{c^2+2ac}{(c+a)^2}。$$

当 c 远小于 a 时，我们可以令

$r_1=2a\sin\theta$，

$r_2=c/\sin\theta$。

对 ρ 求积分，就得到

$$2\sigma s\int_{\theta_1}^{\frac{1}{2}\pi}\log(\frac{2a}{c}\sin^2\theta)，\sin\theta d\theta$$

$$=2\sigma s\left[\cos\theta\left\{2-\log(\frac{2a}{c}\sin^2\theta\right\}+2\log\tan\frac{\theta}{2}\right]_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=2\sigma s\left(\log_e\frac{8a}{c}-2\right)，近似地。$$

于是我们就得到总的感应为

$$M_{ac}=4\pi a\left(\log_e\frac{8a}{c}-2\right).$$

当距离远小于曲率半径时，任一点上的磁力和导线为直线时的磁力相近；既然如此，我们就可以（见第 684 节）利用公式

$$M_{aA}-M_{ac}=4\pi a\{\log_e c-\log_e r\}$$

来计算穿过半径为 a-c 的圆和穿过圆 A 的磁感之差。

由此我们就得到，A 和 a 之间的感应近似地等于

$$M_{Aa}=4\pi a(\log_e 8a-\log_e r-2),$$

如果二圆间的最小距离 r 远小于 a 的话。

705．〕既然同一线圈上的两匝之间的互感在实验结果的计算中是一个很重要的量，我现在就将描述一种方法，而利用这种方法，对 M 值的逼近可以进行到任意要求的精确度。

我们将假设 M 的值具有下列形式：

$$M=4\pi\left\{A\log_e\frac{8a}{r}+B\right\},$$

式中

$$A=a+A_1x+A_2\frac{x^2}{a}+A_2'\frac{y^2}{a}+A_3\frac{x^3}{a^2}+A_3'\frac{xy^2}{a^2}+\cdots,$$

$$+a^{-(n-1)}\left\{x''A_n+x^{n-2}y^2A'_n+x^{n-4}y^4A''_n+\cdots\right\}+\cdots,$$

$$B=-2a+B_1x+B_2\frac{x^2}{a}+B_2'\frac{y^2}{a}+B_3\frac{x^3}{a^2}+B_3'\frac{xy^2}{a^2}+\cdots,$$

此处 a 和 a+x 是二圆的半径，而 y 是他们的平面之间的距离。

我们必须确定系数 A 和 B 的值。很显然，只有 y 的偶次幂才能出现在这些量中，因为，如果 y 变号，M 的值必须保持不变。

我们也得到关于感应系数之倒易性质的另一组条件，因为不论我们把哪一个圆看成原电路，感应系数都应该是相同的。因此，当我们在以上各表示式中把 a 换成 a+x 而把 x 换成-x 时，M 的值必须仍然相同。

于是，通过令 x 和 y 的相同组合的系数彼此相等，我们就得到下列的倒易条件式：

$$A_1=1-A_1, B_1=1-2-B_1,$$

$$A_3=-A_2-A_3，B=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}A_1+A_2-B_2-B_3,$$

$$A_3'=-A_2'-A_3', B_3'=A_2'-B_2'-B_3'；$$

$$(—)^n A_n = A_2 (n-2) A_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} A_4 + \cdots + A_n,$$

$$(—)^n B_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} A_1 - \frac{1}{n-2} A_2 + \cdots + (—)^n A_{n-1}$$

$$+ B_2 + (n-2) B_3 + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} B_4 + \cdots + B.$$

由第 703 节中关于 M 的普遍方程

$$\frac{d^2M}{dx^2} + \frac{d^2M}{dy^2} - \frac{1}{a+x}\frac{dM}{dx} = 0,$$

我们就得到另一组条件式，

$2A_2+2A'_2 = A_1$,

$2A_2+2A'_2+6A_3+2A'_3=2A_2$；

$n(n-1)A_n+(n+1)nA_{n+1}+1.2A'_n+1.2A'_{n+1}=nA_n$,

[①]$(n-1)(n-2)A'_n+n(n-1)A'_{n+1}+2.3A''_n+2.3A''_{n+1}$

$=(n-2)A'_n$，…；

$4A_2+A_1=2B_2+2B'2-B_1=4A'_2$

$6A_3+3A_2=2B'_2+6B_3+2B'_3=6A'_3+3A'_2$,

$(2n-1)A_n+(2n+2)A_{n+1}=(2n-1)A'_n+(2n+2)A'_{n+1}$

$=n(n-2)B_n+(n+1)nB_{n+1}+1.2B'_n+1.2B'_{n+1}$.

求解这些方程并把各系数的值代入，M 的级数式就变成

[①]

$$M = 4\pi a \log\frac{8a}{r}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\frac{x^2+3y^2}{16a^2}-\frac{x^3+3xy^2}{32a^3}+\cdots\right\}$$

$$+4\pi a\left\{-2-\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\frac{3x^2-y^2}{16a^2}-\frac{x^3-6xy^2}{48a^3}+\cdots\right\}.$$

当导线的总长度和粗细都已给定时试求自感系数最大的线圈形状

706.〕忽略第 705 节的改正量，我们由第 693 节就得到

$$L = 4\pi n^2 \alpha(\log\frac{8\alpha}{R} - 2),$$

式中 n 是导线匝数，a 是线圈的平均半径，而 R 是线圈横截面离它自己的几何平均距离。请参阅第 691 节。如果这个截面永远和它自己相似，则 R 正比于截面的线度，而 n 正比于 R^2。

既然导线的总长度是 2πan，a 就和 n 成反比。由此即得

$\frac{dn}{n} = 2\frac{dR}{R}$，以及 $\frac{da}{a} = -2\frac{dR}{R}$，

而我们就得到 L 具有极大值的条件

[①]｛克瑞先生发现此式应为

[①]｛克瑞先生发现此式应为

$$\log\frac{8\alpha}{R}=\frac{7}{2}.$$

如果线圈沟槽的横截面是圆形的，而其半径为 c,则由第 692 节得到

$$\log\frac{R}{c}=-\frac{1}{4},$$

$$\log\frac{8\alpha}{c}=\frac{13}{4},$$

由此即得

a=3.22c；

或者说，线圈的平均半径应该是线圈沟槽的截面积半径的 3.22 倍，以便这样一个线圈可以有最大的自感系数。这个结果是由高斯求出的[②]。

如果导线所绕的沟槽具有正方形的横截面，则线圈的平均直径应该是沟槽之正方截面的边长的 3.7 倍。

[附录 II

在两个同轴圆线圈这一很重要的事例中，瑞利勋爵曾在上表的应用方面建议了一个很方便的近似公式。这个适用于任意多个变数的公式见于 Mr. Merrifield’s Report on Quadratures and Interpolation to the British Association，1880，而且据信是由已故的 H.J.颇尔金斯先生得出的。在现有的例子中，变数的个数是四。

设 n、n′是两个线圈上的匝数。

a、a′是他们的中央匝的半径。

b 是他们的中心之间的距离。

2h、2h′是二线圈的径向宽度。

2k、2k′是他们的轴向宽度。

另外又设 f（a，a′,b）是各中央线匝的互感系数。于是二线圈的互感系数就是

$$\frac{1}{6}nn'\begin{cases} f(a+h, a', b)+f(a-h, a', b) \\ +f(a, a'+h', b)+f(a, a'-h', b) \\ +f(a, a', b+k)+f(a, a', b-k) \\ +f(a, a', b+k')+f(a, a', b-k') \\ -2f(a, a', b) \qquad] \end{cases}$$

{附录 III

正方截面的圆线圈的自感

设-n 匝线圈的轴向宽度是 b 而径向宽度是 c，如果 a 代表它的平均半径，则借助于第 705 节中的级数来计算的自感，曾由 WeinsteinWied.Ann.xxi.329 证明为等于

$L=4\pi n^2(a\lambda+\mu)$，

式中，把 b/c 写成 x，就有

② [这一结果可以利用第 704 节中所建议的方法来直接得出，就是说，利用在第 701 节求得的 M 表示式中的各椭圆积分的展式来直接得出。见 Cayley’sEuipticFunctions,Art．75．]

$$\lambda = \log\frac{8a}{c} + \frac{1}{12} - \frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + \frac{1}{12x^2}\log(1+x^2)$$
$$+\frac{1}{12}x^2\log(1+\frac{1}{x^2}) + \frac{2}{3}(x-\frac{1}{x})\tan^{-1}x,$$
$$\mu = \frac{c^2}{96a}\left[\left(\log\frac{8a}{c} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\right)(1+3x^2) + 3.45x^2\right.$$
$$+\frac{221}{60} - 1.6\pi x^3 + 32.x^3\tan^{-1}x$$
$$\left.-\frac{1}{10}\frac{1}{x^2}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}x^4\log(1+\frac{1}{x^2})\right] \qquad \}$$

第十五章

电磁仪器

电流计

707．〕一个电流计就是一个用来通过电流的磁作用而显示或测量电流的仪器。

当仪器的目的是指示一个微弱电流的存在时，它就叫做一个“灵敏电流计”。

当它的目的是利用标准单位在尽可能准确地测量电流时，它就叫做一个“标准电流计”。

所有的电流计都是依据了施外格尔倍加器的原理的；在这种倍加器中，一个电流被送入一根导线中，导线被绕好，使它多次地通过一个敞开的、里边放有一个悬挂磁体的空间，于是它就在该空间中产生一个电磁力，而该力的强度就由那个磁体来指示。

在灵敏电流计中，线圈被安装得各匝占有对磁体影响最大的位置。因此各匝是挤得很紧的，为的是靠近磁体。

标准电流计要造得它的一切固定部件的尺寸和相对位置都可以被准确地得知，而且关于各活动部分的位置的任何小的不确定性都在计算中只造成尽可能小的误差。

在制造一个灵敏电流计时，我们要把磁体悬挂在那里的那个电磁力场弄得尽可能地强。在设计一个标准电流计时，我们希望把磁体附近的电磁力场弄得尽可能的均匀，并且希望知道用电流的强度表示出来的电磁力场的确切强度。

关于标准电流计

708．]在一个标准电流计中，电流的强度必须根据它对悬挂磁体作用的力来测定。喏，磁体中的磁量分布，以及当磁体被悬挂起来时它的磁心的位置，都是无法测定到多大的精确度的。因此就有必要很好地安排线圈，使它在磁体在其可能的运动过程中所占据的全部空间中产生一个非常接近于均匀的力场。因此，一般说来，线圈的尺寸必须比磁体的尺寸大得多。

通过若干个线圈的适当排列，他们中的力场可以被弄得比只用一个线圈时更加均匀得多；这样，仪器的尺寸就可以被压缩，而它的灵敏度也可以被提高。然而线度测量的误差却在较小的仪器中比在较大的仪器中带来电流值方面的更大的不准量。因此人们不是通过仪器尺寸的直接测量而是通过和一个其尺寸更准确地已知的较大的标准仪器进行电学对比来确定小仪器的电学常量；见第 752 节。

在所有的标准电流计中，线圈都是圆形的。线圈的绕线槽制造得很仔细。它的宽度做得等于包皮线直径的某一倍数 n。槽边上钻有小孔，以便引入导线并抽出包皮导线的另一端而形成线圈的内连接。线槽装在一个车床上，而且有一个木轴固定在它上面，见图 49，一根长绳的一端钉在轴沿的某处，作为导线的入口。然后让整个装置转动起来，而导线就平滑而规

则地进入槽底直到槽底被几匝导线完全盖住时为止。在这个过程中，绳子已在轴上绕了几匝，于是就在第 n 匝处把一个钉子敲入绳中。绳子的各匝应该露在外边，以便计数。于是就测量第一层导线的周长并开始绕第二层。如此继续进行，直到层数合适时为止。绳子的用处在于数出匝数。如果由于某种原因而必须重绕线圈的某一部分，绳子也要倒回，以免我们记错了线圈上的实际匝数。钉子的作用在于区别每一层中的匝数。

每一层的周长的测量提供对绕线规则性的一种检验，并使我们能够计算线圈的电阻。因为，如果我们取线槽周长和外层周长的算术平均值再加上所有各中间层的周长并用层数去除这一和数，我们就将得到平均周长，而由此我们就能推出线圈的平均半径。每一层的周长可以用钢卷尺来测量，或者更好的办法是用一个刻了度的轮子来测量，这个轮子在绕线过程中在线圈上滚动。钢卷尺上或轮子上的刻度值，必须通过和一个直尺对比来加以校准。

709．]线圈中的单位电流对悬挂着的仪器作用的力矩可以用一个级数来表示

$$G_1g_1\sin\theta + G_2g_2\sin\theta P_2'(\theta) + \cdots,$$

式中各个 G 系数和线圈有关，而各个 g 系数和悬挂仪器有关，θ 是线圈轴线和悬挂仪器轴线之间的夹角；见第 700 节。

当悬挂的仪器是一个在中点上被挂起的长度为 2l 而强度为 1 的均匀纵向磁化的细磁棒时，就有

$$g_1 = 2l,\ g_2 = 0,\ g_3 = 2l^3,\ \cdots。$$

一个长度为 2l 的按任何别的方式磁化的磁棒的各系数值,小于它被均匀磁化时的各系数值。

710．]当仪器被用作一个正切电流计时，它的线圈是固定的，其平面是竖直的并平行于地球磁力的方向。在这一事例中，磁体的平衡方程就是

$$mg_1H\cos\theta = m\gamma\sin\theta\{G_1g_1 + G_2g_2P_2'(\theta) + \cdots\},$$

式中 mg_1 是磁体的磁矩，H 是地磁力的水平分量，而 γ 是线圈中的电流强度。当磁体的长度远小于线圈的半径时，含 G 和 g 的第一项以后的各项可以忽略不计，于是我们就得到

$$\gamma = \frac{H}{G_1}\cot\theta.$$

通常测量的角度是磁体的偏转角 δ，它是 θ 的余角，从而 $\cot\theta = \tan\delta$。

于是电流和偏转角的正切成正比，从而仪器叫做“正切电流计”。

另一种办法是使整个仪器可以绕一个竖直轴而活动，并转动它直到磁体的轴线平行于线圈平面而处于平衡时为止。如果线圈平面和磁子午面之间的夹角是 δ，平衡方程就是

$$mg_1H\sin\sigma - m\gamma\left\{G_1g_1 - \frac{3}{2}G_3g_3 + \cdots\right\},$$

由此即得

$$\gamma = \frac{H}{(G_1 - \cdots)}\sin\sigma$$

既然电流是用偏转角的正弦来量度的，当这样使用时仪器就叫做“正

弦电流计”。

只有当电流很稳定，以致我们可以认为它在调节仪器并使磁体达到平衡的过程中是恒定的时，正弦法才是可以应用的。

711．]其次我们必须考虑一个标准电流计中的线圈的装置。

在最简单的电流计中，只有单独一个线圈，而磁体就挂在线圈 的中心上。

设 A 是线圈的平均半径，ξ是它的深度，η是它的宽度，而 n 是匝数，则各个系数的值是

$$G_1=\frac{2\pi n}{A}\left\{1+\frac{1}{12}\frac{\xi^2}{A^2}-\frac{1}{8}\frac{\eta^2}{A^2}\right\},$$
$$G_2=0,$$
$$G_3=-\frac{\pi n}{A^3}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\xi^2}{A^2}-\frac{5}{8}\frac{\eta^2}{A^2}\right\},$$
$$G_4=0,\cdots.$$

主要的改正量来自 G_3 级数

$$G_1g_1+G_3g_3P_3'(\theta)$$

近似地变成

$$G_1g_1\left(1-3\frac{1}{A^2}\frac{g_3}{g_1}(\cos^2\theta-\frac{1}{4}\sin\theta)\right).$$

当磁体被均匀磁化而θ=0 时，改正因子将和 1 相差最大。在这一事例中，它变成$1-3\frac{l^2}{A^2}$。当$\tan\theta=2$或当偏转角为$\tan^{-1}\frac{1}{2}$或$26°34'$时，改正量为零。因此有些观测者就调节他们的仪器，使得观测到的偏转角尽可能和这个角相接近。然而最好的办法是采用一个长度远小于线圈半径的磁体，以便改正量可以完全被忽略。

悬挂的磁体被细心地加以调节，使它的中心尽可能接近地和线圈的中心相重合。然而，如果调节不完善，而磁体的中心相对于线圈中心的座标是 x、y、z，而 z 是平行于线圈轴线来量度的，则改正因子是

$$\left(1+\frac{3}{2}\frac{x^2+y^2-2z^2}{A^2}\right)$$[1]

当线圈半径很大而磁体的调节也作得很细心时，我们可以假设这种改正是微不足道的。

高根装置法

712．]为了消除依赖于 G_3 的改正量，高根制造了一个电流计。在这种电流计中，磁体不是挂在线圈的中心上

而是挂在线圈轴线上离线圈中心的距离为线圈半径之一半的点上；用这种方法，上述改正量就被弄成了零。G_3 的形式是

[1] Werke,G(ttingenedition,1867,bd.v.p.622.

$$G_3 = 4\pi \frac{A^2(B^2 - \frac{1}{4}A^2)}{C^7},$$

而既然在这种装置中$B = \frac{1}{2}A$，那就有$G_3 = 0$。假如我们能够确信悬挂磁体的中心恰好是在这样定义的那个点上的，这种装置就将是对最初装置的一种改进。然而，磁体中心的位置却永远是不确定的，而这种不确定性就带来一种大小未知的依赖于G_2的改正量，其形式是$(1-\frac{6}{5}\frac{z}{A})$，式中$z$是离线圈平面的距离中的多余值。这个改正量依赖于$\frac{z}{A}$的一次幂。因此，具有离心悬挂的磁体的高根线圈就比以前的形式受到更大得多的不准量的影响。

亥姆霍兹装置法

713．]通过在磁体另一侧的相同距离处放上第一二个和第一个线圈相等的线圈，亥姆霍兹把高根的电流计改造成了一种可以信赖的仪器。

通过把两个线圈对称地放在磁体的两侧，我们就一举而消除了所有的偶次项。

设 A 是每一个线圈的平均半径，两个线圈的平均平面之间的距离就被弄成了等于 A，而磁体就挂在他们的公共轴线的中点上。各系数是

$$G_4 = \frac{16\pi n}{5\sqrt{5}}\frac{1}{A}\left(1 - \frac{1}{60}\frac{\xi^2}{A^2}\right),$$

$$G_2 = 0,$$

$$G_3 = 0.0512\frac{\pi n}{3\sqrt{5}A^5}(31\xi^2 - 36\eta^2),$$

$$G_4 = 0,$$

$$G_5 = -0.73728\frac{\pi n}{\sqrt{5}A^5},$$

式中 n 代表两个线圈的匝数之和。

由这些结果可以看出，如果ψ线圈的沟槽截面是深度为 ξ 而宽度为 η 的长方形，则按截面的有限大小而进行了改正的 G_3 的值将是很小的，而当 ξ^2 和 η^2 之比等于 36 比 31 时这个值为零。

因此，完全没有必要像某些仪器制造者所曾经作过的那样试图在圆锥表面上绕制线圈，因为条件可被具有长方截面的线圈所满足，而这种线圈可以比在钝锥面上绕制的线圈制造得更加精确。

亥姆霍兹双线圈电流计中的线圈装置情况，如第 725 节中的图 53 所示。

由双线圈引起的力场，以截面的形式表示在本卷末尾的图版十九上。

四线圈电流计

714．] 通过把四个线圈组合起来，我们可以消除 G_2、G_3、G_4、G_5 和 G_6。因为，利用任何对称组合，我们都可以消除各偶次系数。设四个线圈是属于同一球面的一些平行的圆，所对应的角度是 θ、φ、π-φ 和 π-θ。

设第一个和第四个线圈上的匝数是 n，而第二个和第三个上的匝数是 pn，于是，整个组合的 $G_3=0$ 的条件就给出

$n\sin^2\theta p_3'(\theta)+pm\sin^2\phi P_3'(\phi)=0$，(1)

而 $G_5=0$ 的条件则给出

$n\sin^2\theta P_5'(\theta)+pn\sin^2\phi P_5'(\phi)=0$，(2)

令

$\sin^2\theta=x$ 而 $\sin^2\phi=y$，(3)

并把 P_3'和 P_5'（见第 698 节）用这些量表示出来，方程(1)和(2)就变成

$4x-5x^2+4py-5py^2=0$，(4)

$8x-28x^2+21x^3+8py-28py^2+21py^3=0$。(5)

由(5)式减去(4)式的二倍并除以 3，我们就得到

$6x^2-7x^3+6py^2-7py^3=0$。(6)

于是由(4)和(6)就有

$$p=\frac{x}{y}\frac{5x-4}{4-5y}=\frac{x^2}{y^2}\frac{7x-6}{6-7y}，$$

而我们就得到

$$y=\frac{4}{7}\frac{7x-6}{5x-4}，\quad \frac{1}{p}=\frac{32}{49x}\frac{7x-6}{(5x-4)^3}$$

x 和 y 都是一些角的正弦的平方，从而必然介于 0 和 1 之间。由此可见，x不是介于0和$\frac{4}{7}$之间就是介于$\frac{6}{7}$和1之间；在第一种事例中，y介于$\frac{6}{7}$和1之间而$1/p$介于∞和$\frac{4}{3}\frac{9}{2}$之间；在第二种事例中，y介于0和$\frac{4}{7}$之间$1/p$介于0和$\frac{3}{4}\frac{2}{9}$之间。

三线圈电流计

715．]最方便的装置是 x=1 的装置。这时有两个线圈合而为一并形成半径为 C 的球的一个大圆。这个复合线圈上的匝数是 64。另外两个线圈形成球的小圆。其中每一个小圆的半径是$\sqrt{\frac{4}{7}}C$．其中每一小圆离开第一个大圆的平面的距离是$\sqrt{\frac{3}{7}}C$。这些线圈中每一个线圈上的匝数是49。

G_1的值是$\frac{240\pi}{C}$。

在三线圈电流计中，G_1以后第一个具有有限值的项是 G_7；因此，各线圈位于其表面上的那个球的一大部分就形成一个相当均匀的力场。

假如我们能够像在第 672 节中描述了的那样在整个球面上绕满导线，我们就将得到一个完全均匀的力场。然而，足够精确地把线匝分布在一个球面上却在实践上是不可能的，即使这样一个线圈并不受到另一种意见的反对，而那种意见就是，这种线圈形成一个闭合的曲面，从而它的内部是不可达到的。

通过把中间的那个线圈从电路中断开，而让电流在两个侧线圈中沿相反方向运行，我们就得到一个力场，它将对一个挂在场中而轴线平行于各线圈之轴线的磁体或线圈作用一个近似均匀的力，其方向沿轴线；见第673节。因为在这一事例中所有奇次系数都不存在，而既然 $\mu=\sqrt{\frac{3}{7}}$，就有

$$P_4'=\frac{5}{2}\mu(7\mu^2-3)=0.$$

由此可见，既然每一线圈上各有 n 匝导线，第 695 节中关于线圈中心附近的磁势的表示式(6)就变成

$$\omega=\frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\pi n\left\{-3\frac{r^2}{C^2}P_2(\theta)+\frac{11}{7}\frac{r^6}{C^5}P_6(\theta)+\cdots\right\}.$$

外电阻给定时一个电流计中的导线的适当粗细

716．]设电流计线圈的绕线槽的形状已经给定，要确定的是应该在槽内绕上一根长而细的导线呢还是绕上一根短而粗的导线。

设 l 是导线的长度，y 是它的半径，$y+b$ 是它在包皮以后的半径，ρ 是它的比电阻，g 是单位长度的导线的 G 值，而 r 是和电流计无关的那一部分电阻。

电流计导线的电阻是

$$R=\frac{\rho}{\pi}\frac{1}{y^2}.$$

线圈的体积是

$$V=\pi l(y+b)^2。$$

电磁力是 γG，此处 γ 是电流强度而

$$G=gl。$$

如果 E 是在电阻为 R＋r 的电路中起着作用的电动势，则

$$E=\gamma(R+\gamma)。$$

由这个电动势所引起的电磁力是

$$E\frac{G}{R+r},$$

而我们正是必须通过改变 y 和 l 来使这个力取最大值。

把分式颠倒过来，我们就发现应使

$$\frac{\rho}{\pi g}\frac{1}{y^2}+\frac{r}{gl}$$

取最小值。由此即得

$$2\frac{\rho}{\pi}\frac{dy}{y^3}+\frac{rdl}{l^2}=0.$$

如果线圈的体积保持不变，则有

$$\frac{dl}{l}+2\frac{dy}{y+b}=0.$$

消去 dl 和 dy，我们就得到

$$\frac{\rho}{\pi}\frac{y+b}{y^3}=\frac{r}{l},$$

或者说

$$\frac{r}{R}=\frac{y+b}{y}.$$

由此可见，电流计导线的粗细，应使外电阻和电流计线圈电阻之比等于包皮线的直径和裸线本身的直径之比。

关于灵敏电流计

717.]在灵敏电流计的制造中，每一装置部件的目的都在于利用一个给定的作用于线圈电极之间的小电动势来引起磁体的尽可能大的偏转。

导线中的电流当导线离悬挂磁体尽可能近时就会产生最大的效应。但是磁体必须能够随便振动，从而线圈内部就必须保留一定的空余空间。这就确定了线圈的内边界。

在这一空间外面，每一线匝都必须布置得足以对磁体发生尽可能大的效应。随着匝数的增多，最有利的位置将被填满，以致到了最后，新的一匝所增大的电阻将消弱以前各匝中的电流的效应，而新匝所增大的效应反而较小。通过用比内部各匝更粗的导线来绕外边的匝，我们可以在给定的电动势下得到最大的磁效应。

图 51

718.]我们将假设电流计的线匝是圆形的，电流计的轴线通过各圆的中心而垂直于他们的平面。设 $r\sin\theta$ 是其中一个圆的半径，而 $r\cos\theta$ 是该圆的中心离电流计中心的距离，于是，如果 l 是和该圆相重合的导线的长度，而 γ 是通过导线的电流，则电流计中心上的磁力在轴线方向上的分量是

$$\gamma l\frac{\sin\theta}{r^2}.$$

如果我们写出

$$r^2=x^2\sin\theta,\quad(1)$$

则这一表示式变成 $\gamma\frac{1}{x^2}$.

由此可见，如果制造一个曲面，其截面如图 51 所示，其方程为

$$r^2=x_1^2\sin\theta,\quad(2)$$

式中 x_1 是任意常数，则弯成一个圆弧的导线当位于这一曲面之内时将比位于曲面之外时产生更大的磁效应。由此就得到，任一导线层的外表面应该具有一个恒定的 x 值，因为，如果一个地方的 x 大于另一地方的 x，则有一部分导线应能从第一个地方转移到第二个地方，以增大电流计中心上的力。

由线圈引起的总力是 γG，此处

$$G=\int\frac{dl}{x},\quad(3)$$

积分遍及于导线的整个长度，x 被看成 l 的函数。

719.]设 y 是导线的半径，则其截面积将是 πy^2 设 ρ 是制造导线所用

材料的对单位体积而言的比电阻，则长度为l的导线的电阻是$\frac{l\rho}{\pi y^2}$，而线圈的总电阻是

$$R=\frac{\rho}{\pi}\int\frac{dl}{y^2}, \quad (4)$$

式中 y 被看成 l 的函数。

设 Y^2 是一个四边形的面积，该四边形的四个角是线圈上四条相邻导线的轴线和通过线圈轴线的平面的交点，则 Y^2l 是一段长为 l 的导线及其绝缘包皮在线圈中所占的体积，其中包括必须保留在线圈各匝之间的空隙。因此线圈的总体积就是

$$V=\int Y^2 dl, \quad (5)$$

式中 Y 被看成 l 的函数。

但是，既然线圈是一个旋成图形，就有

$$V=2\pi\iint r^2\sin\theta\, drd6\theta, \quad (6)$$

或者，按方程(1)把 r 用 x 表示出来，就有

$$V=2\pi\iint x^2(\sin\theta)^{\frac{5}{2}}dxd\theta \quad (7)$$

喏，$2\pi\int_0^\pi(\sin\theta)^{\frac{5}{2}}d\theta$ 是一个数字量，用N来代表它，就有

$$V=\frac{1}{3}Nx^3-V_0, \quad (8)$$

式中 V_0 是留给磁体的内部空间的体积。

现在让我们考虑介于两个曲面 x 和 x+dx 之间的一个线圈层。这一层的体积是

$dV=Nx^2dx=Y^2dl$，(9)

式中 dl 是这一层中的导线长度。

这就按照 dx 而给我们以 dl。把此式代入方积(3)和(4)中，就得到

$$dG=N\frac{dx}{Y^2}, \quad (10)$$

$$dR=N\frac{\rho}{\pi}\frac{x^2}{Y^2}\frac{dx}{y^2}, \quad (11)$$

式中 dG 和 dR 代表由这一线圈层所引起的那一部分 G 值和 R 值。

现在，如果 E 是所给的电动势，则有

$$E=\gamma(R+r),$$

式中 r 是外电路的电阻，和电流计无关，从而电流计中心上的力就是

$$\gamma G=E\frac{G}{R+r}.$$

因此我们必须通过适当调节每一层中的导线截面来使$\frac{G}{R+r}$有最大值。这也必然涉及 Y 的变化，因为 Y 是依赖于 y 的。

设 G_0 和 R_0 是当把所给的一层不计算在内时的 G 值和 R＋r 值。于是我们就有

$$\frac{G}{R+r}=\frac{G_0+dG}{R_0+dR}, \quad (12)$$

而通过针对所给层变化 y 值来使此式取极大值，我们就必须有

$$\frac{\frac{d}{dy}\cdot dG}{\frac{d}{dy}\cdot dR}=\frac{G_0+dG}{R_0+dR}=\frac{G}{R+r}. \quad (13)$$

既然dx很小而最后变为零，$\frac{G_0}{R_0}$就将近似地相同而且最后是准确地相同，不论被排除于考虑之外的是哪一层，从而我们可以把它看成一个常量。因此，我们由(10)和(11)就有

$$\frac{\rho}{\pi}\frac{x^2}{y^2}\left(1+\frac{Y}{y}\frac{dy}{dY}\right)=\frac{R+r}{G}=\text{常量}。(14)$$

如果导线的包皮方法和缠绕方法使得导线金属所占的体积和导线之间的空隙体积之比不论导线是粗是细都相同，则有

$$\frac{Y}{y}=\frac{dy}{dY}=1,$$

而且我们必须令 y 及 Y 都和 x 成正比，这就是说，任一层中的导线的直径必须和该层的线度成正比。

如果绝缘包皮的厚度是常量并等于 b，而且导线是按正方形次序排列的，则有

Y=2(y+b)，(l5)

而条件式就是

$$\frac{x^2(2y+b)}{y^3}=\text{常量}。(16)$$

在这一事例中，导线的直径随其所在层的直径而增大，但增大的速度却并不那样大。

如果我们采用这两个假说中的第一个假说（如果导线本身近似地占满全部空间，则这个假说近似地成立），我们就必须令

y＝ax，Y＝βy，

式中 a 和β是常数，而且{由(10)和(11)即得}

$$G=N\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right),$$

$$R=N\frac{\rho}{\pi}\frac{1}{\alpha^4\beta^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right),$$

式中 a 是一个常量，依赖于在线圈中部留下来的空间的大小和形状。

因此，如果我们使导线的粗细按照和 x 的相同比例而变，则在线圈的外线度已经达到它的内线度的许多倍以后，再增大它的外部尺寸就不会有什么好处了。

720．]如果电阻的增大不被认为是一个缺点，例如当外电阻远远大于电流计的电阻时，或是当我们的目的只在于产生一个强力场时，我们就可以令 y 和 Y 都保持不变。这时我们就有

$$G=\frac{N}{Y^2}(x-a),$$
$$R=\frac{1}{3}\frac{N}{Y^2y^2}\frac{\rho}{\pi}(x^3-a^3),$$

式中 a 是依赖于线圈内的空间的一个常量。在这一事例中，G 的值随着线圈尺寸的增大而均匀地增大。从而除了制造线圈所需的人力和财力以外，G 值是没有极限的。

关于悬挂着的线圈

721．]在普通的电流计中，一个悬挂着的磁体受到一个固定线圈的作用。但是，如果线圈可以被悬挂得足够精巧，我们就可以根据它对平衡位置的偏转来确定磁体或另一个线圈对悬挂线圈的作用。

然而，除非在电池的两极和线圈中导线的两端之间存在金属连接，我们并不能把电流送入线圈中去。这种连接可以用两种不同的办法来作到，即利用双线悬置法或利用反向的导线。

双线悬置法已经在第 459 节中作为对磁体的应用而描述过了。悬置的上部装置如图 54 所示。当用于线圈时，两根悬丝不再是丝线而是金属丝，而且，既然一根能够支持线圈并输送电流的金属丝的扭力比丝线的扭力大得多，这种扭力就必须被考虑在内。这种悬置在由 W。韦伯所制造的仪器中已经被弄得非常完善了。

另一种悬置方法是利用和线圈的一端相接的单独一根导线。线圈的另一端接在另一根导线上；这根导线和第一根导线沿着同一条竖直线而向下垂着，并插入一个汞杯中，如第 726 节中的图 56 所示。在某些事例中，把两根导线的各端固定在一些可以把他们拉直的零件上是方便的，这时必须注意使这些导线的延线通过线圈的重心。这种形式的仪器当轴线并不竖直时也可以使用；见图 52。

722．]悬挂的线圈可以作为一种非常灵敏的电流计来使用，因为，通过增大它所在的场中的磁力强度，由线圈中的一个微弱电流所引起的力可以大大增强而用不着加大线圈的质量。用于这种目的的磁力可以借助于一些永久磁体或借助于一些用辅助电流加以激励的电磁体来产生，而且可以借助于软铁电枢来把它强烈地汇聚在悬挂线圈上。例如，在 W.汤姆孙爵士的记录仪器中，见图 52，线圈被挂在电磁体的两个相反的极 N 和 S 之间，而且，为了把磁力线汇聚在线圈的竖直边上，一个软铁块 D 被固定到了磁极之间。这块铁因感应而受到磁化，在它和两个磁极之间的空隙中产生一个很强的力场，而线圈的竖直边就是可以通过这些空隙而自由地运动的，于是，即使当通过线圈的电流非常微弱时，线圈也会受到一个倾向于使它绕竖直轴而转动的相当大的力。

723．]悬挂线圈的另一种应用就是通过和一个正切电流计相对比来测定地磁的水平分量。

线圈被悬挂得当它的平面平行于磁子午面时就处于稳定平衡。一个电流 γ 被送入线圈中并使它偏到一个和磁子午面有一夹角 θ 的新的平衡位置。如果悬置是双线式的，引起这一偏转的力偶矩就是 $F\sin\theta$，而这个力偶矩必然等于 $H\gamma g\cos\theta$，此处 H 是地磁的水平分量，γ 是线圈中的电流，而 g 是线圈所有各匝的面积之和。由此即得

$$H\gamma = \frac{F}{g}\tan\theta$$

如果 A 是线圈对它的悬挂轴线而言的惯量矩，而 T 是半振动的时间，则当没有电流通过时应有

$FT^2=\pi^2A$。

从而我们就得到

$$H\gamma = \frac{\pi^2 A}{T^2 g}\tan\theta.$$

如果同一个电流通过一个正切电流计的线圈并使它的磁体偏转一个角度φ，则有

$$\frac{\gamma}{H} = \frac{1}{G}\tan\phi.$$

式中 G 是正切电流计的主常量，见第 710 节。

由这两个方程我们就得到

$$H = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{AG\tan\theta}{g\tan\phi}},\quad \gamma = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{A\tan\theta\tan\phi}{Gg}}.$$

这种方法是由 F.考耳若什提出的[①]。

724．]威廉·汤姆孙爵士曾经制造了单一的仪器，利用这种仪器，同一个观测者可以同时进行测定 H 和测定γ所需要的那些观测。

线圈悬挂得它的平面在磁子午面内处于平衡，而且当有电流通入时就偏离这一位置。一个很小的磁体被悬挂在线圈的中心上，而且将被电流所偏转，其方向和线圈偏转的方向相反。设线圈的偏转角是θ，而磁体的偏转角是φ，则体系能量的可变部分是

$-H\gamma g\sin\theta - m\gamma G\sin(\theta-\phi) - Hm\cos\phi - F\cos\theta$。

对θ和对φ求导数，我们就分别得到线圈的和磁体的平衡方程

$$-H\gamma g\cos\theta - m\gamma G\cos(\theta-\phi) + F\sin\theta = 0,$$

$$m\gamma G\cos(\theta-\phi) + Hm\sin\phi = 0。$$

消去 H 或γ，我们就由这些方程得到一个可以用来求出γ或 H 的二次方程。如果悬挂磁体的磁矩 m 很小，我们就得到下列的值：

$$H = \frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{-AGA\sin(\theta-\phi)}{g\cos\theta\sin\phi}} - \frac{1}{2}\frac{mG}{g}\frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos\theta},$$

$$\gamma = -\frac{\pi}{T}\sqrt{\frac{-A\sin\theta\sin\phi}{Gg\cos\theta\cos(\theta-\phi)}} + \frac{1}{2}\frac{m}{g}\frac{\sin\phi}{\cos\theta}.$$

在这些表示式中，G 和 g 是磁体和线圈的主常量，A 是线圈的惯量矩，T 是振动的半周期，m 是磁体的磁矩，H 是水平磁力的强度，γ是电流强度，θ是线圈的偏转角，而φ是磁体的偏转角。

既然线圈的偏转是和磁体的偏转方向相反的，这些 H 值和γ值就将永远是实值。

韦伯的力测电流计

[①] {当磁棒轴线和线圈轴线成一角度θ时，作用在磁棒上的力偶是　　的力，那么　，就是垂直于该轴线的力。于是当仪器被用作一个正弦电流计时，改正量就是

725．]在这种仪器中，一个小线圈被用两根金属丝挂在一个较大的固定线圈中。当使电流通过两个线圈时，悬挂的线圈就倾向于使自己和固定线圈相平行。这一趋势受到起源于双线悬置的力矩的反抗，而且也受到地磁对悬挂线圈的作用的影响。

在仪器的普通应用中，两个线圈的平面几乎是接近互相垂直的，这样各线圈中的电流的相互作用就可以尽可能地强；而且悬挂线圈的平面是和磁子午接近互相垂直的，这样地磁的作用就可以尽可能地小。

设固定线圈的平面的磁方位角是 a，并设悬挂线圈的轴线和固定线圈的平面之间的角是θ＋β，此处β是当线圈中没有电流并处于平衡时这一角的值，而θ是由电流引起的偏转角。设γ■是固定线圈中的电流而γ■是活动线圈中的电流，则平衡方程是

$Gg\gamma_1\gamma_2\cos(\theta+\beta)-Hg\gamma_2\sin(\theta+\beta+\alpha)-F\sin\theta=0$。

让我们假设仪器被调节得α和β都很小，而且 $Hg\gamma_2$ 和 F 相比也很小。在这种情况下我们就近似地有

$$\tan\theta=\frac{Gg\gamma_1\gamma_2\cos\beta}{F}-\frac{Hg\gamma_2\sin(\alpha+\beta)}{F}-\frac{HGg^2\gamma_1\gamma_2^2}{F^2}-\frac{G^2g^2\gamma_1^2\gamma_2^2\sin\beta}{F^2}.$$

图 53

如果当γ_1和γ_2的符号变化时偏转角变化如下

θ_1，当γ_1为+而γ_2为+时，

θ_2，当γ1 为-而γ_2为-时，

θ_3，当γ1 为+而γ_2为-时，

θ_4，当γ1 为-而γ_2为+时，

我们就得到

$$\gamma_1\gamma_2=\frac{1}{4}\frac{F}{Gg\cos\beta}(\tan\theta_1+\tan\theta_2-\tan\theta_3-\tan\theta_4).$$

如果通入两个线圈的是相同的电流，我们就可以令$\gamma_1\gamma_2=\gamma^2$，于是就得到γ的值。

当电流不是很稳定时就最好采用这种称为“正切法”的方法。

如果电流稳定得使我们能够调节仪器的扭力头的角度β，我们就能用正弦法来一举而消除关于地磁的改正量。

在这种方法中，β一直被调整到偏转角等于零为止，于是就有

$$\theta=-\beta.$$

如果γ_1和γ_2的符号仍和从前一样用β的下标来指示，则有

$F\sin\beta_1=-F\sin\beta_3=-Gg\gamma_1\gamma_2+Hg\gamma_2\sin a$，

$F\sin\beta_2=-F\sin\beta_4=-Gg\gamma_1r_2-Hg\gamma_2\sin a$，

以及

$$\gamma_1\gamma_2=-\frac{F}{4Gg}(\sin\beta_1+\sin\beta_2-\sin\beta_3-\sin\beta_4).$$

这就是拉提摩·克拉克先生在使用由大英协会的电学委员会制造的仪器时所采用的方法。我们感谢克拉克先生提供了图 53 中的力测电流计的作图；在这种电流计中，不论是作为固定线圈还是作为悬挂线圈都采用了亥

姆霍兹的双线圈装置[1]。用来调节双线悬置的扭力头表示在图 54 中，悬线张力的相等通过下法来保证：两根悬线接在一根丝线的两端，丝线绕在一个滑轮上，悬线之间的距离用两个距离可变的导轮来调节。悬挂的线圈可以借助于一个对悬线轮起作用的螺旋来上下移动，并且可以借助于图 54 下部所示的滑动部件来在两个方向上水平移动，它也通过一个扭转螺旋来调节其方位，那个螺旋可以绕着竖直轴线而转动扭力头（见第 459 节）。悬挂线圈的方位角通过观察一个标尺在镜中的反射来确定，这种装置画在了悬挂线圈的轴线的正下方。

起初由韦伯制造的仪器在他的 Elektrodynamische Maasbestimmungen 中进行了描述。它是打算用于小电流的测量的，因此固定线圈和悬挂线圈都有许多匝，而且悬挂线圈在固定线圈内部所占的空间部分也比在大英协会的仪器中要大，因为后者主要是打算用作一种标准仪器，以便可以把更灵敏的仪器和它对比的。韦伯用自己的仪器作的实验，为安培公式应用于闭合电流时的精确性提供了最完备的实验证明，而且形成了韦伯的研究的一个重要部分，通过这些研究，他在精确度方面把电学量的数值测定提高到了很高的水平。

在韦伯这种形式的力测龟流计中，一个线圈悬挂在另一个线圈的内部，并受到一个倾向于使它绕竖直轴而转动的力偶的作用；这或许是最适合于绝对测量的一种仪器。在第 700 节中，曾经给出了计算这种装置之各常量的一种方法。

726．]然而，如果我们希望借助于一个微弱电流来产生一个相当大的电磁力，则更好的办法是把悬挂线圈摆得平行于固定线圈，并使它可以向着或离开固定线圈而运动。

在图 55 所示的焦耳博士的电流秤中，悬挂线圈是水平的，而且可以上下运动，而它和固定线圈之间的力则通过为了把线圈带回到没有电流时对固定线圈而言的同一相对位置而必须增加或减少的线圈重量来估算。

悬挂线圈也可以固定在一个扭秤的水平臂的一端，并且可以放在两个固定线圈之间，其中一个固定线圈吸引它，而另一个则推斥它，如图 56 所示。

通过像在第 729 节中所描述的那样来安排各线圈，作用在悬挂线圈上的力可以被弄得在离开平衡位置的一段小距离之内成为近似的均匀。

另一个线圈可以固定在扭秤臂的另一端并放在两个固定线圈之间。如果两个线圈是相似的，但是却载有反向流动的电流，则地磁对扭秤臂位置的影响将被完全消除。

727．]如果悬挂线圈具有长螺线管的形状并且能够平行于它的轴线而运动，以通过一个更大的具有相同轴线的固定螺线管的内部，那么，如果两个螺线管中的电流方向相同，则悬挂螺线管将被一个力吸向固定螺线管的内部，而只要各螺线管没有和任何管端相距很近，这个力就是近似地均匀的。

728．]当一个小线圈放在两个相等的而线度更大得多的线圈之间时，

[1] Pogg.,Ann.xxxviii,pp.1-10，Aug.1869。

为了在小线圈上产生一个均匀的纵向力，我们应该使大线圈的半径和他们平面之间的距离成2与$\sqrt{3}$之比。如果我们沿相反的方向把电流送入这些线圈中，则ω的表示式中含γ奇次幂的各项都会消失，而且，既然$\sin^2\alpha=\frac{4}{7}$而$\cos^2\alpha=\frac{3}{7}$，含γ^4的一项也会消失，从而作为ω的可变部分，我们由第 715 节就得到

$$\frac{8}{7}\sqrt{\frac{3}{7}}\pi n\gamma\left\{3\frac{r^2}{c^2}P_2(\theta)-\frac{11}{7}\frac{r^6}{c^6}P_6(\theta)+\cdots\right\},$$

这就指示了作用在小的悬挂线圈上的一个接近均匀的力。这一事例中的线圈安排，就是在第 715 节中描述了的三线圈电流计中那两个外线圈的安排。请参阅图 50。

729．]如果我们希望把一个悬挂线圈放在两个线圈之间，而这两个线圈离悬挂线圈很近，以致相互作用着的导线之间的距离远小于这两个线圈的直径，则最均匀的力可以通过使每一外线圈的半径比中间线圈的半径大出一个等于中间线圈和外线圈的平面间距的$\frac{1}{\sqrt{3}}$的值来得到。这一点可以由第 705 节中针对两个圆电流的互感而证明了的表示式来推知[①]。

[①] 在实际的仪器中，使电流进入和流出各线圈的导线并不是像图中所示的那样分开，而是互相尽可能合并在一起以互相抵消其电磁作用的。

第十六章

电磁观测

730．]电学量的许多测量都是对一个振动物体的运动的观测，因此我们将把某些注意力用到这种运动的本性方面，以及一些观测它的最好方法方面。

一般说来，一个物体在其稳定平衡附近的微小振动，是和一个受到正比于到一固定位置的力作用的点的振动相类似的。在我们的实验中的振动物体的事例中，也存在由空气的阻力、悬丝的阻力之类的种种原因引起的对运动的阻力。在许多电学仪器中，还有另一种阻力原因，那就是在振动磁体附近的传导电路中感应出来的电流的反作用。这些电流是被磁体的运动感应出来的，而根据楞次定律，他们对磁体的作用永远是反抗磁体的运动。这在许多事例中就是阻力的主要部分。

一个叫做“阻尼器”的金属电路有时被放在一个磁体的附近，其明确的目的就是阻碍或停止磁体的摆动。因此我们就把这种阻力称为“阻尼”。

在慢振动的事例中，例如在很容易观察的振动的事例中，不论起源于什么原因，整个的阻力都显现为和速度成正比。只有当速度比电磁仪器中的普通振动速度大得多时，我们才有关于阻力正比于速度平方的迹象。

因此我们必须研究一个物体在一个正比于距离的吸引力和一个正比于速度的阻力作用下的运动。

731.]泰特教授[①]对速端曲线原理的下述应用使我们能够借助于等角蜷线而用一种极简单的方式来研究这种运动。

设要寻求的是一个以均匀角速度ω沿着一个对数蜷线或称等角蜷线而绕着极点运动的一个质点的加速度。

这种蜷线的性质是其切线 PT 和矢径 PS 成一常值角 a.

如果 v 是 P 点上的速度，则

$$v.\sin a=\omega.SP.$$

由此可见，如果画直线$\overline{SP'}$平行于PT并等于SP，则P点上的速度的方向和量值都将由下式给出

$$v=\frac{\omega}{\sin\alpha}SP'.$$

因此 P′就将是速端曲线上的一个点。但是，SP′就是转过了一个常角π-a 的 SP′，从而 P′所描绘的速端曲线就是和绕着极点转过一个角π-a 的原有蜷线相同的。

P点的加速度在量值和方向上由P′点的速度乘以同一因子$\frac{\omega}{\sin\alpha}$来代表。

由此可见，如果我们对 SP′进行同一运算，即把它绕着极点转过一个

[①] {在这一事例中，如果 M 是内线圈和一个外线圈的相互势能，则当利用第 705 节中的符号时，既然各线圈是对称排列的，和一个位移 y 相

角度π-a而达到SP″，则P点的加速度将在量值和方向上等于

$$\frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}SP''，$$

式中SP″等于转过一个角2π-2a的SP.

如果我们画PF使它等于并平行于SP″，则加速度将是$\frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}PF$；这个加速度可以分解成

$$\frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}PS\text{和}\frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}PK。$$

其中第一个分量是一个正比于距离而指向S的向心加速度。第二分量的方向和速度的方向相反，而既然

$$PK=2\cos\alpha P'S=-2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\omega}v，$$

这个加速度就可以写成

$$-2\frac{\omega\cos\alpha}{\sin\alpha}v.$$

因此质点的加速度是由两部分合成的；其中第一部分由一个吸引力μγ所引起，指向S并正比于距离，而第二部分则是-2kv，即一个正比于速度的对运动的阻力，此处有

$$\mu=\frac{\omega^2}{\sin^2\alpha}，\text{和}k=\omega\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

如果我们在这些表示式中令$a=\frac{\pi}{2}$，则曲线轨道变成一个圆，而且我们有$\mu_0\omega_0^2$和$k=0$.

由此可见，如果单位距离上的力保持相同，则$\mu=\mu_0$而

$\omega=\omega_0\sin a$.

吸引力规律相同的不同蜷线上的角速度，正比于各该蜷线的角度的正弦。

732.]如果我们现在考虑一点的运动，而该点是运动点P在水平线XY上的投影，我们就会发现，它离S的距离和它的速度是P点的距离和速度的水平分量。因此这个点的加速度也是一个等于μ乘以到S的距离而指向S的吸引力，以及一个等于2k乘以速度的阻力。

因此我们就有了关于一点之直线运动的完备作图法，该点受到一个正比于离某一固定点的距离的吸引力以及一个正比于速度的阻力。这样一个点的运动，简单地就是另一个点的运动的水平部分，而那另一个点是以均匀角速度而沿着一条对数蜷线在运动的。

733.]蜷线的方程是

$$\gamma=Ce^{-\sigma\cot\alpha}.$$

为了确定水平运动，我们令

$$\phi=\omega t，x=a+\gamma\sin\phi，$$

式中a是平衡点的x值。

如果我们作直线BSD使它和竖直线成一角a，则切线BX，DY，GZ等等将是竖直的，而X、Y、Z等等则将是逐次振动的端点。

734．]对一个振动物体所作的观测如下：

(1)驻点外的标尺读数。这些读数叫做“伸长”。(2)沿正方向和负方向通过标尺上一个确定刻度的时刻。(3)某些确定时刻的标尺读数。除了在长周期的事例中以外，这一种观测是不常进行的[①]。

我们必须确定的量是：

(1)平衡位置上的标尺读数。

(2)振动的对数减缩。

(3)振动时间。

由三次相继伸长确定平衡位置的读数

735．]设 x_1、x_2、x_3 是观察到的对应于伸长 X、Y、Z 的标尺读数，a 是平衡位置 S 处的读数，并设 γ_1 是 SB 的值，则有

$x_1-a=\gamma_1 \sin a$,

$x_2-a=-\gamma_1 \sin a e^{-\pi\cot a}$.

$x_3-a=\gamma_1 \sin a e^{-2\pi\cot a}$.

由这些值，我们就得到

$$(x_1-a)(x_3-a)=(x_2-a)^2,$$

式中

$$a=\frac{x_1x_3-x_2{}^2}{x_1+x_3-2x_2}.$$

当 x_3 和 x_1 相差不大时，我们可以用

$$a=\frac{1}{4}(x_1+2x_2+x_3)$$

作为一个近似方程。

确定对数减缩

736．]一次振动和下一次振动的振幅之比的对数，叫做“对数减缩”。如果我们用 ρ 来代表这个比值，则有

$$\rho=\frac{x_1-x_2}{x_3-x_2},\ L=\log_{10}\rho,\ \lambda=\log_e\rho.$$

L 叫做常用对数减缩，而 λ 叫做自然对数减缩。很显然，

$$\lambda=L\log_e 10=\pi\cot a.$$

由此即得

$$\alpha=\cot^{-1}\frac{\lambda}{\pi},$$

此式确定了对数蜷线的角度。

在进行 λ 的一次具体测定时，我们让物体完成相当多次振动。如果 c_1 是第一次振动的振幅而 c_n 是第 n 次振动的振幅，则有

$$\lambda=\frac{1}{n-1}\log_e\left(\frac{c_1}{c_n}\right).$$

[①] Proc.R.S.Edin.,Dec.16,1867.

如果我们假设观测的精确度对大幅振动和小幅振动来说都是相同的，则为了得到最好的 λ 值,我们应该让振动衰减到 c_1 和 c_n 之比和自然对数的底e最接近时为止。这就给出一个n值，它是和 $\frac{1}{\lambda}+1$最相近的整数。

然而，既然在大多数事例中时间是很宝贵的，最好就是在振幅的衰减进行到这种地步以前取它的倒数第二组观测结果。

737．]在某些事例中，我们可能必须由两次相继的伸长来确定平衡位置，而对数减缩则已经由专门的实验定出。这时我们就有

$$a=\frac{x_1+e^{\lambda}x_2}{1+e^3}\text{.}$$

振动时间

738．]当测定了平衡位置以后，就要在标尺的那一点上或在和该点尽可能接近的地方作个明显的记号，然后就记下在若干次相继的振动中经过这个记号的时刻。

让我们假设记号位于正向一侧和平衡点有一个未知的但很小的距离 x 处，而 t_1 就是所观测到的第一次沿正方向经过这一记号的时刻，而 t_2、t_3 等等则是以后各次的经过时刻。

如果 T 是振动时间{也就是两次相继经过平衡位置所需的时间}，而 P_1、P_2、P_3 等等则是经过真实平衡位置的时刻，于是就有

$$t_1=P_1+\frac{x}{v_1}\text{，}\ t_2=P_2+\frac{x}{v_2}\text{，}\ P_2-P_1=P_3-P_2=T\text{，}$$

式中 v_1、v_2、v_3 等等是相继的经过速度，而我们可以认为这些速度在很小的距离 x 上是均匀的。

如果 ρ 是一次振动的振幅和其次一次振动的振幅之比，则有

$$v_2=-\frac{1}{\rho}v_1\text{，而}\ \frac{x}{v_2}=-\rho\frac{x}{v_1}\text{.}$$

如果三次经过是在时刻 t_1、t_2、t_3 被观察到的，我们就有

$$\frac{x}{v_1}=\frac{t_1-2t_2+t_3}{(\rho+1)^2}\text{.}$$

因此振动时间就是

$$T=\frac{1}{2}(t_3-t_1)-\frac{1}{2}\frac{\rho-1}{\rho+1}(t_1-2t_2+t_3)\text{.}$$

下一次经过真实平衡点的时刻是

$$P_2=\frac{1}{4}(t_1+2t_2+t_3)-\frac{1}{4}\frac{(\rho-1)^2}{(\rho+1)^2}(t_1-2t_2+t_3)$$

三次经过就足以确实这三个量，但是任何多次也可以用最小二乘法相合起来。例如，对于五次，就有

$$T=\frac{1}{10}(2t_5+t_4-t_2-2t_1)\\ -\frac{1}{10}(t_1-2t_2+2t_3-2t_4+t_5)\frac{\rho-1}{\rho+1}(2-\frac{\rho}{1+\rho^2})\text{.}$$

第三次经过的时刻是

$$P_3=\frac{1}{8}(t_1+2t_2+2t_3+2t_4+t_5)-\frac{1}{8}(t_1-2t_2+2t_3-2t_4+t_5)\frac{(\rho-1)^2}{(\rho+1)^2}.$$

739．]同样的方法可以扩大到一系列任何次数的振动。如果振动很迅速，以致无法记录每一次经过的时刻，我们就可以记录每三次或每五次的经过，但要注意使相继的经过是沿相反方向的。如果振动在一段长时间内保持为规则的，则我们在这整段时间内用不着进行观测。我们可以从观测足够多次的振动以从近似地确定振动时间 T 和经过中点的时刻 P 开始，这时要注意经过中点时是向右运动的还是向左运动的。然后我们就可以接着计数振动次数而不记录经过时刻，或是把观测停一段时间。然后我们就观测第二系列的中点经过，并推出振动时间 T 和中点经过时刻 P′，这时也要注意这种经过的方向。

如果由这两组观测结果推得的振动时间 TT′接近相等，我们就可以开始通过两组观测结果的组合来进行周期的一种更精确的测定。

用 T 去除 P′-P，商数应该很接近于一个整数，其为偶或为奇由经过 P 和 P′为同向或为反向而定。如果情况并非如此，则那些观测结果是没有价值的。但是，如果结果很接近于一个整数 n，我们就可以用 n 去除 P′-P，于是我们就得到整段振动时间中的 T 的平均值。

740．]这样求得的振动时间 T 是实际的平均振动时间，它是应该加以改正的，如果我们想要由它推出沿无限小弧段的无阻尼振动的振动时间的话。

为了把观察到的时间折算成沿无限小弧段的振动时间，我们指出，在振幅为 c 处从静止到静止的振动时间通常形式如下：

$T=T_1(1+kc^2)$，

式中 k 是一个系数，在普通摆的事例中它是 $\frac{1}{64}$ 现在，相继的各次振动的振幅是 c、$c\rho^{-1}$、$c\rho^{-2}\cdots c\rho^{1-n}$，于是 n 次振动的总时间就是

$$nT=T_1\left(n+k\frac{{c_1}^2\rho^2-c_n^2}{\rho^2-1}\right),$$

式中 T 是由观测结果推得的振动时间。

由此可见，为了求得在无限小弧上的振动时间，我们近似地有

$$T_1=T\left\{1-\frac{k}{n}\frac{{c_1}^2\rho^2-c_n^2}{\rho^2-1}\right\}.$$

为了求出无阻尼时的振动时间 T_0，我们由第 731 节有

$$\begin{aligned}T_0&=T_1\sin\alpha\\&=T_1\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}.\end{aligned}$$

741．]被{一个正比于距离的力}吸向一个固定点并受到一个正比于速度的阻力的物体的直线运动的方程是

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2k\frac{dx}{dt}+\omega^2(x-a)=0，\quad(1)$$

式中 x 是物体在时刻 t 的座标，而 a 是平衡点的座标。

为了求解这一方程，令

$$x—a=e^{-kt}y；(2)$$

于是就得到

$$\frac{d^2y}{dt^2}+(\omega^2-k^2)y=0；(3)$$

此式的解是

$y=C\cos（\sqrt{\omega^2-k^2}t+a$, 当K小于ω时；(4)

$y=A+Bt$, 当 k 等于ω时；(5)

$y=C'\cosh（\sqrt{k^2-\omega^2}t+a'）$，当k大于ω时。(6)

x 的值可以利用方程(2)而由 y 的值推得。当 k 小于ω时，运动是一系列常周期时间的无限多个振动，但其振幅是递减的。当 k 增大时，周期就变得更长，而振幅的减小也更快。

当 k（阻力系数的二分之一）变得等于或大于ω（离平衡点单位距离处的加速度的平方根）时，运动就不再是振动性的，而是在整个的运动过程中物体只能经过一次平衡点，在此以后它就达到一个最大伸长位置，然后就向着平衡点运动回去，它不断接近平衡点，但永不达到该点。

电阻大得使它的运动属于这种运动的电流计，叫做不摆电流计。他们在许多实验中是有用的，而尤其在电报通讯中是有用的；在电报通讯中，自由振动的存在会完全掩盖了所要观察的运动。

不论 k 值和ω值是什么，平衡点的标尺读数 a 的值都可以利用公式

$$a=\frac{q(rs-qt)+r(pt-r^2)+s(qr-ps)}{(p-2q+r)(r-2s+t)-(q-2r+s)^2}$$

而根据按相等的时间间隔取得的五个标尺读数 p、q、r、s、t 来推出。

电流计的观测

742．]为了用一个正切电流计来测量一个常值电流，仪器被调得它的线圈平行于磁子午面，并记下零值读数。然后把电流送入线圈中，并观测对应于新的平衡位置的磁体偏转角。设用φ代表这个角。

于是，如果 H 是水平磁力，G 是电流计的系数，而γ是电流的强度，则

$$\gamma=\frac{H}{G}\tan\phi.\quad(1)$$

如果悬丝的扭转系数是τMH（见第 452 节），则我们必须应用改正过的公式

$$\gamma=\frac{H}{G}(\tan\phi+\tau\phi\sec\phi).\quad(2)$$

偏转角的最佳值

743．]在某些电流计中，电流所通过的线圈匝数可以随意改变。在另一些电流计中，电流的一个已知分数可以用一个叫做“分流器”的导体而从电流计中引出。在其中任一种事例中，G 的值，也就是单位电流对磁体的效应，都被弄成变化的了。

让我们确定一个 G 值，在那个值下，偏转角观测值中的一个给定误差

将对应于推得的电流值中的最小误差。

求方程(1)的导数，我们就得到

$$\frac{d\gamma}{d\phi}=\frac{H}{G}\sec^2\phi. \quad (3)$$

由此即得

$$\frac{d\phi}{d\gamma}=\frac{2}{2\gamma}\sin 2\phi. \quad (4)$$

当 γ 值给定时，此式在偏转角为 45° 时有一个极大值。因此 G 的值应该加以调节，直到 $G\gamma$ 尽可能近似地等于 H 时为止；因此，对于强电流来说，不用太灵敏的电流计是更好一些的。

通入电流的最佳方法

744.]当观察者能够借助于一个开关而随时接通或开断电路时，最好适当地操作那个开关，以使磁体以尽可能小的速度到达它的平衡位置。下面的办法是由高斯针对这一目的而设计的。

假设磁体是处于平衡位置的，而且也不存在电流。现在观察者使电路接通一小会儿，于是磁体就被推得向着它的新平衡位置运动起来。然后他又断开电路。现在力就是指向原有的平衡位置的，而运动就受到阻碍。如果设法作到使磁体恰好在新平衡位置上达到静止，而观察者就在这一时刻接通电路且不再断开，磁体就将在它的新位置上保持静止。

如果我们忽略阻力的效应并且也忽略在新旧位置上作用着的总力之差，那么，既然我们希望新力在第一次作用中所产生的动能和原有力在电路开断时所消灭的动能一样多，我们就必须使电流的第一次作用延长到磁体已经运动了从第一个位置到第二个位置的距离的一半。然后，如果原有力是当磁体走过它的另一半路程时起作用的，该力就会正好使磁体停下来。现在，从一个最大伸长点运动到离平衡位置一半距离处所需的时间是从静止到静止的一个周期的三分之一。

因此，既已预先确定了从静止到静止的一次振动的时间，操作者就使电路接通一段等于这一时间的三分之一的时间，然后使电路断开同样一段时间，然后使电路在实验过程中保持接通。于是磁体就或是静止，或是它的摆动如此之小，以致可以立刻记下观察结果而不必等候摆动停下来。为此目的可以把一个节拍器调得磁体每振动一下就打响三次。

当阻力较大而必须照顾到时，规则就复杂一点，但是在这种事例中，摆动会衰减得如此之快以致用不着对此规则进行什么改正。当必须使磁体返回它的原始位置时，电路被断开一段等于三分之一周期的时间，然后接通一段相同的时间，而最后再断开。这就会使磁体在它的原有位置上处于静止。

如果在取得了正向观测结果以后必须立即取得反向静测结果，就可以把电路断开一段单次振动的时间然后使它反向。这就会使磁体在反向位置上达到静止。

利用第一次摆动来进行的测量

745．]当没有时间来进行多于一次的观测时，电流可以用在磁体的第一次摆动中观测到的最大伸长来量

度。如果没有阻力，永久偏转角ϕ就是最大伸长的一半。如果阻力使一次振动和下一次振动之比成为ρ，而且θ_0是零值读数，而θ_1是第一次摆动中的最大伸长，则和平衡点相对应的偏转角ϕ是

$$\phi=\frac{\theta_0+\rho\theta_1}{1+\rho}$$

用这种办法，偏转角可被算出而不必等着磁体在它的平衡位置上停下来。

进行一系列观测

图 58

746．]对一个常值电流进行相当多次测量的最好方法就是，先在电流沿正向流动时观测三个伸长值，然后使电路断开一段约为单独一次振动的时间，以便磁体摆回到负偏转的位置上，然后使电流反向并在负向一侧观测三个相继的伸长值，然后使电路断开一次单独振动的时间并在正值一侧重复这些观测，这样一直继续下去，直到获得了足够多的观察结果为止。用这种办法，可能起源于地磁力的方向在观测时间内的变化的那些误差就可以被消除。通过仔细地定时接通和定时开断电路，操作者很容易调节振动的程度，以使他们成为很小而并不模糊。磁体的运动如图 58 中的曲线所示，图中的横座标表示时间而纵座标表示磁体的偏转角。如果$\theta_1\cdots\theta_6$是观测到的各伸长的代数值，则偏转角由下列方程给出：

$$8\phi=\theta_1+2\theta_2+\theta_3-\theta_4-2\theta_5-\theta_6.$$

倍增法

747．]在电流计磁体的偏转角很小的一些事例中，也许值得建议的是按照适当的时间间隔来使电流反向以引起磁体的一种摆动，这样就能增大可以看到的效应。为此目的，在确定了磁体的单次振动{即从静止点到静止点的一次振动}的时间 T 以后，电流被沿方向送一段时间 T，然后沿反方向送一段相同的时间，如此继续进行。当磁体的运动变成可见的时，我们可以按观察到的最大伸长时间来改换电流方向。

设磁体位于正伸长θ_0，并设电流被沿负方向送入线圈中。于是平衡点就是$-\phi$，而磁体就会摆向一个负伸长θ_1，使得

$$-\rho(\phi+\theta_1)=(\theta_0+\phi),$$

或者写成

$$-\rho\theta_1=\theta_0(\rho+1)\phi,$$

同理，如果现在把电流改为正向，而磁体摆往θ_2，则有

$$\rho\theta_2=-\theta_1+(\rho+1)\phi,$$

或者写成

$$\rho^2\theta_2=\theta_0+(\rho+1)^2\phi;$$

而如果电流往返地改向 n 次，我们就得到

$$(-1)^n\theta_n=\rho^{-n}\theta_0+\frac{\rho+1}{\rho-1}(1-\rho^{-n})\phi,$$

由此我们就得到φ的形式如下：

$$\phi=(\theta_n-\rho^{-n}\theta_0)\frac{\rho-1}{\rho+1}\frac{1}{1-\rho^{-n}}.$$

如果 n 是一个很大的数以致 ρ^{-n} 可以忽略不计，则表示式变成

$$\phi=\theta_n\frac{\rho-1}{\rho+1}.$$

这一方法对精确测量的应用，要求关于ρ的准确知识，而ρ就是磁体在所受阻力的影响下的一次振动和下一次振动的比值。不准量起源于一个事实，那就是避免ρ值之不规则的困难一般会大于大角度伸长的好处。只有当我们希望通过使一个很小的电流引起磁针的可见运动来确证该电流的存在时，这个方法才是真正有价值的。

关于瞬变电流的测量

748．]当一个电流的持续时间只是电流计磁体的振动时间的一个很小的分数时，电流所输送的总电量就可以用在通电时间之内传给磁体的一个角速度来量度，而这个角速度可以根据磁体第一次振动的伸长来确定。

如果我们忽略阻滞磁体振动的阻力，讨论就会变得很简单。设γ是任一时刻的电流强度，而 Q 是该电流所输送的电量，则有

$$Q=\int\gamma dt.\quad(1)$$

设 M 是悬挂磁体的磁矩，A 是它的惯量矩，而θ是磁体和线圈平面所成的角，则

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}+MH\sin\theta=MG\gamma\cos\theta.\quad(2)$$

如果电流通过的时间很短，我们可以在这段时间内在 t 积分而不必照顾θ的变化，于是我们就得到

$$A\frac{d\theta}{dt}=MG\cos_0\int\gamma dt+C=MGQ\cos\theta_0+C.\quad(3)$$

这就表明，电量 Q 的通过在磁体上产生一个角动量 $MGQ\cos\theta_0$，式中 θ_0 是θ在电流通过的那一瞬间的值。如果磁体起初是处于平衡的，我们就可以令 $\theta_0=0$，C=0。

于是磁体就自由摆动并达到一个伸长θ■。如果没有阻力，在摆动过程中反抗磁力而作的功就是 $MH(1-\cos\theta_1)$。

电流向磁体传送的能量是

$$\frac{1}{2}A\overline{\frac{d\theta}{dt}}\Big|^2$$

使二量相等，我们就得到

$$\overline{\frac{d\theta}{dt}}\Big|^2=2\frac{MH}{A}(1-\cos\theta_1),\quad(4)$$

由此即得

$$\frac{d\theta}{dt}=2\sqrt{\frac{MH}{A}}\sin\frac{1}{2}\theta_1,$$
$$=\frac{MG}{A}Q，根据(3)．\quad(5)$$

但是，如果 T 是磁体从静止点到静止点而振动一次所用的时间，则有

$$T=\pi\sqrt{\frac{A}{MH}}，(6)$$

从而我们就有

$$Q=\frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\frac{1}{2}\theta_1，(7)$$

式中 H 是水平磁力，G 是电流计系数、T 是单独一次振动的时间，而 θ_1 是磁体振动的第一伸长。

749．〕在许多实际的实验中，伸长是一个很小的角，从而就很容易照顾到阻力的效应，因为我们可以把运动方程当成一个线性方程来处理。

设磁体静止在它的平衡位置上，设在一瞬间内向它传送了一个角速度 v，并设它的第一伸长是 θ_1。

运动方程是

$$\theta=Ce^{-\omega_1 t\tan\beta}\sin\omega_1 t，(8)$$
$$\frac{d\theta}{dt}=C\omega_1\sec\beta e^{-\omega_1 i\tan}\cos(\omega_1 t+\beta)．(9)$$

当 $t=0$ 时，$\theta=0$ 而 $\frac{d\theta}{dt}=C\omega_1=v$．

当 $\omega_1 t+\beta=\frac{\pi}{2}$ 时，

$$\theta=Ce^{(-\frac{\pi}{2}-\beta)\tan\beta}\cos\beta=\theta_1．(10)$$

由此即得

$$\theta_1=\frac{v}{\omega_1}e^{-(\frac{\pi}{2}-\beta)\tan\beta}\cos\beta．(11)$$

现在，由第 741 节就有

$$\frac{MH}{A}=\omega^2=\omega_1^2\sec^2\beta，(12)$$
$$\tan\beta=\frac{\lambda}{\pi}，\ \omega_1=\frac{\pi}{T_1}，(13)$$

而由方程(5)就有

$$v=\frac{MG}{A}Q．(14)$$

由此即得

$$\theta_1=\frac{QG}{H}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{T_1}e^{-\frac{\lambda}{\pi}\tan^{-1}\frac{\pi}{\lambda}}，(15)$$
$$Q=\frac{H}{G}\frac{T_1\theta_1}{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}e^{\frac{\lambda}{\pi}\tan^{-1}\frac{\pi}{\lambda}}，(16)$$

此二式作为瞬变电流之电量的函数而给出第一伸长，并相反地作为第一伸长的函数而给出瞬变电流的电量，式中 T_1 是观测到的在实际阻尼力影

响下的单独一次振动的时间。当λ很小时我们可以使用近似公式

$$Q=\frac{H}{G}\frac{T}{\pi}(1+\frac{1}{2}\lambda)\theta_1 \qquad (17)$$

反冲法

750．〕上述方法假设了当瞬变电流通过线圈时磁体是静止在它的平衡位置上的。如果我们想要重作实验，那就必须等到磁体又静止下来时才行。然而，在某些事例中，我们能够得到一些强度相等的瞬变电流，而且随便在什么时刻都能得到；在这样的事例中，由韦伯[①]描述了的下述方法，就在进行一系列连续不断的观测方面是最为方便的。

假设我们利用一个其值为 Q_0 的瞬变电流来使磁体摆动起来。如果我们为了简单而写出

$$\frac{G}{H}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{T_1}e^{-\frac{\lambda}{\pi}\tan^{-1}\frac{\pi}{\lambda}}=K，(18)$$

则第一伸长是

$$\theta_1=KQ_0=\alpha_1(\text{say})． \qquad (19)$$

在开始的一瞬间传给磁体的速度是

$$v_0=\frac{MG}{A}Q_0．(20)$$

当它返回头来沿负方向通过平衡点时，它的速度将是

$$v_1=-ve^{-\lambda}．(21)$$

其次一个负伸长将是

$$\theta_2=-\theta_1e^{-\lambda}=b_1．(22)$$

当磁体回到平衡点时，它的速度将是

$$v_2=v_0e^{-2\lambda}．(23)$$

现在，当磁体位于零点时，把一个总量为—Q 的瞬变电流送入线圈中。它将使速度 v_2 变成 v_2—v，此处

$$v=\frac{MG}{A}Q．(24)$$

如果 Q 大于 $Q_0e^{-2\lambda}$，则新的速度将是负的，并等于

$$-\frac{MG}{A}(Q-Q_0e^{-2\lambda})．$$

于是磁体的运动就会反向，而其次一个伸长就将是负的

$$\theta_3=-K(Q-Q_0e^{-2\lambda})=c_1=-KQ+\theta_1e^{-2\lambda}．(25)$$

然后让磁体达到它的正伸长

$$\theta_4=-\theta_3e^{-\lambda}=d_1=e^{-\lambda}(KQ-a_1e^{-2\lambda})， \qquad (26)$$

而当它再次回到平衡点时又把一个其量为 Q 的正电流送入线圈中去。这就会把磁体推回正方向而达到正伸长

$$\theta_5=KQ+\theta_3e^{-2\lambda}；(27)$$

[①] 参阅 Gaussandw．Weber,ResultatedesmagnetischenVereins,1836.Chap.II.pp.34—50．

或者，把这个伸长称为第二组四个伸长中的第二伸长，就有

$$a_2=kQ(1-e^{-2\lambda})+a_1e^{-4\lambda}. \quad (28)$$

如此进行下去，通过观测两个伸长+和-，然后送入一个负电流并观测两个伸长-和+，然后送入一个正电流，依此类推，我们就得到一系列每组四个的伸长，其中

$$\frac{d-b}{a-c}=e^{-\lambda}, \quad (29)$$

而

$$KQ=\frac{(a-b)e^{-2\lambda}+d-c}{1+e^{-\lambda}}, \quad (30)$$

如果观测了 n 个伸长系列，我们就可以由方程

$$\frac{\Sigma(d)-\Sigma(b)}{\Sigma(a)-\Sigma(c)}=e^{-\lambda} \quad (31)$$

求出对数减缩，并由方程

$$KQ(1+e^{-\lambda})(2n—1)$$
$$=\Sigma_n(a-b-c+d)(1+e^{-2\lambda})-(a_1-b_1)-(d_n-c_n)e^{-2\lambda} \quad (32)$$

求出 Q。

磁体在反冲法中的运动如图 59 中的曲线所示；图中的横座标表示时间，而纵座标表示磁体在相应时刻的偏转角。请参阅第 760 节。

倍增法

751．〕如果每当磁体经过零点时我们就通入瞬变电流，而且总是使它增大磁体的速度，则逐次的伸长 Q_1、Q_2

等等将是

$$\theta_2=-KQ-e^{-\lambda}\theta_1, \quad (33)$$
$$\theta_3=+KQ-e^{-\lambda}\theta_2. \quad (34)$$

多次振动以后伸长所趋向的极限值，通过令 $\theta_n=-\theta_{n-1}$ 来求出，由此我们就得到

$$\theta=\pm\frac{1}{1-e^{\lambda}}KQ. \quad (35)$$

如果λ很小，终极伸长的值可以是大的，但是，既然这就涉及一种持续很久的实验，而且涉及λ的细心测定，而且λ中的很小误差会引起 Q 的测定中的很大误差，这种方法在数值测定中就很少有用，而必须保留着用来获得关于小得无法直接观察的电流的存在与否的证据。

在使瞬变电流对电流计中的运动磁体发生作用的一切实验中，重要的一点都在于，全部的电流都应该当磁体离零点的距离只是总伸长的一个很小的分数时通过。因此，振动时间应该比产生电流所需要的时间长得多，而操作者应该注视磁体的运动，以便根据磁体经过其平衡点的时刻来控制电流通过的时刻。

为了估计操作员未能准时产生电流而造成的误差，我们指出，一个冲量在增大伸长方面的效应正比于

$e^{\sigma \tan\beta}\cos(\phi+\beta)$[①]

而且当 $\phi=0$ 时此式有极大值。因此，由电流的取时有误而引起的误差总是导致对电流值的低估，而误差的大小则可按照电流通过时振动周相的正弦和 1 之比来加以估计。

---

① Gauss&Weber,ResultaledesMagnetischenVereins,1838,p,98.

第十七章

线圈的比较

一个线圈的电学常量的实验测定

752.〕我们在第 717 节中已经看到，在一个灵敏电流计中，线圈应该有很小的半径和许多匝导线。即使我们可以接近每一匝导线以便测量它，通过直接测量这样一个线圈的形状和尺寸来确定它的电学常量也将是极其困难的。但是，事实上，不仅多数线匝都被外面各匝所掩盖，而且我们在导线绕好以后也不能肯定外边各匝的压力会不会已经改变了内部各匝的形状。

因此，更好的办法就是通过和其常量为已知的标准线圈进行直接的电学对比来测定一个线圈的电学常量。

既然标准线圈的尺寸必须通过实际测量来确定，这种线圈就必须做得相当大，以便它的直径或周长的测量中的不可避免的误差可以和所测的量比起来尽可能小。绕制线圈的沟槽应该具有长方形的截面，而且截面的线度和线圈的半径相比应该很小。这一点之所以必要，不仅是为了减小因截面大小而作的改正，而更重要的是为了避免被外面各匝遮盖住的那些线匝的位置上的不确定性。[①]

我们想要测定的主要常量是：

(1)由单位电流引起的线圈中心上的磁力。这就是在第 700 节中用 G_1 来代表的那个量。

(2)由单位电流引起的线圈的磁矩。这就是量 g_1。

753.〕测定 G_1。既然工作电流计的线圈比标准线圈小得多，我们就把电流计放在标准线圈的内部，使他们的中心互相重合，两个线圈的平面都是竖直的和平行于地磁力的。于是我们就得到一个差绕电流计，它的一个线圈是 G_1 值已知的标准线圈，而另一个线圈则是我们想要测定其常量 G_1' 的那个线圈。

悬挂在电流计线圈中心的磁体是同时受到这两个线圈中的电流的作用的。如果标准线圈中电流的强度是 r，而电流计线圈中电流的强度是 γ'，那么，如果这些沿相反方向流动的电流引起磁体的一个偏转角 δ，则有

$$H\tan\sigma = G_1'\gamma' - G_1\gamma, \quad (1)$$

式中 H 是地球的水平磁力。

如果两个电流被安排得并不引起任何偏转角，我们就可以用方程

$$G_1' = \frac{\gamma}{\gamma'}G_1 \qquad (2)$$

来求得 G_1'。我们可以用好几种方法来确定 γ 和 γ' 的比值。既然电流计的 G_1 值通常是大于标准线圈的 G_1 值的，我们就可以适当地安排电路，使得

[①] {我没能证明这一表示式；我利用第 748 节中的符号得出，当在 φ 处加上冲量时的伸长和同一冲量在 φ=0 时所产生的伸长成下列比例： 式中 φ 被假设为很小，以致它的平方和更高次方可以忽略不计。}

总电流先通过标准线圈，然后被分流，其中一部分γ′通过组合电阻为 R_1 的电流计和电阻线圈，而其余的部分γ—γ′则通过组合电阻为 R_2 的另一组电阻线圈。

于是我们由第 276 节就得到

$$\gamma' R_1 = (\gamma - \gamma') R_2，(3)$$

或者写成

$$\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{R_1 + R_2}{R_2}，(4)$$

从而就有

$$G_1' = \frac{R_1 + R_2}{R_2} G_1. \qquad (5)$$

如果在电流计线圈的实际电阻方面有任何不确定处（例如由于温度不确定），我们就可以给它增加一些电阻线圈，以使电流计本身的电阻只占 R_1 的一个很小部分，从而就在最后的结果中只引起很小的不确定性。

754.〕测定 g_1　g_1 就是由通过一个小线圈的单位电流所引起的该线圈的磁矩。为了测定 g_1，磁体仍然悬挂在标准线圈的中心，但是小线圈却沿着两个线圈的公共轴线而被平行移开，直到在两个线圈中沿相反方向运行的电流不再引起磁体的偏转时为止。现在，如果二线圈的中心之间的距离是 r，我们就有（第 700 节）

$$G_1 = 2\frac{g_1}{r^3} + 3\frac{g_2}{r^4} + 4\frac{g_3}{r^5} + \cdots. \ (6)$$

通过在标准线圈两侧用小线圈重复进行实验，并测量小线圈的两个位置之间的距离，我们就可以消除测定磁体中心和小线圈中心的位置时的不确定的误差，而且也可以排除 g_2、g_4 等等。

如果标准线圈经过适当的安排，以致我们可以使电流只通过它的半数的线圈以得出一个不同的 G_1 值，那么我们就可以确定一个新的 r 值，而这样一来，正如在第 454 节中一样，我们就可以消去含 g_3 的项。

然而，也常常可能通过足够精确地直接测量小线圈来测定 g_3，以便在计算对 g_1 的改正量时用于下列方程中

$$g_1 = \frac{1}{2} G_1 r^3 - 2\frac{g_3}{r^2}，(7)$$

式中由第 700 节有

$$g_3 = -\frac{1}{8}\pi\alpha^2(6\alpha^2 + 3\xi^2 - 2\eta^2).$$

感应系数的比较

755.〕只有在少数的事例中，由电路的形状和位置来直接计算感应系数才是容易完成的。为了达到足够的精确度，电路之间的距离必须是可以精确测量的。但是，当电路之间的距离大得足以防止测量上的误差会引起结果方面的很大误差时，感应系数本身必然就会在量值上大为减小。现在，对许多实验来说，把感应系数弄得较大是必要的，而我们只能通过使电路

互相靠得更近来作到这一点，这时直接测量的方法就会变成不可能的了，从而，为了确定感应系数，我们就必须把它和一对线圈的感应系数进行对比，那一对线圈安排得恰好，从而他们的感应系数可以通过直接测量和计算来求得。

这种对比可以进行如下：

设 A 和 a 是标准的一对线圈，B 和 b 是要和他们进行对比的线圈。把和 B 接成一个电路，并把电流计 G 的电极接在 P 和 Q 上，使得 PAQ 的电阻是 R 而 QBP 的电阻是 S，而 K 是电流计的电阻。把 a 和 b 以及电池接成一个电路。

设A中的电流是，B中的电流是 $\dot{y}$，电流计中的电流是 $\dot{x}-\dot{y}$，而电池电路中的电流是 γ。

于是，如果 M_1 是 A 和 a 之间的感应系数，而 M_2 是 B 和 b 之间的感应系数，则当开断电池电路时通过电流计的积分感应电流是

$$x-y=\gamma\frac{\frac{M_2}{S}-\frac{M_1}{R}}{1+\frac{K}{R}+\frac{K}{S}}. \quad (8)$$

调节电阻 R 和 S 直到当电池电路接通或开断时没有电流经过电流计时为止，M_2 和 M_1 之比就可以通过 S 和 R 之比来确定。

[1] ［表示式(8)可以证明如下：设 L_1、L_2、N 和 Γ 分别是线圈 A、B、ab 和电流计的自感系数。于是体系的动能 T 就近似地是

$$\frac{1}{2}L_1\dot{x}^2+\frac{1}{2}L_2\dot{y}^2+\frac{1}{2}\Gamma(\dot{x}-\dot{y})^2+\frac{1}{2}N\gamma^2+M_1\dot{x}\gamma+M_2\dot{y}\gamma$$

耗散函数 F，也就是电流加热线圈时的能量消耗率的一半，等于（见 LordRayleigh’ThevryofSound,vol,i,p,78)

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2R+\frac{1}{2}\dot{y}^2S+\frac{1}{2}(\dot{x}-\dot{y})^2K+\frac{1}{2}\gamma^2Q.$$

式中 Q 是电池及电池线圈的电阻。

于是和任一变量 x 相对应的电流方程就有如下的形式：

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\dot{x}}-\frac{dT}{dx}+\frac{dF}{d\dot{x}}=\xi.$$

式中 ξ 是对应的电动势。

由此我们就得到

---

[1] 大的正切电流计有时作得只有一个相当粗的导电圆环，它足够结实，可以不用支撑而保持自己的形状。对于一个标准仪器来说，这并不是一种好的计划。电流在导体中的分布依赖于导体各部分的相对电导率。因此，金属内部连续性的任何隐蔽缺陷都可能使电的主流或是偏向圆环的外侧或是偏向它的内侧。于是电流的真实路线就变成不确定的了。除此以外，当电流只沿圆周运行一次时，必须特别注意避免电流在进入和流出此圆的途中对悬挂磁体的任何作用，因为电极中的电流是等于圆环中的电流的。在许多仪器的构造中，这一部分电流的作用似乎完全没被注意到。最完善的方法是把其中一个电极做成一个金属管，而把另一个电极做成一根同轴地放在管内的用绝缘材料包起的金属线。这样安装的两个电极的外在作用，由第 683 节可知是零。

$$L_1\ddot{x}+\Gamma(\dot{x}-\dot{y})+M_1\dot{\gamma}+Rx+K(x-y)=0,$$
$$L_2\ddot{y}-\Gamma(\dot{x}-\dot{y})+M_2\dot{\gamma}+Sy-K(x-y)=0.$$

这些方程可以立即对t积分。注意到x、$\dot{x}$、y、$\dot{y}$、γ的初始值是零，如果写出x—y=z，我们就在消去y后得到一个如下形式的方程：

$$A\dot{z}+B\dot{z}+Cz=D\dot{\gamma}+E\gamma. \qquad (8')$$

接通电池以后不久，电流就会变成恒稳的，而电流$\dot{z}$就会消失，由此即得

$$Cz=E\gamma。$$

这就给出上面的表示式(8)，而且它表明，当通过电流计的总电量为零时，我们必有 E＝0，或 $M_2R—M_1S=0$。方程(8′)也表明，如果电流计中根本没有任何电流，我们就必有 D=0，或 $M_2L_1—M_1L_2=0$。][1]

一个自感系数和一个互感系数的对比

756.]设把一个线圈接在惠斯登电桥的支路 AF 上，而线圈的自感系数就是我们所要测出的。让我们用 L 来代表这个自感系数。

在 A 和电池之间的连线上接上另一个线圈。这个线圈和 AF 上的线圈之间的互感系数是 M．它可以用第 755 节所描述的方法来测量。

如果从 A 到 F 的电流是 x，从 A 到 H 的电流是 y，则从 z 通过 B 而到 A 的电流将是 x+y。从 A 到 F 的外电动势是

$$A-F=Px+L\frac{dx}{dt}+M\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right). \quad (9)$$

沿 AH 的外电动势是

A—H=Qy。(10)

如果接在 F 和 H 之间的电流计并不指示任何瞬变的或持久的电流，既然 H—F=0，由(9)和(10)就得到

Px=Qy；(11)

从而

$$L\frac{dx}{dt}+M\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)=0, \qquad (12)$$

由此即得

$$L=-\left(1+\frac{P}{Q}\right)M. \qquad (13)$$

既然 L 永远是正的，M 就必然是负的，从而电流必然沿相反的方向通过接在 P 上和接在 B 上的线圈。在作实验时，我们有两种办法可供选择。我们在开始时可以先调节各个电阻，使得

PS=QR，(14)

这就是不存在持久电流的条件；然后我们就调节线圈之间的距离，直到在

---

[1] [方括号中的探讨采自弗来明先生对克勒克·麦克斯韦教授的演讲所加的注释；这种探讨有一种使人伤悼的兴趣，因为这是教授所发表的最后一篇演讲的一部分。在弗来明先生的注释中，实验的计划和本文所给出的有所不同，其不同在于电池和电流计交换了位置。]

接通和开断电池的连接时电流计不再指示一个瞬变电流为止。另一方面，如果这一距离是不能调节的，我们就可以通过适当改变电阻 Q 和 S 而使他们的比值保持不变来消除瞬变电流。

如果发现这种双重调节太麻烦，我们就可以采用第三种方法。在开始时可以把装置安排得由自感引起的瞬变电流稍大于由互感引起的瞬变电流，然后我们就可以通过在 A、Z 之间插入一个电阻为 W 的导体来消除不相等性。没有持久电流通过电流计的条件并不会因为 W 的引入而有所改变。因此我们就可以通过只凋节 W 的电阻来消除瞬变电流。当这一点已经作到时，L 的值就是

$$L=-(1+\frac{P}{Q}+\frac{P+R}{W})M. \quad (15)$$

两个线圈的自感系数的对比

757.〕把两个线圈接在惠斯登电桥的两个相邻的支路上。设 L 和 N 分别是接在 P 上和接在 R 上的线圈的自感系数,则图 61 中没有电流计电流的条件就是

$$(Px+L\frac{dx}{dt})Sy=Qy(Rx+N\frac{dx}{dt}), \quad (16)$$

由此即得

$$PS=QR，\text{为了没有持久电流，} \quad (17)$$

$$\frac{L}{P}=\frac{N}{R}，\text{为了没有瞬变电流。} \quad (18)$$

由此可见，通过电阻的适当调节，持久电流和瞬变电流都可以被消除，然后 L 和 N 之比就可似通过电阻的比较来确定。

第十七章附录

{测量一个线圈的自感系数的方法，在采自麦克斯韦关于电磁场的动力学理论的论文的下述节录中有所描述。该论文见 Phil,Trans,155，pp．475—477．

（论用一个电秤来测定感应系数）

电秤包括把四个点 A、C、D．E 两两相连的六个导体。其中一对点 AC 是通过一个电池 B 而互相连接的。相对的一对点 DE 是通过一个电流计 G 而互相连接的。于是，如果其余四个导体的电阻用 P、Q、R、S 来代表，而它们中的电流用 x、x—z、y、y+z 来代表，则通过 G 的电流将是 z。设各点的电势是 A、C、D、E。于是恒稳电流的条件可由下列各方程
求出：

$$\left.\begin{array}{l}Px=A-D，Q(x-z)=D-C，\\ Ry=A-E，S(y+z)=E-C，\\ Gz=D-E，B(x+y)=-A+C+F\end{array}\right\} \quad (21)$$

对 z 求解这些方程，我们就得到

$$z\left\{\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}+\frac{1}{S}+B(\frac{1}{P}+\frac{1}{R})(\frac{1}{Q}+\frac{1}{S})+G(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q})(\frac{1}{R}+\frac{1}{S})\right.$$
$$\left.+\frac{BG}{PQRS}(P+Q+R+S)\right\}=F(\frac{1}{PS}-\frac{1}{QR}). \quad (22)$$

在这一表示式中，F 是电池的电动势；z 是电流达到稳定时通过电流计的电流；P、Q、R、S 是四个臂的电阻；B 是电池和电极的电阻；G 是电流计的电阻。(44)如果 PS=QR，则 z=0，从而就不会有恒稳电流通过电流计，而只有当电路接通或开断时由于感应而产生的瞬变电流才能通过它，而且电流计的示数就可能用来确定感应系数，如果我们理解所发生的作用的话。

我们将假设 PS=QR，于是当过了足够的时间以后电流 z 就将变为零，并有

$$x(P+Q)=y(R+S)=\frac{F(P+Q)(R+S)}{(P+Q)(R+S)+B(P+Q+R+S)}. \quad (23)$$

设 P、Q、R、S 之间的感应系数由下表给出：P 对自己的感应系数是 p，P 和 Q 之间的感应系数是 h，余类推。

设 g 是电流计对它自己的感应系数，并设它不受 P、Q、R、S 的影响（因为必须如此，以避免 P、Q、R、S 对指针的直接作用）。设 X、Y、Z 是 x、y、z 对 t 的积分。当刚刚接通电路时，x、y、z 是零。过了一段时间，z 变为零，而 x 和 y 达到常值。因此，每一个导体的方程就将是

$$\left.\begin{aligned}&PX+(P+h)x+(k+l)y=\int Adt-\int Ddt,\\&Q(X-Z)+(h+q)x+(m+n)y=\int Ddt-\int Cdt,\\&RY+(k+m)x+(r+o)y=\int Adt-\int Edt,\\&S(Y+Z)+(l+n)x+(o+s)y=\int Edt-\int Cdt,\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

$$GZ=\int Ddt-\int Edt.$$

解这些方程以求 Z，我们就得到

$$Z\left\{\frac{1}{P}+\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}+\frac{1}{S}+B(\frac{1}{P}+\frac{1}{R})(\frac{1}{Q}+\frac{1}{S})+G(\frac{1}{P}+\frac{1}{Q})(\frac{1}{R}+\frac{1}{S})\right.$$
$$\left.+\frac{BG}{PQRS}(P+Q+R+S)\right\}=-F\frac{1}{PS}\left\{\frac{p}{P}-\frac{q}{Q}-\frac{r}{R}+\frac{s}{S}\right.$$
$$+h(\frac{1}{p}-\frac{1}{Q})+k(\frac{1}{R}-\frac{1}{P})+l(\frac{1}{R}+\frac{1}{Q})-m(\frac{1}{p}+\frac{1}{S})$$
$$\left.n(\frac{1}{Q}+\frac{1}{S})+o(\frac{1}{S}+\frac{1}{R})\right\}. \quad (25)$$

现在设由强度｛总电量｝为 Z 的瞬时电流所引起的电流计偏转角为α。设当 PS 和 QR 之比不是 1 而是ρ时所引起的持久偏转角为 Q。另外再设电流计指针从静止点到静止点的振动时间为 T。于是，令

$$\frac{p}{P}-\frac{q}{Q}-\frac{r}{R}+\frac{s}{S}+h(\frac{1}{P}-\frac{1}{Q})+k(\frac{1}{R}-\frac{1}{P})+l(\frac{1}{R}-\frac{1}{Q})$$
$$-m(\frac{1}{P}+\frac{1}{S})+n(\frac{1}{Q}-\frac{1}{S})+o(\frac{1}{S}-\frac{1}{R})=r, \quad (26)$$

我们就得到

$$\frac{Z}{z}=\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{\tan\theta}\frac{T}{\pi}=\frac{r}{\rho-1}. \quad (27)$$

当用实验来测定τ时,最好利用金肯先生在 1863 年向大英协会提交的报告中所描述的装置来改变一个臂的电阻；利用这种装置，从 1 到 1.01 的任意ρ值都可以精确地量出。

我们先观察｛α｝，即当电流计接在电路中而各电阻已调节得不会给出持久电流，当接通电流时由感应脉冲而引起的最大偏转角｛摆幅｝。

然后我们观察｛β｝，即当一个臂的电阻按ρ比 1 的比例增大时由持久电流引起的最大偏转角｛摆幅｝，电流计起初不接通，直到电池已接通一会儿以后才接通。

为了消除空气阻力的影响，最好改变ρ直到近似地有β=2α为止。这时就有

$$r=T\frac{1}{\pi}(\rho-1)\frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{\tan\frac{1}{2}\beta}.$$

如果除 P 以外电秤各臂都是一些用在绕制以前双折起来的不太长的很细导线绕成的电阻线圈，则属于这些线圈的感应系数将可忽略不计，从而τ就将简化为 p/P。因此，电秤就给我们提供了一种手段，来测量其电阻为已知的任意电路的自感。

第十八章

电阻的电磁单位

用电磁单位来测量一个线圈的电阻

758．〕一个导体的电阻定义为电动势的数值和它在导体中产生的电流的数值之比。当我们知道了地球磁力的值时，以电磁单位计的电流值的测定可以利用一个标准电流计来进行。电动势值的测定更加困难一些，因为我们可以直接计算它的值的唯一事例就是当电动势起源于电路对一个已知磁体系的相对运动时的那个事例。

759．〕按电磁单位来对一根导线的电阻进行的最初测定，是由基尔霍夫[①]作出的。他使用了两个形状已知的线圈 A_1 和 A_2，并根据有关各线圈之形状和位置的几何数据算出了它们的互感系数。这些线圈和一个电流计 G 以及一个电池 B 接成一个电路，而电路的两点，即二线圈之间的点 P 和电池与电流计之间的点 Q，则用要测量它的电阻 R 的那条导线连接了起来。当电流稳定时，它就分流在导线电路中和电流计电路中，并引起电流计的某一持久偏转角。如果现在线圈 A_1 被从 A_2 很快地取走并被放在一个 A_1 和 A_2 之间的互感系数为零的位置上（第 538 节），则在两个电路中都会引起一个感生电流，而电流计指针就受到一个冲击，这个冲击就引起某一瞬变偏转角[①]。

导线的电阻 R 根据由恒稳电流所引起的持久偏转角和由感生电流所引起的瞬变偏转角的比较来推出。

设 QGA_1P 的电阻为 K，PA_2BQ 的电阻为 B，而 PQ 的电阻为 R.

设 L、M 和 N 是 A_1 和 A_2 的感应系数。

设 $\dot{x}$ 是G中的电流，$\dot{y}$是B中的电流，则从P至Q的电流是 $\dot{x}-\dot{y}$.

设 E 为电池的电动势，于是就有

$$(K+R)\dot{x}-R\dot{y}+\frac{d}{dt}(L\dot{x}+M\dot{y})=0. \quad (1)$$

$$-R\dot{x}+(B+R)\dot{y}+\frac{d}{dt}(M\dot{x}+N\dot{y})=E. \quad (2)$$

当各电流为常值而一切物体都静止时，

$$(K+R)\dot{x}-R\dot{y}=0. \qquad (3)$$

如果现在 M 由于 A_1 和 A_2 的分离而突然变为零，则对 t 积分，就得到

---

① {除非条件式 M2L1—M1L2=0 近似的得到满足，不然由瞬变电流所引起的电流零点的不稳定性就会使我们无法准确地确定当接通电池电路时电流计中是否有一次“冲动”。}

① ‘BestimmungderConstaten,vonwelcherdieIntensit(tinducirterelektrischerStr(meabh(ngt．’Pogg．，Ann．，lxxvi（April1849）。

$$(K+R)x-Ry-M\dot{y}=0，(4)$$

$$-Rx(B+R)y-M\dot{x}=\int Edt=0；(5)$$

由此即得

$$x=M\frac{(B+R)\dot{y}+R\dot{x}}{(B+R)(K+R)-R^2}．(6)$$

按照(3)将$\dot{y}$值用$\dot{x}$表示出来并代入，就有

$$\frac{x}{\dot{x}}=\frac{M}{R}\frac{(B+R)(K+R)+R^2}{(B+R)(K+B)-R^2}．\qquad(7)$$

$$=\frac{M}{R}\left\{1+\frac{2R^2}{(B+R)(K+R)}+\cdots\right\}\qquad(8)$$

当像在基尔霍夫的实验中一样 B 和 K 都比 R 大得多时，这一方程就简化为

$$\frac{x}{\dot{x}}=\frac{M}{R}．\qquad(9)$$

在这些量中，x 可以根据由感应电流引起的电流计摆幅来求出。请参阅第748节。持久电流$\dot{x}$可以根据由恒稳电流引起的持久偏转角来求出，见第 746 节。M 或是通过按几何数据而直接算出，或是通过和已经作过这种计算的一对线圈相对比来求出，见第 755 节。根据这三个量，R 就可以按电磁单位而被确定。

这些方法都涉及电流计磁体的振动周期的测定，以及该磁体的振动的对数减缩的规定。

韦伯的瞬变电流法 760．]一个颇大的线圈被装在一个轴上，可以绕着它的一个竖直的直径而转动。线圈的导线和一个正切电流计的线圈相连接而成为一个单一的电路。设这个线圈的电阻是 R.把大线圈放好，使它的正面垂直于磁子午面，然后使它很快地转动半周。这时将出现由地球磁力所引起的感生电流，而以电磁单位计，这个电流中的总量将是

$$Q=\frac{2g_1H}{R}，(1)$$

式中 g_1 是单位电流下的线圈磁短；在一个大线圈的事例中，这个量可以通过测量线圈的尺寸并计算各线匝的面积之和来直接确定。H 是地磁的水平分量，R 是由线圈和电流计一起组成的电路的电阻。这个电流会使电流计的磁体运动起来。

如果磁体起初是静止的，而且线圈的运动只占磁体振动时间的一个小分数，那么，如果忽略对磁体运动的阻力，我们由第 748 节就得到

$$Q=\frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\frac{1}{2}\theta，(2)$$

---

① {更加方便的是反转 A2 中的电流而不是搬走线圈 A1。在这种事例中，通过冲击电流计的电量是正文中所给电量的两倍。基尔霍夫的方法曾被 Glazebrook、Sargant 和 Dolds 用来按绝对单位测定电阻。见 phil．Trans．1883.pp．233—268．}

式中 G 是电流计的常量，T 是磁体的振动时间，而θ是观察到的伸长。我们由这些量就得到

$$R=\pi G g_1\frac{1}{T\sin\frac{1}{2}\theta}，(3)$$

H 的值并不出现于这一结果中，如果它在线圈的位置上和在电流计的位置上是相同的话。这里不应该假设情况正是如此，而必须通过比较同一磁体在不同地方的振动时间来加以检验；磁体先放在其中一个位置上，然后又放在另一个位置上。

761.]为了进行一系列观测，韦伯是从使线圈平行于子午线开始的。然后他把线圈转得北面朝向北方，并观察了由负电流引起的第一伸长。然后他观察了自由摆动磁体的第二伸长，而当磁体回到平衡点时把线圈转得正面朝向了南方。这就使磁体反冲到了正侧。这个系列继续进行，正如在第 750 节中一样，而且也对结果进行了阻力方面的改正。用这种办法，就确定了线圈和电流计的组合电路的电阻。

在所有这样的实验中，为了得到足够大的偏转角，必须用铜来做导线，而铜这种金属虽然是最好的导体，但却有一种缺点，那就是它的电阻会随温度的变化而发生颇大的变化。因此，为了从这种实验得出具有永久价值的结果，实验电路的电阻必须在实验之前和之后都和一个精心制造的电阻线圈的电阻进行比较。

韦伯的观察磁体振动之减缩的方法

762.]一个磁矩颇大的磁体被挂在电流计线圈的中心上。对振动的周期和对数减缩进行了观测，起初是当电流计线路断开时，然后是在线路闭合时，而电流计线圈的电导则根据磁体的运动所引起的感生电流在阻滞运动方面的效应推导了出来。

如果 T 是观测到的单次振动的时间，而λ是每单次振动的自然对数减缩，那么，如果我们写出

$$\omega=\frac{\pi}{T}，(1)$$

$$\alpha=\frac{\lambda}{T}，(2)$$

则磁体的运动函数将具有下列的形式：

$$\phi=Ce^{-at}\cos(\omega t+\beta)\quad(3)$$

这就表示了通过观测而定出的运动的本性。我们必须把此式和动力学运动方程进行比较。

设 M 是电流计线圈和悬挂磁体之间的感应系数。它具有下列的形式：

$$M=G_1g_1P_1(\theta)+G_2g_2P_2(\theta)\cdots，(4)$$

式中 G_1、G_2 等等是属于线圈的系数，g_1、g_2 等等是属于磁体的系数，而 $P_1(\theta)$、$P_2(\theta)$等等是线圈和磁体的轴线夹角的带谐函数。请参阅第 700 节。通过适当安排电流计的线圈，并通过把若干个磁体按适当距离并排起来以构成悬挂的磁体，我们可以使 M 中第一项以后的所有各项和第一项相比都成为微不足道。如果再令 $\phi=\frac{\pi}{2}-\theta$，我们就可以写出

$$M = Gm\sin\theta，(5)$$

式中 G(=G_1)是电流计的主系数，m 是磁体的磁矩，而φ是磁体轴线和线圈平面之间的夹角，它在这一实验中永远是一个小角。设 L 是线圈的自感系数，R 是它的电阻，而γ是线圈中的电流，则有

$$\frac{d}{dt}(L\gamma + M) + R\gamma = 0，(6)$$

或者写成

$$L\frac{d\gamma}{dt} + R\gamma + Gm\cos\phi\frac{d\phi}{dt} = 0。(7)$$

电流γ作用在磁体上的力矩是$\gamma\frac{dM}{d\phi}$，或者说是$Gm\gamma\cos\phi$.在这个实验中，角φ是如此之小，以致我们可以假设 cosφ=1.让我们假设，当电路被开断时，磁体的运动方程是

$$A\frac{d^2\phi}{dt^2} + B\frac{d\phi}{dt} + C\phi = 0，(8)$$

式中A是悬挂仪器的磁矩，$B\frac{d\phi}{dt}$代表由空气粘滞性和悬丝粘滞性等等所引起的阻力，而 Gφ代表起源于地磁、悬挂仪器的扭转等等的倾向于把磁体带到它的平衡位置去的力矩。

受到电流影响的运动方程将是

$$A\frac{d^2\phi}{dt^2} + B\frac{d\phi}{dt} + C\phi = Gm\gamma。(9)$$

为了确定磁体的运动,我们必须把此式和(7)式结合起来以消去γ结果就是

$$(L\frac{d}{dt} + R)(A\frac{d^2}{dt^2} + B\frac{d}{dt}C)\phi + G^2m^2\frac{d\phi}{dt} = 0，(10)$$

这是一个三阶的线性微分方程。

然而我们却没有任何求解这一方程的必要，因为问题的数据是观测到的磁体运动的要素，而我们必须根据这些要素来求 R 的值。

设α_0和ω_0是当电路被开断时方程(3)中的α值和ω值。在这一事例中，R 是无限大而方程(10)简化成(8)的形式。于是我们就有

$B=2A\alpha_0$，$C=A(\alpha_0^2+\omega_0^2)$．(11)

解方程(10)而求 R，并写出

$$\frac{d}{dt} = -(\alpha + i\omega)，\text{式中}ei = \sqrt{-1}，(12)$$

我们就得到

$$R = \frac{G^2m^2}{A}\frac{\alpha + i\omega}{\alpha^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega - 2\alpha_0(\alpha + i\omega) + \alpha_0^2 + \omega_0^2} + L(\alpha + i\omega)。(13)$$

既然ω的值通常是比α的值大得多的，最好的 R 值就可以通过令含 iω的项相等来求出，

$$R = \frac{G^2m^2}{2A(\alpha - \alpha_0)} + \frac{1}{2}L(3\alpha - \alpha_0 - \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha - \alpha_0})。(14)$$

我们也可以通过令不含 i 的项相等来求得一个 R 值，但是由于这些项

很小，这一方程只有在作为检验观测精确度的一种手段方面才是有用的。我们由这些方程得到下列的检验方程：

$$G^2m^2\left\{\alpha^2+\omega^2-\alpha_0{}^2-\omega_0{}^2\right\}$$
$$=LA\left\{(\alpha-\alpha_0)^4+2(\alpha-\alpha_0)^2(\omega^2+\omega_0{}^2)+(\omega^2-\omega_0{}^2)^2\right\}.\quad(15)$$

既然 $LA\omega^2$ 和 G^2m^2 相比是很小的，这一方程就给出

$$\omega^2-\omega_0{}^2=\alpha_0{}^2-\alpha^2;\quad(16)$$

而方程(14)就可以写成

$$R=\frac{G^2m^2}{2A(\alpha-\alpha^0)}+2L\alpha.\quad(17)$$

在这个表示式中，G 或是通过电流计线圈的线度测量来确定，或是更好地按照第 753 节的方法通过和一个标准线圈相对比来确定。A 是磁体及其悬挂仪器的惯量矩，必须用适当的动力学方法来求出。ω、ω_0、α和α_0通过观测来得出。

悬挂磁体的磁矩 m 的值的测定,是这种研究的最困难的部分,因为它受到温度的影响、地磁力的影响和机械磕碰的影响，从而在当磁体处于和它在振动时相同的情况下时来测量这个量就必须十分小心。

R 中包含 L_1 的那个第二项是重要性较小的，因为它通常和第一项相比是很小的。L_1 的值可以或是根据已知的线圈形状来计算，或是通过一个关于附加感应电流的实验来测定。请参阅第 756 节。

汤姆孙的旋转线圈法

763.]这种方法是由汤姆孙向大英协会的电学标准委员会提出的,实验由巴耳德·斯提瓦特、弗里明·金肯和本书作者于 1863 年作出[①]。一个圆形线圈被弄得以均匀速度绕着一条竖直轴线转动起来。一个小磁体被一根丝线挂在线圈的中心。地磁和悬挂磁体都在线圈中引起感生电流。电流是交变的，在转动的不同阶段在导线中沿相反的方向运行，但是电流对悬挂磁体的效应却总是引起一个从地磁子午面向线圈转动方向的偏转。

764.]设 H 是地磁的水平分量。

设 γ 是线圈中电流的强度。

g 是一切线匝所包围的总面积。

G 是由单位电流所引起的线圈中心上的磁力。

L 是线圈的自感系数。

M 是悬挂磁体的磁矩。

θ 是线圈平面和磁子午面之间的夹角。

ϕ 是悬挂磁体的轴线和磁子午面之间的夹角。

A 是悬挂磁体的磁矩。

MH τ 是悬丝的扭转系数。

α 是磁体在没有扭力时的方位角。

R 是线圈的电阻。

[①] Elekt.Maasb.：orPogg.,Ann，lxxii.pp.337—369（1851）.

体系的动能是

$$T=\frac{1}{2}L\gamma^2-Hg\gamma\sin\theta-MG\gamma\sin(\theta-\phi)+MH\cos\phi+\frac{1}{2}A\phi^2\text{．}\ (1)$$

第一项$\frac{1}{2}L\gamma^2$表示依赖于线圈本身的电流能量。第二项依赖于电流和地磁的相互作用；第三项依赖于电流和悬挂磁体之磁性的相互作用；第四项依赖于悬挂磁体之磁性和地磁的相互作用；而最后一项则代表构成磁体以及和它一起运动的悬挂仪器的那些物质的动能。

由悬丝的扭力引起的悬挂仪器的势能｛的可变部分｝是

$$V=\frac{MH}{2}\tau(\phi^2-2\phi\alpha)\text{．}\ (2)$$

电流的电磁动量是

$$p=\frac{dT}{d\gamma}=L\gamma-Hg\sin\theta-MG\sin(\theta-\phi)\text{，}(3)$$

而如果 R 是线圈的电阻，则电流的方程是

$$R\gamma+\frac{d^2T}{dtd\gamma}=0\text{，}(4)$$

或者，既然

$$\theta=\omega t\text{，}(5)$$

就有

$$(R+L\frac{d}{dt})\gamma=Hg\omega\cos\theta+MG(\omega-\phi)\cos(\theta-\phi)\text{．}\ (6)$$

765．]理论和实验的结果都是，磁体的主位角ϕ遭受到两种周期振动。其中一种是自由振动，其振动周期依赖于地磁的强度，在实验上是几秒。另一种是受迫振动，其周期是转动线圈的周期的一半，而其振幅则正如我们即将看到的那样是不可觉察的。因此，在测定γ时，我们可以认为γ实际上是不变的。于是我们就得到

$$\gamma=\frac{Hg\omega}{R^2+L^2\omega^2}(R\cos\theta+L\omega\sin\theta)\quad(7)$$

$$+\frac{MG_{\omega}}{R^2+L^2\omega^2}\left\{R\cos(\theta-\phi)+L\omega\sin(\theta-\phi)\right\}\text{，}(8)$$

$$+Ce^{-\frac{R}{L}i}\qquad(9)$$

当转动保持均匀时，这个表示式的最后一项很快就会消失。

悬挂磁体的运动方程是

$$\frac{d^2T}{dtd\dot{\phi}}-\frac{dT}{d\phi}+\frac{dV}{d\phi}=0\text{，}(10)$$

由此即得

$$A\ddot{\phi}-MG\gamma\cos(\theta-\phi)+MH(\sin\phi+\tau(\phi-\alpha))=0\text{．}\ (11)$$

把γ的值代入并按照θ倍数的方程整理各项，于是我们根据观测就知道

$$\phi=\phi_0+be^{-lt}\cos nt+c\cos2(\theta-\beta)\text{，}(12)$$

式中ϕ_0是ϕ的平均值，第二项代表逐渐衰减的自由运动，而第三项则代表

由致偏电流的变化所引起的受迫振动。

从(11)中不含θ而必须集体等于零的各项开始，我们就近似地得到

$$\frac{MG\omega}{R^2+L^2\omega^2}\left\{Hg(R\cos\phi_0+L\omega\sin\phi_0)+GMR\right\}$$
$$=2MH(\sin\phi_0+\tau(\phi_0-\alpha)\text{。}\quad(13)$$

既然 $L\tan\phi_0$ 和 Gg 相比通常是很小的｛GMsecφ和 gH 相比亦然｝，二次方程(13)的解就近似地给出

$$R=\frac{Gg\omega}{2\tan\phi_0(1+\tau\frac{\phi_0-\alpha}{\sin\phi_0})}\left\{1+\frac{GM}{gH}\sec\phi_0-\frac{2L}{Gg}(\frac{2L}{Gg}-1)\tan^2\phi_0\right.$$
$$\left.-(\frac{2L}{Gg})^2(\frac{2L}{Gg}-1)^2\tan^4\phi_0\right\}\text{。}\quad(14)$$

如果我们现在应用方程(7)、(8)和(11)中的主导项[①]，

我们就将发现方程（12）中的n值是$\sqrt{\frac{HM}{A}\sec\phi_0}$。受迫振动的振幅c的值

是$\frac{1}{4}\frac{n^2}{\omega^2}\sin\phi_0$。由此可见，当线圈在磁体的一次自由振动期间转动许多周时，磁体受迫振动的振幅就是很小的，从而我们就可以略去(11)中含 c 的各项。

766．]于是，在电磁单位制中，电阻就可以通过速度ω和偏转角φ来确定。没有必要测定水平地磁力 H，如果它在实验过程中保持不变的话。

为了测定$\frac{M}{H}$，我们必须像在第454节中描述过的那样利用悬挂磁体来引起磁强计的偏转。在实验中，M 应该很小，以便这一改正量只具有次要的意义。

关于这一实验所需要的其他改正量，请参阅 Report of the BritishAssociation for 1863，P.168.

焦耳的量热法

767.]由第 242 节中的焦耳定律可知，一个电流γ在通过一个电阻为 R 的导体时所产生的热量是

$$h=\frac{1}{J}\int R\gamma^2dt\text{。}\quad(1)$$

式中 J 是所用的单位热量的力学单位当量。

由此可见，如果 R 在实验过程中保持不变，则它的值是

$$R=\frac{Jh}{\int\gamma^2dt}\text{。}\quad(2)$$

这种测定 R 的方法涉及电流在一段给定时间内产生的热量 h 的测定，以及电流强度的平方 r^2 的测定。

在焦耳的实验中[①]，h 是通过导线所浸入于其中的一个容器中水的温度

[①] 见 ReportoftheBritishAssociationfor1863，pp.111—176．

的升高来测定的。通过在导线中不通入电流时的另一些实验，对结果进行了有关辐射效应等等的改正。

电流的强度是用一个正切电流计来测量的。这种方法涉及地磁强度的测定，那是用在第 457 节中描述过的方法来进行的。这些测量结果也用第 726 节所描述的电秤来进行了检验，那种电秤是直接测量 γ^2 的。然而，测量 $\int\gamma^2 dt$ 的最直接的方法却是把电流通入一个带有给出正比于 γ^2 的读数的刻度盘的自动力测电流计（第 725 节）中，并按相等的时间间隔来进行观测，这可以通过在整个的实验过程中在仪器每一次振动的最远点上进行读数来近似地作到[①]。

---

① ｛更加简短而同样精确的办法是在方程（6）中令 $L=0$ 并把相应的 γ 值代入（11）中。｝

① Report on Standards of Electrical Resistance of the British Association for 1867，pp.474—522.

第十九章

静电单位和电磁单位的比较

电量的一个电磁单位所含
静电单位的数目的测定

768．]两种单位制中各电学单位的绝对大小，都依赖于我们所采用的长度、时间和质量的单位，而且他们依赖于这些单位的方式在两种单位制中是不同的，因此，按照长度和时间的单位的不同，电学单位的比值也将用不同的数字来表示。由第 628 节中的量纲表可以看出，电量的一个电磁单位所含静电单位的数目，和我们采用的长度单位的大小成反比而和所用时间单位的大小成正比。

因此，如果我们确定一个在数值上用这个数目来表示的速度，则即使当我们采用新的长度单位和时间单位时，表示这一速度的那个数目也将仍然是按照新的测量单位制来看的电量的一个电磁单位所含静电单位的倍数。

因此，指示着静电现象和电磁现象之间的关系的这个速度，就是一个有着确定大小的自然量，而这个量的测量就是电学中的最重要研究之一。

为了证明我们所要寻求的量确实是一个速度，我们可以指出，在两个平行电流的事例中,其中一个电流的一个长度 a 所受到的吸引力按照第 686 节是

$$F = 2CC'\frac{a}{b},$$

式中 C、C′是以电磁单位计的电流的数值，而 b 是他们之间的距离。

如果我们令 b=2a，就有

$F=CC'$.

现在，电流 C 在时间 t 内传送的电是 Ct 个电磁单位，或者说是 nCt 个静电单位，如果 n 是一个电磁单位所含静电单位的倍数的话。

设两个小导体被充上了这两个电流在时间 t 内所传送的电量,并把他们放在相距为 r 的位置上。他们之间的推斥力将是

$$F' = \frac{CC'n^2t^2}{r^2}.$$

设适当选择距离 r，使得这个推斥力等于电流的吸引力，于是就有

$$\frac{CC'n^2t^2}{r^2} = CC'.$$

由此即得

$r=nt$；

或者说，距离 r 必须按速率 n 而随着时间 t 来增大。由此可见 n 是一个速度，它的绝对量值是相同的，不论我们采用什么单位。

769．]为了得到有关这一速度的物理观念，让我们想像一个充电到静电面密度 σ 并在自己的平面内以速度 v 而运动的平表面。运动的带电表面将是和一个电流层相等价的；通过单位表面宽度的电流强度，以静电单位

计是σv，而以电磁单位计是$\frac{1}{n}\sigma v$，如果n是一个电磁单位所含的静电单位的倍数的话。如果平行于第一个表面的另一个平表面被充电到面密度σ'并沿相同的方向以速度v'而运动，它就将和第二个电流层相等价。

由第124节可知，对相对着的两个表面上的单位面积来说，两个带电表面之间的静电推斥力是$2\pi\sigma\sigma'$.

由第653节可知，对单位面积来说，两个电流层之间的电磁吸引力是$2\pi uu'$，此处u和u′是从电磁单位计的电流的面密度。

但是$u=\frac{1}{n}\sigma v$而$u'=\frac{1}{n}\sigma' v'$，从而吸引力就是

$$2\pi\sigma\sigma'\frac{vv'}{n^2}.$$

吸引力和推斥力之比，等于vv'和n^2之比。由此可见，既然吸引力和推斥力是种类相同的量，n就必然是一个和v种类相同的量，就是说它必然是一个速度。如果我们现在假设每一个运动平面的速度都等于 n，吸引力就将等于推斥力，从而平面之间就将没有任何的机械作用力。因此我们就可以把电学单位之比定义为一个这样的速度：当以这个速度沿相同的方向运动时，两个带电表面之间没有相互作用力。既然这个速度约为每秒300 000公里，进行上述这样的实验就是不可能的。

770．]如果电荷面密度和速度都可以被弄得很大，以致磁力成为一个可测量的量，我们就至少可以验证我们的假设，即运动的带电体和电流相等价。

我们可以假设[①]，空气中的一个带电表面当电力$2\pi\sigma$达到130这个值时就开始通过火花而放电。由电流层引起的磁力是$2\pi\sigma\frac{v}{n}$．在英国，水平磁力约为0.175．因此，一个充电到最高程度并以每秒100米的速度运动着的表面将对一个磁体作用一个约为地球水平磁力的四千分之一的力，这是一个可以测量的量。带电表面可以是一个在磁子午面内转动着的非导体圆盘的表面，磁体可以放在靠近圆盘的上升部分或下降部分的地方，并用一个金属屏来屏蔽圆盘的静电作用。我不知道这个实验迄今是否有人作过[①]。

Ⅰ．电量单位的比较

771．]既然电量的电磁单位和静电单位之比是用一个速度来表示的，我们在以后就将用一个符号v来代表它。这一速度的最初的数值测量是由

[①] {关于求出一个电阻的绝对量质的各种方法的相对优缺点，请读者参阅瑞利勋爵的一篇论文，见Phil.Mag.Nov.1882.在正文中没有讲到的一种由洛伦兹提出的很精彩的方法，曾由瑞利勋爵和西德威克夫人进行了充分的描述，见Phil.Trans.1883，PartI,pp.295—322．读者也应参阅相同作者们的论文：‘Experimentstodeterminethevalueofthe British AssociationUnitofResistanceinAbsoluteMeasure，’Phil.Trans．1882．PartⅡ，pp.661—697．}

[①] SirW．Thomson,R.S.Proc.orReprint，Art.xix.pp.247—259.

韦伯和考耳劳什作出的[②]。他们的方法依据的是同一个电量的测量，先用静电单位然后用电磁单位来测量。

所测量的电量是一个莱顿瓶的电荷。它是作为瓶的电容和它的两板之间电势差的乘积而用静电单位测量的。瓶的电容通过和一个挂在远离一切物体的开阔空间中的球的电容相对比来加以测定。这样一个球的电容在静电单位制中是用它的半径来表示的。于是瓶的电容就可以作为某一长度而被求出来和表示出来。请参阅第 227 节。

瓶的两板之间的电势差通过把两板接在一个静电计的两极上来测量；静电计的常量已经很仔细地测定过，从而电势差 E 就是在静电单位下被得知的了。

通过把这个电势差乘以瓶的电容 c，瓶的电荷就用静电单位表示了出来。

为了用电磁单位来测定电荷的值，通过一个电流计的线圈来把莱顿瓶放了电。瞬变电流对电流计磁体的效应使磁体得到一定的角速度。于是磁体就向某一偏转角摆过去，而在那个偏转角上它的速度将被地磁的反向作用所完全消除。

通过观测磁体的最大偏转角，放电中的电量就可以像在第 748 节中一样按照公式

$$Q=\frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\frac{1}{2}\theta$$

而用电磁单位测定出来，式中 Q 是以电磁单位计的电量。因此我们必须测定下列各量：

H，地磁水平分量的强度；见第 456 节。

G，电流计的主常量；见第 700 节。

T，磁体单次振动的时间。

θ，由瞬变电流引起的偏转角。

由韦伯先生和考耳劳什先生求得的 v 值是

v=310740000 米每秒。

固体电介质的那种曾被称为“电吹收”的性质，使人们很难正确地估计莱顿瓶的电容。表观的电容随着从瓶的充电或放电到电势的测量之间的时间而变，过的时间越长则求得的瓶的电容值越大。

因此，既然求得静电计的一个读数所需的时间和通过电流计进行放电所经过的时间相比是很长的,那么按静电单位进行的对放电的估计就或许偏高，从而由此导出的 v 值也或许偏大。

II．表示为一个电阻的“v”

772．]另外两种测定 v 的方法导致一个用某一给定导体的电阻来表示 v 值的表示式；在电磁单位制中，电阻也是被表示为一个速度的。

在威廉·汤姆孙的实验形式下，让一个电流通过了一根电阻很大的导线。促使电流通过导线的电动势通过把导线的两端接在一个绝对静电计的

[②] {这一效应是由罗兰教授在 1876 年发现的。关于以后有关这一课题的实验，请参阅 Rowland and Hutchinson，Phil．Mag.27.445（1877）;Ronten，wied.Ann.40.93;Himstedt,wied.Ann.40.720.}

两极上而静电地加以测量，见第 217、218 节。导线中电流的强度用电流所通过的一个力测电流计的悬挂线圈的偏转角来用电磁单位加以测量，见第 725 节。电路的电阻通过和一个标准线圈或标准欧姆相比较而在电磁单位下成为已知。通过把电流强度乘以这个电阻，我们就得到以电磁单位计的电动势，而通过把这个值和以静电单位计的值相比较，就能得到 v 的值。这种方法要求分别利用静电计和力测电流计来同时测定两个力,而出现在结果中的只是这两个力的比值。

773．]在另一种方法中，这些力不是分别被测量而是直接互相反向；这种方法是由本书作者所应用了的。大电阻线圈的两端被接在两个平行的圆盘上，其中一个圆盘可以活动。使电流通过大电阻的同一电动势也在圆盘之间产生一个吸引力。与此同时，在实际的实验中和原电流不同的一个电流被送入两个线圈中，其中一个线圈和固定圆盘的背面相接，而另一个则和活动圆盘的背面相接。电流在这些线圈中沿相反的方向流动，从而他们是互相推斥的。通过调节两个圆盘的距离，吸引力就准确地被推斥力所平衡，而与此同时，另一个观测者就用一个带分流器的差绕电流计来测定原电流和副电流的比值。

在这一实验中，必须涉及一种物质标准的唯一测量就是那个大电阻的测量，它必须通过和标准欧姆相比较来用绝对单位测定出来。其他的测量结果只是为了测定比值，从而是可以采用任意的单位的。

例如两个力的比值就是 1．

两个电流的比值是当差绕电流计的线圈没有偏转时通过电阻的比较来求出的。

吸引力依赖于圆盘直径和盘间距离之比的平方。

推斥力依赖于线圈直径和线圈距离之比。

因此 v 的值就是通过大线圈的电阻来直接表示的，而该电阻本身则是和标准欧姆进行比较的。

用汤姆孙方法得出的 v 值是 28.2 欧姆③；用麦克斯韦方法得出的是 28.8 欧姆①。

III．以电磁单位计的静电电容

774．]一个电容器的电容可以通过产生电荷的电动势和放电电流中的电量的比较而用电磁单位来测定。利用一个化学电池，在一个包括大电阻线圈的电路中保持一个电流。电容器通过把它的电极和电阻线圈的电极相接触而被充电。通过线圈的电流用它在一个电流计中引起的偏转角来测量。设φ是这个偏转角，则由第 742 节可知电流是

$$\gamma=\frac{H}{G}\tan\phi,$$

式中 H 是地磁的水平分量，而 C 是电流计的主常量。

如果 R 是这个电流所通过的那一线圈的电阻，则线圈两端的电势差是

$$E=R\gamma,$$

③ ElektrodynanamischeMaasbestimmungen;andPogg.,Ann,xcix(Aug.pp.10—25，1856）.

① PeportofBritishAssoication,1869,p.434.

而在其电容为 C 个电磁单位的电容器中产生的电荷则是

$$Q=EC.$$

现在从电路中先断开电容器的电极，再断开电流计的电极，并让电流计的磁体在它的平衡位置上达到静止。然后把电容器的电极和电流计的电极互相接通。一个瞬变电流将流过电流计并使磁体摆到一个极端偏转角 θ．于是，第 748 节可知，如果放电量等于充电量，则有

$$Q=\frac{H}{G}\frac{T}{\pi}2\sin\frac{1}{2}\theta.$$

于是，作为以电磁单位计的电容的值，我们就得到

$$C=\frac{T}{\pi}\frac{1}{R}\frac{2\sin\frac{1}{2}\theta}{\tan\phi}.$$

于是，一个电容器的电容就由下列各量来确定：

T，电流计磁体从静止点到静止点的振动时间。

R，线圈的电阻。

θ，由放电引起的摆角极限。

φ，由通过线圈的电流所引起的常值偏转角。

这种方法是由弗里明·金肯教授在以电磁单位测定电容器的电容时应用了的[②]。

如果 C 是以静电单位计的同一电容器的电容，例如通过和一个其电可以根据它的几何数据来算出的电容器相比较而测定的电容，我们就有

$$C=v^2C.$$

由此即得

$$v^2=\pi R\frac{c}{T}\frac{\tan\phi}{2\sin\frac{1}{2}\theta}.$$

因此 v 这个量就可以用这种办法求得。它依赖于以电磁单位计的 R 的测定，但是，既然它只包含 R 的平方根，这种测定中的误差就不会像在第 772、773 节中的方法中一样对 v 的值有那么大的影响。

断续电流法

775．]如果一个电池电路的导线在任一点上被断开，并把断开的两端接在一个电容器的两个电极上，则电流将流入电容器，但其强度将随电容器二板之间的电势差的增大而减小，因此当电容器已经接收到和作用在导线上的电动势相对应的全额电荷时，电流就完全停止了。

如果现在把电容器的两个电极从导线两端断开，然后按相反的顺序再和他们接起来，电容器就会通过导线而放电，然后就将按相反的方式被充电，于是就有一个瞬变电流通过导线，其总电量等于电容器电荷的两倍。

利用一种机构（通常称为“换向器”），反转连接电容器的手续可以按相等的时间间隔而重复进行，每一个间隔等于 T．如果这段时间足以使电容器来得及完全放电，导线在每一间隔中输送的电就将是 2EC，此处 E

[②] Phil.Trans.,1868,p.643;andReportofBritishAssociation,1869,p.436.

是电动势而 C 是电容器的是电容。

如果接在电路中的一个电流计的磁体加了载重，从而它摆动得很慢，以致在磁体的一次自由振动的时间内将发生电容器的许多次放电，则逐次的放电将像一个强度为 $\frac{2EC}{T}$ 的恒稳电流那样对磁体起作用。

如果现在把电容器取走而用一个电阻线圈来代替它，并调节线圈直到通过电流计的恒稳电流和那些逐次放电产生相同的偏转角，那么，如果这时整个电路的电阻是 R，则有

$$\frac{E}{R}=\frac{2EC}{T}\text{；}(1)$$

或者写成

$$R=\frac{T}{2C}(2)\text{。}$$

于是，我们可以把一个带有活动着的换向器的电容比拟为某一个电阻，而为了测量这个电阻，我们可以利用在第 345——357 节中描述了的那些不同的测量电阻的方法。

776．〕为此目的，我们可以把第 346 节的差绕电流计法中或第 347 节的惠斯登电桥法中的任何一条导线换成一个带换向器的电容器。让我们假设，在其中任一事例中，已经先用一个带换向器的电容器而后又把它换成一个电阻为 R_1 的线圈来得到了电流计的零偏转，于是量 $\frac{T}{2C}$ 就可以用一个电路的电阻来量度，此时线圈 R_1 就是这个电路的一部分，而另一部分则是包括电池在内的其余导电体系。因此，我们所要计算的电阻 R 就等于电阻线圈的电阻 R_1 再加上其余体系（包括电池在内）的电阻，这时把电阻线圈的两端看成其余体系的电极。

在差绕电流计和惠斯登电桥的事例中，用不着把电容器换成一个电阻线圈来进行第二个实验。为此目的而要求的电阻值，可以根据体系中其他的已知电阻计算出来。

利用第 347 节中的符号，假设电容器和换向器取代了惠斯登电桥上的导体 AC，设电流计接在 OA 上而电流计的偏转角为零，于是我们就知道，当接在 AC 上时将引起零偏转角的那个线圈的电阻是

$$b=\frac{c\gamma}{\beta}=R_1(3)\text{。}$$

电阻的另一部分，R_2，就是各导体 AO、OC、AB、BC 和 OB 所构成的体系的电阻，此时把 A 点和 C 点看成电极。由此可见，

$$R_2=\frac{\beta(c+\alpha)(\gamma+\alpha)+c\alpha(\gamma+\alpha)+\gamma\alpha(c+\alpha)}{(c+\alpha)(\gamma+\alpha)+\beta(c+\alpha+\gamma+\alpha)}\text{。}(4)$$

在这一表示式中，a 代表电池及其接线的内阻，它的值并不能很准确地被测定；但是，通过把它弄得远小于其他电阻，这种不准确性就将只对 R_2 的值有很小的影响。

以电磁单位计的电容器的电容值是

$$C=\frac{T}{2(R_1+R_2)}.\text{[1]}\quad(5)$$

777.〕如果电容器有一个很大的电容，而且换向器的动作很迅速，则电容器可能并不是在每一次换向时都能充分放电的。放电过程中的电流方程是

$$Q+R_2C\frac{dQ}{dt}+EC=0,\quad(6)$$

式中 Q 是电容器的电荷，C 是它的电容，R_2 是电容器两极之间的体系其余部分的电阻，而 E 是由于电池的接通而引起的电动势。由此即得

$$Q=(Q_0+EC)e^{-\frac{t}{R_2C}}-EC,\quad(7)$$

式中 Q_0 是 Q 的初始值。

如果 τ 是在每一次放电中保持接触的时间，则每次所放的电量是

$$Q=2EC\frac{1-e^{-\frac{\tau}{R_2C}}}{1+e^{-\frac{\tau}{R_2C}}}.\quad(8)$$

通过使方程(4)中的 C 和 γ 比 β、a 或 α 大得多，由 R_2C 表示的时间可以被弄得比 τ 小得多,以致我们在计算指数表示式的值时可以使用方程(5)中的 C 值。于是我们就得到

$$\frac{\tau}{R_2C}=2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T},\quad(9)$$

式中 R_1 是为了产生等价的效应而必须用来代替电容器的那个电阻。R_2 是体系其余部分的电阻，T 是开始放电和下一次开始放电之间的时间，而 τ 是每一次放电的接触时间。于是，我们就得到以电磁单位计的正确的 C 值：

$$C=\frac{1}{2}\frac{T}{R_1+R_2}\frac{1+e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}{1-e^{-2\frac{R_1+R_2}{R_2}\frac{\tau}{T}}}.\qquad(10)$$

IV. 电容器的静电电容和线圈自感系数的电磁电容的比较

778.〕如果一个传导电路中其间的电阻为 R 的两个点被接在一个电容为 C 的电容器的两个极上，则当有一个电动势作用在电路上时，会有一部分电流将不是通过电阻 R 而是被用来使电容器充电。因此通过 R 的电流将以一种逐渐的方式上升到它的末值。由数学理论可知，通过 R 的电流从零上升到它的末值的那种方式用一个公式来表示，该公式在形式上和表示被一个常值电动势推动着流过一个电磁体的线圈的电流值的那种公式完全相同。因此我们可以把一个电容器和一个电磁体适当地接在惠斯登电桥的两个臂上，使得甚至在接通或开断电池电路的时刻通过电流计的电流也总是零。

[1] ReportofBritishAssociation，1867,pp．493—488．

图 65

在图中，设 P、Q、R、S 分别是惠斯登电桥的四个臂的电阻。设使一个自感系数为 L 的线圈成为电阻 Q 的臂 AH 的一部分,并把一个电容为 C 的电容器的两极用电阻很小的导体接在点 F 和点 Z 上。为了简单，我们将假设没有电流通过其电极接在 F 和 H 上的电流计 G，因此我们必须确定 F 点的电势和 H 点的电势相等的条件。只有当我们想要估计这种方法的精确度时，我们才有必要计算当这一条件不满足时通过电流计的电流。

设 X 是在时刻 t 已经通过了臂 AF 的总电量，而 z 是已经通过了 FZ 的总电量，则 x—z 将是电容器的电荷。由欧姆定律可知，作用在电容器的二极之间的电动势是$R\frac{dz}{dt}$，因此如果电容器的电容是C，则有

$$x-z=RC\frac{dz}{dt}. \quad (1)$$

设 y 是已经通过臂 AH 的总电量，从 A 到 H 的电动势必须等于从 A 到 F 的电动势，或者说，

$$Q\frac{dy}{dt}+L\frac{d^2y}{dt^2}=P\frac{dx}{dt}. \quad (2)$$

既然没有电流通过电流计，已经通过 HZ 的电量就必然也是 y，从而我们就得到

$$S\frac{dy}{dt}=R\frac{dz}{dt}. \quad (3)$$

把由(1)式推出的 x 值代入(2)中，并和(3)式相比较，我们就得到没有电流通过电流计的条件如下：

$$RQ(1+\frac{L}{Q}\frac{d}{dt})z=SP(1+RC\frac{d}{dt})z. \quad (4)$$

正如在普通形式的惠斯登电桥中一样，没有末电流的条件是

$$QR=SP. \quad (5)$$

在电池开关被接通或开断时没有电流的附加条件是

$$\frac{L}{Q}=RC. \quad (6)$$

这里的$\frac{L}{Q}$和RC分别是臂Q和R的时间常量，而且，如果我们通过改变 R 或 Q 可以调节到不论是在接通和开断电路时还是当电流已经稳定时电流计中都没有电流的状态，我们就知道线圈的时间常量等于电容器的时间常量。

自感系数 L 可以通过和几何数据已知的两个电路的互感系数相比较而用电磁单位量出（见第 756 节）。这是一个具有长度量纲的量。

电容器的电容可以通过和几何数据已知的一个电容器的电容相比较而用静电单位量出（见第 229 节）。这个量也是一个长度 c. 以静电单位计的电容是

$$C=\frac{c}{v^2}. \quad (7)$$

把这个量代入方程（6）中，我们就得到 v^2 的值如下：

$$v^2=\frac{c}{L}QR,\ (8)$$

式中 c 是以静电单位计的电容器电容，L 是以电磁单位计的线圈自感系数，而 Q 和 R 是以电磁单位计的电阻。用这种方法测定出来的 v 值正如在第 772、773 节的第二种方法中那样是依赖于电阻单位的确定的。

V．电容器的静电电容和线圈自感的电磁电容的组合

779．〕设 C 是一个电容器的电容，电容器的两个面用一条电阻为 R 的导线连接了起来。设在这条导线中间接入两个线圈 L 和 L'，并用 L 代表他们的自感系数之和。线圈 L'用一种双线装置悬挂着，由两个竖直平面的线圈构成，二者之间有一个轴，上面装有磁体 M，磁体的轴线在两个线圈 L'L'之间的一个水平面上转动。圈线 L 有一个大的自感系数，而且是固定的。悬挂线圈的转动部分封在一个空盒中，以隔离由磁体的转动所引起的空气流。

磁体的运动在线圈中引起感应电流，而这些电流又受到磁体的作用，以致悬挂线圈的平面将被磁体所偏转。让我们确定感生电流的强度和悬挂线圈的偏转角的量值。

图 66

设 x 是电容器的上板面的电荷，如果 E 是引起这一电荷的电动势，则我们由电容器的理论得到

$x=CE.\ (1)$

由电流的理论我们也有

$$R\dot{x}+\frac{d}{dt}(L\dot{x}+M\cos\theta)+E=0,\ (2)$$

式中 M 是当磁体轴线垂直于线圈平面时电路 L'的电磁动量，而θ是磁体轴线和线圈平面的法线之间的夹角。

因此，确定 x 的方程就是

$$CL\frac{d^2x}{dt^2}+CR\frac{dx}{dt}+x=CM\sin\theta\frac{d\theta}{dt}.\ (3)$$

如果线圈位于一个平衡位置上，而磁体的转动是均匀的，其角速度为 n，则有

$$\theta=nt.\ (4)$$

电流的表示式包括两部分。其中一部分不依赖于方程右端的一项，而且是按时间的指数函数的规律而递减的。另一项可以称为受迫振动；它完全依赖于含θ的项，而且可以写成

$x=A\sin\theta+B\cos\theta.\ (5)$

通过代入方程(3)中来求出 A 和 B 的值，我们就得到

$$x=-MCn\frac{RCn\cos\theta-(1-CLn^2)\sin\theta}{R^2C^2n^2+(1-CLn^2)^2}.\ (6)$$

磁体作用在通有电流 $\dot{x}$ 的线圈L'上的力矩，就是假设线圈为固定时

它对线圈作用的力矩的负值；它由下式给出：

$$\Theta = -\dot{x}\frac{d}{d\theta}(M\cos\theta) = M\sin\theta\frac{dx}{dt}\text{．} \quad (7)$$

把这一表示式在一次转动中对 t 积分并除以时间，我们就得到■的平均值如下：

$$\overline{\Theta} = \frac{1}{2}\frac{M^2RC^2n^3}{R^2C^2n^2 + (1-CLn^2)^2}\text{．} \quad (8)$$

如果线圈有一个相当大的惯量矩，则它的受迫振动将是很小的，而且它的偏转角将和$\overline{\Theta}$成正比。

设 D_1、D_2、D_3 是观测到的和角速度 n_1、n_2、n_3 相对应的偏转角，则一般地有

$$P\frac{n}{D} = (\frac{1}{n} - CLn)^2 + R^2C^2\text{，} \quad (9)$$

式中 P 是一个常量。

由三个这种形式的方程消去 P 和 R，我们就得到

$$C^2L^2 = \frac{1}{{n_1}^2{n_2}^2{n_3}^2}\frac{\frac{{n_1}^3}{D_1}({n_2}^2 - {n_3}^2) + D_2({n_3}^2 - {n_1}^2) + \frac{{n_3}^3}{D_3}({n_1}^2 - {n_2}^2)}{\frac{n_1}{D_1}({n_2}^2 - {n_3}^2) + \frac{n_2}{D_2}({n_3}^2 - {n_1}^2) + \frac{n_3}{D_3}({n_1}^2 - {n_2}^2)}\text{．} \quad (10)$$

如果n_2适足以使$CLn_2^2 = 1$，则$\frac{n}{D}$在这个n值下将有极小值。其他的 n 值应该取得一个大于 n_2 而另一个小于 n_2。

由方程(10)确定出来的 CL 值具有时间平方的量纲。让我们把它写成 τ^2。

如果 C_s 是以静电单位计的电容器电容而 L_m 是以电磁单位计的线圈自感，则 C_s 和 L_m 都是长度，而其乘积是

$$C_sL_m = v^2C_sL_s = v^2C_mL_m = v^2\tau^2\text{；} \quad (11)$$

从而就有

$$v^2 = \frac{C_sL_m}{\tau^2}\text{，} \quad (12)$$

式中 τ^2 是由这一实验测定的 C^2L^2 值[①]。此处作为测定 v 的一种方法而提出

---

① {由于这种方法在用电磁单位来测量一个电容器的电容方面是很重要的，我们在这里附上一种比较详细的探讨，这适用于当圆柱具有保护环时的情况。在这种测量中所应用的装置如附图所示。ABCD 是一个惠斯登电桥，电流计在 G 处，而电池在 B 和 C 之间，臂 AB 在 R 和 S 处断开，他们是一个换向器的两个极，交替地和一个弹簧 T 相接触，而弹簧则接在电容器的中板 H 上。没有保护环的极板和 S 点相接。点 C 和点 B 分别与一个换向器的两个极 L、M 相连接，这两个极交替地和固定在电容器保护环上的一个弹簧 Q 相接触。体系调节得适当，使得当换向器工作时各事件的次序如下：Ⅰ．P 接 S，电容器放电。
Q 接 M，保护环放电。
Ⅱ．P 接 R，电容器开始充电。
Q 接M.
Ⅲ．P 接 R，电容器被充电到电势差（A）-（B）.
Q 接 L，保护圈充电到电势差（C）-（B）.
Ⅳ．P 接 S，电容器开始放电。
Q 接 L．

的这个实验，是和 W.R.格罗夫爵士所描述的实验性质相同的，见 Phil.Mag.，March1868，P.184．也请参阅本书作者对实验的评论，见该刊 May1868，pp.360—363．

VI．电阻的静电量度（见第 355 节）

780．〕设一个电容为 C 的电容器通过一根电阻为 R 的导线而放电，如果 x 是在任一时刻的电荷，则有

$$\frac{x}{C}+R\frac{dx}{dt}=0．(1)$$

由此即得

$$x=x_0e^{-\frac{t}{RC}}．(2)$$

如果通过任何一种方法，我们可以在一段精确已知的时间内使电路保持接通，以允许电流在导体中流动一段时间 t，那么，如果 E_0 和 E_1 是一个和电容器连接的静电计在这手续以前和以后的读数，则有

$$RC(\log_e E_0-\log_e E_1)=t．(3)$$

如果 C 在静电单位下作为一个线性量而为已知，则 R 可以在静电单位下作为一个速度的倒数而由这一方程中求出。

如果 R_s 是这样测定出来的电阻的数值，而 R■是以电磁单位计的电阻的数值，则

$$v^2=\frac{R_m}{R_s}．(4)$$

既然 R 在这个实验中必须很大，而在第 763 节等等的电磁实验中必须

V．P 接 S，电容器放电。

Q 接 M，保护环放电。

于是，当换向器工作时，由于电量向电容器流动，将有一系列短暂的电流通过电流计。各电阻调节得使这些短暂电流对电流计的效应适足以平衡恒稳电流的效应，从而不存在电流计的偏转。为了考察这种情况下的各电阻之间的关系，让我们假设当保护环和电容器被充电时有 于是，如果 a、b、a、β、γ 分别是臂 BC、AC、AD、BD、CD 的电阻，L 是电流计的自感系数，而 E 是电池的电动势，我们就由电路 ADC 和 BCD 分别得到 现在很显然，各电流是用下列类型的方程来表示的： 具有 Ae－λt、Be－λt 的形式，并表示由电容器充电而引起的电流的 是从电容器开始充电时算起的时间。于是方程(1)和(2)就将包含一些常数项和一些带 e-λt 因子的项，而且后一些项必将分别变为零，因此我们就有 设 Z、X 分别是由于电容器的充电而已经流过电流计和电池的电量，而 Y 和 W 是电容器上和保护环上的电荷。于是，在从恰恰在电容器开始充电以前到它完全充电以后的一段时间内求方程(3)和(4)的积分，并记得在这些时刻中的每一时刻都有 z=0，我们就得到（b+γ+a）Z+（b+γ）Y+γW-γX=0，（a+γ+β）X-（γ+β）Y-γZ-（γ+β）W=0；因此，消去 X，就得到 在实际上，电池的电阻确实比β、b 或γ小得多，使得和第二项相比第三项可以忽略不计，因此，略去电池电阻，我们就得到 如果｛A｝、｛B｝、｛D｝代表当电容器充分充电时 A、B、D 各点上的电势，而 C 代表电容器的电容，则有 Y=C[｛A｝-｛B｝]．但是 如果电容器每秒充电 n 次，则因此而每秒通过电流计的电量是 nZ1。如果电流计的指针保持不偏转，则单位时间内通过电流计的电量必须是 把这一关系式代入方程(6)中，我们就得到 如果知道电阻和速率，我们由这一方程就能算出电容。请参阅 J.J．ThomsonandSearle，“ADeterminationof‘v’”Phil.Trans．1890，A，p．583．｝

很小，这些实验就必须针对不同的导体来进行，而这些导体的电阻必须用普通的方法来加以比较。

第二十章

光的电磁学说

781.〕在本论著的若干部分中，曾经作过借助于机械作用来解释电磁现象的尝试，那种机械作用是通过占据着物体之间的空间的一种媒质而从一个物体传到另一个物体的。光的波动学说也假设一种媒质的存在。现在我们必须证明，电磁媒质的性质是和光媒质的性质相等同的。

每当有一种新现象需要解释时就用一种新的媒质来充满全部的空间，这在哲学上绝不是多么有道理的。但是，如果两个不同科学分支的研究已经独立地提供了关于一种媒质的想法，而且，如果为了说明电磁现象而必须赋予媒质的那些性质是和我们为了说明光的现象而赋予光媒质的那些性质种类相同的，那种媒质之物理存在的证据就将得到很大的加强。

但是，各物体的性质是可以定量地测量的。因此我们就得到媒质的数据，例如一种扰动通过媒质而传播的那一速度的数值，而这一速度是可以根据电磁实验来算出的，也是在光的事例中可以直接观测的。如果居然发现电磁扰动的传播速度和光的速度相同，而且这不但在空气中是如此，在别的透明煤质中也是如此，则我们将有很强的理由相信光是一种电磁现象，而且光学资料和电学资料的组合也将产生一种关于媒质之实在性的信念，和我们在其他种类的物质的事例中通过感官资料的组合而得到那种信念相似。

782.〕当光被发出时，发光物体就会消耗一定的能量；而如果光被另一物体所吸收，则这个物体会变热，表明它从外面接收到了能量。在从光离开第一个物体以后到它达到第二个物体以前的那一时间阶段中，光必然曾经作为能量而存在于中间的空间之中。

按照粒子发射学说，能量的传递是通过光颗粒从发光物体到被照物体的实际转移来达成的，这些颗粒携带着他们的动能，以及他们可以接受的任何其他种类的能量。

按照波动学说，有一种物质性的媒质充满在两个物体之间的空间中，而正是通过这种媒质的各相邻部分的作用，能量才从一部分传到其次的部分，直到它到达了被照明的物体为止。

因此，在光通过它的期间，光媒质就是能量的一种承收物。在由惠更斯、菲涅耳、杨、格林等人发展起来的波动学说中，这种能量被假设为部分地是势能而部分地是动能。势能被假设为起源于媒质各元部分的形变。因此我们必须认为媒质是弹性的，动能被假设为起源于媒质的振动。因此我们必须认为媒质有一种有限的密度。

在本书所采用的关于电和磁的理论中，两种形式的能量曾经得到承认，那就是静电能量和动电能量（见第 630 节和第 636 节），而这些能量被假设为不仅在带电的物体和磁化的物体上有其存身之处，而且在观察到有电力或磁力起作用的每一部分周围的空间中有其存身之处。由此可见，我们的理论在假设存在可以成为两种形式的能量的承受者的一种媒质方面

是和波动学说一致的[①]。

783.〕其次让我们确定一个电磁扰动通过一种均匀媒质而传播的条件；我们将假设这种媒质是静止的，也就是说，除了在电磁扰动中可能涉及的运动以外，它没有别的运动。

设 C 是媒质的比电导，K 是它对静电感应而言的比感本领，而μ是它的磁“导率”。

为了得到电磁扰动的普遍方程，我们将把真实电流■用矢势■和电势Ψ表示出来。

真实电流■是由传导电流■以及电位移■的变化构成的，而既然这二者都依赖于电动强度■，我们就像在第 611 节中那样得到

$$\blacksquare=(C+\frac{1}{4\pi}K\frac{d}{dt})\blacksquare. \quad (1)$$

但是，既然媒质没有运动，我们就可以像在第 599 节中那样把电动强度表示成

$$\blacksquare=-\blacksquare-\nabla\Psi. \quad (2)$$

由此即得

$$\blacksquare=-(C+\frac{1}{4\pi}K\frac{d}{dt}(\frac{d\blacksquare}{dt}+\nabla\Psi, \quad (3)$$

但是我们可以用另一种办法来确定■和■之间的一种关系，因为正如在第 616 节中证明了的那样，他们的方程组(4）可以写成

$$4\pi\mu\blacksquare=\nabla^2\blacksquare+\nabla J, \quad (4)$$

式中

$$J=\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}. \quad (5)$$

把方程(3)和(4)合并起来，我们就得到

$$\mu(4\pi C+K\frac{d}{dt})(\frac{d\blacksquare}{dt}+\nabla\Psi)+\nabla^2\blacksquare+\nabla J=0, \quad (6)$$

此式可以表示成三个方程如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\mu(4\pi C+K\frac{d}{dt})(\frac{dF}{dt}+\frac{d\Psi}{dx})+\nabla^2F+\frac{dJ}{dx}=0,\\
&\mu(4\pi C+k\frac{d}{dt})(\frac{dG}{dt}+\frac{d\Psi}{dy})+\nabla^2G+\frac{dJ}{dy}=0,\\
&\mu(4\pi C+K\frac{d}{dt})(\frac{dH}{dt}+\frac{d\Psi}{dz})+\nabla^2H+\frac{dJ}{dz}=0.
\end{aligned}\right\}(7)$$

这就是电磁扰动的普遍方程。

如果我们分别对 x、y、z 求这些方程的导数，就得到

$$\mu(4\pi C+K\frac{d}{dt})(\frac{dJ}{dt}-\nabla^2\Psi)=0. \quad (8)$$

如果媒质是一种非导体，则 C=0，而正比于自由电荷体密度的$\nabla^2\psi$就和 t 无关。因此 J 就必须或是 t 的线性函数，或是常量，或是零，从而我们在考虑周期性的扰动时就可以完全不考虑 J 和Ψ。

[①] 原意如此，疑有笔误。——译者

振动在非导体媒质中的传播

784.〕在这一事例中，C=0，从而方程组变为

$$\left.\begin{aligned}K\mu\frac{d^2F}{dt^2}+\nabla^2F=0,\\ K\mu\frac{d^2G}{dt^2}+\nabla^2G=0,\\ K\mu\frac{d^2H}{dt^2}+\nabla^2H=0.\end{aligned}\right\}(9)$$

这种形式的方程和一个不可压缩的弹性固体的运动方程相似，而当初始条件已经给定时，方程的解可以表示成由泊松[①]给出的和由斯托克斯[①]应用于衍射理论的那种形式。让我们写出

$$V=\frac{1}{\sqrt{K\mu}}.\quad(10)$$

如果F、G、H的值和$\frac{dF}{dt}$、$\frac{dG}{dt}$、$\frac{dH}{dt}$的值在初时刻（$t=0$）在空间的每一点上都已给出，我们就可以确定他们在以后任一时刻 t 的值如下。

设 O 是我想要确定其 F 在时刻 t 的值的那个点。求出 F 在一个球面的每一点上的初始值，并求出这些值的平均值$\bar{F}$。也求出$\frac{dF}{dt}$在球面每一点上的初始值，并设这些值的平均值为$\frac{d\bar{F}}{dt}$。

于是，在时刻 t，O 点上的 F 值就是

同理得到

$$\left.\begin{aligned}F&=\frac{d}{dt}(\bar{F}t)+t\frac{d\bar{F}}{dt}.\\ G&=\frac{d}{dt}(\bar{G}t)+t\frac{d\bar{G}}{dt},\\ H&=\frac{d}{dt}(Ht)+t\frac{d\bar{H}}{dt}.\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

785.〕因此就看到，O 点上在任一时刻的情况，依赖于距离为 Vt 的地方在一段时间 t 以前的情况，从而任何扰动就都是以速度 V 来通过媒质而传播的。

让我们假设，当 t 为零时，量■和■除了在某一空间 S 中以外都为零。于是，他们在时刻 t 在 O 点的值将是零，除非以 O 为心，以 Vt 为半径画出的球面全体地或部分地位于空间 S 之内。然后，O 点上的扰动就将开始，并持续到 Vt 等于从 O 到 S 的任一部分的最大距离时为止。然后 O 点的扰动就将永远停止。

786.〕由方程(10)可见，第 784 节中表示着电磁扰动在一种非导

---

① "在我这方面，当考虑到真空和磁力的关系以及磁体外面的磁现象的一般特性时，我更倾向于认为在力的传递中的磁体外面，有这样一种作用，而不太倾向于认为效应只是超距的吸引力和推斥力。这样一种作用可能是以太的一种功能；因为，完全不无可能的是，如果存在一种以太，则它除了仅仅作为辐射的传送物以外还应该有别的用处。"——法拉第，ExperimentalResearches，3075。

① Mé m.del'Acad.，tom.iii.p.130，etseq.

电媒质中的传播速度的V这个量，等于$\frac{1}{\sqrt{K\mu}}$.

如果媒质是空气，而且我们采用的是静电单位制，则有$K=1$和$\mu=\frac{1}{v^2}$，于是就有$V=v$，或者说传播速度在数值上等于电量的电磁单位和静电单位之比。如果我们采用电磁单位，则$K=\frac{1}{v^2}$而$\mu=1$，从而方程 V=v 仍然成立。

如果认为光就是在传输其他电磁作用的那同一种媒质中传播的电磁扰动，则按照这种学说，V 必须是光的速度，这是其值已用若干方法估计过的一个量。另一方面，v 就是电量的一个电磁单位所含的静电单位的倍数，而测定这个量的方法已经在上一章中描述过了。这些方法是和测定光速的方法完全无关的。因此，V 的值和 v 的值是否相符，就可以给光的电磁学说提供一种检验。787.〕在下面的表中，把直接观测光通过空气或星际空间的速度的主要结果和比较电学单位的主要结果进行了比对：

光速（米每秒）		电学单位之比（米每秒）	
菲佐	314000000	韦伯	310740000
光行差等等，以及太阳的视差	308000	麦克斯韦	288000000
佛科	298360000	汤姆孙	282000000

很明显，光速和单位比值是两个具有相同数量级的量。其中任何一个量也还不能说已经被测定到足以使我们能够断言一个量是大于或小于另一个量的那种精确度。应该希望，通过今后进一步的实验，这两个量的量值之间的关系将可更准确地被确定下来[②]。

在关系尚未完全确定时，我们这种断定两个量相等并赋予这种相等性以一种物理理由的理论，是肯定不会被目前这样的结果的对比所驳倒的。

788.〕在除了空气以外的其他媒质中，速度 V 反比于介电比感本领和磁比感本领之乘积的平方根。按照波动学说，不同媒质中的光速反比于各媒质的折射率。

任何透明媒质的磁比感本领都只和空气的磁比感本领相差一个很小的分数。因此，这些媒质的差别的主要部分必然依赖于他们的介电比感本领。因此，按照我们的理论，一种透明媒质的介电本领应该等于它的折射率的平方。

但是折射率却对不同种类的光是不同的，对振动较快的光折射率较大。因此我们必须选择和周期最长的波相对应的折射率，因为只有这种波动的运动才是可以和我们用来测定介电本领的那些慢过程互相对比的。

789.〕迄今为止，其介电本领曾经测到足够的精确度的唯一电介质就

[②] CambridgeTransactions，vol.ix.pp.1—62（1849）.

是石蜡；对于固定形式下的石蜡，吉耳孙和巴克雷[①]得到了

K=1.975.(12)

格拉德斯通博士曾经求得了熔融石蜡对 A、D 和 H 谱线的下列折射率值：

温度	A	D	H
54℃	1.4306	1.4357	1.4499
57℃	1.4294	1.4343	1.4493；

我由此表求得，对无限长波的折射率将约为

1.422.

R 的平方根是 1.405.

这些数字的差值大于可以用观测误差来说明的差值，而这就证明，在我们可以根据物体的电学性质来推定他们的光学性质以前，我们关于物体结构的理论必须大大改进。与此同时，我却认为数值的符合已经达到一种程度，以致如果在从颇多物质的光学性质和电学性质推出的数字之间并没有发现更大的分歧，我们就可以有把握地得出结论说，K 的平方根即使可能并不是折射率的完备表示式，它至少也是该表示式中最重要的一项②。

平面波

790.〕现在让我们把注意力限制在平面波方面，我们将假设它的波前垂直于 z 轴。其变化构成这种波的所有各量都只是 z 和 t 的函数而不依赖于 x 和 y。因此，第 591 节中的磁感方程组(A)就简化为

$$a = \frac{dG}{dz}，b = \frac{dF}{dz}，c = 0，(13)$$

或者说磁扰动是位于波面上的。这和我们所知道的构成光的那种扰动是相符的。

分别用 μa、μβ 和 μγ 来代替 a、b 和 c，第 607 节中的电流方程组就变成

---

① ｛下表采自 E.B.Ross 的一篇论文，见 Phil.Mag.28，p.315，1889.表中给出了“v”的测定结果，对 B.A.单位的误差进行了改正：1856WeberandKohlrausch……………………3.107× 1010（厘米每秒）

1868Maxwell……………………………………2.842× 1010

1869W.ThomsonandKing…………………………2.808× 1010

1872MeKichan………………………………2.896× 1010 1879AyrtonandPerry………………………………

2.960× 1010 1880Shids…………………………………2.955× 1010

1883J.J.Thomson……………………………………2.963× 1010

1884Klemencic……………………………………3.019× 1010

1888Himstedt………………………………3.009× 1010

1889W.Thomson………………………………3.004× 4010

1889E.B.Rosa……………………………2.9993× 1010

1890J.J.ThomsonandSearle………………………2.9995× 1010 空气中的光速 Cornu

（1878）………………………………………3.003× 1010 Michelson（1879）………………………………

2.9982× 1010 Micheleson（1882）…………………………………………2.9976× 1010

$$\left.\begin{aligned} \pi\mu u &= -\frac{db}{dz} = -\frac{d^2F}{dz^2}, \\ 44\pi\mu v &= \frac{da}{dz} = -\frac{d^2G}{dz^2}, \\ 4\pi\mu w &= 0. \end{aligned}\right\} (14)$$

由此可见电扰动也是位于波面上的，而如果磁扰动被限制在一个方向上，譬如限制在 x 方向上，则电扰动是限制在垂直的方向或者说 y 方向上的。

但是我们也可以用另一种办法来计算电扰动，因为，如果 f、g、h 是一种非导电媒中的电位移分量，则有

$$u = \frac{df}{dt},\ v = \frac{dg}{dt},\ w = \frac{dh}{dt}. \quad (15)$$

如果 P、Q、R 是电动强度分量，则

$$f = \frac{K}{4\pi}P,\ g = \frac{K}{4\pi}Q,\ h = \frac{K}{4\pi}R; \quad (16)$$

而既然媒质并不运动，第 598 节中的方程组(B)就变成

$$P = -\frac{dF}{dt},\ Q = -\frac{dG}{dt},\ R = -\frac{dH}{dt}. \quad (17)$$

由此即得

$$u = -\frac{K}{4\pi}\frac{d^2F}{dt^2},\ v = -\frac{K}{4\pi}\frac{d^2G}{dt^2},\ w = -\frac{K}{4\pi}\frac{d^2H}{dt^2}. \quad (18)$$

把这些值和在方程(14)中给出的值相比较，我们就得到

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2F}{dz^2} &= K\mu\frac{d^2F}{dt^2}, \\ \frac{d^2G}{dz^2} &= K\mu\frac{d^2G}{dt^2}, \\ 0 &= K\mu\frac{d^2H}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

这些方程中的第一个和第二个，就是平面波的传播方程，他们的解具有众所周知的形式

$$\left.\begin{aligned} F &= f_1(z-Vt)+f_2(z+Vt), \\ G &= f_3(z-Vt)+f_4(z+Vt). \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

第三个方程的解是

$$H=A+Bt,\ (21)$$

式中 A 和 B 是 z 的函数。因此 H 或是常量或随时间而线性地变化。在哪一种情况下它也不能在波的传播中起什么作用。

791.〕由此看来，磁扰动和电扰动的方向都位于波平面上。因此，扰动的数学形式就是和构成光的那种垂直于传播方向的扰动的数学形式相一致的。

如果我们假设 G=0，扰动就对应于一条平面偏振的光线。

在这一事例中，磁力平行于y轴并等于 $\frac{1}{\mu}\frac{dF}{dz}$，而电动强度则平行于x轴并等于 $-\frac{dF}{dt}$。因此磁力就位于一个平面上，该平面垂直于包含电动强

度的平面。

磁力和电动强度在一个给定时刻在射线的不同各点上的值，针对一个平面上的简谐扰动的情况表示在图 67 中。这对应于一条平面偏振光线，但是偏振面是对应于磁扰动的平面还是对应于电扰动的平面，却还有待阐明。请参阅第 797 节。

辐射的能量和胁强

792.]在一种非导电的媒质中,波动中任一点上的单位体积的静电能量是

$$\frac{1}{2}fP=\frac{K}{8\pi}P^2=\frac{K}{8\pi}\overline{\frac{dF}{dt}}\bigg|^2. \quad (22)$$

同一点上的单位体积的动电能量是

$$\frac{1}{8\pi}b\beta=\frac{1}{8\pi\mu}b^2=\frac{1}{8\pi\mu}\overline{\frac{dF}{dz}}\bigg|^2. \quad (23)$$

由于有方程(20)，这两个表示式对单独一个波来说是相等的，因此，在波的每一点上，媒质的内能有一半是静电能量而另一半是动电能量。

设 p 是二者中的随便哪一个量的值，就是说，p 或是单位体积的静电能量或是单位体积的动电能量，那么，由于存在媒质的静电状态，就将存在一个平行于 x 方向的张力，其量值等于 p，同时还在一个平行于 y 方向和 z 方向的压强，而且也等于 p.请参阅第 107 节。

由于存在媒质的动电状态,就存在一个平行于 y 方向的等于 p 的张力，以及一个平行于 x 方向和 z 方向的等于 p 的压强。请参阅第 643 节。

由此可见，静电胁强和动电胁强的联合效应就是一个沿波的传播方向的等于 2p 的压强。喏，2p 也表示单位体积的总能量。因此，在波所传播于其中的一种媒质中，存在一个沿波面法线方向的而数值上等于单位体积的能量的压强。

793.〕例如，如果强太阳光射在一平方英尺上的光能量是每秒 83.4 英尺磅，则每立方英尺中的平均能量约为 0.0000000882 英尺磅，从而一平方英尺上的平均压强就是 0.0000000882 磅重。曝晒在太阳光中的一个扁平物体将只在被晒的一面受到这一压强，从而就会从被晒的一侧受到推斥。借助于会聚的电灯光线，也许可以得到更大得多的辐射能量。射在一个在真空中很精密地悬挂着的薄金属片上的这种光线，也许会产生一种可观察的效应。当任何一种干扰包含一些项，而各项包含着随时间而变的角的正弦或余弦时，最大能量就等于平均能量的两倍。因此，如果 P 是在光的传播过程中出现的最大电动强度而β是最大磁力，则有

$$\frac{K}{8\pi}P^2=\frac{\mu}{8\pi}\beta^2=\text{单位体积中的平均能量。}(24)$$

利用汤姆孙(Trans.R.S.E.，1854)所引用的泡依乐(Pouillet)的数据，在电磁单位下就得到

P=60000000，或 600 个丹聂尔电池每米[②]。

[②] [在于 1877 年 6 月 14 日向皇家学会宣读的一篇论文中，J.霍普金孙博士给出了为测定各种气体的比感本领的目的而作的一些实验的结果。这些结果并没有证实在正文中得到的理论结论，在每一事例中 K 都大于

β=0.193，或颇大于英国的水平磁力的十分之一②。

平面波在结晶媒质中的传播

794.〕当根据普通的电磁实验提供的数据来计算将由每秒许多亿次的周期性扰动所引起的电现象时，我们已经使我们的理论受到了一种很严厉的考验，即使当媒质被假设为空气或真空时也是如此。但是，如果我们企图把我们的理论扩充到浓密媒质的事例中去，我们就不仅会卷入到分子理论的一切困难之中，而且会卷入到分子和电磁媒质之关系这一更深刻的奥秘之中。

为了避免这些困难，我们将假设，在某些媒质中，静电感应的比感本领在不同的方向上是不同的；或者换句话说，电位移不是和电动强度方向相同并成正比，而是由一个和第 297 节所给出的方程组相类似的方程组来联系着的。可以像在第 436 节中那样证明，系数组必然是对称的，于是，通过座标轴的适当选择，各方程就变成

$$f=\frac{1}{4\pi}K_1P,\quad g=\frac{1}{4\pi}K_2Q,\quad h=\frac{1}{4\pi}K_3R,\quad (1)$$

式中 K_1、K_2 和 K_3 是媒质的主比感本领。因此扰动的传播方程就是

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2F}{dy^2}+\frac{d^2F}{dz^2}-\frac{d^2G}{dxdy}-\frac{d^2H}{dzdx}&=K_1\mu\left(\frac{d^2F}{dt^2}+\frac{d^2\Psi}{dxdt}\right),\\ \frac{d^2G}{dz^2}+\frac{d^2G}{dx^2}-\frac{d^2H}{dydz}-\frac{d^2F}{dxdy}&=K_2\mu\left(\frac{d^2G}{dt^2}+\frac{d^2\Psi}{dydt}\right),\\ \frac{d^2H}{dx^2}+\frac{d^2H}{dy^2}-\frac{d^2F}{dzdx}-\frac{d^2G}{dydz}&=K_3\mu\left(\frac{d^2H}{dt^2}+\frac{d^2\Psi}{dzdt}\right).\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

795.〕如果 l、m、n 是波前的法线的方向余弦，V 是波的速度，设令

$$lx+my+nz-Vt=w,\quad (3)$$

而用 F″、G″、H″、ψ″来分别代表 F、G、H、ψ对ω而言的二阶微分系数，并令

$$k_1\mu=\frac{1}{a^2},\quad K_2\mu=\frac{1}{b^2},\quad K_3\mu=\frac{1}{c^2},\quad (4)$$

式中 a、b、c 是三个主传播速度，则各方程变成

$$\left.\begin{aligned}&\left(m^2+n^2-\frac{V^2}{a^2}\right)F''-lmG''-nlH''+V\Psi''\frac{1}{a^2}=0,\\ &-lmF''+\left(n^2+l^2-\frac{V^2}{b^2}\right)G''-mnH''+V\Psi''\frac{m}{b^2}=0,\\ &-nlF''-mnG''+\left(l^2+m^2-\frac{V^2}{c^2}\right)H''+V\Psi''\frac{n}{c^2}=0.\end{aligned}\right\}\quad (5)$$

796.〕如果写出

折射率的平方。在后来于 1881 年 1 月 6 日向皇家学会宣读的其次一篇论文中，霍普金孙发现，如果 u∞代表对无限长波的折射率，则对烃　按照 J.J.汤姆孙的实验（见 Proc.Roy.Soc.，June20，1889）和布朗劳的实验（见 ComptesRendus，May11，1891，p.1058），在频率约为每秒 25 兆周的电振动下，玻璃的比感本领趋近于μ2．勒舍尔（WiedAnn.42，p.142）得到了相反的结论，即这种情况下的分歧大于恒稳力情况下的分歧。｝

$$\frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=U，(6)$$

我们就由这些方程得到

$$\left.\begin{array}{l} VU(VF''-l\Psi)=0, \\ VU(VG''-m\Psi'')=0, \\ VU(VH''-n\Psi'')=0. \end{array}\right\} \quad (7)$$

因此，或是 V=0，如此则完全没有波被传播；或是 U=0，这就导致菲涅耳所给出的 V 的方程；或是括号中的量等于零，如此则分量为 F″、G″、H″的矢量垂直于波前并正比于电荷体密度。既然媒质是一种非导体，任一给点上的电荷密度就是恒定的，从而这些方程所指示的扰动就是非周期性的，从而就不能形成一种波。因此，在波的考察中我们可以认为ψ″=0。

797．〕因此，波的传播速度完全由方程 U=0 来确定，或者说由方程

$$\frac{l^2}{V^2-a^2}+\frac{m^2}{V^2-b^2}+\frac{n^2}{V^2-c^2}=0 \qquad (8)$$

来确定。因此，对应于一个给定的波前，就有两个 V^2 的值，而且只有两个 V^2 的值。

如果λ、μ、v，是分量为 u、v、w 的电流的方向余弦，

$$\lambda:\mu:v::\frac{1}{a^2}F'':\frac{1}{b^2}G'':\frac{1}{c^2}H''，(9)$$

则有

$$l\gamma+m\mu+nv=0；(10)$$

或者说，电流位于波前的平面上，而它在波前上的方向则由下列方程来确定：

$$\frac{l}{\gamma}(b^2-c^2)+\frac{m}{\mu}(c^2-a^2)+\frac{n}{v}(a^2-b^2)=0. \ (11)$$

如果我们把偏振平面定义为通过射线而垂直于电干扰平面的一个平面，这些方程就和菲涅耳所给出的方程完全相同。

按照这种双折射的电磁理论，构成普通理论的主要困难之一的法向扰动波是不存在的，而要说明沿晶体的一个主平面而偏振的射线将按照普通方式而折射这一事实也并不需要任何新的假设②。

---

② {我们可以从一个不同的观点来看待入射光作用在反射面上的力。让我们假设反射面是金属性的表面，于是当光射中表面时磁力的变化就在金属中感应出电流，而这些电流就在入射光中引起相反的感应效应，使得感应力被从金属板的内部屏蔽开来，于是，板内的电流，从而还有光的强度，就会随着我们从表面向板内的进入而迅速地减弱。板内的电流是由和他们垂直的磁力伴随着的，对应的机械力既垂直于电流又垂直于磁力，从而是平行于光的传播方向的。假如光是通过一种非吸收性的媒质而传播的，这个机械力就会在半个波长以后反转方向，从而当在一段有限的时间和距离内求了积分时就会没有任何合效应。然而，当电流随着我们离开表面而迅速衰减时，由表面附近的电流所引起的效应就不会被离表面较远处的电流引起的效应所抵消，从而合效应就不会是零。我们可以计算这一效应的量值如下。让我们考虑光垂直入射在金属平板上的事例；我们把金属平板取作 xy 平面。设σ是材料的比电阻。设入射线的矢势由方程 F=Aei(pt-ax)，给出，反射线的矢势由方程 F′=A′ei(pt-az)给出，而折射线的矢势由方程：F″=A″ei(pt-a′z)给出，于是在空气中就有： 式中 V 是空气中的光速，由此就有： 在金属中， 从而就有，譬如说 于是就有 矢势在表面上是连续的，因此就有：A+A′=A″，平行于表面的磁力也是连续的，因此就有： 或者写成： 或者，既然 a′a 是很大的，我们就可以把此式写成： 于是，在金属中，矢势的实数部分就是

电导率和阻光率之间的关系

798.〕如果媒质不是一种完全的绝缘体而是一种单位体积的电导率为C 的导体，则扰动将不仅包括电位移而且包括传导电流；在传导电流中，电能量会被转化为热，从而振动将受到媒质的吸收。

如果扰动是用一个三角函数来表示的，我们就可以写成

$$F = e^{pz}\cos(nt - qz), \quad (1)$$

因为这一函数将满足方程

$$\frac{d^2F}{dz^2} = \mu K\frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu C\frac{dF}{dt}, \quad (2)$$

如果 $q^2 - p^2 = \mu K n^2$，(3)

而且 $2pq = 4\pi\mu C n$。 (4)

传播速度是

$$V = \frac{n}{q}, \quad (5)$$

而吸收系数是

$$p=2\pi\mu CV \quad (6)$$

设 R 是一块平板的以电磁单位计的电阻{对沿板的长度而流动的电流而言的电阻}，而板的长度为 l，宽度为 b，厚度为 z，则有

$$R = \frac{l}{bzC}. \quad (7)$$

入射波将穿透这一平板的部分是

$$e^{-2pz} = e^{-4\pi\mu\frac{l}{b}\frac{v}{R}}. \quad (8)$$

799.〕多数的透明固体是良好的绝缘体，而所有的良导体都是很不透明的。然而，关于物体的电导率越大则其阻光率越大的这条定律，却存在许多例外。

电解质允许一个电流通过，但许多电解质却是透明的。然而我们却可以假设，在光传播过程中起作用的那种迅速交变力的事例中，电动强度只在很短的一段时间内沿着一个方向起作用，以致它不能造成化合分子之间的一种完全的分离。当电动强度在另一半振动中沿相反的方向起作用时，它就干脆把它在前一半振动中所作的事情反转过来。因此就不存在通过电

平行于 z 的单位体积中的机械力是这两个量的乘积，即 这个量的平均值用非周期性的一项来表示，并等于 把这一表示式从 z=0 积分到 z=∞，我们就得到作用在金属板的单位面积上的力 类似的考虑将表明，当存在吸收时，将有一个力作用在吸收性媒质上，从光强的地方指向光弱的地方。在日光的事例中，这种效应看来是很小的。然而，假如吸收是由很稀薄的气体引起的，则压强梯度可能大得足以引起颇大的效应，而且人们曾经建议这种原因就是使彗星尾被推得远离太阳的原因之一。当电振动是在赫兹实验中所产生的那样的振动时，磁力就是比日光中的磁力大得多的，从而效应就应该可以被探测出来，如果能够保持振动使它类似于连续振动的话。当存在稳定振动时，我们也得到平均值在任一点上都不为零的机械力。我们可以取上面例子中的反射波和入射波作为稳定振动的实例。记得 aa′是很小的，就知道空气中的矢势是 Aei(pt-az)+A′ei(pt+az)，或者，取实数部分，既然近似地有 A+A′=0，就得到 2Asinptsinaz。电流是 磁感是 2Aasinptcosaz；从而机械力就是 而这个量的平均值就是

解质的真正电传导，不存在电能的损失，从而也不存在光的吸收。

800.〕金、银和铂是良导体，但是当被做成很薄的薄片时，它们却允许光透过他们[①]。根据我用一片金箔（其电阻由霍金先生所测定）所作的实验，看来透明度比可以和我们的理论相容的值要大得多，除非我们假设，当电动势在每半个光振动时间内反转一次方向时，能量损失比电动势像在我们的普通实验中那样在可觉察的时间内起作用时要小。

801.〕其次让我们考虑一种媒质的事例；在这种媒质中，电导率和比感本领相比是大得多的。

在这一事例中，我们可以略去第 783 节的各方程中含 K 的项，从而各方程变为

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 F + 4\pi\mu C\frac{dF}{dt} &= 0, \\ \nabla^2 G + 4\pi\mu C\frac{dG}{dt} &= 0, \\ \nabla^2 H + 4\pi\mu C\frac{dH}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

这些方程中的每一个方程，都和付立叶的 Traitédela Chaleur 一书中所给出的热扩散方程具有相同的形式。

802.〕以其中第一个方程为例，矢势的分量 F 将随时间和位置而变，其变化方式和一个均匀固体的温度随时间和位置而变的方式相同，这时两个事例中的初值条件及边值条件要被弄得互相对应，而量 $4\pi\mu C$ 则在数值上等于物质热导率的倒数，这就是说，等于被通过物质的一个单位立方体的热量加热一度的单位体积的数目，该单位立方体的相对两面的温度相差一度，而其他各面则不传热[①]。

付立叶已给出其解的热传导中的不同的问题，可以翻译成电磁量的扩散问题，不过要记得 F、G、H 是一个矢量的分量，而付立叶问题中的温度则是一个标量。

让我们考虑付立叶已经给出完全解的事例之一[①]，即初状态已经给定的一种无限大媒质的事例。

媒质中任一点在时刻 t 的状态，通过对媒质各部分的状态求平均值来求得，在求平均值时指定给每一个部分的权重是

$$e^{-\frac{\pi\mu c r^2}{t}},$$

式中 r 是该部分离开所考虑的那一点的距离。在矢量的事例中，这个平均值可以通过分别考虑矢量的每一分量而最方便地求出。

803.〕我们首先必须指出，在这一问题中，付立叶媒质的热导率被取成反比于我们的媒质的电导率，因此，电导率越大，在扩散过程中达到一个指定状况所需要的时间就越长。如果我们记得第 655 节中的结果，这种说法就不会显得是令人大惑不解的；那结果就是，一种无限大电导率的媒质对磁力的扩散过程形成一种完全的阻隔物。

其次，在扩散过程中造成一个指定状况所需要的时间，正比于体系的

[①] 参阅 Stokes'‘ReportonDoubleRefraction，’Brit.Assoc.Report，1862，p.253。

[①] {维恩（wied.Ann.35,p.48）已经验证了这个结论：金属薄膜的透明度比上述理论所指示的要大得多。}

[①] {维恩（wied.Ann.35,p.48）已经验证了这个结论：金属薄膜的透明度比上述理论所指示的要大得多。}

线度的平方。

不存在任何一个可以定义为扩散速度的确定速度。如果我们企图通过测定在离扰动源一定距离处产生一定量的扰动所需要的时间来量度这个速度，我们就会发现，所选的扰动值越小，速度就将显得越大，因为，不论距离多大，也不论时间多短，扰动的值都将是数学地异于零的。

扩散的这一特点，把它和以有限速度进行的波传播区别了开来。直到波到达一个给定点为止，该点上是不会出现扰动的；而当波已经通过该点时，扰动就永远停止了。

804．〕现在让我们考察当一个电流开始并继续在一个线性电路中流动时所发生的过程，设电路周围的媒质有一个有限的电导率。（试和第 660 节相比较。）

当电流开始时，它的第一个效应就是在媒质靠近导线的各部分中产生一种传导电流。这个电流的方向是和原始电流的方向相反的，而在第一个瞬间，它的总量和原始电流的总量相等，从而对媒质较远部分的电磁效应在起初就是零，而只有当感生电流由于媒质电阻的作风而消逝殆尽时，这种电磁效应才会上升到它的末值。

但是，当靠近导线的感生电流衰减时，一个新的感生电流就会在较远处的媒质中被产生，于是感生电流所占据的空间就会不断地扩大，而电流的强度则不断地减小。

感生电流的这种扩散和衰减的现象，是和热量从一部分媒质开始扩散的现象确切类似的，那一部分媒质在起始时比其余部分更热或更冷一些。然而我们必须记得，既然电流是一个矢量，而且既然在一个电路中对面两点上的电流是方向相反的，那么，在计算感生电流的任一给定的分量时，我们就必须把问题比拟成这样一个[热传导]问题：相等数量的热和冷是从相邻的地方开始扩散的；在这种情况下，对远处各点的效应就将具有较小的数量级。

805．〕如果线性导体中的电流被保持为恒定，则依赖于状态之初始变化的感生电流将逐渐扩散和衰减，而把媒质留在它的永久状态中，这个状态和热流的永久状态相类似。在这个状态中，我们在全部媒质中都有

$$\nabla^2 F = \nabla^2 G = \nabla^2 H = 0 \qquad (2)$$

只有在被电路所占据的各点上除外，在各该点上{当 μ=1 时}有

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 F &= 4\pi u, \\ \nabla^2 G &= 4\pi v, \\ \nabla^2 H &= 4\pi w. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

这些方程就足以确定整个媒质中各点上 F、G、H 的值了。他们表明，除了在电路中以外不存在任何电流，而磁力则简单地是由电路中的电流按照普通的理论而引起的那些磁力。这一永久状态的建成速度是如此之大，以致用我们的实验方法是不能测量的，也许除了在很大块的像铜之类的高度导电的媒质的事例中以外。

注：在一篇发表在波根道夫的 Annalen，July1867，pp.243—263 上的论文中，洛仑茨先生曾经根据基尔霍夫的电流方程(Pogg.Ann，cii.1857)，通过增加某些并不影响任何实验结果的项而导出了新的方程组；这一方程组表明，电磁场中的力的分布，可以被设想成是由一些相邻单元的相互作用所引起的，而且由横向电流所构成的波可以在非导电媒质中以一个可以

和光速相比的速度而进行传播。因此他认为，构成光的扰动是和这些电流等同的，而且他也已经证明，导电的媒质必然对这些辐射来说是不透明的。

这些结论和本章的结论相似，尽管他们是用一种完全不同的方法求得的。本章中给出的这种理论，最初发表在 Phil.Trans.for1865，pp.459—512。

第二十一章

对光的磁作用

806.〕在电现象及磁现象和光的现象之间建立一种关系的最重要步骤，必然是某种实例的发现，在那种实例中，一组现象受到了另一组现象的影响。在寻找这样的现象时，我们必须以我们可能在想要对比的各量的数学形式或几何形式方面已经获得的任何知识为我们的指针。例如，如果我们像索末维耳夫人所作的那样企图借助于光来磁化一根针，我们就必须记得，磁南方和磁北方的区别只是一个方向的问题，从而它会立即反向，如果我们反转了有关数学正负号之应用的某些约定的话。电解现象使我们能够通过观察氧出现在电解槽的一个极上而氢出现在另一个极上来把正电和负电区分开来；而磁学中却没有任何和电解现象相类似的现象。

因此我们就不能指望，如果我们使光射中一根针的一端，那一端就会变成具有确定名称的一个磁极，因为两个磁极并不是像明和暗那样地不同的。

如果我们让圆偏振光射在针上，让右手偏振光射在针的一端而让左手偏振光射在针的另一端上，我们也许就能指望有较好的结果，因为在某些方面这两种光之间的相互关系可以说是和两种磁极之间的关系具有相伺的形式的。然而，类似性甚至在这儿也是有毛病的，因为当两种光线互相合并时，他们并不是互相抵消而是形成一种平面偏振的光线。

法拉第是很熟悉借助于偏振光来研究产生在透明固体中的胁变的方法的。他作了许多实验，希望发现偏振光在通过内部存在着电解导电或介电感应的媒质时所受到的某种作用[②]。然而他并没能找到任何这种作用，尽管实验是用按照最适宜发现拉力的效应的方式装置起来的——电力或电流和光线相垂直，并和偏振平面成 45°的角。法拉第用各种方式改变了实验，但是没有发现由电解电流或静电感应引起的对光的任何作用。

然而他在确立光和磁之间的关系方面却取得了成功，而他作到这一点的那些实验则描述在他的《实验研究》的第十九组中。我们将把法拉第的发现取作我们有关磁的本性的进一步探索的出发点，从而我们将描述一下他所观察到的现象。

807.〕一条平面偏振的光线从一种透明的抗磁性媒质中通过；当从媒质中出来时，用一个检偏器截断它的路程，以测定它的偏振面。然后加上一个磁力，使透明媒质中的磁力方向和光线的方向相重合。于是光立即重新出现，但是如果把检偏器转过某一角度，光就又被截断。这就表明，磁力的效应就是使偏振面以光线方向为轴而转过一个确定的角度，这个角度用为了截断光线而必须使检偏器转过的那个角度来描述。

808.〕偏振面转过的角度和下列各量成正比：(1)光线在媒质中走过的距离。因此偏振面是从它的原始位置开始而连续变化的。

(2)磁力在光线方向上的分量。

[②] TraitédelaChaleur,Art.384.通过点（α，β，γ）上的初温度 f（α，β，γ）来确定时间 t 后一点（x，y，z）上的温度 v 的方程是 式中 k 中热导率。

(3)转动角的大小依赖于媒质的种类。当媒质是空气或任何其他气体时，还没有观察到任何的转动[①]。

这三点说法被包括在一个更普遍的叙述中，那就是，旋转角在数值上等于光线从进入媒质的一点到离开媒质的一点的矢势增量乘以一个系数，而对抗磁性媒质来说，这个系数通常是正的。

809.〕在抗磁性物质中，偏振面被转向的方向｛一般说来｝和一个电流的正方向相同，那个电流就是为了产生和实际存在的磁力同方向的磁力而必须绕着光线运行的。

然而外尔代特却发现，在某些铁磁性媒质中，例如在一种高氯化铁在木精或乙醚的浓溶液中，旋转方向却和将会产生磁力的电流运行方向相反。

这就表明，铁磁性物质和抗磁性物质的区别不仅仅起源于“磁导率”在前一事例中大于而在后一事例中小于空气的磁导率，而是这两类物体确实性质相反。

一种物质在磁力作用下获得的使光的偏振面发生旋转的能力，并不是恰好正比于它的抗磁的或铁磁的磁化率。事实上，抗磁性物质中的旋转为正而铁磁性物质中的旋转为负这一法则，是有例外情况的，因为中性的铬酸钾是抗磁性的，但它却引起负旋转。

810.〕也存在另外一些物质，他们不依赖于磁力的施加就能在光线通过物质时使偏振面向右或向左旋转。在某些这种物质中，性质依赖于一个轴，例如在石英的事例中就是如此。在另一些物质中，性质并不依赖于光线在媒质中的方向，例如在松节油、糖溶液等等中就是如此。然而，在所有这些物质中，如果任何一条光线的偏振面在媒质中是像一个右手螺旋那样地扭转的，则当光线沿相反方向通过媒质时偏振面仍将像右手螺旋似的扭转。当把媒质放在光线的路程上时，观察者为了截断光线就必须旋转他的检偏器，而不论光线是从南或从北向他射来，旋转的方向相对于观察者来说都是相同的。当光线的方向反向时，旋转在空间中的方向当然也会反向。但是当旋转是由磁作用引起的时，它在空间中的方向却不论光是向南还是向北传播都是相同的。如果媒质属于正类，则旋转方向总是和产生或将会产生实际的磁场状态的电流的方向相同，而如果媒质属于负类则旋转方向总是和该电流的方向相反。

由此可以推知，如果光线在从北向南通过了媒质以后受到一个镜面的反射而从南向北返回媒质中，则当旋转是由磁作用引起的时，旋转就会加倍。当旋转只依赖于媒质的种类{而不依赖于光线的方向}，就像在松节油等等中那样时，光线在被反射而回到媒质中再从媒质中出来时，它的偏振将是和入射时在相同的平面上的，第一次通过时的旋转将在第二次通过时被恰好倒了回来。

811.〕现象的物理解释带来了相当大的困难。不论是在磁致旋转方面，还是在某些媒质的表现方面，这些困难还几乎不能说已经解决。然而我们可以通过分析已经观察到的事实来给一种解释作些准备。

运动学中的一个众所周知的定理就是，两个振幅相同、振动周期相同、在同一平面上但沿相反方向转运的匀速圆周振动，当合成在一起时是和一

[①] ExperimentalResearches,951-954and2216-2220.

个直线振动相等价的。这一振动的周期等于圆周振动的周期，它的振幅等于圆周振动的振幅的两部，它的方向是两个点的连线，那就是在同一圆周上沿不同方向描述圆周运动的两个质点即将相遇的两个点。因此，如果一个圆周运动的周相被加速，则直线振动的方向将沿着圆周运动的方向转过一个等于周相加速度的二分之一的角。

也可以通过直接的光学实验来证明，两条沿相反方向而圆偏振的强度相同的光线，当合并在一起时就变成一条平面偏振的光线，而且，如果其中一条圆偏振光线的周相由于任何原因被加速了，则合光线的偏振平面会转过一个等于周相加速度之一半的角度。

812．〕因此我们可以表示偏振面的旋转现象如下：有一条平面偏振光线射在媒质上。这条光线和两条圆偏振光线相等价，其中一条是右手圆偏振的，而另一条是左手圆偏振的（对观察者而言）。通过了媒质以后，光线仍然是平面偏振的，但其偏振面却向譬如说右方旋转了（相对于观察者而言）。由此可见，在两条圆偏振光线中，右手圆偏振的那一条的周相一定是在通过媒质时相对于另一条而被加速了。

换句话说，右手圆偏振的光线曾经完成了更多次数的振动，从而在媒质内部比周期相同的左手圆偏振的光线具有较小的波长。现象的这种叙述方式是和任何光的学说都无关的，因为虽然我们使用了波长、圆偏振等等的在我们头脑中可能和某种形式的波动学说相联系的术语，但是推理过程却和这种联系无关而只依赖于被实验证明了的事实。

813．〕其次让我们考虑其中一条光线在某一给定时刻的位形。每时刻的运动都是圆周运动的任何波动，都可以用一个螺纹线或螺旋来代表。如果让螺旋绕着它的轴线旋转而并不发生任何纵向运动，则每一个粒子都会描述一个圆，而与此同时，波动的传播则将由螺旋纹路上位置相似的各部分的表现纵向运动来代表。很容易看到，如果螺旋是右手的，而观察者是位于波动所传向的一端的，则在他看来螺旋的运动将显得是左手的，也就是说，运动将显得是逆时针的。因此，这样的一条光线曾经被称为一条左手圆偏振的光线；这名称最初起源于一些法国作者，现在已经在整个的科学界都通行了。

一条右手圆偏振的光线可以按相似的方式用一个左手螺旋来表示。在图 68 中，右侧的右手螺旋线 A 表示一条左手圆偏振的光线，而左侧的左手螺旋线 B 则表示一条右手圆偏振的光线。

814．〕现在让我们考虑在媒质内部具有相同波长的两条这样的光线。他们在一切方面都是几何地相似的，只除了其中一条是另一条的“反演”，即有如另一条在镜子里的像一样。然而，其中一条，譬如说是 A，却比另一条具有较短的旋转周期。如果运动完全起源于由位移所引起的力，那么这就表明，当位形像 A 那样时，由相同的位移引起的力要比位形像 B 那样时大一些。因此，在这一事例中，左手光线将相对于右手光线而被加速，而且不论各光线是从北向南还是从南向北行进，情况都将是这样的。

图 68

因此这就是松节油等等引起的那种现象的解释。在这些媒质中，当位形像 A 那样时，由一条圆偏振光线所造成的位移将比位形像 B 那样时引起较大的恢复力。于是这些力就只依赖于位形，而不依赖于运动的方向。

但是在沿 SN 方向受到磁作用的一种抗磁性媒质中，两个螺旋 A 和 B 中的一个却永远是以最大的速度旋转的，那就是当眼睛从 S 向 N 看去时看到它在顺时针转动的那个螺旋。因此，对于从 S 向 N 射去的光线来说，右手光线 B 将传播得最快；而对于从 N 向 S 射去的光线来说，则左手光线 A 将传播得最快。

815.〕当把我们的注意力只集中在一条光线上时，螺纹线 B 就具有完全相同的位形，不论它表示的是一条由 S 向 N 的光线还是一条由 N 向 S 的光线。但是在第一种情况下光线传播得更快一些，从而螺纹线也旋转得更快一些。因此，当螺纹线向一个方向运动时，将比它向另一个方向运动时引起较大的力。因此力并不仅仅依赖于光线的位形，而且也依赖于光线各部分的运动方向。

816.〕构成光的那种扰动，不论它的物理本性如何，是具有垂直于光线方向的矢量性质的。这可以由两条光线在干涉时在某些条件下会造成黑暗这一事实以及偏振在互相垂直的平面上的两条光线并不互相干涉这一事实来得到证明。因为，既然干涉依赖于偏振面的角位置，扰动就必然是一个有向量或矢量；而既然当偏振面互相正交时干涉就停止，代表扰动的那个矢量就必然垂直于这些偏振面的交线，也就是垂直于光线的方向。

817.〕既然是一个矢量，扰动就可以分解成平行于 x 的和平行于 y 的分量，z 轴平行于光线的方向。设 ξ 和 η 是这两个分量，则在均匀圆偏振光线的事例中有

$$\xi = r\cos\theta,\quad \eta = r\sin\theta, \quad (1)$$

式中

$$\theta = nt - qz + a. \quad (2)$$

在这些表示式中，r 代表矢量的量值，而 θ 代表矢量和 x 轴方向之间的夹角。

扰动的周期 τ 满足

$$n\tau = 2\pi. \quad (3)$$

扰动的波长 λ 满足

$$q\lambda = 2\pi. \quad (4)$$

传播速度是 $\frac{n}{g}$.

当 t 和 z 都为零时，扰动的周期是 α.

按照 q 的为负或为正，圆偏振是右手的或左手的。按照 n 的为正或为负，光的振动方向是平面(x，y)上的正转动或负转动的方向。

按照 n 和 q 为同号或异号，光将沿着 x 轴的正方向或负方向而传播。

在所有的媒质中，当q变化时n都会变化，而且 $\frac{dn}{dq}$ 永远和 $\frac{n}{q}$ 同号。

因此，如果对n的一个给定数值来说 $\frac{n}{q}$ 的值当n为正时比n为负时要大，那就可以推知，对于一个量值和正负号都给定的 q 值来说，n 的正值将大于 n 的负值。

喏，这就是在一种受到一个沿 z 轴方向的磁力 y 作用的抗磁性媒质中所{通常}观察到的情况。在两条周期相同的圆偏振光线中，被加速的是它

在(x，y)平面上的旋转方向为正的那一条。因此，在两条在媒质内部具有相同波长的都是左手圆偏振的光线中，具有最短周期的就是在(x，y)平面上旋转方向为正的那一条，也就是沿着正 z 轴而从南向北传播的那一条光线。因此我们就必须说明这样一件事实：在体系的方程组中，当 q 和 r 给定时，有两个 n 值满足各方程，一正一负，而 n 值在数值上大于负值。

818.〕我们可以通过考虑媒质的势能和动能来求得运动方程。体系的势能 V 依赖于它的位形，即依赖于体系各部分的相对位置。就它依赖于由圆偏振光线引起的扰动来看,它必然只是扭转幅度 r 和扭转系数 q 的函数。它对数值相等的正 q 值和负 q 值来说可能有不同的值，而且它在自身就引起偏振面旋转的媒质的事例中或许就是这样的。

体系的动能 T 是体系各速度的二次齐次函数，不同各项的系数是座标的函数。

819.〕让我们考虑光线可以具有恒定强度的动力学条件，也就是 r 可以为常量的动力学条件。

有关 r 方向上的力的拉格朗日方程变为

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{dr}-\frac{dT}{dr}+\frac{dV}{dr}=0. \quad (5)$$

既然 r 是常量，第一项就是零。因此我们就有一个方程

$$-\frac{dT}{dr}+\frac{dV}{dr}=0, \quad (6)$$

式中的 q 被假设为给定，而我们要确定的是角速度 θ 的值，我们将用它的实际值 n 来代表这个角速度。

动能 T 包括一个含 n^2 的项；另一些项可能含有 n 和其他速度的乘积，而其余的项则不依赖于 n.势能 V 是完全不依赖于 n 的。因此方程(6)就具有如下的形式

$$An^2+Bn+C=-. \quad (7)$$

既然是一个二次方程，此式就给出两个 n 值。由实验看到，两个都是实值，一正一负，而且正值在数值上较大。由此可见，如果 A 是正的，则 B 和 C 都是负的，因为，如果 n_1 和 n_2 是方程的根，就有

$$A(n_1+n_2)+B=0. \quad (8)$$

因此系数 B 就不为零，至少当有磁力作用在媒质上时是如此。因为我们必须考虑表示式 B_n，这就是动能中含有扰动之角速度 n 的一次幂的那一部分。

820.〕T 的每一项对速度来说都是二次的。因此含 n 的项必然含有某一另外的速度。这个速度不可能是 $\dot{r}$ 或 $\dot{q}$，因为在我们所考虑的事例中 r 和 q 是常量。由此可见它是独立于构成光的那种运动而存在于媒质中的一个速度。它也必须是和 n 有着适当关系的一个速度，就是说，当和 n 相乘时，得到的结果就是一个标量，因为只有标量才能作为一些项而出现在本身就是一个标量的 T 的值中。由此可见，这个速度必须是和 n 方向相同或方向相反的，也就是说，它必然是一个绕 z 轴的角速度。

再者，这个速度不可能不依赖于磁力，因为，假如它是和固定在媒质中的一个方向联系的，则当我们把媒质颠倒一下时现象就将是不同的，而事实却并非如此。

因此我们就被引导到这样一个结论：这个速度是和显示偏振面之磁旋转的那些媒质中的磁力不可改变地相伴随着的。

821.〕我们迄今为止不得不使用一种语言，它或许过份暗示了关于波动学说中的运动的普通假说。然而也很容易用一种不带这种假说的色彩的形式来叙述我们的结果。

不论光是什么，在空间每一点上总是有种什么事情在进行，这或许是移动，或许是转动，或许是还没有想像到的什么东西，但它肯定具有一个矢量或有向量的本性，其方向垂直于光线的方向。这是由干涉现象全面证明了的。

在圆偏振光的事例中，这一矢量的量值保持不变，但其方向则绕着光线的方向而旋转，在波的一个周期内正好转一周。至于这个矢量是位于偏振面上还是和该平面相垂直，这种不确定性并不影响我们关于该矢量在右手圆偏振光和左手圆偏振光中的旋转方向的知识。这一矢量的方向和角速度是完全已知的，尽管这一矢量的物理本性和它在一个给定时刻的绝对方向是不确定的。

当一条圆偏振光线射在一种处于磁力作用下的媒质上时，它在媒质中的传播就受到光的旋转方向和磁力的方向之间的关系的影响。利用第 817 节中的推理，我们由此就得出结论说，在媒质中，当处于磁力的作用之下时，有某种旋转运动是正在进行着的，其旋转轴线就是磁力的方向；而且，当光的振动性旋转的方向和媒质的磁旋转方向相同时，圆偏振光的传播速率是和该二方向相反时不同的。

一方面是有圆偏振光从中通过的媒质，另一方面是有磁力线从中通过的媒质，我们在二者之间所能追索的唯一相似性就是，在二者中都存在一种绕轴旋转的运动。但是相似性也就到此为止，因为光现象中的转动就是表示着扰动的那个矢量的转动。这个矢量永远垂直于光线的方向，而且每秒绕该方向转过一定的转数。在磁现象中，转动的东西没有可以据以确定其侧面的任何性质，从而我们就不能确定它每秒转动多少次。

因此，在磁现象中，就没有任何东西和光现象中的波长及波动传播相对应。在有一个恒定磁力作用于其内的媒质中，并不会由于该力的作用而像当有光在其内传播时那样充满一种沿一个方向前进的波动。光现象和磁现象之间的唯一相似性就是，在媒质的每一点上，存在某种东西，它具有以磁力方向为轴的角速度的本性。

关于分子漩涡假说

822.〕正如我们已经看到的那样，关于磁对偏振光的作用的考虑，导致了这样的结论：在一种处于磁力作用下的媒质中，和角速度属于同一数学类别的某种东西形成了现象的一个部分，而它的轴线就沿着磁力的方向。

这个角速度，不可能是具有可觉察大小的任何媒质部分作为整体而转动的角速度。因此我们必须把转动设想成媒质的一些很小部分的转动，每一个小部分都绕着自己的轴线在转动。这就是分子漩涡假说。

虽然正如我们已经看到的那样（第 575 节）。这些漩涡的运动并不会显著影响大物体的可见运动，但是他们却可能会影响波动学说中光的传播

所依据的那种振动性的运动。在光的传播过程中，媒质的位移将引起各漩涡的一种扰动，而当受到这样的扰动时，各漩涡就会反作用于媒质，以致影响了光线传播的方式。

823.〕在目前我们对漩涡的本性毫无所知的状态下，不可能指定联系着媒质的位移和漩涡的变化的那种定律的形式。因此我们将假设，由媒质的位移所引起的漩涡的变化,服从亥姆霍兹在他有关涡流运动的伟大著作[①]中已经证明了的支配着理想液体之漩涡变化的相同条件。

亥姆霍兹的定律可以叙述如下：设 P 和 Q 是一个漩涡的轴线上的两个相邻的质点，如果由于流体的运动，这两个质点达到了 P′、Q′二点，则直线 P′Q′将代表漩涡轴线的新方向，而漩涡的强度则将按 P′Q′和 PQ 之比而发生变化。

因此，如果α、β、γ代表一个漩涡的强度的分量，而ξ、η、ζ代表媒质的位移，则α、β、γ的值将变成

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=\alpha+\alpha\frac{d\xi}{dx}+\beta\frac{d\xi}{dy}+\gamma\frac{d\xi}{dz},\\ \beta'&=\beta+\alpha\frac{d\eta}{dx}+\beta\frac{d\eta}{dy}+\gamma\frac{d\eta}{dz},\\ \gamma'&=\gamma+\alpha\frac{d\zeta}{dx}+\beta\frac{d\zeta}{dy}+\gamma\frac{d\zeta}{dz}.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

现在我们假设，同样的条件在一种媒质的微小移动过程中也是满足的，在那种媒质中，α、β、γ不是代表一个普通漩涡的强度分量，而是代表磁力的分量。

824.〕媒质的一个元部分的角速度分量是

$$\begin{aligned}\omega_1&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz}\right),\\ \omega_2&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx}\right),\\ \omega_3&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right).\end{aligned}$$

我们假说中的其次一步就是一个假设，即认为媒质的动能包括形式如下的一项：

$$2C(\alpha\omega_1+\beta\omega_2+\gamma\omega_3).\quad(3)$$

这就和下述假设相等价：媒质元在光的传播过程中所获得的角速度，是可能出现在和用来解释磁现象的那种运动的关系中的一个量。

为了建立媒质的运动方程，我们必须用媒质各部分的分量为ξ、η、ζ的速度把它的动能表示出来。因此我们就分部求积分，并得到

[①] {在此书写成以后，已经有人在气体中观察和测量了偏振面的旋转，参阅 H．Becquerel.Compt,Rendus,88,p.709;90,p.1407;KundtandR(ntgen,Wied,Ann.,6,p.332;8,p.278;Bichat，Compt.Rendus,88,p.712;JournaldePhysique,9,p.275,1880.}

$$
\begin{aligned}
&2C\iiint(\alpha\omega_1+\beta\omega_2+\gamma\omega_3\\
&=C\iint(\gamma\dot{\eta}-\beta\dot{\zeta})dydz+C\iint(\alpha\dot{\zeta}-\gamma\dot{\xi})dzdx\\
&+C\iint(\beta\dot{\xi}-\alpha\dot{\eta})dxdy+C\iiint\left\{\dot{\xi}(\frac{d\gamma}{dy}-\frac{d\beta}{dz})\right.\\
&\left.+\dot{\eta}(\frac{d\alpha}{dz}-\frac{d\gamma}{dx})+\dot{\zeta}(\frac{d\beta}{dx}-\frac{d\alpha}{dy})\right\}dxdydz \qquad (4)
\end{aligned}
$$

二重积分涉及的是媒质的边界面，这个边界面可以似设为位于无限远处。因此，当探索发生在媒质内部的过程时，我们可以只注意那个三重积分。

825．〕由这个三重积分来表示的单位体中动能的那一部分，可以写成

$$4\pi C(\dot{\xi}u+\dot{\eta}v+\dot{\zeta}w)，\quad(5)$$

式中 u、v、w 是由第 607 节中的方程组(E)给出的电流分量。由此可以看出，我们的假说和另一条假设相等价；那假设就是，一个媒质质点的分量为 $\dot{\xi}$、$\dot{\eta}$、$\dot{\zeta}$、的速度，是可能出现在和分量为u、v、w**的电流的关系中的一个量。**

826．〕现在回到(4)式中三重积分号下面的那个表示式。把 α、β、γ 的值代成由方程组(1)给出的 α′、β′、γ′的值，并用

$$\frac{d}{dh}\text{来代表}\alpha\frac{d}{dx}+\beta\frac{d}{dy}+\gamma\frac{d}{dz}，\quad(6)$$

被积分式就变成

$$C\left\{\dot{\xi}\frac{d}{dh}(\frac{d\zeta}{dy}-\frac{d\eta}{dz})+\dot{\eta}\frac{d}{dh}(\frac{d\xi}{dz}-\frac{d\zeta}{dx})+\dot{\zeta}\frac{d}{dh}(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy})\right\}. \quad(7)$$

在垂直于 z 轴的平面波的事例中，各位移只是 z 和 t 的函数，于是就有 $\frac{d}{dh}=\gamma\frac{d}{dz}$，而上式变为

$$C\gamma(\frac{d^2\xi}{dz^2}\dot{\eta}-\frac{d^2\eta}{dz^2}\dot{\xi}). \quad(8)$$

现在，就其依赖于各位移速度的情况来看，单位体积的动能就可以写成

$$T=\frac{1}{2}\rho(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2)+C\gamma(\frac{d^2\xi}{dz^2}\dot{\eta}-\frac{d^2\eta}{dz^2}\dot{\xi})，\quad(9)$$

式中 ρ 是媒质的密度。

827．〕对单位体积来说的外加力的分量 X 和 Y，可以利用拉格朗日方程（第 564 节）而由此式导出。我们注意，通过对 z 进行两次分部积分并略去边界面上的二重积分，可以证明

$$\iiint\frac{d^2\xi}{dz^2}\dot{\eta}\,dxdydz=\iiint\xi\frac{d^3\eta}{dz^2dt}dxdydz.$$

由此即得

$$\frac{dT}{d\xi}=C\gamma\frac{d^3\eta}{dz^2dt}.$$

因此力的表示式就由下式给出：

$$X=\rho\frac{d^2\xi}{dt^2}-2C\gamma\frac{d^3\eta}{dz^2dt}，(10)$$

$$Y=\rho\frac{d^2\eta}{dt^2}+2C\gamma\frac{d^3\xi}{dz^2dt}.\ (11)$$

这些力是由媒质的其余部分作用在所考虑的媒质元上的，从而在各向同性媒质的事例中必然具有由科希指出的形式，

$$X=A_0\frac{d^2\xi}{dz^2}+A_1\frac{d^4\xi}{dz^4}+\cdots，(12)$$

$$Y=A_0\frac{d^2\eta}{dz^2}+A_1\frac{d^4\eta}{dz^4}+\cdots.\ (13)$$

828．〕如果现在我们考虑满足

$$\xi=r\cos(nt-qz)，\eta=r\sin(nt-qz)，(14)$$

的圆偏振光的事例，我们就发现，关于单位体积中的动能，应有

$$T=\frac{1}{2}\rho r^2n^2-C\gamma r^2q^2n；(15)$$

而关于单位体积中的势能则有

$$V=\frac{1}{2}r^2(A_0q^2-A_1q^4+\cdots)$$
$$=\frac{1}{2}r^2Q，(16)$$

式中 Q 是 q■的一个函数。

在第 819 节的方程(6)中给出的光线自由传播的条件是

$$\frac{dT}{dr}=\frac{dV}{dr}，(17)$$

此式给出

$$\rho n^2-2C\gamma q^2n=Q，(18)$$

由此就能求得用 q 表示出来的 n 值。

但是，在受到磁力作用的一条具有给定波动周期的光线的事例中，我们所要确定的是用 γ 为常量时的 $\frac{dq}{dn}$ 表示出来的n为常量时的 $\frac{dq}{d\gamma}$．求(18)式的导数，就

$$(2\rho n-2C\gamma q^2)dn-(\frac{dQ}{dq}+4C\gamma qn)dq-2Cq^2nd\gamma=0.\ (19)$$

于是我们就得到

$$\frac{dq}{d\gamma}=-\frac{Cq^2n}{\rho n-C\gamma q^2}\frac{dq}{dn}.\ (20)$$

829．〕如果 λ 是空气中的波长，v 是空气中的波速，而 i 是媒质中的对应折射率，则有

$$q\lambda=2\pi i，n\lambda=2\pi v.\ (21)$$

{从而也有 $\frac{dq}{dn}=\frac{1}{v}(i-\lambda\frac{di}{d\lambda})$．}

由磁作用引起的 q 值的改变量，在任何情况下都是它的值的一个非常小的分数，因此我们就可以写出

$$q = q_0 + \frac{dq}{d\gamma}\gamma，(22)$$

式中 q_0 是磁力为零时的 q 值。在通过媒质的一个厚度 c 时偏振面转过的角度θ，等于 qc 的正值和负值之和的一半，其正负号应改变，因为方程(14)中的 q 是负的。于是我们就得到

$$\theta = -c\gamma\frac{dq}{d\gamma}，(23)$$

$$= \frac{4\pi^2 C}{v\rho}c\gamma\frac{i^2}{\lambda^2}(i-\lambda\frac{di}{d\lambda})\frac{1}{1-2\pi C\gamma\frac{i^2}{v\rho\lambda}}.\ (24)$$

这个分数的分母中的第二项，近似地等于当光在媒质中通过一个等于（媒质中的）波长之半{的 $\frac{1}{\pi}$ 倍}的厚度时偏振面转过的角度。因此它就是我们在一切事例中和 1 相比都可以忽略不计的一个量。

写出

$$\frac{4\pi^2 C}{v\rho} = m，(25)$$

我们就可以把 m 叫做媒质的磁旋系数，这是一个必须通过观测来确定它的值的量。经发现，多数抗磁性媒质的 m 是正的，而某些顺磁性媒质的 m 则是负的。因此，作为我们的理论的最后结果，我们就有

$$\theta = mc\gamma\frac{i^2}{\lambda^2}(i-\lambda\frac{di}{d\lambda})，(26)$$

式中θ是偏振面的旋转角，m 是通过媒质的观测来确定的一个常量，γ是投影到光线方向上的磁力强度，c 是媒质内部的光线长度，λ是光在空气中的波长，而 i 是煤质的折射率[①]。

830.〕这种理论迄今为止所经受过的唯一检验，就是在相同的磁力作用下通过相同媒质的不同种类的光的θ值的比较。

这种比较已由外尔代特先生针对为数颇多的媒质作过了[①],他得到了下列的结果：

(1)不同颜色的光线的偏振面的磁致旋转,近似地服从波长的平方反比定律。

(2)现象的确切规律永远使得旋转角和波长平方的乘积从光谱的折射性最小的一端向折射性最大的一端递增。

(3)这种递增性最显著的物质，也就是具有最大色散率的那些物质。

他也发现，在本身就会引起偏振面的旋转的酒石酸溶液中，磁致旋转根本不是和自然旋转成正比的。

在加在同一论著中的补充论述[②]中,外尔代特也给出了用二硫化碳和木

[①] Crelle'sJournal,Vol.lv.(1858),pp.25-55.Tait 的英译文见 Phil.Mag.,June,pp.485-511,1867.

[①] {罗兰德曾经证明（Phil,mag.xi.p.254,1881），如果霍耳效应（见上卷第 303 节）在电介质中是存在的，则偏振面的磁致旋转就会产生。}

[②] RecherchessurlesPropriétésoptiquesdéveloppéesdanslescorpstransparentsparl'actiondumagnétisme,4mepartie.Com

馏油作的很仔细的实验的结果；在这两种物质中，对波长平方反比定律的偏差是很明显的。他也把这些结果和由下列三个不同的公式给出的数值进行了对比：

$$(\mathrm{I})\theta=mc\gamma\frac{i^2}{\lambda^2}(i-\lambda\frac{di}{d\lambda})\text{；}$$

$$(\mathrm{II})\theta=mc\gamma\frac{1}{\lambda^2}(i-\lambda\frac{di}{d\lambda})\text{；}$$

$$(\mathrm{III})\theta=mc\gamma(i-\lambda\frac{di}{d\lambda}).$$

这些公式中的第一个，(Ⅰ)，是我们在第 829 节的方程(26)中已经得出的。第二个公式(Ⅱ)，可以通过在第 827 节的方程(10)和(11)中不是代入形如 $\frac{d^3\eta}{dz^2dt}$ 和 $-\frac{d^3\xi}{dz^2dt}$ 的项而是代入 $\frac{d^3\eta}{dt^3}$ 和 $-\frac{d^3\xi}{dt^3}$ 的项来得出。就我所知这个方程的形式并不曾由任何物理理论提出过。第三个公式，(III)，来自 M.C.诺依曼的物理理论[③]。，在那种理论中，运动方程含有形如 $\frac{d\eta}{dt}$ 和 $-\frac{d\xi}{dt}$ 的项[①]。

很明显，由公式(III)给出的θ值甚至并不能近似地和波长的平方成反比。由公式(Ⅰ)和(Ⅱ)给出的值满足这一条件，而且这些值也和在中等色散率的媒质中观测到的值差强人意地相符合。然而，对于二硫化碳和木馏油来说，由(Ⅱ)给出的值却和观测值分歧很大。由(Ⅰ)给出的值和观测值符合得稍好，但是，尽管在二硫化碳的事例中符合性较好，在木馏油的事例中分歧却大得不能用任何的观测误差来加以说明。

偏振面的磁致旋转（据外尔代特）

24.9℃下的二硫化碳

光谱线	C	D	E	F	G
观测值	592	768	1000	1234	1704
据Ⅰ计算	589	760	1000	1234	1713
据Ⅱ计算	606	772	1000	1216	1640
据III计算	943	967	1000	1034	1091

谱线 E 的旋转=25°28′

24.3℃下的木馏油

光谱线	C	DE	F	G	
观测值	573	758	1000	1241	1723
据Ⅰ计算	617	780	1000	1210	1603
据Ⅱ计算	623	789	1000	1200	1565
据III计算	976	993	1000	1017	1041

ptesRendus,t.lvi.p.630(6April,1863).

③ ComptesRendus,lvii.p.670(19 Oct.,1863).

①

‘Explicaretentaturquomodofiatutlucisplanumpolarizationispervireselectricasvelmagneticasdeclinetur.'HalisSaxonum,1858.

谱线 E 的旋转=21°58′

我们对物体分子构成的细节所知太少，以致不太可能建立联系到对光的磁作用这样的具体现象的任何理论；那要等到我们已经通过建筑在若干不同的可见现象被发现为依赖于涉及分子作用的那种事例上的归纳综合，了解了有关一些性质的某种更确定的知识时才行，那些性质就是为了满足观测到的各事实的条件而必须指定给分子的。

以上提出的这种理论显然是一种暂时性的理论，它依据了有关分子漩涡之本性的以及有关他们受到媒质位移之影响时的那种方式的一些未经证实的假说。因此我们必须认为，和观测事实的任何符合，在偏振面的磁致旋转理论中都比在光的电磁理论中具有更加小得多的科学价值，因为光的电磁理论虽然也涉及了关于媒质的电性质的一些假说，但它却并没有涉及媒质的分子构造之类的问题。

831.〕注整个这一章可以看成威廉·汤姆孙爵士的一个非常重要的说法的引申。他在 Proceedings of theRoy-al Society,June1856 上写道："法拉第所发现的对光的磁影响，依赖于运动粒子的运动方向。例如，在具有运动粒子的媒质中，沿着平行于磁力线的直线而运动的粒子会被弄成沿着以该直线为轴的螺旋线而运动，然后，以这样的速度切向投影成描绘圆周，就将按照他们的运动是绕向一个方向（和磁化线圈中传导电流的名义方向相同）或是绕向相反的方向而具有不同的方向。但是，不论粒子的速度和方向如何，媒质的弹性反作用对相同的位移必然是相同的。这就是说，被圆周运动的离心力所平衡的力是相等的，而光运动则是不相等的。因此，那些绝对圆周运动或者相等，或者把相等的离心力传给起初考虑的那些粒子，由此就可以推知，光运动只是整个运动的一个成分，而且，沿一个方向的较弱的光运动和当并未传送光时存在于媒质中的运动结合起来，将与沿相反方向的较强的光运动和同一非光运动结合起来时给出相同的合运动。平行于磁力线而通过磁化玻璃传送的具有相同的性质即永为左手或永为右手的圆偏振光，将按照它的路程是沿着还是反着一个北磁极被画出的方向而以不同的速度传播；关于这个事实，我认为不仅不可能设想出和上述这种动力学解释有所不同的任何动力学解释，而且我也相信，可以阐明这一事实的任何别的解释都是不可能的。因此，看样子，法拉第的光学发现给关于磁的终极本性的安培解释提供了一种证明，并且在热的动力论中给出了一个磁化的定义。动量矩原理（'面积的守恒性'）在兰金'分子漩涡'假说的数学处理中的引用，似乎表明一条垂直于热运动之合角动量平面（'不变的平面'）的直线就是磁化物体的磁轴；而且这也意味着，这些运动的合动量矩就是'磁矩'的确切量度。一切电磁的吸引或推斥现象，以及电磁感应现象，其解释都应该简单地到其运动构成热的那种物质的惯性和压力中去寻找。这种物质是不是电，它是一种填充在分子核之间的空间中的连续流体呢还是本身也有分子结构，或者，是不是一切物质都是连续的而分子性的不均匀性只存在于物体各相邻部分的有限的漩涡运动或其他相对运动方面，这在目前的科学状况下还是无法确定的，而且或许推测它也是无用的。"

我曾经相当详细地发展了一种分子漩涡理论，见 Phil.Mag.for March,April,andMay,1861,Jan.andFeb.1862.我认为，我们有很好的证据

可以相信，磁场中有某种转动现象在进行着，这种转动是由许许多多很小的物质部分在进行着的，其中每一个小部分都绕着自己的轴线在转动，这个轴线平行于磁力的方向，而且，通过彼此之间的某种连接机制，这些不同的漩涡是被弄得互相制约着的。

然后我就试着设想了这种机制的一个可行的模型。这种尝试不能过分当真，它只是一种演示，表明可能设想出一种机制，它可以产生一种连接，在力学上和电磁场各部分之间的实际连接相等价。为了在一个体系各部分的运动之间建立一种给定类型的联系，就需要某种机制；这种机制的确定问题永远可以有无限多种解。在这许多解中，有些解可能比别的解更加复杂和更加别扭，但是所有的解都必须满足机制的普遍条件。

然而，理论的下列结果却具有较高的价值：

(1)磁力是各漩涡的离心力的效应。

(2)电流的电磁感应是当各漩涡的速度发生变化时所引起的那些力的效应。

(3)电动势起源于连接机制上的胁强。

(4)电位移起源于连接机制的弹性屈服。

第二十二章

用分子电流来
解释铁磁性和抗磁性

关于磁性的电磁学说

832．〕我们已经看到（第 380 节），磁体和磁体之间的相互作用，可以用一种叫做“磁质”的假想物质的吸引和推斥来准确地代表。我们已经指出了为什么我们不能假设磁质能够像当我们磁化一个棒时起初想像的那样从磁体的一部分经过一个可觉察的距离而运动到磁体的另一部分，从而我们就被引导到了泊松的假说，即磁质是严格地局限在磁性物质的单个分子中的，因此一个磁化了的分子就是种类相反的磁质或多或少地向分子的相对两端分开的一个分子，但是其中任何一种磁质都永远不能真正地脱离分子（第 430 节）。

这些论点就能完全确立一个事实，即磁化不是大块的铁的现象而是分子的现象，也就是说，是物质的那样一些很小的部分的现象，他们太小了，以致我们无法用机械的手段把他们一分为二，以便得到一个和南极分离开的北极。但是，不经进一步的探索，磁分子的本性却绝不是已经确定的。我们已经看到（第 442 节），有很强的理由可以相信，对铁或钢进行磁化的动作并不是把磁性传给组成铁或钢的那些分子，而是这些分子即使在未被磁化的铁中就已经是磁性分子了，但是他们的轴线却不偏不倚地指向所有的方向，而磁化的动作则只是转动那些分子，使他们的轴线或是完全指向一个方向，或是至少偏向那个方向。

833．〕然而，我们还没有得到有关磁性分子之本性的任何解释，也就是说，我们还没有认识到它和我们更加了解的任何其他东西的相似性。因此我们必须考虑安培的假说，就是说，分子的磁性起源于一种在分子内部不断地沿某种闭合路线进行着的分子电流。

利用一个在其表面上适当分布的电流层来得出任一磁体在其外部各点上的作用的一种确切模拟，总是可能的。但是，磁体在其内部各点上的作用，却是和电流在各对应点上的作用完全不同的。因此安培就得出结论说，如果磁性是要借助于电流来加以解释的，这些电流就必然在磁体的分子内部流动，而不应该从一个分子流到另一个分子。由于我们不能测量分子内部的一点上的磁作用，这一假说就不能像我们可以否证磁体内部可觉察范围内的电流的假说那样加以否证。

除此以外，我们也知道，当从导体的一个部分过渡到另一个部分时，一个电流就遇到电阻并产生热；因此，假如有普通种类的电流绕着可觉察大小的磁体部分在进行，那就会有一种经常的能量耗损来保持这些电流，而且一个磁体也将是一个永久性的热源。人们对分子内部的电阻是毫无所知的，因此，通过把电路限制在分子内部，我们就可以断言电流在分子内运行时不会遇到任何电阻，而且我们用不着害怕任何矛盾。

因此，按照安培的学说，所有的磁现象都起源于电流，而且，假如我们能够对一个磁性分子内部的磁力进行观测，我们就将发现这种磁力和由

任何其他电路包围着的区域中的磁力服从完全相同的规律。

834．〕当处理磁体内部的力时，我们曾经假设测量是在从磁体物质中挖出的小空腔中进行的，见第 395 节。这样我们就被引导到了两个不同量的考虑，即磁力和磁感的考虑，这二者都被假设为是在磁性物质已被取走的空间中观测的。我们并没有认为自己能够穿透到磁性分子的内部并观测分子内部的力。

如果我们采用安培的学说，我们就把一个磁体不是看成其磁化按照某种容易想像的规律而从一点到另一点地变化的一种连续的物质，而是把它看成为数甚多的一群分子；在每一个分子中都流动着一套电流，他们引起一种极其复杂的磁力分布；分子内部的磁力的方向，通常是和它的邻域中的平均磁力的方向相反的；而在它存在的地方，磁势也是一个多重函数，其重数就如磁体中的分子数那样地大。

835．〕但是我们却将发现，尽管存在这种表现复杂性（然而这种复杂性只不过起源于许多较简单部分的同时存在），通过采用安培学说并把我们的数学眼光伸展到分子的内部，磁的数学理论却是被大大简化了的。

首先，磁力的两个定义变成了一个定义，二者都和适用于磁体外部空间的定义相同了。其次，磁力的分量到处都满足磁感分量所满足的条件了，就是说，到处都满足下一条件了：

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0. \quad (1)$$

换句话说，磁力的分布和一种不可压缩流体的速度的分布具有相同的性质，或者，正像我们在第 25 节中已经表述过的那样，磁力是没有敛度的。

最后，三个矢量函数即电磁动量、磁力和电流，变得更简单地相互联系着了。他们都是没有敛度的矢量函数，而且他们是按次序一个从一个用相同的手续导出的，其手续就是求空间变化率，即哈密顿用符号▽表示的那种运算。

836．〕但是我们现在是在从一种物理的观点来考虑磁，从而我们就必须追问分子电流的物理性质。我们假设有一个电流在分子中循环不已，而且它并不会遇到任何电阻。设 L 是分子电路的自感系数，而 M 是这一电路和某一其他电路之间的互感系数，那么，如果 γ 是分子中的电流而 γ' 是另一电路中的电流，则电流 γ 的方程是

$$\frac{d}{dt}(L\gamma+M\gamma')=-R\gamma; \quad (2)$$

而既然按照假说并不存在任何电阻，我们就有 R=0，于是通过积分就得到

$L\gamma+M\gamma'=$常量$=L\gamma_0$，(3)

让我们假设分子电路在分子轴线的垂面上的投影面积是 A，该轴线定义为使投影面积为最大的那个平面的法线。如果其他电流在一个和分子轴线成 θ 角的方向上引起的磁力是 x，则量 $M\gamma'$ 变成 $XA\cos\theta$．而作为电流的方程我们就有

$L\gamma+XA\cos\theta=L\gamma_0$，(4)

式中 γ_0 是当 X=0 时的 γ 值。

因此，看来分子电流的强度完全依赖于它的原始值 γ_0，也依赖于由其他电流引起的磁力的强度。

837．〕如果我们假设不存在原始电流而是电流完全起源于感应，则有

$$\gamma=-\frac{XA}{L}\cos\theta.\ (5)$$

负号表明感生电流的方向和施感电流的方向相反，而且它的磁作用是在电路内部沿着和磁力相反的方向而起作用。换句话说，分子电流像一个小磁体那样起作用，它的两极是指向施感磁体的同名极的。

喏，这是一种作用，它和铁分子在磁力影响下的作用相反。因此，铁中的分子电流并不是由感应作用引起的。但是在抗磁性物质中却有一种这样的作用被观察到，而事实上这也正是由韦伯最初提出的对于抗磁性的解释。

韦伯的抗磁性理论

838．]按照韦伯的理论，在抗磁性物质的分子中存在某些渠道，而电流可以沿着这些渠道运行而不受到阻力。很显然，如果我们假设这些渠道沿一切方向而穿过分子，那就等于把分子看成一个理想的异体。

从假设分子内的一个线性电路开始,我们就得到由方程(5)给出的电流强度。

电流的磁矩是它的强度和电路面积的乘积，即γA，而这个磁矩沿磁化力方向的分量则是$\gamma A\cos\theta$，或者由(5)就得到

$$-\frac{XA^2}{L}\cos^2\theta.\ (6)$$

如果单位体积中有 n 个这样的分子，而他们的轴线是不偏不倚地沿一切方向分布的，则$\cos^2\theta$的平均值将是$\frac{1}{3}$，而物质的磁化强度将是

$$-\frac{1}{3}\frac{nXA^2}{L}(7)$$

因此，诺依曼的磁化系数就是

$$k=-\frac{1}{3}\frac{nA^2}{L}.\ (8)$$

因此物质的磁化是沿着磁化力的反方向的，或者换句话说，物质是抗磁性的。磁化也和磁化力确切地成正比而并不像普通的磁感应事例中那样趋于一个有限的极限。请参阅第 442 等节。

839．]如果各分子渠道的轴线方向不是不偏不倚地沿一切方向排列，而是沿某些方向的数目较多，则按所有分子计算的和式

$$\Sigma=\frac{A^2}{L}\cos^2\theta$$

将按照从它开始测量θ值的那条直线的方向之不同而有不同的值，而这些值在不同方向上的分布将和绕通过同一点而方向不同的轴线的惯量矩的分布相似。

这样一种分布将解释由普吕克尔所描述了的那种和物体中的轴线有关的磁现象，即法拉第所说的磁晶现象。请参阅第 435 节。

840．]现在让我们考虑，如果不是把电流限制在分子内的某些渠道中，而是整个的分子被假设成一个理想的导体，那将有什么效应呢？

让我们从一个非环形物体的事例开始；就是说，物体不是一个环或一个穿了孔的物体。让我们假设这个物体到处都被一个理想导电物质的薄壳所包围。

我们在第 654 节中已经证明，一个任意形状的理想导电物质的闭合层，本来不带有电流，当受到外磁力的作用时就变成一个电流层，其作用适足以在层的内部各点上使磁力等于零。如果我们注意到一个情况，那就可能有助于我们理解这一事例。其情况就是，磁力在这样一个物体附近的分布，和一种不可压缩流体的速度在一个相同形状的不可穿透性物体附近的分布相似。

很显然，如果另一些导电壳被放在第一个壳的内部，既然他们并没有受到磁力的作用，也就不会有任何电流在他们中被激起。因此，在一个由理想导电材料构成的固体中，磁力的效应就是激起一个完全限制在物体表面上的电流系。

841．]如果导电物体具有半径为 r 的球的形状，则它的磁矩可被证明{利用在第 672 节中给出的方法来证明}为等于

$$-\frac{1}{2}r^3X,$$

而且，如果有若干个这样的球分布在一种媒质中，使得单位体积中的导电物质的体积是 k',则通过在第 314 节的方程(17)中令 $k_1=\infty$、$k_2=1$ 和 p=k',我们就能求出导磁系数；这时把导磁系数看成那一节中的电阻的倒数，即

$$\mu=\frac{2-2k'}{2+k'}, \quad (9)$$

由此，关于泊松的磁系数，我们就有

$$k=-\frac{1}{2}k', \quad (10)$$

而关于诺依曼的感应磁化系数，就有

$$k=-\frac{3}{4\pi}\frac{k'}{2+k'}. \quad (11)$$

既然理想导电物体的数学观念导致一些和我们在普通导体中所能观察到的任何现象都非常不同的结果，那就让我们更多地考察一下这个课题吧。

842．]回到像第 836 节中那样的具有面积为 A 的闭合曲线形状的导电渠道的事例，关于倾向于使角 θ 增大的电磁力矩，我们就有

$$\gamma\gamma\frac{dM}{d\theta}=-\gamma XA\sin\theta \quad (12)$$

$$=\frac{X^2A^2}{L}\sin\theta\cos\theta \quad (13)$$

按照 θ 大于或小于直角，这个力是正的或负的。由此可见，一个理想导电渠道的磁力的效应，就是倾向把它转得使它的轴线和磁力线相垂直，也就是使渠道的平面变成和磁力线相平行。

把一个铜币或铜环放在电磁铁的两极之间，就能观察到种类相似的一个效应。在磁铁被激励的那一瞬间，铜环就把它的平面转向轴的方向，但

是电流一经被铜的电阻所消灭，力也就变成零了[②]。

843．到此为止，我们只考虑了分子电流完全由外磁力所激起的事例。其次让我们分析韦伯关于分子电流之磁电感应的理论和安培关于普通磁性的学说之间的关系。按照安培和韦伯的看法，磁性物质中的分子电流不是由外磁力所激起而是早已存在的，而分子本身则是受到加在在电流在其中流动的电路上的那种磁力的电磁作用的影响并被那种作用所偏转的。当安培创立了这个假说时，电流的感应现象还是未知的，从而他就没有提出任何假说来说明分子电流的存在或确定他们的强度。

然而，现在我们必须对这些电流应用韦伯对他的抗磁性分子中的电流所应用的那些同样的定律。我们只须假设，当没有磁力作用时，电流 γ 的原始值不是零而是 γ_0．当一个磁力 X 作用在一个面积为 A 而轴线和磁力线夹一角度 θ 的分子电流上时，电流强度是

$$\gamma=\gamma_0-\frac{XA}{L}\cos\theta，\quad(14)$$

而倾向于转动分子以使 θ 增大的力偶矩是

$$-\gamma_0 XA\sin\theta+\frac{X^2A^2}{2L}\sin 2\theta．\quad(15)$$

因此，在第 443 节中的探索中令

$$A\gamma_0=m，\quad \frac{A}{L\lambda_0}=B，\quad(16)$$

平衡方程就变成

$$X\sin\theta-BX^2\sin\theta=D\sin(\alpha-\theta)．\quad(17)$$

电流的磁矩在 X 方向上的分量是

$$\gamma A\cos\theta=\gamma_0 A\cos\theta-\frac{XA^2}{L}\cos^2\theta，\quad(18)$$
$$=m\cos\theta(1-BX\cos\theta)．\quad(19)$$

844．]这些条件和韦伯的磁感应理论中那些条件的差别在于含有系数 B 的各项。如果 BX 和 1 相比是很小的，这些结果就将趋近于韦伯的磁性理论中的结果。如果 BX 和 1 相比是很大的，这些结果就将趋近于韦伯的抗磁性理论中的结果。

喏，分子电流的原始值 γ_0 越大，B 就将变得越小，而如果 L 也很大，则这也会使 B 减小。现在，如果电流是在一个环形的渠道中流动的，则 L 的值依赖于 $\log\frac{R}{r}$，式中R是渠道的中线的半径，而r是其截面的半径。因此，渠道截面和它的面积相比越小，自感系数 L 就越大，而现象就越接近地和韦伯的原始理论相一致。然而却存在一点不同，即当磁化力 X 增大时暂时磁矩不仅将达到一个极大值，而且以后将随 X 的增大而减小。

假如有一天能够在实验上证明任何物质的暂时磁化在磁化力连续增大

[②] 这三种形式的运动方程是由 G.B.艾瑞爵士作为分析当时刚由法拉第发现的现象的手段而首次提出的（Phil.Mag.,June1846,p.477）.马 程，以便数学地表示水晶的现象。这些方程由马克·枯拉和艾瑞提供出来，“不是为了给出现象的一种力学解释，而是为了证明现象可以用一些方程来加以解释，那些方程似乎有可能从一种可取的力学假设中推出，尽管还没有任何这样的假设已被作出。”

时是起初增大而后减小的，我认为这些分子电流之存在的证据就会几乎被提高到证明的等级了[①]。

845．]如果抗磁性物质中的分子电流是限制在一些确定的渠道中的，而且各分子是像磁性物质的分子那样可以被偏转的，则当磁力增大时抗磁极性将是一直增大的，但当磁力很大时极性就增大得不像磁力那样快。然而，抗磁系数的很小的绝对值却表明，作用在每一个分子上的致偏力，和作用在一个磁性分子上的致偏力相比一定是很小的，因此由这种偏转引起的任何结果都不太可能是觉察得到的。

另一方面，如果抗磁性物质中的分子电流可以在分子的物质整体中自由地流动，抗磁极性就将严格地正比于磁化力，而其量值则将导致理想导电物质所占之全部空间的一种测定，而且，如果我们知道分子的数目，这个量值也将导致分子大小的测定。

---

① 见 Faraday,Exp.Res.,2310,&c.

第二十三章

远距作用理论

关于高斯和韦伯所提出的
对安培公式的解释

846.]按照安培公式，载有强度为 i 和 i '的两个电路的元段 ds 和 ds ' 之间的吸引力是

$$\frac{ii'dsds'}{r^2}(2\cos\in+3\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'})\text{；}(1)$$

或者写成

$$-\frac{ii'dsds'}{r^2}(2r\frac{d^2r}{dsds'}-\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'})\text{；}(2)$$

式中的电流用电磁单位来量度。请参阅第 526 节。我们现在必须诠释其意义的各个出现在这些表示式中的量是

$$\cos\in_1\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\text{，和}\frac{d^2r}{dsds'}\text{；}$$

而应该到那里去寻求一种建筑在电流之间的直接关系上的诠释的最明显的现象就是两个电路元中的电荷相对速度。

847.] 因此，让我们考虑分别以速度 v 和 v'而沿着电路元 ds 和 ds ' 运动的粒子的相对运动。这些粒子的相对速度的平方是

$$u^2=v^2-2vv'\cos\in+v'^2\text{；}(3)$$

而如果我们用 r 来代表二粒子之间的距离，就有

$$\frac{\partial r}{\partial t}=v\frac{dr}{ds}+v'\frac{dr}{ds'}\text{，}(4)$$

$$(\frac{\partial}{\partial})^2=v^2(\frac{dr}{ds})^2+2vv'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}+v'^2(\frac{dr}{ds'})^2\text{，}(5)$$

$$\frac{\partial^2r}{\partial t^2}=v^2\frac{d^2r}{ds^2}+2vv'\frac{d^2r}{dsds'}+v'^2\frac{d^2r}{ds'^2}\text{，}(6)$$

式中的符号∂表示，在被微分的量中，粒子的座标要用时间表示出来。

因此就看到，方程(3)、(5)和(6)中含乘积 vv'的各项包含了那些出现在(1)和(2)中的我们必须加以诠释的量。因此我们就力图用u^2、$\left|\frac{\partial r}{\partial t}\right|^2$和$\frac{\partial^2r}{\partial t^2}$把(1)和(2)表示出来。但是，为了作到这一点，我们必须把其中每一表示式中的第一项和第三项消去，因为他们含有一些并不出现在安培公式中的量。由此可见，我们不能把电流解释成仅仅沿一个方向的电传递，而是在每一个电流中都要把两个反向的流动结合起来，以便含有 v^2 和 v'^2 的各项的组合效应可以是零。

848.]因此让我们假设，在第一个电路元 ds 中，我们有一个以速度 v 运动着的带电质点 e 和另一个以速度 v_1 运动着的带电质点 e_1；而且同样，在 ds ' 中也有两个分别以速度 v ' 和 v_1 ' 运动着的质点 e ' 和 e_1 ' 。

对这些质点的组合作用来说，含 v^2 的项是

$$\Sigma(v^2ee')=(v^2e+v_1{}^2e_1)(e'+e'_1)\text{。}\quad(7)$$

同理就有

$$\Sigma(v'^2ee')=(v'^2e'+v'_1{}^2e'_1)(e+e_1)\text{；}(8)$$

以及 $\Sigma(vv'ee')=(ve+v_1e_1)(v'e'+v'_1e'_1)$。(9)

要想使 $\Sigma v^2ee'$ 可以是零，我们就必须有

$e'+e'_1=0$，或 $v^2e+v_1{}^2e_1=0$．(10)

按照菲希诺尔的假说，电流就是一个沿正方向的正电之流和一个沿负方向的负电之流的结合体，二者在运动着的电量和运动所取的速度方面都在数值上恰好相等。由此可见，(10)中的两个条件都是被菲希诺尔假说所满足的。

但是，为了我们的目的，只要一条假设也就够了：或是假设每一电流元中的正电量在数值上等于负电量，或是假设两种电量都和他们的速度平方成反比。

现在我们知道，通过使第二条导线作为整体而带电，我们可以使 $e+e'$ 为正或为负。按照这一公式，即使并未载有电流，这样一条带电的导线也会对载有电流而其内部的 $v^2e+v_1^2e_1$ 有一个异于零的值的第一条导线作用以力。这样的作用从来不曾被观察到过。

因此，既然 $e+e'$ 这个量可以在实验上被证实为并不永远等于零，既然 $v^2e+v_1^2e_1$ 这个量并不能在实验上进行检验，那么，对于这些思索来说，假设后一个量永远为零就是比较好的。

849．]不论我们采用什么假说，无可怀疑的都是，代数地计算下来，沿第一个电路的总的电荷传输应由下式表示：

$$ve+v_1e_1=cids,$$

式中 c 是单位电流在单位时间内所传输的静电的单位数；于是我们就可以把方程(9)写成

$\Sigma(vv'ee')=c^2ii'dsds'$．(11)

因此，(3)、(5)和(6)的四个值的和就变成

$$\Sigma(ee'u^2)=-2c^2ii'dsds'\cos\epsilon\text{，}\quad(12)$$

$$\Sigma\left(ee'\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)=2c^2ii'dsds'\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds}\text{，}\quad(13)$$

$$\Sigma\left(ee'r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}\right)=2c^2ii'dsds'r\frac{d^2r}{dsds'}\text{，}\quad(14)$$

从而我们就可以把 ds 和 ds' 之间的吸引力的两个表示式(1)和(2)写成

$$-\frac{1}{c^2}\Sigma\left[\frac{ee'}{r^2}\left(u^2-\frac{3}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right]\text{，}(15)$$

$$-\frac{1}{c^2}\Sigma\left[\frac{ee'}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2\right)\right]\text{。}\quad(16)$$

850．]在静电理论中，两个带电质点 e 和 e' 之间的推斥力的普通表示式是 $\frac{ee'}{r^2}$，而且

$$\Sigma\left(\frac{ee'}{r^2}\right)=\frac{(e+e_1)(e'+e'_1)}{r^2}\text{，}\quad(17)$$

此式就给出两个电路元之间的静电推斥力，如果他们是作为整体而带电的

话。

由此可见，如果我们假设两个电路元之间的推斥力满足下列，两个修订了的表示式中的任一个：

$$\frac{ee'}{r^2}[1+\frac{1}{c^2}(u^2-\frac{3}{2}(\frac{\partial r}{\partial t})^2)]，(18)$$

或 $$\frac{ee'}{r^2}[1+\frac{1}{c^2}(r\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}-\frac{1}{2}(\frac{\partial r}{\partial t})^2)]^{①}(19)$$

我们就可以从他们既推出普通的静电力，又推出由安培确定出来的作用在电流之间的动力。

851．]这些表示式中的第一个，(18)，是由高斯[①]在 1835 年 7 月间发现，并被他诠释为一条电作用的基本定律的；他说："两个电荷元在相对运动的状态中会互相吸引或互相推斥，但其方式和他们处于相对静止时不同。"就我所知，这一发现在高斯在世时并没有发表，从而第二个表示式就是被科学界得知的这种结果中最早的一种；这个表示式是由韦伯独立地发现的，发表在他那著名的 Elektrodynamische Maasbestimmungen 的第一编中[①]。

852．]当应用于两个电流之间的机械力的确定时，这两个表示式就导致完全相同的结果，而且这种结果是和安培的结果等同的。但是当把他们看成两个带电质点之间的作用的物理定律的表示式时，我们必须追问他们是否和其他已知的自然事实相容。

这两个表示式都包含着质点的相对速度。喏，当通过数学推理来建立众所周知的能量守恒原理时，人们普遍地假设作用在两个质点之间的力只是距离的函数，而且人们通常说，如果力是其他东西的函数，例如时间或质点速度的函数，则原理的证明是不成立的。

因此，一条涉及质点速度的电作用定律，有时曾经被认为是和能量守恒原理相矛盾的。

853．]高斯的公式和这一原理相矛盾，从而必须被放弃，因为它导致一条结论，认为能量可以借助于物理手段而在一个有限的体系中无限地产生出来。这种反驳不适用于韦伯的公式，因为他曾经证明[②]，如果我们假设由两个带电质点组成的体系的势能是

$$\psi=\frac{ee'}{r}[1-\frac{1}{2c^2}(\frac{\partial r}{\partial t})^2]，(20)$$

则通过对 r 求此式的导数并变号而得到的质点间的推斥力是由公式(19)给出的。

由此可见，一个固定质点的推斥力对一个运动质点作的功就是ψ_0-ψ_1，式中ψ_0和ψ_1是ψ在运动质点的路径起点和路径终点上的值。喏，ψ

[①] {厄翁教授曾在很强的磁场中寻求这种效应的迹象，但是尚未发现。见 EwingandLow'OntheMagnetisationofIronandotherMagneticMetalsinveryStrongFields，' Phil.Trans.1889,A.p.221.}

[①] {关于这种类型的理论的论述，请参阅 ReportonElectriealTheories,byJ.J.Thomson,B.A.Report,1885,pp.97-155.}

[①] Werke(G(ttingenedition,1867),vol.v.p.616.

[②] Abh.LeibnizensGes.,Leipzig(1846),p.316.

不但依赖于距离 r，而且依赖于速度沿 r 的分量。因此，如果质点描绘了任何一条闭合的路径，使得它在终点上的位置、速度以及运动方向都和在起点上的相同，则在这一循环过程中总地来说将是没作任何功的。

由此可见，无限大数量的功并不能由一个在韦伯所假设的力的作用下以一种周期方式运动着的粒子所作出。

854．]但是，在他的《静止导体中电的运动方程》[③]这篇重要的论著中，亥姆霍兹一方面证明了韦伯的公式当只考虑在完整的循环过程中所作的功时是并不和能量守恒原理相矛盾的，另一方面他也指出了，韦伯的公式导致这样一个结论：按照韦伯定律而运动的两个带电质点在起初可以有有限的速度，但是当彼此相距还为有限距离时，他们却可以获得无限的动能，也可以作无限的功。

对于这种批评，韦伯[①]回答说：在亥姆霍兹的例子中，质点的初始相对速度虽然是有限的，但却是大于光速的，而且，动能变为无限时的距离虽然是有限的，但却是小于我们所能觉察的，从而把两个质点弄得如此靠近就可能是在物理上作不到的。因此这个例子就不能用任何实验的方法来加以检验。

于是亥姆霍兹[②]就叙述了一个事例；在这个事例中，对于实验验证来说距离不是太小，而速度也不是太大。一个半径为 α 的固定的不导电的球面被充电到了面密度为 σ。一个质量为 m 而带有电荷 e 的质点在球内以速度 v 而运动。由公式(20)算出的电动力学势能是

$$4\pi\alpha\sigma e\left(1-\frac{v^2}{6c^2}\right)，\quad(21)$$

从而是和质点在球内的位置无关的。在这个结果上加上由其他力的作用所引起的另一部分势能 V 和质点的动能 $\frac{1}{2}mv^2$，我们就得到

能量方程

$$\frac{1}{2}\left(m-\frac{4}{3}\frac{\pi\alpha\sigma e}{c^2}\right)v^2+4\pi\alpha\sigma e+V=\text{常量。}\quad(2)$$

既然 v^2 的系数中的第二项可以通过增大球的半径 α 并使面密度 α 保持不变而无限地增大，v^2 的系数就可以被弄成负数。于是质点运动的加速就将对应于它的“活动”(vis vivα)的减小，而一个沿闭合路径运动并受到像摩擦力一样永远和运动方向相反的一个力的作用的质点，就将不断地增大它的速度，而且这是没有限度的。这种不可能的结果是假设一种势能公式的必然推论，那种公式在 v^2 的系数中引入了负项。

855．]但是我们现在必须考虑韦伯理论对可以实现的现象的应用。我们已经看到它怎样给出两个电流元之间的吸引力的安培表示式。一个电流元在另一电流上的势通过对两个电流元中正、负电流的四种组合求和来求得。由方程(20)，求 $\left|\frac{\partial r}{\partial t}\right|^2$ 的四个值的和，结果就是

③ Pogg.Ann.lxxiii.p.229(1848).

① Crelle’sJournal,72.pp.57—129(1870).

② Elektr.Maasb.inbesondereü berdasPrincipderErhaltungderEnergie.

$$-ii'dsds'\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}，\quad (23)$$

而一个闭合电流在另一个闭合电流上的势就是

$$-ii\iint\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}dsds' = ii'M，\quad (24)$$

式中正如在第 423、524 节中一样，

$$M = \iint\frac{\cos\in}{r}dsds'.$$

在闭合电流的事例中，这一表示式和我们已经 (在第 524 节中)得到的表示式相等同[①]。

韦伯的电流感应理论

856．]韦伯在从安培的关于电流元之间的作用的公式推得了他自己的关于运动带电质点之间的作用的公式以后，就着手应用他的公式来解释电流由磁电感应所产生的现象了。在这一点上他是杰出地成功的，从而我们将说明可以用来从韦伯公式推出感生电流定律的那种方法。但是我们必须提到，从安培发现的现象推出的一条定律也可以说明后来由法拉第发现的现象，而这一事实却并不像我们起初所设想的那样在定律之物理真实性的证据上增加了多大的重量。

因为，亥姆霍兹和汤姆孙已经证明（见第 543 节），如果安培的现象是真实的，而且能量守恒定律也是被承认的，则法拉第所发现的感应现象是必然的推论。现在，韦伯的定律，以及它所涉及的关于电流本性的各种假设，通过数学变换而导致了安培的公式。韦伯的定律也是和能量守恒定律相一致的，只要势存在就行，而势存在也正是亥姆霍兹和汤姆孙应用该原理时所唯一要求的。因此，甚至在对这一课题作出任何应用之前，我们就可以断定韦伯的定律将能够解释电流的感应了。因此，计算证明它能够解释电流感应这一事实，就不能使定律之物理真实性的证据有任何的增减。

另一方面，高斯的公式尽管能够解释电流的吸引现象，但它却和能量守恒原理不能相容，从而我们就不能断定它将解释所有的感应现象。事实上它并不能作到这一点，正如我们在第 859 节中即将看到的那样。

857.]现在我必须考虑当 ds 在运动中而它的电流可以变化时由电流元 ds 在电流元 ds＇中引起的电流。

按照韦伯的观点，对 ds＇是它的一个元的那个导体的材料的作用，是对它所携带的电的所有作用之和。另一方面，作用在 ds＇中的电上的电动力，却是作用在它内部的正电和负电上的电力之差。既然所有这些力都是沿着二电流元的连线而起作用的，作用在 ds＇上的电动力也就是沿着这一连线的，而为了解释沿 ds＇方向的电动力，我们就必须把力投影到该方向上。为了应用韦伯的公式，我们必须计算出现在公式中的各项，所依据的假设是，电流元 ds＇是相对于 ds＇而运动着的，而且两个电流元中的电流都是随时间而变的。这样求得的表示式将包括含 v^2、vv＇、v'^2、v、v＇

[①] BerlinMonatsbericht,April1872.pp.247-256;Phil.Mag.,Dep.1872,Supp.,pp.530—537.

的一些项，以及不含 v 或 v＇的一些项，所有这些项都乘上了 ee＇。像从前那样检查每一项的四个值并首先考虑由四个值的和值所引起的机械力，我们就发现，我们所必须照顾到的只有含乘积 vv＇ee＇的那一项。

如果然后我们就考虑由第一个电流元对第二个电流元中正电和负电的作用之差所引起的倾向于在第二个电流元中产生电流的那个力，我们就会发现，我们所必须分析的唯一的一项就是含 vee＇的那一项。我们可以写出Σ(vee＇)中被感生的四项，于是就有

$$e'(ve+v_1e_1)\text{和}e'_1(ve+v_1e_1).$$

既然 e＇+e_1＇=0，由这些项引起的机械力就是零，但是作用在正电 e＇上的电动力却是(ve+v_1e_1)，而作用在负电 e_1＇上的电动力则和此力相等而反向。

858．]现在让我们假设，第一个电流元 ds 是相对于 ds＇而以速度 V 沿着某一方向运动的，并且让我们用 Vds 和 Vds＇来分别代表 V 的方向和 ds 的方向之间的夹角，于是两个带电质点的相对速度 u 的平方就是

$$u^2=v^2+v'^2+V^2-2vv'\cos\in+2Vv\cos\hat{Vd}\,s-2Vv'\cos\hat{Vd}\,s'.\quad(25)$$

含 vv＇的项和方程(3)中的一项相同。电动力所依赖的含 v 的那一项是

$$2Vv\cos\hat{Vd}\,s.$$

关于这一事例中 r 的时间变化率的值，我们也有

$$\frac{\partial r}{\partial t}=v\frac{dr}{ds}+v'\frac{dr}{ds'}+\frac{dr}{dt},\quad(26)$$

式中$\frac{\partial r}{\partial t}$指的是带电质点的运动，而$\frac{dr}{dt}$指的是物质性导体的运动。如果我们求出这个量的平方，则机械力所依赖的含 vv＇的项仍像从前那样和方程(5)中的一项相同，而电动力所依赖的含 v 的项则是

$$2v\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt}.$$

对 t 求(26)的导数，我们就得到

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}=v^2\frac{d^2r}{ds^2}+2vv'\frac{d^2r}{dsds'}+v'^2\frac{d^2r}{ds'^2}+\frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds}+\frac{dv'}{dt}\frac{dr}{ds'}\quad(27)$$
$$+v\frac{dv}{ds}\frac{dr}{ds}+v'\frac{dv'}{ds}\frac{dr}{ds'}+2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{d}+2v'\frac{d}{ds'}\frac{dr}{dt}+\frac{d^2r}{dt^2}.$$

①

我们发现，含 vv＇的项仍像从前一样和(6)中的一项相同。随着 v 的变号而变号的项是$\frac{dv}{dt}\frac{dr}{ds}$和$2v\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt}$。

859．]如果我们现在利用高斯的公式（方程(18)）来计算由第一个电流元 ds 的作用而来的沿第二个电流元 ds＇方向的合电力，我们就得到

$$\frac{1}{r^2}dsds'iV(2\cos\hat{Vd}\,s-2\cos\hat{Vr}\cos\hat{rd}\,s)\cos\hat{rd}\,s'.\quad(28)$$

由于这个表示式中并没有包含电流 i 的变化率的项，而且我们知道原电流的变化会对副电路发生一种感应作用，因此我们就不能接受高斯的公

① 在整个的探索中，韦伯应用了电动力学单位制。在本书中，我　。见第 526 节。

式作为带电质点之间的作用的一种真实表示式。

860．]然而，如果我们使用韦伯的公式(19)，我们就得到

$$\frac{1}{r^2}dsds'(r\frac{dr}{ds}\frac{di}{dt}+2i\frac{d}{ds}\frac{dr}{dt}-i\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dt})\frac{dr}{ds'}，\quad(29)$$

或者写成 $\frac{d}{dt}(\frac{i}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'})dsds'+\frac{i}{r}(\frac{d^2r}{dsdt}\frac{dr}{ds'}-\frac{d^2r}{ds'dt}\frac{dr}{ds})dsds'$．(30)

如果我们对 s 和 s'求这个表示式的积分，我们就得到关于第二个电路中的电动势的方程如下：

$$\frac{d}{dt}i\iint\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}dsds'+i\iint\frac{1}{r}(\frac{d^2r}{dsdt}\frac{dr}{ds'}-\frac{d^2r}{ds'dt}\frac{dr}{ds})dsds'.\quad(31)$$

现在，当第一个电路是闭合的时，就有

$$\int\frac{d^2r}{dsds'}ds=0.$$

由此即得

$$\int\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}ds=\int(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}+\frac{d^2r}{dsds'})ds=-\int\frac{\cos\in}{r}ds.\quad(32)$$

但是由第 423、524 节就有

$$\iint\frac{\cos\in}{r}dsds'=M.\quad(33)$$

如果两个电路都是闭合的，则方程(31)中的第二项等于零，因此我们就可以把第二个电路中的电动势写成

$$-\frac{d}{dt}(iM)，\quad(34)$$

这是和我们已经根据实验确立了的结果相一致的，见第 539 节。

关于把高斯的公式看成起源于
从一个带电质点以常值速度传递
到另一个带电质点的一种作用的问题

861．]高斯在一封写给 W·韦伯的很有兴趣的信[①]中，提到了他在很久以前就从事过的一些电动力学的思索；他将会已经发表了这些思索，假如他当时能够确立了他认为是电动力学之真正关键的结果的话，那结果就是，通过考虑带电质点之间的一种作用来推出作用在他们之间的力，而那种作用不是瞬时性的，而是按一种类似于光的传播的方式而在时间中传播的。当他终止他的电动力学研究时，他并没有在进行这种推导方面取得成功，而且他有一种主观的信念，认为要想对这种传播的进行方式形成一种自洽的表示，这种推导首先就是必要的。有三位杰出的数学家曾经试图提供这一电动力学的关键原理。

862．]伯恩哈德·黎曼在 1858 年向格廷根的皇家学会提出了一篇论文，但是随后又撤回了；这篇论文直到作者逝世以后才于 1867 年问世，见 Poggendorff 'sAnnalen,bd.cxxxi.pp.237—263.在这篇论文中，从泊松方程的一种修订形式

[①] 括进来，然而当电路是闭合的时这些项对结果并无影响。}

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=\frac{1}{\alpha^2}\frac{d^2V}{dt^2}$$

出发，黎曼推导了电流的感应现象；在这里，V 是静电势，而α是一个速度。

这个方程和表示波及其他扰动在弹性媒质中的传播的方程形式相同。但是作者似乎避免了明白地提到扰动在其中传播的任何媒质。

黎曼所作的数学探索曾由克劳修斯[①]进行过检查。他不承认数学过程的可靠性，而且证明了势像光一样地传播这一假说既不能导致韦伯的公式也不能导致已知的电动力学定律。

863．]克劳修斯也检查了 C．诺依曼关于《电动力学原理》的另一篇更精密得多的论文[①]。然而诺依曼却曾经指出[②]，他的关于势从一个带电质点传到另一个带电质点的理论，是和高斯所提出的、黎曼所采用的并由克劳修斯检查过的那种理论十分不同的；在那种理论中，传播是和光的传播相像的。相反地，按照诺依曼的看法，势的传播和光的传播之间却存在着要多大就多大的差别。

一个发光体向一切方向发射光，光的强度只依赖于发光体而不依赖于被光照到的物体的存在。

另一方面，一个带电质点发出势，其值$\frac{ee'}{r}$不但依赖于发射质点e，而且依赖于接收质点 e＇，而且依赖于发射时刻的质点间的距离 r。

在光的事例中，强度随光的向远方传播而减小；发射出去的势却流到它所作用的物体上而一点也不减小它的原始值。

被照物体所接受的光通常只是射在它上面的光的一部分；被吸引物体所接受的势和到达它的势是完全相同的，或者说是相等的。

除此以外，势的传送速度不是像光的速度那样相对于以太或空间为常量，而却有如一个抛射体的速度那样相对于发射质点在发射时刻的速度而为常量。

由此可见，为了理解诺依曼的理论，我们必须形成一种和我们在考虑光的传播时已经习惯了的表象很不相同的势的传递过程的表象。在高斯看来是必要的那种传递过程能否有一天会作为“可设想的表象”而被人们所接受，我无法断言，但是我自己却没有能够构造出诺依曼理论的一种自洽的思维表象。

864．]比萨的比提教授[③]曾经用一种不同的方式处理了问题。他假设电流在里边流动的那些闭合电路由一些电路元构成的，而其中每一个电路元都周期性地被极化，也就是按相等的时间阶段而来回地被极化。这些极化的电流元像一些小磁体那样互相发生作用，各磁体的轴线沿电路的切线方向。这种极化的周期在所有的电路中都是相同的。比提假设一个极化电路元对隔着一个距离的另一极化电路元的作用不是瞬时出现的而是在一段和二电路元之间的距离成正比的时间之后才出现的。用这种办法，他求得了

[①] March19,1845,Werke,bd.v.629.

[①] Pogg.,bd.cxxxv.p.612.

[②] Tü bingen,1868.

[③] MathematischeAnnalen,i.317.

一个电路对另一个电路的作用的表示式，和已知为真确的那些表示式相符合。然而，克劳修斯在这一事例中也批评了数学计算的某些部分，其详情在此不赘述。

865．]在这些杰出人物的头脑中，似乎对光和热的辐射现象以及在一个距离上的电作用在那里发生的一种媒质有一种偏见或反感。确实，在一个时期之内，那些思索物理现象之原因的人们习惯于借助一种以太流来说明每一种远距作用，那种以太流的功能和性质就是要产生这些作用。他们把全部空间充上了三四种不同的以太，它们的性质只是被发明了来“粉饰外表”的，为的是使更加理性化的研讨者们不但接受牛顿关于远距吸引力的确切定律，而且甚至也接受科太斯[①]的教条，即认为远距作用是物质的最原始性质之一，而且任何解释都不比这一事实更容易理解。因此，光的波动学说就曾经遇到许多的反对意见，这并不是指向它在解释现象方面的失败，而是指向它的光在其中传播的那种媒质之存在的假设。

866．〕我们已经看到，在高斯的思想中，电动力学作用的数学表示导致了一种确信，认为一种关于电作用在时间中传播的理论将被发现就是电动力学的基础本身。喏，我们不能设想时间中的传播，除非是作为一种物质实体在空间中的飞行，或是作为一种运动状态或胁强状态在早已存在于空间中的媒质中的传播。在诺依曼的理论中，我们无法设想为一种物质实体的一个叫做势的数学观念被假设为从一个质点抛射向另一个质点，其方式和一种媒质完全无关，而且正如诺依曼本人已经指出的那样，其方式是和光的传播方式极不相同的。在黎曼和比提的理论中，看来作用是被假设为以一种和光的传播方式更相似的方式而传播的。

但是在所有这些理论中，很自然地会出现一个问题：如果某种东西是越过一段距离而从一个质点传送到另一个质点的，它在已经离开一个质点而尚未到达别的质点时的状况是怎样的呢？如果这某种东西像在诺依曼理论中那样是两个质点的势能，我们应该怎样把这种能量想像为存在于一个既不和某一个也不和另外的质点相重合的空间点上呢？事实上，每当能量在时间中从一个物体被传送到另一个物体时，就必然有一种媒质或物质，而能量在离开一个物体以后和到达其他物体之前就是存在于这种媒质或物体中的，因为，正如托里拆利[①]所指出的那样，能量“是本性上如此稀薄的一种原质，它不能被容纳于除物体的最内在物质以外的任何容器中。”由此可见，所有的这些理论都引向一种媒质的观念，而传播就是在那种媒质中进行的；而且我认为，如果我们采纳这种媒质作为一种假说，它就应该在我们的探索中占据一种突出的地位，而且我们就应该努力构造一种关于它的作用的一切细节的思想表象，而这就一直是我在这部著作中的目标。

[①] NuoroCimento,xxvii(1868).

[①] 见牛顿《原理》一书第二版的序。