电磁通论（上）

汉译者前言

众所周知，本书是整个科学史中的一部超级名著，是可以和欧几里德的《几何学原本》或牛顿的《自然哲学之数学原理》相提并论的。一部这样的经典名著，永远可以给后人以重要的启示和鼓舞。在这种意义上，以及在任何别的意义上，它的主要价值应被认为是在“历史的”一面。因此，在准备这份译稿时，我们尽量保持了此书的原始面貌，而绝对不敢也不肯对它进行任何的“现代化”。本书的体裁并没有构成一个尽可能“公理化”的理论体系，而是夹叙夹议，如泉涌出。这是和欧几里德或牛顿的书很不相同的。作者在原序中曾经提到这一点。据说作者原打算对本书进行重大而全面的修订和扩充，可惜因他过早逝世而未能竟其全功。由于这种原因，再加上时代的不同，书中许多方面的表达方式就和今天人们所熟悉的方式有些差异。现在为了读者的方便，举例说明如下：

1．本书的“目录”和正文中的章节标题有许多不一致的地方。这种情况在外国也很常见，即所谓“交叉参照”（cross reference），这可以用较小的篇幅传达较多的信息，避免简单的重复，其实是很有好处的。

2．书中所用的许多符号和名词，也和今天习见的不尽相同。例如用 q 代表电容，用 e 代表电量，用 E 代表电动势，用 R 代表电场强度，等等。特别是，由于当时矢量运算还没有定型，书中的矢量符号也和今天所用的符号完全不同。在名词方面，书中的“集电器”、“电动强度”、“比电阻”等等，对应于我们所说的“电容器”、“电场强度”、“电阻率”等等。如果只是名词上差几个字，倒也罢了。但是有时可以感觉出来，有些名词的差异反映了理解上的、概念上的时代差异。这种情况有待于科学史界和科学哲学界的有心人去认真发掘和细致分析，译者则深感无能为力。另外还应指出，书中有时用同一个名词代表不同的概念。例如当谈到三维媒质的导电时，书中所说的“电流”其实是指今天所说的“电流密度”；当谈到电极化时，书中所说的“电位移”有时对应于今天所说的“电感强度”（也叫“电位移”），而有时则是指的“电感强度在一个面积上的通量”。

3．表述方法方面的差异。例如，说导体的“电容就是当…时它的电荷”。这很容易被误解为“电容就是电荷”，其实二者连量纲都不相同。类似的说法（电动强度的定义等等），书中所在多有。所有这一切，算不得本书的什么“毛病”。只要稍加注意，读者应该是不会被引入迷途的。在个别的地方，为了语气上的明确或完整，我们在译文中增加了几个字，这些增加的字句都用弯括号（｛　　｝）括出，读者鉴之！

译者谨识

1991 年 4 月 24 日

于北京北郊之史情室

第一版　原序

某些物体在被摩擦以后显示吸引其他物体的能力，这一事实早为古人所知了。在现代，已经观察了各式各样的其他现象，并且已经发现他们是和这些吸引现象有关系的。这些现象被分类为电（Electric）现象，意为琥珀，因为这些现象最初是在“琥珀”（ηλεκτρον）中被描述了的。

另一些物体，特别是磁石和经过某种处理的铁块或钢块，也早就被认识到显示一些超距作用现象。经发现，这些现象以及与他们有关系的另一现象是和电现象不同的。这些现象被分类为磁（Mag－netic）现象，因为磁石（μαγνηs）是在塞萨利的玛格尼西亚（Magnesia）被发现的。

后来，人们发现这两类现象是互相有关系的，而迄今已知的两类现象中那各式各样现象之间的关系，就构成电磁学这门科学。

在本书中，我打算描述这些现象中的若干最重要的现象，指明他们可以怎样加以测量，并追索所测得的各量的数学联系。既经这样求得了电磁学的数学理论的数据并证明了这一理论可以怎样应用于现象的计算，我将尽可能清楚地努力揭明这一理论的数学形式和动力学这一基础科学的数学形式之间的关系，以便我们可以在某种程度上作好准备，来确定我们可以从中寻求电磁现象之说明或解释的那些动力学现象。

在描述现象方面，我将选择那些最清楚地例示理论基本概念的现象，而略去别的现象，或把他们保留到读者了解得更深入一些时再来描述。

从数学观点看来，任一现象的最重要方面就是一个可测量的量的方面。因此我将主要从他们的测量的角度来考虑电现象，描述测量的方法，并定义这些方法所依据的标准。

在把数学应用于电学量的计算时，我将首先努力从我们所能运用的数据导出最普遍的结论，其次则把结果应用到所能选取的最简单的事例上。只要能作到，我将避开虽然唤起了数学家们的技巧但却不曾扩大我们的科学知识的那些问题。

我们所必须研究的这门科学之不同分支之间的内部关系，是比迄今发展起来的任何其他科学之不同分支之间的内部关系更加繁多和更加复杂的。它的外部关系，一方面是同动力学的关系，另一方面是同热、光、化学作用以及物体构造的关系，似乎正表明着电科学作为诠释自然的臂助的那种特殊的重要性。

因此，在我看来，从各方面来研究电磁，现在已变得是在作为促进科学进步的手段方面具有头等重要性的了。

不同类别的现象的数学定律，已经在很大程度上令人满意地得出了。

不同类别的现象之间的联系，也已经被考察过了，而且各数学定律之严格准确性的可能性，也由关于他们彼此之间的关系的一种更广阔的知识所大大加强了。

最后，通过证明任何电磁现象都不和它依赖于纯动力学作用的那一假设相矛盾，在把电磁还原为一门动力学科学方面也已经得到了某种进展。

然而，迄今已经作到的一切，绝没有把电学研究这一领域囊括净尽。相反地，通过指出一些探索课题并给我们提供考察的手段，它倒是开拓了

这一领域。

几乎用不着夸耀磁学研究对航海的有益结果，以及关于罗盘之真正指向的知识的重要性，以及关于铁在船上的效应的知识的重要性。但是，通过磁学观测来力图使航海更加安全的那些人的劳动，同时也大大促进了纯科学的进步。

高斯作为德国磁学协会的会员，用他的强大智能来推动了磁学理论，推动了磁学观测方法。他不仅大大增进了我们关于吸引理论的知识，而且在所用的仪器、观测的方法和结果的计算方面改造了整个的磁科学，因此，他的论著《地磁论》可以被一切致力于任何自然力之测量的人们当作物理研究的典范。

电磁学在电报上的重要应用，也通过赋予精密电学测量以一种商业价值并通过向电学家们提供其规模大大超过任何普通实验室的一些仪器来对纯科学发生了反作用。对电学知识的这种要求，以及获得此种知识的那些实验机会，在刺激高级电学家的干劲和在实际工作人员中传播一定程度的精确知识方面已经得到了很大的后果，而那种精确知识是很可能有助于整个工程界的普遍科学进步的。

有一些著作用一种通俗的方式描述了电现象和磁现象。然而，对于那些面对面地遇到一些要测量的量而且在思想上并不满足于课堂实验的人们来说，这些著作却并不是他们所要求的。

也存在一大批在电科学方面具有巨大重要性的数学论文，但是他们全都禁锢在学术团体的浩如烟海的刊物中；他们并不形成一个连贯的体系；他们的优劣相差甚大；而且他们大多是除专业数学家以外别人都看不懂的。

因此我曾经想到，写一部论著将是有用的；那部书应该以一种方法论的方式把整个课题取作它的主要对象，而且也应该指明课题的每一部分可以怎样被置于通过精确测量来加以验证的那些方法的作用之下。

这部论著的一般面貌和那些大多是在德国出版的优秀电学著作的面貌很不相同，而且也可能显得对若干杰出的电学家和数学家的思考有殊多失敬之处。原因之一就在于，在我开始研究电以前，我决心不读任何有关这一课题的数学著作，直到我从头到尾读完了法拉第的《电的实验研究》（Experiment Researches in Electricity）时为止。我很知道，人们认为在法拉第对现象的想像方式和数学家们对现象的想像方式之间是有一种差别的，从而无论是法拉第还是数学家们都对彼此的语言很不满意。我也确信，这种分歧并不是由于任何一方是错的。在这一点上，我最初是被威廉·汤姆孙爵士所说服了的[①]；我在本课题上所学到的一切，有很大一部分都有赖于他的指教和帮助，并有赖于他所发表的那些论文。

当我继续研习法拉第的著作时，我觉察到他对现象的想像方法也是一种数学的方法，尽管并没有用习见的数学符号的形式表示出来。我也发现，这些方法可以表示成普通的数学形式，并从而可以和那些专业数学家的方法进行比较。

例如，在他的心目中，法拉第看到一些力线穿过全部的空间，而数学

[①] 我借此机会对 W.汤姆孙爵士和泰特教授表示感谢；在本书的付印过程中，他提出了许多宝贵的建议。

家们则只在空间中看到一些超距吸引着的力心；法拉第看到一种媒质，而他们则除距离以外毫无所见；法拉第向在媒质中进行着的真实作用中寻求现象的依据，而他们则满足于在对电媒质发生超距作用的一种本领中找到了这种依据。

当我已经把我所认为的法拉第的想法翻译成数学形式时，我发现一般说来这两种方法的结果是彼此相符的，从而同一些现象由两种方法得到了说明，同样的作用定律由两种方法推导了出来，只不过是，法拉第的方法类似于我们从整体开始来通过分析而达到部分的那些方法，而普通的数学方法则是建筑在从部分开始来通过综合而构成全体的那一原则上的。

我也发现，由数学家们发现了的若干最有成果的研究方法可以利用由法拉第得来的那些想法表示出来，比在它们的原始形式下表示得更好得多。

例如，关于势的整个理论，在本质上是属于我称之为法拉第方法的那种方法的——这里的势被看成满足某一偏微分方程的一个量。按照其他的方法，如果有任何必要考虑势的话，它就必须被看成将各带点质点除以它到一给定点的距离然后求和的结果。于是，拉普拉斯、泊松、格林和高斯的许多数学发现就在这部论著中有其适当的位置，而且，利用主要是从法拉第得来的一些观念，他们也可以有其适当的表示式。

电科学中的伟大进步，已经由超距作用理论的开拓者们作出（主要是在德国作出的）。W.韦伯的很有价值的电学测量结果，是由他按照这种理论来诠释了的，而由高斯所倡始并由韦伯、黎曼、J.诺意曼、C.诺意曼、洛仑茨等人所继续进行了的那种电磁思索，也是建筑在超距作用理论上的，但是那种作用却直接依赖于各质点的相对速度，或是直接依赖于某种东西（势或力）从一个质点到其他质点的逐渐传播。这些杰出人物在把数学应用于电现象方面所取得的伟大成就，很自然地加强了他们那些理论思索的地位，因此那些作为电学的学习者并把他们看成数学电学中最伟大的权威的人们，有可能和他们的数学方法一起吸收了他们的物理假说。

然而，那些物理假说却是和我所采用的看待事物的方式完全不一致的，而我看到的一个目的就是，在那些愿意研究电的人们中，有些人通过阅读这部论著将能看到还有另一种处理课题的方式，它同样适于用来解释现象，而且，尽管它在某些地方可能显得不那么确定，但是我想它却更加忠实地和我们的实际知识相对应，不论是在它所肯定的东西方面还是在它姑予存疑的东西方面都是如此。

再者，从哲学观点看来，比较两种方法也是极其重要的。这两种方法在解释主要的电磁现象方面都曾取得成功，而且都曾企图把光的传播解释成一种电磁现象，而且已经算出了光的速度，但是，与此同时，关于实际发生的是什么过程的基本观念，以及关于所涉及的量的多数次级观念，却在两种理论中是大不相同的。

因此我就充当了一个倡导者而不是一个裁判者，而且只例示了一种方法而没有力图对两种方法作出不偏不倚的描述。我毫不怀疑，我所说的德国方法也将找到它的支持者，而且也将被人用一种和它的巧妙性相适应的技巧来加以阐述。

我没有企图包罗万象地论述一切电现象、电学实验和电学仪器。想要阅读有关这些课题的一切已知东西的学生可以从里夫教授（A.dela Rive）

的《电学通论》（Jraitéd ' Electricité）中得到很大的裨益，也可以从若干德文论著中得到很大的裨益，例如维德曼（Wiedemann）的《动电学》（Galvanismus），瑞斯（Riess）的《摩擦电》（Reibungselectricität）和贝尔（Beer）的《静电学引论》（Einleitnng in die Electrostatik），等等。

我几乎把自己完全限制到了课题的数学处理方面，但是我愿意向学生建议，在他了解（如果可能就要在实验上了解）了什么是所要观测的现象以后，就应该仔细地阅读法拉第的《电的实验研究》。他将在那里找到某些最伟大的电学发现和电学研究的一种严格地符合当时情况的历史论述。这种历史论述是按照一种几乎不能再改进的顺序作出的，即使有关结果从一开始就为已知也是不能再改进的了，而且那种论述是用那样一个人的语言表达出来的，那个人把他的许多注意力献给了精确地描述科学操作及其结果的方法[①]。

学习任何课题，阅读有关该课题的原始论著总是大有好处的，因为科学总是当它处于新生状态时得到最完全的消化的。在法拉第的《研究》事例中，这是比较容易的，因为那些研究是分开发表的，从而可以依次阅读。如果我通过所写的任何东西可以帮助任一学生理解法拉第的思想模式和表达模式，我就将认为那是我的主要目的之一的得以完成——那目的就是把我自己在阅读法拉第的《研究》时所感到的同样的喜悦传播给别人。

现象的描述和每一课题的理论的初等部分，将在本论著所分四编中每一编的头几章中被看到。学生将在这些章中找到足以给他以有关整个科学的初步认识的材料。

每一编的较后各章讲述理论的较高深部分，讲述数字计算过程以及实验研究的仪器和方法。

电磁现象和辐射现象之间的关系、分子电流的理论、以及关于超距作用之本性的思索结果，是在下卷的最后四章中加以处理的。

杰姆斯·克勒克·麦克斯韦

1873 年 2 月 1 日

[①] Life and Letters of Faraday,vol.i,p.395。

第二版　原序

当我应约阅读《电磁通论》第二版的校样时，印刷工作已经进行到第九章了。该章的较大部分曾由作者进行了修订。

熟悉第一版的人们，通过和第二版的对比将看到麦克斯韦教授打算在内容和课题处理方面进行多么重大的改变，以及他的过早逝世给这一版造成了多大的损失。前面的九章在某些情况下完全重写了，增加了许多新材料，而原先的内容也进行了重新编排和简化。

从第九章开始，这一版几乎只是前一版的重印。我擅自作出的改动只是在可能有益于读者的地方插入一个数学推理的步骤，并在课题的一些部分增加少数几条小注；在那些部分，我自己的或正在听我讲课的学生们的经验证明进一步的阐明是必要的。那些增加的小注都用方括号括了起来。

我知道课题中有两个部分是教授曾经考虑很大地改动它们的处理的，那就是导线网路中电传导的数学理论和线圈中感应系数的确定。在这些课题方面，我没有发现自己能够根据教授的笔记对上一版形式下的著作进行任何实质性的增补，而只增加了一个数字表，印在下卷的〔原〕第 317—319 页上。这个表将被发现为在计算圆形线圈中的感应系数时甚为有用。

在一部具有如此独创性的著作中，而且它又包含着新结果的那么多细节，在第一版中是不可能不出现少数几处差错的。我相信，人们将发现这些差错在这一版中大多已经改正。我在表示这一希望时是有较大信心的，因为在阅读某些校样时我曾得到某些熟悉这一著作的朋友们的协助，其中我可以特别提到我的兄弟查尔斯·尼温（Chayles Niven）教授和剑桥三一学院的院侣 J.J.汤姆孙先生。

W.D.尼温

1881 年 10月1日于剑桥三一学院

第三版　原序

我应克拉伦当出版社（Clarendon Press）各委员之邀承担了阅读这一版的校样的任务；他们告诉我，使我很遗憾的是 W.D.尼温先生由于公务忙迫，不能再负责照顾本书新版的出版问题了。

麦克斯韦著作的读者们应该感谢尼温先生花费在这些著作上的孜孜不倦的劳动。因此我确信，他们也将像我自己一样遗憾，由于任何事物的干与而使这一版无法从他的关注中得到裨益。

自从本书被撰写以来，到现在已经过了将近二十年了；在此期间，电和磁的科学曾经得到进展，其进展之快几乎是在这些科学的历史中没有先例的。这在不小的程度上是由于本书在这些科学中引入的那些概念：书中的许多章节曾经起了重要研究的出发点的作用。当我开始校阅这一版时，我的意图就是用小注来对自从第一版问世以来所作出的进展加以某种说明，不仅由于我认为这将对电学的学生很有好处，而且也因为一切近来的研究都曾倾向于以最为惊人的方式证实麦克斯韦所提出的观点。然而我很快就发现，在科学中得到的进步已经是如此巨大，以致已经不可能实现这一企图而不至用为数太多的小注来把本书弄得面目全非了。因此我决定把这些小注排成一种稍许连贯的形式而把他们单独发表。这些小注现已整理就绪，可以付印了，因此我希望他们在几个月之内就将问世。这个注释卷就是我们所说的“补遗卷”。有关个别论点的少数几条可以简短处理的小注已插入前两卷中。在这一版中增入的所有材料都用弯括号 {} 括了起来。

在解释某些段落中的论述方面，我曾经努力增补了一些材料；在那些段落中，我曾经根据教学经验发现几乎所有的学生都会遇到颇大的困难；要对我知道学生们遇到困难的所有段落增加解释就得增加太多的卷次，那是我无法作到的。

我曾经试图验证麦克斯韦给出而未加证明的那些结果；我并没能作到在一切事例中都得到他所给出的结果，在这种事例中我都用小注指明了差别的所在。

我根据麦克斯韦的论文《电磁场的动力理论》重印了他确定一个线圈的自感的方法。前几版中对这一内容的省略曾使这一方法多次被归功于别的作者。

在准备这一版时，我曾经得剑桥圣约翰学院的院侣查尔斯·契瑞（Charles Chree）先生的尽可能大的协助。契瑞先生读了全部的校样，而且他的建议是无比宝贵的。我也曾经得到圣约翰学院的院侣拉莫尔（Larmor）先生、卡文迪什实验室的演示员韦耳伯佛斯（Wilberforce）先生和三一学院的院侣瓦耳克尔（G.T.Walker）先生的协助。

J.J.汤姆孙

1891 年 12 月 5 日

于卡文迪什实验室

绪论

量的测量

1.〕一个量的每一种表示式都包括两个因子或成分。其中一个成分就是作为参照标准来表示该量的某一已知同类量的名称。另一个成分就是形成所求之量对应该采取的标准量的倍数。标准量在技术上称为该量的单位，而倍数则称为该量的数值。

有多少不同的要测的量，就必须有多少不同的单位，但是在所有的动力科学中却可能用长度、时间和质量这三个基本单位来定义这许多单位。例如，面积和体积的单位就分别定义为一个正方形和一个立方体，他们的边长是一个长度单位。

然而，有时我们也见到同一类量的若干种建立在独立的考虑上的不同单位。例如加仑即十磅水的体积被用作容积的单位，正如立方英尺被用作这种单位一样。在某些情况下加仑可以是一种方便的单位，但它不是一个系统的单位，因为它对立方英尺而言的数值不是一个确切的整数。

2.〕在构成一个数学体系时，我们假设长度、时间和质量的基本单位已经给定，并根据这些单位而通过尽可能简单的定义来推出所有的导出单位。

我们所求得的公式必须是这样的：任何国籍的一个人，通过把式中的不同符号代成用他自己国家的单位测量的各量的数值，就将得到一个真确的结果。

因此，在一切的科学研究中，最重要的就是要应用属于一个适当定义的单位制的单位，并且要知道这些单位和基本单位的关系，以便我们可以能够立刻把我们的结果从一个单位制换算到另一个单位制。

此事可以通过确定用三个基本单位表示的每一个单位的量纲来最方便地作到。当一个给定的单位随三个单位中一个单位的 n 次方而变化，它就叫做相对于该单位有 n 个量纲。

例如，科学上的体积单位总是其边为单位长度的一个立方体。如果长度单位改变了，体积单位就将按长度的三次方而变化，于是体积单位就叫做相对于长度单位有三个量纲。

关于单位量纲的知识提供一种检验，它应该应用于由任何冗长的研究所得到的方程。这样一个方程中的每一项相对于三个基本单位中每一个单位而言的量纲，必须是相同的。如果不相同，方程就是无意义的，从而它必然含有某种差错，因为按照我们采用的任意单位制之不同，它的诠释将是不同的[①]。

三个基本单位

3.〕(1)长度在我国[指英国]，适用于科学目的的长度标准是一英尺，它是保存在财政部(Exchequer Chambers)中的标准码的三分之一。

在法国和采用了米制的其他各国，长度单位是米。在理论上，一米就

[①] 量纲的理论最初是由傅立叶提出的，见 Théorie de Chaleur,§160。

是从一极量到赤道的一条地球子午线的一千万分之一；但是在实用上，它是保存在巴黎的一个原器的长度，该原器是由鲍尔达制成的，它在溶冰的温度下对应于戴兰伯所测定的上述长度。米并不曾改变以适应于对地球的新的和更准确的测量结果，而子午线的弧长却用原始的米来进行了估量。

在天文学中，从太阳到地球的平均距离有时被取作长度的单位。

在目前的科学状况下，我们所愿意采取的最普适的长度单位就是某种特定的光在真空中的波长，那种光是由钠之类的高度分散的物质所发射的，它在该物质的光谱中有很确定的波长。这样一个标准将和地球尺寸的任何变化都无关，从而应该被那些指望自己的著作比地球更能持久的人们所采用。

在处理单位的量纲时，我们将把长度的单位叫做[L]。如果 ι 是一个长度的数值，它就被理解为是用具体的单位[L]来表示的，于是实际的长度就将是由 ι [L]来充分表示的。

4.〕(2)时间　在所有的文明国家中，时间的标准单位都是由地球绕轴自转的时间得出的。恒星日，或地球的真实自转周期，可以通过天文学家们的普通观察结果而很精确地定出；而且平均太阳日可以根据我们关于一年的长度的知识而由恒星日推出。

一切物理研究中所采用的时间单位是平均太阳时的一秒。

在天文学中，一年有时被用作时间的单位。一个更加普适的时间单位可以通过采用某种特定光的振动周期来求得，该种光的波长是长度的单位。

我们将把具体的时间单位称为[T]，而时间的数值则是 t。

5.〕(3)质量在我国，质量的标准单位是保存在财政部中的常衡磅。常常取作单位的格令定义为这种磅的 7000 分之一。

在米制中，质量单位是克。克在理论上是标准温度和标准压强下一立方厘米的蒸馏水的质量，而在实用上则是保存在巴黎的一个千克原器的一千分之一。

通过称量可以比较的物体质量的精确度，远大于迄今在长度的测量中所达到的精确度，因此，如果可能，一切的质量都应该和标准单位直接比较，而不是从关于水的实验来推出。

在描述天文学中，太阳的质量或地球的质量有时被取作单位，但是在天文学的动力学理论中，质量的单位却是结合万有引力的事实而从时间和长度的单位导出的。天文学的质量单位是那样一个质量，它吸引放在单位距离处的另一物质而使之得到单位加速度。

在制订一个普适的单位制时，我们可以按这种办法从已经定义的长度单位和时间单位来导出质量的单位，而在目前的科学状况下，我们可以在一种粗略的近似下作到这一点。或者，如果我们指望[①]很快就能确定一种标准物质的单一分子的质量，我们也可以等待这种确定的结果而暂不规定一个普适的质量单位。

[①] 参阅 Prof.J.Loschmidt，“ Zur Gr(sse der Luftmolecule，”Academy of Vienna,Oct.12，1865；G.J.Stoney.“ The Internal Motion of Gases，”phil.Mag.Aug.，1868；以及 Sir W.Thomson，“ The Size of Atoms,”Nature,March31，1870.{并参阅 Sir W.Thomson，“ The Size of Atoms,”Nature.V.28,pp.203,250，274。}

在处理其他单位的量纲时，我们将用符号[M]来表示具体的质量单位。质量单位将被看成三个基本单位之一。当像在法国制中那样把一种特定物质即水取作密度的标准时，质量的单位就不再是独立的而是按体积单位即按$[L^3]$而变的了。

如果像在天文单位制中那样质量的单位是相对于引力本领而定义的，则[M]的量纲是$[L^3T^{-2}]$。

因为，由一个质量 m 在一个距离 r 处引起的加速度由牛顿定律给出为$\frac{m}{r^2}$。假设这种外力在一段小时间t中作用在一个起初为静止的物体上并使它移动一个距离 s，则由伽利略公式可得

$$s=\frac{1}{2}ft^2=\frac{1}{2}\frac{m}{r^2}t^2\ ;$$

由此即得$m=2\frac{r^2s}{t^2}$。既然r和s都是距离而t是时间，这个方程就不可能成立，除非 m 的量纲是$[L^3T^2]$。针对任何一个在某些项中而不是在一切项中含有一个物体质量的天文学方程，也可以证明相同的结果①。

导出单位

6.〕速度的单位就是在单位时间内走过单位距离的那个速度。它的量纲是$[LT^{-1}]$。

如果我们采用从光的振动导出的长度和时间的单位，则速度的单位就是光速。

加速度的单位就是速度在单位时间内增加 1 的那个加速度。它的量纲是$[LT^{-2}]$。

密度的单位是在单位体积内含有单位质量的一种物质的密度。它的量纲是$[ML^{-3}]$。

动量的单位就是以单位速度运动着的单位质量的动量。它的量纲是$[MLT^{-1}]$。

力的单位就是在单位时间内产生单位动量的力。它的量纲是$[MLT^{-2}]$。

这是力的绝对单位，而且这一定义是暗含在动力学的每一个方程中的。不过，在载有这些方程的许多书中，却采用了另一种力的单位，那就是质量的国家单位的重量。于是，为了满足方程，质量的国家单位本身就被放弃而改用了一个动力学单位，该单位等于国家单位除以当地的重力强度的值。按照这种方法，力的单位和质量的单位就都被弄得依赖于随地点而不同的重力强度的值了，因此，涉及这些量的那些说法就是不完全的，如果不知道各该说法发现为成立的那些地点的引力强度的话。

---

① 如果取厘米和秒作为单位，则按照白利重作的卡文迪什实验，质量的天文单位约是 1.537× 107 克，或 15.37 吨。白利按照他的所有实验的平均结果，把地球的平均密度取作了 5.6604，而联系到所用的地球尺寸和地面上的引力强度，就作为实验的直接结果而得到了上述的值。{科纽重新计算了白利的结果，得到的地球平均密度是 5.55，从而质量的天文单位是 1.50× 107 克；而科纽本人的实验则给出地球的平均密度 5.50，质量的天文单位为 1.49× 107 克。}

对于一切科学目的来说，这种量度力的方法的被废除主要是由于高斯引用了一种在重力强度不同的各国进行磁力观测的普遍制度。现在所有这样的力都是按照一种从我们的定义推得的严格动力学的方法来量度的，从而其数值不论在什么国家作实验都是相同的。

功的单位就是单位力通过沿其本身方向测量的单位距离时所作的功。它的量纲是$[ML^2T^{-2}]$。

作为体系作功本领的体系能量，通过体系耗尽全部能量所能作的功来量度。

其他量的定义，以及他们所涉及的单位，将在我们用到他们时再行给出。

在把用一种单位测定的物理量的值换算成用种类相同的任何其他单位来表示时，我们只须记得一点，即量的每一个表示式都包含两个因子，即单位和表示应取多少个单位的那个数字。由此可知，数字部分是反比于单位的大小而变化的，也就是反比于导出单位之量纲所指示的各基本单位之不同幂次而变化的。物理的连续性和不连续性

7.〕一个量被说成是连续变化的，如果当从一个值变到另一个值时它将采取一切中间值。

我们可以从一个质点在时间和空间中的连续存在的考虑得到关于连续性的观念。这样一个质点不能从一个位置过渡到另一个位置而并不在空间中描绘一条连续的线，从而它的位置的座标必然是时间的连续函数。

在有关水力学的论著中给出的所谓“连续性方程”中，所表示的事实就是：物质不能在一个体积元中出现或消失而并不通过体积元的各边进入或逸出。

一个量被说成是它的各变量的连续函数，如果当各变量连续变化时该量本身也连续地进行变化。

例如，如果 u 是 x 的一个函数，而且当 x 从 x。连续地变到 x_1 时 u 从 u_0 连续地变到 u_1，但是当 x 从 x_1 变到 x_2 时，u 却从 u_1' 变到 u_2，而 u_1' 不等于 u_1，这时 u 就被说成在 $x=x_1$ 值处对它对 x 而言的变化中有一种不连续性，因为当 x 连续地通过 x_1 时 u 却突然地从 u_1 变到 u_1'。

如果我们把 u 在值 $x=x_1$ 处对 x 而言的微分系数看成令 x_2 和 x_0 都无限趋近于 x_1 时的分数

$$\frac{u_2-u_0}{x_2-x_0}$$

的极限,那么,如果 x_0 和 x_2 永远位于 x_1 的两侧，则分子的最终值将是 $u_1'-u_1$，而分母的最终值将是零。如果 u 是一个物理上连续的量，则不连续性只能针对变量 x 的个别值而存在。在这种情况下我们必须承认，当 $x=x_1$ 时 u 有一个无限大的微分系数。如果 u 并不是物理上连续的，则它是完全不可微的。

在物理问题中，有可能消除不连续性这一概念而不致很显著地改变事例的条件。如果 x_0 只比 x_1 小一点点而 x_2 只比 x 大一点点，则 u_0 将很近似地等于 u_1 而 u_2 将很近似地等于 u_1'。现在我们就可以假设 u 在界限 x_0 和 x_2 之间以一种任意的然而却是连续的方式从 u_0 变到 u_2。在许多物理问题

中，我们可以从这样的一种假设开始，然后再研究当令 x_0 和 x_2 的值都趋近于 x_1 的值并终于达到该值时的结果如何。如果结果不依赖于我们所设的 u 在二界限间的任意变化方式，则可以假设当 u 为不连续时结果也是真确的。

多变数函数的不连续性

8.〕如果我们假设除 x 以外所有变数的值都是恒定的，则函数的不连续性可以相对于 x 的特殊值而出现，而且这些特殊值是通过一个方程来和其他各变数的值相联系的；我们可以把这个方程写成

$$\phi=\phi(x, y, z, \cdots)=0.$$

不连续性将在 $\phi=0$ 时出现。当 ϕ 为正时，函数将具有 $F_2(x, y, z, \cdots)$ 的形式。当 ϕ 为负对，函数将具有 $F_1(x, y, z, \cdots)$ 的形式。形式 F_1 和 F_2 之间不一定有什么必要的关系。

为了用一种数学形式来表示不连续性，设其中一个变数例如 x 被表示成 ϕ 和其他变数的函数，并设 F_1 和 F_2 被表示成 x、y、z 等等的函数。现在我们可以用任何一个公式来表示函数的普遍形式，只要那个公式当 ϕ 为正时明显地等于 F_2 而当 ϕ 为负时明显地等于 F_1。这样一个公式如下：

$$F=\frac{F_1+e^{n\phi}F_2}{1+e^{n+\phi}}.$$

只要 n 是一个有限的量，不论它多么大，F 都将是一个连续函数。但是如果我们令 n 变为无限大，则当 ϕ 为正时 F 将等于 F_2 而当 ϕ 为负时 F 将等于 F_1。

连续函数的导数的不连续性

一个连续函数的一阶导数可以是不连续的。设出现导数之不连续的各变数之值由方程

$$\phi=\phi(x, y, z\cdots)=0$$

来联系，并设 F_1 和 F_2 用 ϕ 和 n—1 个其他变数例如(x，z，…)表示出来。

于是，当 ϕ 为负时，应取 F_1，而当 ϕ 为正时，应取 F_2；而且，既然 F 本身是连续的，当 ϕ 为零时就有 $F_1=F_2$。

因此，当 ϕ 为零时，导数 $\frac{dF_1}{d\phi}$ 和 $\frac{dF_2}{d\phi}$ 可能不相同，但是对其他变数的导数，例如 $\frac{dF_2}{dy}$ 和 $\frac{dF_2}{d\phi}$ 却必然相同。因此，不连续性只限制在对 ϕ 的导数上，而所有其他的导数都是连续的。

周期函数和多重函数

9.〕如果 u 是 x 的一个函数，而且它的值在 x、x＋a、x＋na 以及一

切相差为 a 的 x 值处都相同，u 就叫做 x 的一个周期函数，而 a 就叫做它的周期。

如果 x 被看成 u 的一个函数，则对于一个给定的 u 值，必有彼此相差为 a 的倍数的一系列无限多个 a 值。在此情况下，x 就叫做 u 的一个多重函数，而 a 就叫做它的循环常数。

对应于一个给定的u值，微分系数$\frac{dx}{du}$只有一系列有限个值。

物理量和空间方向的关系

10.〕在区分物理量的种类时，很重要的就是要知道各物理量和我们通常用来定义物体之位置的那些座标轴的方向是如何联系的。笛卡尔在几何学中引用座标轴，是数学进步中最大的步伐之一，因为这就把几何学的方法简化成了关于数字量的计算。一个点的位置被弄成了依赖于永远沿确定方向画出的三条线的长度，而两点之间的连线也类似地被看成了三条线段的合成量。

但是，对于物理推理的许多目的来说，不同于计算，却很有必要避免明白地引入笛卡尔座标，并把思想一举而固定在一个空间点上而不是它的三个座标上，固定在一个力的大小和方向上而不是它的三个分量上。这种考虑几何量和物理量的模式是比另一种模式更加原始和更加自然的，尽管和它相联系着的那些概念直到哈密顿通过发明他的四元数算法[①]而在处理空间方面迈出又一大步时才算得到了充分的发展。

因为笛卡尔方法仍是学习科学的人们所最熟悉的方法，也因为这种方法对计算的目的来说确实是最有用的，所以我们将在笛卡尔的形式下表述我们所有的结果。然而我却确信，关于四元数的概念而不是它的运算及方法的引入，在我们的课题之一切部分的研究中都将是大有用处的；尤其是在电动力学中，我们在那里将必须对付若干物理量，而他们彼此之间的关系可以用哈密顿的少数几个表示式来表示，比用普通的方程要简单得多。

11.〕哈密顿方法的最重要特色之一，就在于把各个量区分为标量和矢量。

一个标量可以通过单独一个数字的指定来完全地定义。它的数值并不以任何方式依赖于我们所取的各座标轴的方向。一个矢量或有向量要求用三个数字的指定来定义它，而这些数字可以最简单地理解为参照了各座标轴的方向。标量不涉及方向。一个几何图形的体积、一个物质体的质量和能量、流体中一点处的流体静力学压强、以及空间中一点处的势，就是一些标量的例子。

一个矢量既有量值又有方向，而且当它的方向反转时它的正负号也反转。一个点的位移用从初位置到末位置一段直线来代表。这就可以看成典型的矢量，而事实上矢量一词正是由此得来的。

一个物体的速度、它的动量、作用在它上的力、一个电流、一个铁粒子的磁化强度，就是矢量的一些例子。

[①] ｛关于四元数的初等论述，读者可以参阅 Kelland and Tait 的“Introduction to Quater－nians”，Tait 的“Elementary Treatise on Quaternians”，以及 Hamilton 的“Elements of Quater－nians”。｝

还有另一种物理量，他们是和空间中的方向有关的，但他们不是矢量。固体中的胁强和胁变就是这种量的例子，在弹性理论和双折射理论中考虑到的物体的某些件质也是这种量的例子。这一类量要用九个数字的指定来定义。他们在四元数的语言中是用一个矢量的线性矢量方程来表示的。

一个矢量和另一个同类矢量的相加，按照静力学中所给出的力的合成法则来进行。事实上，泊松所给出的关于“力的平行四边形”的证明是适用于任何那种方向的反转就相当于变号的量的。

当我们想要用单独一个符号来代表一个矢量并使人们注意到它是一个矢量从而我们必须既考虑它的量值又考虑它的方向这一事实时，我们将用一个德文大楷字母来代表它，例如■，■，等等。

在四元数算法中，一个点在空间中的位置用一个矢量来定义，该矢量从一个叫做原点的定点画到该点。如果我们必须考虑其值依赖于点的位置的任一物理量，那个量就被看成从原点画起的那个矢量的一个函数。函数本身可以是标量也可以是矢量。一个物体的密度、它的温度、它的流体静力学压强、一个点上的势，就是标量函数的例子。一个点上的合力、流体中一点上的速度、流体的一个体积元的转动速度以及引起转动的力偶矩，就是矢量函数的例子。

12.〕物理矢量可以分成两类。一类矢量是参照一条直线来定义的，而另一类矢量是参照一个面积来定义的。

例如，一种吸引力在任一方向上的合力通过求得它在一个物体沿该方向移动一小段距时对物体所作的功并除以该段距离来加以量度。在这里，吸引力就是参照一条直线来定义的。

另一方面，固体中任一点上沿任一方向的热通量可以通过求得流过垂直于该方向的一个小面积的热量并除以该面积和时间来加以量度。在这里，通量就是参照一个面积来定义的。

也有某些情况，一个量既可以参照一个面积又可以参照一条直线来加以量度。

例如，在处理弹性固体的位移时，我们可以把自己的注意力集中到一个质点的原始位置和实际位置上。在这种情况下，质点的位移就是由从第一个位置画到第二个位置的直线来量度的。或者，我们也可以考虑固定在空间中的一个小面积，并确定在位移过程中有多大数量的固体物质通过了那个面积。

同样，一种流体的速度可以参照着各个质点的实际速度来加以研究，也可以参照着通过任一固定面积的流体数量来加以研究。

但是，在这些情况下，我们要求分别地既知道位移或速度又知道物体的密度，以便应用第一种方法，而一旦我们企图形成一种分子理论，我就必须应用第二种方法了。

在电的流动事例中，我们根本不知道有关导体中的电密度或电速度的任何东西，我们只知道按照流体理论将对应于密度和速度之乘积的那个值。因此，在所有的这种事例中，我们必须应用测量通过面积之通量的那种更普遍的方法。

在电科学中，电动强度和磁强度属于第一类，他们是参照直线来定义的。当我们想要指明这一事实时，我们可以把他们叫做“强度”。

另一方面，电感和磁感，以及电流，却属于第二类，他们是参照面积

来定义的。当我们想要指明这一事实时，我们将称他们为“ 通量 ”。

这些强度中的每一种强度，都可以被认为可以产生或倾向于产生它的对应通量。例如，电动强度在导体中产生电流，而在电介质中则倾向于产生电流。它在电介质中产生电感，而且或许在导体中也产生电感。在同样的意义上，磁强度产生磁感。

13.〕在某些事例中，通量简单地正比于强度并和强度同向，但是在另一些事例中我们只能断定通量的方向和量值是强度的方向和量值的函数。

通量的分量是强度分量的线性函数的事例将在关于传导方程的一章的第 297 节中加以讨论。一般共有九个系数，确定着强度和通量之间的关系。在某些事例中，我们有理由相信其中六个系数形成三对相等的量。在这样的事例中，强度的方向直线和通量的垂直平面之间的关系属于椭球体的半直径和它的共轭径平面之间的关系那一类。在四元数的语言中，一个矢量被说成是另一矢量的线性矢量函数，而当存在三对相等的系数时，该函数就被说成是自轭的。

在铁中的磁感事例中，通量（铁的磁化）不是磁强度的线性函数。然而，在任何情况下，强度和通量在其方向上的分量的乘积都给出一个很有科学重要性的结果，而且这个乘积永远是一个标量。

14.〕有两种适用于这两类矢量或向量的常常出现的数学运算。

在强度的事例中，我们必须沿着一条线计算线元和强度在线元方向上的分量的乘积的积分。这种运算的结果叫做强度的线积分。它代表沿该线对物体作的功。在某些事例中，线积分不依赖于线的形状而只依赖于它的两个端点的位置，这种线积分叫做势。

在通量的事例中，我们必须在一个曲面上计算通过每一面积元的通量的积分。这种运算的结果叫做通量的面积分。它代表通过曲面的量。

有些曲面上没有通量。如果两个这样的曲面相交，则它们的交线是一条通量线。在通量和力同向的那些事例中，这样一种线常常被称为力线。然而，更正确的办法是在静电学和磁学中把他们叫做感应线，而在动电学中把他们叫做流线。

15.〕还有另一种不同种类的有向量之间的区别；这种区别虽然从物理观点看来是很重要的，但是对数学方法的目的来说却是不必考虑的。这就是纵向性质和旋转性质之间的区别。

一个量的方向和量值可以依赖于完全沿着某一条线而出现的某种作用或效应，或者，它可以依赖于其本性为以该线为轴的转动的某种东西。不论有向量是纵向的还是旋转的，他们的合成定律都是相同的，因此在这两类量的数学处理方面并没什么不同，但是却可能有一些物理情况指示着我们必须把一种特定的现象归入哪一类中。例如，电解就是某些物质沿着一条线向一个方向传递，而另一些物质则向相反的方向传递。这显然是一种纵向现象，而且不存在关于绕着力的方向的任何转动效应的证据。因此我们就推测，引起或伴随着电解现象的电流，是一种纵向的而不是旋转的现象。

另一方面，一个磁体的南极和北极，并不像在电解过程中出现在对面位置上的氧气和氢气那样地彼此不同，因此我们并没有磁性是一种纵向现象的证据，而磁性使平面偏振光的偏振面发生转动的效应却清楚地表明磁

性是一种旋转现象[①]。

关于线积分

16.〕一个矢量沿一条线的分量的积分，这种运算在物理科学中是普遍重要的，从而应该清楚地加以理解。

设 x、y、z 是一条线上一点 P 的座标，而从某点 A 量起的线的长度是 s。这些座标将是单一变数 s 的函数。

设 R 是一个矢量在 P 点上的数值，并设 P 点处曲线的切线和 R 的方向成一个角度∈，则 Rcos∈就是 R 沿曲线的分量，而积分

$$L=\int_0^s R\cos\in ds$$

就叫做 R 沿曲线 s 的线积分。

我们可以把这一表示式写成

$$L=\int_0^s\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

式中 X、Y、Z 分别是 R 平行于 x、y、z 的分量。

一般说来，这个量对于在 A、P 之间画出的不同曲线来说是不

同的。然而，当在某一区域内量

$$Xdx+Ydy+Zdz=-D\Psi$$

时，也就是说当它在在该区域中是一个全微分时，L 的值就变为

$$L=\Psi_A-\Psi_P,$$

而且对 A 和 P 之间的路径的任何两种形式来说都是相同的，如果一种形式可以通过连续的运动来变成另一种形式而不必越出这一区域的话。

关于势

量Ψ是点的位置的一个标量函数，从而是不依赖于各参照方向的。它叫做势函数，而分量为 X、Y、Z 的矢量被说成具有一个势Ψ，如果

$$X=-\left(\frac{d\psi}{dx}\right),\quad Y=-\left(\frac{d\psi}{dy}\right),\quad Z=\left(\frac{d\psi}{dz}\right)$$

当存在一个势时，势为常数的那种曲面就叫做等势面。在这种面上的任一点上，R 的方向和该面的法线相重合，而如果 n 是 P 点上的一条法线，则$R=-\frac{d\psi}{dn}$。

把一个矢量的各分量看成某一座标函数对这些座标的一阶导

数的方法，是由拉普拉斯在他关于引力理论的论著中发明的[①]。势这个

[①] {一定不要以为这就意味着，在假设电现象和磁现象是由一种媒质的运动所引起的任何一种理论中，电流就必然起源于平移运动而磁力必然起源于旋转运动。例如，也有一些旋转效应是和电流联系着的，例如，一个磁极会绕着它转动，而且也很可能的是，如果静电现象在其中有其根源的那种媒质在它的内部各处有一个分量为 f、g、h 的电位移并且是以速度 u、v、w 而转动的，它就将是一个磁力的根源，其分量分别是 4π(wg－vh)、4π(uh－wf)、4π(vf－ug)；于是，在这一事例中，一种平移运动就能产生一个磁场。PhilMag.July，1889.}

名称是首先由格林赋予这个函数的[2]，他把这个函数当成了处理电学问题的基础。格林的著作直到1846年都没有受到数学家们的重视，而在1846年以前，大多数它的重要定理都已经被高斯、查斯耳斯、斯图尔姆和汤姆孙[3]所重新发现了。在引力理论中，势和此处所用的函数异号，从而任意方向上的合力就是由势函数沿该方向的增加率来量度的。在电和磁的研究中，势被定义得使任意方向上的合力由势在该方向上的减少率来量度。这种使用表示式的办法使它可以和势能的正负号相适应，因为当物体沿着作用在它上面的力的方向运动时势能总是减小的。

17.〕势和由它如此导出的矢量之间的关系的几何学本性，通过哈密顿发现算符形式而得到了很大的澄清；利用这种算符，可以由势导出矢量。

正如我们已经看到的那样，矢量沿任何方向的分量，就是势对沿该方向画出的一个座标的一阶导数并变号。

现在，如果 i、j、k 是互相垂直的三个单位矢量，而 X、Y、Z 是矢量$\Im$平行于这些矢量的分量，就有

$$\Im = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z ;\quad (1)$$

而按照我们以上的说法，如果Ψ是势，就有

$$\Im = -\left(i\frac{d\psi}{dx} + j\frac{d\psi}{dy} + k\frac{d\psi}{dz} \right). \quad (2)$$

现在，如果我们用∇代表下列算符：

$$i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}, \qquad (3)$$

就有

$$\Im = -\nabla\psi . \quad (4)$$

算符可以诠释为指示我们，沿着三个正交的方向测量Ψ的增加率，然后把这样求得的各量看成矢量，并把他们合成起来成为一个量。这就是表示式(3)指示我们所要作的。但是我们也可以认为它是指示我们首先找出Ψ在哪个方向上增加得最快，然后沿着那个方向画出一个矢量来表示这一增加率。

拉梅先生在他的《论反函数》(Traité des Fonction Inverses)一书中用了微分参数一词来代表这个最大增加率的量值，但是不论这一名词还是拉梅应用它的方式都不曾指示这个量既有大小又有方向。在少数情况下我将必须把这一关系说成纯几何的关系，那时我将把矢量$\Im$叫做标量函数Ψ的空间改变量，用这种说法来既指示Ψ的最快增加率的大小，又指示其最快增加的方向。

18.〕然而，在某些事例中， Xdx＋Ydy＋Zdz 是一个全微分的条件

$$\frac{dZ}{dY} - \frac{dY}{dz} = 0，\ \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dz} = 0，\ 以及\ \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy} = 0$$

在某一个空间域中到处都能满足，但是在两条线上从 A 到 P 的线积分却可

---

[1] Méc.Céleste,liv.iii。

[2] Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electrioitv and Magnetism，Nottingham，1828.重印于 Crelle’s Journal，并重印于 Mr.Ferrers’edition of Green’s Works.

[3] Thomson and Tait，Natural Philosophy,§483.

以不同，而其中每一条线又完全位于该域之内。如果域呈环形，而从 A 到 P 的两条线通过了环的对面段，那就会是这种情况。在这种情况下，一条路径并不能通过不越出域外的连续运动而转变成另一条路径。

在这儿，我们被引导到了属于“位置几何学”的考虑；这一课题的重要性虽已由莱布尼兹指出并由高斯例示，但是该课题还几乎没被研究过。这一课题的最完全的处理已由 J.B.李斯廷给出[①]。

设空间中有 p 个点，并设画了 ι 条任意形状的连接着这些点的线，使得没有任何两条线相交，而且没有一个点被孤立地留下来。我们将由一些线这样构成的图形叫做一个“图式”（Diagram）。在这些线中，p—1 条线已经足以把 p 个点连成一个连接体系了。每一条新线都完成一条圈线或闭合路径，或者，我们将把它叫作回路。因此，图式中的回路数目就是 $k=\iota-p+1$。

沿着图式中的那些线画出的任何闭合路径，都是由这些独立的回路构成的，其中每一回路都可以被走过任何多次，而且是沿任何方向。

回路的存在叫做“环流性”，而图式中的回路的数目则叫做“接圆数”。

曲面上和空间域中的环流性

曲面或完全或有界。完全曲面或无限或闭合。有界曲面是以一个或多个闭合曲线为边界的，而闭合曲线在极限情况下可以变成有限的双线或变成点。

一个有限的空间域是以一个或多个闭合曲面为边界的。其中一个是外表面，其余各曲面都被表面所包围而且互不相交，他们被称为内表面。

如果域只有一个边界面，我们就可以假设那个表面向内收缩而不打破其连续性或和自己相交。如果域是一个简单连续域，例如一个球，这一过程就可以继续进行直到域收缩成一个点。但是，如果域是多连通的，则收缩的结果将是一个曲线图式，而图式的接环数也就是域的接环数。域外的空间和域本身具有相同的接环数。因此，如果域是既由外表面又由内表面所限定的，则它的接环数就是所有各表面的接环数之和。

当一个域的本身中包括了其他的域时，它就叫做一个“回绕域”（Periphractic region）。

一个域的内表面的数目，叫做它的回绕数。一个闭合曲面也是回绕的，它的回绕数为 1。

一个闭合曲面的接环数是它所包含的各域中的任一域的接环数的二倍。为了求得一个有界曲面的接环数，设想一切边界线都向内收缩而不打破其连续性，直到收缩得相遇为止。这时，在非循环曲面的事例中曲面收缩成一个点，而在循环曲面的事例中则它将变成一个曲线图式。

图式的接环数就是曲面的接环数。

19.〕定理一　如果在一个非循环域中到处都有

$$Xdx+Ydy+Zdz=-D\Psi,$$

则沿着域内任一路径所取的从点 A 到点 P 的线积分之值都相同

[①] Der Census Raü mlicher Complere，G(tt,Abh.，Bd.x.S.97(1861).｛关于对物理目的来说是必要的那些多连通空间的性质的一种初等论述，见 Lamb，TreatiseontheMotionofFluids，p.47｝

我们首先将证明，沿着域内任一闭合路径所求的线积分为零。设各等势面已被画出。他们全都不是闭合曲面就是完全被域的表面所限定的，因此，如果域内的一条闭合曲线在它的行程的任何部分和任何等势面相交，则它必将在行程的某一其他部分沿相反的方向和同一等势面相交，而既然线积分的对应部分相等而异号，总的值就是零。

于是，如果 AQP 和 AQ＇P 是从 A 到 P 的两条路径，则沿 AQ＇P 的线积分就是沿 AQP 的和沿闭合路径 AQ＇PQA 的线积分之和。但是沿闭合路径的线积分是零，从而沿两条路径的线积分就是相等的。

20.〕定理二　如果在一个循环域中方程

$$Xdx+Ydy+Zdz=-D\Psi$$

到处得到满足,则沿着在域内画出一条曲线从 A 到 P 的线积分一般并不是确定的，除非 A 和 P 之间的交通渠道已经指定。

设 N 是域的接环数，则我们可以用一些称之为屏障的曲面将域分成 N 部分，以封住 N 条交通渠道并把域简化到非循环的情况而并不破坏它的连续性。

根据上述定理，沿着一条并不和任何这些屏障相交的曲线计算的从 A 到任一点 P 的线积分将有定值。

现在设 A 和 P 被取得彼此无限靠近但却位于一个屏障的两侧，并设 K 是从 A 到 P 的线积分。

设 A＇和 P＇是位于同一屏障两侧的彼此无限靠近的另外两个点，并设 K＇是从 A＇到 P＇的线积分。于是就有 K＇＝K。因此，如果我们画出接近重合的然而却位于屏障两侧的 AA＇和 PP＇，则沿着这两条线的线积分将相等[1]。设每一线积分等于 L，则沿 A＇P＇的线积分 K＇等于沿 A＇A＋AP＋PP＇的线积分，即等于－L＋K＋L＝K＝沿 AP 的线积分。

因此，沿着一条按给定方向通过体系的一个屏障的闭合曲线的线积分是一个常量 K。这个量叫做对应于所给回路的循环常量。

设在域内画一条任意的闭合曲线，设它沿着正方向通过 p 次第一回路的屏障，并沿着负方向通过 p＇次。设 $p-p'=n_1$。于是沿这条闭合曲线的线积分就将是 n_1p_1。

同理，任意闭合曲线上的线积分将是

$$n_1K_1+n_2K_2+\cdots+n_sK_s,$$

式中 n_s 代表曲线沿正方向通过回路 S 的屏障的次数减去它沿负方向通过该屏障的次数而得的余额。

设有两条曲线。若其中一条可以通过连续的运动且在任何时候都不通过势的存在条件不成立的任何空间部分而转换成另一条，则这两曲线叫做“可调和的”曲线。不能实现这样的转换的曲线叫做“不可调和的”曲线[2]。

$Xdx+Ydy+Zdz$ 在某一域的所有各点上都是某一函数Ψ的全微分的条件，在若干物理研究中是出现的。在那些研究中，有向量和势具有各种不同的物理诠释。

---

[1] {因为 X、Y、Z 是连续的。}

[2] 见 Sir W. Thomson,“ On Vortex Motion”,Trans.R.S.Edin.,1867－8

在纯运动学中，我们可以假设 X、Y、Z 是一个连续物体中某一点的位移分量，该点的原始座标为 x、y、z。于是，上述条件就表明这些位移构成一种非转动的胁变[3]。

如果 X、Y、Z 代表一种流体在点 x、y、z 上的速度分量，则上述条件表明流体的运动是非转动性的。

如果 X、Y、Z 代表点 x、y、z 上的分力，则上述条件表示：当一个质点从一点运动到另一点时，力对该质点作的功是这两点上的势差，而且这一势差的值对两点之间一切可调和的路径来说都是相同的。

关于面积分

21.〕设 dS 是一个曲面上的面积元，而 e 是向曲面的正方向画出的一条法线和矢量R之间的夹角，则$\iint R\cos\in dS$

叫做 R 在曲面 S 上的面积分[1]。

定理三　通量指向一个闭合曲面内部的面积分，可以表示成在曲面内部所求敛度的体积分。（见第 25 节。）设 X、Y、Z 是 R 的分量，并设 l、m、n 是 S 的外向法线的方向余弦，则 R 在 S 上的面积分是

$$\iint R\cos\in dS=\iint XldS+\iint YmdS+\iint ZndS, \quad (1)$$

式中 X、Y、Z 的值是在曲面上一个点上的值，而积分则遍及整个曲面。

如果曲面是闭合的，则当 y 和 z 为给定时座标 x 必有偶数个值，因为平行于 x 的一条线必将以相等的次数进入和离开所包围的空间，如果它和曲面相交的话。

在每一个进入点上，有

$$ldS=-dydz,$$

而在每一个离开点上，则有

$$ldS=dydz$$

设有一点从 $x=-\infty$运动到 $x=+\infty$，第一次当 $x=x_1$ 时进入此空间，而当 $x=x_2$ 时离开此空间，余类推。再设 x 在这些点上的值是 X_1、X_2 等等，则有

$$\iint XldS=-\iint\{(X_1-X_2)+(X_3-X_4)+\cdots+(X_{2n-1}-X_{2n})\}dydz. (2)$$

如果 X 是一个连续的量，而且在 x_1 和 x_2 之间没有无限大的值，则有

$$X_2-X_1=\int_{x_1}^{x_2}\frac{dX}{dx}dx; \quad (3)$$

式中的积分从第一个交点算到第二个交点，也就是沿着位于闭合曲面内部的那一段 x 计算。把所有位于闭合曲面内部的线段都考虑在内，我们就得到

$$\iint XldS=\iiint\frac{dX}{dx}dxdydz, \quad (4)$$

这里的双重积分限制在闭合曲面上，但是三重积分则遍及整个被包围的空间。因此，如果 X、Y、Z 在一个闭合曲面 S 的内部是连续的和有限的，

---

[3] 见 Thomson and Tait，“Natural Philosophy”,§190(i)

[1] {在以下的研究中，法线的正方向指向曲面的外面。}

则 R 在该曲面上的总的面积分将是

$$\iint R\cos\in dS=\iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)dxdydz，(5)$$

式中的三重积分遍及 S 内部的整个空间。

其次让我们假设 X、Y、Z 在闭合曲面内部是连续的，然而在某一个曲面 F(x,y,z)＝0 上，X、Y、Z 的值却从反面的 X、Y、Z 突然变成正面的 X＇、Y＇、Z＇。

如果这种不连续性出现在例如 x_1 和 x_2 之间，则 X_2-X_1 的值将是

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dX}{dx}dx+(X'-X)，(6)$$

此处在积分号下的表示式中只计及 X 的导数的有限值。

因此，在这一事例中，R 在闭合曲面上的总面积分将是

$$\int\int R\cos\in dS=\iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)dxdydz+\iint(X'-X)dydz$$

$$+\iint(Y'-Y)dzdx+\iint(Z'-Z)dxdy；(7)$$

或者，如果 l＇、m＇、n＇是不连续性曲面的法线的方向余弦，而 dS＇是曲面的面积元，则有

$$\iint R\cos\in dS=\iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)dxdydz+\iint\{l'(X'-X)dydz$$ 式中

$$+m'(Y'-Y)+n'(Z'-Z)\}dS'，(8)$$

最后一项的积分是在不连续性曲面上计算的。如果在 X、Y、Z 为连续的每一点上都有

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0，(9)$$

而且在他们为不连续的每一个曲面上都有

l＇X＇＋m＇Y＇＋n＇Z＇＝l＇X＇＋m＇Y＇＋n＇Z＇，(10)

则每一个闭合曲面上的面积分都为零，而矢量的分布就被说成是“管状的”。

我们将把方程(9)叫做“普遍管状条件”，而把方程(10)叫做“表面管状条件”。

22.〕现在让我们考虑在曲面 S 内部的每一点上方程

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=0，(11)$$

都得到满足的那种事例。作为这一点的后果，我们有每一个闭合曲面上的面积分都为零。

现在设闭合曲面 S 由三个部分 S_1、S_0 和 S_2 组成。设 S_1 是由一条闭合曲线 L_1 包围着一个任意形状的曲面。设 S_0 是通过从 L_1 的每一点上画出永远和 R 方向一致的线而形成的曲面。如果 l、m、n 是曲面 S_0 的任一点上的法线的方向余弦，我们就有

$$R\cos\in=Xl+Ym+Zn=0，(12)$$

因此曲面的这一部分对面积分的值并无任何贡献。

设 S_2 是由闭合曲线 L_2 包围着的另一个任意形状的曲面，而 L_2 是 S_2 和 S_0 的交线。

设 Q_1、Q_0、Q_2 是曲面 S_1、S_0、S_2 上的面积分，而 Q 是闭合曲面 S 上的面积分。于是

$$Q = Q_1 + Q_0 + Q_2 = 0 \quad (13)$$

而我们知道

$$Q_0 = 0; \quad (14)$$

从而就有

$$Q_2 = -Q_1; \quad (15)$$

换句话说，曲面 S_2 上的面积分和 s_1 上的面积分相等而异号，不论 S_1 的形状和位置如何，只要中间曲面 S_0 是到处和 R 相切的就行。

如果我们假设 L_1 是一个面积很小的闭合曲线，S_0 就将是一个管状的曲面，而且它具有这样的性质：管子的每一个完全截面上的面积分都相同。

既然如果

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0, \quad (16)$$

则整个空间都可以划分成一些这样的管子，和这一方程相容的一种矢量分布就叫做“管状分布”。

关于流管和流线

如果空间被分成一些管子，而每一个管子的面积分都为 1，则各管称为“单位管”，而由一条闭合曲线 L 所包围的任一有限曲面 S 上的面积分就等于沿正方向通过 S 的这种管子的数目，或者换句话说，就等于穿过闭合曲线 L 的这种管子的数目。因此，S 上的面积分只依赖于 S 的边界 L 的形状，而不依赖于边界所围成的曲面的形状。

关于回绕域

如果在外面由单独一个闭合曲面 S 所包围的整个域中，管状条件

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0,$$

到处都是满足的，则在域内画出的任何闭合曲面上，面积分都将是零，而一个有界曲面上的面积分则只取决于形成该面积之边界的那条闭合曲线的形状。

然而，如果管状条件在其中为满足的那个域不是由单独一个曲面所包围的，则通常并不能得到同样的结果。

因为，如果它是由多于一个连续曲面包围而成的，则其中一个曲面是外表面，而其余的都是内表面，从而域就是回绕的，在它内部有另一些域被它所完全包含在内。

在其中一个这种被包含的域中，例如在由闭合曲面 S_1 所包围的域中，如果管状条件并不满足，则可以令

$$Q_1 = \iint R\cos\varepsilon dS_1$$

等于包围这个域的曲面上的面积分，并令 Q_1、Q_2 等等等于其他被包含域的曲面 S_1、S_2 等等上的对应量。

于是，如果在 S 内部画一个闭合曲面 S'，则只有当 S' 不包含任何被包含域 S_1、S_2 等等时，S' 上的面积分的值才将是零。如果它包含了任何的这种域，则面积分是位于它内部的不同被包含域上的面积分之和。

同理，在以一条闭合曲线为边的曲面上计算的面积分，也只有在那样一些曲面上才是相同的，那些曲面以该曲线为边，而且通过在域 S 内的连续运动可以和所给的曲面相调和。

当我们必须处理回绕域时，首先要作的就是通过画一些把内表面 S_1、S_2 等等和外表面 S 连接起来的线 L_1、L_2 等等来把该域简化为非回绕域。其中的每一条线，如果并不是连接了本来已经连续接触着的曲面的话，都将使回绕数减少 1，从而为了消除回绕性而必须画的线数就等于回绕数，或者说等于内表面的数目。在画这些线时我们必须记得，任何连接着已经连接起来的曲面的线并不能减少回绕数而却只引入循环性。当这些线已经画好时我们就可以断定，如果管状条件在域 S 中是满足的，则完全在 S 内部画出且不和任何一条这种线相交的任一曲面都将有等于零的面积分。如果它和任何一条线例如 L_1 相交一次或任何偶数次，它就包含曲面 S_1，从而它的面积分就是 Q_1。

管状条件在其中为满足的最习见的回绕域的例子就是一个物体周围的域，该物体是反比于距离平方的力吸引或推斥其他物体的。

在斥力的事例中，我们有

$$X = m\frac{x}{r^3},\quad Y = m\frac{y}{r^3},\quad Z = m\frac{z}{r^3};$$

式中 m 是假设为位于座标原点上的物体质量。

在 r 为有限的任一点上，有

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0,$$

但是在原点上这些量却变为无限大。对于不包含原点的任一闭合曲面来说，面积分是零。如果一个闭合曲面包含了原点，则其面积分是 4πm。

如果由于任何原因，我们愿意把 m 周围的域看得就像它不是一个非回绕域那样，我们就必须从 m 到无限远画一条线，而当计算面积分时我们就必须记得，每当这条线从反面向正面通过曲面时，面积分中就必须增加 4πm。

关于空间中的右手关系和左手关系

23.〕在本论著中，沿任一轴线的前进平动和绕该轴的转动，将被认为当他们的方向对应于一个常见的或右手的螺旋的前进方向和转动方向时就具有相同的正负号[①]。

[①] 当我们把右手的上沿向外转，而同时把手伸向前方时，手臂肌肉的联合作用将比任何的文字定义更

例如，如果地球从西向东的实际转动被取为正的，则从南到北的地轴将被取为正，从而如果一个人沿正方向前进，则正向转动是合适的，头为右旋而脚为左旋。

如果我们把自己放在一个曲面的正面一边，则它的边界线的正向将和表面朝向我们的一个表上的指针转动方向相反。

这就是在汤姆孙和泰特的《自然哲学》(NaturalPhilosophy)以及泰特的《四元数》(Quaternians)中采用了的右手制。相反的左手制在哈密顿的《四元数》中被采用(Lecture,P.76;Elements,P.108 及 P.117 的小注)。从一种体制到另一种体制的变换被李斯廷称为“反转”(Perversion)。

一个物体在镜中的反射像，是物体的一个反转了的像。

当我们应用笛卡尔座标 x、y、z 时，我们应该把他们画得使有关各符号之轮换次序的通常惯例导致空间中的一种右手制的方向。例如，如果 x 是向东画而 y 是向北画的，则 z 必须向上画[①]。当求积分的次序和各符号的轮换次序一致时，曲面的面积将被认为是正的。例如，xy 平面上的一个闭合曲线的面积可以写成

$$\int xdy\text{或}-\int ydx\text{；}$$

求积分的次序在第一式中是 x、y，而在第二式中则是 y、x。

两个乘积 dxdy 和 dydx 之间的这种关系，可以和四元数方法中两个垂直矢量之积的法则相对比，该矢量积的正负号取决于乘法的次序；而且也可以和当一个行列式中的两行或两列互换时行列式的变号相对比。

同理，当积分次序是变数 x、y、z 的轮换次序时，一个体积分就被认为是正的，当轮换次序倒转时则积分被认为是负的。

现在我们来证明一条定理。在建立一个有限曲面上的面积分和沿曲面边界的线积分之间的联系方面，这条定理是有用的。

24.〕定理四　沿一条闭合曲线计算的一个线积分，可以用以该曲线为边的一个曲面上的面积分表示出来。

设 X、Y、Z 是一个矢量 u 的分量，该矢量的线积分应沿一条闭合曲线 s 来计算。

设 S 是完全由闭合曲线 s 围成的任一连续的有限曲面，并设 ξ，η，ζ 是另一矢量$\mathfrak{R}$的分量，他们和 X、Y、Z 的关系由下列方程来确定：

$$\xi=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\text{，}\eta=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\text{，}\zeta=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\text{。}(1)$$

于是在曲面 S 上求的$\mathfrak{R}$的面积分就等于沿曲线 s 求的 u 的线积分。很显然，ξ、η、ζ本身是满足管状条件的：

加牢固的在我们的记忆中留下印象。W.H.密勒教授曾向我指出，长春藤的卷须是右旋的，而啤酒花的卷须是左旋的，从而空间中的两种关系体制可以分别称为常春藤制和啤酒花制。我们所采用的常春藤制是林诺乌斯的体制，也是除日本以外一切文明国家中螺旋制造者们的体制。德·堪道里是把啤酒花卷须说成“右旋”的第一个人，李斯廷学了他的样，而且论述光的圆偏振的多数作者也学了他的样。啤酒花式的螺旋是被作出来用以联接铁路车辆的，也用于把普通车辆的轮子安装在左侧，但是这种螺旋被他们的使用者叫做左手螺旋。

[①] {就像在这个图中那样：

$$\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}=0。$$

设 l、m、n 是曲面的一个面积元 dS 上法线的方向余弦，dS 按正方向计算。于是，$\Re$的面积分的值就可以写成

$$\iint(l\,\xi+m\,\eta+n\,\zeta)dS。(2)$$

为了对面积元 dS 的意义形成一个确切的概念,我们将假设曲面上每一点的座标 x、y、z 是作为两个独立变数α和β的函数而被给出的。如果β不变而α变化，则点(x,y,z）将在曲面上描出一条曲线，而如果赋予β以一系列值，则将有一系列这样的曲线被画出，它们全都位于曲面 S 上。同样，通过赋予α以一系列恒定的值，第二系列曲线就可以被画出；他们和第一系列曲线相交，而把整个曲面分成元部分，其中每一个部分都可以被看成面积元 dS。

按照常用的公式，这一面积元在 yz 平面上的投影是

$$ldS=\left(\frac{dy}{d\alpha}\frac{dz}{d\beta}-\frac{dy}{d\beta}\frac{dz}{d\alpha}\right)d\beta d\alpha.(3)$$

适用于 mdS 和 ndS 的表示式通过按轮换次序将 x、y、z 代入上式来得出。

我们所要求的面积分是

$$\iint(l\,\xi+m\,\eta+n\,\zeta)dS；（4）$$

或者，将ξ、η、ζ按照 X、Y、Z 表示出来，就得到

$$\iint\left(m\frac{dX}{dz}-n\frac{dX}{dy}+n\frac{dY}{dx}-l\frac{dY}{dz}+l\frac{dZ}{dy}-m\frac{dZ}{dx}\right)dS；（5）$$

此式中依赖于 X 的部分可以写成

$$\iint\left\{\frac{dX}{dz}\left(\frac{dz}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}-\frac{dz}{d\beta}\frac{dx}{d\alpha}\right)-\frac{dX}{dy}\left(\frac{dx}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}-\frac{dx}{d\beta}\frac{dy}{d\alpha}\right)\right\}d\beta d\alpha；（5）$$

加上并减去$\frac{dX}{dx}\frac{dx}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}$，就变成

$$\iint\left\{\frac{dx}{d\beta}\left(\frac{dX}{dx}\frac{dx}{d\alpha}+\frac{dX}{dy}\frac{dy}{d\alpha}+\frac{dX}{dz}\frac{dz}{d\alpha}\right)-\frac{dx}{d\alpha}\left(\frac{dX}{dx}\frac{dx}{d\beta}+\frac{dX}{dy}\frac{dy}{d\beta}+\frac{dX}{dz}\frac{dz}{d\beta}\right)\right\}$$

$$d\beta d\alpha；\qquad(7)$$

$$=\iint\left(\frac{dX}{d\alpha}\frac{dx}{d\beta}-\frac{dX}{d\beta}\frac{dx}{d\alpha}\right)d\beta d\alpha.\ (8)$$

现在让我们假设α为恒定的那些曲线形成一系列闭合曲线，包围着曲面上一个α具有极小值α_0的点，并设最后一条曲线，$\alpha=\alpha_1$的那条曲线，和闭合曲线 s 相重合。

让我们再假设β为恒定的那些曲线形成一系列从$\alpha=\alpha_0$的点画到闭合曲线 s 的线，而且第一条β_0和最后一条β_1相重合。

对(8)分部求积分，第一项对α而第二项对β求积分，各双重积分就互相消除，而表示式就变成

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1}\left(X\frac{dx}{d\beta}\right)_{\alpha=\alpha_1}d\beta-\int_{\beta_0}^{\beta_1}\left(X\frac{dx}{d\beta}\right)_{\alpha=\alpha_{01}}d\beta$$

$$-\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(X\frac{dx}{d\alpha}\right)_{\beta=\beta_1}d\alpha+\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(X\frac{dx}{d\alpha}\right)_{\beta=\beta_0}d\alpha. \quad (9)$$

既然点(α,β_1)和点(α,β_0)完全相同，第三项就和第四项相消；而且，既然在$\alpha=\alpha_0$的点上只有一个 x 值，第二项就等于零，而表示式就简化成了第一项。

既然曲线$\alpha=\alpha_1$和闭合曲线 s 相重合，我们就可以把表示式写成下式：

$$\int X\frac{dx}{ds}ds，(10)$$

式中的积分是沿着曲线 s 求的。我们可以用同样的办法处理面积分中依赖于 Y 和依赖于 Z 的部分，因此我们最后就得到

$$\iint(l\xi+m\eta+n\zeta)dS=\int\left(\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds； \quad (4)$$

式中的第一个积分是在曲面 S 上计算的，而第二个积分是沿边界线 s 计算的[①]。

关于算符∇对一个矢量函数的作用

25.〕我们已经看到，用∇来代表的算符就是用来从矢量的势求出该矢量的那个算符。然而，同一个算符，当应用到一个矢量函数上时就得到包括在我们刚刚证明了的两条定理（定理三和定理四）中的一些结果。这一算符在一个矢量位移上的推广应用，以及大部分进一步的发展，都是由泰特教授作出的[②]。

设σ是变点矢径ρ的一个矢量函数。让我们像通常一样假设

$$\rho=ix+jy+kz$$

而$\sigma=iX+jY+kZ$；

式中 X、Y、Z 是σ沿各轴的分量。

我们必须把算符

$$\nabla=i\frac{d}{dx}+j\frac{d}{dy}+k\frac{d}{dz}$$

作用在σ上。完成这一运算并记得 i、j、k 的乘法规则，我们就发现∇σ包括两个部分，一个部分是标量而另一个部分是矢量。

标量部分是

$$S\nabla_\sigma=-\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)，$$见定理三，

而矢量部分是

---

① 这一定理是由斯托克斯教授给出的，见 Smith' sprize Examination,1854,问题 8。在 Thomson and Tait 的 Natural Philosophy，§190(j)中，对定理进行了证明。

② 见 Proc.R.S.Edin,APril28,1862.'On Green' gand other siliea Theorems，Trans.R.S.Edin.,1869－70，这是一篇很有价值的论文；并见' On some Quaternion Integrals,'Proc.R.S.Edin,1870－71.

$$V\nabla\sigma = i\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)+j\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dz}{dx}\right)+k\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right).$$

如果 X、Y、Z 和 ξ 、 η 、 ζ 之间的关系是由上一定理中的方程(1)给出的，我们就可以写出

$$V\nabla_{\sigma}=i\xi+j\eta+k\zeta$$ 。见定理四。

由此可见，出现在两条定理中的那些 X、Y、Z 的函数都可以通过对分量为 X、Y、Z 的矢量进行∇运算来得到。定理本身可以写成

$$\iiint S\nabla\sigma ds = \iint S.\sigma U\upsilon ds，（三）$$

$$\int S\sigma d\rho = -\iint S\nabla\sigma\upsilon ds；\qquad（四）$$

式中 ds 是体积元，ds 是面积元，dρ 是线元，而 Uv 是一个沿着法线方向的单位矢量。

为了理解一个矢量的这些函数的意义，让我们假设 σ_0 是 σ 在点 P 上的值，并让我们在 P 点的邻域中考查 $\sigma-\sigma_0$ 的值。如果我们围绕着 P 点画一个闭合曲面，那么，如果 σ 在这曲面上的面积分是指向内部的，则 $S\nabla_{\sigma}$。将为正，而 P 点附近矢量在总的看来将是指向 P 的，如图(1)所示。

因此我建议把 ∇_{σ} 的标量部分称为 σ 在 P 点的敛度。为了诠释矢量部分，设其分量为 ξ 、 η 、 ζ 的那个矢量是从纸面垂直向上的，并且让我们在 P 点附近考查矢量 $\sigma-\sigma_0$。它将显现得如图(2)所示，这个矢量在总的看来是按照反时针的方向而和纸面相切的。

我（很无把握地）建议把 ∇_{σ} 的矢量部分称为 σ 在 P 点的旋度。

在图 3 中，我们有一个旋度和敛度相结合的图示。

现在让我们考虑

$$V\nabla_{\sigma}=0$$

这一个方程的意义。它意味着 ∇_{σ} 是一个标量，或者说矢量 σ 是某一标量函数的空间变化率。

26.〕算符∇的最引人注目的性质之一就是，当运用两次时，它就变成

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right),$$

这是在物理学的所有各部分都会出现的一个算符，我们可以称之为拉普拉斯算符。

这个算符本身，在本质上是一个标量算符。当它作用在一个标量函数上时，结果是标量；当它作用在一个矢量函数上时，结果是矢量。

如果我们以任一点 P 为中心画一个半径为 r 的小球，那么，如果 q_0 是 q 在球心上的值而 $\overline{q}$ 是 q 在球内各点上的平均值，就有

$$(q_0-\overline{q})=\frac{1}{10}r^2\nabla^2 q；$$

因此，按照 $\nabla^2 q$ 的为正或为负，球心上的值将大于或小于平均值。因此我建议把 $\nabla^2 q$ 称为 q 在 P 点上的浓度，因为它指示的是 q 在该点上的值比它在该点邻域中的平均值大多少。

如果 q 是一个标量函数，则求它的平均值的方法是众所周知的。如果

它是一个矢量函数，我们就必须通过求矢量函数之积分的法则来求它的平均值。求得的结果当然是一个矢量。

第一编　静电学

第一章　现象的描述

摩擦起电

27.〕实验Ⅰ① 　使各自并不显示任何电性质的一块玻璃和一块树胶互相摩擦，并使摩擦过的表面保持接触。它们将不显示任何电性质。把它们分开。它们现在就将互相吸引了。

如果有第二块玻璃用第二块树胶摩擦过，然后把它们分开悬挂在前两块玻璃和树胶附近，那就可以观察到：

(1)两块玻璃互相推斥。

(2)每一块玻璃都被每一块树胶所吸引。

(3)两块树胶互相推斥。

这些吸引和推斥的现象叫做“电现象”，而显示电现象的物体被说成是带了电或得到了电荷。

物体可以通过许多其他方式而带电，正如通过摩擦那样。

两块玻璃的电性质是相似的并和两块树胶的电性质是相反的：玻璃吸引树胶所推斥的东西并推斥树胶所吸引的东西。

如果不论以什么方式带了电的一个物体表现得像玻璃一样，就是说，如果它推斥玻璃而吸引树胶，则物体被说成玻璃式地带了电；如果它吸引玻璃而推斥树胶，它就被说成树胶式地带了电。经发现，所有带电的物体不是玻璃式地就是树胶式地带电的。

科学家们所确定的作法是把玻璃式的电叫做正电，而把树胶式的电叫做负电。两种电的恰好相反的性质使我们有理由用相反的正负号来标明他们，但是对其中一种而不是对另一种应用正号，却必须认为是一种任意性的约定，正如在数学作图中把向右的距离看成正距离是一种约定一样。

在一个带电的物体和一个不带电的物体之间，观察不到任何力，不论是吸引力还是推斥力。当事先并未带电的物体在任何情况下被观察到受到一个带电物体的作用时，那是因为各物体由于感应而带了电。

感应起电

28.〕实验Ⅱ[①] 　设把一空心金属容器用一根白色丝线悬挂起来，并设容器的盖子上也附有类似的丝线，

从而容器可以打开或关闭而用不着触及它。

图 4

设容器起先并未带电。这时，如果有一块带电的玻璃用它的线挂在容器中而不接触容器，而且容器的盖子是盖着的，则容器的外面将被发现是带电的，而且可以证明，容器外面的电不论玻璃挂在内部的什么地方都是

[①] 这一实验和以后的若干实验都起源于法拉第，‘On Static Electrical Inductive Ac—tion.,phil.Mag.1843,或 Exp.Res.,vol.ii,p.279.

相同的[①]。

现在，如果玻璃被从容器中取出而并不接触容器，则玻璃上的电将和它被放入容器中以前的电相同，而容器上的电则将消失。

容器上这种依赖于玻璃在它内部的而且当玻璃被取走时就不复存在的带电，就叫做“感应”起电。

如果玻璃是挂在外面靠近容器处的，也将出现类似的效应；但是在那种情况下，我们将发现一种带电情况，即容器的外面有一部分是玻璃式地带电而其另一部分则是树胶式地带电的。当玻璃位于容器内部时，整个的外表面都是玻璃式地带电而整个的内表面都是树胶式地带电的。

传导起电

29.〕实验III　设金属容器已像在上一实验中一样感应起电，设有第二个金属物体用白丝线挂在它附近，并设有一根同样挂着的金属丝被移过来，以致同时接触了带电容器和第二个物体。

现在第二个物体将被发现为玻璃式地带电，而容器的玻璃电则将已经消失了。

带电的状态已经通过金属丝从容器传送到了第二个物体上。这条金属丝叫做电的导体，而第二个物体则被说成通过传导而带了电。

导体和绝缘体

实验IV　如果用一个玻璃棒、一个树胶棒或古塔波胶棒、或一根白丝线来代替那根金属丝，则不会发生任何电的传送。因此，上述这些物质就叫做电的“非导体”。在电学实验中，非导体被用来支持带电的物体而不把他们的电传走。这时他们就叫做“绝缘体”。

金属是良导体。空气、树胶、古塔波胶、硬橡皮、石腊等，是良绝缘体。但是我们以后即将看到，一切物质都阻碍电的通过，而一切物质也都允许它通过，尽管在程度上有非常大的差别。这一问题将在我们开始处理电的运动时再来考虑。在目前，我们将只考虑两类物体，即良导体和良绝缘体。

在实验II中，一个带电体在金属容器中引起了带电但却和容器是由空气隔开的，而空气是一种不导电的媒质。这样一种媒质，被认为是传递这些电效应而却不导电；这种媒质曾被法拉第称为一种“电介媒质”，而在这种媒质中发生着的作用就称为“感应”。在实验III中，带电容器通过金属丝的媒介而在第二个金属物体上引起了带电。让我们假设金属丝被取走了，而带电的玻璃也从容器中取出并拿到了足够远的地方。第二个物体将仍然显示玻璃式的带电，而容器在玻璃被取走以后则将带有树胶式的电。现在，如果我们使金属丝和这两个物体相接触，传导就将沿着金属丝进行，而两个物体上的电就将全部消失；这表明两个物体上所带的电是相等而异号的。

30.〕实验V　在实验II中已经指明，如果通过和树胶摩擦而带电的

[①] {这是第 100c 节的一个例证。}

一块玻璃被挂在一个绝了缘的金属容器中，则在容器外面观察到的带电情况并不依赖于玻璃的位置。如果现在我们把和玻璃摩擦过的那块树胶也放入同一容器中而不触及容器，那就会发现容器外面没有电了。由此我们得到结论，树胶所带的电是和玻璃所带的电相等而异号的。通过放入以任何方式起电的随便几个物体，就可以证明容器外面所带的电是由一切电荷的代数和所引起的，这时把树胶式的电算作负电。这样我们就有了把若干物体的电效应加起来而不改变他们所带的电的一种实际的方法。

31.〕实验Ⅵ　准备第二个绝了缘的金属容器 B，把带了电的那块玻璃放入第一个容器 A 中，而把带了电的那块树胶放入第二个容器 B 中。然后通过实验Ⅲ中那种办法用一根金属丝把两个容器接通。这时一切带电的迹象都将消失。

然后，把金属丝取走，并把那块玻璃和那块树胶从各容器中取出而不触及各容器。这时就会发现 A 是树胶式地带电的而 B 是玻璃式地带电的。

现在，如果把玻璃和容器 A 一起放入一个更大的绝了缘的金属容器 C 中，那就会发现 C 的外面并不带电。这就证明 A 所带的电是和那块玻璃所带的电相等而异号的，而且 B 所带的电也可以同样被证明为和那块树胶所带的电相等而异号。

于是我们就有了一种方法，可以使一个容器带上和一个带电物体所带的电恰好相等而异号的，而并不改变该物体所带的电；而且我们可以用这种办法使任意数目的容器带上任何种类的恰好相等的电量，从而我们就可以把这个电量取作临时性的单位。

32.〕实验Ⅶ　设容器 B 带有一个正电量，而我们暂时就把该电量取作 1。现在把 B 放入较大的绝了缘的容器 C 中而不触及 C。这就会在 C 的外面引起一个正电量。现在让 B 和 C 的内表面接触上。这时不会观察到外面电量的任何改变。现在如果把 B 从 C 中取出而不触及 C，并把它带到足够远的地方，那就会发现 B 完全放了电，而 C 却带上了一个单位的正电。

于是我们就有了一种把 B 的电荷传给 C 的方法。

现在让 B 带上单位电荷，把它引入已经带了电的 C 中，使它和 C 的内表面相接触，然后把它取走。这时就将发现 B 又完全放了电，而 C 的电荷加了倍。

如果重复进行这种过程，那就会发现，不论 C 在事先带了多大的电荷，不论 B 是通过什么方式带电的，当 B 首先被 C 所完全包围然后和 C 相接触并最后被取走而并不触及 C 时，B 的电荷就会完全转移到 C 上，而 B 则完全不带电了。

这一实验指示了一种使一个物体带上任意倍数的单位电荷的方法。当讲到电的数学理论时我们就会发现，这一实验的结果提供了对理论之正确性的一种精确检验[①]。

33.〕在我们进而研究电力的定律以前，让我们列举已经确立了的事实。

通过把任何带电体系放入一个绝了缘的中空导体容器中，我们可以确

[①] {为了使以上各实验成为毫无疑问，所要克服的困难非常大，以致他们几乎是无法克服的。然而这些实验的描述却能够以一种引人注目的方式例示电的性质。在实验Ⅴ中，没有给出可以用来测量外面容器的电荷的任何方法。}

定放进去的体系的总电量的性质，而体系的不同物体之间并没有任何电的交通。

容器外面的带电情况，可以通过把容器和一个验电器接通来很灵敏地加以检验。

我们可以假设验电器包括一片金箔，挂在一个带正电而另一个带负电的两个物体之间。如果金箔带了电，它就将向和它带有异号电的那个物体偏转。通过加大两个物体所带的电并提高悬挂装置的灵敏性，电箔所带的一个非常小的电量也可以被检测出来。

当我们开始描述静电计和倍加器时，我们就将发现还有更加灵敏的方法来检验带电情况和检验我们的理论的正确性，但是在目前，我们将假设检验过程是通过把中空容器和一个金箔验电器相连来进行的。

这种方法是由法拉第在他那对电现象之规律的很令人佩服的演示中使用了的[①]。

34.〕Ⅰ.一个物体或体系的总的带电保持不变，除非它从其他物体取得电或向其他物体输送电。

在所有的电学实验中都发现物体上的电是改变的，但也永远发现这种改变是由绝缘欠佳所致，而且当绝缘手段改进了时，电的损失就会减少。因此我们可以断言，放在一种完全绝缘的媒质中的一个物体，它的电量将保持完全恒定。

Ⅱ.当一个物体通过传导而使另一个物体带电时,两个物体的总带电量保持不变；这就是说，一个物体损失多少正电或得到多少负电，另一物体就得到多少正电或损失多少负电。

因为，如果两个物体是关闭在中空容器中的，则任何电的变化都不会被观察到。

Ⅲ.当带电是由摩擦引起的或由任何其他已知方式引起的时,同样数量的正电和负电都将被产生。

因为，整个的体系可以在中空容器中被检验，或者说，起电过程可以在容器本身中进行，而不论体系各部分的带电是如何地强烈，金箔验电器所指示的整个体系的电都永远是零。

因此，一个物体所带的电就是一个可以测量的物理量，而两部分或多部分的电就可以合并，其结果正如当两个量代数地相加时所得到的结果一样。因此我们就可以既作为一种性质又作为一种数量来考虑电，并且可以谈到任何带电的物体“带有某一正的或负的电量”。

35.〕当像我们现在已经作了的那样把电归入物理量一类时，我们必须不要过于匆忙地假设它是或不是一种物质，或假设它是或不是一种形式的能量，或假设它属于任一已知的物理量范畴。我们迄今已经证明的不过是它可以如此地产生或消灭，即当一个闭合曲面中的电量增多或减少时，它的增量或减量必然是通过该闭合曲面进来或出去的。

这种情况对物质是成立的，而且是由所谓“水力学连续性方程”来表示的。

这种情况对热是不成立的，因为通过从某种其他形式的能量到热的转化或从热到某种其他形式的能量的转化，热可以在一个闭合曲面中增多或

[①] ‘On Static Electrical Inductive Action,’Phil.Mag.，1848 或 Exp.Res.,vol.ii.p.279.

减少，但却并不通过曲面而进入或逸出。

这种情况对一般的能量也不成立，如果我们承认物体的直接超距作用的话。因为闭合曲面外面的一个物体可以和曲面里面的一个物体交换能量。但是，如果一切表观上的超距作用都是中介媒质的部分和部分之间作用的结果，那就可以设想，当媒质各部分的这种作用的本性已被清楚地了解时，在闭合曲面中的能量有所增多或减少的一切事例中，我们都将可能追索出能量通过曲面而进入或逸出的过程。

然而，却有另一种理由使我们可以有把握地断定，作为一个物理量的电，也就是一个物体的总电量，不是像热那样的一种形式的能量。一个带电体系具有一定数量的能量，而且这个能量可以算出，即把体系各部分的电量和另一个叫做各该部分的“电势”的物理量相乘，求和以后再除以 2，就得到体系的能量。“电量”和“电势”这两个量，当乘在一起时就得到“能量”这个量。因此电和能就不可能是属于同一范畴的物理量，因为电只是能的一个因子，另一个因子是电势”[①]。

作为这两个因子之乘积的能量，也可以看成另外若干对因子的乘积，例如

力×	力起作用的距离。
质量×	通过一个高度起了作用的重力。
质量×	速度平方的二分之一。
压强×	在该压强下进入一个容器的流体的体积。
化学亲合势×	以参加化合的电化学当量数为其量度的化学变化。

如果我们有一天居然对电势的本性得到了一种明确的力学概念，我们就可以把这种概念和能量概念结合起来，以确定“电”所应归属的物理范畴。

36.〕在有关这一课题的多数学说中，“电”是被当作一种物质来处理的，但是由于存在当互相结合时就互相抵消的两种电，而我们并不能设想两种互相抵消的物质，电就被区分成了“自由电”和“结合电”。

二流体学说

在所谓“二流体学说”中，一切物体在未带电状态下都被假设为带有相等数量的正电和负电。这些数量被认为是如此地巨大，以致任何起电过程都还不曾把物体内的其中一种电完全取走。按照这种学说，起电过程就在于从物体 A 中取走某一数量 P 的正电并把它传给物体 B，或是从 B 中取走某一数量 N 的负电并把它传给 A，或是这些过程的某种组合。

结果就将是，A 将比剩下来的正电多带 P＋N 个单位的负电，而那些剩下来的正电则被假设为处于和等量的负电结合在一起的状态。P＋N 这个量就叫做“自由电”，而其余那些电则叫做“结合电”、“潜在电”或“固定电”。

在这种学说的多数论述中，两种电都被称为“流体”，因为它们能够从一个物体传送到另一个物体，而且在导电物体中是极其活动的。流体的其他性质，例如惯性、重量和弹性，并不曾由那些只为了数学目的而使用

[①] {后文证明“电势”的量纲并不是零。}

这一学说的人们赋予电流体。但是流体一词的应用，却把包括并非自然哲学家的许多科学界人士在内的一些俗人引入了歧途。他们紧紧抓住了“流体”一词，认为它似乎是他们在学说的论述中所能理解的唯一名词。

我们将看到，课题的数学处理已由一些用“二流体”学说来表示自己的想法的作者们大大发展了。然而，他们的结果完全是由可以被实验所证明的数据推出的，从而这些结果必然是对的，不论我们是否采用二流体学说。因此，数学结果的实验证实并不是支持或反对这一学说之特定内容的任何证据。

二流体学说的引用，使我们可以把 A 的带负电和 B 的带正电看成将会导致相同结果的三种不同过程中的任何一种过程的效应。我们曾经假设这是由从 A 向 B 传送 P 个单位的正电并从 B 向传送 N 个单位的负电而引起的。但是，假如有 P＋N 个单位的正电曾经从 A 传送到 B，或是有 P＋N 个单位的负电曾经从 B 传送到 A，所得到的 A 上和 B 上的“自由电”也将和以上相同，但是 A 中的“结合电”数量在第二种事例中却将比在第一种事例中为少，而在第三种事例中却将比在第一种事例中为多。

因此，按照这一学说，看来似乎不但可以改变一个物体中的自由电的数量，而且也可以改变结合电的数量。但是从来还不曾在带电物体中观察到可以追溯为物体结合电的数量变化的任何现象。因此，不是结合电没有可观察的性质，就是结合电的数量是不能变化的。其中第一种可能性并不会给单纯的数学家带来任何困难；那种数学家除了吸引和推斥的性质以外并不赋予电流体以任何别的性质，因为他干脆设想两种流体会互相抵消，就像＋e 和－e 那样，从而两种流体的结合将是一个真实的数学零。然而，对那些无法应用“流体”一词而不想到一种物质的人们说来，却很难设想两种流体的结合怎么会没有任何性质，以致向一个物体加入或多或少的结合电将不会以任何方式影响它，不会增加它的质量或重量，也不会改变它的某些别的性质。因此有些人就曾经假设，在每一个起电过程中，有数量恰好相等的两种流体沿着相反的方向被传送，从而任一物体中的两种流体的总量永远是保持不变的。利用这种新定律，他们“力图保持面子”，但是他们却忘了，除了使“二流体”学说和事实相协调并防止它预言并不存在的现象以外，是用不着这种定律的。

单流体学说

37.〕在单流体学说中，除了一点以外每一情况都和在二流体学说中相同；那一点就是，不再假设两种物质在一切方面都相等而相反，而是对其中的一种（通常是负流体）赋予了“普通物质”的性质和名称，而另一种则保留了“电流体”的名称。电流体的粒子被假设为按照距离的平方反比定律而互相推斥，并按照同样的定律吸引普通物质的粒子。物质的粒子被假设为互相推斥并吸引电的粒子。

如果一个物体中的电流体的数量很合适，正足以使物体外的一个电流体粒子受到的物体中电流体的推斥力和受到的物体中物质的吸引力大小相同，则物体被说成是“饱和了的”。如果物体中流体的量大于饱和所需要的量，则多出的部分叫做“多余流体”，而物体则被说成是“过带电的”。如果流体量较少，则物体被说成是“欠带电的”，而使物体饱和所需要的

那一部分流体有时叫做“所缺流体”。使一克普通物质达到饱和所需要的电的单位数想必是很大的，因为一克金可以打制成面积为一平方米的金箔，而且它在这种形式下可以带有至少 60，000 个电单位的负电荷。为了使这样带了电的金箔达到饱和，必须传给它这么多的电流体，因此使全饱和所需要的全部电必然大于这个量。两个饱和物体中的物质和电流体之间的吸引力，被假设为比两部分物质之间的推斥力和两部分电流体之间的推斥力都大不了多少。这种残余力被认为可以用来说明万有引力的作用。

也像二流体学说一样，这种学说解释的东西并不太多。然而它却要求我们假设电流体的质量非常小，以致迄今所能得到的正电荷或负电荷都还不曾可觉察地增大或减小一个物体的质量或重量[①],而且迄今也还不能提出充分的理由来说明为什么应该假设由电的超额而引起的是玻璃式的带电而不是树胶式的带电。

一些人有时对这一学说提出一种反驳；他们其实应该更好地想一想。人们曾经说，没有和电相结合的物质粒子互相推斥的说法，是和每一个物质粒子都吸引全宇宙中每一个其他粒子这一确立得很好的事实处于直接抵触中的。假若“单流体”学说是正确的，我们就应该看到各个天体互相推斥。

然而很明显，按照这一学说，假如各天体是由没有和电相结合的物质构成的，他们就将处于最高度的带负电的状态并将互相推斥。我们没有理由相信他们是处于这样高度带电的状态或可以保持在这一状态中的。地球以及他们的吸引力曾经被观察过的一切物体，倒是处于不带电状态中的；这就是说，他们含有正常的电荷，而他们之间的唯一作用就是刚刚提到的那种残余力。然而，引用这种残余力的那种牵强方式，却是对本学说的一种有效得多的反驳。

在本书中，我打算在研究的不同阶段按照更多类别的现象来检验不同的学说。从我这方面来说，我指望根据在介于带电体之间的那种空间中出现的情况的研究来对电的本性得到进一步的认识。这就是法拉第在他的《实验研究》中所遵循的研究模式的本质特点，而随着我的论述的进行，我打算用一种连贯的和数学化的形式来显示法拉第、W.汤姆孙等人所发展出来的结果，以便我们可以觉察到，什么现象是可以用所有的学说来同样好地加以解释的，以及什么现象指示出每一学说的特殊困难。

带电体之间的力的测量

38.〕力可以用各种办法来测量。例如，其中一个物体可以挂在精密天平的一个臂上，而把一些砝码挂在另一个臂上，直到物体当带电时处于平衡为止。然后，另一个物体可以放在离第一个物体为已知距离的地方，这样，当物体带了电时，他们的吸引力或推斥力就可以增大或减小第一个物体的表观重量。必须在另一臂上增加或减去的重量，当用动力学单位表示出来时就是物体之间的力的量度。这种装置是由 W.斯诺欧·哈里斯爵士应用了的，而且也是在 W.汤姆孙爵士的绝对静电计中被采用了的。见第 217

[①] {一个物体的表观质量将由于带电而有所增大，不论所带的是玻璃式的还是树胶式的电(见 Phil.Mag.1861,v.xi.p.229)。}

节。

有时用一个扭秤更加方便。扭秤中有一个水平的臂，用一条细金属丝或细线悬挂着，从而能够以竖直悬线为轴而左右扭动。物体装在臂的一端并沿切线方向受到力的作用，这样就会使臂绕竖直轴转动，并把悬线扭过一个角度。悬线的扭转模量通过观察臂的振动时间来测量，这时臂的惯量矩是已知的，从而根据扭转角和扭转模量就可以推出吸引力或推斥力。扭秤是由密切耳设计了用来测定小物体之间的万有引力的，而且是由开文迪什应用于这一目的的。库仑在独立于这些学者而工作时重新发明了它，彻底地研究了它的作用，并且成功地应用它来发现了电力和磁力的定律；而且从那时起，扭秤就一直在必须测量小力的研究中被使用了。见第 215 节。

39.〕让我们假设，利用这些方法中的任一种，我们可以测量两个带电体之间的力。我们将假设，物体的线度比起他们之间的距离来是很小的，从而测量结果将不会因其中任一物体上的电分布的不一致而有很大的变化，而且我们也将假设，两个物体都在空气中挂在离其他物体很远的地方，以免他们会在那些物体上造成感应带电。

这时就发现，如果二物体之间有一个固定的距离，并分别带有 e 个和 e' 个我们的临时电量单位的电荷，则他们将以一个正比于 e 和 e' 之积的力而互相推斥。如果 e 和 e' 中有一个是负的，就是说，如果有一个电荷是玻璃式的而另一个电荷是树胶式的，则力将是吸引力，但是，如果 e 和 e' 都是负的，则力又是推斥力了。

我们可以假设第一个物体 A 带有 m 个单位的正电和 n 个单位的负电，这可以设想是像在实验 V 中那样分别放在物体上的。

设第二个物体 B 带有 m' 个单位的正电和 n' 个单位的负电。

于是，A 上 m 个正单位中的每一个单位将以一个力 f 推斥 B 上的 m' 个正单位中的每一个单位，其总效果将等于 $mm'f$。

既然负电的效应是和正电的效应恰好相等而异号的，A 上 m 个正单位中的每一个单位就将以相同的力 f 吸引 B 上 n' 个负单位中的每一个单位，其总效果将等于 $mn'f$。

同理，A 上的 n 个负单位将以一个力 $nm'f$ 吸引 B 上的 m' 个正单位，并将以一个力 $nn'f$ 推斥 B 上的 n' 个负单位。

因此，总的推斥力将是 $(mm'+nn')f$，而总的吸引力将是 $(mn'+m'n)f$.

合推斥力将是

$$(mm'+nn'-mn'-nm')f \text{ 或 } (m-n)(m'-n')f.$$

现在，$m-n=e$ 就是 A 上电荷的代数值，而 $m'-n'=e'$ 就是 B 上电荷的代数值，从而合推斥力可以写成 $ee'f$，此处的 e 和 e' 两个量永远被理解为采取他们的适当正负号。

力随距离的变化

40.〕既经在固定的距离上确定了力定律，我们可以测量以恒定方式带着电的并放在不同距离处的物体之间的力。直接的测量发现，不论是吸引力还是推斥力，力是反比于距离的平方而变化的；因此，如果 f 是两个单位电荷在单位距离上的推斥力，则在距离 r 上的推斥力将是 fr^{-2}，而 e 个

单位和 e′个单位在距离 r 上的推斥力的普遍表示式就将是

$$fee'r^{-2}.$$

电量的静电单位的定义

41.〕我们一直用了一个完全任意的标准来作为我们的电量单位，那就是在我们的实验刚刚开始时碰巧被起了电的某一块玻璃上所带的电。现在我们能够根据一种确定的原则来选择一个单位，而为了使这一单位可以属于一套普遍的单位制，我们把它定义得可使 f 等于 1。换句话说：

电量的静电单位是一定数量的正电，当把它放在离一个相等的电量为单位距离处时，它就将以单位的力推斥该电量。这一单位叫做“静电单位”，以区别于以后定义的电磁单位。现在我们可以把普遍的电力定律写成简单的形式了：

$$F=ee'r^{-2};$$

或者说，分别带有 e 个和 e′个单位的电荷的两个小物体之间的推斥力，在数值上等于二电荷的乘积除以距离的平方。

电量静电单位的量纲

42.〕如果[Q]是具体的电量静电单位本身，而 e、e′是特定电量的数值；如果[L]是长度的单位，而 r 是距离的数值；如果[F]是力的单位，而 F 是力的数值，则方程变为

$$F[F]=ee'r^{-2}[Q^2][L^{-2}];$$

由此即得

$$[Q]=[LF^{\frac{1}{2}}]$$

$$[L^{\frac{3}{2}}T^{-1}M^{\frac{1}{2}}].$$

这一单位叫做电量的“静电单位”。另一些单位可以为了实用的目的并且在电科学的其他部分被应用，但是在静电学的方程中电量是被理解为以静电单位来量度的；这正如在物理天文学中我们应用一个建筑在引力现象上的质量单位一样，那种单位是不同于常用的质量单位的。

电力定律的证明

43.〕库仑用扭秤作的实验，可以被认为已经在一定的近似程度上确立了力定律。然而，这一种实验却由于若干种干扰因素而成为很困难，而且在某种程度上是不确定的。那些干扰因素必须仔细地被找出并加以改正。

首先，两个带电体相对于他们之间的距离来说必须有其可觉察的线度，以便能够带有足以引起可测量的力的电荷。于是，每一个物体的作用，将对另一物体上的电的分布产生一种影响，从而电荷就不能被认为是均匀分布在表面上或集中在重心上的。但是它的影响必须通过很复杂的考察来

---

① {在这一定义中，以及在电力定律的叙述中，各带电物体周围的媒质被假设为空见第 94 节。}

算出。然而，这一点已由泊松以一种很能干的方式针对两个球的情况作到了，而且它的考察也由W.汤姆孙爵士在他的《电像理论》中大大地简化了。见第172－175节。

另一个困难起源于装仪器的盒子的壁上的感生电荷的作用。通过用金属来制造仪器的内表面，这种效应可以被弄成确定的和可以测量的。

一个独立的困难起源于各物体的不完全的绝缘；由于这种不完善，电荷会不断地减少。库仑考察了耗散的规律，并且在他的实验中对这一点进行了改正。

对带电导体进行绝缘的方法，以及测量电效应的方法，自库仑时代以来已经大大改进，特别是由W.汤姆孙爵士大大改进了。但是库仑的力定律的完全准确性，不是通过任何直接的实验和测量（这些可以用作定律的例证）来确立，而是通过实验Ⅶ所描述的那种现象的一种数学考虑来确立的；那现象就是，如果使一个带电导体B和一个中空的闭合导体C的内表面相接触，然后把它从C中拿出而不再触及C，则不论C的外表面是以什么方式带电，B 都会完全放电。利用精密的验电器，很容易证明在这种操作以后没有任何的电荷留在B上,而根据在第74c、74d节中所给出的数学理论，只有当力随距离的平方面反比变化时才能有这种情况，而假如定律是任何另外的形式则B将是带电的。

电　场

44.〕“电场”就是针对电现象来考虑的带电体附近的那一部分空间。它可以被空气或其他物体所占据，或者也可以是所谓的真空，即我们已经用一切能用的手段从那里撤出了每一种物质的那种空间。

如果一个带电体被放在电场的任何部分，它通常就会对其他物体的电产生一种可觉察的干扰。

但是，如果物体很小，而它的电荷也很小，则其他物体的电将不会受到显著的干扰，而物体的位置也可以被认为是由它的质心来确定。这时，作用在这个物体上的力就将正比于它的电荷，而当电荷变号时力也将反向。

设e是物体的电荷，而F是沿一个确定的方向作用在物体上的力，则当e很小时F是正比于e的，或者说

$$F=Re,$$

式中R依赖于场中其他物体上的电分布。假如电荷e可以弄得等于1而不致干扰其他物体的带电情况，则我们有F＝R。我们将把　R叫做所给场点上的“合电动强度”(resultant elec－tromotive intensity)。当我们想要表达这个量是一个矢量的事实时，我们将用一个德文花体字母■来代表它。

总电动势和电势

45.〕如果带有小电荷e的那个小物体被从一个给定点A沿着给定的路径移动到另一点B，则它在沿途的每一点上当然都会经受到一个力Re，此处R当然是逐点变化的。设电力对物体作的总功是Ee，则E称为沿路径AB

的“总电动势”。如果路径形成一个闭合回路而沿回路的总电动势不等于零，则电不能处于平衡而一个电流将会出现。因此，在“静电学”中，沿任一闭合回路的总电动势必然为零；于是，如果 A 和 B 是回路上的两个点，则由 A、B 二点将回路分成的两条路径上的从 A 到 B 的总电动势是相同的，而既然其中任一条路径都可以独立于另一条而变化，沿一切路径从 A 到 B 的总电动势就都是相同的。

如果 B 被取为对一切点而言的参照点，则从 A 到 B 的总电动势称为 A 点的“电势”。它只依赖于 A 的位置。在数学的考察中，B 一般取在离各带电体为无限远处。

一个带正电荷的物体倾向于从正电势较大的地方运动到正电势较小或电势为负的地方，而一个带负电荷的物体则倾向于沿相反的方向而运动。

在一个导体上，电是可以相对于导体而自由运动的。因此，如果一个导体的两部分具有不同的电势，正电就将从具有较大电势的部分运动到具有较小电势的部分，只要电势差继续存在就会一直这样运动。因此，一个导体不能处于电平衡，除非它的每一个点都有相同的电势。这个电势叫做“导体的电势”。

等势面

46.〕如果在电场中画出的或假设画出一个曲面，使得面上各点的电势都相同，则该曲面叫做一个“等势面”。

一个限制在这种曲面上的带电质点将没有从曲面的一个部分运动到另一个部分的趋势，因为电势在每一点上都是相同的。因此，一个等势面就是一个平衡面或水准面。

等势面上任何一点处的合力都是沿着该面的法线方向的，而力的量值则使得当从面 V 过渡到面 V′时对单位电荷作的功是 V－V′。

任何两个具有不同电势的等势面都不可能相交，因为同一个点不能具有多于一个的电势。但是一个等势面却可以和自己相交，而其相交处永远是平衡点或平衡线。

处于电平衡中的一个导体的表面必然是一个等势面。如果导体所带的电在整个表面上都是正的，则当我们从表面向每一边运动时电势都将减小，从而导体将是被一系列电势较低的等势面所包围着的。

但是，如果（由于外在带电体的作用）导体的某些部分带正电而另一些部分带负电，则整个等势面将包括导体表面本身以及一系列别的曲面，他们沿一些曲线而和导体表面相交，那些曲线区分着正电区域和负电区域[①]。这些曲线将是平衡线，从而放在其中一条曲线上的一个带电质点将不会受到沿任何方向的力。

当一个导体的表面有的地方带正电而有的地方带负电时，则除了该导体以外必然还存在什么别的带电体。因为，如果我们允许一个带正电的质点从表面上带正电的区域开始永远沿着作用在它上面的力的方向而运动，则质点所在处的电势将不断减低，直到质点达到了一个电势比第一个导体的电势为低的带负电的曲面，或是一直运动到无限远处。既然无限远处的

[①] {参阅第 80 节和第 114 节。}

电势是零，只有当导体的电势为正时后一情况才是可能发生的。

同样，一个带负电的质点，当从表面的带负电的部分运动开去时，必将达到一个带正电的表面，或是一直运动到无限远，而后一情况也只有当导体的电势为负时才能发生。

因此，如果正电荷和负电荷都存在于一个导体上，场中就必然有另外的物体，其电势和导体电势同号而数值较大，而如果场中只有一个任意形状的导体，则它的每一部分所带的电荷都是和导体电势同号的。

没有包含任何带电体的中空导体容器的内表面是完全不带电的。因为，假如该表面的任一部分是带正电的，则沿着该处力的方向而运动一个带正电的质点必须达到一个电势较低的带负电的曲面。但是整个的内表面具有相同的电势。由此可见它不能带有电荷[2]。

放在容器中并和它接通的一个导体，可以看成是由容器的内表面包围着的。因此这样一个导体没有电荷。

力　线

47.〕由一个永远沿着合强度方向运动的点所描绘出来的曲线，叫做‘力线”。它和等势面相正交。力线的性质将在下文加以更充分地说明，因为法拉第曾经用他的力线概念来表示了许多电作用的规律；那些力线是在电场中画出的，而且是指示着各点的方向和强度的。

电张力

48.〕既然一个导体的表面是一个等势面，合强度就是垂直于表面的，而且在第 80 节中即将证明它是正比于电的表面密度的。因此，表面上任何一个小面积上的电就将受到一个力的作用，这个力指向导体的外面并正比于合强度和面密度的乘积，也就是正比于合强度的平方。

这个在导体的每一部分上作为张力而向外起作用的力，将被称为“电张力”。它是像普通的机械张力那样用作用在单位面积上的力来量度的。

“张力”一词曾在若干含糊的意义下被电学家们所应用，而且在数学语言中曾被用为“电势”的同义语。但是，经过对这一名词曾被应用的那些事例的仔细检查，我觉得把所谓张力理解为作用在导体表面或其他地方的每平方英寸上的若干磅的拉力将是和它的用法及机械类例更加一致的。我们将看到，法拉第把这一电张力看成不仅存在于带电表面上而且存在于力线的各点上的那种观念，就导致把电作用看成媒质中的张力现象的一种理论。

电动势

49.〕当把电势不同的两个导体用一条细导线连接起来时，电沿导线而流动的那种趋势是用两个物体的电势之差来量度的。因此，二导体之间或

[2] ｛为了使证明完全无懈可击，必须指出，根据第 80 节，在表面带电的地方力不能零，而根据第 112 节，在没有电荷的地方电势不可能有极大值或极小值。｝

二点之间的电势差，就叫做二者之间的电动势。

电动势并不是在一切事例中都可以表示成电势差的。然而那些事例在“静电学”中是不予考虑的。当我们遇到非均匀电路、化学作用、磁体的运动、不相等的温度等等问题时，我们将再来考虑那种事例。

导体的电容

50.〕如果一个导体是绝了缘的，而所有周围的导体则都通过接地而弄成了电势为零，而且，若导体当带有电量 E 时有电势 V，则 E 和 V 之比叫做导体的“电容”。如果导体被一个导体容器完全包围而不触及该容器，则内部导体上的电荷将和外部导体之内表面上的电荷相等而异号，而且将等于内部导体的电容乘以二导体的电势差。

集电器

两个导体的相对表面由一种绝缘媒质的薄层隔开，这样一个体系叫做一个“集电器”。两个导体叫做“极”，而绝缘媒质叫做“电介质”。集电器的电容正比于相对表面的面积而反比于它们之间的薄层的厚度。一个莱顿瓶是一个以玻璃为绝缘媒质的集电器。集电器(accumulator)有时叫做“电容器”(condenser)，但是我宁愿用“电容器”一词来专指不是用来储存电荷而是用来增大其面密度的仪器。

各物体有关静电的性质

电通过物体时所受的阻力

51.〕当一个电荷被传送到一个金属物体的任一部分上时，电就会很快地从高电势的地方向低电势的地方转移，直到整个物体的电势变为相同为止。在普通实验所用的那些金属块的事例中，这种过程是在短得无法观察的时间中完成的，但是在很长、很细的导线的事例中，例如在电报所用的那种导线的事例中，由于导线在电荷通过时的阻力，电势是直到一段可觉察的时间以后才会变成均匀的。

对电荷的通过表现出来的阻力，在不同的物质中是非常不同的，正如在第 362、364 和 367 节的那些表中可以看到的那样；那些表将在处理“电流”时再来解释。

所有的金属都是良导体，尽管铅的电阻是铜或银的电阻的 12 倍，铁的电阻是铜的电阻的 6 倍。而汞的电阻是铜的电阻的 60 倍。

许多液体是通过电解而导电的。这种导电模式将在第二编中加以考虑。在目前，我们可以把一切含水的液体和一切潮湿物体都看成导体；它们的导电性能比金属的导电性能差得多，但是它们却不能在一段长得可以观察的时间内对一个电荷进行绝缘。电解质的电阻随温度的升高而降低。

另一方面，不论潮湿或干燥，大气压下的气体却是很接近完全的绝缘体；当电张力很小时，我们迄今还没有关于电借助于普通的传导而从气体中通过的证据。带电体的电荷的逐渐损失，在每一个事例中都可以追溯到

支撑物的不完善的绝缘，电不是通过支撑物的物质就是沿着它的表面被传走的。因此，当两个带电体挂得相距较近时，如果他们带的是异号的电，他们的电荷就会比带同号的电时保持得较久。因为，当他们带异号的电时，虽然倾向于使电通过他们之间的空气的那种电动势要大得多，但是却没有可觉察的电荷损失会按这种方式而出现。实际的损失是通过支撑物而发生的，而当物体带同号的电时，支撑物中的电动势是最大的。只有当我们预期损失是由电通过物体之间的空气来进行时，结果才会显得反常。一般说来，电在气体中的通过，是借助于破坏性的放电来进行的，而且在电动强度达到某一定值以前是不会开始的。可以存在于在一种电介质中而刚刚不致引起放电的那种电动强度的值，叫做电介质的“电强度”(electricstrength)。当压强从大气压减小到大约三毫米汞高的压强时，空气的电强度就会减小[①]。当压强进一步减低时，电强度就迅速地增大，而当抽空进行到迄今所能作到的最高程度时，产生一个四分之一英寸的火花所需要的电动强度就大于在普通压强下的空气中产生一个八英寸的火花所需要的电动强度。

因此，一个真空就是一种电强度很大的绝缘体；所谓真空是指当我们把所能取走的一切东西都取走以后留在容器中的空间。

氢气的电强度比同压下的空气的电强度小得多。

某些种类的气体当冷却时是特别好的绝缘体，而且 W.汤姆孙爵士曾经在密封的玻璃泡中保持电荷达若干年之久。然而，同样的玻璃在低于水的沸点的温度下却会变成一种导体。

古塔波胶、弹性橡皮、硬橡皮、石腊和树胶，是很好的绝缘体，古塔波胶在 75°F 下的电阻约为铜的电阻的 6×10^{19} 倍。冰、水晶和凝固了的电解质也是绝缘体。

某些液体，例如石油精、松节油和某些油类，也是绝缘体，但性能比最好的固体绝缘体要差。

电介质

介电常数

52.〕一切物体，如果他们的绝缘能力使得当他们被放在两个电势不同的导体之间时作用在他们上的电动势并不会立即使电势简化成一个恒定值，则他们被法拉第称为“电介质”。

由迄未发表的开文迪什的研究工作可知〕[①]，在 1773 年以前，他就已经测量了玻璃板、树胶板、蜂腊板和虫胶板的电容，而且已经确定了他们的电容和同样大小的空气层的电容之比。

并不知道这些研究结果的法拉第发现，一个集电器的电容，既依赖于各导体本身的尺寸和相对位置也依赖于二导体之间的绝缘媒质的性质。通过用别的绝缘媒质来代替空气作为集电器的电介质而在其他方面并不改变它，他发现，当用空气和其他气体作为绝缘媒质时，集电器的电容基本上

[①] ｛电强度为最小时的压强，依赖于充有气体的容器的形状和大小。｝

[①] ｛见 Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish.｝

保持相同，但是当用虫胶、硫磺、玻璃等等来代替空气时，电容就按一个比值而增大，该比值对不同的物质是不同的。

利用更精细的实验方法，玻耳兹曼成功地观察到了气体的感应电容在不同压强下的变化。

法拉第称之为“比感本领”(specific inductive capacity)的这一性质，也叫做物质的“介电常数”。它被定义为一个集电器当其电介质为所给物质时的电容和电介质为真空时的电容之比。

如果电介质不是一种好的绝缘质，则很难测量它的感应本领，因为集电器不会在足够长的时间内保持一个可以测量的电荷。但是感应本领肯定不是只限于良好绝缘体才有的一种性质，很可能它在一切物体中都是存在的①。

电的吸收

53.〕经发现，当一个集电器包括了某些电介质时，就会发生下列的现象。

当集电器已经充了一段时间的电并突然放了电然后又绝了缘时，它就变得按原来的正负而重新充电，但充电的程度较小，于是它就可以再一次又一次地重复放电，而这些放电是逐渐减小的。这一现象称为“残余放电现象”。

瞬时放电显现为永远正比于放电时刻的电势差，而二量的比值就是集电器的真实电容。但是，如果放电叉的接触时间长得包括了几次残余放电，则根据这样的放电来算出的集电器的电容将是太大的。

如果充电后保持绝缘，集电器就会表现出通过导电而损失电荷，但是经发现，损失的速率在开始时的比在以后要大得多，从而如果按开始时出现的情况来推断，则电导率的量值将是太大的。例如，当一条海底电缆受到检测时，它的绝缘性能就会显得是随充电的进行而变好的。

当物体的相对两面保持着不同的温度时，就出现一种类似于热传导的热现象。在热的事例中，我们知道现象依赖于由物体本身所吸收的和放出的热。因此，在电现象的事例中，曾经假设电是被物体的各部分吸收和放出的。然而我们在第 326 节中即将看到，通过假设电介质在某种程度上为不均匀，就可以解释现象而不必引用关于电的吸收的假说。

所谓的“电吸收”现象并不是物质对电的实际吸收；这一点可以通过当一种物质被一个闭合的、绝了缘的金属容器所包围时用任何方式使该物质带电来加以证实。当物质被充电然后被绝缘时，如果使容器瞬时放电然后使之绝缘，则从来不会由于容器内带电物质的电的逐渐耗散而有任何电荷传给容器①。

54.〕这一事实被法拉第用一种说法表达了出来；就是说，不可能用一

---

① ｛Cohr 和 Arons(Wiedemann's Annalen,v.33,p.13)曾经考察了例如水和酒精之类的某些非绝缘液体的比感本领，发现他们是很大的。例如，蒸馏水的比感本领约是空气的比感本领的 76 倍，乙醇的比感本领约是空气的比感本领的 26 倍。｝

① ｛关于电吸收现象的详细论述，见 Wiedemann's Elektricit(t， v.2,p.83．｝

种电来使物质带有一个绝对的和独立的电荷[②]。

事实上，从已经已经作过的每一个实验的结果来看，在由一个金属容器所包围的一组物体中，不论各物体之间以什么方式发生电作用，容器外表面上的电荷都是不会改变的。

喏，假如任何一部分电可以被迫进入一个物体而被物体所吸收或变成潜在的电，或者至少是存在于物体中而并不通过感应途径而和一部分相等而异号的电发生关系，或者，假如它在被吸收以后又可以逐渐显现出来并回返其普通的作用方式，我们就将会发现周围容器上的某种电荷的变化。

既然从来没有发现过这种情况，法拉第就得出结论说，不可能把一个绝对电荷传送给物质，而且，任何一部分物质都不能通过任何的状态变化而生出一种或另一种电，也不能使之成为潜在的电。因此他就把感应看成“在电的最初发展及其后继现象中都是一种本质的功能。”他所说的感应(1298)就是电介质的粒子的一种极化状态，每一个粒子都是一边带正电而另一边带负电，每一个粒子所带的正电和负电都永远正好相等。

破坏性放电[①]

55.〕如果电介质的任一点上的电动强度逐渐增大，最后就会达到一个极限，那时会出现通过电介质的突然放电，通常会伴随以光和声，以及电介质的暂时的或永久的破坏。

出现这种情况时的电动强度，是我们所说的电介质之电强度的一种量度。它依赖于电介质的品种，而且在浓密空气中比在稀薄空气中为大，在玻璃中比在空气中为大。但是，在每一个事例中，如果电动势被弄得足够大，电介质就会被击穿而它的绝缘能力就会被破坏，于是就会有一个电流通过它。正是由于这种原因，在任何地方引起无限大的电动强度的电荷分布才是不可能存在的。

电　辉

例如，当一个带有尖端的导体带了电时，建筑在它会保持电荷的假说上的理论就会导致这样的结论：当我们向尖端趋近时，电的面密度就会无限地增大，从而在尖端本身那儿，面密度以及还有合电场强度就将是无限大。假若空气或周围的其他电介质具有无限的绝缘能力，这一结果就会真正出现。然而事实却是，尖端附近的合强度一经达到一定的限度，空气的绝缘能力就会垮掉，于是靠近类端的空气就会变成一种导体。在离尖端有某一距离处，合强度不足以击穿空气的绝缘，于是电流就会被阻断，而电荷就聚集在尖端附近的空气中。

于是尖端就被一些空气粒子[①]所包围,各粒子和尖端本身带有同号的电

[②] Exp.Res.,vol.i.seriesxi.,ii.‘On the Absolute Charge of Matter,’and§1244.

[①] 见 Faraday,Exp.Res.,vol,i.,seriesxii.andxiii.〔自从本书第一版问世以来，已经进行了关于电在气体中的通过的那么多的研究，以致仅仅列举他们就会超出一条小注的范围之外。这些研究者们得到的结果，将在“补遗卷”中进行综述。〕

[①] 〔或尘埃粒子？不含尘埃和水蒸汽的空气除在很高的温度下以外是否可以带电是相当可疑的；参阅

荷。尖端附近这种带电空气的效应，就在于使尖端本身处的空气免除一部分极大的电动强度，而假如只有导体是带电的，则空气是会受到那种电动强度的作用的。事实上，带电体的表面不再是很尖的了，因为尖端被一团带电的空气包围了起来，空气团的表面而不是固体导体的表面就可以看成带电的外表面。假如这一部分空气可以保持静止，带电体就将保持它的电荷，如果不是保持在它自身上，至少也是保持在它的邻域中。但是，带电的空气粒子在电力的作用下可以自由运动，他们倾向于离带电体而远去，因为他们是和带电体带有同一种电的。因此，带电的空气粒子就倾向于沿着力线的方向而运动开去，并向周围带异号电的物体靠扰。当他们离开以后，其他未带电的粒子就占据他们在尖端附近的位置，而既然这些粒子不能把过大的电张力从靠近尖端的粒子那儿隔开，一次新的放电就会发生；在此以后，新带了电的粒子又会离开。依此类推，只要物体还带电，事情就继续进行。这样，就会引起下列的现象：在尖端上和在尖端附近，有一个稳定的电辉，这起源于在尖端和它附近的空气之间的进行着的恒稳放电。

带电的空气粒子倾向于沿着相同的公共方向运动开去，于是就引起一种从尖端开始的空气流；这种空气流包括一些带电的粒子，也许还包括一些被带电粒子带走的其他粒子。通过人为地助长这一电流，我们可以增大这个电辉，而通过阻断这个电流，我们也可以阻止电辉的继续出现[①]。

尖端附近的电风有时是很迅速的，但它很快就会失去其速度，于是空气和它的带电粒子就会随大气的一般运动而飘荡，并形成一种不可见的电云。当各带电粒子来到一个导电表面例如一面墙的附近时，他们就会在那个表面上感应出一个和他们自己的电荷相反的电荷，于是就被引向墙壁；但是既然电动势是很小的，他们就可能在墙的附近停留很久，而不是一下子就到达壁而并被放电。于是他们就形成一种粘在导体上的带电氛围，其存在有时可以用静电计探测出来。然而，和通常引起刮风的那些依赖于由温度差所导致的密度差的力比起来，大团带电空气和其他物体之间的作用力是极其微弱的，因此，普通的雷电云的运动的任何可观察的部分都很少可能是由电的原因所引起的。

电通过带电粒子的运动而从一个地方移动到另一个地方，这种过程叫做“电运流”或“运流放电”。

因此，电辉是由电在一小部分空气中的持续通过所引起的；在那一部分空气中，电张力很大，从而就使附近的空气粒子带了电并被形成现象之重要部分的电风所吹走。

电辉在稀薄空气中比在浓密空气中更容易形成，而且当尖端带正电时比当它带负电时更容易形成。正电和负电之间的这一差别以及其他差别，值得想发现有关电的本性的某些东西的人们仔细研究。然而这些差别还没有很满意地和任何已有的理论联系起来。

电　刷

“补遗卷”。}

[①] 见 Priestley's History of Electricity,pp.117 and 591;以及 Cavendish's‘Electrical Re－searches,’Phil．Trans.,1771,§4,或 Art.125 of Electrical Researches of the Honourable Henry Cavendish.

56.〕电刷是一种现象，可以通过使一个钝端或一个小球带电来产生；这时带电物体产生一个电场，场中的电张力随距离的增大而减小，但不像使用尖端时减小得那样快。电刷包括一些相继的放电，当从小球向空气中散开时他们分成许多枝杈，并终止在带电的空气部分中或终止在某一别的导体上。电刷伴随得有一种声音，其音调依赖于相继放电之间的间隔，而且这时不像在电辉事例中那样存在空气流。

电火花

57.〕当在两个导体之间的空间中到处都有很大的张力时，就像在两个球间的距离比他们的半径大不了许多时的那一事例中一样，当出现放电时通常是采取火花的形式；通过这种火花，差不多全部的电都会立即被放掉。

在这一事例中，当电介质的任何一部分已经垮掉时，它沿电力方向的前后两侧的部分就会处于更大张力的状态下，于是那些部分也会垮掉，于是放电就直接通过电介质来进行，正如当在一张纸的边沿上弄一个豁口时沿着纸边作用的一个张力就会使纸从豁口开始裂开，而裂缝有时会散向纸上有弱点的地方一样。电火花也同样是从电张力最初克服了电介质的绝缘性能的那一点开始，并沿着表观上不规则的路径前进的，这样它就会把一些弱点（例如漂浮在空气中的尘埃颗粒）包括进来。

所有这些现象都在不同的气体中很不相同，而在不同密度的同一种气体中也很不相同。在某些事例中，出现发光层和黑暗层的有规则的交替，因此，例如如果电通过一个充有很少量气体的管子，人们就会看到一些光辉的圆片沿着管子的轴线按近似相等地间隔横向排列，它们之间由一些黑暗层分开。如果电流强度被加大，一个新的圆片就会开始出现，它和那些旧的圆片将按较紧的顺序排列起来。在由迦西奥先生所描述的一个管子中[①]，圆片的光在负电一边是发青的，在正电一边是发红的，而在中部地段则是鲜红色的。

这些以及另外一些放电现象是极端重要的。当他们被更好地了解了时，他们很可能在气体及充满空间的媒质的本性方面以及在电的本性方面带来很大的光明。然而，在目前，他们还必须被认为是处于电的数学理论的范围之外的。

电气石的电现象[②]

58.〕电气石的以及其他矿物的某些晶体，具有可以称之为“电极性”的一种性质。假设一个电气石晶体具有均匀的温度，而且表观地看来在表面上并没有带电。现在把它的温度升高，而晶体仍处于绝缘状态。这时就会看到它的一端带正电而另一端带负电。用一个火焰或其他手段把这种表观带电现象从晶体表面上消除，然后，如果再把晶体加热一些，同样的带

[①] Intellectual Observer,March,1866.

[②] {关于这一性质以及由光和热引起的晶体带电现象的进一步论述，见 Wiedemann'sElektricit(t,v.28,p.316.}

电现象就又会出现，但是如果晶体被冷却，加热时带负电的一端就会带正电。

这些带电现象是在晶轴的两端观察到的。有些晶体一端呈六面角锥形而另一端呈三面角锥形。在这些晶体中，当晶体被加热时呈六面角锥形的一端就带正电。

W.汤姆孙爵士假设这些以及其他一些半多面式晶体的每一部分都有确定的电的极性，其强度依赖于温度。当晶体表面扫过一个火焰时，表面上的每一部分都会起电到一定的程度，以致对一切的外部各点来说，正好足以抵消内在极性的影响。于是晶体就没有任何外部的电作用，也没有改变其带电方式的任何倾向。但是如果它被加热或被冷却，每一晶体粒子的内部极化就会改变而不再能被表面上的电所抵消，于是就出现一个合外部作用。

本论著的计划

59.〕在本书中，我打算首先解释普通的电作用理论。这种理论把电作用看成只依赖各带电体和他们的相对位置，而并不考虑可以出现在中间媒质中的任何现象。用这种办法，我们将建立平方反比定律、势论、以及拉普拉斯的和泊松的方程。其次我们将考虑一个带电导体组的用一组方程联系起来的电荷和电势，各方程的系数在我们现有数学方法不能适用的那些事例中可以被假设为由实验来确定，而由这些方程，我们将确定在不同的带电体之间作用着的机械力。

然后我们将考察某些普遍定理；利用这些定理，格林、高斯和汤姆孙曾经指示了求解电分布问题的条件。这些定理的一个结果就是，如果泊松方程被任何一个函数所满足，而且这个函数在每一导体的表面上具有该导体的电势的值，则这个函数就代表每一个点上的体系的实际电势。我们也将导出一种方法来找出可以有精确解的那些问题。

在汤姆孙定理中，体系的总能量用在各带电体之间的整个空间中求的某量的积分表示了出来，也用只在带电表面上求的积分表示了出来。于是这两个表示式的相等就可以物理地加以解说。我们可以把带电体之间物理关系或是设想为中间媒质的状态的结果，或是把它设想为带电体之间一种直接的超距作用的结果。如果我们采用后一种观念，我们就可以确定作用定律，但是我们却绝不能进一步思索作用的原因。另一方面，如果我们采用通过媒质的作用的观念，我们就会被引导着来探索媒质之每一部分中的作用的本性了。

由定理可见，如果我们应该到电介媒质的不同部分中去寻求电能的存身之处，任一小部分媒质中的能量就必将依赖于该处合电动强度的平方乘以一个叫做媒质之比感本领的系数。

然而，当从最普遍的观点来考虑电介质的理论时，一个更好的作法却是把任意点上的电动强度和该点上的媒质的电极化区分开来，因为这些有向量虽然是互相联系着的，但在某些固体物质中却不是沿着相同的方向的。单位体积的媒质电能量的最普遍表示式，就是电动强度和电极化之积乘以二者夹角的余弦的二分之一。在所有的流体媒质中，电动强度和电极化都是同方向的和具有恒定比值的。

如果我们按照这一假说来计算存在于媒质中的总能量，我们就将发现它等于按照直接超距作用假说而求得的由各导体的电荷所引起的能量。因此这两种假说在数学上是等价的。

现在，如果我们根据把所观察的带电体之间的机械作用看成通过并借助于媒质而进行的那一假说来着手考察媒质的机械状态，我们就会像在一个物体通过绳子的张力或棍子的压力而对另一物体作用以力的那种习见的例子中一样，发现媒质必然处于一种机械胁强的状态之中。

正如法拉第所指出的那样[①]，这种胁强的本性就在于，一个沿力线方向的张力和一个沿一切垂直于力线的方向的相等压力相结合。这些胁强的量值正比于单位体积的电能量，或者换句话说，正比于合电动强度的平方乘以媒质的比感本领。

这种胁强分布，是唯一可以和观察到的对各带电体的机械作用相一致而且也和观察到的各带电体周围流体电介质的平衡相一致的一种分布[①]。因此，我曾经想到，假设这种胁强状态的实际存在并追索这一假设的推论，是科学程序中的有保障的一步。由于发现电张力一词是在几种含糊不清的意义下被使用的，我曾经力图把它的应用限制在我认为其中某些应用过它的人们所曾设想的那种意义中，也就是用它来指媒质中导致带电体的运动并当不断增大时导致破坏性放电的那种胁强状态。在这种意义下，电张力就和一根绳子中的张力属于同一种类并用相同的方式来量度，而可以禁受某一张力而不能禁受更大张力的电介媒质就可以被说成有一定的强度，其意义正和一根绳子被说成有一定的强度时的意义相同。例如，汤姆孙曾经发现，在出现一个火花之前，常压常温下的空气可以禁受住一个每平英尺 9600 格令重的电张力。

60.〕根据电作用不是物体之间的直接超距作用而是借助于物体间的媒质来发生的作用的这种假说，我们已经推知这种媒质必然处于一种胁强状态中。我们也确定了胁强的特性，并把它比拟成了可以出现在固体中的那些胁强。沿着力线存在的是张力，而垂直于力线存在的是压力，各力的数值相等，而且每个力都正比于该点的合电动强度的平方。确立了这些结果，我们就作好了准备，可以迈出另外一步并对电介媒质的电极化的本性形成一个概念了。

当一个物体的元体积在相对的两面上获得相等而相反的性质时，它就可以说是被极化了。内部极性的概念可以用永磁体的例子来最好地加以研究，而且将在我们进而处理磁性时再来更详细地加以解释。

电介质的一个元体积的电极化是一种受迫状态；媒质被电动势的作用推入这种状态中，而当电动势取消时这种状态也不复存在。我们可以把它设想为是由我们称之为电位移的东西构成的，而电位移则由电动强度所引起。当电动势作用在一种导电媒质上时，它就在媒质中引起一种电流，但是，如果媒质是不导电的，或者说是一种电介质，电流就不能｛长久地｝流过媒质，而电就只能在媒质内部沿着电动强度的方向发生位移；这种位移的大小依赖于电动强度的量值，从而如果电动强度增大或减小，则电位移将按相同的比例增大或减小。

[①] Exp.Res.,seriesxi.1297.

[①] ｛这种说法需要修订：所提到的胁强分布，只是可以产生所要求的效应的许多这种分布中的一种。｝

位移的数量用当位移从零增大到它的实际大小时穿过单位面积的电量来量度。因此，这就是电极化的量度。

电动强度产生电位移的作用和普通机械力产生弹性体之位移的作用之间的类似性是如此地明显，以致我曾经冒昧地把电动强度和对应电位移之比称为媒质的电弹性系数。这个系数在不同的媒质中是不同的，而且反比于每一媒质的比感本领而变化。

电位移的变化显然就构成电流[①]。然而这种电流只有在电位移变化的过程中才能存在，而既然电位移不能超过一个一定的值而不引起破坏性的放电，这种电流也就不能像导体中的电流那样不受限制地沿着相同的方向继续流动。

在电气石和另一些热电晶体中，或许有一种电极化状态存在着；它依赖于温度，但不需要一个外电动强度来引起它。假如一个物体的内部是处于一种电极化的状态中的，它的外表面就将以一种方式逐渐变成带电的，以便在物体外面的所有各点上把内极化的作用中和掉。这种外表面上的电荷不能用任何普通的方法来探测，也不能用普通的使表面电荷放电的方法来消除。因此，物质的内极化将根本无法被发现，除非可以通过温度变化之类的方法来使内极化的数量增大或减小。这时外电荷将不再能够中和内极化的外部效应，从而一种表现电荷就会被观察到，正如在电气石的事例中那样。

如果一个电荷 e 被均匀地分布在一个球的表面上，则球周围媒质中任一点上的合强度和电荷 e 除以该点到球心距离的平方成正比。按照我们的理论，这一合强度是和一个沿从球心向外的方向的电位移相伴随的。

如果现在我们画一个半径为 r 的同心球面，则通过这一球面的全部位移 E 将正比于合强度和球面积的乘积。但是合强度正比于电荷 e 而反比于半径的平方，而球面积正比于半径的平方。因此总的位移量 E 就正比于电荷 e 而和半径无关。

为了确定电荷 e 和通过任一球面移动出去的电量 E 之间的关系，让我们考虑当移动量从 E 增大到 $E+\delta E$ 时对介于两个同心球面之间的媒质作的功。如果 V_1 和 V_2 分别代表这些球面之内和之外的电势，则引起所增位移的电动势是 V_1-V_2，从而在增大移动量时所消耗的功就是 $(V_1-V_2)\delta E$。

如果我们现在令内球面和带电球的表面相重合并使外球面的半径变为无限大，则 V_1 变成球的电势 V 而 V_2 变成零，于是在周围媒质中作的总功就是 $V\delta E$。

但是，根据普通的理论，在增加电荷时作的功是 $V\delta e$，而如果像我们所假设的那样，这个功是用来增大了位移，就有 $\delta E=\delta e$，而既然 E 和 e 同时变为零，就有 $E=e$。或者说：

通过和带电球同心的任一球面向外的电位移，等于球上的电荷。

为了确定我们关于电位移的概念，让我们考虑一个集电器，由两个导体平板 A 和 B 以及中间夹着的一层电介质 C 所构成。设 W 是一根连接 A 和 B 的导线，并且让我们假设在电动势的作用下有一个正电量 Q 从 B 沿导线传到了 A。A 上的正电和 B 上的负电将产生一个从 A 向 B 在电介质层中作

[①] ｛如果我们采用上节所论述的那些观点的话。｝

用着的电动势，而这个电动势将在电介质中引起一个从 A 向 B 的电位移。这个电位移的数量，用被迫通过把电介质分成两部分的一个假想截面的电量来量度；这一数量按照我们的理论将恰好是 Q。请参阅第 75、76、111 节。

因此就看到，在一个电量 Q 沿着导线被电动势从 B 传送到 A 从而通过导线的每一截面的同时，同样的电量会由于电位移而通过电介质的每一截面从 A 运动到 B。

电在集电器放电时的移动将是沿相反方向的。在导线中，放电将是 Q 从 A 到 B，而在电介质中，电位移将消退，从而一个电量 Q 将通过每一截面而从 B 运动到 A。

因此，充电或放电的每一事例都可以看成一种沿闭合回路的运动，使得在回路的每一截面上都有相同的电量在相同的时间内通过，而且这不仅在传导电路中是如此（这一点是早已公认的），而且在通常认为电被积累在某些地方的那些事例中也是如此。

61.〕于是我们就得到我们所考查的这种理论的一个很惊人的推论，那就是，电的运动像一种不可压缩的流体的运动一样，使得一个假想的固定闭合曲面中的总量永远保持相同。初看起来，这一结果显得和一个事实直接抵触，那就是我们可以给一个导体充电然后把它引入闭合曲面之内。但是我们必须记得，普通的理论并不顾及我们已经考虑了的电介质中的电位移，而是只把它的注意力限制在导体和电介质的分界面的带电现象上的。在带电导体的事例中。让我们假设电荷是正的，于是，如果周围的电介质向各方面延伸到闭合曲面以外，那就会出现电极化，伴随以整个闭合曲面上从内向外的电位移，而在该曲面上计算的位移的面积分就将等于曲面内的导体上的电荷。

于是，当带电导体被移入闭合曲面之内时，立刻就会有一个等于导体电荷的电量从内向外通过该曲面，从而曲面内的总电量就保持不变。

电极化的理论将在第五章中加以更详细的讨论，而且它的一个机械例证将在第 334 节中被给出，但是这种理论的重要性却只有当我们进入电磁现象的研究时才能得到充分的理解。

62.〕这种理论的特点是：

带电时的能量存在于电介媒质中，不论媒质是固体、液体还是气体，是浓密的还是稀薄的，甚至也可以是所谓的真空，如果它还能传送电作用的话。

任何媒质部分中的能量，是以一种叫做电极化的胁变状态的形式被储存的，电极化的数量依赖于空间中的合电动强度。

作用在一种电介质上的电动势，会引起我们所说的电位移，强度和位移之间的关系在最普遍的情况下属于我们在以后当处理导电问题时即将考虑的那一种，但是在那些最普遍的事例中，位移却和强度同方向，而且在数值上等于强度乘以$\frac{1}{4\pi}K$，此处K是媒质的比感本领。

由电极化引起的每单位电介质体积的能量，等于电场强度和电位移的乘积的一半，如果必要则乘以二者方向之间的夹角的余弦。

在液体电介质中，电极化伴随以沿电感线方向的一种张力，以及沿和电感线相垂直的一切方向的一种相等的压力，单位面积上的张力或压力在

数值上等于同一位置上的单位体积中的能量。

我们所设想的可以由电介质体积划分成的任一体积元的表面，必须被设想为带电的，而表面任一点上的面密度则在量值上等于向内计算的通过表面上该点的位移。如果位移是沿正方向的，则面积元的正面将带负电荷而其反面将带正电荷。当相邻的体积元被考虑在内时，这种表面电荷通常将互相抵消，只有在电介质带有内部电荷的地方或在电介质的表面上是例外。

不论电是什么，不论我们怎样理解电的运动，我们称之为电位移的这种现象都是一种电的运动，其意义和电量通过导线的传送是一种运动的那种意义相同；其唯一的不同就是，在电介质中，有一种我们称之为电弹性的力，它反对着电位移而起作用，并当电动势被取消时迫使电荷返回原处；而在导线中，电弹性则一直是退让的，从而阻力就不是依赖于从它的平衡位置上被移动了的总电量，而是依赖于在给定的时间内通过导体的一个截面的电量。

在每一事例中，电的运动都服从和不可压缩流体的运动所服从的条件相同的条件，那就是，在任何时刻，有多少电从一个任意的给定闭合曲面中流出，就有多少电流进该曲面中来。

由此可以推知，每一电流都必然形成一个闭合的回路。这一结果的重要性，当我们研究电磁现象的定律时就会被看到。

既然正如我们已经看到的那样，直接超距作用的理论和借助于媒质的作用的理论在数学上是等同的，实际的现象就既可以用这种又可以用那种理论来加以解释，如果当出现任何困难时就引用适当的假说的话。例如，莫索提曾经根据普通的吸引力学说导出了电介质的数学理论，他所用的方法只是在研究中对一些符号作出了电学的而不是磁学的诠释，而利用那些符号，泊松曾经根据磁流体的学说导出了磁感应的理论。莫索提假设在电介质内部存在一些小的导电单元，他们的相对的表面可以通过感应而带异号的电，但就整体来看却不能失去和获得电，因为他们彼此之间是由一种不导电的媒质绝了缘的。这种电介质理论是和电的定律相协调的，从而可能实际上是对的。如果它是对的，一种电介质的比感本领就可以大于但不能小于真空的比感本领。迄今还没有发现比感本领小于真空比感本领的一种电介质的实例，但是假如发现了这种实例，莫索提的物理学说就必须被放弃，尽管他的公式将仍然准确而只将要求我们改变其系数的正负号。

在物理科学的许多部门中，人们发现一些形式相同的方程可以应用于肯定有着不同本性的一些现象，例如电介质中的电感应，导体中的电传导，以及磁感应。在所有这些事例中，强度和它所引起的效应之间的关系都是用一组种类相同的方程来表示的，因此，当其中某一课题中的一个问题已经解决时，该问题及其解就可以翻译成其他课题的语言，而新形式下的结果将仍然是对的。

第二章　静电的初等数学理论

作为一个数学量的电量的定义

63.〕我们已经看到，带电体的性质是这样的：一个物体上的电荷可以等于另一物体上的电荷或等于两个物体上的电荷之和，而且，如果两个物体带有相等而相反的电荷，则当把他们一起放在一个绝了缘的闭合导电容器中时就对外面的物体没有任何电影响。我们可以把一个带电体描述为带有一定数量的电荷，用 e 来代表；这样就能够用一种简明而自治的方式来表达所有上述的结果。当带的是正电时，也就是说，按照通常的约定是玻璃式的电时，e 将是一个正量。当带的是负电即树胶式的电时，e 将是负的，而量 $-e$ 就既可以诠释为玻璃电的一个负量，又可以诠释为树胶电的一个正量。

把两个相等而异号的电荷 e 和 $-e$ 加在一起的效果就是用零来表示的一个无电荷的状态。因此我们可以把一个不带电荷的物体看成虚拟地带有其量值不确定的相等而相反的电荷，并把一个带有电荷的物体看成带有不等量的正电和负电，而这些电荷的代数和就构成所观察到的电荷。然而很显然，看待一个带电体的这种方式完全是人为的，而且可以比拟为把一个物体的速度看成由两个或多个不同的速度合成的那种观念，这些不同速度中的任何一个速度都不是物体的实际速度。

关于电荷密度

三维空间中的分布

64.〕**定义**　空间一点上的电荷体密度就是以该点为心的一个球中的电量和球的体积在半径无限减小时的极限比值。

我们将用符号 ρ 来代表这个比值，ρ 可以为正或为负。

在一个表面上的分布

理论的和实验的结果都表明，在某些事例中，一个物体的电荷完全是在表面上的。表面任何一点上的密度，如果按上述的方法来定义就将是无限大。因此我们采用一种不同的方法来量度面密度。

定义　一个表面上某一给定点的电荷密度就是以该点为心的一个球中的电荷和该球所包围的表面的面积在半径无限减小时的极限比值。

我们将用符号 σ 来代表面密度。

把电假设为一种物质性流体或一组粒子的那些作者们在这种情况下不得不假设电在表面上的分布是采取有一定厚度 θ 的薄层的形式的，薄层中的密度是 ρ_0，或者说是起源于尽可能靠近的各粒子的那一 ρ 值。很显然，按照这种理论，就有

$$\rho_0\theta=\sigma。$$

按照这一理论，当 σ 为负时，厚度为 θ 的某一薄层中是完全没有带正电的粒子而只剩下带负电的粒子的，或者，按照单流体学说就是只剩下“物

质”的。

然而却没有任何实验证据表明带电层具有任何厚度，或表明电是一种流体或若干粒子。因此我们宁愿不引用层厚度的符号而只用一个特定的符号来代表面密度。

在一条线上的分布

有时假设电分布在一条线上，即分布在一个我们忽略其粗细的细长物体上，是很方便的。在这种事例中，我们可以把任一点的线密度定义为一个线元上的电荷和该线元长度当线元无限缩短时的极限比值。

如果λ代表线密度，则一条曲线上的总电量是$e=\int \lambda ds$，式中ds是曲线元。同理，如果σ是面密度，则曲面上的总电量是

$$e=\iint \sigma ds,$$

式中 ds 是面积元。

如果ρ是空间任一点上的体密度，则某一体积中的总电量是

$$e=\rho\iiint dxdydz,$$

式中 dxdydz 是体积元。在每一事例中，积分限是所考虑的曲线、曲面或空间部分的界限。

很显然，e、λ、σ和ρ是一些不同种类的量，每一个量都比前一个量低一次空间量纲，因此，如果 l 是一条线，则 e、$l\lambda$、$l^2\sigma$和 $l^3\rho$ 将是同一类量，而如果[L]是长度的单位，而[λ]、[σ]、[ρ]是不同种类的密度的单位，则[e]、[Lλ]、[$L^2\sigma$]和[$L^3\rho$]将各自代表电量的单位。

电量单位的定义

65.]设 A 和 B 是相距为一个单位的两个点，设使其线度比距离 AB 小得多的两个物体带上相等的正电量并把他们分别放在 A 点和 B 点上，并设电荷恰好使二物体相互推斥的力等于在第 6 节中量度的那个力的单位。这时每一个物体上的电荷就被说成是电量的单位[①]。

如果 B 点上物体所带的电荷是负电量的一个单位，既然物体之间的作用应该反向，我们就应该得到等于单位力的一个吸引力。如果 A 的电荷也是负的，并等于 1，则力将是推斥力，并等于 1。

既然任何两部分电量之间的作用不受其他部分的存在的影响，A 处 e 单位的电量和 B 处 e' 单位的电量之间的推斥力就是 ee'，这时AB 等于 1。参阅第 39 节。

带电体之间的力的定律

66.]库仑已用实验证明，线度小于彼此之间的的距离的带电体之间的力，和距离的平方成反比。因此，相距为 r 的带有电量 e 和 e' 的两个这

[①] {在这一定义中，把带电体分隔开来的电介质被假设为是空气。}

样的物体之间的推斥力，就是

$$\frac{ee'}{r^2}.$$

我们将在第 74c、74d、74e 节中证明，这条定律是和观察到的一件事实相容的唯一定律；那事实就是，一个导体，当放在一个闭合中空导体的内部并和它相接触时，将失去其所有的电荷。我们关于距离的平方反比定律之精确性的信念，可以认为是建筑在这一类的实验上而不是建筑在库仑的直接测量结果上的。

两个物体之间的合力

67.]为了计算两个物体之间的合力，我们可以把其中每一个物体都分成体积元，并考虑第一个物体的每一个体积元中的电量和第二个物体的每一个体积元中的电量之间的推斥力。这样我们就应该得到一系列的力，其个数等于我们把两个物体分成的体积元个数的乘积，而且我们应该按照静力学的法则把这些力的效应合并起来。例如，为了求出沿 x 方向的分力，我们将必须求出六重积分

$$\iiint\iiint\frac{\rho\rho'(x-x')dxdydzdx'dy'dz'}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{5}{2}}}$$

的值，式中 x、y、z 是第一物体中一点的座标，而该点处的电荷密度是 ρ，而且 x'、y'、z'和 ρ'是适用于第二物体的各个对应的量，而积分是先在一个物体上然后在另一个物体上计算的。

一点上的合强度

68.]为了简化数学手续，不考虑一个带电体对另一任意形状的带电体的作用而考虑它对一个无限小物体的作用是方便的；那个无限小的物体带有无限小的电量，并位于电作用所能达到的空间中的任一点上。通过使这一物体上的电荷成为无限小，我们使它对第一个物体上电荷的干扰作用成为不明显的了。

设 e 是小物体的电荷，设当它位于点(x、y、z)上时作用在它上的力是 Re，并设力的方向余弦为 l、m、n，这时我们就可以把 R 叫做点(x、y、z)上合电强度。

如果用 X、Y、Z 来代表 R 的分量，就有

X＝Rl，Y＝Rm，Z＝Rn.

在谈论一点上的合电强度时，我们不一定是意味着真有任何的力在那儿作用着，而只不过是说，假如把一个带电体放在那儿，它就会受到一个力 Re 的作用，此处 e 是物体的电荷[1]。

定义 任意点上的合电强度就是将会作用在一个带有单位正电荷的小物体上的力，假如它被放在该点上而并不扰乱实际的电量分布的话。

这个力不但倾向于推动一个带有电荷的物体，而且倾向于推动物体中

[1] 电学和磁学中的电强度和磁强度，对应于重物体理论中通常用 g 来表示的重力强度。

的电，使得正电倾向于沿着 R 的方向而运动，而负电则倾向于沿着相反的方向而运动。因此 R 这个量也叫做点(x、y、z)上的“电动强度”。

当我们想要表示合强度是一个矢量的事实时，我们将用德文花体字母■来代表它，如果物体是一种电介体，则按照本书所采用的理论，电将在物体内发生位移，使得被迫沿着■的方向而运动并通过垂直于■的固定单位面积的电量是

$$■=\frac{1}{4\pi}K\Re■$$

式中■是电位移，■是合强度，而 K 是电介质的比感本领。

如果物体是一个导体，则约束状态是不断地退让的，于是一个传导电流就会被产生，并且一直保持下去，只要■还作用在物体上。

电强度的线积分，或沿一个曲线弧的电动势

69.]沿一条曲线上给定弧 AP 的电动势,在数值上由电强度对从弧的起点 A 移动到弧的终点 P 的一个单位正电荷所将作的功来量度。

如果 S 是从 A 量起的弧的长度，而合强度 R 在曲线的任一点上和沿正方向画出的切线夹一个角∈，则在沿着弧元 ds 的运动中对单位电荷作的功将是

$$R\cos\in ds,$$

而总的电动势 E 将是

$$E=\int_0^s R\cos\in,$$

式中的积分从弧的起点算到弧的终点。

∈如果我们利用强度的分量，则表示式变成

$$E=\int_0^s\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

如果 X、Y 和 Z 恰足以使 Xdx＋Ydy＋Zdz 是 x、y、z 的一个函数－V 的全微分，则有

$$E=\int_A^P(Xdx+Ydy+Zdz)=-\int_A^P dV=V_A-V_P;$$

式中的积分是按任意的方式从点 A 算到点 P 的，不论是沿着所给的曲线还是沿着 A 和 P 之间的任何别的曲线计算都可以。在这种情况下，V 是空间中一点的位置的一个标量函数；就是说，当我们知道了点的坐标时，V 的值就是确定的，而且这个值不依赖于各座标轴的位置和方向。参阅第 16 节。

论点的位置的函数

在以后，当我们把一个量说成点的位置的函数时，我们的意思就是说，对于点的每一个位置，函数都有一个确定的值。我们并不是意味着这个值永远可以用相同的公式针对所有的空间点表示出来，因为它可以在一个给定曲面的一侧用一个公式来表示，而在该曲面的另一侧则用另一个公式来表示。

论势函数

70.]每当力起源于一些吸引力和推斥力，而他们的强度是到任何一些点的距离的函数时，量 $Xdx+Ydy+Zdz$ 就是一个全微分。因为，如果 r_1 是从点(x，y，z)到其中一个点的距离，而 R_1 是那个推斥力，则有

$$X_1=R_1\frac{x-x_1}{r_1}=R_1\frac{dr_1}{dx},$$

Y_1 和 Z_1 的表示式也相似，于是就有

$$X_1dx+Y_1dy+Z_1dZ=R_1dr_1;$$

而既然 R_1 只是 r_1 的函数，R_1dr_1 就是 r_1 的某一个函数$-V_1$ 的全微分。

同理，对于从一个距离为 r_2 的中心作用来的别的力 R_2，也有

$$X_2dx+Y_2dy+Z_2dz=R_2dr_2=-dV_2.$$

但是 $X=X_1+X_2+\cdots$，而 Y 和 Z 也按同样方式合成，故有

$$Xdx+Ydy+Zdz=-dV_1-dV_2-\cdots=-dV.$$

这个量的积分，在它在无限远处为零的条件下，叫做“势函数”。

这一函数在吸引力理论中的应用，是由拉普拉斯在计算地球的引力时引入的。格林在他的《论数学分析对电学的应用》一文中赋予了它以“势函数”的名称。独立于格林而工作的高斯也用了“势”这个词。克劳修斯和另一些人用“势”这个名词来指当使两个物体或体系互相分开到相距无限远时所将作的功。我们将遵循这个词在一些晚近英文著作中的用法，并通过采用 W.汤姆孙爵士所给出的下列定义来避免歧义。

势的定义　一点上的势就是电力将对一个单位正电荷所作的功，如果该电荷被放在该点上而并不扰乱电的分布，并从该点被带到无限远处的话；或者换句话说，就是为了把单位正电荷从无限远处（或从势为零的任何地方）带到所给之点时必须由外力所作的功。

用势来表示的合强度及其分量

71.]既然沿任意弧 AB 的总电动势是

$$E_{AB}=V_A-V_B,$$

如果我们取 ds 作为 AB，就得到分解到 ds 方向上的强度

$$R\cos\in=-\frac{dV}{ds};$$

于是，通过逐次假设 ds 平行于各座标轴，我们就得到

$$X=-\frac{dV}{dx},\ Y=-\frac{dV}{du},\ Z=-\frac{dV}{dz};$$

$$R=\left\{\left|\overline{\frac{dV}{dx}}\right|^2+\left|\overline{\frac{dV}{dy}}\right|^2+\left|\overline{\frac{dV}{dz}}\right|^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

我们将用德文字母■来代表量值为 R 而分量为 X、Y、Z 的强度本身。

导体内部各点的势是相同的

72.]导体就是当它里边的电受到电动势的作用时就允许那些电从物体的一个部分运动到任何其他部分的那种物体。当电处于平衡时，不可能有任何电动强度作用于导体内部。因此在导体所占的全部空间中都有 R＝0。由此即得

$$\frac{dV}{dx}=0,\ \frac{dV}{dy}=0,\ \frac{dV}{dz}=0\ ;$$

从而对于导体的每一个点都有

$$V=C,$$

式中 C 是一个常量。

既然在导体物质内部的一切点上势都是 C，C 这个量就叫做“导体的势”。C 可以定义成为了把一个单位的电从无限远处带到导体上必须由外力作的功，这时假设电的分布并不被单位正电的存在所扰乱[①]。

在第 246 节中即将证明，一般说来，当两个不同种类的导体相接触时，一个电动势就通过接触面而从一个导体作用到另一导体，使得当他们处于平衡时后一导体的势就高于前一导体的势。因此，在目前，我们将假设我们的一切导体都是用相同的金属作成的，并假设他们的温度也是相同的。

如果导体 A 和 B 的势分别是 V_A 和 V_B，沿一条连接 A 和 B 的导线的电动势将是 V_A-V_B，其方向为 AB；这就是说，正电将倾向于从势较高的导体过渡到另一个导体。

在电的科学中，势和电量的关系正如流体静力学中压强和流体的关系或热力学中温度和热量的关系一样。电、流体和热倾向于从一个地方过渡到另一个地方，如果第一个地方的势、压强或温度比第二个地方的要高的话。一种流体肯定是一种实物，热则同样肯定地不是实物，因此，虽然我们可以从这种的类比在对电学量之间的形式化关系形成一些清楚的概念方面得到帮助，我们却必须小心，不要让这一或那一类例引导我们设想电是一种像水一样的实物，或是像热一样的骚动状态。

带电体系所引起的势

73.]设有一单独带点质点，带有一个电量 e，设 r 是点(x'，y'，z')到该质点的距离，则有

$$V=\int_r^{\infty}R\,dr=\int_r^{\infty}\frac{e}{r^2}dr=\frac{e}{r}.$$

设有任意数目的带点质点，其座标为(x_1,y_1,z_1)、(x_2,y_2,z_2) 等等，而其电荷为 e_1、e_2 等等，并设他们到点(x'，y'，z')的距离为 r_1、r_2 等等，则体系在(x'，y'，z')上的势将是

$$V=\Sigma\left(\frac{e}{r}\right).$$

设一个带电体内一点(x，y，z)上的电荷密度为 ρ，则由此物体所引起

① {如果存在势的不连续性，就像当我们从电介质进入导体中时那样，那就必须说明带电质点是被带到导体内部还是只带到它的表面上。}

的势是

$$V=\iiint\frac{\rho}{r}dxdydz;$$

式中

$$r=\{(x-x')^2+(y-Y')+(z-z')^2\}^{\frac{1}{2}},$$

积分遍及整个物体。

论平方反比定律的证明

74a.]带电体之间的力反比于距离的平方这一事实,可以认为是由库仑用扭秤作的直接实验所确立的。然而，我们从这种实验导出的结果，必须被认为有一个误差，这依赖于每一次实验的或然误差，而且，除非操作者的技巧非常高明，用扭秤作的一次实验的或然误差是相当可观的。

力定律的一种准确得多的验证可以从和在第 32 节中描述的实验(实验Ⅶ）相似的实验推得。

开文迪什在他迄未发表的关于电的著作中已使定律的证据依赖于这种实验。

他把一个球固定到了一个绝缘支柱上，并利用玻璃棒把两个半球固定到了两个木架上，木架用铰链装在一个轴上，从而把两个木架合在一起时，两个半球就形成和第一个球同心的一个绝了缘的球壳。

然后，借助于一条短导线，可以把球和球壳接通；导线上结着一条丝线，从而导线可以被取走而并不引起仪器的放电。

在球和半球接通的情况下，他用一个莱顿瓶给两个半球充了电（莱顿瓶的势事先用一个静电计来测出），并立即借助于丝线把连接导线拉了出来；他取走了各半球并使他们放了电，然后用一个通草球静电计检验了内球的带电情况。

通草球静电计在当时(1773 年)被认为是最精密的验电器，它没有探测到内球带电的任何迹象。

然后开文迪什就把早先传给各半球的电荷的一个已知部分传给了内球，并再次用他的静电计检测了内球。于是他发现，内球在最初实验中所带的电荷必然小于整个仪器的电荷的$\frac{1}{60}$，因为假如它更大一些，它就会被静电计所测出。

然后他计算了内球上的电荷和两个半球上的电荷之比，所根据的假说是推斥力反比于距离的一个乘幂，其幂数稍异于 2；他发现，假如这个差数是$\frac{1}{50}$，内球上就会有一个电荷，等于整个仪器的电荷的$\frac{1}{57}$，从而是能够被静电计探测出来的。

74b.]这种实验近来曾经以一种稍为不同的方式在开文迪什实验室中被重作。

两个半球被固定在一个绝缘的支柱上，而内球则用硬橡胶环固定在两半球内的适当位置上。利用这种装置，内球的绝缘支架就永远不会受到任何可觉察的电力的作用，从而就永远不会被充电，因此电沿着绝缘体表面

而爬行的影响就完全被消除了。

两半球不是在检测内球的势之前被取走，而是向地球放了电。内球上给定电荷对静电计的影响不像两半球被取走时那样大，但是这种缺点却小于一个优点，那就是导体容器对一切外来的电干扰提供了完美的屏障作用。

用来连接内球和外壳的那条短导线固定在一个小的金属圆片上；这个圆片形成外壳上的一个小孔的盖子，使得当导线和盖子用一根丝线被拉起来时，静电计的电极就可以从小孔中伸进去，达到内球上。

静电计就是在第 219 节中描述的汤姆孙象限静电计。静电计的外壳和一个电极的外壳永远是接地的，而检测电极也接地，直到外壳的电已经放掉时为止。

为了估计外壳上的原始电荷，把一个小的黄铜球放在了离外壳相当远的绝缘支架上。

实验操作如下：

外壳通过和一个莱顿瓶连接而充电。

小球接地，以通过感应使它带一个负电荷，然后使它保持绝缘。

内球和外壳之间的连接导线利用一根丝线被取掉。然后外壳被放电，并保持接地。

检测电极和地断开，并通过外壳上的小孔和内球接触。对静电计的任何最小的影响都没有被观察到。为了检验仪器的灵敏性，外壳的接地被断开，而使小球向地球放电。于是静电计｛它的检测电极一直和内球接触着｝就显示了一个正的偏转 D。

黄铜球上的负电荷约为外壳原有电荷的$\frac{1}{54}$，而当外壳接地时铜球在它上面感应出来的电荷约为铜球电荷的$\frac{1}{9}$。因此，当铜球接地时，静电计所指示的外壳的势约为原势的$\frac{1}{486}$。

但是，假如推斥力曾经是按 r^{q-2} 而变化的，则由第(94)页上的方程(22)可知内球的势将为外壳的势的－0.1478q 倍。

因此，如果±d 是可能观察不到的静电计偏转的最大限度，而 D 是在实验的第二部分中观察到的偏转，则 q 不能超过

$$\pm\frac{1}{72}\frac{d}{D}。$$

｛因为$0.1478qV / \frac{1}{486}V$必然小于$d / D$．｝现在，即使在一次粗略的实验中 D 也大于 300d，从而 q 不可能超过

$$\pm\frac{1}{21600}.$$

关于实验的理论

74c.］设两个单位物质之间的推斥力是距离的一个任意的给定函数，试

求一个均匀球壳在任一点上引起的势。

设φ（r）是两个单位之间在距离 r 上的推斥力，而 f（r)满足下列条件：

$$\frac{dr(r)}{dr}(=f'(r))=r\int_r^{\infty}\phi(r)dr.(1)$$

设球壳的半径为 a，而其面密度为σ，则如果用α代表球的总电荷，就有

$$\alpha=4\pi a^2\sigma.(2)$$

设 b 代表一个给定点离球心的距离，而 r 代表它到球壳上任意给定点的距离。

如果我们用球座标来确定球壳上的各点，座标的极点为球壳的中心，而极轴则为画向给定点的直线，就有

$$r^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta.(3)$$

球壳面积元的质量是

$$\sigma a^2\sin\theta d\phi d\theta,(4)$$

而由这一面积元在给定点上引起的势就是

$$\sigma\alpha^2\sin\theta\frac{f'(r)}{r}d\theta d\phi,(5)$$

此式应该从φ＝0 到φ＝2π按φ求积分，于是就有

$$2\pi\sigma\alpha^2\sin\theta\frac{f'(r)}{r}d\theta,(6)$$

此式应该从θ＝0 到θ＝π求积分。

把(3)式微分一下，我们就得到

$$rdr=ab\sin\theta d\theta。(7)$$

把 dθ的值代入(6)中，就得到

$$2\pi\sigma\frac{a}{b}f'(r)dr,(8)$$

此式的积分就是

$$V=2\pi\sigma\frac{a}{b}\{f(r_1)-f(r_2)\},(8)$$

式中 r_1 是 r 的最大值，它永远等于 a＋b，而 r_2 是 r 的最小值，它在给定点位于球壳之外时是 b－a，而在给定点位于球壳之内时是 a－b。

如果我们用 a 代表球壳的总电荷,而用 V 代表它在给定点引起的电势，则对壳外一点来说有

$$V=\frac{a}{2ab}\{f(b+a)-f(b-a)\}.(10)$$

对在球壳本身上的一点来说，有

$$\frac{a}{2a^2}f(2a),$$ [①],(11)

而对壳内一点来说则有

① {严格说来是 f(2a)－f(0)，但是如果我们从头到尾都把 f(2a)写成 f(2a)－f(0)而把 f(2b)写成 f(2b)－f(0)，则在第 74d 节中得到的结论并不会改变。}

$$V = \frac{a}{2ab}\{f(a+b) - f(a-b)\}. (12)$$

其次我们必须确定两个同心球壳的势，外壳的半径是 a 而内壳的半径是 b，它们的电荷是α和β。

把外壳的势叫做 A 而把内壳的势叫做 B，则由前面的计算得到

$$A = \frac{a}{2a^2} f(2a) + \frac{\beta}{2ab}\{f(a+b) - f(a-b), \ (13)$$

$$B = \frac{\beta}{2b^2} f(2b) + \frac{a}{2ab}\{f(a+b) - f(a-b)\}. (14)$$

在实验的第一部分中，两个球壳用短导线相接并全都升高到了相同的势，譬如说是 V。

今 A＝B＝V 并在方程(13)和(14)中解出β，我们就求得内壳上的电荷

$$\beta = 2Vb\frac{bf(2a) - a[f(a+b) - f(a-b)}{f(2a)f(2b) - [f(a+b) - f(a-b)]^2}. \ (15)$$

在开文迪什的实验中，形成外壳的两个半球被拿到了我们可以认为是无限远的距离处并放了电。这时内壳（或内球）的势就将变成

$$B_1 = \frac{\beta}{2b^2} f(2b). \quad (16)$$

在后来在开文迪什实验室中重作了的那种实验的形式下，外壳保留了原有的位置，但却接了地，因此 A＝0。在这种情况下，我们可以把内球的势用 V 表示出来

$$B_2 = V\left\{1 - \frac{a}{b}\frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a)}\right\}. \ (17)$$

74d.]现在让我们像开文迪什那样假设力定律是距离的某一负数幂,和平方反定定律相差不大，从而让我们令

$$\phi(r) = r^{q-2}; \quad (18)$$

于是就有

$$f(r) = \frac{1}{1-q^2} r^{q+1} \quad .(19)$$

如果我们假设 q 很小，那就可以按指数定理把此展成下式

$$f(r) = \frac{1}{1-q^2} r\left\{1 + q\log r + \frac{1}{1.2}(q\log r)^2 + \cdots\right\}; (20)$$

而如果我们略去含 q^2 的项，方程(16)和(17)就变成

$$B_1 = \frac{1}{2}\frac{a}{a-b}Vq\left[\log\frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b}\log\frac{a+b}{a-b}\right], \ (21)$$

$$B_2 = \frac{1}{2}V_q\left[\log\frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b}\log\frac{a+b}{a-b}\right], \ (22)$$

由此我们就可以利用实验的结果来确定 q。

74e.]拉普拉斯首先演证了，除了平方反比函数以外，没有任何一个距离的函数能够满足一个均匀球壳对其内部的一个质点并不作用任何力的条

件[②]。

如果我们假设方程(15)中的β永远为零，我们就可以应用拉普拉斯的方法来确定 f(r)的形式。我们由(15)得到

$$bf(2a)-af(a+b)+af(a-b)=0.$$

对 b 微分两次并除以 a，我们就得到

$$f''(a+b)=f''(a-b).$$

如果这个方程是普遍成立的，就有

$f''(r)=C_0$，即为一常量。

由此即得

$$f'(r)=C_0r+C_1;$$

而由(1)即得

$$\int_r^{\infty}\phi(r)dr=\frac{f'(r)}{r}=C_0+\frac{C_1}{r},$$

$$\phi(r)=\frac{C_1}{r^2}.$$

然而我们可以注意，尽管开文迪什关于力随距离某次幂而变的假设可能显得不如拉普拉斯关于力是距离的任意函数的假设那样普遍，但它却是和一件事实能够相容的唯一假设，那事实就是，相似的表面可以充电到具有相似的电性质，{使得他们的力线相似}。

因为，假如力不是距离的某次幂而是距离的另一个任意函数，两个不同距离上的力的比值将不是距离之比的函数而却将依赖于距离的绝对值，从而就将涉及这些距离和一个绝对固定的距离之比了。

事实上，开文迪什本人就已指出[①]，按照他那关于电流体的构造的假说，电的分布不可能在两个几何地相似的导体上是精确相似的，除非电荷正比于体积。因为他假设了电液体的粒子在物体的表面附近是紧紧地挤在一起的，而这就等于假设推斥力的定律不再是平方反比关系[②]，而是当各粒子一旦挤得非常紧对，他们的推斥力就会开始以大得多的速率随着距离的进一步减小而增大了。

电感的面积分和通过一个曲面的电位移

75.]设 R 是曲面上任一点处的合强度，而∈是 R 和向着曲面的正面画出的法线之间的夹角，则 Rcos∈是强度垂直于曲面的法向分量，而如果 ds 是曲面上的面积元，则由第 68 节可知，通过 ds 的电位移将是

$$\frac{1}{4\pi}KR\cos\in dS.$$

既然我们现在暂不考虑除空气以外的任何电介质，就有 K=1。

然而，如果把 Rcos∈dS 称为通过面积元 dS 的“电感”。我们就可以在这一阶段中避免引用关于电位移的理论。这个量在数学物理学中是众所

② Mec.Cel.I.2.

① {Electrical Researches of the Hon.H.Cavendish,pp.27,28.}

② {Idem,Note2,p.370.}

周知的，但是电感一词却是从法拉第那里借来的。电感的面积积分是

$$\iint R\cos\in dS,$$

而由第 21 节可见，如果 X、Y、Z 是 R 的分量，而且这些量在一个被闭合曲面 S 所包围的域内是连续的，则从内向外计算的电感是

$$\iiint R\cos\in ds=\iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)dxdydz,$$

积分遍及于曲面内的全部空间。

由单一力心引起的通过一个闭合曲面的电感

76.]设一个电量 e 被认为放在了一点 O 上，设 r 是任意点 P 到 O 的距离，则该点上的强度是 $R=er^{-2}$，并沿 OP 的方向。

从 O 开始沿任意方向画一条直线到无限远处。如果 O 点是在闭合曲面之外的，这条直线就会或是完全不和曲面相交，或是从曲面穿出多少次就也向曲面进入多少次。如果 O 是在曲面之内的，直线就必须首先从曲面穿出，然后它可以交替地进入和穿出任意次数，而最后一次则是从曲面穿出。

设∈是 OP 和在 OP 与曲面相交处画出的外向法线之间的夹角，则在直线穿出的地方 cos∈将为正，而在直线进入的地方 cos∈将为负。

现在以 O 为心画一个半径为 1 的球面,并使直线 OP 以 O 为顶点描绘一个顶角很小的圆锥面。

这个锥面将从球面上切下一个面积元 dω，并从闭合曲面上在和 OP 相交的各个地方切下面积元 dS_1、dS_2 等等。

于是，既然其中每一个 dS 都和锥面在 r 处以倾角∈相交，就有

$$dS=\pm r^2\sec\in d\omega;$$

而且，既然 $R=er^{-2}$，我们就有

$$R\cos\in dS=\pm e d\omega;$$

当 r 从曲面穿出时取正号，当进入时取负号。

如果点 O 位于闭合曲面之外，则正值的数目和负值的数目相等，从而对任一方向 r 都有

$$\Sigma R\cos\in dS=0,$$

从而就有

$$\iint R\cos\in dS=0,$$

积分遍及整个闭合曲面。

如果点 O 位于闭合曲面之内，则矢径 OP 首先从闭合曲面穿出，给出一个正值 edω，然后就有相等次数的进入和穿出。因此，在这种情况下，就有

$$\Sigma R\cos\in dS=ed\omega.$$

在整个闭合曲面上计算积分，我们就将把整个的球面包括进来，而该球面的面积是 4π，于是就有

$$\iint R\cos\in dS=e\iint d\omega=4\pi e.$$

于是我们就得到结论说，由位于一点 O 上的一个力心 e 引起的通过一个闭合曲面的总的外向电感，如果 O 点位于曲面外面则为零，如果 O 点位

于曲面内部则为 $4\pi e$。

既然在空气中电位移等于电感除以 4π，向外计算的通过一个闭合曲面的电位移就等于曲面内的电量。

推论，也可以推知，如果曲面不是闭合的而是以一个给定的闭合曲线为其边界线的，则通过该曲面的总电感是 ωe，此处 ω 是闭合曲线对 0 点所张的立体角。因此，这个总电感只依赖于闭合曲线，而以该曲线为边的那个曲面则可以任意变化，如果它不从力心的一侧变到另一侧的话。

论拉普拉斯方程和泊松方程

77.]既然由单一力心引起的通过一个闭合曲面的总电感的值只依赖于该力心是否位于曲面之内而不以任何别的方式依赖于它的位置，那么，如果有若干个这种力心 e_1、e_2 等等位于曲面之内，而另一些力心 e_1'、e_2' 等等位于曲面之外，则我们将有

$$\iint R\cos\in dS = 4\pi e\text{；}$$

此处 e 是位于闭合曲面内部的一切力心上的电量的代数和，也就是曲面内的总电量，而把树胶电算作负电。

如果电在曲面内部的分布使得密度在任何地方都不是无限大，则我们按照第 64 节将有

$$4\pi e = 4\pi\iiint \rho\, dxdydz\text{，}$$

而由第 75 节，即得

$$\iint R\cos\in dS = \iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)dxdydz.$$

如果我们取一个体积元 dxdydz 的表面作为我们的闭合曲面，则通过令这些表示式彼此相等，就得到

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz} = 4\pi\rho\text{；}$$

而且，如果势 V 存在，则我们由第 71 节可得

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho = 0.$$

在密度为零的事例中，这个方程叫做拉普拉斯方程。在更普遍的形式下，这个方程是由泊松给出的。它使我们当知道了每一点上的势时能够确定电的分布。

我们将像在第 26 节中一样，把

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\text{写成}\quad -\nabla^2V\text{，}$$

而且我们将用文字来表达泊松方程，就是说，电密度乘以 4π 等于势的浓度。在没有电的地方，势没有浓密，而这就是拉普拉斯方程的诠释。

按照第 72 节，V 在一个导体内部是常量。因此，在一个导体的内部，体密度为零，而所有的电荷必然都位于表面上。

如果我们假设，在电的面分布或线分布中体密度 ρ 保持有限，而电是以薄层或细线的形式存在的，则通过增大 ρ 而减小层的深度或线的截面，

我们就可以趋近真正面分布或线分布的极限，而在整个过程中都成立的方程在极限下将仍能成立，如果适应着实际的情况来诠释它的话。

一个带电面上的势的变化

78a.]势函数必须在第 7 节的意义上是物理地连续的,除了在两种不同媒质的分界面上以外；在分界面的事例中，正如我们即将在第 246 节中看到的那样，两种媒质之间可以有一个势差，使得当电处于平衡时一种物质中的一点上的势比另一种媒质中一点上的势高出一个常量 C，此量依赖于两种媒质的种类和他们的温度。

但是 V 对 x、y 或 z 的一阶导数可以是不连续的，而由第 8 节可知，出现这种不连续性的各点必然位于一个曲面上，曲面的方程可以写成

$$\phi=\phi(x, y, z)=0 \quad (1)$$

这一工面划分了φ为正的区域和φ为负的区域。

设 V_1 代表负域中任一给定点上的势,而 V_2 代表正域中任一给定点上的势，则在曲面φ＝0 上的任一给定点（该点可以说属于两个域）上，将有

$$V_1+C=V_2, \quad (2)$$

式中 C 是曲面正侧的物质中的常量超额势（如果有这种超额的话）。

设 l、m、n 是在曲面任一给定点上向正域画的法线 ν_2 的方向余弦。从同一点向负域画的法线 ν_1 的方向余弦将是－l、－m、－n。

V 沿各法线的变化率是

$$\frac{dV_1}{d\upsilon_1}=-l\frac{dV_1}{dx}-m\frac{dV_1}{dy}-n\frac{dV_1}{dz}, \quad (3)$$

$$\frac{dV_2}{d\upsilon_2}=l\frac{dV_2}{dx}+m\frac{dV_2}{dy}+n\frac{dV_2}{dz}. \quad (4)$$

设在曲面上画出一条任意的线，设从线上一个固定点量起的线的长度是 s，则在曲面的每一点上，从而也在此线的每一点上，都有 $V_2-V_1=C$。把这一方程对 s 求导数，就得到

$$\left(\frac{dV_2}{dx}-\frac{dV_1}{dx}\right)\frac{dx}{ds}+\left(\frac{dV_2}{dy}-\frac{dV_1}{dy}\right)\frac{dy}{ds}$$

$$+\left(\frac{dV_2}{dz}-\frac{dV_1}{dz}\right)\frac{dz}{ds}=0\text{；} \quad (5)$$

而且，既然法线垂直于此线，就有

$$l\frac{dx}{ds}+m\frac{dy}{ds}+n\frac{dz}{ds}=0. \quad (6)$$

由(3)，(4)，(5)，(6)，我们得到

$$\frac{dV_2}{dx}-\frac{dV_1}{dx}=l\left(\frac{dV_1}{d\upsilon_1}+\frac{dV_2}{d\upsilon_2}\right),\ (7)$$

$$\frac{dV_2}{dy}-\frac{dV_1}{dy}=m\left(\frac{dV_1}{d\upsilon_1}+\frac{dV_2}{d\upsilon_2}\right),\ (8)$$

$$\frac{dV_2}{dz}-\frac{dV_1}{dz}=n\left(\frac{dV_1}{d\upsilon_1}+\frac{dV_2}{d\upsilon_2}\right)$$

.(9)

如果我们考虑一点上的电动强度在越过曲面时的变化，则和曲面正交的那个强度分量可能在曲面上突然变化，但是平行于切面的另外那两个分量却在越过曲面时保持连续。

78b.]为了确定曲面的电荷，让我们考虑一个闭合曲面；它部分地位于正域中而部分地位于负域中，因此就包围了不连续性曲面的一个部分。

在这一曲面上求的面积分

$$\iint R\cos\in dS,$$

等于 4πe，此处 e 是位于闭合曲面中的电量。

仿照第 21 节中的作法，我们就得到

$$\iint R\cos\in dS=\iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)dxdydz,$$

$$+\iint\{l(X_2-X_1)+m(Y_2-Y_1)+n(Z_2-Z_1)\}dS,\ (10)$$

式中的三重积分遍及整个的闭合曲面，而二重积分则遍及不连续性曲面。

按照(7)，(8)，(9)把这一方程中各项的值代进来，就有

$$4\pi e=\iiint 4\pi\rho dxdydz-\iint\left(\frac{dV_1}{d\upsilon_1}+\frac{dV_2}{d\upsilon_2}\right)dS.\ (11)$$

但是根据体密度ρ和面密度σ的定义，应有

$$4\pi e=4\pi\iiint\rho dxdydz+4\pi\iint\sigma dS.\ (12)$$

因此，比较这些方程的最后项，就得到

$$\frac{dV_1}{d\upsilon_1}+\frac{dV_2}{d\upsilon_2}+4\pi\sigma=0.\ (13)$$

这个方程叫做面密度为σ的带电面上的 V 的特性方程。

78c.]如果 V 是在一个给定的连续域中到处满足拉普拉斯方程

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0$$

的一个 x、y、z 的函数，而且在该域的一个有限的部分中，V 到处为常量并等于 C,则 V 必在拉普拉斯方程得到满足的整个域中到处为常量并等于 C[①]。

如果 V 并不是在整个域中到处等于 C，则设 S 是包围着 V＝C 的那一有

[①] {也许可以更清楚地说，在从常量势的域中可以不必越过电荷而达到的任一点上，势都等于 C。}

限部分的曲面。

在曲面 S 上，V＝C.

设 v 是在曲面 S 上画出的外向法线。既然 S 是 V＝C 的那一连续域的边界面，当我们沿着法线从曲面开始前进时，V 的值就开始异于 C 了。因此，在刚刚离开曲面的地方，$\frac{dV}{d\upsilon}$就可以为正或为负，但是不能为零，只除了对从划分正面积和负面积的边界线上画出的法线以外。

但是，如果v′是在曲面上画出的内向法线，则 $V'=C$ 而$\frac{dV'}{dv'}=0$。

由此可见，在曲面的每一点上，除了某些边界线以外，

$$\frac{dV}{dv}+\frac{dV'}{dv'}(=-4\pi\sigma)$$

都是一个正的或负的有限量；因此，曲面就在所有各部分都有连续的电分布，除了把带正电的和带负电的面积划分开来的某些边界线以外。

除了在位于曲面 S 上的某些曲线上的那些点上以外，拉普拉斯方程在该曲面上是并不满足的。因此，在其内部有 V＝C 的曲面 S，就包括了拉普拉斯方程在其中得到满足的那一整个的连续域。

作用在一个带电面上的力

79.]作用在一个带电体上的力的三个座标轴的分量普遍表示式具有下列的形式

$$A=\iiint\rho X dxdydz，\quad(14)$$

而平行于 y 和 z 轴的分量 B 和 C 的表示式与此类似。

但是，在一个带电面上，ρ 是无限大，而且 X 可以是不连续的，于是我们就不能直接按照这种形式的表示式来计算力。然而我们已经证明，不连续性只影响垂直于带电面的那个强度分量，另外两个分量则是连续的。

因此，让我们假设 x 轴在所给之点是垂直于曲面的，并且让我们也假设，至少在我们研究的最初部分中，X 并不是真正不连续，而是当 x 从 x_1 变到 x_2 时 X 从 X_1 变到 X_2。如果当 x_2-x_1 无限减小时我们的计算结果得到力的一个确定的极限值，我们就可以认为它在 $x_2=x_1$ 时是对的，并认为带电面是没有厚度的。用在第 77 节中求得的值来代替 ρ，就有

$$A=\frac{1}{4\pi}\iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)X dxdydz，\quad(15)$$

把此式对 x 从 $x=x_1$ 积分到 $x=x_2$，就得到

$$A=\frac{1}{4\pi}\iint\left[\frac{1}{2}(x_2^2-X_1^2)+\int_{x_1}^{x^2}\left(\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)X dx\right]dydz.\quad(15)$$

这就是平行于 yz 平面的一个厚度为 x_2-x_1 的层的 A 的值。

既然Y和Z是连续的，$\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}$就是有限的，而既然X也是有限的，就有

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)Xdx < C(x_2-x_1)\text{，}$$

式中C是$x=x_2$和$x=x_2$之间$\left(\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)X$的最大值。

因此，当 x_2-x_1 无限减小时，这一项必为零，从而

$$A=\iint\frac{1}{8\pi}(X_2^2-X_1^2)dydz\text{，}(17)$$

由第 78b 节得到

$$X_2-X_1=\frac{dV_1}{dx}-\frac{dV_2}{dx}=4\pi\sigma\text{，}(18)$$

因此我们可以写出

$$A=\iint\frac{1}{2}(X_2+X_1)\sigma dydz.\ (19)$$

在这儿，$dydz$是曲面的面积元，σ是面密度，而$\frac{1}{2}(X_2+X_1)$是曲面两侧的电动强度的算术平均值。

因此，一个带电面的面积元是受到一个力的作用的；该力垂直于该元的分量等于该面积元所带的电荷乘以电动强度在曲面两侧的算术平均值。

既然电动强度的其他两个分量并不是不连续的，在估算作用在带电面上的力的对应分量时就不会有什么歧义。现在我们可以假设曲面法线的方向相对于各座标轴有任意的取向,并写出作用在面积元 ds 上的力的各分量的普遍表示式了：

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}(X_1+X_2)\sigma dS\text{，}\\B&=\frac{1}{2}(Y_1+Y_2)\sigma dS\text{，}\\A&=\frac{1}{2}(Z_1+Z_2)\sigma dS\text{，}\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

一个导体的带电表面

80.]我们已经证明（第 72 节），在电平衡中，在一个导体的全部物质中到处都有 X＝Y＝Z＝0，从而 V 是一个常量。

因此就有

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=4\pi\rho=0\text{，}$$

从而ρ就必然在导体的物质中到处为零，或者说导体内部不可能有电。

因此，一种表面上的电分布就是在平衡中的导体上的唯一可能的分布。

只有当物体不是导体时，在物质全体中的一种分布才能可能存在。

既然导体内部的合强度是零，刚好在导体外面的合强度就必然沿法线方向并等于 4πσ，它沿着从导体向外的方向而发生作用。面密度和靠近导体表面处的合强度之间的这种关系叫做“库仑定律”，因为库仑曾经用

实验确定了靠近导体表面的一点上的电动强度是垂直于表面并正比于该点的面密度的。数值关系式

$$R = 4\pi\sigma$$

是由泊松确立的。

由第 79 节可知，作用在导体带电表面的一个面积元 ds 上的力是（因为表面内侧的强度为零）

$$\frac{1}{2}R\sigma dS = 2\pi\sigma^2 dS = \frac{1}{8\pi}R^2 dS.$$

这个力是沿着导体的外向法线而作用的，不论表面上的电荷是正的还是负的。

以每平方厘米达因计，它的值是

$$\frac{1}{2}R\sigma = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi}R^2,$$

它是作为从导体表面向外的一种张力而起作用的。

81.]如果我们现在假设有一个细长的物体被充了电，则通过减小它的横向线度，我们可以达到带电线的概念。

设 dS 是细长物体的一小段的长度，C 是它的周长，而 σ 是它表面上的面密度，则如果 λ 是单位长度上的电荷，就有 $\lambda = c\sigma$，而靠近表面处的合电强度将是

$$4\pi\sigma = 4\pi\frac{\lambda}{c}.$$

如果当 λ 保持有限时 c 无限减小，则表面上的强度将无限增大。喏，在每一种电介质中，都存在一个限度，强度不可能超过那个限度而不引起破毁性的放电。因此，有限的电量位于有限长的线段上，就是和自然界中存在的条件不能相容的一种分布。

即使可以找到一种甚至无限大的力也不能在里边促成放电的绝缘体，也还是不能使一个线状的导体带上有限的电量，因为｛既然一个有限的电荷可以使势成为无限大｝那将要求一个无限大的电动势来把电弄到线状导体上去。

同样可以证明，电量为有限的一个点电荷不能存在于自然界中。然而，在某些事例中，谈论带电的线和点却是方便的，而且我们将假设这些是用带电的导线或小物体来代表，而他们的线度和所关心的主要距离比起来是可以忽略不计的。

既然在给定的势下当导线直径无限减小时存在于给定导线部分上的电量也无限减小，线度相当大的物体上的电分布，当在场内引入很细的金属线时就不会受到显著的影响，例如用来物体之间、物体和地、电机或静电计之间形成电连接的那种金属线就是如此。

论力线

82.]如果画一条线，使它在沿途任意点上的方向都和该点合强度的方向相重合，则这条线叫做“力线”。在力线沿途的每一部分上，它都是从一个势较高的地方通往势较低的地方的。

因此，一条力线不可能回到自己身上来，而是必须有一个起点和一个

终点。由第 80 节可知，一条力线的起点必然是在一个带正电的面上，而一条力线的终点必然是在一个带负电的面上。

力线的起点和终点叫做分别位于带正电和带负电的面上的对应点。

如果力线运动而使其起点在带正电的面上描绘出一条闭合的曲线，则其终点将在带负电的面上描绘出一条对应的曲线，而力线本身则生成一个管状的曲面，叫做电感管。这样的一个曲面叫做一个“管”[①]。

既然管状面的任一点上的力都是沿着切面的，那就没有电感通过曲面。因此，如果管内没有包含任何带电的物质，则由第 77 节可知，通过由管状面和两个端面形成的闭合曲面的总电感为零，而$\iint R\cos\epsilon\, dS$在两个端面上的值必然量值相等而符号相反。

如果这些端面是导体的表面，则

$$\epsilon=0 \quad 而 \quad R=-4\pi\sigma,$$

从而$\iint R\cos\epsilon\, dS$变成$-4\pi\iint\sigma\, dS$，即变成表面上的电荷乘以4π[②]。因此，在管的起点处被闭合曲线所包围的表面上的正电荷，等于管的终点处被对应的闭合曲线所包围的表面上的负电荷。

电力线的性质可以推出若干重要结果。

一个闭合导电容器的内表面是完全没有电荷的，而且它里边每一点的势都是和导体的势相同的，如果容器内不存在孤立的带电体的话。

因为，既然一条力线必然起于带正电的面而终于带负电的面，而且容器内又没有任何带电体，假若在容器里面存在一条力线，它就必然起于和终于容器本身的内表面上。

但是一条力线的起点上的势必然高于终点上的势，而我们已经证明导体所有各点上的势都是相同的。

因此任何力线都不可能存在于一个中空导电容器内部的空间中，如果容器内放有任何带电体的话。

如果位于闭合中空导电容器中的一个导体被和容器接通，则它的势将变成和容器的势相同，而它的表面则和容器的内表面变成同一个面。因此这个导体就不再有电荷。

如果我们假设任一带电面被分成了基元部分，使得每一部分上的电荷为 1，而且，如果以这些面积元为底在力场中画出一些管，则任何其他曲面上的面积分将由该曲面所交截的管数来表示。正是在这种意义上，法拉第用了他的力线观念来不但指示场中任何地方的力的方向而且指示该力的大小。

我们使用了“力线”一词，因为它曾被法拉第和别的人们所使用。然而，严格说来，这些线应该叫做“电感线”。

在普通的事例中，电感线指示每一点上的电动强度的方向和量值，因为强度和电感是方向相同而比值恒定的。然而也存在另外一些事例，那时必须记得这些线主要是表示的电感，而强度则是由等势面来直接表示的，

[①] Solenoid，起源于σωλην，意为“管子”。法拉第(3271)用“Sphondyloid”一词来代表了相同的概念。

[②] {此处的 R 是从管内向外画的。}

它的方向垂直于等势面，而它的量值反比于相邻等势面的距离。

论比感本领

83a.]在以上关于面积分的研究中,我们曾经采用了普通的直接超距作用的观念，而没有照顾到依赖于观察力时所在的电介媒质性质的任何影响。

但是法拉第曾经观察到，由一个给定电动势在以一种电介质为界的导体表面上感应出来的电量，并不是对一切电介质来说都相同。对于多数的固体和液体电介质来说，电量要比对空气和气体来说更大一些。因此这些物体就被说成比他取作标准媒质的空气具有较大的比感本领。

我们可以通过一种说法来把法拉第的学说用一种数学的语言表达出来，就是说，在一种电介媒质中，通过任一曲面的电感就是法向电强度和该媒质之比感本领系数的乘积。如果用 K 来代表这个系数，则我们在有关面积分的每一部分研究中都必须将 X、Y 和 Z 乘以 K，于是泊松方程就变成

$$\frac{d}{dx}\cdot K\frac{dV}{dx}+\frac{d}{dy}\cdot K\frac{dV}{dy}+\frac{d}{dz}\cdot K\frac{dV}{dz}+4\pi\rho=0^{①}.\ (1)$$

在感应本领为 K_1 和 K_2 的而其中的势为 V_1 和 V_2 的两种媒质的分界面上，特征方程可以写成

$$K_1\frac{dV_1}{dv_1}+K_2\frac{dV_2}{dv_2}+4\pi\sigma=0\ ;\ (2)$$

式中 v_1、v_2 是在两种媒质中画出的法线，而σ是分界面上的真实面密度，也就是以电荷的形式实际地出现在分界面上的电量，它只能通过向该处送电或从该处取电来加以改变。

电的表观分布

83b.〕如果我们从实际的势分布开始，并根据 K 到处等于 1 的假说来从这种分布推出体密度ρ'和面密度σ'，我们就可以把ρ'叫做表观体密度而把σ'叫做表观面密度，因为这样定义的一种电分布将能够根据一条假说来说明实际的势分布，其假说就是，在第 66 节中给出的那种电力定律不需要由于电介质的不同性质而作任何的变动。

一个给定域内的表观电荷可以在没有电通过域的边界面的情况下增多或减少。因此我们必须把它和满足连续性方程的真实电荷区分开来。

在 K 在其中连续变化的不均匀电介质中，如果ρ'是表观体密度，就有

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho'=0.\ (3)$$

把此式和上面的(1)式相比较，我们就得到

$$4\pi(\rho-K\rho')+\frac{dK}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dK}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dK}{dz}\frac{dV}{dz}=0.\ (4)$$

① {参阅本章末尾的附录。}

在变化的感应本领用 K 来表示的电介质中，真实电分布将在每一点产生势，和用ρ'来代表的表观电分布在感应本领到处等于 1 的电介质中产生的势相同。

表观面电荷σ'是利用特征方程

$$\frac{dV_1}{dv_1}+\frac{dV_2}{dv_2}+4\pi\sigma'=0 \quad (5)$$

由表面附近的电力推出的。

如果一种任意形状的固体电介质是一种完全的绝缘质，而且它的表面没有接受任何电荷，则不论有什么电力作用在它上面，它的真实电分布也保持为零。

由此可见

$$K_1\frac{dV_1}{dv_1}+K_2\frac{dV_2}{dv_2}=0,$$

$$\frac{dV_1}{dv_1}=\frac{4\pi\sigma' K_2}{K_1-K_2},\quad \frac{dV_2}{dv_2}=\frac{4\pi\sigma' K_1}{K_2-K_1}.$$

面密度σ'就是在固体电介质表面上由感应所引起的表观电分布。当感应力被取消时它就完全消失。但是如果在感应力的作用过程中表观电荷通过使一个火焰掠过表面而被从表面上放掉，则当感应力被取消时就将出现和σ'相反的真实电荷①。

① 见 Faraday's'Remarks on Static Induction,'Proceedings of the Royal Institution,Feb.12.1858.

第二章附录

方程

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{d}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)+4\pi\rho=0,$$

$$K_2\frac{dV}{dv_2}+K_1\frac{dV}{dv_1}+4\pi\sigma=0,$$

就是通过任一闭合曲面的电位移等于曲面内的电荷的 4π倍这一条件的表示。如果我们把这一原理应用在各面垂直于座标轴的一个长方体上，第一个方程就可立即得出，而如果我们把它用在包围着一部分带电表面的一个柱面上，第二个方程也可立即得出。

如果提前应用一次下一章中的结果，我们也可以直接从法拉第的比感本领定义得出这些方程。让我们考虑由两个无限大平行平板构成的电容器这一事例。设 V_1、V_2 分别是两个平板的势，d 是他们之间的距离，于是，如果 K 是分隔二板的电介质的比感本领，就有

$$E=KA\frac{V_1-V_2}{4\pi d}.$$

由第 84 节可知，体系的能量 Q 等于

$$\frac{1}{2}E(V_1-V_2)=\frac{1}{2}KA\frac{(V_1-V_2)^2}{4\pi d},$$

或者，如果 F 是二板之间任一点上的电动强度，就有

$$Q=\frac{1}{8\pi}KAdF^2.$$

如果我们认为能量是存在于电介质中的,则单位体积中将有 Q/Ad 个单位的能量，于是单位体积的能量就等于 $KF^2/8\pi$。当场是均匀的时这一结果将是对的，因此，如果 Q 代表任意电场中的能量，就有

$$Q=\frac{1}{8\pi}\iiint KF^2dxdydz$$

$$=\frac{1}{8\pi}\iiint K\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right\}F^2dxdydz$$

让我们假设，场中任意点上的势增加了一个小量 δV，此处 δB 是 x、y、z 的任意函数，这时能量的改变量 δQ 就由下式给出

$$\delta Q=\frac{1}{4\pi}\iint\left(K\left\{\frac{dV}{dx}\frac{d\cdot\delta V}{dx}+\frac{dV}{dy}\frac{d\cdot\delta V}{dy}+\frac{dV}{dz}\frac{d\cdot\delta V}{dz}\right\}\right);$$

由格林定理，此式

$$=-\frac{1}{4\pi}\iint\left(K_1\frac{dV}{dv_1}+K_2\frac{dV}{dv_2}\right)\delta VdS$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\left\{\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)\right\}\delta Vdxdydz,$$

式中 dv_1 和 dv_2 分别代表从第一种画到第二种和从第二种画到第一种媒质中的曲面法线的线段元。

但是由（第 85，86 节），就有

$$\delta Q = \Sigma(e\,\delta V) = \iint \rho V \delta\, dS + \iiint \rho\, \delta V dxdydz,$$

而既然 δV 是任意的，我们就必然得到

$$-\frac{1}{4\pi}\left(K_1\frac{dV}{dv_1}+K_2\frac{dV}{dv_2}\right)=\sigma,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)\right)=\rho,$$

这就是正文中那些方程。

在法拉第的实验中，火焰可以看成一个接地的导体，电介质的效应可以用它表面上的一种表观电分布来代表；这种作用在导电火焰上的表观电分布将吸引异号的电，而这些异号的电将分布在电介质的表面上，并把同号的电通过火焰送到地上去。于是在电介质的表面上就会出现真实的电分布并把表观电分布的效应掩盖起来；当感应力被取消时，表观电荷就将消失，但是真实电荷将留下来，而且将不再受到表观电荷的掩蔽。

第三章　论导体组中的电功和电能

84.〕论为了按给定方式向一个带电体系充电而必须由外界作用力所作的功。

按照势的定义（第 70 节），把一个电量 δe 从无限远处（或任何势为零处）带到体系内势为 V 的任一给定部分上时所作的功是 Vδe。

这种操作的效应就在于把体系中给定部分上的电荷增大 δe，因此，如果起初电荷是 e，则操作以后电荷将变为 e+δe。因此，我们可以把使一个体系的电荷发生一种改变时所作的功表示成一个积分

$$W=\Sigma(\int v\,\delta e)\;;\quad(1)$$

式中的求和(Σ)遍及于带电体系的所有各部分。由第 73 节中势的表示式可见，一个给定点上的势可以看成若干部分之和，其中每一部分都是由体系电荷的对应部分所引起的势。

因此,如果 V 是由我们可以称之为 Σ(e)的一个电荷系在一个给定点上引起的势，而 V'是由我们可以称之为 Σ(e')的另一个电荷系在同一点上引起的势，则由同时存在的两个电荷系在同一点上引起的势将是 V+V'。

因此，如果电荷系中的每一个电荷都按 n 比 1 的比例发生了变化，则体系中任一给定点上的势也将按 n 比 1 的比例发生变化。

因此，让我们假设使体系带电的操作是按下述方式进行的。设体系在起初并不带电，且其势为零，并设体系的不同部分同时被充电，每一部分的充电速率都正比于它的末电荷。

于是，如果 e 是体系的任一部分的末电荷，而 V 是末势，那么，如果在操作的任一阶段上龟荷是 ne，则势将是 nV，从而我们可以通过假设 n 从 0 连续地增大到 1 来表示这一充电过程。

当 n 从 n 增大为 n+δn 时，体系中任何一个末电荷为 e 而末势为 V 的部分都将接受一个电荷的增量 eδn；这时它的势是 nV，因此在这一操作中所作的功就是 eVnδn。

由此可见，使体系带电时所作的总功就是

$$\Sigma(eV)\int_0^1 n\,dn=\frac{1}{2}\Sigma(eV),\quad(2)$$

或者说是体系不同部分的电荷和他们各自的势的乘积的一半。

这就是按上述方式使一个体系带电时必须由外界作用力所作的功，但是，既然体系是一个保守系，用任何其他手续把体系纳入相同的状态时所要求的功必然是相同的。

因此我们可以把

$$W=\frac{1}{2}\Sigma(eV)\quad(3)$$

叫做体系的电能，它是用体系不同部分的电荷和势表示出来的。

85a.〕 其次让我们假设，体系通过一个过程从状态(e，V)过渡到状态(e'，v')，而在该过程中，不同的电荷都按各自正比于其总增量 e'－e 的速率而同时增大。

如果在任一时刻体系的一个给定部分的电荷是 e+n(e'－e)，其势就将是是 V+e(V'－V)，从而在使电荷改变这样一个部分时所作的功就将

是

$$\int_0^1 (e'-e)[V+n(V'-V)]dn=\frac{1}{2}(e'-e)(V'+V),$$

因此，如果我们用 W' 来代表体系在状态 (e', V') 中的能量，就有

$$W'-W=\frac{1}{2}\Sigma(e'-e)(V'+V) \quad (4)$$

但是

$$W=\frac{1}{2}\Sigma(eV),$$

$$W'=\frac{1}{2}\Sigma(e'V').$$

把这些值代入方程(4)中，我们就得到

$$\Sigma(eV')=\Sigma(e'V).(5)$$

因此，如果我们在同一个固定的带电导体组中考虑两个不同的带电状态，则第一状态中的各电荷和第二状态中各导体对应部分的势的乘积之和，等于第二状态中各电荷和第一状态中各导体的势的乘积之和。

在电的初等理论中，这一结果对应于解析理论中的格林定理。通过适当选择体系的初状态和末状态，我们可以推出一些有用的结果。

85b.〕由(4)和(5)，我们可以求出能量增量的另一个表示式，即用势的增量来表示它，

$$W'-W=\frac{1}{2}\Sigma(e'+e)(V'-V). \quad (6)$$

如果各增量为无限小，我们就可以把(4)和(6)写成

$$dW=\Sigma(V\delta e)=\Sigma(e\delta V);(7)$$

而如果我们用 W_e 和 W_V 来分别代表用导体组的电荷和势表出的 W 的表示式，并用 A_r、e_r 和 V_r 来代表组中一个特定的导体、它的电荷和它的势，就有

$$V_r=\frac{dW_e}{der}, \quad (8)$$

$$e_r=\frac{dW_V}{dV_r}. \quad (9)$$

86.〕在任意一个固定的导体组中，如果有我们可以用 A_i 来代表它的任何一个导体是在初状态和末状态中都没有电荷的，则这个导体的 $e_i=0$ 而 $e'_i=0$，于是依赖于 A_i 的项就在方程(5)的两端都不出现。

如果另一个导体，例如 A_k，在导体组的的两个状态中都有零势，则 $V_k=0$ 而 $V_k'=0$，于是依赖于 A_k 的项也在方程(5)的两端都不出现。

因此,如果除了两个导体 A_r 和 A_s 以外所有的导体都或是绝了缘的并没有电荷的，或是接了地的，则方程(5)将简化为下式

$$e_rV_r'+e_sV_s'=e_r'V_r'+e_s'V_s' \quad (10)$$

如果在初状态中有

$$e_r=1 \text{ 和 } e_s=0,$$

而在末状态中有

$$e_r'=0 \text{ 和 } e_s'=1,$$

则方程(10)变为

$$V_r'=V_s;(11)$$

或者说，如果传到 A_r 上的单位电荷把绝了缘的 A_s 升高到一个势 V，则传给 A_s 的单位电荷将把绝了缘的 A_r 升高到相同的势 V，如果组中每一个其他导体都或是绝了缘且没有电荷的，或是接了地从而其势为零的话。

这是我们在电学中遇到的第一个倒易关系式的例子。这样的倒易关系式出现在科学的每一分支中，而且常常使我们能够从已经解出的较简单问题的解推出新问题的解。

例如，电荷为 l 的一个导体球外面一点上的势是 r^{-1}，此处 r 是从球心量起的距离，而根据这一事实，我们就可以得出结论说，如果电荷为 1 的一个小物体被放在离一个不带电导体球的中心为 r 的地方，它就将把该球升高到一个势 r^{-1}。

其次让我们假设，在初状态，有

$$V_r=1 \text{ 和 } V_s=0,$$

而在末状态，有

$$V_r'=0 \text{ 和 } V_s'=1,$$

则方程(10)变成

$$e_s=e_r';(12)$$

或者说，如果当 A_r 升高到单位势时将在接了地的 A_s 上感应出一个电荷 e，则当把 A_s 升高到单位势时将在接了地的 A_r 上感应出相同的电荷 e。

第三，让我们假设，在初状态，有

$$V_r=1 \text{ 和 } e_s=0,$$

而在末状态，有

$$V_r'=0 \text{ 和 } e_s'=1,$$

则在这种情况下方程变为

$$e_r'+V_s=0.(13)$$

由此可见，如果当 A_s 不带电荷时把 A_r 充电到单位势的操作将把 A_r 升高到势 V，那么，如果使 A_r 保持零势，则传给 A_s 的一个单位电荷将在 A_r 上感应出一个数值等于 V 的负电荷。

在所有的这些事例中，我们都可以假设另外的导体中有一些导体是绝了缘的和不带电荷的，而其余的导体则是接了地的。

第三个事例是格林定理的一种简单形式。作为它的应用的一个例子，让我们假设已经确定了由传给导体组中一个给定导体 A_s 的一个单位电荷在势为零的导体中不同元部分上感应出来的电荷分布。

设 η_r 是这种情况下的 A_r 上的电荷。于是，如果我们假设 A_s 不带电荷，而其他各导体则各自升高到不同的势，则 A_s 的势将是

$$V_s=-\Sigma(\eta_r V_r).(14)$$

于是，如果我们确定了由放在一个中空导电容器中任一给定点上的单位电荷在势为零的该容器任意给定点上感应出来的面密度，如果我们也知道形状和大小都和容器内表面相同的一个曲面上每一点的势值，我们就可

以推出曲面内部其位置和该单位电荷相对应的一点的势。

因此，如果在一个闭合曲面的所有各点上势为已知，则曲面内部任一点的势也可以是确定的，如果内部并无带电体的话；曲面外部任一点的势也可以是确定的，如果外部并无带电体的话。

导体组的理论

87.〕设 A_1、$A_2\cdots A_n$ 是形状任意的 n 个导体，设 e_1、$e_2\cdots e_n$ 是他们的电荷，而 V_1、$V_2\cdots V_n$ 是他们的势。让我们假设，把各导体隔开的电介质保持相同，而且它在所要考虑的操作中并不变为带电。

我们在第 84 节中已经证明，各一导体的势是 n 个电荷的线性齐次函数。

由此可见，既然体系的电能是每一导体的势和电荷的乘积之和的一半，电能就必然是 n 个电荷的二次齐次函数，其形式是

$$\begin{aligned} We &= \frac{1}{2}p_{11}e_1^2 + p_{12}e_1e_2 + \frac{1}{2}p_{22}e_2^2 \\ &+ p_{13}e_1e_3 + p_{23}e_2e_3 + \frac{1}{2}p_{33}e_{32} + \cdots, \end{aligned} \qquad (15)$$

下标 e 表明 W 要表示成各电荷的一个函数。当 W 不带下标时，它就代表的是表示式(3)，式中既出现电荷也出现势。

由这一表示式，我们可以推出组中每一导体的势。因为，既然势被定义为把单位电荷从零势处带到给定势处时所必须作的功，而且这个功是用于增加 W 的，我们只要把 W_e 对所给导体的电荷求导数，就能得出它的势了。于是我们就得到

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= p_{11}e_1 \cdots + p_{r1}e_r \cdots + p_{n1}e_n, \\ V_s &= p_{1s}e_1 \cdots + p_{rs}e_r \cdots + p_{ns}e_n, \\ V_n &= p_{1n}e_1 \cdots + p_{rn}e_r \cdots + p_{nn}e_n, \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

这是一组 n 个线性方程，他们用 n 个电荷表示了 n 个势。系数 p_{rs} 等等叫做势系数。每一个系数有两个下标，其中第一个对应于电荷的下标，而第二个则对应于势的下标。

两个下标相同的系数 p_{rr} 代表当 A_r 的电荷为 l 而所有其他导体的电荷都为零时 A_r 的势。这种系数共有 n 个，每个导体有一个。

两个下标不相同的系数 p_{rs} 代表当 A_r 接受到单位电荷而除 A_r 以外其他导体的电荷都为零时 A_s 的势。

我们在第 86 节中已经证明 $p_{rs}=p_{sr}$，但是我们可以通过考虑到

$$p_{rs} = \frac{dV_1}{de_r} = \frac{d}{de_r}\frac{dW_e}{de_s} = \frac{d}{de_s}\frac{dW_e}{de_r} = \frac{dV_r}{de_s} = p_{sr}. (17)$$

来更加简短地证明它。

因此，具有两个不同下标的不同系数的数目就是 $\frac{1}{2}(n-1)$，每一对导体有一个。

通过把方程组对 e_1、e_2 等等求解，我们就得用各个势来表示各电荷的 n 个

$$\text{方程}\left.\begin{aligned} e_1 &= q_{11}V_1 \cdots + q_{1s}V_s \cdots + q_{1n}V_n, \\ e_r &= q_{r1}V_1 \cdots + q_{rs}V_s \cdots + q_{rn}V_n, \\ e_n &= q_{n1}V_1 \cdots + q_{ns}V_n \cdots + q_nV_{nn}, \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

在这一事例中，我们也有 $q_{rs}=q_{sr}$，因为

$$q_{rs}=\frac{de_r}{dV_s}=\frac{d}{dV_s}\frac{dW_V}{dV_r}=\frac{d}{dV_r}\frac{dW_V}{dV_s}=\frac{de_s}{dV_r}=q_{sr} \quad (19)$$

把各电荷的值代入电能的表示式

$$W=\frac{1}{2}[e_1V_1+\cdots+e_rV_r\cdots+e_nV_n], \quad (20)$$

中，我们就得到一个用势来发示的能量表示式

$$W_V=\frac{1}{2}q_{11}V_{1^2}+q_{12}V_1B_2+\frac{1}{2}q_{22}V_{2^2}$$

$$+q_{13}V_1V_3+q_{23}V_2V_3+\frac{1}{2}q_{33}V_{3^2}+\cdots. \quad (21)$$

两个下标相同的一个系数叫做它所属于的那个导体的“电容”。

定义　一个导体的电容就是当它自己的势是 1 而所有其他导体的势都是零时的它的电荷。

当没有进一步的限定时，这就是导体电容的确切定义。但是，有时用一种不同的方式来指定某些或所有其他导体的条件是方便的，例如可以假设其中某些导体的电荷为零，而我们在这种条件下就可以把导体的电容定义为当它的势为 1 时的它的电荷。

其他的系数叫做感应系数。其中任何一个，例如 q_{rs} 就表示当 A_s 升高到单位势而除 A_s 以外其他导体的势都为零时的 A_r 的电荷。

势系数和电容系数的数学计算通常是困难的。我们在以后即将证明他们永远具有确定的值，而且在某些事例中我们将计算这些值。我们也将说明他们可以怎样用实验来测定。

当谈到一个导体的电容而不提及同一导体组中任何其他导体的形状和位置时，就应该把电容诠释为当没有任何其他导体或带电体位于离所考虑的导体为有限距离时的该导体的电容。

当我们只是在处理电容和感应系数时,有时把他们写成[A.P]的形式是方便的 这一符号被理解为代表当 P 被升高到单位势{而所有别的导体都处于零势}时 A 上的电荷。同理，[(A＋B).(P＋Q)]将代表当 P 和 Q 都升高到势 1 时 A＋B 上的电荷，而且显而易见，既然

[(A＋B).(P＋Q)]＝[A.P]＋[A.Q]＋[B.P]＋[B.Q]

＝[(P＋Q).(A＋B)]，

各个组合符号就可以通过相加和相乘来互相结合，就好像他们是一些数量的符号一样。

符号[A.A]表示当 A 的势为 1 时的 A 上的电荷，也就是说，它代表的是 A 的电容。

同样， [(A＋B).(P＋Q)]代表当 A 和 Q 被升高到势 1 而除 A 和 Q 外所有导体的势都为零时 A 和 B 上的电荷之和。它可以分解成

[A.A]＋[A.B]＋[A.Q]＋[B.Q].

势系数不能用这种办法来处理。感应系数代表电荷，而这些电荷是可以相加的；但是势系数代表势，而如果 A 的势是 V_1，B 的势是 V_2，则二势之和 V_1+V_2 并没有和现象有关的任何物理意义，尽管 V_1-V_2 代表从 A 到 B 的电动势。

两个导体之间的感应系数可以用各导体的电容和两个导体共同的电容表出来，例如：

$$[A.B]=\frac{1}{2}[(A+B).(A+B)]-\frac{1}{2}[A.A]-\frac{1}{2}[B.B].$$

各系数的量纲

88.〕既然一个电荷 e 距离 r 处的势是 $\frac{e}{r}$，一个电荷的量纲就是势的量纲乘上一个长度。

因此，电容系数和感应系数就和长度具有相同的量纲，从而其中每一个系数就都可以用一段直线来代表，该直线的长度并不依赖于我们所用的单位制。

同理，任一势系数都可以表示为一段直线的倒数。

论各系数所必须满足的某些条件

89a.〕首先，既然一个体系的电能在本质上是一个正量，它作为电荷的二次函数或势的二次函数的那种表示式必须是正的，不论给予电荷或势的是什么值，是正值还是负值。现在，n 个变数的二次齐次式将永远为正的条件共有 n 个，而且可以写成

$$\left.\begin{array}{l} p_{11}>0, \\ \begin{vmatrix} p_{11}, & p_{12} \\ p_{21}, & p_{22} \end{vmatrix}>0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots\cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}>0. \end{array}\right\} \quad (22)$$

这 n 个条件是保证 W_e 为必正的必要和充分的条件[①]。

但是，既然在方程(16)中我们可以按任何次序来排列导体，用属于 n 个导体之任何组合的那些系数对称地排成的每一个行列式也必须是正的，而这些组合的数目是 2^n-1。

然而，这样求得的条件中只有 n 个条件可能是独立的。电容系数和感应系数也满足同样形式的条件。

89b.〕所有的势系数都是正的，但是任一系数 p_{rs} 都不大于 p_{rr} 或

---

① 见 Williamson's Differdntial Calculus,3rd edition,p.407.

p_{ss}

因为，设把一个单位电荷传给 A_r，而其他各导体都不带电。一组等势面将会形成。其中一个等势面将是 A_r 的表面，其势为 p_{rr}。如果 A_s 被放入在 A_r 中挖出的一个空腔中从而完全被 A_r 所包围，则 A_r 的势也将是 p_{rr}。

然而，如果 A_s 是在 A_r 外面的，则它的势将介于 p_{rr} 和零之间。

因为，试考虑从带电导体 A_r 出发的力线。电荷是用从导体出发的和终止在导体上的力线数之差来量度的。因此，如果导体不带电荷，则到达导体的力线数必然等于从它出发的力线数。到达导体的那些力线来自势较大的地方，而从导体出发的那些力线则通往势较小的地方。因此，一个不带电荷的导体的势必然介于场中的最高势和最低势之间，从而最高势和最低势就不能属于任何一个不带电荷的导体。

因此，最高势必然是 p_{rr}，即带电导体 A_r 的势；最低势必然是无限远处的空间的势，那就是零；而所有其他的势，例如 p_{rs}，则必然介于 p_{rr} 和零之间。

如果 A_s 完全包围了 A_t，则 $p_{rs}=p_{rt}$。

89c.〕任何感应系数都不是正的，而属于单独一个导体的各感应系数之和在数值上不大于该导体的永远为正的电容系数。

因为，设 A_r 被保持于单位势，而所有别的导体都被保持于零势，则 A_r 上的电荷是 q_{rr}，而任一其他导体 A_s 上的电荷是 q_{rs}。

从 A_r 出发的力线数是 q_{rr}。在这些力线中，有的终止在别的导体上，有的可能通往无限远，但是没有任何力线可以经过任何别的导体之间或是从那些别的导出发而通往无限远，因为他们的势都是零。

任何力线都不可能从任何别的导体例如 A_s 出发，因为场的任何部分都不会比 A_s 具有更低的势。如果 A_s 是由某一个导体的闭合表面和 A_r 隔开的，则 q_{rs} 为零。如果 A_s 不是这样被隔开的，则 q_{rs} 是一个负量。

如果其中一个导体 A_t 完全包围了 A_r，则从 A_r 出发的所有力线都落在 A_t 上和 A_t 里面的导体上，从而这些导体对 A_r 而言的感应系数之和就和 q_{rr} 相等而异号。但是，如果 A_r 并没有被一个导体所包围，则这些感应系数 q_{rs} 等等之和将小于 q_{rr}。

我们已经借助于电学的考虑而独立地证明了这两条定理。我们让学数学的人们去考虑其中一条是不是另一条的数学推论。

89d.〕当场中只有一个导体时，它对自己而言的势系数就是它的电容的倒数。

没有外力时的电的质心，叫做导体的电心。如果导体对一个几何中心是对称的，这个中心就是电心。如果导体的线度和所考虑的距离相比是很小的，则电心的位置可以通过猜测来足够近似地加以估计。

离电心的距离为 c 处的势，必然介于

$$\frac{e}{c}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right)\text{和}\frac{e}{c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}\right)$$

之间[①]，式中 e 是电荷，而 a 是物体表面的任何部分到电心的最大距离。

因为，如果电荷被集中在电心两侧相距为 a 的两个点上，第一个表示式就是二点连线上的一点处的势，而第二个表示式就是垂直于该连线的直线上一点处的势。对半径为 a 的球中的一切别的分布来说，势都介于这两个值之间。

如果场中有两个导体，他们的相互势系数就是$\frac{1}{c'}$；此处c'和电心间距c的差值不能超过$\frac{a^2+b^2}{c}$，而a和b是各导体表面上任一部分到各该导体的电心的最大距离。

89e.〕如果一个新导体被带入场中，则其他各导体中任一导体对自己而言的势系数都会减小。

因为，设新导体 B 被假设为一个非导体{和空气具有相同的比感本领}，而且它的任何部分都不带电，则当其中一个导体 A_1 接受到一个电荷 e_1 时，组中各导体上的电分布都将受到 B 的干扰；既然 B 的任何部分都还没有带电，体系的电能就简单地是

$$\frac{1}{2}e_1V_1=\frac{1}{2}e_{12}p_{11}.$$

现在让 B 变成一个导体。电将从势高的地方流向势低的地方，而在这样作时将使体系的电能减小，从而$\frac{1}{2}e^2p_{11}$这个量将减小。

但是 e_1 是保持不变的，因此 p_{11} 必须减小。

同理，如果由于把另一个物体 b 放在和 B 接触处而使 B 增大，p_{11} 就将进一步减小。

因为，让我们首先假设在 B 和 b 之间没有电的交通，新物体 b 的引入就将减小 p_{11}。现在设在 B 和 b 之间开放交通。如果有任何的电在他们之间流过，那就是从高势的地方流向低势的地方的，从而正如我们已经证明的那样，p_{11} 就会进一步减小。

由此可见，由物体 B 引起的 p_{11} 的减量，大于其表面可以包入 B 中的任何导体所将引起的减量，而小于其表面可以包围 B 的任何导体所将引起的减量。

我们在第十一章中即将证明，直径为 b 的一个球放在远大于 b 的距离

[①] {因为，设ρ为任一点上的体密度；如果我们取电心和 P 点的连线作为 z 轴，则点的势是 式中 c 是从电心到 P 的距离。第一项等于 e/c；第二项为零，因为原点就是电心；当括号中的第三项有最大值即 a2/c3 时，积分中的第三项有最大值，因此这个最大值就是 ea2/c3;当括号中的第三项有最大的负值即－

第 89 节末尾处的结果可以推导下。假设电荷是在第一个导体上的，则由上述结果可知，由这一导体上的电荷引起的势小于 式中 R 是从第一个导体的电心到该电荷的距离。在第二项中，如果我们只计及 C-3 的量的话，就可以对第二个导体的任一点都令 R＝C，第一项代表第一个导体电心上的一个电荷 e 将使第二个导体升到的势。但是，由第 86 节可知，这是和第二个导体上的电荷 e 在第一个导体的电心上引起的势相同的。但是我们刚刚已经看到，这个势必然小于 因此由第一个导体上的电荷 e 在第二个导体上引起的势必然小于 然而一般说来这并不是对二导体之相互势的一种很密切的逼近。}

r处，将使p_{11}减小一个近似等于$\frac{1}{8}\frac{b^3}{r^4}$的量[①]。

由此可见，如果B具有任意的形状，而b是它的最大直径，则p_{11}值的减量必小于$\frac{1}{8}\frac{b^3}{r^4}$。

因此，如果B的最大直径小得在和B离A_1的距离相比之下可以略去数量级为$\frac{1}{8}\frac{b^3}{r^4}$的量，我们就可以把当只有$A_1$存在于场中时它的电容的倒数看成$p_{w1}$的一个足够好的近似值。

90a.〕因此，让我们假设A_1自己存在于场中时的电容是K_1，而A_2在相应情况下的电容是K_2，并设A_1和A_2之间的平均距离是r，此处r比A_1和A_2的最大直径要大得多，于是我们就可以写出

$$p_{11}=\frac{1}{K_1},\ p_{12}=\frac{1}{r},\ p_{22}=\frac{1}{K_2};$$

$$V_1=e_1K^{1-}1+e_2r^{-1},$$

$$V_2=e_1r^{-1}+e_2K_{2^{-1}}.$$

由此即得

$$q_{11}=K_1(1-K_1K_2R^{-2})^{-1},$$

$$q_{12}=-K_1K_2r^{-1}(1-K_1K_2^{R-2})^{-1},$$

$$q_{22}=K_2(1-K_1K_2^{r-2})^{-1}.$$

在这些系数中,q_{11}和q_{22}是当A_1和A_2并非各自都距任何其他导体为无限远而是被带到彼此相距为r处时的电容。

90b.〕当两个导体被放得彼此相距很近，以致他们的相互感应系数很大时，这种组合物就叫做一个“电容器”。

设A和B是电容器的两个导体或两个极。

设L是A的电容，N是B的电容，而M是相互感应系数。(我们必须记得M在本质上是负的，从而L+M和M+N的数值是小于L和N的。)

让我们假设a和b是和第一个电容相距为R处的另一个电容器的极，而R比其中每一个电容器的线度都大得多,此外并假设电容器ab当单独存在时的电容系数和感应系数是 l、n、m。让我们计算其中一个电容器对另一个电容器的系数的影响。设

$$D=LN-M^2,\ 和\ d=ln-m^2;$$

则每一个电容器当单独存在时的势系数是

$$p_{AA}=D^{-1}N,\ p_{aa}=d^{-1}n,$$

$$p_{AB}=-D^{-1}M,\ p_{ab}=-d^{-1}m,$$

$$p_{BB}=D^{-1}L,\ p_{bb}=d^{-1}l.$$

当两个电容器相距为R时，这些系数的值将不会有多大的变化。

任何两个相距为R的电容器的势系数是R^{-1}，于是就有

[①] {参阅第146节的方程(43)。}

$$p_{Aa}=p_{Ab}=p_{Ba}=p_{Bb}=R^{-1}.$$

因此，势的方程是

$$V_A=D^{-1}Ne^A-D^{-1}Me_B+R^{-1}ea+R^{-1}eb,$$
$$V_B=-D^{-1}Me_A-D^{-1}Le_B+R^{-1}e_a+R^{-1}e_b,$$
$$Va=R^{-1}e_A+R^{-1}e_B+d^{-1}ne_a-d^{-1}me_b,$$
$$Vb=R^{-1}e_A+R^{-1}e_B-d^{-1}me_a+d^{-1}le_b,$$

对电荷求解这些方程，我们就得到

$$q_{AA}=L'=L+\frac{(L+M)^2(l+2m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},$$
$$q_{AB}=M'=M+\frac{(L+m)(M+N)(l+2m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},$$
$$q_{Aa}=-\frac{R(L+M)(l+m)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},$$
$$q_{Ab}=-\frac{R(L+M)(m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)};$$

式中 L'、M'、N'是当第二个电容器被带到场中时 L、M、N 所变成的量。

如果只有一个导体 a 被带入场中，则有 $m=n=0$，而

$$q_{AA}=L'=L+\frac{(L+M)^2l}{R^2-l(L+2M+N)},$$
$$q_{AB}=M'=M+\frac{(L+M)(M+N)l}{R^2-l(L+2M+N)},$$
$$q_{Aa}=-\frac{Rl(L+M)}{R^2-l(L+2M+N)}.$$

如果只有两个简单的导体 A 和 a，则

$$M=N=m=n=0,$$

从而

$$q_{AA}=L+\frac{L^2l}{R^2-Ll},\quad q_{Aa}=-\frac{RLl}{R^2-Ll};$$

这些表示式和在第 90a 节中求出的表示式相一致。

$L+2M+N$ 这个量就是当它的电极的势为 1 时电容器的总电荷。它不能超过电容器最大直径的一半[①]。

$L+M$ 是当两个电极都处于势 1 时第一个电极上的电荷，而 $M+N$ 是那时第二个电极上的电荷。这些量必然各自为正，而且小于电容器自己的电容。因此，必须对一个电容器的各电容系数作出的改正，是比相等电容的一个简单电容器的系数小得多的。

在估计离其他电容器相当远的形状不规则的电容器的电容时，这一类的近似往往是很有用的。

91.〕当其尺寸和导体间的距离相比是很小的一个圆乎乎的导体 A_3 被

---

① {因为我们可以像在第 89e 节中那样地证明，当它的所有各部分都处于相同的势容器的电容小于它的外接球，而该球的电容等于它的半径。}

带入场中时，A_1 和 A_2 的势系数将增大，如果 A_3 是在以直线 A_1A_2 为直径的一个球的内部的话；势系数将减小，如果 A_3 是在该球的外面的话。

因为，如果 A_1 接受到一个单位正电荷，则 A_3 上将出现一种电分布，即有＋e 位于离 A_1 最远的一边而有－e 位于离 A_2 最近的一边。由 A_3 上面的这一分布在 A_2 上引起的势将是正的或负的，全看是＋e 还是－e 离 A_2 最近而定，而如果 A_3 的形状不是很细长的，这就将取决于角 $A_1A_3A_2$ 是钝角还是锐角，从而就取决于 A_3 是位于以 A_1A_2。为直径画出的球的里面还是外面。

如果 A_3 是长形的，那就很容易看到：如果它的最长轴是放在通过 A_1、A_3、A_2 各点所画之圆的切线方向上，它就可能增大 A_2 的势，即使它是完全位于球外的；如果它的最长轴是放在球的半径的方向上，则它可能减小 A_2 的势，即使它是完全位于球内的。但是这种叙述只是想对在仪器的给定排列下所应预料的现象作出一种粗略的估计而已。

92.〕如果一个新导体 A_3 被引入场中，则已在场中的所有各导体的电容都会增大，而任一对导体之间的感应系数的数值则会减小。

让我们假设 A_1 的势是 1 而所有其他导体的势都为零。既然新导体上的电荷是负的，它就将在每一个其他导体上感应出一个正电荷，从而就将增大 A_1 上的正电荷而减小每一个其他导体上的负电荷。

93a.〕电力在移动一组绝缘的带电导体时所作的功

既然各导体是绝了缘的，他们的电荷在移动中就保持不变。设他们在移动之前的势是 V_1、V_2…V_n，而在移动之后的势是 V_1'、V_2'…V_n'。电能在移动之前是

$$W=\frac{1}{2}\Sigma(eV),$$

而在移动之后是

$$W'=\frac{1}{2}\Sigma(eV').$$

电力在移动的斯间所作的功是初能量 W 比末能量 W' 多出的数量，或者说是

$$W-W'=\frac{1}{2}\Sigma[e(V-V')].$$

这一表示式给出一个绝缘导体组在大的或小的任何位移中所作的功。

为了求出倾向于引起特定种类位移的力，设 ϕ 是一个变量，它的变化对应于该种位移，并设 Φ 对应的电力，当它倾向于增大 ϕ 时力算作正的，于是就有

$$\Phi d\phi=-dW_e,$$

$$\Phi=-\frac{dW_e}{d\phi};$$

式中 W_e，代表作为各电荷之二次函数的电能表示式。

93b.〕现在证明 $\frac{dW_e}{d\phi}+\frac{dW_v}{d\phi}=0$。

我们有体系能量的三种不同的表示式。一种是 n 个电荷和 n 个势的确

定函数，

$$W=\frac{1}{2}\Sigma(eV),$$

另一种是

$$W_e=\frac{1}{2}\Sigma\Sigma(erespr s),$$

式中 r 和 s 可以相同或不同，而 rs 和 sr 都应包括在和式中。

这是 n 个电荷和各个确定着位形的变量的一个函数。设φ是其中的一个变量。第三种是

$$W_v=\frac{1}{2}\Sigma\Sigma(VrVsqrs),$$

式中和式的求法同上。这是 n 个势和各个确定着位形的变量的一个函数，而φ就是其中的一个变量。

既然

$$W=W_e=W_v,$$

就有

$$W_e+W_V-2W=0.$$

现在让 n 个电荷、n 个势和φ以任何自洽的方式发生变化，于是必有

$$\sum\left[\left(\frac{dW_e}{de_r}-V_r\right)\delta er\right]+\sum\left[\left(\frac{dW_V}{de_s}-e_s\right)\delta V_s\right]+\left(\frac{dW_e}{d\phi}+\frac{dW_V}{d\phi}\right)\delta\phi=0.$$

喏，n 个电荷、n 个势和φ并不完全是互相独立的，因为事实上只有其中的 n＋1 个可以是独立的。但是我们已经证明

$$\frac{dW_e}{de_r}=V_r,$$

因此第一个和式恒等于零，而由此即得（尽管我们还不曾证明它）

$$\frac{dW_V}{dV_s}=e_s,$$

而最后就得到

$$\frac{dW_e}{d\phi}+\frac{dW_V}{d\phi}=0.$$

电力在各势保持恒定的一个导体组移动时所作的功

93c.〕由上式可知，力$\phi=\dfrac{dW_v}{d\phi}$，而如果导体组是在所有的势都保持恒定的条件下被移动的，则电力所作的功是

$$\int\Phi d\phi=\int dW_v=W_v'-W_v;$$

或者说，在这一事例中，电力所作的功等于电能的增量。

于是，在这里，我们同时有一个能量的增量和体系所作的一定数量的功。因此体系必有某种外界能源例如一个伏打电池向它供应能量，以保持各势在移动过程中不变。

因此，电池所作的功就是体系所作的功和能量增量之和，而既然二者

相等，电池所作的功就是导体组在移动中所作的功的两倍。

论相似带电体系的比较

94.〕设两个带电体系在几何意义上是相似的，使得两个体系中对应线段的长度是成 L 和 L'之比，如果隔开各导体的电介质在两个体系中也相同，则各个感应系数和电容系数也将成 L 和 L'之比。因为，如果我们考虑两个体系的对应部分 A 和 A'，并假设 A 上的电量是 e，A'上的电量是 e'，则由这种电荷在对应点 B 和 B'引起的势 V 和 V'将是

$$V=\frac{e}{AB}，和 V'=\frac{e'}{A'B'}.$$

但是 AB 和 A'B'之比等于 L 和 L'之比，因此我们必有

$$e:e'::LV:L'V'.$$

但是，如果电介质的感应本领在两个体系中是不同的，在第一个体系中是 K 而在第二个体系中是 K'，那么，如果第一体系中任一点上的势和第二体系中对应点上的势成 V 和 V'之比,而且对应部分上的电荷成 e 和 e'之比，则我们将有

$$e:e'::LVK:L'V'K'.$$

利用这种比例式，我们可以求出二体系之对应部分的总电荷。这两个体系首先是几何地相似的，其次是包含着一些电介媒质，他们在对应点上的比感本领成 K 和 K'之比，而第三是经过适当的充电，使得对应点上的势成 V 和 V'之比。

由此可见，如果 q 是第一体系中的任何一个电容系数或感应系数，而 q'是第二体系中的对应系数，则

$$q:q::LK:L'K';$$

而如果 p 和 p'代表二体系中的对应势系数，则

$$p:p'::\frac{1}{LK}:\frac{1}{L'K'}.$$

如果第一体系中的一个物体被移动，而第二体系中的对应物体得到一个相似的位移，则这些位移成 L 和 L'之比；而如果作用在两个物体上的力成 F 和 F'之比，则在二体系中所作的功将成 FL 和 F'L'之比。

但是，总电能等于各带电体的电荷和势的乘积之和的一半，因此，在相似的体系中，如果 W 和 W'分别是两个体系中的总电能，则

$$W:W'::eV:e'V',$$

而且两个体系在相似位移之后的能量差也将成相同的比例。由此可见，即然 FL 正比于位移过程中所作的电功，就有

$$FL:F'L'::eV:e'V'.$$

把这些比例式结合起来，我们就发现第一体系中作用在任一物体上的力和第二体系中作用在对应物体上的力之比，是

$$F:F'::V^2K:V'^2K',$$

或

$$F:F'::\frac{e^2}{L^2K}:\frac{e'^2}{L'^2K'}.$$

第一个比例式表明，在相似的体系中，力正比于电动势的平方和电介质的

感应本领，而和体系的实际尺寸无关。

因此，放在感应本领比空气的感应本领要大的一种液体中的两个导体，当充电到给定的势时将互相吸引，比在空气中充电到同样的势时吸引得更加强烈。

第二个比例式表明，如果每一物体上的电荷都已给定，则力正比于电荷的平方而反比于距离的平方，也反比于媒质的感应本领。

由此可见，如果带有给定电荷的两个导体被放在感应本领比空气的感应本领要大的一种液体中，则他们将互相吸引，比他们被空气所包围并充有相同的电量时吸引得要微弱一些[①]。

[①] {由以上的考察可知，被比感本领为 K 的一种媒质包围着的两个带电体之间的力是 ee'/Kr2，式中 e 和 e'是两个物体上的电荷，而 r 是他们之间的距离。}

第四章　普遍定理

95a〕在第二章中，我们曾经计算了势函数并考察了它的一些性质，所根据的假说是，在带电体之间存在着一种直接的超距作用，而这就是物体各带电部分之间的那些直接作用的合作用。

如果把这种方法叫做考察的正方法，则逆方法将是假设势是由和我们已经确立的那些性质相同的性质表征着的一个函数，而来考察这个函数的形式。

在正方法中，势是通过积分过程而从电分布算出的，并且是被发现满足某些微分方程的。在逆方法中，各微分方程被假设为已经给定，而我们则必须求出势和电分布。

只有在电分布已经给定的问题中正方法才可以用。当我们必须求出导体上的电分布时，我们就必须利用逆方法。

现在我们必须证明逆方法在每一事例中都导致一种确定的结果，并确立某些从泊松偏微分方程

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}+4\pi\rho=0.$$

推出的结果。

由这一方程所表达的数学概念，是和由定积分

$$V=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\rho}{r}dx'dy'dz'.$$

所表达的数学概念种类不同的。

在微分方程中，我们表达的是，V 在任一点的邻域中的二阶导数之和，是以某种方式和该点的密度联系着的，而并没有表达该点的 V 值和离该点为有限距离的任一点上的 ρ 值之间的任何关系。

另一方面，在定积分中，ρ 存在之点（x '，y '，z '）和 V 存在之点（x，y，z）之间的距离是用 r 来代表的，而且在被积分式中是明确地照顾到了的。

因此积分就是质点间超距作用理论的一种适当的数学表示，而微分方程则是媒质相邻各部分之间发生作用的那种理论的适当表示。

我们已经看到，积分的结果满足微分方程。现在我们必须证明，它是该方程的唯一满足某些条件的解。

我们将用这种办法不但确立两种表示之间的数学等价性，并且为我们从直接超距作用理论过渡到媒质相邻部分之间的作用理论作好思想准备。

95b.〕本章所考虑的这些定理，和在某一有限空间域中求出的某些体积分的性质有关，而那种空间域我们可以称之为电场。

这些积分的元量，即积分号下的表示式，不是其方向和量值在场中逐点变化的某个矢量的平方就是一个矢量和另一矢量在它的方向上的分量的乘积。

在一个矢量可以在空间中分布的那些不同方式中，有两种是特别重要的。

第一种方式是，矢量可以表示成一个叫做“势”的标量函数的空间改变量〔第 17 节〕。

这样的一种分布可以叫做一种“无旋分布”。力定律各自为距离的给

定函数的一些力心的任意组合所引起之吸引力或推斥力的合力，就是无旋地分布着的。

第二种分布方式是，敛度〔第 25 节〕在每一点都为零。这样一种分布可以做一种“管状分布”。一种不可压缩流体的速度就是按管状的方式分布的。

我们说过，有心力引起合力的无旋分布。当这种有心力是按照距离的平方反比规律而变化时，如果各力心位于场外，则场内的分布既是无旋的又是管状的。

我们说过，不可压缩流体的运动是管状的。当这种运动起源于依赖于距离的力心或表面压力对起初处于静止的无摩擦流体的作用时，速度的分布既是管状的又是无旋的。

当我们必须确定一种同时是无旋的和管状的分布时，我们将称它为一种“拉普拉斯分布”，因为拉普拉斯曾经指出了这种分布的一些最重要的性质。

我们即将看到，本章所考虑这些体积分，是电场的能量的表示式。在从格林定理开始的第一组定理中，能量是用电动强度来表示的，而电动强度就是在一切电平衡的事例中都无旋地分布着的一个矢量。即将证明，如果表面势已经给定，则在一切无旋分布中同时又是管状的那个分布具有最小能量；而从此又可推知，只可能有一种拉普拉斯分布和表面势相容。

在包括汤姆孙定理在内的第二组定理中，能量是用电位移来表示的，而电位移则是一个有着管状分布的矢量。可以证明，如果表面电荷已经给定，则在一切管状分布中具有最小能量的那种分布就也是无旋的；而从此又可推知，只可能有一种拉普拉斯分布和已给的表面电荷相容。

所有这些定理的演证都是按相同的方式进行的。为了避免重复，在按直角座标来计算面积分的步骤的每一事例中,我们都利用第 21 节中的定理三[①]，那里很全面地给出了体积分和对应的面积分之间的关系。因此，我们所要作的，只是在该定理中把 X、Y、Z 代成特定的定理所依赖的那个矢量的分量而已。

在本书的第一版中，每一条定理的叙述中都夹杂着许多不同的条件，目的是要显示定理的普遍性以及它可以适用的那些事例的多样性，但是那却倾向于使读者在心中把所假设的东西和要证明的东西混为一谈。

在现在这一版中，每一条定理都是首先用一种如果是特殊却也是更明确的方式叙述出来的，而然后才证明该定理可以有多大程度的普遍性。

我们一直是用符号 V 来代表势的，而且每当我们只是处理的静电学时，我们就将继续这样作。然而在这一章中，以及在下卷的那些电势出现在电磁考察中的各编中，我们却将用ψ来作为电势的一个专用符号。

格林定理

96a.〕下述重要定理是由乔治·格林在他的《关于数学对电和磁的应用的文章》中给出的。

[①] 这条定理看来是由奥斯特罗格拉斯基在 1828 年宣读的一篇论文中首次提出的，该文于 1831 年发表于 Mém.del’Acad.deSt.Pétersbourc，T.I.p.39.然而这条定地却可以看成连续性方程的一种形式。

定理和由一个闭合曲面 s 所包围的空间有关。我们可以把这个有限的空间叫做“场”。设 v 是从曲面 s 向场中画出的一条法线，并设 l、m、n、是这条法线的方向余弦，则

$$l\frac{d\Psi}{dx}+m\frac{d\Psi}{dy}+n\frac{d\Psi}{dz}=\frac{d\Psi}{dv} \quad (1)$$

将是当沿v前进时函数Ψ的变化率。$\frac{d\Psi}{dv}$的值被理解为是在表面本身上取的，那里的 v＝0。

让我们也像在第 26 和 77 节中那样写出

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}=-\nabla^2\Psi, \quad (2)$$

而当有两个函数Ψ和Φ时，让我们写出

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Phi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Phi}{dz}=-S.\nabla\Psi\nabla\Phi. \quad (3)$$

不熟悉四元数方法的读者如果愿意，可以把$\nabla^2\Psi$和 $S.\nabla\Psi\nabla\Phi$看成不过是在以上二式中和他们相等的那些量的一种约定的简写；而且，由于我们在后文中将应用笛卡尔座标，也就用不着记得这些表示式的四元数诠释。然而，我们使用这些写法而不是用一个任意选出的单独字母来代表这些表示式，其原因就是，在四元数的语言中，他们全面地代表着和他们相等的那些量。算符∇作用在标量函数Ψ上，就给出该函数的空间改变量，而$-S.\nabla\Psi\nabla\Phi$一式就是两个空间改变量的乘积的标量部分，或者说是其中一个空间改变量乘以另一个空间改变量在它方向上的分量而得到的乘积。$\frac{d\Psi}{dv}$在四元数理论中通常写成 $S.U\nabla\Psi$，此处 Uv 是沿法线方向的一个单位矢量。看来在这儿使用这个符号并无多大好处，但是当我们开始处理各向异性的媒质时，我们就会发现使用这个符号的好处了。

格林定理的叙述

设Ψ和Ψ是 x、y、z 的两个函数，他们本身和他们的一阶导数都在以闭合曲面 s 为边界的非循环域 s 中是有限的和连续的，于是就有

$$\iint\Psi\frac{d\Phi}{dv}ds-\iiint\Psi\nabla^2\Phi ds=\iiint S.\nabla\Psi\nabla\Phi ds$$
$$=\iint\Phi\frac{d\Psi}{dv}ds-\iiint\Phi\nabla^2\Psi ds \quad (4)$$

式中的二重积分是展布在整个闭合曲面 s 上的，而三重积分则遍及由该曲面所包围的整个场 s。

为了证明这一定理，在第 21 节的定理三中写出

$$X=\Psi\frac{d\Phi}{dx},Y=\Psi\frac{d\Phi}{dy},Z=\Psi\frac{d\Phi}{dz},(5)$$

于是就有

$$\text{Roce} = -\Psi\left(l\frac{d\Phi}{dx}+m\frac{d\Phi}{dy}+n\frac{d\Phi}{dz}\right)$$

$$= -\Psi l\frac{d\Phi}{dv},\text{据}(1)\text{；} \qquad (6)$$

以及

$$\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}=\Psi\left(\frac{d^2\Phi}{dx^2}+\frac{d^2\Phi}{dy^2}+\frac{d^2\Phi}{dz^2}\right)$$

$$+\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Phi}{dy}+\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Phi}{dz}$$

$$= -\Psi\nabla^2\Phi - S.\nabla\Psi\nabla\Phi,\text{据}(2)\text{和}(3). \qquad (7)$$

但是由定理三，

$$\iint R\cos\in=\iiint\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)ds\text{；}$$

或者，由(6)和(7)，就有

$$\iint\Psi\frac{d\Phi}{dv}ds-\iiint\Psi\nabla^2\Phi ds=\iiint S.\nabla\Psi\nabla ds. \qquad (8)$$

既然在此式的在端Ψ和Φ可以互换，他们在左端也就可以互换，于是我们就得到由方程(4)给出的格林定理的完全证明。

96b.〕其次我们必须证明，当其中一个函数例如Ψ是一个多值函数时，格林定理也成立，如果该函数的一阶导数是单值的而且在非循环域 s 中并不变为无限大的话。

既然∇Ψ和∇Φ是单值的，(4)式的右端就是单值的。但是既然Ψ是多值的，左端的任一项例如$\Psi\nabla^2\Phi$就是多值的。然而，如果我们在域 s 中的一个点 A 上选定Ψ的许多值中的一个，例如Ψ_0，则Ψ在任何其他点 P 上的值也将是确定的。因为，既然所选定的Ψ值在域中是连续的，Ψ在 P 上的值就必然是从 A 上的值Ψ。开始沿着从 A 到 P 的任何路径通过连续变化而达到的那个值。假如在 P 点的值对于 A、P 之间的两条路径是不同的，则这两条路径之间必然包围了一条闭合曲线，而Ψ的导数在那条曲线上变为无限大 。喏，这是和预设的条件相矛盾的，因为，既然各导数在域 s 中不会变成无限大，闭合曲线就必然完全位于域外，而既然域是非循环的，域内的两条路径就不可能包围域外的任何东西。

因此，如果Ψ_0被取作Ψ在点 A 上的值，则Ψ在 P 上的值是确定的。

假如曾经选定Ψ的任何别的值例如Ψ_0＋nk 来作为 A 点上的值，则 P 点上的值将是Ψ＋nk。但是，方程(4)的左端却将和以前相同，因为，这种改变将使左端增大一个量

$$nk\left[\iint\frac{d\Phi}{dv}ds-\iiint\nabla^2\Phi ds\right]\text{；}$$

而根据第 21 节中的定理三，这个量是零。

96c.〕如果域 s 是双连通的或三连通的，我们就可以通过用屏障来把它的每一条回路都隔断而把它简化成非循环域。{这时我们就可以对一个域

而既然域是非循环的，一切的路径就是可调合的。}

应用定理，该域以 s 的表面和屏障的正面及负面为其边界面。}

设 s_1 是其中一个屏障，而 K_1 是对应的循环常数，也就是是在沿正方向绕回路巡行一周时的Ψ的增量。既然域 s 是位于屏障两侧的，s_1 的每一个面积元就都将在面积分中出现两次。

如果我们假设法线 v_1 是向着 ds_1 的正面画的，而 v_1' 是向着反面画的，则有

$$\frac{d\Phi}{dv_1'}=\frac{d\Phi}{dv_1},$$

和 $$\Psi_1'=\Psi_1+(k_1),$$

于是，既然 dv 就是正曲面之内向法线上的元线段，面积分中来自 ds_1 的元量就将是

$$\Psi_1\frac{d\Phi}{dv_1}ds_1+\Psi_1'\frac{d\Phi}{dv_1'}ds_1=-\kappa_1\frac{d\Phi}{dv_1}ds_1.$$

由此可见，如果域 s 是多连通的，则方程(4)的第一项必须写成

$$\iint\Psi\frac{d\Phi}{dv_1}ds-k_1\iint\frac{d\Phi}{dv_1}ds_1-\cdots-k_n\iint\Psi\frac{d\Phi}{dv_n}ds_n-\iiint\Psi\nabla^2\Phi ds,\quad(4a)$$

式中 dv 是边界面上内向法线的元线段,而且式中的第一个面积分应该是在边界面上计算的，而其他的面积分则是在不同的屏障上计算的，屏障的每一个面积元只取一次，其法线沿着回路的正方向画出。

定理在多连通域事例中的这种修订，是由亥姆霍兹首先证明其为必要的[①]，并且是由汤姆孙首先应用于该定理的[②]。

96d.〕现在让我们和格林一起假设，其中一个函数例如Φ并不满足它自己及其一阶导数在所给域中不会变成无限大的条件，而是在域中的一点 P 上而且只在 P 上变成无限大，而且在和 P 很靠近的地方Φ的值是Φ＋e/r，式中Φ_0是一个有限而连续的量，而 r 是到 P 点的距离①0。如果Φ是由集中在 P 点上的一个电量以及在所考虑域中到处都不会变成无限大的任何一种电荷体密度的分布所引起的势，情况就会是这样的。

现在让我们假设以 a 为半径以 P 点为心画一个很小的球。于是，既然在这个球的外面和曲面 s 里面的那个域中Φ并不显示任何奇异性，我们就可以把格林定理应用在该域上，只要记得在计算面积分时应该把小球面考虑在内。

在计算体积分时，我们必须从起源于整个域的体积分中减去起源于小球的体积分。

现在，适用于球的体积分$\iiint\Phi\nabla^2\Psi dxdydz$不可能在数值上大于

$$(\nabla^2\Psi)_g\iiint\Phi dxdydz，\text{或}(\nabla^2\Psi)_g\left\{2\pi ea^2+\frac{3}{4}\pi a^3\Phi_0\right\},$$

式中写在任何量旁的下标 g 表明取该量在球内的最大数值。

因此这个体积分具有 a^2 的数量级，从而当 a 渐减而最后变为零时体积

① ‘Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen welche den Wirbelbewe gungen entsprechen,’Crelle,1858,Translated by Prof.Tait,Phil,Mag.，1867(I).

② ‘On Vortex Motion，’Trans .R.S.Edin.xxv.part.i.p.241(1867).

分是可以忽略的。

另一个球积分

$$\iiint \Psi \nabla^2 \Phi dxdydz$$

将被假设为在小球面和曲面 s 之间的域中进行计算，从而积分域并不包含Ψ在它那里变为无限大的那个点。

球上的面积$\iint \Phi \frac{d\Psi}{dv} ds'$不可能在数值上大于$\Phi_g \iint \frac{d\Psi}{dv} ds'$。

现在，由第 21 节的定理就有

$$\iint \frac{d\Psi}{dv} ds = -\iiint \nabla^2 \Psi dxdydz,$$

因为这里的 dv 是从球面向外量度的；而且此式不可能在数值上大于（∇^2Ψ）$\frac{3}{4}\pi a^2$；而且Φ_g在球面上近似地等于$\frac{e}{g}$，从而$\iint \Phi \frac{d\Psi}{dv} ds$不可能在数值上大于$\frac{4}{3}\pi a^2 e(\nabla^2 \Psi)_g$，从而它具有$a^2$的数量级，而且当a趋于零趋于零时是可以忽略的。

但是方程另一端的在球面上计算的面积分

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{dv} ds',$$

却并不变为零，因为

$$\iint \frac{d\Phi}{dv} ds' = -4\pi e,$$

dv 从球面向外量度，而且，如果Ψ_0是Ψ在 P 点上的值，就有

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{dv} ds = -4\pi e \Psi_0.$$

因此，在这一事例中，方程(4)就变为

$$\iint \Psi \frac{d\Phi}{dv} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi ds - 4\pi e \Psi_0 = \iint \Psi \frac{d\Phi}{dv} ds - \iiint \Phi \nabla^2 \Psi ds^{①}. \quad (4b)$$

97a.〕我们可以像格林那样利用这一定理来确定一种分布的面密度，那种分布将引起一种势，使得势的值在一个给定的闭合曲面的内外都是给定的；这样就可以得到格林定理在这一事例中的一个例证。这些势值必须在曲面上互相重合，而且在曲面内部有$\nabla^2\Psi=0$，而在曲面外部则有$\nabla^2\Psi'=0$，式中Ψ和Ψ′代表曲面内和曲面外的势。

格林是从正过程开始的，就是说，给定了面密度σ的分布，一个内部点 P 上和一个外部点 P′上的势是通过计算积分

$$\Psi_P = \iint \frac{\sigma}{r} ds, \quad \Psi'_{P'} = \iint \frac{\sigma}{r'} ds \quad (9)$$

来得出的，式中的 r 和 r′分别从 P 点和 P′点量起。

现在令Φ＝1/r，，然后对曲面内部的空间应用格林定理。记得在整个积分限内有$\nabla^2\Phi=0$和$\nabla^2\Psi=0$，我们就得到

---

① 不是在一个球所占的体积中计算的，该球的中心就是Φ在那里变为无限大的那个点。}

$$\iint \Psi \frac{d\frac{1}{r}}{dv'} ds - 4\pi\Psi_P = \iint$$

[①],(10)

式中Ψ_p，是Ψ在 P 点上的值。

另外，如果我们把定理应用到曲面 s 和在无限远 a 处包围该曲面的另一曲面之间的空间中，则属于后一曲面的那一部分面积分将具有 1/a 的数量级而可以忽略，从而我们就得到

$$\iint \Psi' \frac{d\frac{1}{r}}{dv} ds = \iint \frac{1}{r}\frac{d\Psi}{dv} ds. (11)$$

现在，在曲面上有Ψ＝Ψ′，而既然法线 v 和 v′是向相反的方向画的，又有

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dv} + \frac{d\frac{1}{r}}{dv'} = 0.$$

由此可见，当把方程(10)和(11)相加时，左端就互相抵消，而我们就有

$$-4\pi\Psi_p = \iint \frac{1}{r}\left(\frac{d\Psi}{dv'} + \frac{d\Psi'}{dv}\right) ds. \quad (12)$$

97b.〕格林也证明了，如果势Ψ在一个闭合曲面 s 的每一点上的值是任意给定了的，则曲面内部或外部任点上的势可以确定，如果在曲面内部或外部有$\nabla^2\Psi=0$ 的话。为了证明这一点，他假设函数Φ在 P 点附近的值近似地是 1/r，在曲面 s 上的值是零，而在曲面内部的每一点上有

$$\nabla^2\Phi=0.$$

至于这样一个函数必然存在，格林是从一种物理考虑来证明的；就是说，如果 s 是一个接地的导电表面，并有一个单位电荷放在 P 点，则 s 内的势必然满足上述条件。因为，既然 s 是接地的，s 上每一点的势必然是零；而既然势起源于 P 点上的电和在 s 上感应出来的电，在曲面内部的每一点上就有$\nabla^2\Psi=0$.对这一事例应用格林定理，我们就得到

$$4\pi\Psi_P = \iint \Psi \frac{d\Phi}{dv'} ds, \quad (13)$$

此处面积分中的Ψ就是面积元 ds 上的势的给定值；而且，如果σ_p是由 P 点上的单位电量在 s 上感应出来的电的面密度，就有

$$4\pi\sigma_P + \frac{d\Phi}{dv'} = 0, \quad (14)$$

从而我们就可以把方程(13)写成

$$\Psi_P = -\iint \Psi\sigma ds$$ [①](15)

式中σ是由 P 点上等于 1 的电荷在 ds 上感应出来的电荷面密度。

因此，如果对 P 点的一个具体位置来说曲面每一点上的σ值为已知，

[①] {在方程(10)和(11)中，dv′是向曲面内部画的，而 dv 则是向曲面外部画的。}

[①] {此式和第 119 页上的方程(14)相同。}

我们就可以通过普通的求积分来计算 P 点的势，这时假设曲面每一点上的势已经给定，而曲面内部的势则满足条件

$$\nabla^2\Phi=0.$$

我们在以后即将证明，如果我们已经求得了一个满足这些条件的函数 Ψ，则它是唯一满足这些条件的函数。

格林函数

98.〕设使一个闭合曲面 s 保持于零势。设 P 和 Q 是位于曲面 s 的正面上的两个点（我们可以把内面或外面设为正面），并设把一个带有单位电荷的小物体放在 P 点上；Q 点的势将包括两部分，其中一部分是由 P 点上的电荷的直接作用引起的，而另一部分则是由该电荷在 s 上感应出来的那些电的作用引起的。后一部分势叫做“格林函数”，并用 G_{pq} 来代表。

这个量是 P、Q 二点的位置的函数，其函数形式依赖于曲面 s。它已经针对 s 是一个球的事例和少数几个其他事例被算出。它代表由 P 点上的单位电荷在 s 上感应出来的电荷在 Q 点引起的势。

任意点 Q 上的实际势起源于 P 点的电荷和 s 上的感生电荷；此势是 $1/r_{pq}+G_{pq}$，式中 r_{qp} 代表 P 和 Q 之间的距离。在曲面 s 上，以及在 s 的负表面的每一点上，势都为零，因此就有

$$G_{qa}=-\frac{1}{r_{pa}}, \qquad (1)$$

式中下标 a 表示取的是曲面 s 上的一个点 A 而不是 Q。

设 $\sigma_{pa}{}'$，代表由 P 在曲面 s 的一点 A′ 感应出来的面密度，于是，既然 G_{pq} 是由表面分布在 Q 上引起的势，那就有

$$G_{pq}=\iint\frac{\sigma_{pa'}}{r_{qa'}}ds', \qquad (2)$$

式中 ds′ 是 A′ 点处的一个面积元，而积分则遍及整个曲面 s。

但是，假如曾把一个单位电荷放在 Q 上，我们由方程(1)就应有

$$\frac{1}{r_{qa'}}=-G_{qa'} \qquad (3)$$

$$=-\iint\frac{\sigma_{qa}}{r_{aa'}}ds\text{；} \quad (4)$$

式中 σ_{qa} 是由 Q 感应出来的电在 A 点的密度，ds 是一个面积元，而 $r_{aa'}$，是 A 和 A′ 之间的距离。把 $1/r_{qa'}$ 的这个值代入 G_{qp} 的表示式中，我们就得到

$$G_{qp}=\iiint\frac{\sigma_{qa}\sigma_{pa'}}{r_{aa'}}ds\,ds'. \qquad (5)$$

既然这个表示式当把 p 改成 q 而把 q 改成 p 时并不改变，我们就发现

$$G_{qp}=G_{pq}\text{；} \quad (6)$$

这是我们在第 86 节中已经证明其为必要的一个结果，但是我们现在看到它也可以由计算格林函数的数学手续来推出。

如果我们假设一种完全任意的电分布，并在场中放上一个带有单位电荷的点，如果零势曲面把该点和所设的分布完全分隔了开来，那么，如果我们把这个曲面取作 s，并把这个点取作 P，则对和 P 点位于曲面的同侧的任一点来说，格林函数就将是所设的分布在曲面的另一侧引起的势。利用这种办法，我们可以构想出任意多的事例，使得格林函数可以针对 P 点的一个特定位置来算出。当曲面的形式已经给定而 P 点的位置为任意时，这一函数形式的寻求就是一个困难得多的问题，尽管我们已经证明这在数学上是可能的。

让我们假设问题已经解决，而 P 是取在曲面的内部的。这时，对于一切外部的点来说，表面分布的势都和 P 点的势相等而异号。因此表面分布就是心压式的(centrobaric)[①]，而它对一切外部点的作用和放在 P 点上的一个单位电荷的作用相同。

99a.〕如果我们在格林定理中令 $\Psi=\Phi$，就得到

$$\iint \Psi \frac{d\Psi}{dv} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Psi ds = \iiint (\nabla\Psi)^2 ds. \qquad (16)$$

如果 Ψ 是由一种电分布引的势，而该分布在空间中有体密度 ρ，在表面为 s_1、s_2 等等而势为 Ψ_1、Ψ_2 等等的一些导体上有面密度 σ_1、σ_2 等等，则有

$$\nabla^2\Psi = 4\pi\rho, \quad (17)$$

$$\frac{d\Psi}{dv} = -4\pi\sigma, \qquad (18)$$

式中 dv 是从导体向外画的，而且

$$\iint \frac{d\Psi}{dv_1} ds_1 = -4\pi e_1, \qquad (19)$$

式中 e_1 是曲表 s_1 上的电荷。

将(16)除以 -8π，我们就得到

$$\frac{1}{2}(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \cdots) + \frac{1}{2}\iiint \Psi\sigma dxdydz$$
$$= \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right] dxdydz \qquad (20)$$

第一项是由面分布引起的体系的电能，而第二项是由场中的电分布引起的电能，如果这样一种分布存在的话。

因此，等式的右端就表示体系的全部电能[①]，此处势 Ψ 是 x、y、z 的给定函数。

由于常常要用到这个体积分，我们将用一个简写符号 W_Ψ 来代表它，于是就有

$$W_\Psi = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right] dxdydz. \qquad (21)$$

如果仅有的电荷就是各导体表面上的那些电荷，则 $\rho=0$，而方程(20)左端

[①] Thomson and Tait's Natural Philosophy, §526.

[①] {当各导体被一种不同于空气的电介质所包围时，(20)式右端的表示式并不代表电能。}

的第二项不复存在。

正如在第 84 节中一样,能量表示式的第一项用各导体的电荷和势表示了带电体系的能量，我们将用 W 来代表这一能量表示式。

99b.〕设Ψ是 x、y、z 的一个函数，满足一个条件，即它在一个闭合曲面s上的值$\overline{\Psi}$在曲面的每一点上都是一个给定的量。在不在曲面s上的各点上，Ψ的值是完全任意的。

让我们也写出

$$W=\frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]dxdydz. \quad (22)$$

积分遍及曲面内的整个空间，于是我们就将证明，如果Ψ_1是Ψ的一种特定形式，它满足表面条件而且在曲面内的每一点上也满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Psi_1=0 \quad (23)$$

则对应于Ψ_1的 W 值 W_1将小于对应于在曲面内的任一点上和Ψ_1不相同的任意函数的 W 值。

因为，设Ψ在曲面上和Ψ_1相重合，但并不是在曲面内部的每一点上都和Ψ_1相重合，而且让我们写出

$$\Psi=\Psi_1+\Psi_2\,;(24)$$

于是Ψ_2就是在曲面的每一点上都为零的一个函数。

对Ψ而言的 W 值显然是

$$W=W_1+W_2+\frac{1}{4\pi}\iiint\left(\frac{d\Psi_1}{dx}\frac{d\Psi_2}{dx}+\frac{d\Psi_1}{dy}\frac{d\Psi_2}{dy}+\frac{d\Psi_1}{dz}\frac{d\Psi_2}{dz}\right)dxdydz. \quad (25)$$

由格林定理，最后一项可以写成

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\Psi_2\nabla^2\Psi_1-\frac{1}{4\pi}\iiint\Psi_2\frac{d\Psi_1}{dv}ds.. \quad (25)$$

体积分等于零，因为在曲面内部有$\nabla^2\Psi_1=0$；面积分也等于零，因为在曲面上有$\Psi_2=0$。因此方程(25)就简化成了

$$W=W_1+W_2.(27)$$

喏，作为三个平方项之和，W_2的被积分式不可能有负值，于是积分本身只能大于或等于零。由此可见，如果 W_2 不为零，它就必须是正的，从而 W 就大于 W_1。但是，如果 W_2 为零，它的每一个被积元量就必须为零，从而在曲面内部的每一点上都有

$$\frac{d\Psi_2}{dx}=0，\frac{d\Psi_2}{dy}=0，\frac{d\Psi_2}{dz}=0$$

从而Ψ_2在曲面内部必为常量。但是在曲面上有$\Psi_2=0$，从而在曲面内部的每一点上也有$\Psi_2=0$，从而$\Psi=\Psi_1$；因此，如果 W 不大于 W_1，则Ψ必然在曲面内部的每一点上恒等于Ψ_1。由此可知，Ψ是在曲面上变为$\overline{\Psi}$而在曲面内部的每一点上满足拉普拉斯方程的一个唯一的 x、y、z 的函数。

因为，如果这些条件是被任何其他函数Ψ_3所满足的，则 W_3 必然小于任何别的 W 值。但是我们已经证明 W_1 是小于任何别的值的，从而它也小于 W_3。因此任何不同于Ψ_1的函数都不能满足条件。

我们将发现最有用处的事例就是，场是由一个外表面 s 和任意多个内表面 s_1、s_2 等等所限定的，而且条件是，Ψ将在 s 上为零，在 s_1 上为Ψ_1，在 s_2 上为Ψ_2，等等，此处Ψ_1、Ψ_2 等等对各自的曲面为常量，正如在各势为给定的导体组中那样。

在所有满足这些条件的Ψ函数中，在场中每一点上都满足$\nabla^2\Psi=0$ 的那个函数将给出 W_Ψ的最小值。

汤姆孙定理

引　理

设Ψ是 x、y、z 的一个任意函数，在闭合曲面 s 内 100a.〕部为有限和连续，而且在某些闭合曲面 s_1、$s_2\cdots s_p$ 等等上各自有常量值Ψ_1、$\Psi_2\cdots\Psi_p$ 等等。

设 u、v、w 是 x、y、z 的函数，而我们可以把他们看成一个满足管状条件

$$-S.\nabla=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0\text{，}\quad(28)$$

的矢量的分量；另外，让我们在定理三中令

$$x=\Psi u,Y=\Psi v,Z=\Psi w;(29)$$

于是我们就作为这些代入的结果而得到

$$\sum_p\iint\Psi_p(l_pu+m_pv+n_pw)ds_p+\iiint\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)dxdydz$$

$$+\iiint\left(u\frac{d\Psi}{dx}+v\frac{d\Psi}{dy}+w\frac{d\Psi}{dz}\right)dxdydz=0\text{，}(30)$$

面积分遍及于各个不同的曲面，体积分遍及于整个场，而 l_p、m_p、n_p 是 S_p 上向场中画的法线的方向余弦。现在，体积分由于 u、v、w 的管状条件而等于零，而各个面积分在下列各事例中等于零：

(1)当在曲面的每一点上有Ψ＝0 时。

(2)当在曲面的每一点上有 lu＋mv＋nw＝0 时。

(3)当曲面完全由满足(1)和(2)的一些部分构成时。

(4)当Ψ在每一个闭合曲面上为常数，并有

$$\iint(lu+mv+nw)\ ds=0.$$

时。

因此，在这四种事例中，体积分就是

$$M=\iiint(u\frac{d\Psi}{dx}+v\frac{d\Psi}{dy}+w\frac{d\Psi}{dz})dxdydz=0.\quad(31)$$

100b.〕现在考虑由一个闭合的外表面 s 和一些闭合的内表面 s_1、s_2 等等所限定的场。

设Ψ是 x、y、z 的一个函数，在场中为有限和连续并满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2\Psi=0，(32)$$

而且，Ψ在各曲面 s_1、s_2 等等上有恒定的但不是已知的值 Ψ_1、Ψ_2 等等，而在外表面 s 上则为零。

任一导电表面例如 s_1 上的电荷，由面积分

$$e_1=-\frac{1}{4\pi}\iint\frac{d\Psi}{dv_1}ds_1，(33)$$

给出，法线 v_1 是从曲面 s_1 向电场中画出的。

100c.〕现在设 f、g、h 是 x、y、z 的函数，而我们可以把他们看成一个矢量■的分量，该矢量只满足这样的条件：在场中每一点上，必须满足管状条件

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=0，(34)$$

而在任一闭合的内表面例如 s_1 上，则面积分

$$\iint(l_1f+m_1g+n_1h)ds=e_1，(35)$$

式中 l_1、m_1、n_1 是从曲面 s_1 向外画入场中的法线 v_1 的法线的方向余弦，而 e_1 则是方程(33)中那同一个量，这事实上就是以 s_1 为其表面的那个导体上的电荷。

我们必须考虑在 s 之内和 s_1 等等之外的整个场中计算的体积分

$$W_{\mathfrak{Z}}=2\pi\iiint(f^2+g^2+h^2)dxdydz，(36)$$

并把它和

$$W_\Psi=\frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]dxdydz，(37)$$

相比较，式中的积分限是相同的。

让我们写出

$$u=f+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dx}，\quad v=g+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dy}，\quad w=h+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dz}，(38)$$

以及 $W_\sigma=2\pi\iiint(u^2+v^2+u^2)dxdydz$；(39)

于是，既然

$$f^2+g^2+h^2=\frac{1}{16\pi^2}\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]$$
$$+u^2+v^2+w^2-\frac{1}{2\pi}\left[u\frac{d\Psi}{dx}+v\frac{d\Psi}{dy}+w\frac{d\Psi}{dz}\right],$$

就有

■(40)

现在，首先，u、v、w 满足管状条件，因为由方程(38)就有

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dg}+\frac{dw}{dz}=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}-\frac{1}{4\pi}\nabla^2\psi，(41)$$

而根据方程(34)和(32)所表示的那些条件，(41)右端的两部分都等于零。

其次，面积分为

$$\iint (l_1 u + m_1 v + n_1 w) ds_1$$
$$= \iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h) ds_1 + \frac{1}{4\pi} \iint \frac{d\Psi}{dv_1} ds_1\text{，} \quad (42)$$

但是由(35)可知右端第一项是 e_1，而由(33)可知第二项是$-e_1$，于是就有

$$\iint (l_1 u + m_1 v + n_1 w) ds_1 = 0. \qquad (43)$$

因此，既然Ψ是常量，第 100a 节中的第四个条件就得到满足，从而方程(40)的最后一项就是零，于是方程简化为

W■$=W_\Psi+$W． (44)

现在，既然积分 W■中的被积分式是三个平方项之和 $u^2+v^2+w^2$，积分就必须为正或为零。如果在场中任一点上 u、v、w 并不各自等于零，积分 W■就必将有一个正值，从而 W■就必然大于 W_Ψ。只有在每一点上 $u=v=w=0$ 各值才满足条件。

由此可见，如果在每一点上有

$$f=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\psi}{dx}\text{，}\ g=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\psi}{dy},h=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\psi}{dz}\text{，} \qquad (45)$$

则

W■$=W_\Psi$，(46)

而和这些 f、g、h 值相对应的 W■则小于和任何不同于这些值的 f、g、h 值相对应的值。

因此，当每一个导体上的电荷已经给定时，确定场中每一点上的位移和势的问题就有一个而且只有一个解。

在它的一种更普遍的形式下，这条定理是由 W.汤姆孙爵士给出的①。我们在以下将指明它可以有些什么样的推广。

100d〕这条定理可以修改如下：假设矢量■不是在场中每一点上满足管状条件而是满足

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=\rho\text{，}$$

式中ρ是一个有限的量，它在场中每一点上的值已经给定，可以为正或为负，可以是连续的连续的，然而它在一个有限域中的体积分却是有限的。

我们也可以假设，在场中的某些曲面上，有

$$lf+mg+nh+l'f'+m'g'+n'h'=\sigma\text{，}(48)$$

式中 l、m、n 和 l'、m'、n'是从曲面上的一点向着位移分别为 f、g、h 和 f'、g'、h'的域中画出的法线的方向余弦，而σ是在曲面的一切点上给定的一个量，它在一个有限曲面上的面积分是有限的。

100e.〕我们也可以改变边界曲面上的条件，即假设在这些曲面的每一点上有

$$lf+mg+nh=\sigma\text{，}(49)$$

式中σ是在每一点上给出的。

（在起初的叙述中，我们只假设了σ的积分值在每一个曲面上是给定

---

① Cambridge and Dublin Mathematical Journal, Felreary,1848。

的。在这里，我们假设σ的值在每一个面积元上是给定的；这种假设和在原有假设中把每一个面积元看成一个分离的曲面时意义相同。）

这些修订全都不会影响定理的成立，如果我们记得Ψ必须满足对应的条件，即满足普遍条件

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}+4\pi\rho=0，\quad(50)$$

和表面条件

$$\frac{d\Psi}{dv}+\frac{d\Psi'}{dv'}+4\pi\sigma=0 \qquad (51)$$

的话。

因为，如果像以前那样仍有

$$f+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dx}=u，\ g+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dy}=u，\ h+\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dz}=w，$$

则 u、v、w 将满足普遍的管状条件

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0，$$

和表面条件

$$lu+mv+nw+l'u'+m'v'+n'w'=0，$$

而且在外表面上有

$$lu+mv+nw=0，$$

由此我们就像从前那样得到

$$M=\iiint\left(u\frac{d\Psi}{dx}+v\frac{d\Psi}{dy}+u\frac{d\Psi}{dz}\right)dxdydz=0，$$

以及 W■＝W＋W■

因此，和从前一样，已经证明 W■是当 W■＝0 时的唯一的极小值，这就意味着 $u^2+v^2+w^2$ 到处为零，从而就有

$$f=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dx}，\ g=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dy}，\ h=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dz}。$$

101a.〕在这些定理的叙述中，我们一直只考虑了那样一种电学理论，它认为带电体系的性质依赖于各导体的形状和相对位置，并依赖于他们的电荷，但是我们却不曾照顾各导体之间的电介媒质的本性。

例如，按照这种理论，在一个导体的面密度和刚好在它外边的电动强度之间，存在着一种不变的关系，就像在库仑定律

$$R=4\pi\sigma$$

中表达出来的那样。

但是这只有在我们可以取为空气的标准媒质中才是对的。在其他媒质中，关系是不同的，正如开文迪什在实验上证明了（尽管没有发表）而后又由法拉第独立地重新发现了的那样。

为了全面地表示现象，我们发现有必要考虑两个矢量，他们之间的关系在不同的媒质中是不同的。其中一个矢量是电动强度，而另一个就是电位移。电动强度是通过形式不变的方程而和势联系着的，电位移是通过形式不变的方程而和电的分布联系着的，但是电动强度和电位移之间的关系却依赖于电介媒质的本性，而且必须用一些方程来表示，那些方程的最普

遍的形式是还没有充分确定的，而且是只能通过有关电介质的实验来确定的。

101b.〕电动强度是一个矢量，在第 68 节中定义为作用在一个小电量 e 上的机械力并除以 e，我们将用字母 P、Q、R 来代表它的分量，而用■代表矢量本身。

在静电学中，■的线积分永远和积分路径无关，或者换句话说，■是一个势函数的空间改变量。因此就有

$$P=-\frac{d\Psi}{dx}，\ Q=-\frac{d\Psi}{dy}，\ R=-\frac{d\Psi}{dz}，$$

或者更简练地用四元数语言表示就是

$$■=-\nabla\Psi。$$

101c.〕沿任一方向的电位移，在第 60 节中定义为通过一个小面积 A 而运动过去的电量并除以 A，而 A 的平面垂直于所考虑的方向。我们将用字母 f、g、h 来代表电位移的直角分量，而用■来代表矢量本身。

任意点上的体密度，由方程

$$\rho=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}$$

来确定，或者，在四元数语言中就是

$$\rho=-S.\nabla。$$

一个带电曲面的任一点上的面密度，由方程

$$\sigma=lf+mg+nh+l'f'+m'g'+n'h'$$

来确定，式中 f、g、h 是曲面一侧的电位移分量，从该侧画起的法线的方向余弦是 l、m、n；f'、g'、h'和 l'、m'、n'是曲面另一侧的电位移分量和法线的方向余弦。

这一点，在四元数中用方程

$$■\ \sigma=-[S.Uv+S.Uv']$$

来表示，式中 U_v、Uv'是曲面两侧的单位法线，而字母 S 表明应取乘积的标量部分。

当曲面是一个导体的表面时，v 就是向外画的法线，而既然这时 f'、g'、h'和■都为零，方程就简化为

$$\sigma=lf+mg+nh;$$
$$=-S.U_v■$$

因此导体上的总电荷就是

$$e=\iint(lf+mg+ng)\,ds;\quad ■$$
$$=-\iint S.U_v\,ds.$$

101d.〕正如在第 84 节中已经证明的那样，体系的电能是各电荷和相应之势的乘积的一半。用 W 代表这个能量，就有

$$W=\frac{1}{2}\sum(e\Psi)$$
$$=\frac{1}{2}\iiint\rho\Psi\,dxdydz+\frac{1}{2}\iint\sigma\Psi\,ds，$$

$$=\frac{1}{2}\iiint\Psi\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right)dxdydz$$

$$+\frac{1}{2}\iint\Psi(lf+mg+nh)ds\text{；}$$

式中的体积分应该遍及整个电场，而面积分则遍及各导体的表面。在第 21 节的定理三中写出

$$X=\Psi f，Y=\Psi g，Z=\Psi h，$$

我们发现，如果 l、m、n 是从曲面向场中画出的法线的方向余弦，就有

$$\iint\Psi(lf+mg+nh)ds=-\iiint\Psi\left(\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}\right)dxdydz，$$

$$-\iiint\left(f\frac{d\Psi}{dx}+g\frac{d\Psi}{dy}+h\frac{d\Psi}{dz}\right)dxdydz.$$

将这个值作为面积分代入 W 中，我们就得到

$$W=-\frac{1}{2}\iiint\left(f\frac{d\Psi}{dx}+g\frac{d\Psi}{dy}+h\frac{d\Psi}{dz}\right)dxdydz.$$

或

101e.〕现在我们来看■和■之间的关系

电量的单位通常是参照在空气中作的实验来定义的。现在我们由玻耳兹曼的实验得知，空气的电介常数比真空的略小，而且是随密度而变的。因此，严格说来，关于电学量的一切测量结果都应该换算到标准压强和标准温度下的空气中的情况，或是更加科学化地换算到真空中的情况，正如在空气中测量的折射率需要一种类似的改正那样。在这两种事例中，改正量都很小，只有在极端精确的测量中才能觉察到。

在标准媒质中，有

$$4\pi■=■，$$

或者说 $4\pi f=P$，$4\pi g=Q$，$4\pi h=R$.

在电介常数为 K 的各向同性的媒质中，有

$$4\pi■=K■，$$

$$4\pi f=KP，4\pi g=KQ，4\pi h=KR.$$

然而也有某些媒质，其中玻璃被研究得最为仔细；在这些媒质，■和■之间的关系更加复杂，而且包括一个或两个量的时间变化率，从而那种关系必将具有下列形式

$$F（■，■，■，■，■，■，\cdots）=0$$

我们暂时不打算讨论这种更普遍的关系，而是将只讨论■是■的一个线性的矢量函数的情况。

这样一种关系的最普遍形式可以写成

$$4\pi■=\phi(■)，$$

式中的φ在目前的考察中永远代表一个线性的矢量函数。因此，■的各分量是■的各分量的齐次线性函数，并且可以写成

$$4\pi f=K_{xx}P+K_{xy}Q+K_{zz}R，$$

$$4\pi g=K_{yx}P+K_{yy}Q+K_{yz}R，$$

$$4\pi h=K_{zx}P+K_{zy}Q+K_{zz}R;$$

式中每一个系数 K 的第一个下标指示位移的方向，而第二个下标指示电动强度的方向。

最普遍形式的线性矢量函数包括九个独立的系数。当具有一对相同下标的系数彼此相等时，函数就被说成是自共轭的。

如果我们用■来表示■，就得到

$$■=4\pi\phi^{-1}■$$

或

$$P=4\pi(k_{xx}f+k_{yx}g+k_{zx}h),$$
$$Q=4\pi(k_{xy}f+k_{yy}g+k_{zy}h),$$
$$R=4\pi(k_{xz}f+k_{yz}g+k_{zz}h),$$

101f.〕其分量为 P、Q、R 的电动强度在单位体积的媒质中引起分量为 df、dg、dh 的位移时所作的功是

$$dW=Pdf+Qdg+Rdh.$$

既然处于电位移状态{在稳定状态}下的一种电介质是一个保守体系，W 就必然是 f、g、h 的函数，而既然 f、g、h 可以独立地变化，我们就有

$$P=\frac{dW}{df},\quad Q=\frac{dW}{dg},\quad R=\frac{dW}{dh}.$$

由此即得

$$\frac{dP}{dg}=\frac{d^2W}{dgdf}=\frac{d^2W}{dfdg}=\frac{dQ}{df}.$$

但是$\frac{dP}{dg}=4\pi k_{yz}$就是 g 在 P 的表示式中的系数，而$\frac{dQ}{df}=4\pi k_{zy}$就是 f 在 Q 的表示式中的系数。

因此，如果一种电介质是一个保守体系（而我们知道它是这样的，因为它可以无限期地保持它的能量），则

$$k_{zy}=k_{yz},$$

而ϕ^{-1}是一个自共轭的函数。

由此可以推知，ϕ 也是自共轭的，从而 $K_{zy}=K_{yz}$.

101g.〕因此，能量的表示式可以写成两种形式中的任何一种：

$$W■=\frac{1}{8\pi}\iiint[K_{zz}P^2+K_{yy}Q^2+K_{xx}R^2+2K_{yz}QR+$$
$$2K_{zx}RP+2K_{xy}PQ]dxdydz,$$

或

$$W■=2\pi\iiint[k_{zz}f^2+k_{yy}g^2+k_{zx}h^2+2k_{yz}gh$$
$$+2k_{zx}hf+2k_{xy}fg]dxdydz,$$

此处 W 的下标指示用它来把 W 表示出来的那个矢量。当没有下标时，能量就被理解为是用两个矢量表示出来。

于是我们就总共有了电场能量的六种不同的表示式。其中三种涉及导体表面上的电荷和势，这已在第 87 节中给出了。

另外三种是在整个电场中计算的体积分，而且涉及电动强度的或电位

移的或他们二者的各个分量。

因此，前三种属于超距作用理论，而后三种则属于借助于中间媒质而发生作用的理论。

后三种 W 表示式可以写成

$$W=-\frac{1}{2}\iiint S.\blacksquare\, ds，$$

$$W\blacksquare=-\frac{1}{8\pi}\iiint S.\blacksquare\, ds，$$

$$W=-2\pi\iiint S.\blacksquare\,\phi^{-1}\blacksquare\, ds，$$

101h.〕为了把格林定理推广到一种不均匀的各向异性媒质中，我们只须在第 21 节的定理三中写出

$$X=\Psi\left[K_{xx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{xy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{zz}\frac{d\Phi}{dz}\right],$$

$$Y=\Psi\left[K_{yx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{yy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{yz}\frac{d\Phi}{dz}\right],$$

$$Z=\Psi\left[K_{zx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{xy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{zx}\frac{d\Phi}{dz}\right],$$

于是，如果 l、m、n 是曲面的外向法线的方向余弦（并记得各系数的下标次序可以随意变动），我们就得到

$$\iint\Psi\Big[(K_{xx}l+K_{yx}m+K_{zz}n)\frac{d\Phi}{dx}+(k_{xy}l+K_{yy}m+K_{zy}n)\frac{d\Phi}{dy}$$

$$+(K_{xz}l+K_{yz}m+K_{zz}n)\frac{d\Phi}{dz}\Big]ds-\iiint\Psi\left[\frac{d}{dx}\left(K_{xx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{xy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{xz}\frac{d\Phi}{dz}\right)\right.$$

$$+\frac{d}{dy}\left(K_{yz}\frac{d\Phi}{dx}+K_{yy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{yz}\frac{d\Phi}{dz}\right)$$

$$\left.+\frac{d}{dz}\left(K_{zx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{zy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{zz}\frac{d\Phi}{dz}\right)\right]dxdydz$$

$$=\iiint\left[K_{zz}\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Phi}{dx}+K_{yy}\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Phi}{dy}+K_{zz}\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Phi}{dz}\right.$$

$$+K_{yz}\left(\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Phi}{dz}+\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Phi}{dy}\right)+K_{zx}\left(\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Phi}{dx}+\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Phi}{dz}\right)$$

$$\left.+K_{xy}\left(\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Phi}{dy}+\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Phi}{dx}\right)\right]dxdydz$$

$$=\iint\Phi\left[(K_{xx}l+K_{yx}m+k_{zx}n)\frac{d\Psi}{dx}+(K_{xy}l+K_{yy}m+K_{zy}n)\frac{d\Psi}{dy}\right.$$

$$\left.+(K_{xz}l+K_{yz}m+K_{zz}n)\frac{d\Psi}{dz}\right]ds-\iiint\Phi\left[\frac{d}{dx}\left(K_{xx}\frac{d\Psi}{dx}+K_{xy}\frac{d\Psi}{dy}\right.\right.$$

$$\left.K_{xz}\frac{d\Psi}{dz}\right)+\frac{d}{dy}\left(K_{yz}\frac{d\Psi}{dx}+K_{yy}\frac{d\Psi}{dy}+K_{yz}\frac{d\Psi}{dz}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\left(K_{zx}\frac{d\Psi}{dx}+K_{zy}\frac{d\Psi}{dy}+K_{zz}\frac{d\Psi}{dz}\right)dxdydz.$$

利用四元数的符号，结果就可以更简洁地写成

$$\iint\Psi S.Uv\phi(\nabla\Phi)ds-\iiint\Psi S.\{\nabla\phi(\nabla\Psi)\}ds$$

$$=-\iiint S.\nabla\Psi\phi(\nabla\Phi)d\sigma=-\iiint S.\nabla\Phi\phi(\nabla\Psi)ds$$

$$=\iint\Phi S.Uv\phi(\nabla\Psi)ds-\iiint\Phi S.\{\nabla\phi(\nabla\Psi)\}ds.$$

一个导体之电容的上下限

102a.〕一个导体或一个导体组的电容，曾经定义在当升高到势 1 时该导体或导体组上的电荷，这时场中所有其他的导体都应处于零势。

确定电容之上下限的下述方法是 J.W.斯特鲁特勋爵在一篇题为《论共振理论》的论文中提出的(J.W.Strutt，Phil.Trans.1871.)，参阅第 306 节。

设 s_1 是我们要确定其电容的那一导体或导体组的表面,而 s_0 是所有其他导体的表面。设 s_1 的势是 Ψ_1 而 s_0 的势是 Ψ_0。设 s_1 的电荷是 e_1。设 s_0 的电荷是 $-e_1$。

于是，如果 s_1 的电容是 q，则

$$q=\frac{e_1}{\Psi_1-\Psi_0}, \qquad (1)$$

而如果 W 是体系在其实际电分布下的能量，则

$$W=\frac{1}{2}e_1(\Psi_1-\Psi_2), \qquad (2)$$

从而

$$q=\frac{2W}{(\Psi_1-\Psi_0)^2}=\frac{e^2{}_1}{2W}. \qquad (3)$$

先求电容值的上限：假设一个任意的势函数，它在 s_1 上的值是 1 而在 s_0 上的值是零，并计算在整个场中求的体积分

$$W_{\Psi}=\frac{1}{8\pi}\iiint\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]dxdydz \quad (4)$$

于是，既然我们已经证明（第 99b 节）W 不能大于 W_{Ψ}，电容 q 就不能大于 $2W_{\Psi}$。

再求电容值的下限：假设任意一组函数 f、g、h 满足方程

$$\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dy}+\frac{dh}{dz}=0\text{，} \quad (5)$$

并使得

$$\iint(l_1f+m_1g+n_1h)ds_1=e_1. \quad (6)$$

试计算在整个场中求的体积分

$$W\blacksquare=2\pi\iiint(f^2+g^2+h^2)dxdydz\text{，} \quad (7)$$

这时，既然我们已经证明（第 100c 节）W 不能大于 W■，电容 q 就不能小于

$$\frac{{e_1}^2}{2W\blacksquare} \quad (8)$$

求得满足管状条件的一组函数 f、g、h 的最简单方法，就是在曲面 s_1 上和 s_2 上各设一种电分布，其电荷之和为零，然后计算由这种分布引起的势，以及体系在这种安排下的电能。

于是，如果我们令

$$f=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dx}\text{，}\ g=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dy}\text{，}\ h=-\frac{1}{4\pi}\frac{d\Psi}{dz}\text{，}$$

这些 f、g、h 就将满足管状条件。

但是，在这一事例中，我们可以确定 W■而不必经过计算体积分的过程，因为，既然这种解在场中的一切点上都使 $\nabla^2\Psi=0$，我们就可以在面积分

$$W\blacksquare=\frac{1}{2}\iint\Psi\sigma_1ds_1+\frac{1}{2}\iint\Psi\sigma_0ds_0\text{，} \quad (9)$$

的形式下得出 W■，式中第一个积分在曲面 s_1 上求而第二个积分在曲面 s_0 上求。

如果曲面 s_0 是在离 s_1 无限远的地方，则 s_0 上的势为零，而第二项也就不复存在。

102b.〕当各导体的势为给定时，他们的电分布问题的解的一种近似值可用下法得出：

设 s_1 是其势保持为 1 的一个导体或导体组的表面，并设 s_0 是所有其他导体的表面，其中包括包围着所有各导体的那一中空导体，但是后一导体在某些事例中可以在离其他导体无限远的地方。

开始时先从 s_1 到 s_0 画一组直线或曲线。

沿着其中每一条线，假设Ψ是分布得在 s_1 上等于 1 而在 s_0 上等于 0。

于是，如果 P 是其中一条线上的一个点{s_1和 s_0 就是这条线和各曲面的交点}，我们就可以取$\Psi_1=\dfrac{Ps_0}{s_0s_1}$作为初阶近似。

于是我们就将得到Ψ的一种初阶近似,满足在 s_1 上等于 l 而在 s_0 上等于 0 的条件。

按Ψ_1算出的 W■将大于 W。

其次，作为对力线的一种二阶近似，让我们假设

$$f=-p\frac{d\Psi_1}{dx},\ g=-p\frac{d\Psi_1}{dy},\ h=-p\frac{d\Psi_1}{dz}. \quad (10)$$

分量为 f、g、h 的矢量是垂直于Ψ等于常量的曲面的。让我们确定能使 f、g、h 满足管状条件的 p。这时我们就得到

$$p\left(\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+\frac{d^2\Psi_1}{dy^2}+\frac{d^2\Psi_1}{dz^2}\right)+\frac{dp}{dx}\frac{d\Psi_1}{dx}+\frac{dp}{dy}\frac{d\Psi_1}{dy}+\frac{dp}{dz}\frac{d\Psi_1}{dz}=0. \quad (11)$$

如果我们从 s_1 到 s_2 画一条线，使它的方向到处到垂直于Ψ_1等于常量的曲面，并且用 s 来代表从 s_0 量起的这条线的长度，就有

$$R\frac{dx}{ds}=-\frac{d\Psi_1}{dx},\ R\frac{dy}{ds}=-\frac{d\Psi_1}{dy},\ R\frac{dz}{ds}=-\frac{d\Psi_1}{dz}, \quad (12)$$

式中R是合强度并等于$\dfrac{d\Psi_1}{ds}$，于是就有

$$\frac{dp}{dx}\frac{d\Psi_1}{dx}+\frac{dp}{dy}\frac{d\Psi_1}{dy}+\frac{dp}{dz}\frac{d\Psi_1}{dz}=-R\frac{dp}{ds},$$

$$=R^2\frac{dp}{d\Psi_1}, \quad (13)$$

从而方程(11)就变成

$$p\nabla^2\Psi=R^2\frac{dp}{d\Psi_1} \quad (14)$$

由此即得

$$p=C\exp.\int_0^{\Psi_1}\frac{\nabla^2\Psi_1}{R^2}d\Psi_1, \quad (15)$$

积分是沿 s 计算的线积分。

其次让我们假设，沿着曲线 s，有

$$-\frac{d\Psi_2}{ds}=f\frac{dx}{ds}+g\frac{dy}{ds}+h\frac{dz}{ds},$$

$$=-p\frac{d\Psi_1}{ds}, \quad (16)$$

于是就有

$$\Psi_2=C\int_0^{\Psi}(\exp.\int\frac{\nabla^2\Psi_1}{R^2}d\Psi_1)d\Psi_1, \quad (17)$$

积分永远理解为沿着曲线 s 计算。

常数 C 由一个条件来确定，那就是在 s_1 上有$\Psi_2=1$，当也有$\Psi_1=1$时。于是

$$C\int_0^1 \{\exp.\int_0^\Psi \frac{\nabla^2}{R^2} d\Psi\} d\Psi = 1. \qquad (18)$$

这就给出Ψ的一个二阶近似，而且这种手续可以重复进行。

通过计算 $W_{\Psi 1}$、W■、$W_{\Psi 2}$ 等等而得出的结果，给出一些交替地大于和小于真实电容并不断接近真实电容的电容值。上述手续涉及曲线 s 的形式计算和沿这一曲线的积分计算，这些运算通常对实用目的来说是太困难的。

然而在某些事例中我们却可以用更简单的方法来求得一种近似。

102c.〕作为这种方法的一种例示，让我们应用此法来求出两个曲面之间的电场中的等势面和电感线的逐阶近似，该二曲面是近似地而不是绝对地平面的和平行的，其中一个平面的势为零，而另一个的势则为 1。

设在两个曲面中，其势为零的那个曲面的方法是

$$z_1 = f_1(x, y) = a, \quad (19)$$

而其势为 1 的那个曲面的方程是

$$z_2 = f_2(x, y) = b, \quad (20)$$

a 和 b 是 x 和 y 的给定函数，其中 b 永远大于 a。a 和 b 对 x 和 y 的一阶导数是一些小量，我们可以忽略他们的二次以上的乘幂或乘积。

我们在开始时将假设电感线平行于 z 轴，在这种情况下就有

$$f = 0, y = 0, \frac{dh}{dz} = 0. \quad (21)$$

因此，沿着每一条个别的电感线,h 都是常量，从而

$$\Psi = -4\pi\int_a^z h dz = -4\pi h(z-a). \quad (22)$$

当 z＝b 时，Ψ_1＝1，因此

$$h = -\frac{1}{4\pi(b-a)}, \qquad (23)$$

从而

$$\Psi = \frac{z-a}{b-a}, \qquad (24)$$

这就给出势的一阶近似，并指示了一系列等势面，而沿着平行于 z 轴的方向测量的各等势面之间的间隔是相等的。

为了得到电感线的一种二阶近似，让我们假设各电感线到处垂直于由方程(24)给出的那些等势面。

这就和下列条件相等价：

$$4\pi f = \lambda\frac{d\Psi}{dx}, 4\pi g = \lambda\frac{d\Psi}{dy}, 4\pi h = \lambda\frac{d\Psi}{dz}, \quad (25)$$

式中 λ 应该适当确定，使得在场中的每一点上有

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0, \qquad (26)$$

并且使得沿着从曲面 a 到曲面 b 的任何电感线计算的线积分

$$4\pi\int (f\frac{dx}{ds} + g\frac{dy}{ds} + h\frac{dz}{ds}) ds, \qquad (27)$$

都等于－1。

让我们假设

$$\lambda = 1 + A + B(z-a) + C(z-a)^2, \quad (28)$$

并忽略 A、B、C 的乘幂和乘积，而且在我们的这一工作阶段中也忽略 a 和 b 的一阶导数的乘幂和乘积。

于是管状条件就给出

$$B = -\nabla^2 a，\ C = -\frac{1}{2}\frac{\nabla^2(b-a)}{b-a}， \quad (29)$$

式中

$$\nabla^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2}\right). \quad (30)$$

如果我们不是沿着新电感线而是沿着平行于 z 轴的旧电感线计算线积分，第二个条件就会给出

$$1 = 1 + A + \frac{1}{2}B(b-a) + \frac{1}{3}C(b-a)^2.$$

由此即得

$$A = \frac{1}{6}(b-a)\nabla^2(2a+b)， \quad (31)$$

以及

$$\lambda = 1 + \frac{1}{6}(b-a)\nabla^2(2a+b) - (z-a)\nabla^2 a - \frac{1}{2}\frac{(z-a)^2}{b-a}\nabla^2(b-a). (32)$$

于是我们就发现，作为电位移分量的二阶近似，有

$$\left.\begin{aligned} -4\pi f &= \frac{\lambda}{b-a}\left[\frac{da}{dx} + \frac{d(b-a)}{dx}\frac{z-a}{b-a}\right], \\ -4\pi g &= \frac{\lambda}{b-a}\left[\frac{da}{dy} + \frac{d(b-a)}{dy}\frac{z-a}{b-a}\right], \\ 4\pi h &= \frac{\lambda}{b-a}, \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

而作为势的二阶近似，则有

$$\Psi = \frac{z-a}{b-a} + \frac{1}{6}\nabla^2(2a+b)(z-a) - \frac{1}{2}\nabla^2 a\frac{(z-a)^2}{b-a} - \frac{1}{6}\nabla^2(b-a)\frac{(z-a)^3}{(b-a)^2}. \quad (34)$$

如果 σ_a 和 σ_b 分别是曲面 a 和 b 上的面密度而 Ψ_a 和 Ψ_b 是他们的势，则

$$\sigma_a = \frac{1}{4}(\Psi_a - \Psi_b)\left[\frac{1}{b-a} + \frac{1}{3}\nabla^2 a + \frac{1}{6}\nabla^2 b\right],$$

$$\sigma_b = \frac{1}{4}(\Psi_b - \Psi_a)\left[\frac{1}{b-a} - \frac{1}{6}\nabla^2 a - \frac{1}{3}\nabla^2 b\right].$$

[1]

[1] {这种研究并不很严格，而且面密度的表示式也和由适用于两个球面、两个柱面、球和平面或柱和平面放在靠近处的各事例的严格方法求得的结果不相符。我们可以得出面密度的一个表示式如下。让我们假设 z 轴是一个对称轴，则它将和所有的等势面相正交，而如果 V 是势，R1、R2 是一个等势面和 z 轴相交处的主曲率半径，则沿 z 轴的管状条件可以很容易地证明为　如果 Va、Vb 分别是两个曲面的势，t 是二曲面间沿 z 轴的距离，则　或者，如果 ra1、ra2 是第一个曲面的主曲率半径，则从微分方程中求出　　但是　式中 ρA 是 z 轴和第一个曲面相交处的面密度，于是近似地就有　同理，近似地也有　而且这些表示式和在上述各事例中用严格方法求得的结果相符。}

第五章　两个带电体系之间的机械作用

103.〕设 E_1 和 E_2 是两个带电体系，我们想要研究他们之间的相互作用。设 E_1 中的电分布由座标为 x_1、y_1、z_1 的体积元的体密度 ρ_1 来确定。设 ρ_2 是 E_2 中座标为 x_2、y_2、z_2 的体积元的体密度。

于是，由于 E_2 体积元的推斥而作用在 E_1 体积元上的力的 x 分量将是

$$\rho_1\rho_2\frac{x_1-x_2}{r^3}dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2$$

式中　$r^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$.

而且，如果 A 代表由于 E_2 的存在而作用在 A_1 上的全部力的 x 分量，则有

$$A=\iiiint\!\!\iint\frac{x_1-x_2}{r^3}\rho_1\rho_2dx_1dy_1dz_1dx_2dy_2dz_2\text{，}\qquad(1)$$

式中对 x_1、y_1、z_1 的积分是在 E_1 所占据的整个域中求的，而对 x_2、y_2、z_2 的积分是在 E_2 所占据的整个域中求的。

然而，既然除了在体系 E_1 中以外 ρ_1 等于零而除了在体系 E_2 中以外 ρ_2 等于零，如果把积分限扩大，积分的值也不会改变，因此我们可以假设每一个积分限都是±∞。

这一表示式是一种理论在数学符号形式下的忠实翻译，那种理论假设电力在物体之间直接超距地起作用，而对中间的媒质则不予任何注意。

如果我们现在用方程

$$\Psi_2=\iiint\frac{\rho_2}{R}dx_2dy_2dz_2\text{，}(2)$$

来定义由于 E_2 的存在而在一点 x_1、y_1、z_1 上引起的势Ψ_2，则Ψ_2 在无限远处将为零，并将到处满足方程

$$\nabla^2\Psi_2=4\pi\rho_2\text{，}(3)$$

现在我们可以把 A 表示成一个三重积分了

$$\Psi_2=\iiint\frac{d\Psi_2}{dx_1}\rho_1dx_1dy_1dz_1\text{，}(2)$$

在这里，势Ψ_2 被假设为在场中每一点上都有一个有限值，而 A 则是用这个势以及 E_1 中的电分布 ρ_1 表示出来，而没有明显地提到第二个体系 E_2 中的电分布。

现在，设用方程

$$\Psi_1=\iiint\frac{\rho_1}{r}dx_1dy_1dz_1\text{，}(2)$$

来定义由第一个体系引起的表示成 x、y、z 的函数的势Ψ_1，则Ψ_1 将在无限远处为零，并将到处满足方程

$$\nabla^2\Psi_1=4\pi\rho_1.\quad(6)$$

现在我们可以从 A 中消去 ρ_1 并得到

$$A=-\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{d\Psi_2}{dx_1}\nabla^2\Psi_1dx_1dy_1dz_1\text{，}\qquad(7)$$

在此式中，力是只用两个势来表示的。

104.〕在迄今考虑过的一切积分计算中，指定什么积分限都是无关紧要的，如果积分限包括了整个体系 E_1 的话。在下文中，我们将假设 E_1 和 E_2 安排得合适，以致某一个闭合曲面 s 将包含整个的 E_1 而不包含 E_2 的任何部分。

让我们写出

$$\rho=\rho_1+\rho_2,\quad \Psi=\Psi_1+\Psi_2 \quad (8)$$

于是在 s 之内就有 $\rho_2=0$，$\rho=\rho_1$，

而在 s 之外就有 $\rho_1=0$，$\rho=\rho_2$(9)

现在，

$$A_{11}=-\iiint\frac{d\Psi_1}{dx_1}\rho_1 dx_1 dy_1 dz_1 \qquad (10)$$

就代表由体系本身中的电所引起的作用在体系 E_1 上的沿 x 方向的合力。但是，按照直接作用理论这个力必为零，因为任一质点 P 对另一质点 Q 的作用是和 Q 对 P 的作用相等而异号的，而既然这两个作用的分量都出现在积分中，他们就将相互抵消。因此我们可以写出

$$A=-\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{d\Psi}{dx}\nabla^2\Psi dx_1 dy_1 dz_1, \qquad (11)$$

式中Ψ是由两个体系所引起的势，而现在的积分计算则限制在闭合曲面 s 之内的空间中，该曲面包含着整个体系 E_1 而不包含 E_2。

105.〕如果 E_2 对 E_1 的作用不是通过直接的超距作用来进行，而是借助于从 E_2 扩展到 E_1 的一种媒质中的胁强分布来进行的，那就很显然，如果我们知道把 E_1 从 E_2 完全隔开的任何一个闭合曲面 s 上每一点处的胁强，我们就将能够确定 E_2 对 E_1 的机械作用。因为，如果作用在 E_1 上的力不能由通过 s 的胁强来完全地说明，那就必然存在 s 外面的某些东西和 s 里边的某些东西之间的直接作用。

由此可见，如果可能借助于中间媒质中的一种胁强分布来说明 E_2 对 E_1 的作用，那就必然能够把这种作用表示成在把 E_2 和 E_1 完全隔开的任何一个曲面上计算的面积分的形式。

由此，让我们想法把

$$A=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{d\Psi}{dx}\left[\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}\right]dxdydz \qquad (11)$$

表示成一个面积分的形式。

由第 21 节中的定理三，我们可以作到这一点，如果我们可以确定 x、y、z，使得

$$\frac{d\Psi}{dx}\left(\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\frac{d^2\Psi}{dy^2}+\frac{d^2\Psi}{dz^2}\right)=\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}. \qquad (13)$$

分别考虑各项，就看到

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d^2\Psi}{dx^2}=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2,$$

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d^2\Psi}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}\right)-\frac{d\Psi}{dy}\frac{d^2\Psi}{dxdy},$$

$$=\frac{d}{dy}\left(\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Psi}{dy}\right).$$

同理

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d^2\Psi}{dz^2}=\frac{d}{dz}\left(\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dz}\right)-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2.$$

因此，如果我们写出

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2=8\pi p_{xx},\\
&\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2=8\pi p_{yy},\\
&\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2=8\pi p_{zz},\\
&\frac{d\Psi}{dy}\frac{d\Psi}{dz}=4\pi p_{yz}=4\pi p_{zy},\\
&\frac{d\Psi}{dz}\frac{d\Psi}{dx}=4\pi p_{zx}=4\pi p_{xz},
\end{aligned}\right\}\quad(14).$$

$$\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}=4\pi p_{xy}=4\pi pyx;$$

就有

$$A=\iiint\left(\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zx}}{dz}\right)dxdydz,\qquad(15)$$

积分在 s 内的整个空间中计算。利用第 21 节的定理三来变换体积分，就有

$$A=\iint(lp_{xx}+mp_{yz}+np_{zx})ds,\qquad(16)$$

式中 ds 是包含整个 E_1 而完全不包含 E_2 的任一闭合曲面上的面积元，而 l、m、n 是从 ds，向外画的法线的方向余弦。

关于沿 y 方向和 z 方向作用在 E_1 上的分力，我们同样得到

$$B=\iint(lp_{xy}+mp_{yy}+np_{zy})ds,\ (17)$$

$$C=\iint(lp_{xz}+mp_{yz}+np_{zz})ds.\quad(18)$$

如果体系 E_2 对 E_1 的作用确实是通过直接的超距作用来进行而不须任何媒质介入的，我们就必须把 p_{xx} 等等这些量看成只是某些符号表示式的简写，而并没有任何物理意义。

但是，如果我们假设 E_2 和 E_1 之间的相互作用是借助于他们之间的媒质中的协强来实现的，那么，既然方程(16)、(17)、(18)给出一个合力的力

量，而该合力起源于其六个分量为 p_{xx} 等等的胁强在曲面 s 外面的作用，我们就必须认为 p_{xx} 等等是确实存在于媒质中的一种胁强的分量了。

106.〕为了得到关于这一胁强之本性的一种更清楚的看法，让我们改变曲面 s 的一部分的形状，使得 ds 可以成为一个等势面的一部分。（曲面的这种变化是允许的，如果我们并不因此而排出 E_1 的任何部分或包入 E_2 的任何部分的话。）

设 v 是 ds 上向外画的法线。

设$R=-\frac{d\Psi}{dv}$是沿v方向的电动强度的量值，则有

$$\frac{d\Psi}{dx}=-Rl，\frac{d\Psi}{dy}=-Rm，\frac{d\Psi}{dz}=-Rn.$$

由此可见，胁强的六个分量就是

$$p_{xx}=\frac{1}{8\pi}R^2(l^2-m^2-n^2)，\ p_{yz}=\frac{1}{4\pi}R^2mn，$$

$$p_{yy}=\frac{1}{8\pi}R^2(m^2-n^2-l^2)，\ p_{zx}=\frac{1}{4\pi}R^2nl，$$

$$p_{zz}=\frac{1}{8\pi}R^2(n^2-l^2-m^2)，\ p_{xy}=\frac{1}{4\pi}R^2lm.$$

如果 a、b、c、是作用在 ds 的单位面积上的力的分量，则有

$$a=lp_{xx}+mp_{yz}+np_{zx}=\frac{1}{8\pi}R^2l，$$

$$b=\frac{1}{8\pi}R^2m，$$

$$c=\frac{1}{8\pi}R^2n.$$

由此可见，ds 外面的媒质部分作用在 ds 里边的媒质部分上的力，是垂直于面积元而指向外面的，而它在每单位面积上的值是$\frac{1}{8\pi}R^2$。

其次让我们假设面积元 ds 和与它相交的等势面相垂直，在这种情况下就有

$$l\frac{d\Psi}{dx}+m\frac{d\Psi}{dy}+n\frac{d\Psi}{dz}=0. \quad (19)$$

现在，

$$8\pi(lp_{xx}+mp_{yz}+np_{zx})=l\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2-\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]$$
$$+2m\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}+2n\frac{d\Psi}{dx}\frac{d\Psi}{dy}. \quad (20)$$

将(19)乘以$2\frac{d\Psi}{dx}$并从(20)中减去此式，就得到

$$8\pi(lp_{xx}+mp_{yx}+np_{zx})=-l\left[\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\Psi}{dz}\right)^2\right]-lR^2. \quad (21)$$

因此，ds 上单位面积的张力的分量是

$$a = -\frac{1}{8\pi}R^2 l,$$

$$b = -\frac{1}{8\pi}R^2 m,$$

$$c = -\frac{1}{8\pi}R^2 n.$$

因此，如果面积元 ds 和等势面相正交，则作用在它上面的力和该曲面相垂直，而其单位面积上的数值是和前一事例中的数值相同的，但是力的方向却不同，因为它是一个压力而不是一个张力。

这样我们就完全确定了媒质中任一给定点上的胁强的类型。

一点上的电动强度的方向，是胁强的一个主轴，而这一方向上的胁强是一种张力，其数值是

$$P = \frac{1}{8\pi}R^2 \qquad (22)$$

式中 R 是电动强度。

和这一方向相垂直的任一方向也是胁强的一个主轴，而沿着这样一个轴的胁强是一个压强，其数值也是 P。

这样定义的胁强并不属于最普遍的类型，因为它有两个主胁强是相等的，而第三个则具有相同的值而正负号相反。

这些条件使确定胁强的独立普量数从六减少到三，从而它是由电动力的三个分量

$$-\frac{d\Psi}{dx},\ -\frac{d\Psi}{dy},\ -\frac{d\Psi}{dz}$$

来完全确定的。

六个胁强分量之间的三个关系式是

$$\left.\begin{aligned} p_{yz}^2 &= (p_{xx}+p_{yy})(p_{zz}+p_{xx}), \\ p_{zx}^2 &= (p_{yy}+p_{zz})(p_{xx}+p_{yy}), \\ p_{xy}^2 &= (p_{zz}+p_{xx})(p_{yy}+p_{zx}), \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

107.〕现在让我们看看，当把一个有限的电量收集在一个有限的曲面上，使得体密度在曲面上变为无限大时，我们所求得的结果是否需要修订。

在这一事例中，正如我们已经在第 78a、78b 节中证明过的那样，电动强度的分量在曲面上是不连续的。因此胁强的分量也将在曲面上不连续。

设 l、m、n 是 ds 上的法线的方向余弦。设 P、Q、R 是画了法线的那一侧的电动强度的分量，而 P'、Q'、R' 是他们在另一侧的值。于是，由第 78a 和 78b 节可知，如果 a 是面密度，就有

$$\left.\begin{aligned} P - P' &= 4\pi\sigma l, \\ Q - Q' &= 4\pi\sigma m, \\ R - R' &= 4\pi\sigma n. \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

设 a 是由两侧的胁强所引起的作用在曲面之单位面积上的合力的 x 分量，就有

$$
\begin{aligned}
a &= l(p_{xx}-p'_{xx})+m(p_{xy}-p'_{xy})+n(p_{xz}-p'_{xz}),\\
&=\frac{1}{8\pi}l\{(P^2-p'^2)-(Q^2-Q'^2)-(R^2-R'^2)\}+\frac{1}{4\pi}m(PQ-P'Q')+\\
&\quad\frac{1}{4\pi}n(PR-P'R'),\\
&=\frac{1}{8\pi}l\{P-P')(P+P')-(Q-Q')(Q+Q')-(R-R')(R+R')\}\\
&\quad+\frac{1}{8\pi}m\{(P-P')(Q+Q')+(P+P')(Q-Q')\},\\
&\quad+\frac{1}{8\pi}n\{(P-P')(R+R')+(P+P')(R-R')\},\\
&=\frac{1}{2}l\sigma\{(l(P+P')-m(Q+Q')-n(R+R')\}\\
&\quad+\frac{1}{2}m\sigma\{(l(Q+Q')+m(P+P')\}+\frac{1}{2}n\sigma\{(l(R+R')+n(P+P')\},\\
&=\frac{1}{2}\sigma(P+P'). \qquad (25)
\end{aligned}
$$

由此可见，假设了任一点上的胁强由方程(14)来给出，我们就发现，作用在单位体积[①]的带电曲面上的沿 x 方向的合力,等于面密度乘以曲面两侧电动强度之 x 分量的算术平均值。

这就是我们在第 79 节中用基本上相同的手续求得的同一结果。

因此，周围媒质中的胁强的假说，在有限电量收集在有限曲面上的事例中是可以应用的。

作用在一个面积元上的合力，通常是通过考虑其线度远小于曲面之曲率半径的一部分曲面而从超距作用理论推出的[②]。在这一部分曲面的中点上的法线上取一点 P，它到曲面的距离远小于这一部分曲面的线度。由这一小部分曲面引起的这一点上的电动强度，将和曲面是一个无限大平面时的电动强度近似地相同，就是说近似地等于 $2\pi\sigma$ 并沿着从曲面画起的法线方向。对于刚刚位于曲面另一侧的一点 P'，强度将相同，但方向相反。

现在考虑由曲面的其他部分和离面积元为有限距离的其他带电体所引起的那一部分电动强度。既然点 P 和点 P'是彼此无限接近的，由有限距离处的电所引起的电动强度分量对这两点来说就将是相同的。

设 P_0 是由有限距离处的电在 A 或 A'上引起的电动强度的 x 分量，则对 A 来说，x 分量的总值将是

$$P=P_0+2\pi\sigma l,$$

而对 A'来说则是 $P'=P_0-2\pi\sigma l$.

由此即得 $$P_0=\frac{1}{2}(P+P')$$

现在，作用在一个面积元上的合机械力必然完全起源于有限距离处的

① {译注：应作“单位面积”，原文笔误。}

② 这种方法源于拉普拉斯。见 Poisson，‘Surla Distribution de l’électricité&.c.’Mém.del’Institut，1811，p.30.

电的作用，因为面积元对它自己的作用必然有零合力。由此可见，单位面积上的这一力的 x 分量必然是

$$a=\sigma P_0,$$

$$=\frac{1}{2}\sigma(P+P').$$

108.〕如果我们（像在方程(2)中那样）通过假设为给定的电分布来定义势，则由任一对带电质点之间的作用和反作用相等而反向这一事实可知，由一个体系对它自己的作用所引起的力的 x 分量必为零，而且我们可以把这个分量写成

$$\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{d\Psi}{dx}\nabla^2\Psi dxdydz=0. \qquad (26)$$

但是，如果我们把Ψ定义成 x、y、z 的那样一个函数，它在闭合曲面 s 外面的各点上满足方程

$$\nabla^2\Psi=0$$

而且在无限远处为零，则在 s 所包括的任一空间域中计算的体积分为零这件事就会显得是需要证明的。

一种证明方法是建筑在一条定理（第 100c 节）上的；那定理就是，如果$\nabla^2\Psi$在每一点上已经给定，而且在无限远处Ψ＝0，则Ψ在每一点上的值是确定的，并等于

$$\Psi'=\frac{1}{4\pi}\iiint\frac{1}{r}\nabla^2\Psi dxdydz, \qquad (27)$$

式中 r 是Ψ的浓度被给定为＝$\nabla^2\Psi$的那一体积元 dxdydz 和需要计算其Ψ＇的那一点 x＇、y＇、z＇之间的距离。

这就把定理简化成了我们由Ψ的第一种定义推出的结论。

但是，当我们把Ψ看成 x、y、z 的原始函数而认为其他函数都由它导出时，把(26)简化成一个形如

$$A=\iint(lp_{xx}+mp_{xy}+np_{xz})dS, \qquad (28)$$

的面积分就是更妥当的；而且，如果我们假设曲面 S 到处都和包围了$\nabla^2\Psi$不等于零的所有各点的曲面 s 有一个很大的距离 a，我们就知道Ψ在数值上不可能大于 e/a，此处 4πe 是$\nabla^2\Psi$的体积分；我们也知道，p_{xx}、p_{xy}、p_{xz}各量没有一个可以大于 p 即 $R^2/8\pi$或 $e^2/8\pi a^2$。因此，在半径很大并等于 a 的一个球面上计算的面积分就不能大于 $e^2/2a^2$，而当 a 无限增大时，面积分必然终于变为零。

但是这个面积分等于体积分(26)，而不论 S 所包围的空间的大小如何，只要 S 包围了每一个$\nabla^2\Psi$异于零的点，这个体积分的值就是相同的。因此，既然当 a 为无限大时积分为零，当积分限由任何包围了一切$\nabla^2\Psi$异于零的点的任何曲面来确定时，积分必将也等于零。

109.〕本章所考虑的胁强分布，恰恰就是法拉第在研究通过电介质而发生的感应时被引导到的那种分布。他用下列的说法概括了它：

“(1297)可以设想成沿两个界限性的带电导体表面之间的一些线作用着的直接感应力，是由一种侧向的或横向的力所伴随着的，这种侧向力和这些代表线之间的一种膨胀或推斥相等价(1224)；或者说，沿着电感应的方向而存在于电介质粒子之间的吸引力，是由一种沿着横方向的推斥力或

发散力所伴随着的。

“(1298)感应显现为各粒子的一种极化状态，他们是被保持作用的带电体纳入到这种状态之中的；各质点上出现正的和负的端点或部分，这些正负部分彼此之间对引起感应的曲面或质点来说是对称地分布着的。这种状态必然是一种受迫状态，因为它只能由力来引起和保持，而当力被取消时它就又回到正常的或安静的状态。它只能由相同部分的电在一些绝缘体中继续建立，因为只有绝缘体才能承受这种粒子状态。”

这是我们通过数学考察而得出的那些结论的一种精确的论述。在媒质中的每一点上，都存在那样一个胁强状态，使得沿着力线有一个张力而沿一切垂直于力线的方向有一个压力，张力和压力数值相等，而且都和该点的合力平方成正式。

“电张力”一词曾由不同的作者在不同的意义下加以应用。我将永远用它来代表沿着力线的张力，而正如我们已经看到的那样，这种张力是逐点变化的，而且永远正比于该点的合力的平方。

110.〕在空气或松节油之类的流体电介质中也存在这样一种胁强状态；初看起来，这一假说似乎和已经确立的原理相抵触，那原理就是，在流体中，压强在一切方向上都是相等的。但是，在从关于流体各部分的活动和平衡的考虑推出这条原理时，曾经不言而喻地认为流体中不存在我们在这儿假设为沿着力线进行的那样作用。我们所研究的这种胁强状态，是和流体的活动及平衡完全不矛盾的，因为我们已经看到，如果流体的任何部分都不带电荷，它就不会从它表面上的胁强受到任何合力的作用，不论那些胁强多么强。只有当一部分流体带了电时，它的平衡才会被它表面上的胁强所打乱，而我们知道在这种情况下流体确实倾向于发生运动。由此可见，所设的胁强状态并不是和流体电介质的平衡相矛盾的。

在第四章第 99a 节中研究了的 W 这个量，可以诠释为由于胁强的分布而出现在媒质中的能量。由该章的那些定理可以看到，满足在该章中给出的那些条件的胁强分布，也使 W 有一个绝对最小值。喏，当在任何一个位形下能量有极小值时，那个位形就是一个平衡位形，而且平衡是稳定的。因此，当受到带电体的感应作用时，电介质就将自动采取一种按我们所描述过的方式而分布的胁强状态[①]。

必须认真地记住，我们只在媒质作用的理论中迈出了一步。我们曾经假设媒质处于一种胁强状态中，但是我们却没有用任何方式来说明这种胁强，也没有解释它是怎样被保持的。然而，在我看来，迈出的这一步却似乎是很重要的一步，因为它利用媒质各相邻部分的作用来解释了以前被认为只能用超距作用来加以解释的那些现象。

111.〕我没有能够迈出下一步，那就是用力学的考虑来说明电介质中的这些胁强。因此我现在就让理论停止在这个地方，而只说出电介质中感应现象的其他部分是什么。

Ⅰ. 电位移　当感应通过电介质而被传送时，首先就沿着电感的方向出现电的位移。例如，在内壳带正电而外壳带负电的一个莱顿瓶中，正电

[①] ｛媒质中的胁强这一课题，将在“补遗卷”中进一步加以考虑，然而在此可以指出，求出一套胁强使之产生和存在于电场中的力相同的力的问题，是有无限多种解的一个问题。麦克斯韦所采用的，是不能由弹性固体中的胁变来普遍地引起的一种胁强分布。｝

在玻璃材料中的位移方向是从内向外的。

这种位移的任何增加，都在增加过程中相当于正电从内向外的一个电流，而位移的任何减小都相当于一个方向相反的电流。通过固定在电介质中的一个曲面上任一面积而移动过去的总电量，由一个量来量度，而那个量已经作为电感在该面积上的面积分乘以 K/4π 来考察过（第 75 节），此处 K 是电介质的比感本领。

Ⅱ．电介质粒子的表面电荷　设想有或大或小的任何一部分电介质由一个闭合曲面（想像地）而和其他部分划分开，于是我们就必须假设，在这个曲面的每一元部分上，都有一个电荷，由向内计算的电荷通过这一面积元的总移移动量来量度。

在内壳带正电的莱顿瓶的事例中，任何一部分玻璃都将是内侧带正电而外侧带负电的。如果这一部分完全位于玻璃内部，则它的表面电荷将被和它接触着的各部分上的异号电荷所中和；但是如果它是和不能在本身中保持感应状态的导体相接触的，表面电荷就不会被中和而是形成通常被称为“导体的电荷”的那种表观电荷。

因此，在旧理论中被称为“导体的电荷”的那种导体和周围电介质之分界面上的电荷，在感应理论中必须被称为周围电介质的表面电荷。

按照这种理论，所有的电荷都是电介质极化的残余效应。极化在物质内部到处存在，但是它在内部却由于带相反电荷的部分互相靠紧而被中和，因此只有在电介质的表面上电荷的效应才会显示出来。

理论可以完全说明第 77 节中的定理,即通过一个闭合曲面的总电感等于曲面内部的总电量乘以 4π。因为，我们所说的通过曲面的电感，简单的就是电位移乘以 4π，而外向的总电位移必然等于曲面内部的总电荷。

理论也能说明传给物质以一个“绝对电荷”的不可能性。因为，电介质的每一个粒子都在相对的两面带有相等而异号的电荷，或者也不妨说，这些电荷只是我们可以称之为“电极化”的单独一种现象的表现。

当这样被极化了时，一种电介媒质是电能的所在之处，而单位体积媒质中的能量在数值上等于作用在单位面积上的电张力，二者都等于电位移和合电动强度之乘积的一半，或者说

$$P=\frac{1}{2}\blacksquare=\frac{1}{8\pi}K\blacksquare^{2}=\frac{2\pi}{K}\blacksquare^{2},$$

式中 P 是电张力，■是电位移,■是电动强度，而 K 是比感本领。

如果媒质不是一种完全的绝缘质，则我们称之为电极化的那种约束状态将不断地消退，媒质会对电动强度屈服，电胁强会松弛，而约束状态的势能将转化为热。极化状态的衰减速度依赖于媒质的本性。在某些品种的玻璃中，要过若干天或若干年极化才会衰减到原值的一半。在铜中，同样的变化会在不到百万分之一秒内完成。

我们曾经假设，媒质在被极化后就被放置不顾了。在叫做电流的现象中，电在媒质中的不断通过倾向于恢复极化状态，其速率和媒质的导电性允许其衰减的速率相同。于是，保持电流的外界作用物就永远会在恢复媒质的不断衰退的极化时作功，而这种极化的势能则不断地转化为热，于是为保持电流而消耗的能量的最终效果就是逐渐地提高导体的温度，直到通过传导和辐射而损失的热和电流在相同时间内产生的热一样多时为止。

第六章　论平衡点和平衡线

112.〕如果电场中任何一点上的合力为零，该点就叫做一个“平衡点”。如果某一条线上的每一点都是平衡点，该线就叫做一条“平衡线”。一点为平衡点的条件就是在该点上有

$$\frac{dV}{dx}=0,\ \frac{dV}{dy}=0,\ \frac{dV}{dz}=0$$

因此，在这样一个点上，势对座标的变化来说就有一个极大值或极小值，或为驻定。然而，只有在一个带正电或负电的点上，或是在由一个带正电或负电的曲面所包围的整个有限空间中，势才能有一个极大值或极小值。因此，如果有一个平衡点出现在场的一个不带电的部分中，势就必然是驻定的，而不是一个极大值或极小值。

事实上，极大值或极小值的条件就是

$$\frac{d^2V}{dx^2},\ \frac{d^2V}{dy^2},\ 和\frac{d^2V}{dz^2}$$

必须全为负或全为正，如果他们取有限值的话。

现在，在一个不存在电荷的点上，由拉普拉斯方程可知三个量的和为零，从而这一条件是不能满足的。

我们将不考虑力的各分量同时为零的那一事例的数学分析上的条件，而是利用等势面来给出一个普遍的证明。

如果在任一点 P 上存在 V 的真极大值，则在 P 点邻域中的一切其他点上，V 的值都小于它在 P 点上的值。于是 P 就将被一系列闭合的等势面所包围，每一个等势面都在前一个等势面的外面，而且在其中任一等势面的一切点上，电力都将是指向外面的。但是我们在第 76 节中已经证明，在任何闭合曲面上计算的电动强度的面积分，就给出该曲面内的总电荷乘以 4π。喏，在这一事例中，力是到处指向外面的，从而面积分必然为正，因此在曲面内部就有一个正电荷，而且，既然我们可以把曲面画得离 P 要多近就多近，那就是说在 P 点上有一个正电荷。

同样，我们也可以证明，如果 V 在 P 点有一个极小值，则 P 是带负电的。

其次，设 P 是一个无电荷域中的一个平衡点，让我们围绕着 P 画一个半径很小的球，这时，正如我们已经看到的那样，这个球面上的势不能到处都大于或都小于在 P 点的势。因此它必然在球面的某些部分上较大而在其他部分上较小。曲面上的这些部分是以一些线为边界的，在那些线上势等于 P 点上的势。沿着从 P 点画到其势小于 P 点之势的点画出的线，电力是从 P 点开始的；而沿着从 P 点到势较大的点画出的线，力是指向 P 点的。因此 P 点对某些位移来说是一个稳定平衡点，而对另一些位移来说则是不稳平衡点。

113.〕为了确定平衡点或平衡线的数目，让我们考虑其上的势等于一个给定量 C 的那个曲面或那些曲面。让我们把其中的势小于 C 的那些区域叫做负域，而把其中的势大于 C 的那些域叫做正域。设 V_0 是电场中最低的势而 V_0 是电场中最高的势。如果我们令 $C=V_0$，则负域将只包括那些具有最低势的点或导体，而这些点或导体必然是带负电的。正域包括空间的其

余部分，而既然它包围着负域，它就是回绕的。参阅第 18 节。

如果我们现在增大 C 的值，负域就将扩大，而且新的负域也将在带负电的物体周围形成。对于这样形成的每一个负域，周围的正域都将要求一个回绕度。

当不同的负域扩大时，其中两个或多个可以在一个点上或一条线上相遇。如果有 n＋1 个负域相遇，周围的正域就失去 n 个回绕度，而各负域相遇的点或线就是一个 n 阶的平衡点或平衡线。

当 C 变得等于 V_1 时，正域就只剩了具有最高势的那个点或导体，从而也就失去了它的一切回绕性。因此，如果按照它的阶次把每一个平衡点或平衡线算作 1、2 或 n，则这样由现在所考虑的点或线得出的那个数目将比带负电物体的数目小一。

也有另一些平衡点或平衡线出现在各正域变成互相分离而负域获得回绕性的那种地方。按照他们的阶数来计算的他们的数目，比带正电物体的数目小一。

如果当它是两个或多个正域相遇之处时我们就把一个平衡点或平衡线叫做正的，而当它是一些负域相遇之处时把它叫做负的，那么，如果共有 p 个物体是带正电的和 n 个物体是带负电的，则正平衡点及正平衡线的阶数之和就是 p－1，而负平衡点及负平衡线的阶数之和则是 n－1。在无限远处包围着带电体系的那个曲面应该被看成一个物体，它的电荷和体系的电荷之和相等而异号。

但是，除了由不同域的连接而引起的这些数目确定的平衡点和平衡线以外，还可以有另外的一些平衡点或平衡线，关于这些，我们只能断定他们的数目必须是偶数。因为，如果当一个负域扩大时它会和自己相遇，它就会变成一个循球域，而且，通过重复地和自己相遇，它可以获得任意多个循环度，其中每一个循环度都对应于循环性出现处的那个平衡点或平衡线。当负域不断扩大直到它充满了整个空间时，它就会失去其所曾得到的每一个循环度而变成非循环的。因此，就有一组平衡点或平衡线，在他们那里循环性是被失去的，而且他们的数目正等于循环性在那里被获得的那些平衡点及平衡线的数目。

如果带电体或带电导体的形状是任意的，我们就只能断定这些增加的点或线的数目是偶数。但是，如果他们是带电的点或球形导体，则用这种办法得到的数目不能超过(n－1)(n－2)，此处 n 是物体的个数[①]。

114.〕靠近任一点 P 处的势可以展成级数

$$V = V_0 + H_1 + H_2 + \cdots;$$

式中 H_1、H_2 等等是 x、y、z 的齐次函数，其次数分别为 1、2 等等。

既然 V 的一阶导数在一个平衡点上为零，就有 $H_1 = 0$，如果 P 是一个平衡点的话。

设 H_n 是最先不等于零的那个函数，则在 P 点附近我们可以略去比 H_n 次数更高的一切函数。

现在，$H_n = 0$ 就是一个 n 阶圆锥面的方程，而这个锥面就是和 P 点处的等势面最密接的那个锥面。

[①] {我没能找到证明这一结果的任何地方。}

因此就看到，经过 P 点的等势面在该点有一个圆锥点，也就是它和一个 2 阶的或 n 阶的锥面相切。这个锥面和以其顶点为心的一个球面的交线，叫做“节线”(Nodallime)。

如果 P 点并不位于一条平衡线上，则节线不和自己相交，而是由 n 条或较少闭合曲线所构成。

如果有些节线交点并不位于球面的正对面点上，则 P 点是三条或更多条平衡线的交点。因为经过 P 点的等势面必然沿每条平衡线和自己相交。

115.〕如果同一个等势面有 n 页相交，他们各自的交角必然等于π/n。

因为，设把交线的切线取作 z 轴，就有 $d^2V/dz^2=0$。另外，设 x 轴是其中一页的一条切线，则又有 $d^2V/dx^2=0$。根据拉普拉斯方程，由此即得 $d^2V/dy=0$，或者说 y 轴是另一页的一条切线。

这里的考虑假设了 H_2 是有限的。如果 H_2 为零，设把交线的切线取作 z 轴，并令 $x=r\cos\theta$ 而 $y=r\sin\theta$，那么，既然

$$\frac{d^2V}{dz^2}=0,\quad \frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=0$$

$$\text{或}\ \frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}+\frac{1}{r^2}\frac{d^2V}{d\theta^2};$$

则写成 r 的升幂级数，比一方程的解就是

$$V=V_0+A_1r\cos(\theta+\alpha_1)+A_2r^2\cos(\theta+\alpha_2)+\cdots\cdots+A_nr^n\cos(n\theta+\alpha_n),$$

在一个平衡点上，A_1 等于零。如果第一个不为零的项是含 r^n 的项，则有

$$V-V_0=A_nr^n\cos(n\theta+\alpha_n)+r\text{的更高次幂。}$$

这个方程表明，等势面 $V=V_0$ 的 n 个页相交，每一交角为π/n。这一定理是由兰金（Rankine）给出的①。只有在某些条件下，一条平衡线才会在空间中存在，但是每当导体的面密度在一部分上是正的而在另一部分上是负的时，导体表面上却必然存在一条平衡线。

为了使导体可以在它表面的不同部分上带有异号的电荷，场中必须有些地方的势高于导体的而另一些地方的势则低于导体的势。

让我们从两个带正电的而势也相同的导体开始。在二物体之间将存在一个平衡点。让第一个物体的势逐渐降低。平衡点就将向它趋近，并在过程的某一阶段和它表面上的一点相重合。在过程的下一阶段中，和第一物体具有相同的势的第二物体周围的等势面将和第二物体的表面相正交，其交线就是一条平衡线。在扫过了导体的整个表面以后，这条闭合曲线将重新收缩成一点；然后这个平衡点就将在第一物体的另一侧越走越远，而且

---

① ‘Surmmary of the Properties of certain StreamLines,’Phil,Mag.,Oct.1864.并参阅 Thomsonand Tait’s Natural Philoscphy,§780;以及 Rankine and Stokes,in the Proc.R.S.,1867.p.468;以及 W.R.Smith,Proc.R.S.Edin.1869－70,p.79.｛当 d2V/dz2 只沿 z 轴为零时，这里的讨论就是不能令人满意的。兰金的证明是严格的。Hm 可以写成 式中 un、un+1＋1…分别是 x、y 的 n 次、n＋1 次…的齐次函数，而 z 轴是 n 阶奇线。即然 Hm 满足(2Hm＝0，我们必然就有 或者说 un＝Arncos（nθ＋α）；但是 un＝0 就是从 z 轴画起的锥面 Hm＝0 的切面的方程，也就是等势面的 n 页的切面方程，因此这些页就以π/n 角相交。

当两个物体的电荷成为相等而异号时这个点将运动到无限远处。

鄂伦肖定理

116.〕放在一个电力场中的一个带电体不可能处于稳定平衡。

首先，让我们假设可运动物体 A 上的电和周围物体组 B 上的电都是固定在这些物体上的。

设 V 是由于周围物体 B 的作用而在可动物体 A 的任一点上

引起的势，设 e 是可动物体 A 上此点周围的一小部分所带的电。于是 A 对 B 而言的势能就将是

$$M=\Sigma(Ve),$$

式中的和式遍及于 A 上一切带电的部分。

设 a、b、c 是 A 上任一带点部分相对于固定在 A 中并和 x、y、z 各轴相平行的座标轴而言的座标。设这些座标轴的原点绝对座标是 ξ、η、ζ。

让我们暂时假设 A 受到约束，只能平行于自身而运动，于是点(a，b，c)的绝对座标就将是

$$x=\xi+a,\quad y=\eta+b,\quad z=\zeta+c。$$

现在物体 A 对 B 而言的势可以写成若干项之和[①]，在其中每一项中 V 都是用 a、b、c 和 ξ、η、ζ 表示出来的，从而这些项的总和就是 a、b、c 的函数和 ξ、η、ζ 的函数；前三个座标对物体的每一点来说都是常量，而后三个座标则当物体运动时是变化的。

既然拉普拉斯方程是被其中每一项所满足的，它也就是被各项之和所满足的，或者说

$$\frac{d^2M}{d\xi^2}+\frac{d^2M}{d\eta^2}+\frac{d^2M}{d\zeta^2}=0$$

现在设令 A 发生一个小位移，使得

$$d\xi=ldr,\quad d\eta=mdr,\quad d\zeta=mdr;$$

并设 dM 是 A 相对于周围体系 B 而言的势的增量。

如果这个增量是正的，则要增大 r 就必须作功，从而就有一个倾向于使 r 减小并使 A 恢复其从前的位置的力 $R=dM/dr$，从而对这种位移来说平衡就将是稳定的。另一方面，如果增量是负的，力就将倾向于使 r 增大，从而平衡就将是非稳的。

现在考虑一个以原点为心而以 r 为半径的小球；它是如此之小，使得当固定在物体上点位于球内时，运动物体 A 的任何部分都不能和外部体系 B 的任何部分相重合。这时，既然在球内有 $\nabla^2M=0$，在球面上求的面积分

$$\iint\frac{dM}{dr}dS,$$

就等于零。

由此可见，如果在球面的任何部分上 dM/dr 是正的，则必然有些其他部分，在那里 dM/dr 是负的，而如果物体 A 沿着 dM/dr 的方向而被移动，它就将倾向于离开原有位置而运动，从而它的平衡就必然是非稳的。

因此，即使当被约束得只能平行于自身而运动时，物体也是非稳的，

[①] {译注：由下文可见，此处所说的“势”实系“势能”。}

而无庸赘言，当它完全自由时当然更是非稳的了。

现在让我们假设物体 A 是一个导体。我们可以把这种情况当作一个物体组的平衡事例来处理，即把可运动的电看成体系的一些部分。于是我们就可以论证说，既然当通过电的固定而被剥夺了那么多的自由度时体系都是非稳的，那就无庸赘言，当这种自由度被还给它时，它当然更是非稳的了。

但是我们也可以用更加特殊的方式来考虑这一事例，例如：

第一，设电被固定在 A 中，并让 A 平行于自身而移动一个小距离 dr。由这种原因而引起的 A 的势的增量已经考虑过了。

其次，让电在 A 中运动到它的平衡位置上，这种平衡永远是稳定的。在这种运动过程中，势肯定会减少一个量，我们可以称之为 Cdr。

因此，当电可以自由运动时，势的总增量就将是

$$\left(\frac{dM}{dr}-C\right)dr\text{；}$$

而倾向于使 A 回到它的原位置的就将是

$$\frac{dM}{dr}-C,$$

式中 C 永远是正的。

喏，我们已经证明过 dM/dr 对 r 的某些方向而言是负的，因此当电可以自由运动时，沿这些方向的非稳性就将增大。

第七章　简单事例中的等势面和电感线的形状

117.〕我们已经看到，导体表面上电的分布的确定，可以弄成依赖于拉普拉斯方程

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dx^2}=0,$$

的解；此处 V 是 x、y 和 z 的一个函数，它永远是有限的和连续的，在无限远处为零，而且在每一个导体的表面上有一个给定的恒定值。

通常并不能用已知的数学方法来求解这一方程以使任意给出的条件能够得到满足，但是却很容易写出任意多个能够满足方程的函数 V 的表示式，并在每一事例中确定出函数 V 将是真正解的那些导电表面的形状。

因此，看起来我们很自然地应该称之为逆问题的这种当势的表示式已经给定时要确定导体形状的问题，是比当导体形状已经给定时要确定势的正问题更加容易对付的。事实上，我们已知其解的每一个电学问题，都是通过这种逆过程来得出的。因此，对电学家来说大为重要的就是要知道用这种办法已经得到了一些什么结果，因为他可以指望用来求解一个新问题的唯一方法就是把问题归结成某些事例之一，在那些事例中已经通过逆过程构造了一个类似的问题。

关于结果的历史知识可以通过两种方式来起作用。如果我们被要求设计一种仪器来进行更精确的电学测量，我们就可以选择那样一些带电表面的形状，他们对应于我们已知其精确解的那些事例。另一方面，如果我们被要求估计形状给定的一些物体的带电情况，我们就可以从等势面的形状和所给物体形状相近的某一事例开始，然后我们可以利用尝试的办法来改动问题，直到它和所给的情况更近似地对应。这种方法从数学观点看来显然是很不完善的。但这却是我们所具备的唯一方法，而且，如果不许我们选择自己的条件，我们就只能对电分布进行一种近似的计算。因此，看来我们所需要的，就是在我们所能收集和记住的尽可能多的不同事例中关于等势面和电感线之形状的知识。在某几类事例中，例如在和球有关的那些事例中，存在一些我们可以利用的已知的数学方法。在另一些事例中，我们就不能不用一种更粗浅的方法，那就是在纸上实际地画出一些尝试性的图形，并从中选用和我们所需要的图形相差最小的一种。

我认为，即使在精确解为已知的那些事例中，这后一种方法也可能是有某种用处的，因为我发现，关于等势面形状的一种直观知识，常常导致数学求解方法的一种正确选择。因此我曾经画了若干幅等势面族和电感线族的图，以便学生可以熟悉这些线的形状。可以用来画这种图的方法，将在第 123 节中进行说明。

118.〕在本卷末尾的第一个图中，我们有两个点周围的等势面的横截面，该二点带有同号电荷，其大小为 20 和 5 之比。

在这里，每一个点电荷都被一系列等势面所包围，当逐渐变小时，他们就变得越来越接近于球形，尽管其中任何一个也不是准确的球面。如果各自包围一个点的两个曲面被用来代表两个近似球形而并不完全是球形的导体的表面，而且假设这两个物体被充以 4 比 1 的同号电荷，则此图将代表他们的等势面，如果我们擦掉画在两个物体内部的所有那些等势面的话。由图可见，两个物体之间的作用和两个带有相同电荷的点之间的作用

相同；这两个点并不位于两个物体轴线的确切中点上，而是各自比中点离另一物体更远一些。

同一个图也使我们能够看到其中一个卵形面上将有什么样的电分布；这种卵形面一头大一头小，而且包围着两个中心。如果带有 25 个单位的电而且不受外界影响，这样一个物体将在小端具有最大的面密度，在大端具有较小的面密度，而且在离小端比离大端更近的一个圆周上有最小的面密度[①]。

存在一个等势面，在图中用虚线来代表，它包括两个圈线，在锥面点 P 处相遇。这个点是一个平衡点，从而具有这种表面形状的一个物体上的面密度在该点将为零。

在这一事例中，力线形成两个分离的组，由一个六次曲面互相分开；该曲面用虚线来代表；它通过平衡点，而且和双曲面的一页有点相像。

这个图也可以被看成代表两个有重物质球的力线和等势面，二球的质量成 4 比 1 之比[②]。

119.〕在第二个图中我们又有两个点，所带的电荷成 20 与 5 之比，但是一个是正电荷而另一个是负电荷。在这一事例中，有一个等势面，也就是对应于零势的那个面，是一个球面。这个等势面在图中用虚线圆 Q 来代表。这个球面的重要性，当我们进行到电像的理论时就将被看到。

我们由此图可以看出，如果两个圆乎乎的物体带有异号电荷，他们就将像两个点那样地互相吸引；那两个点和他们带的电荷相同，但是放得比两个物体的中点更靠近一些。这儿又有用虚线表示的一个等势面是有两个圈线的，里边一个圈包围着电荷为 5 的点而外边一个圈包围着两个物体，这两个圈线在锥面点 P 相遇，那是一个平衡点。

如果一个导体的表面具有外面圈线的形状，也就是说，如果它是一个圆乎乎的像苹果似的物体，在一端有一个圆锥形的凹陷，那么，如果这个导体是带电的，我们就将能够确定它的任一点的面密度。凹陷底上的面密度为零。

在这个曲面的周围，我们有另外一些曲面；他们也有一个圆顶的凹陷，这种凹陷越变越平，并且终于在经过用 M 来表示的一点的那个等势面上完全消失。

在这一事例中，力线形成两组，由经过平衡点的那个曲面所隔开。

如果我们考虑中轴上 B 点外面的一些点，我们就会发现合力越来越小，直到在 P 点上变为零。然后它就变号，并在 M 点上达到极大值，然后它又继续减小。

然而这个极大值只是一个相对于轴上其他各点而言的极大值，因为，如果我们考虑一个经过 M 点而垂直于中轴的面，则相对于该面上的邻近各点来说，M 是一个极小力的点。

120.〕图三表示电荷为 10 并位于力场中的一个点所引起的等势面和电感线，力场在放入点电荷以前在方向和量值上是到处均匀的[①]。

[①] {这一点，可以通过在场的不同部分比较等势面之间的距离来看出。}

[②] {译注：这句话恐怕不对，应移到第 119 节之末。}

[①] {麦克斯韦没有给出场的强度。然而 M.科纽曾经根据力线计算了均匀场的强度发现在放入带电体之前场的电动强度是 1.5。}

等势面各自都有一个渐近平面。其中用虚线代表的一个有一个锥面点，并有一个围绕 A 点的圈线。这一等势面下面的那些等势面只有一页，并在轴附近有一个凹陷。上面的那些有一个围绕着 A 的闭合部分，和另外在轴附近稍有凹陷的一页。

如果我们把 A 下面的一个曲面看成一个导体的表面，并把 A 下面很远处的另一曲面看成具有另一个势的另一个导体的表面，则这两个导体之间的那一套曲线和曲面将指示电力的分布。如果下面一个导体离 A 很远，它的表面就将很接近于平面，于是我们在这儿就得到两个全都近似地是平面并相互平行的表面上的电分布的解，不过上面的一个表面在中点附近有一处突起，其重要性或大或小，随所选定的是哪个等势面而定。

121.〕图四表示由三个点 A、B、C 所引起的等势面和电感线；其中 A 带有 15 个单位的正电荷，B 带有 12 个单位的负电荷，而 C 带有 20 个单位的正电荷。这些点放在一条直线上，使得

$$AB=9,\ BC=16,\ AC=25.$$

在这一事例中，势为零的曲面是两个球，他们的中心是 A 和 C，而半径是 15 和 20。这两个球相交于一个圆，它和纸面在 D 点及 D′点相正交，使得 B 成为此圆之心，而圆的半径为 12。这个圆是一条平衡线的例子，因为合力在这条线上的每一点上为零。

如果我们假设以 A 为心的球是带有 3 个单位的正电的导体，并受到 C 处 20 个单位的正电的影响，则这一事例的情况将由本图来表示，如果我们略去球 A 内部所有的线的话。在小圆 DD′下面那一部分球面将在 C 的影响下带负电。球的所有其余的部分将带正电，而小圆 DD′的本身则将是一条无电荷的线。

我们也可以认为本图是表示的一个球的情况，该球以 C 为心，带有 8 个单位的正电，并受到放在 A 点的 15 个单位的正电的影响。

这个图也可以被看成表示一个导体的情况，该导体的表面由相遇于 DD′的两个球的较大的部分构成，并带有 23 个单位的正电。

我们将回到这一个图，把它看成汤姆孙的“电像理论”的一个例证。参阅第 168 节。

122.〕这些图应该作为法拉第关于“力线”和“带电体的力”等等的说法的例示来加以研究。

“力”这个词代表两个物质体之间的作用的一个特定的方面；通过这种作用，各物体的运动将变成和没有这种作用时的运动有所不同。当同时考虑两个物体时，这整个的现象就叫做“强制作用”(stress)，并且可以被描述成从一个物体到另一个物体的动量传递。当我们把自己的注意力集中到二物体中的第一个物体上时，我们将把加在这个物体上的强制作用叫做“主动力”，或简单地叫做对该物体作用的力，而且它是用该物体在单位时间内接受到的动量来量度的。

两个带电体之间的机械作用是一种强制作用，而对其中一个物体的作用则是一个力。作用在一个小的带电体上的力正比于它自己的电荷，而单位电荷的力就叫做力的“强度”。

“感应”一词被法拉第用来代表各带电体的电荷之间的联系方式；每一个单位的正电荷都用一条线来和一个单位的负电荷互相连接，那条线的方向在流体电介质中在线的每一部分都和电强度相重合。这样一条线常常

被称为一条“力线”，但更准确地作法是称它为一条“电感线”。

现在，按照法拉第的概念，一个物体中的电量是用从它发出的

图 6　力线　等势面作图法

力线和等势面力线的数目或者说电感线的数目来量度的。这些力线必然终止在什么地方，或是终止在附近的物体上，或是终止在房间的墙壁和天花板上，或是终止在地上，或是终止在一些天体上，而不管终止在什么地方，那里总会存在一个电量，和力线所由出发的那一物体部分上的电量恰好相等而异号。通过仔细观察这些图，可以看到情况正是如此的。因此，在法拉第的观点和旧理论的数学结果之间并没有任何矛盾，而相反地却是，力线的概念给这些结果带来了很大的澄清，而且它似乎可以提供一种手段，用来通过一种连续的过程而从旧理论的多少有些死板的观念上升到一些可以有很大的扩充余地的想法，这就可以为通过进一步的研究来增加我们的知识留下余地。

123.〕这些图是按下述方式画成的。

首先，试考虑单独一个力心即一个电荷为 e 的小带电体的事例。在距离为 r 处，势是 $V=e/r$；因此，如果我们令 $r=e/V$，我们就将求得 r，即势为 V 的那个球面的半径。如果我们现在令 V 取 1、2、3 等等的值，并画出对应的球面，我们就会得到一系列等势面，其对应的势是用各自然数来量度的。这些球在通过其公共球心的一个平面上的截面将是一些圆，我们可以用代表其势的那个数来标明其中每一个圆。在图 6 的右半，用一些虚线半圆来代表了这些等势面。

如果还有另一个力心，我们就可以按相同的方式画出属于它的那些等势面，而如果我们现在想要找出由两个力心共同引起的各等势面的形状，我们就必须记得：如果 V_1 是由一个心引起的势而 V_1 是由另一个心引起的势，则由两个心引起的势将是 $V_1+V_2=V$ 因此，既然在属于两个系列的各等势面的每一个交点上我们既知道 V_1 又知道 V_2，我们也就知道 V 的值。因此，如果我们画一个曲面通过所有 V 值相同的各交点，这个曲面就将和所有这些交点上的等势面相重合，而如果原来那些等势面系列画得足够密，新曲面就可以在任何需要的精确度下被画出。由电荷相等而异号的两个点所引起的等势面，在图 6 中的右半用实线表示了出来。

这种方法可以应用来画任何等势面系列，如果势是二势之和，而对于二势我们已经画出了等势面的话。

由单独一个力心引起的力线是从该心辐射而出的一些直线。如果我们愿意利用这些线来在任何点既指示力的方向又指示力的强度，我们就必须那样地画这些线，使他们在各等势面上标出一些部分，而在各该部分上计算的电感的面积分具有确定的值。这样作的最好办法就是假设我们的平面图是一个空间图的截面，那个空间图通过把平面图绕着经过力心的一条轴线旋转一周来形成。这时，任何从力心辐射而出并和轴线成 θ 角的直线都将描绘一个锥面，而电感通过任一曲面上由此锥面在轴线正向一侧截割下来的部分上的面积分就是 $2\pi e(1-\cos\theta)$。

如果我们进一步假设这个曲面是以它和两个平面的交线为边界，那两

个平面都经过轴线而且彼此的夹角使得该角的弧等于半径的一半，则通过这样限定的一个曲面的电感将是

$$\frac{1}{2}e(1-\cos\theta)=\Phi，$$

而 $\theta=\cos^{-1}(1-2\frac{\Phi}{e})$。

如果我们现在给Φ指定一系列值 1、2、3…，我们就将得到一系列θ值；而如果 e 是一个整数，则对应的力线包括轴线在内的数目将等于 e。

这样我们就有了一种画力线的方法，使得任何力心的电荷用从力心发出的力线数目来表示，而通过用上述办法截割出来的任一曲面的电感则用通过该曲面的力线数目来量度。图 6 左半的虚线表示两个带电点中每一点所引起的力线，那两个点的电荷分别是 10 和－10。

如果在图中的轴线上有两个力心，我们就可以针对每一条对应于Φ_1值和Φ_2值的轴线画出力线，然后，通过这些线的$\Phi_1+\Phi_2$具有相同值的那些交点画出曲线，我们就可以得出由两个力心所引起的力线，而且，利用同样的办法，我们也可以把对同一轴线对称分布的任何两组力线结合起来。图 6 左半的实线，就表示同时起作用的两个带电点所引起的力线。

在用这种方法画出了等势面和力线以后，就可以通过观察这两组曲线是否到处正交以及相邻等势面的间距和相邻力线的间距之比是否等于到轴线的平均距离的一半和所用的长度单位之比，来检验作图的精确性。

在任何这种有限大小的体系的事例中，任何指数为Φ的力线都有一条通过体系电心（第 89d 节）的渐近线，而其对轴线而言的斜角为 1－2Φ/e，如果Φ小于 e 的话。指数大于Φ的力线是有限的线。如果 e 为零，力线就都是有限的。

和一个平行于轴线的均匀力场相对应的力线是一些平行于轴线的线，到轴线的距离是一个算术级数的平方根。

当我们讲到共轭函数时[①]，我们将给出二维空间中的等势面和力线的理论。

---

① 参阅 Prof.W.R.Smith 的一篇论文，‘On the Flow of Electrictity in－Conducting Sur－faces，’Proc.R.S.Edin.，1869－70，p.79.

第八章　简单的带电事例

两个平行平面

124.〕首先我们将考虑两个无限大的平行平面的导电表面，他们相距为 c，分别保持于势 A 和势 B。

很显然，在这一事例中，势 V 将是到平面 A 的距离 z 的函数，而且在 A、B 之间任一平面的一切点上都将是相同的，除了在带电表面的边沿附近以外，而根据假设，那些边沿部分是离所考虑的点无限地远的。

由此可见，拉普拉斯方程变成

$$\frac{d^2V}{dz^2}=0,$$

其积分是

$$V=C_1+C_2z;$$

而既然当 z＝0 时 V＝A 而当 z＝c 时 V＝B，就有

$$V=A+(B-A)\frac{z}{c}.$$

对于二平面之间的一切点来说，合强度都垂直于平面，其量值是

$$R=\frac{A-B}{c}。$$

在导体本身的物质中，R＝0。因此，第一个平面上的电分布就有一个面密度σ，此处

$$4\pi\sigma=R=\frac{A-B}{c}.$$

在势为 B 的另一个表面上，面密度σ′将和σ相等而异号，从而

$$4\pi\sigma'=-R=\frac{B-A}{c}.$$

其次让我们考虑第一个表面上面积为 S 的一个部分，它被选得没有任何地方是靠近曲面的边沿的。

这一块表面上的电量是 $e_1=S\sigma$，而由第 79 节，作用在每一单位电量上的力是$\frac{1}{2}R$，于是作用在面积S上并把它吸向另一个平面的总力就是

$$F=\frac{1}{2}RS\sigma=\frac{1}{8\pi}R^2S=\frac{S}{8\pi}\frac{(B-A)}{c^2}$$

这里的吸引力是用面积 S、两个表面的势差(A—D)和表面之间的距离 c 表示出来的。用面积 S 上的电荷 e_1 表示出来的吸引力是

$$F=\frac{2\pi}{S}e_1^2.$$

在这一事例中，力线是垂直于平面的。设通过用一组力线把面积 S 投影到表面 B 上而得到的对应面积为 S′，则由 S 上的和 S′上的电分布所引起的电能是

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}(e_1 A + e_2 B) \\
&= \frac{1}{2}\frac{S}{4\pi}\frac{(A-B)^2}{c}, \\
&= \frac{R^2}{8\pi}Sc, \\
&= \frac{2\pi}{S}e_1^2 c, \\
&= Fc.
\end{aligned}
$$

这些表示式中的第一个，是电能的普遍表示式（第 84 节）。

第二个表示式用面积、距离和势差来表示了能量。

第三个表示式用合力 R 和包括在 S、S′之间的体积 Sc 来表示了能量，而且表明了单位体积中的能量是 p，此外 $8\pi p = R^2$。

两块平面间的吸引力是 pS，或者换句话说，存在一个在每单位面积上等于 p 的电张力（或者说是负压强）。

第四个表示式用电荷表示了能量。

第五个表示式表明，电能等于当两个表面平行于自己而运动到一起而保持其电荷不变时电力所作的功。

为了用势差来表示电荷，我们有

$$e_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{c}(A-B) = q(A-B).$$

系数 q 代表由等于 1 的势差所引起的电荷。这个系数叫做表面 S 由于它相对于对面表面的位置而具有的“电容”。

现在让我们假设两个表面之间的媒质不再是空气而是比感本领为 K 的某种别的电介质，这时由给定势差所引起的电荷就将是当电介质为空气时的电荷的 K 倍，或者说

$$e_1 = \frac{KS}{4\pi c}(A-B).$$

总能量将是

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{KS}{8\pi c}(A-B)^2, \\
&= \frac{2\pi}{KS}e_1^2 c.
\end{aligned}
$$

表面间的力将是

$$
\begin{aligned}
F = pS &= \frac{KS}{8\pi}\frac{(A-B)^2}{c^2}, \\
&= \frac{2\pi}{KS}e_1^2.
\end{aligned}
$$

由此可见，各具给定之势的两个表面之间的力正比于电介质的比感本领 K，但是带有给定电量的两个表面之间的力却反比于 K。

两个同心球面

125.〕设半径为α和 b（b 较大）的两个同心球面分别被保持在势 A 和势 B，则很显然，势 V 是到球心的距离 r 的函数。在这一事例中，拉普拉斯方程变为

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dV}{dr}=0.$$

这一方程的解是

$$V=C_1+C_2r^{-1};$$

而当 r＝a 时 V＝A 且当 r＝b 时 V＝B 的条件就在二球面之间的空间中给出

$$V=\frac{Aa-Bb}{a-b}+\frac{A-B}{a^{-1}-b^{-1}}r^{-1};$$

$$R=-\frac{dV}{dr}=\frac{A-B}{a^{-1}-b^{-1}}r^{-2}.$$

如果σ_1、σ_2是一个半径为α的实心球和一个半径为 b 的空心球的相对表面上的面密度，就有

$$\sigma_1=\frac{1}{4\pi\alpha^2}\frac{A-B}{\alpha^{-1}-b^{-1}},\ \sigma_2=\frac{1}{4\pi b^2}\frac{B-A}{\alpha^{-1}-b^{-1}}.$$

如果 e_1、e_2 是这些表面上的总电荷，就有

$$e_1=4\pi\alpha^2\sigma_1=\frac{A-B}{\alpha^{-1}-b^{-1}}=-e_2.$$

因此，被包围的球的电容就是$\frac{ab}{b-a}$。

如果外壳的外表面也是球形的，而且其半径为 c，那么，如果附近没有其他导体，则外表面上的电荷是

$$e_3=Bc$$

由此可见，内球上的总电荷是

$$e_1=\frac{ab}{b-a}(A-B),$$

而外壳上的电荷则是

$$e_2+e_3=\frac{ab}{b-a}(B-A)+Bc.$$

如果我们令 b＝∞，我们就有一个无限空间中的球的事例。这样一个球的电容是 a，或者说在数值上等于它的半径。内球的单位面积上的电张力是

$$p=\frac{1}{8\pi}\frac{b^2}{a^2}\frac{(A-B)^2}{(b-a)^2}.$$

这个张力在一个半球上的合力是$\pi\alpha^2p=F$，它垂直于半球的底面，而且如果合力被作用在半球的圆形边界线上的一种表面张力所平衡，而作用在单位长度上的表面张力为 T，则有

$$F=2\pi\alpha T。$$

由此即得

$$F=\frac{b^2}{8}\frac{(A-B)^2}{(b-a)^2}=\frac{e_1^2}{8a^2},$$

$$T=\frac{b^2}{16\pi\alpha}\frac{(A-B)^2}{(b-a)^2}.$$

如果一个肥皂泡被充电到势 A，如果它的半径是 a，则其电荷将是 Aa，而面密度将是

$$\sigma=\frac{1}{4\pi}\frac{A}{a}.$$

刚刚在表面之外的地方的合强度将是 $4\pi\sigma$，而在肥皂泡里边则强度为零,于是由第 79 节可知，作用在表面的单位面积上的力将是 $2\pi\sigma^2$，方向向外。由此可见，电荷将使泡内的压强减少一个量 $2\pi\sigma^2$，或者说减少一个量

$$\frac{1}{8\pi}\frac{A^2}{\alpha^2}.$$

但是可以证明，如果 T_0 是液膜作用在单位长度的线上的张力，则阻止肥皂泡崩塌所需要的泡内压强将是 $2T_0/a$。如果当泡内外的空气压强相同时电力适足以使泡保持平衡，就有

$$A^2=16\pi\alpha T_0。$$

两个无限长的同轴圆柱面

126.〕设一个导电圆柱的外表面的半径为 a，而和此圆柱同轴的一个中空圆柱的内表面的半径为 b．设他们的势分别是 A 和 B。于是，既然势 V 是离轴线的距离 r 的函数，拉普拉斯方程就变为

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=0,$$

由此即得 $V=C_2+C_2\log r$

既然当 $r=a$ 时 $V=A$ 而当 $r=b$ 时 $V=B$，就有

$$V=\frac{A\log\frac{b}{r}+B\log\frac{r}{a}}{\log\frac{b}{a}}.$$

如果 σ_1、 σ_2 是内、外表面上的面密度，则

$$4\pi\sigma_1=\frac{A-B}{a\log\frac{b}{a}},\quad 4\pi\sigma_2=\frac{B-A}{b\log\frac{b}{a}}.$$

如果 e_1 和 e_2 是二柱面上相隔 l 处两个垂直截面之间的一段上的电荷，则

$$e_1=2\pi al\sigma_1=\frac{1}{2}\frac{A-B}{\log\frac{b}{a}}l=-e_2.$$

因此，长度为 l 的一段内柱的电容就是

$$\frac{1}{2}\frac{l}{\log\frac{b}{a}}.$$

如果二柱面之间的空间是由一种比感本领为 K 的电介质而不是由空气所占据的，则长度为 l 的一段内柱的电容是

$$\frac{1}{2}\frac{lK}{\log\frac{b}{a}}.$$

无限长柱上我们所考虑的这一段上的电分布的能量是

$$\frac{1}{4}\frac{lK(A-B)^2}{\log\frac{b}{a}}.$$

127.〕设有两个无限长的中空圆柱形导体 A 和 B，如图 5 所示，他们的公共轴是 x 轴，一个在原点的正侧面，一个在原点的负侧，中间由原点附近的座标上的一个小区间所隔开。

设把长度为 2l 的一个圆住 C 放得使它的中点位于原点正测距离为 x 处，并使它插入两个中空圆柱中。

设位于正侧的中空圆柱的势为 A，位于负侧的那个的势为 B，而中间圆柱的势为 C。让我们用 a 代表 C 的单位长度对 A 而言的电容，而用β代表对 B 而言的同样的量。

如果有相当长的内柱进入每一个中空圆柱中，则各圆柱位于原点附近各固定点处的那些部分上的面密度以及离内柱端点为给定的小距离的各点处的那些部分上的面密度都不会受到 x 值的影响。在中空圆柱的端点附近，以及在内部圆柱的端点附近，将存在二些迄今还无法计算的电分布，但是原点附近的分布却不会由于内柱的运动而有所改变，如果内部的两端不会达到原点附近的话。因此内柱两端的分布就将随着它一起运动，从而运动的唯一效应就将只是内柱上分布和无限长柱上的分俏相似的那些部分的长度的增减而已。

因此，只要它依赖于x，体系的总能量就将是$Q=\frac{1}{2}a(l+x)(C-A)^2+\frac{1}{2}\beta(l-x)(C-B)^2+$不依赖于$x$的项，而既然能量是用势来表示的，则由 93b 节可知，平行于柱轴的合力将是

$$X=\frac{dQ}{dx}=\frac{1}{2}a(C-A)^2-\frac{1}{2}\beta(C-B)^2.$$

如果柱 A 和柱 B 具有相等的截面，则 a＝β，从而

$$X=\alpha(B-A)(C-\frac{1}{2}(A+B)).$$

由此可见，存在一个作用在内柱上的恒定的力，倾向于把它拉入其势和内柱的势相差最大的那个外柱中去。如果 C 的数值很大而 A＋B 则较小，力就近似地是

X＝a(B-A)C；

于是两个柱的势差就可以测出，如果我们能够测量 x 的话。这种测量的精确度将由于内柱势 C 的升高而增大。

这一原理在一种修订的形式下已被用于汤姆孙的象限静电计中，见第219页。

同样三个圆柱的装置可以通过连接 B 和 C 而用作电容的测量仪器。如果 A 的势为零而 B 和 C 的势为 V，则 A 上的电量将是

$$E_{13}=(q_{13}+a(l+x)V;$$

式中 q_{13} 是依赖于圆柱两端的电分布但不依赖于 x 的一个量，于是，通过把 c 向右移动以使 x 变成 $x+\xi$，柱 c 的电容就将增大一个确定的量 $a\xi$，式中

$$\alpha=\frac{1}{2\log\frac{b}{a}},$$

而 a 和 b 是对面的两个柱面的半径。

第九章　球谐函数

128.〕球谐函数的数学理论曾被当作若干专著的主题。有关这一课题的最完备的著作，E．海恩博士的《球谐函数手册》(Handbuch der Kugelfunctionen)现在(1878)已经出了两卷本的第二版，而 F．诺依曼博士也发表了他的《关于球谐函数理论的论著》(Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen，Leipzig，Teubner，1878)。汤姆孙和泰特的《自然哲学》中对这一课题的处理在第二版(1879)中得到了颇大的改进，而陶德洪特先生的《关于拉普拉斯函数、拉梅函数和贝塞耳函数的初等论著》(Elementary Treatise on laplace’s Functions，Lamé’s Functions，and Bessel Functions)以及弗勒尔斯先生的《关于球谐函数及其有关问题的初等论著》(Elementary Treatise on Spherical Harmonics and subject connected with them)已经使得没有必要在一部关于电的书中在这一课题的纯数学的发展方面花费太多的篇幅了。

然而我却保留了用它的极点来对球谐函数作出的确定。

论势在那里变为无限大的奇点

129.〕如果一个电荷 A_0 均匀地分布在中心座标为(a，b，c)的一个球面上，则由第 125 节可知，球外任一点(x，y，z)上的势是

$$V=\frac{A_0}{r},\qquad(1)$$

式中 $r^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$．(2)

由于 V 的表示式不依赖于球的半径，这个表示式的形式就将是相同的，如果我们假设半径为无限小的话。表示式的物理诠释将是，电荷 A_0 是放在一个无限小的球的表面上的，这个小球近似地和一个数学点相同。我们已经证明（第 55，81 节）电的面密度有一个极限，从而在物理上是不可能把一个有限的电荷放在半径小于某值的一个球上的。

不过,既然方程(1)表示的是势在一个球周围的空间中的一种可能的分布，我们为了数学的目的就可以把它看成是由集中在数学点(a，b，c)上的一个电荷 A_0 所引起的，而且我们可以把这个点叫做一个零阶的奇点。

还有另外一些种类的奇点，他们的性质我们不久就会研究。但是，在那样作以前，我们必须定义某些表示式，而我们即将发现，在处理空间中的方向以及球上和各该方向相对应的那些点时，这些表示式是有用的。

129.〕一个轴就是空间中的任何一个确定的方向。我们可以假设它是由在球面的一点上画出的一个记号来定义的，该点就是从球心沿轴的方向画出的半径和球面相交的那个点。这个点叫做轴的“极点”。因此一个轴只有一个而不是两个极点。

如果 μ 是轴 h 和任一矢量 r 之间的夹角的余弦，而且

$$P=\mu r,\ (3)$$

则 p 是 r 分解在轴 h 方向上的分量。

不同的轴用不同的下标来区分，而两个轴之间夹角的余弦用 λ_{mn} 来代表，此处的 m 和 n 就是标明各轴的下标。对方向余弦为 L、M、N 的一个轴

h 求导数，表示为

$$\frac{d}{dh}=L\frac{d}{dx}+M\frac{d}{dy}+N\frac{d}{dz}. \quad (4)$$

由这些定义显然可得

$$\frac{dr}{dh_m}=\frac{p_m}{r}=\mu_m, \quad (5)$$

$$\frac{dp_n}{dh_m}=\lambda_{mn}=\frac{dp_m}{dh_n}, \quad (6)$$

$$\frac{d\mu_m}{dh_m}=\frac{\lambda_{mn}-\mu_m\mu_n}{r}. \quad (7)$$

如果我们现在假设由位于原点上的一个任意阶次的奇点在点(x，y，z)上引起的势是

$$Af(x,y,z),$$

那么，如果这样一个点是位于轴 h 的端点上的，则(x，y，z)上的势将是

$$Af[(x-Lh),(y-Mh),(z-Nh)],$$

而如果除了 A 变号以外在一切方面都相同的一个点被放在原点上，则由这一对点所引起的势将是

$$V=Af[(x-Lh),(y-Mh),(z-Nh)]-Af(x,y,z),$$

$$=-Af\frac{d}{dh}f(x,y,z)+\text{含}h^2\text{的项。}$$

如果我们现在无限制地减小 h 而增大 A，使他们的乘积保持有限并等于 A′，则这一对点的势的终极值将是

$$V'=-A'\frac{d}{dh}f(x,y,z). \quad (8)$$

如果 f(x，y，z)满足拉普拉斯方程，则由于这一方程是线性的，作为各自满足方程的两个函数之差的 V′也必满足该方程。

129.〕现在，由一个零阶奇点引起的势

$$V_0=A_0\frac{1}{r} \quad (9)$$

满足拉普拉斯方程，因此，由这一函数通过对任意数目的轴逐次求导数而得到的每一个函数也必满足方程。

取两个零阶点，具有相等而异号的电荷 A_0 和 A_0，把第一个点放在原点上而把第二个点放在轴 h_1 的端点上，然后令 h_1 的值无限减小而令 A_0 的值无限增大，但使乘积 A_0h_1 永远保持等于 A_1；这样就可以构成一个一阶的点。这一手续的最后结果，即当两个点互相重合时，就是一个矩为 A_1 而轴为 h_1 的一阶的点。因此，一个一阶的点是一个双重点。它的势是

$$V_1=-h_1\frac{d}{dh_1}V_0$$

$$=A_1\frac{\mu_1}{r^2}. \quad (10)$$

通过把一个矩为—A_1 的一阶点放在原点上，把另一个矩为 A_1 的一阶点

放在轴 h_2 的端点上，然后减小 h_2 而增大 A_1，使得

$$A_1 h_2 = \frac{1}{2} A_2\text{，} \quad (11)$$

我们就得到一个二阶的点，其势是

$$V_2 = -h_2 \frac{d}{dh_2} V_1$$

$$= A_2 \frac{1}{2} \frac{3\mu_1\mu_2 - \lambda_{12}}{r^3}. \quad (12)$$

我们可以把一个二阶的点叫做一个四重点，因为它是通过使四个零阶点互相趋近来构成的。它有两个轴 h_1 及 h_2，和一个矩 A_2。这些轴的方向和这个矩的量值就完全地定义了点的本性。

通过相对于 n 个轴逐次求导数，我们就得到由一个 n 阶点引起的势。它将是三个因子的乘积，一个常量，若干余弦的一个数组合和 $r^{-(n+1)}$。为了以后即将说明的理由，将常量的数值适当调整，使得当一切轴都和矢量相重合时矩的系数为 $r^{-(n+1)}$是方便的。因此，当我们对 h_n 求导数时就要除以 n。

按照这种办法我们就得到一个特定势的确定数值，我们称这种势为－(n＋1)阶的“体谐函数”，即

$$V_n = (-1)^n \frac{1}{1.2.3\cdots n} \frac{d}{dh_1} \cdot \frac{d}{dh_2} \cdots \frac{d}{dh_n} \cdot \frac{1}{r}. \quad (13)$$

如果这个量被乘上一个常量，它仍然是由某一个 n 阶点引起的势。

129.〕运算(13)的结果具有下列形式

$$V_n = Y_n r^{-(n+1)}\text{，}$$

式中Y_n是r和n个轴之间的n个夹角余弦$\mu_1 \cdots \mu_n$和每两个轴之间的$\frac{1}{2}n$(n－1)个夹角余弦λ_{12}等等的函数。

如果我们认为 r 的方向和 n 个轴的方向是由球面上的点来确定的，我们就可以把 Y_n 看成在该面上逐点变化的一个量，也就是各轴的 n 个极点和矢量的极点之间的距离的一个函数。因此我们把 Y_n 称为 n 阶的“面谐函数”。

130.〕其次我们必须证明，和每一个 n 阶面谐函数相对应的，不仅有一个—(n＋1)阶的体谐函数，而且还有一个 n 阶的体谐函数，或者说

$$H_n = Y_n r^n = V_n r^{2n+1}$$

是满足拉普拉斯方程的。

因为，

$$\frac{dH_n}{dx} = (2n+1) r^{2n-1} x V_n + r^{2n+1} \frac{dV_n}{dx}\text{，}$$

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} = (2n+1)\left[(2n-1)x^2 + r^2\right] r^{2n-3} V_n$$

$$+ 2(2n+1) r^{2n-1} x \frac{dV_m}{dx} + r^{2n+1} \frac{d^2 V_n}{dx^2}.$$

由此即得

$$\frac{d^2H_n}{dx}+\frac{d^2H_n}{dy^2}+\frac{d^2H_n}{dz^2}=$$

$$(2n+1)(2n+2)r^{2n-1}V_n$$

$$+2(2n+1)r^{2n-1}\left(x\frac{dV_n}{dx}+y\frac{dV_n}{dy}+z\frac{dV_n}{dz}\right)$$

$$+r^{2n+1}\left(\frac{d^2V_n}{dx^2}+\frac{d^2V_n}{dy^2}+\frac{d^2V_n}{dz^2}\right).$$

现在，既然 V_n 是 x、y、z 的一个负 n＋1 次的齐次函数，就有

$$x\frac{dV_n}{dx}+y\frac{dV_n}{dy}+z\frac{dV_n}{dz}=-(n+1)V_n. \qquad (17)$$

因此，方程(16)右端的前两项互相抵消，而既然 V_n 满足拉普拉斯方程，第三项就是零，因此 H_n 也满足拉普拉斯方程，从而它就是一个 n 阶的体谐函数。

这是普遍的电反演定理的一个特例，该定理断定，如果 F(x，y，z)是 x、y、z 的一个满足拉普拉斯方程的函数，则存在另一个函数

$$\frac{a}{r}F\left(\frac{a^2x}{r^2}, \frac{a^2y}{r^2}, \frac{a^2z}{r^2}\right),$$

也满足拉普拉斯方程。见第 162 节。

130b.〕面谐函数 Y_n 有 2n 个任意变数，因为它是由它在球面上的 n 个极点的位置来确定的，而每一个极点则是由两个座标来确定的。

由此可见，V_n 和 H_n 也都包含 2n 个任意变数。然而，这些量中的每一个量当乘以一个常数时都将满足拉普拉斯方程。

为了证明 AH_n 是可以满足拉普拉斯方程的最普遍的 n 次齐次有理函数，

我们注意到普遍的n次齐次有理函数K共包含$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$项。但是$\nabla^2 K$是一个$n-2$次的齐次函数，从而共包含$\frac{1}{2}n(n-1)$项，而$\nabla^2 K=0$这个条条件就要求其中每一项必须等于零。因此，在满足拉普拉斯方程的 n 次齐次函数的最普遍形式中，在函数K的$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$项的各系数之间就存在$\frac{1}{2}n(n-1)$个方程，还剩下$2n+1$个独立常数。但是，当H_n被乘以一个常数时，它就满足所要求的条件并有 2n＋1 个任意常数。因此它就是最普遍的形式。

131.〕现在我们能够构成一种势的分布，使它本身及其一阶导数在任一点上都不变为无限大了。

函数 $V_n=Y_nr^n$ 满足在无限远处为零的条件，但却在原点上变为无限大。

函数 $H_n=Y_nr^n$ 在离原点为有限距离处是有限的和连续的，但在无限远

处不为零。

但是，如果我们令 $a^nY_nr^{-(n+1)}$等于以原点为心以α为半径的一个球的外面各点上的势，而令 $a^{-(n+1)}Y_nr^n$ 等于球内各点上的势，并且假设在球的本身上分布着一种电的面密度，使得

$$4\pi\sigma a^2=(2n+1)Y_n，(18)$$

则关于由一个如此带电的球壳所引起的势的一切条件都将得到满足。

因此，势在到处都是有限的和连续的，而且在无限远处为零；它的一阶导数除了在带电球面上以外到处都有限而连续，在球面上则满足

$$\frac{dV}{dv}+\frac{dV'}{dv'}+4\pi\sigma=0，$$

而且拉普拉斯方程在球面各点和球外各点都是得到满足的。

因此，这确实是满足条件的一种势分布，而由第 100c 节可知，它就是能够满足这些条件的唯一的分布。

131b.〕半径为 a 而面密度由方程

$$4\pi\alpha^2\sigma=(2n+1)Y_n，(20)$$

给出的一个球所引起的势，在球外各点和对应的 n 阶奇点所引起的势相等同。

现在让我们假设，在球外，有一个我们可称之为 E 的带电体系，而Ψ是这个体系所引起的势，让我们来针对奇点求出$\Sigma(\Phi_e)$的值。这就是依赖于外部体系对奇点的作用的那一部分电能。

如果 A_0 是一个零阶奇点的电荷，则所谈的势能是

$$W_0=A_0\Psi(21)$$

如果存在两个这样的奇点，一个负点位于原点而一个数值相等的正点位于轴 h_1 的端点上，则势能将是

$$-A_0\Psi+A_0\left(\Psi+h_1\frac{d\Psi}{dh_1}+\frac{1}{2}h_1{}^2\frac{d^2\Psi}{dh_1{}^2}+\cdots\right),$$

而且，当 A_0 无限增大而 h_1 无限减小但保持 $A_0h_1=A_1$ 时，一阶点的势能值就将是

$$W_1=A_1\frac{d\Psi}{dh_1}.\quad(22)$$

同理，对于一个 n 阶点，势能将是

$$W_n=\frac{1}{1.2\cdots n}A_n\frac{d^n\Psi}{dh_1\cdots dh_n}\text{①}.$$

131c.〕如果我们假设外部体系的电荷是由一些部分构成的，其中任一部分用 dE 来代表，而 n 阶奇点的电荷则是由一些部分 de 构成的，那就有

$$\Psi=\sum(\frac{1}{r}dE).\quad(24)$$

但是，如果 V_n 是由奇点引起的势，就有

① 以后我们将发现，用 n！来代表各整数的连乘积 1.2.3…n是方便的。

$$V_n=\sum\left(\frac{1}{r}de\right),$$

从而由 E 对 e 的作用所引起的势能就是

$$W_n=\sum(\Psi de)=\sum\sum\left(\frac{1}{r}dEde\right)=\sum(V_n dE),\quad(26)$$

最后一个表示式就是由 e 对 E 的作用所引起的势能。

同理，如果σds 是球壳的一个面积元上的电荷，则由于球壳在外部体系 E 上引起的势是 V_n，我们应有

$$W_n=\sum(V_n de)=\sum\sum\left(\frac{1}{r}dE\sigma ds\right)=\sum(V\sigma ds),\quad(27)$$

最后一个表示式包括一个在球的表面上计算的和式。把它和 W_n 的第一个表示式相等起来，我们就有

$$\iint\Psi\sigma ds=\sum(\Psi de)$$

$$=\frac{1}{n!}A_n\frac{d^n\Psi}{dh_1\cdots dh_n}.\quad(28)$$

如果我们记得$4\pi\sigma\alpha^2=(2n+1)Y_n$和$A_n=\alpha^n$，此式就变为

$$\iint\Psi Y_n ds=\frac{4\pi}{n!(2n+1)}a^{n+2}\frac{d^n\Psi}{dh_1\cdots dh_n}.\quad(29)$$

这个方程把按半径为 a 的球上各面积元来计算$\Psi Y_n ds$ 的面积分的过程，简化成了对谐函数的 n 个轴求Ψ的导数并在球心上取微分系数的值的过程，如果Ψ在球内各点满足拉普拉斯方程而 Y_n 是一个 n 阶的面谐函数的话。

132.〕现在让我们假设Ψ是一个正 m 阶的体谐函数，其形式是

$$\Psi=a^{-m}Y_m r^m\quad(30)$$

在球面上，r＝a 而Ψ＝Y_n，从而方程(29)在这一事例中变为

$$\iint Y_m Y_n ds=\frac{4\pi}{n!(2n+1)}a^{n-m+2}\frac{d^n\Psi(Y_m r^m)}{dh_1\cdots dh_n},\quad(29)$$

式中微分系数的值应在球心上取。

当 n 小于 m 时，求导数的结果是 x、y、z 的一个 m－n 次的齐次式，它在球心上的值是零。如果 n 等于 m，求导数的结果就是一个常数，它的值我们将在第 134 节中加以确定。如果进一步求导数，结果就是零。由此可见，只要m和n不相等，面积分$\iint Y_m Y_n ds$就等于零。

我们用来得到这一结果的那些步骤，全都是纯数学性的，因为，尽管我们利用了电能之类的具有物理意义的术语，但是每一个这种术语却不是被看成一个有待研究的物理现象，而是被看成一个确定的数学表示式，一个数学家同样有权应用这些术语，正加他有权应用他可能觉得有用的任何别的数学函数一样，而当一个物理学家必须进行数学计算时，如果各计算步骤可以有一种物理诠释，他就会理解得更加清楚。

133.〕现在我们将确定面谐函数 Y_n 作为球面上一点 P 相对于该函数之 n 个极点的位置的函数形式。我们有

$$\left.\begin{aligned}&Y_0=1, \; Y_1=\mu_1, \; Y_2=\frac{3}{2}\mu_1\mu_2-\frac{1}{2}\lambda_{12},\\&Y_3=\frac{5}{2}\mu_1\mu_2\mu_3-\frac{1}{2}(\mu_1\lambda_{23}+\mu_2\lambda_{31}+\mu_3\lambda_{12},\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

等等。

因此，Y_n 的每一项都包括一些余弦的乘积，其中带有一个下标的 μ 是 P 和不同极点之间的夹角余弦，而带有两个下标的 λ 则是极点之间的夹角余弦。

既然每一个轴都是通过 n 次微分中的一次而被引入的，该轴的符号就必然在每一项的余弦下标中出现一次，而且只出现一次。

因此，如果任一项中包含 s 个具有双下标的余弦，那就必然包含 n—2s 个具有单下标的余弦。

设把一切包含着 s 个具有双下标的余弦的乘积之和简写为

$$\sum(\mu^{n-2s}\lambda^{\sigma}).$$

在每一个乘积中，所有的下标都出现一次，而且没有任何下标会重复出现。

如果我们愿意表明一个特定的下标 m 只出现在 μ 中或只出现在 λ 中，我们就把它作为一个下标写在 μ 旁或 λ 旁。例如，方程

$$\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^{s})=\Sigma(\mu_m^{n-2s}\lambda^{s})+\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda_m^{s}) \quad (33)$$

就表示，整套的乘积可以分成两部分；在其中一部分中；下标 m 出现在变动点 P 的方向余弦中，而在另一部分中 m 则出现在各极点之间的夹角余弦中。

现在让我们假设，对于一个特定的 n 值，有

$$Y_n=A_{n.0}\Sigma(\mu^{n})+A_{n.1}\Sigma(\mu^{n-2}\lambda^{1})+\cdots+A_{n.s}\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^{s})+\cdots, \quad (34)$$

式中的各个 A 是一些常数。我们可以把级数简写成

$$Y_n=S\left[A_{n.s}\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^{s})\right], \quad (35)$$

式中的 S 表明一个连加式，在连加时所取的是包括零在内的一切大于 $\frac{1}{2}$ 的s值。

为了得出负 n 阶的和 n 阶的对应体谐函数，我们用 r-(n+1 去乘，并得到

$$V_n=S\left[A_{n.s}r^{2s-2n-1}\Sigma(p^{n-2s}\lambda^{s})\right], \quad (36)$$

此处正如在方程(3)中一样，曾令 rμ＝p。

如果把 V_n 对一个新轴 h_m 求导数，我们就得到－(n－1)V_{n+1}，从而就有

$$\begin{aligned}&(n+1)V_{n+1}=S\Big[A_{n.s}(2n+1-2s)r^{2s-2n-3}\Sigma(p_m{}^{n-2s+1}\lambda^{s}),\\&-A_{n.s}r^{2s-2n-1}\Sigma(p_m{}^{n-2s-1}\lambda_m^{s+1})\Big]\end{aligned} \quad (37)$$

如果想求得包含 s 个具有双下标的余弦的各项，我们必须在最后一项中令 s 减小 1，于是就得到

$$\begin{aligned}&(n+1)V_{n+1}=S\Big[r^{2s-2n-3}\{A_{n.s}(2n-2s+1)\Sigma(p_m{}^{n-2s+1}\lambda^{s}),\\&-A_{n.s-1}\Sigma(p_m{}^{n-2s+1}\lambda_m^{s})\}\Big].\end{aligned} \quad (38)$$

现在，两类乘积在别的方面并无区别，只不过下标 m 在一类乘积中出现在 p 中而在另一类乘积中出现在 λ 中。因此他们的系数必然相同，而既然应该能够通过在 V_n 的表示式中把 n 换成 n＋1 并乘以 n＋1 来得到相同的结果，我们就得到下列的方程

$$(n+1)A_{n+1\cdot s}=(2n-2s+1)A_{n\cdot s}=-A_{n\cdot s-1}. \qquad (39)$$

如果我们令 s＝0，就得到

$$(n+1)A_{n+1\cdot s}=(2n+1)A_{n\cdot 0} \qquad (40)$$

因此，既然 $A_{1.0}$＝1，就有

$$A_{n\cdot 0}=\frac{2n!}{2^n(n!)^2}; \qquad (41)$$

而我们由此就得系数的普遍值

$$A_{n\cdot s}=(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}n!(n-s)} \qquad (42)$$

而最后就得到面谐函数的三角函数表示式

$$Y_n=S[(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}n!(n-s)}\Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^s)]\blacksquare \qquad (43)$$ [①]

这一表示式借助于 P 点到不同极点的距离的余弦以及各极点彼此之间的距离的余弦来给出了球面的任一点 P 上的面谐函数的值。

很容易看出，如果其中任何一个极点被移到球面上正对面的那个点，谐函数的值就会变号。因为涉及这个极点的下标的任何一个余弦都会变号，而在谐函数的每一项中，极点的下标都出现一次并只出现一次。

因此，如果两个或任何偶数个极点被移到正对面的点上，函数的值就并不改变。

西耳外斯特教授曾经证明(Phil.Mag.，Oct.1876)，当面谐函数已经给定时，寻求和各轴相重合的直线的问题有一个解并只有一个解，尽管正如我们所看到的那样，沿着这些轴所取的正向各自可以有两种选择。

134.〕现在我们能够确定当两个面谐函数的阶次相同时面积分 $\iint Y_m Y_n ds$ 的值了，尽管二函数各轴的方向通常是不同的。

为此目的，我们必须写出体谐函数 $Y_m r^m$ 并对 Y_n 的 n 个轴中的每一个轴求导数。

$Y_m r^m$ 的任一形如 $r^m\mu^{m-2s}\lambda^s$ 的项都可以写成 $r^{2s}p_m^{m-s}\lambda_{mn}^5$。把此式对 Y_n 的 n 个轴逐次求导数，我们就发现，当其中 s 个轴求 r^{2s} 的导数时，我们就会引入 s 个 P_m 和一个数字因子

2s(2s－2)…2，或者说是 $2^s s$！.

当继续对其次的 s 个轴线求导数时，各个 p_m 就变成 λ_m，但是没有数字因子被引入；当对其余的 n－2s 个轴求导数时，各个 pm 就变成各个 λ_{mn}，从而结果就是 $2^s s!\lambda_{nn}^s\lambda_{mm}^s\lambda_{mn}^{m-2s}$。

因此，我们由方程(31)就得到

① {我们由此可以推出

$$\iint Y_m Y_n ds = \frac{4\pi}{n!(2n+1)} \alpha^{n-m+2} \frac{d^m (Y_m r^m)}{dh_1 \cdots dh_n}, \qquad (44)$$

而由方程(43)就有

$$Y_m r^m = S\left[(-1)^s \frac{(2m-2s)!}{2^{m-s} m!(m-s)!} \Sigma(r^{2s} p_m^{m-2s} \lambda_{mm}^s\right]. \quad (45)$$

于是，完成微分计算并记得 m＝n，我们就得到

$$\iint Y_m Y_n ds = \frac{4\pi\alpha^2}{(2n+1)(n!)^2} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!s!}{2^{n-2s}(n-s)!} \Sigma(\lambda_{mm}^s \lambda_{nn}^s \lambda_{mn}^{n-2s}\right] (45)$$

135a.〕如果我们假设其中一个面谐函数 Y_m 的所有各轴都互相重合，从而 Y_m 变成我们以后将定义的 m 阶带谐函数，用符号 P_m 来代表，则两个面谐函数之积的面积分表示式(46)将采取一种引人注意的形式。

在这一事例中，所有形如 λ_{nm} 的余弦都可以写成 μ_n，此处 μ_n 代表 P_m 的公共轴和 Y_n 的一个轴之间的夹角的余弦。形如 λ_{mm} 的余弦将变成等于 1，因此我们必须把 $\Sigma\lambda^s_{mm}$ 代成 s 个符号的组合数，其中每一符号都由 n 个下标中的两个下标来互相区别，任何下标都不重复出现。于是就得到

$$\Sigma\lambda_{mm}^s = \frac{n!}{2^s s!(n-2s)!} \quad (47)$$

P_m 各轴的其余 n－2s 个下标的排列数是(n－2s)！于是就有

$$\Sigma(\lambda_{mn}^{n-2s}) = (n-2s)!\mu^{n-2s}. \qquad (48)$$

因此，当 Y_m 的所有各轴互相重合时，方程(46)就变成

$$\iint Y_n P_m ds = \frac{4\pi\alpha^2}{(2n+1)(n!)} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}(n-s)!} \Sigma(\mu^{n-2s}\lambda^s\right] (49)$$

$$= \frac{4\pi\alpha^2}{2n+1} Y_{n(m)}, \text{据方程}(43), \qquad (50)$$

式中 $Y_{n(m)}$ 表示 Y_n 在极点 P_m 上的值。

我们可以按下列较短的手续得出相同的结果。

设取一个直角座标系，使 z 轴和 P_m 的轴相重合，并把 $Y_n r^n$ 展成 x、y、z 的 n 次齐次函数。

在极点 P_m 上，x＝y＝0 而 z＝r，从而如果 Cz^n 是不包括 x 和 y 的项，则 C 是 Y_n 在极点 P_m 上的值。

在这一事例中，方程(31)变成

$$\iint Y_n P_m ds = \frac{4\pi\alpha^2}{2n+1} \frac{1}{n!} \cdot \frac{d^m}{dz^m} (Y_n r^n).$$

当 m 等于 n 时，求 Cz^n 的导数的结果是 n！C，而其他各项的导数为零。于是就有

列，就可以看到这一点。下标有 s 组，每组两个。通过改变各组的次序，我们得到 s！种排列，而通过交换组内的数字，又可以从每一种排列得 2s 种排列，因此由每 s 组下标可得 2ss！种排列。于是，如果 N 是级数

$$\iint Y_n P_m ds = \frac{4\pi\alpha^2}{2n+1} C,$$

C 是 Y_n 在极点 P_m 上的值。

135b.〕这一结果是球谐函数理论中一种很重要的结果，因为它表明了怎样确定表示着一个量的值的一系列球谐函数，那个量在一个球面的每一点上具有任意指定的有限而连续的值。

因为，设 F 是那个量的值，而 ds 是球面上一点 Q 处的面积元，于是，如果我们把 Fds 乘以极点为同一球面上 P 点的那个带谐函数 P_n 并在球面上求积分，则结果可以看成 P 点位置的一个函数，因为它是依赖于 P 点的位置的。

但是，因为以 Q 点为极点的带谐函数在 P 点上的值等于以 P 点为极点的带谐函数在 Q 点上的值，所以我们可以假设，对于每一个面积元，都能构造一个以 Q 点为极点而以 Fds 为其系数的带谐函数。

于是我们就可以有一套互相叠加的带谐函数，他们的极点位于球面上 F 有值的每一点上。既然其中每一个都是一个 n 阶面谐函数的倍数，他们的和式也是一个球谐（不一定是带谐）函数的倍数。

因此，看成P点的函数的面积分$\iint FP_n ds$就是一个面谐函数Y_n 的倍数，于是

$$\frac{2n+1}{4\pi\alpha^2}\iint Fl_n ds$$

也就是属于用来表示 F 的那一系列面谐函数的那个特定的 n 阶面谐函数，如果 F 可以这样被表示的话。

因为，如果 F 可以表示成

$$F = A_0Y_0 + A_1Y_1 + \cdots + A_nY_m + \cdots$$

那么，如果我们乘上 Pnds 并在整个球面上求面积分，则所有包括不同阶次的谐函数之积的各项都将为零，只剩下

$$\iint FP_n ds = \frac{4\pi\alpha^2}{2n+1} A_n Y_n .$$

由此可见，F 的唯一可能的球谐函数表示式就是

$$F = \frac{1}{4\pi\alpha^2}\left[\iint FP_0 ds + \cdots + (2n+1)\iint FPnds + \cdots\right] \quad (51)$$

共轭谐函数

136.〕我们已经看到，阶次不同的两个谐函数之积的面积分永远是零。但是，即使两个谐函数是阶次相同的，他们的乘积的面积分也可以是零。这时两个谐函数就被说成是互相共轭的。两个同阶谐函数互相共轭的条件，通过在方程(46)中令各项为零来表示。

如果其中一个是带谐函数，则共轭条件是另一个谐函数在带谐函数的极点上的值必须为零。

如果我们从一个给定的 n 阶谐函数开始，则为了使第二个谐函数可以和它共轭，那个谐函数的 2n 个变数必须满足一个条件式。

如果第三个谐函数应该和这两个谐函数都共轭,它的 2n 个变数就必须

满足两个条件式。如果我们继续构造一些谐函数，使每一个都和以前的谐函数的共轭，则每个谐函数所满足的条件式的数目将等于已经存在的谐函数的数目，因此，第 (2n＋1)个谐函数就将通过 2n 个变数来满足 2n 个条件式，从而就将是完全确定的。一个 n 阶面谐函数的任何倍数 AY_n，可以表示成任何一组 2n＋1 个同阶谐函数的倍数之和，因为 2n＋1 个共轭谐函数的系数，是其数目等于 Y_n 的 2n 个系数和 A 的一组可以选择的量。

为了求出任一共轭谐函数例如Y_n^σ的系数，可以假设

$$AY_n = A_0Y_n^\sigma + \cdots + A_\sigma Y_n^\sigma + \cdots$$

乘以$Y_n^\sigma ds$并在球上求面积分，所有包括相互共轭的谐函数之积的项都将为零，只剩下

$$A\iint Y_nY_n^\sigma ds = A_\sigma\iint (Y_n^\sigma)^2 ds, \qquad (52)$$

这是一个确定着 A_σ的方程。

由此可见，如果我假设一组 2n＋1 个共轭谐函数已经给定，则每一个别的 n 阶谐函数都可以用他们表示出来，而且只有一种表示方式。

137.〕我们已经看到，如果一组完备的 2n＋1 个全都互相共轭的 n 阶谐涵数已经给定，则任一个其他的同阶谐函数可以用这些谐函数表示出来。在这样 2n＋1 个谐函数的组中，共有 2n(2n＋1)个变数由 n(2n＋1)个方程联系着，因此就有 n(2n＋1)个变数可以认为是任意的。

我们可以就像汤姆孙和泰特所建议的那样把一组函数选作共轭谐函数组；在这组函数中，每一个谐函数的 n 个极点都是这样分布的：有 j 个极点和 x 轴的极点相重合，k 个极点和 y 轴的极点相重合，而 l(＝n－j－k)个极点和 z 轴的极点相重合。于是，当 n+1 个 l＝0 的分布和 n 个 l＝1 的分布已经给定时，所有别的谐函数就都可以用这些谐函数表示出来。

实际上被一切数学家（包括汤姆孙和泰特）所采用了的是那样一个函数组，即其中有 n－σ个极点被放得和可以叫做“球的正极”的一个点相重合，其余的σ个极点当σ为奇数时等距地被放在赤道上，而当σ为偶数时则等距地被在赤道的一半上。

在这一事例中，μ_1、$\mu_2\cdots\mu_\sigma$中的每一个都等于 cosθ，我们将用μ来代表它。如果我们也用 v 来代表 sinθ，则$\mu_{n-\sigma+1}\cdots\mu_n$具有 vcos(φ－β)的形式，此处β是其中一个极点在赤道上的方位角。

另外，如果 p 和 q 都小于σ，则λ_{pq}的值也是 1；如果 p 和 q 中有一个大于σ而另一个小于σ，则λ_{pq}为零；当 p 和 q 都大于σ时，λ_{pq}的值是 cossπ/a，此处 s 是一个小于σ的整数。

138.〕当所有的极点都和球的极点相重合时，σ＝0，而函数就叫做一个带谐函数。由于带谐函数是有很大重要性的，我们将给它保留一个符号，即 P_n。

我们可以由三角函数表示式(43)或是更直接地通过求导数来得出带谐函数的值，于是就有

$$P_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (53)$$

$$P_n = \frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{1.2.3\cdots n}\left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2.(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \cdots\right],$$

$$= \Sigma\left[(-1)^p \frac{(2n-2p)!}{2^n p!(n-p)(n-2p)!}\mu^{n-2p}\right], \qquad (54)$$

式中p必须取从零到不超过$\frac{1}{2}$n的最大整数的每一个整数值。

有时把P_n表示成cosθ和sinθ或我们所写的μ和v的齐次函数是方便的，这时

$$P_n = \mu^n - \frac{n(n-1)}{2.2}\mu^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2.4.4}\mu^{n-4}v^4 - \cdots,$$

$$= \Sigma\left[(-1)^p \frac{n!}{2^{2p}(p!)^2(n-2p)!}\mu^{n-2p}v^{2p}\right]. \qquad (55)$$

在有关这一课题的数学著作中已经证明，$P_n(\mu)$就是

$$(1-2\mu h+h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

的展式中h^n项的系数｛而且也等于$\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}(\mu^2-1)^n$｝。

带谐函数平方的面积分是

$$\iint (P_n)^2 ds = 2\pi a^2 \int_{-1}^{+1}(P_n(\mu))^2 d\mu = \frac{4\pi\alpha^2}{2n+1} \qquad (56)$$

由此即得

$$\int_{-1}^{+1}(P_n(\mu))^2 d\mu = \frac{2}{2n+1} \qquad (57)$$

139.〕如果我们把一个带谐函数简单地看成μ的函数而并不和球面进行任何的联系，它就可以被称为一个勒让德系数。

如果我们把带谐函数看成存在于一个球面上，球面上的各点用座标θ和φ来确定，并假设带谐函数的极点位于一点(θ′，φ′)上，则带谐函数在(θ，φ)点上的值将是四个角θ′、φ′、θ、φ的函数，而因为它是(θ，φ)和(θ′，φ′)之间的连接弧的余弦μ的函数，如果将θ和θ′互换并把φ和φ′互换，它的值就不会改变。这样表示的带谐函数曾被称为“勒让德系数”。汤姆孙和泰特称之为“双轴谐函数”。

任何x、y、z的能够满足拉普拉斯方程的齐次函数可以叫做一个“体谐函数”，而一个体谐函数在一个以原点为心的球面上的值就可以叫做一个“面谐函数”。在本书中，我们曾借助于一个面谐函数的n个极点来定义它，从而它只有2n个变数。具有2n＋1个变数的更广义的面谐函数就是更狭义的面谐函数乘以一个任意常数。当用θ和φ表示出来时，更普遍的面谐函数叫做“拉普拉斯系数”。

140a.〕为了得到对称体系的其他谐函数，我们必须对σ个轴求导数，

各该轴位于 xy 平面上，彼此之间的夹角等于π/a。这可以最方便地借助于在汤姆孙和泰特的《自然哲学》第一卷第 148 页｛或第二版的第 185 页｝上定义了的虚数座标来作到。

如果我们写出ζ＝x＋iy，η＝x－iy，式中i表示$\sqrt{-1}$，如果一个轴和 x 轴成 a 的角，则当σ为奇数时，对σ个轴求导数的运算可以写成

$$\left(e^{in}\frac{d}{d\zeta}+e^{-in}\frac{d}{d\eta}\right)\left(e^{i\left(\alpha+\frac{2\pi}{\sigma}\right)}\frac{d}{d\zeta}+e^{-i\left(\alpha+\frac{2\pi}{\sigma}\right)}\frac{d}{d\eta}\right)\left(\left(e^{i\left(\alpha+\frac{4\pi}{\sigma}\right)}\frac{d}{d\zeta}+e^{-i\left(\alpha+\frac{4\pi}{\sigma}\right)}\frac{d}{d\eta}\right)\right)\cdots$$

此式等于

$$\cos\sigma\alpha\left\{\frac{d^\sigma}{d\zeta^\sigma}+\frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}\right\}+\sin\sigma\alpha . i\left\{\frac{d^\sigma}{d\zeta^\sigma}+\frac{d^\sigma}{d\eta^s}\right\}\quad(58)$$

如果σ是偶数，我们就能证明求导数的运算可以写成

$$(-1)^{\frac{\sigma+2}{2}}\left\{\cos\sigma\alpha . i\left(\frac{d^\sigma}{d\zeta^\sigma}-\frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}\right)-\sin\sigma\alpha\left(\frac{d^\sigma}{d\zeta^\sigma}+\frac{d^\sigma}{d\eta^s}\right)\right\}\quad(58)$$

于是，如果

$$i\left(\frac{d^\sigma}{d\zeta^\sigma}-\frac{d^\sigma}{d\eta^\sigma}\right)=D\overset{(\alpha)}{s}\text{，}\left(\frac{d^\sigma}{d\zeta^\sigma}+\frac{d^\sigma}{d\eta^s}\right)=D\overset{(\sigma)}{c}\text{，}\quad(58)$$

我们就可以利用 Ds⁽σ⁾、Dc⁽σ⁾来把对σ个轴求导数的运算表示出来。这些当然是实数运算，从而是可以不用虚数符号来表示的，例如

$$2^{\sigma-1}\overset{(\sigma)}{D}s=\sigma\frac{d^{\sigma-1}}{dx^{\sigma-1}}\frac{d}{dy}-\frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{1.2.3}\frac{d^{\sigma-3}}{dx^{\sigma-3}}\frac{d^3}{dy^2}+\cdots\quad(60)$$

$$2^{\sigma-1}\overset{(\sigma)}{D}c=\sigma\frac{d^\sigma}{dx^\sigma}-\frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2.}\frac{d^{\sigma-2}}{dx^{\sigma-2}}\frac{d^2}{dy^2}+\cdots\quad(60)$$

$$2^{\sigma-1}\overset{(\sigma)}{D}c=\frac{d^\sigma}{dx^\sigma}-\frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2}\frac{d^{\sigma-2}}{dx^{\sigma-2}}\frac{d^2}{dy^2}+\cdots$$

我们也将写出

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}\overset{(\sigma)}{D}s=\underset{n}{\overset{(\sigma)}{D}s}\text{，和}\frac{d^{n-\sigma}}{dx^{n-\sigma}}\overset{(\sigma)}{D}c=\underset{n}{\overset{(\sigma)}{D}c}\text{；}(62)$$

于是$\underset{n}{\overset{(\sigma)}{D}s}$和$\underset{n}{\overset{(\sigma)}{D}c}$就代表对n个轴求导数的运算，其中n－σ个轴和 z 轴相重合，而其余的σ个轴则在 xy 平面上互成相等的角，这里当 y 轴和其中一个轴相重合时用$\underset{n}{\overset{(\sigma)}{D}s}$，而当y轴平分二轴之间的夹角时用$\underset{n}{\overset{(\sigma)}{D}c}$。

两个σ型的 n 个阶田谐函数现在可以写成

$$Y\underset{n}{\overset{(\sigma)}{s}}=(-1)^n\frac{1}{n!}r^{n+1}D\underset{n}{\overset{(\sigma)}{s}}\frac{1}{r}\text{，}(63)$$

$$Y\underset{n}{\overset{(\sigma)}{c}}=(-1)^n\frac{1}{n!}r^{n+1}D\underset{n}{\overset{(\sigma)}{c}}\frac{1}{r}\text{.}\quad(64)$$

写出μ＝cosθ，v＝sinθ，$\rho^2=x^2+y^2$，$r^2=\zeta\eta+z^2$，从而 z＝μr，ρ＝vr，x＝cosφ，y＝sinφ，

我们就有

$$D_s^{(\sigma)}\frac{1}{r}=(-1)^{\sigma}\frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!}i(\eta^{\sigma}-\zeta^{\sigma})\frac{1}{r^{2\sigma+1}}\text{，}\quad(65)$$

$$D_c^{(\sigma)}\frac{1}{r}=(-1)^{\sigma}\frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!}i(\zeta^{\sigma}+\eta^{\sigma})\frac{1}{r^{2\sigma+1}}\text{，}\quad(66)$$

在这里我们可以写出

$$\frac{i}{2}(\eta^{\sigma}-\zeta^{\sigma})=\rho^{\sigma}\sin\sigma\phi\text{，}\ \frac{1}{2}(\zeta^{\sigma}+\eta^{\sigma})=\rho^{\sigma}\cos\sigma\phi\quad(67)$$

我们现在只须对 z 求导数了，这一点我们可作得或是得出含 r 和 z 的结果，或是得出作为 z 和 ρ 除以 r 的某次幂的一个齐次函数的结果

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}\frac{1}{r^{2\sigma+1}}=(-1)^{n-\sigma}\frac{(2n)!}{2^{n}n!}\frac{2^{\sigma}\sigma!}{(2\sigma)!}\frac{2}{r^{2n+1}}$$

$$\times\left[z^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)}z^{n-\sigma-2}r^{2}+\cdots\right]\text{，}\quad(68)$$

或 $$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}\frac{1}{r^{2\sigma+1}}=(-1)^{n-\sigma}\frac{(n+\sigma)!}{(2\sigma)!}\frac{1}{r^{2n+1}}\times$$

$$\left[z^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1}{4(\sigma+1)}z^{n-\sigma-2}\rho^{2}+\cdots\right]\quad(69)$$

如果我们写出

$$\Theta_n^{\sigma}=v^{\sigma}\left[\mu^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-\sigma-2}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-\sigma-4}-\cdots\right]\text{，}\quad(70)$$

以及 $$\vartheta_n^{(\sigma)}=v^{\sigma}\left[\mu^{n-\sigma}-\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)}\mu^{n-\sigma-2}v^{2}\right.$$

$$\left.+\frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{4.8(\sigma+1)(\sigma+2)}\mu^{n-\sigma-4}y^{4}-\cdots\right]\text{，}\quad(71)$$

就有 $$\Theta_n^{(\sigma)}=\frac{2^{n-\sigma}!(n+\sigma)!}{(2n)!\sigma!}\vartheta_n^{(\sigma)}\text{，}\quad(72)$$

从而这两个函数只差一个常数因子。

现在我们可以利用 Θ 和 ϑ 来写出两个 σ 型的 n 阶田谐函数表示式了，

$$Y_{s\,n}^{(\sigma)}=\frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}n!n!}\Theta_n^{(\sigma)}2\sin\sigma\phi=\frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}n!\sigma!}\vartheta_n^{(\sigma)}2\sin\sigma\phi\text{，}\quad(73)$$

$$Y_{s\,n}^{(\sigma)}=\frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}n!n!}\Theta_n^{(\sigma)}2\cos\sigma\phi=\frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}n!\sigma!}\vartheta_n^{(\sigma)}2\cos\sigma\phi\text{。}$$

②(74)

我们必须注意，当 σ＝0 时 sin σ φ＝0 而 cos σ φ＝1。

对于包括从 1 到 n 的每一个 σ 值，都有一对田谐函数，但是当 σ＝0 时却有 $Y_{s\,n}^{(0)}=0$ **而** $Y_{c\,n}^{(\sigma)}=P$ **＝带谐函数。因此，正如应该有的那样，n 阶谐**

函数的总数就是 2n＋1。

140b.〕本书所采用的 Y 是我们当对 n 个轴求，r^{-1} 的导数并除以 n！时所得到的值。它是四个因子的乘积，即σφ的正弦或余弦、v^σ、μ（或μ和 v）的一个函数和一个数字系数。第二和第三部分的乘积，也就是依赖于θ的那一部分，曾经利用三种不同的符号表示出来，他们只在数字因子方面有所不同。当把它表示成 v^σ 和一个μ的降幂级数的乘积时，既然第一项是 $\mu^{n-\sigma}$，它就是我们仿照汤姆孙和泰特用Θ来代表的那个函数。

海恩（《球谐函数手册》，§47）用 $P_\sigma^{(n)}$ 来代表的那个函数，被称“eine zugeordnete Function erster Art”，按照陶德洪特的翻译，即“第一类缔合函数”，它是通过下列方程来和Θ相联系的：

$$\Theta_n^{(\sigma)} = (-1)^{\frac{\sigma}{2}} P_\sigma^{(n)}. \quad (75)$$

从 $\mu^{n-\sigma}$ 开始的μ的降幂级数，曾被海恩表示成■$_\sigma^{(n)}$ 而被陶德洪特写成 $\overline{\omega}(\sigma, n)$。

这个级数也可以写成另外两种形式

$$■_\sigma^{(n)} = \overline{\omega}(\sigma, n) = \frac{(n-\sigma)!}{(2n)!}\frac{d^{n+\sigma}}{d\mu^{n+\sigma}}(\mu^2-1)^n$$

$$= \frac{2^n(n-\sigma)!n!}{(2n)!}\frac{d^\sigma}{d\mu^\sigma}P_n. \quad (76)$$

在最后一种形式中，级数是通过对μ求带谐函数的导数而得出的；这种形式似乎引导弗勒尔斯采用了 $T_n^{(\sigma)}$ 这个符号，他是这样定义它的：

$$T_n^{(\sigma)} = v^\sigma \frac{d^\sigma}{d\mu^\sigma}P_n = \frac{(2n)!}{2^n(n-\sigma)!n!}\Theta_n^{(\sigma)}. \quad (77)$$

当同一个量被表示成μ和v的齐次函数并除以 $\mu^{n-\sigma}v^\sigma$ 的系数时，它就是我们已经定义为 $\vartheta_n^{(\sigma)}$ 的那个函数。

140c.〕对称体系的谐函数曾由汤姆孙和泰特按照各函数在其上变为零的球面曲线的形式来进行分类。

带谐函数在球面上任一点的值是极距离的余弦的函数；如果令它等于零，就得到一个 n 次方程，该方程的所有各根都介于－1 和＋1 之间，从而就对应于球面纬线的 n 条平行线。

由这些平行线划分而成的环带交替地为正或为负，球极周围的圆永远为正。

因此带谐函数就适于用来表示一个函数，该函数在球面纬线的某些平行线上或在空间的某些圆锥面上变为零。

对称体系的其他谐函数是成对出现的，一个函数包括σφ的余弦，而另一个则包括其正弦。因此他们在球面的σ条子午线上和 n－σ条纬线平行线上变为零，于是球面变被划分成 2σ(n－σ－1)个正四边形或田字格，另外还有极点处的 4σ个三角形。因此，在关于球面上由经纬线分成的正四边形或田字格的研究中，这些函数是有用的。

他们全都称为田谐函数，只有最后一对除外。最后一对函数只在 n 条子午线上为零，这些子午线把球面分成 2n 瓣。因此这一对函为数称为“瓣谐函数”。

141.〕其次我们必须求出任何田谐函数的平方在球面上的面积分，我们可以用第 134 节中的方法来作到这一点。我们通过用 r^n 来乘面谐函数 Y $Y_n^{(\sigma)}$ 而把它化成一个体谐函数，把这一体谐函数对它自己的 n 个轴求导数然后取 $x=y=z=0$，并且将结果乘以 $\frac{4\pi\alpha^2}{n!(2n+1)}$。

按照我们的符号，这些运算由下式来表示：

$$\iint (Y_n^{(\sigma)})^2 ds = \frac{4\pi\alpha^2}{n!(2n+1)} D_n^{(\sigma)}(r^n Y_n^{(\sigma)}) \qquad (78)$$

把体谐函数写成 z 和 ξ 及 η 的齐次函数的形式，即

$$r^n Y_{s\,n}^{(\sigma)} = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\sigma!} i(\eta^\sigma - \zeta^a)\times$$

$$\left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)} z^{n-\sigma-2}\zeta\eta + \cdots \right], \qquad (79)$$

我们发现，当对 z 求导数时，除了第一项以外所有的项都不复存在，而且还引入一个因子(n－σ)的！。

逐次对 ξ 和 η 求导数，我们就也将消除这些变数并引入一个因子－zi σ！，因此最后的结果就是

$$\iint (Y_{s\,n}^{(\sigma)})^2 ds = \frac{8\pi\alpha^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n!n!} \qquad (80)$$

我们将用符号[n，σ]来代表这一方程的右端。这一表示式对于包括 1 到 n 的一切σ值都是对的,但是却不存在和σ＝0 相对应的包含 sinσφ的谐函数。

同理我们可以证明

$$\iint (Y_{c\,n}^{(\sigma)})^2 ds = \frac{8\pi\alpha^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n!n!} \qquad (81)$$

对包括从 1 到 n 的σ值都成立。

当σ＝0 时，谐函数变成带谐函数，从而

$$\iint (Y_{c\,n}^{(0)})^2 ds = \iint (P_n)^2 ds = \frac{4\pi\alpha^2}{2n+1}; \qquad (82)$$

这个结果可以通过在方程(50)中令 $Y_n = P_n$ 并记得带谐函数在其极点上的值是 1 来直接得出。

142a.〕现在我们可以应用第 136 节的方法来确定球面一点位置的任意一个函数的展式中任一给定田谐面函数的导数。因为，设 F 是任意函数，并设 A_n^σ 是这一函数的对称组面谐函数展式中 $Y_n^{(\sigma)}$ 的系数，那就有

$$\iint F Y_n^{(\sigma)} ds = A_n^{(\sigma)} \iint (Y_n^{(\sigma)})^2 ds = A_n^{(\sigma)}[n,\sigma], \qquad (82)$$

式中[n，σ]是在方程(80)中给出的那个面积分的值的简写。

142b.〕设Ψ是一个任意函数，满足拉普拉斯方程，并在离一点 O 为 a 的一段距离之内没有奇值，而这个 O 点就可以取作座标原点。把这样一个函数展成以 O 为原点的一些正阶的体谐函数的级数永远是可能的。

这样作的一个办法就是以 O 为心画一个球，其半径小于 a，然后把球面上的势的值展成面谐函数的级数。把每一个这种谐函数乘以幂次等于面

谐函数之阶次的 r/a 的乘幂，我们就得到一些体谐函数，而所给的函数就是这些体谐函数之和。

但是，一个更方便的而且不涉及积分计算的方法就是对各个对称组谐函数的各轴求导数。

例如，让我们假设在Ψ的展式中有一项的形式是$\underset{n}{A}c^{(\sigma)}\underset{n}{Y}c^{(\sigma)}r^{n}$。

如果我们对Ψ并对它的展式进行下一运算

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}\left(\frac{d^{\sigma}}{d\zeta^{\sigma}}+\frac{d^{\sigma}}{d\eta^{\sigma}}\right)$$

并在求导数以后令x、y、z等于零，则除了包含$\overset{(\sigma)}{\underset{n}{A}c}$的一项以外展式中的中的所有各项都为零。

借助于对各实轴求导数的算符来把作用在Ψ上的算符表示出来，我们就得到

$$\frac{d^{n-\sigma}}{dz^{n-\sigma}}\left[\frac{d^{\sigma}}{dx^{\sigma}}-\frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2}\frac{d^{\sigma-2}}{dx^{\sigma-2}}\frac{d^{2}}{dy^{2}}+\cdots\right]\Psi$$

$$=\overset{(\sigma)}{\underset{n}{A}c}\frac{(n+\sigma)!(n-\sigma)}{2^{\sigma}n!},\qquad(84)$$

由此方程，我们就可以借助于Ψ在原点上的对 x、y、z 的各个微分系数来确定级数中任一谐函数的系数。

143.〕由方程(50)可见，永远可能把一个谐函数表示成极点分布在球面上的一系列同阶带谐函数之和。然而，这一函数组的简化却似乎大非易易，然而，为了直观地显示球谐函数的一些特点，我曾经计算了第三阶和第四阶的带谐函数，并且按照已经描述过的函数相加的方法来针对一些谐函数画出了球面上的等势线，各该函数就是两个带谐函数之和。见本卷末尾的图六到图九。

图六表示两个三阶带谐函数之差，该二函数的轴在纸面上成 120°之角，而这个差就是σ＝1 的第二种类型的谐函数，其轴垂直于纸面。

在图七中，谐函数仍是三阶的，但它却是轴线互成 90°角的两个带谐函数之和，而所得结果并不是任何类型的对称体系。节线之一是一个大圆，但是和大圆相交的另外两条节线却不是圆。图八代表轴线互成直角的两个四阶带谐函数之差。结果是 n＝4、σ＝2 的一个田谐函数。

图九代表同样两个带谐函数之和。结果可以提供有关一种更普遍的四阶谐函数的一些概念。在这种类型中，球面上的节线包括互不相交的六条卵形线。谐函数在卵形线内部为正，而在位于卵形线外的那一部分六连通的球面上则为负。

所有这些图都是球面的正交投影。

我也在图五中画了一个经过球轴的平面截面，以显示按照一阶球函数的值而带电的一个球面所引起的等势面和力线。

在球内，等势面是一些等距的平面，而力线是一些平行于轴线的直线，各直线到轴线的距离是自然数的平方根。球外那些线可以看成将能代表由地球的磁性所引起的情况，假如磁性是按最简单的型式分布的话。

144a.〕现在我们能够确定受到势已给定的电力作用的一个球形导体上的电分布了。

按照已经给出的方法，我们把所给电力的势Ψ展成原点在球心上的一些正阶次的体谐函数的级数。

设 $A_n r^n Y_n$ 是其中一个体谐函数，则由于势在导体球内部是均匀的，就必有起源于球面上电分布的一项 $-A_n r^n Y_n$，于是，在 $4\pi\sigma$ 的展式中必有一项

$$4\pi\sigma=(2n+1)a^{n-1}A_nY_n$$

用这种办法，我们就能确定面密度展式中除了零阶以外的一切阶次的谐函数的系数。和零阶相对应的系数依赖于的电荷 e，并由 $4\pi\sigma_0=a^{-2}e$ 来给出。

球的势是

$$V=\Psi_0+\frac{e}{a}。$$

144b.〕其次让我们假设，球位于一些接地的导体附近，而格林函数 G 已经针对球所在的域中任何两点的座标 x、y、z 和 x′、y′、z′被确定了。

如果球上的面电荷被表示成球谐函数的一个级数，则由球上的这一电荷在球外引起的电现象，和由全都位于原点上的一系列假想的奇点所引起的电现象相等同；其中第一个奇点是单独一个点，所带的电荷等于球的电荷，而其他的奇点是不同阶的多重点，他们和表示面密度的那些谐函数相对应。

设格林函数用 $G_{pp'}$ 来代表，此处 p 指示座标为 x、y、z 的点而 p′指示座标为 x′、y′、z′的点。

如果有一个电荷 A_0 放在 p′点，则当把 x′、y′、z′看成常数时 $G_{pp'}$ 就变成 x、y、z 的一个函数；而由 A_0 在周围物体上感应出来的那些电所引起的势就是

$$\Psi=A_0G_{pp'}. \quad (1)$$

假如电荷 A_0 不是放在 p′点而是均匀分布在一个以 p′为心、以 a 为半径的球上，Ψ在球外各点上的值还将是相同的。

如果球上的电荷不是均匀分布的，设它的面密度被表示成球谐函数的一个级数（因为这永远可能），就有

$$4\pi a^2\sigma=A_0+3A_1Y_1+\cdots+(2n+1)A_nY_n+\cdots(2)$$

由这种分布的任何一项例如

$$4\pi a^2\sigma_n=(2n+1)A_nY_n,(3)$$

所引起的势，对球内的点来说是 $\frac{r^n}{a^{n+1}}A_nY_n$ 而对球外的点来说是 $\frac{a_n}{r^{n+1}}A_nY_n$。

喏，由第 129c 和 129d 节中的方程(13)和(14)可知，后一表示式等于

$$(-1)^nA_n\frac{a^n}{n!}\frac{d^n}{dh_1\cdots dh_n}\frac{1}{r};$$

或者说，由球上的电荷引起的球外的势，是和由某一个多重点所引起的势相等价的，该多重点的轴是 $h_1\cdots h_n$ 而其矩是 A_na^n。

由此可见，周围各导体上的电分布以及由这种分布所引起的势，和将由这样一个多重点所引起的电分布及势相同。

因此，周围物体上的感生电在 p 点即(x，y，z)点上引起的势就是

$$\Psi_n=(-1)^n A_n \frac{a^n}{n!}\frac{d'^n}{d'h_1\cdots d'h_n}G_1 \quad (4)$$

式中 d 上的撇号表示导数是对 x′、y′、z′求的。这些座标在事后应被弄成等于球心的座标。

假设Y_n分解成它的$2n+1$个对称组分量是方便的。设$A_n^{(\sigma)}Y_n^{(\sigma)}$是其中一个分量，就有

$$\frac{d'^n}{d'h_1\cdots d'h_n}=D'^{(\sigma)}n. \quad (5)$$

这里用不着再写上指示出现在谐函数中的是 sinσφ或 cosσφ的角注 s 或 c。

现在我们可以写出由电感生电引起的势Ψ的完备表示式了：

$$\Psi=A_0G+\Sigma\Sigma\left[(-1)^n A_n^{(\sigma)}\frac{a^n}{n!}D_n'^{(\sigma)}G\right]. \quad (6)$$

但是，势在球内是常量，或者说

$$\Psi+\frac{1}{a}A_0++\Sigma\Sigma\left[\frac{r^{n_1}}{a^{n_1+1}}A_{n_1}^{(\sigma_1)}Y_{n_1}^{(\sigma_1)}\right]=\text{常量} \quad (7)$$

现在对这一表示式进行运算$D_{n_1}^{(\sigma_1)}$，这里的微分是对x、y、z进行的，而n_1和σ_1的值独立于n和σ的值。(7)式中的一切项，除了含$Yn_{n_1}^{(\sigma_1)}$的一项以外都为零，从而我们就得到

$$-2\frac{(n_1+\sigma_1)!(n_1-\sigma_1)!}{2^{2\sigma}n_1!}\frac{1}{a^{n_1+1}}A_{n\ 1}^{(\sigma_1)}$$

$$=A_0D_{n_1}^{(\sigma_1)}G'+\Sigma\Sigma\left[(-1)^n A_n^{\sigma}\frac{a^n}{n!}D_{n_1}^{(\sigma_1)}D_n'^{(\sigma)}G\right] \quad (8)$$

于是我们就得到一组方程，其中每一方程的左端都包含着我们所要确定各系数之一。右端第一项包含 A_0，即球的电荷，而且我们把这一项看作主项。

暂时忽略其他各项，我们就作为初级近似而得到

$$A_{n_1}^{(\sigma_1)}=-\frac{1}{2}\frac{2^{2\sigma_1}n_1!}{(n_1+\sigma_1)!(n_1-\sigma_1)!}A_0a^{n_1+1}D_{n_1}^{(\sigma_1)}G. \quad (9)$$

如果从球心到周围最近的导体的最短距离用 b 来代表，就有

$$a^{n_1+1}D_{n_1}^{(\sigma_1)}G<n_1!\left(\frac{a}{b}\right)^{n_1+1}.$$

因此，如果和球的半径 a 相比 b 是很大的，则其他球谐函数的系数比A_0小得多。因此，方程(8)中第一项后面某一项和第一项之比，将和$\left(\frac{a}{b}\right)^{2n+n_1+1}$有相同的数量级。

因此我们在初级近似下就可以忽略那些项，而在二级近似下则可以把在初级近似下得到的系数值代到这些项中去，依此类推，直到我们达到了所要求的近似程度为止。

近似球形的导体上的电分布

145a.〕设导体表面的方程是

$$r = a(1+F), (1)$$

式中 F 是 r 的方向即φ的一个函数，而且是在研究中可以忽略其平方项的一个量。

设 F 被展成面谐函数的级数的形式

$$F = f_0 + f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \cdots + f_n Y_n。$$

(2)在这些项中，第一项依赖于平均半径超过 a 的数量。因此，如果我们假设 a 就是平均半径，也就是说，假设 a 近似地是体积等于所给导体的体积的一个球的平径，则系数 f_0 将等于零。

第二项，即系数为 f_1 的一项，依赖于导体质心离原点的距离（假设导体具有均匀的密度）。因此如果我们取该质心作为原点，则系数 f_1 也将等于零。

在开始时，我们将假设导体有一个电荷 A_0 而且没有外来的电力作用在它上面。因此，导体外面的势必将形式如下：

$$V = A_0 \frac{1}{r} + A_1 Y'_1 \frac{1}{r^2} + \cdots + A_n Y'_n \frac{1}{r^{n+1}} + \cdots, (3)$$

式中各面谐函数并不被假设为和 F 的展式中那些面谐函数属于相同的类型。

在导体的表面上，势就是导体的势，即等于常量 a。

因此，把 r 的乘幂按 a 和 F 展开并略去 F 的二次及更高次项，我们就有

$$a = A_0 \frac{1}{a}(1-F) + A_1 \frac{1}{a^2} Y' 1(1-2F) + \cdots$$
$$+ A_n \frac{1}{a^{n+1}} Y'_n (1-(n+1)F) + \cdots \qquad (4)$$

既然各系数 A_1 等等显然比 A_0 小得多,我们在开始时就可以忽略这些系数和 F 的乘积。

于是，如果我们把 F 换成它的球谐函数展式中的第一项，并使包含同阶谐函数的各项等于零，就得到

$$a = A_0 \frac{1}{a}, \qquad (5)$$

$$A_1 Y'_1 = A_0 a f_1 Y_1 = 0, \qquad (6)$$

……

$$A_n Y'_n = A_0 a^n f_n Y_n. \qquad (7)$$

由这些方程可见，各个 Y′必然和各个 Y 属于相同的类型，从而就和他们相等同，从而就有 $A_1 = 0$ 和 $A_n = A_0 a^n f_n$。

为了确定表面上任一点的密度，我们近似地有一个方程

$$4\pi\sigma=-\frac{dV}{dv}=-\frac{dV}{dr}\cos\in,$$

(8)式中 v 是法线而∈是法线和半径之间的夹角。既然在这一研究中我们假设 F 及其对 θ 和 φ 的第一阶微分系数都很小，那就有

$$4\pi\sigma=-\frac{dV}{dr}=A_0\frac{1}{r^2}+\cdots+(n+1)A_nY_n\frac{1}{r^{n+2}}+\cdots \qquad (9)$$

将 r 的乘幂按 a 和 F 展开并略去 F 和 A_n 的乘积，我们就得到

$$4\pi\sigma=A_0\frac{1}{a^2}(1-2F)+\cdots+(n+1)A_n\frac{1}{a^{n+2}}Y_n+\cdots \qquad (10)$$

把 F 按球谐函数展开并令 A_n 等于已经求得的那些值，我们就得到

$$4\pi\sigma=A_0\frac{1}{a^2}[1+f_2Y_2+2f_3Y_3+\cdots+(n-1)f_nY_nA_n] \qquad (11)$$

由此可见，如果表面和一个球面相差一薄层，该层的厚度按照 n 阶球谐函数而变，则任意二点面密度之差和面密度之和的比值，将是该二点处半径之差和半径之和的比值的 n－1 倍。

145b.〕如果近似球形的导体(1)受到外来电力的作用，设由这些力引起的势 U 被展成以导体的体积中心为原点的正阶球谐函数的级数

$$U=B_0+B_1rY_1'+B_2rY_2'+\cdots+B_nrY_n'+\cdots, \qquad (12)$$

式中 Y 上的撇号表明这个谐函数不一定和 F 展式中的同阶谐函数属于相同的类型。

假如导体确切地是球形的，由它的面电荷在导体外面一点上引起的势就将是

$$V=A_0\frac{1}{r}-B_1\frac{a^3}{r^2}Y_1'-\cdots-B_n\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}}Y_n'-\cdots \qquad (13)$$

设由面电荷引起的实际势为 V＋W，此处

$$W=C_1\frac{1}{r^2}Y_1''+\cdots+C_m\frac{1}{r^{m+1}}Y_m''+\cdots; \qquad (14)$$

带着双撇的谐函数和出现在 F 或 U 中的不相同，而且各系数 C 很小，因为 F 很小。

必须满足的条件是，当 r＝a(1＋F)时，

$$U+V+W=\text{常量}=A_0\frac{1}{a}+B_0,$$

即等于导体的势。

把 r 的乘幂按 a 和 F 展开，当和 A 或 B 相乘时保留 F 的一次项，但忽略它和小量 C 的乘积，我们就得到

$$F\left[-A_0\frac{1}{a}+3B_1aY_1'+5B_2a^2Y_2'+\cdots+(2n+1)B_na^nY_n'+\cdots\right]$$

$$+C_1\frac{1}{a^2}Y_1''+\cdots+C_m\frac{1}{a^{m+1}}Y_m''+\cdots=0. \qquad (15)$$

为了定出系数 C，我们必须完成上式第一行中所表示的乘法并把结果表示成球谐函数的级数。这个级数经过变号，将是导体表面上的 W 的级数。

n 阶和 m 阶的两个球谐函数的乘积，是 x/r，y/r 和 z/r 的一个 n＋m

次的有理函数，从而可以展成阶次不超过 n＋m 的球谐函数的一个级数。因此，如果 F 可以按阶次不超过 m 的球谐函数展开，而由外力引起的势可以按阶次不超过 n 的球谐函数展开，则由面电荷所引起的势将只包含阶次不超过 m＋n 的球谐函数。

然后面密度就可以利用近似方程来由势求出，

$$4\pi\sigma+\frac{d}{dr}(U+V+W)=0. \quad (16)$$

145c.〕包围在一个近似球形的近似同心的导体电容器中的一个近似球形的导体。

设导体表面的方程是

$$r=a(1+F), \quad (17)$$

式中 $F=f_1Y_1+\cdots+f_n^{(\sigma)}Y_n^{(\sigma)}$. (18)

设容器内表面的方程是

$$r=b(1+G). \quad (19)$$

式中 $G=g_1y_1+\cdots+g_n^{(\sigma)}Y_n^{(\sigma)}$，(20)

而各个 f 和各个 g 都远小于1，$Y_n^{(\sigma)}$ 是 σ 型的 n 阶面谐函数。

设导体的势是 α 而容器的势是 β。设把导体和容器之间任一点上的势按球谐函数展开，例如

$$\Psi=h_0+h_1Y_1r+\cdots+h_n^{(\sigma)}Y_n^{(\sigma)}r^n+\cdots$$
$$+k_0\frac{1}{r}+k_1Y_1\frac{1}{r^2}+\cdots+k_n^{(\sigma)}Y_n^{(\sigma)}\frac{1}{r^{n+1}}+\cdots, \quad (21)$$

于是我们就必须确定各系数 h 和 k，以使当 $r=a(1+F)$ 时 $\Psi=\alpha$ 而当 $r=b(1+G)$ 时 $\Psi=\beta$。

由以前的讨论显然可知，除了 h_0 和 k_0 以外，所有的 h 和 k 都将是小量，他们和 F 的乘积可以忽略。因此我们可以写出

$$\alpha=h_0+k_0\frac{1}{a}(1-F)+\cdots+(h_n^{(\sigma)}a^n+k_n^{(\sigma)}\frac{1}{a^{n+1}})Y_n^{(\sigma)}+\cdots, \quad (22)$$

$$\beta=h_0+k_0\frac{1}{b}(1-G)+\cdots+(h_n^{(\sigma)}b^n+k_n^{(\sigma)}\frac{1}{b^{n+1}})Y_n^{(\sigma)}+\cdots. \quad (23)$$

因此我们就有

$$\alpha=h_0+k_0\frac{1}{a}, \quad (24)$$

$$\beta=h_0+k_0\frac{1}{b}, \quad (25)$$

$$k_0\frac{1}{a}f_n^{(\sigma)}=h_n^{(\sigma)}+k_n^{(\sigma)}\frac{1}{a^{n+1}}, \quad (26)$$

$$k_0\frac{1}{b}g_n^{(\sigma)}=h_n^{(\sigma)}b^n+k_n^{(\sigma)}\frac{1}{b^{n+1}} \quad (27)$$

由此我们就得到 k_0，即内部导体的电荷

$$k_0=(\alpha-\beta)\frac{ab}{b-a}, \quad (28)$$

而关于 n 阶谐函数的系数，就有

$$h_n^{(\sigma)} = k_0 \frac{b^n g_n^{(\sigma)} - a^n f^{(\sigma)}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}，(29)$$

$$k_n^{(\sigma)} = k_0 a^n b^n \frac{b^{n+1} f_n^{(\sigma)} - a^{n+1} g_n^{(\sigma)}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}，(30)$$

这里我们必须记得，各系数$f_n^{(\sigma)}$、$g_n^{(\sigma)}$、$h_n^{(\sigma)}$、$k_n^{(\sigma)}$是属于相同的阶次和相同的类型的。

内部导体的面密度由下列方程给出：

$$4\pi\sigma a^2 = k_0(1 + \cdots A_n Y_n^{(\sigma)} + \cdots$$

式中

$$A_n = \frac{f_n^{(\sigma)}\{(n+2)a^{2n+1} + (n-1)b^{2n+1}\} - g_n^{(\sigma)}(2n+1)a^{n+1}b^n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}. \quad (31)$$

146.〕作为带谐函数之应用的一个例子，让我们来考察两个球形导体上的电的平衡。设 a 和 b 是二球的半径，而 c 是他们中心之间的距离。为了简单起见，我们也将写出 a＝cx 和 b＝cy，从而 x 和 y 就是小于 1 的数字。

设取二球的连心线作为带谐函数的轴，并设属于每一个球的带函数的极点就是离另一个球最近的那个点。

设 r 是任意点离第一球的球心的距离，而 s 是同一点离第二球的球心的距离。

设第一球的面密度σ_1由下列方程给出，

$$4\pi\rho_1 a_2 = A + A_1P_1 + 3A_2P_2 + \cdots + (2m+1)A_mP_m，(1)$$

于是 A 就是该球的电荷，而 A_1 等等就是带谐函数 P_1 等等的系数。

由这一电荷分布所引起的势，对球内各点来说可以表示为

$$U' = \frac{1}{a}\left[A + A_1P_1\frac{r}{a} + A_2P_2\frac{r^2}{a^2} + \cdots + A_mP_m\frac{r^m}{a^m}\right] \quad (2)$$

而对球外各点来说可以表示为

$$U = \frac{1}{r}\left[A + A_1P_1\frac{a}{r} + A_2P_2\frac{a^2}{r^2} + \cdots + A_mP_m\frac{a^m}{r^m}\right] \quad (3)$$

同样，如果第二球上的面电荷由下列方程给出，

$$4\pi\rho_2 b_2 = B + B_1P_1 + \cdots + (2n+1)B_nP_n，(4)$$

则在此球之内和之外由这一电荷所引起的势可以表示成下列形式的方程

$$V' = \frac{1}{b}\left[B + B_1P_1\frac{s}{b} + \cdots + B_nP_n\frac{s^n}{b^n}\right]， \quad (5)$$

$$V = \frac{1}{s}\left[B + B_1P_1\frac{b}{s} + \cdots + B_nP_n\frac{b^n}{s^n}\right]， \quad (6)$$

式中的几个谐函数是联系在第二个球上的。

各球的电荷分别是 A 和 B。

第一球内每一点的势是常量，并等于该球的势 a，从而在第一球的内部就有

$$U'+V=\alpha. \quad (7)$$

同理，如果第二个球的势是β，则对该球内部各点有

$$U+V'=\beta. \quad (8)$$

对于两个球外面的各点，势是Ψ，而

$$U+V=\Psi. \quad (9)$$

在轴上，在二球心之间，有

$$r+s=c. \quad (10)$$

于是，对 r 求导数而在求导数以后令 r=0，并且记得每一个带谐函数在极点上部等于 1，我们就得到

$$\left.\begin{aligned} &A_1\frac{1}{a^2}-\frac{dV}{ds}=0, \\ &A_2\frac{2!}{a^3}+\frac{d^2V}{ds^2}=0, \\ &A_m\frac{m!}{a^{m+1}}+(-1)\frac{d^mV}{ds^m}=0, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

式中在求导数以后应令 s 等于 c。

如果我们完成微分计算并写出 a/c=x 和 b/c=y，这些方程就变成

$$\left.\begin{aligned} &0=A_1+Bx^2+2B_1x^2y+3B_2x^2y^2+\cdots+(n+1)B_nx^2y^n, \\ &0=A_2+Bx^3+3B_1x^3y+6B_2x^3y^2+\cdots+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)B_nx^3y^n, \\ &\cdots\cdots \\ &0=A_m+Bx^{m+1}+(m+1)B_1x^{m+1}y+\frac{1}{2}(m+1)(m+2)B_2x^{m+1}y^2+\cdots+ \\ &\frac{(m+n)}{m!n!}B_nx^{m+1}y^m \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

通过对第二个球进行对应的运算，我们得到

$$\left.\begin{aligned} &0=B_1+Ay^2+2A_1xy^2+3A_2x^2y^2+\cdots+(m+1)A_mx^my^2, \\ &0=B_2+Ay^3+3A_1xy^3+6A_2x^2y^3+\cdots+\frac{1}{2}(m+1)(m+2)A_mx^my^3, \\ &\cdots\cdots \\ &0=B_n+Ay^{n+1}+(n+1)A_1xy^{n+1}+\frac{1}{2}(n+1)(n+2)A_2x^2y^{n+1}+\cdots+ \\ &\frac{(m+n)!}{m!n!}A_mx^my^{n+1} \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

为了确定两个球的势α和β，我们有方程(7)和(8)，现在我们可以把他们写成

$$c\boldsymbol{\alpha}=A\frac{1}{x}+B+B_1y+B_2y^2+\cdots+B_ny^n, \quad (14)$$

$$c\boldsymbol{\beta}=B\frac{1}{y}+A+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_mx_m. \quad (15)$$

因此，如果只注意系数 A_1 到 A_m 和 B_1 到 B_n，我们就有 $m+n$ 个方程，而由这些方程就可以解出这些量，把他们用两个球的电荷 A 和 B 表示出来。然后，把这些系数的值代入(14)和(15)中，我们就可以用二球的电荷把他们的势表示出来。

这些运算可以用行列式的形式来表示，但是从计算的目的来看，更方便的是按下述方式来进行。

根据方程(13)把 $A_1\cdots B_n$ 的值代入(12)中，我们就得到

$$\begin{aligned}A_1=&-Bx^2+Ax^2y^3[2.1+3.1y^2+4.1y^4+5.1y^6+6.1y^3+\cdots]\\&+A_1x^3y^3[2.2+3.3y^2+4.4y^4+5.5y^6+\cdots]\\&+A_2x^4y^3[2.3+3.6y^2+4.10y^4+\cdots]\\&+A_3x^5y^3[2.4+3.10y^2+\cdots]\\&+A_4x^6y^3[2.5+\cdots]\\&+\cdots\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}A_2=&-Bx^3+Ax^3y^3[3.1+6.1y^2+10.1y^4+15.1y^6+\cdots]\\&+A_1x^4y^3[3.2+6.3y^2+10.4y^4+\cdots]\\&+A_2x^5y^3[3.3+6.6y^2+\cdots]\\&+A_3x^6y^3[3.4+\cdots]\\&+\cdots\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}A_3=&-Bx^4+Ax^4y^3[4.1+10.1y^2+20.1y^4+\cdots]\\&+A_1x^5y^3[4.2+10.3y^2+\cdots]\\&+A_2x^6y^3[4.3+\cdots]\\&+\cdots\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}A_4=&-Bx^5+Ax^5y^3[5.1+15.1y^2+\cdots]\\&+A_1x^6y^3[5.2+\cdots]\\&+\cdots\end{aligned}\tag{16}$$

通过把 A_1 等等的近似值代入这些方程的右端并重复上述过程以求得更进一步的近似，我们可以按照 x 和 y 的乘积的升幂式把对这些系数的逼近进行到任意的程度。如果我们写出

$$A_n=p_nA-q_nB,$$
$$B_n=-r_nA+s_nB,$$

就得到

$$\begin{aligned}p_1=&x^2y^3[2+3y^2+4y^4+5y^6+6y^8+7y^{10}+8y^{12}+9y^{14}+\cdots]\\&+x^5y^6[8+30y^2+75y^4+154y^6+280y^8+\cdots]\\&+x^7y^6[18+90y^2+288y^4+735y^6+\cdots]\\&+x^9y^6[32+200y^2+780y^4+\cdots]\\&+x^{11}y^6[50+375y^2+\cdots]\\&+x^{13}y^6[72+\cdots]\\&\cdots\cdots\\&+x^8y^9[32+192y^2+\cdots]\\&+x^{10}y^9[144+\cdots]\\&\cdots\cdots\end{aligned}\tag{20}$$

$$q_1 = x^2$$

$$\begin{aligned}
&x^5y^3[4+9y^2+16y^4+25y^6+36y^8+49y^{10}+64y^{12}\cdots]\\
&+x^7y^3[6+18y^2+40y^4+75y^6+126y^8+196y^{10}+\cdots]\\
&+x^9y^3[8+30y^2+80y^4+175y^6+336y^8+\cdots]\\
&+x^{11}y^3[10+45y^2+140y^4+350y^6+\cdots]\\
&+x^{13}y^3[12+63y^2+224y^4+\cdots]\\
&+x^{15}y^3[14+84y^2+\cdots]\\
&+x^{17}y^3[16+\cdots]\\
&\cdots\cdots\\
&+x^8y^6[16+72y^2+209y^4+488y^6+\cdots]\\
&+x^{10}y^6[60+342y^2+1222y^4+\cdots]\\
&+x^{12}y^6[150+1050y^2+\cdots]\\
&+x^{14}y^6[308+\cdots]\\
&\cdots\cdots\\
&+x^{11}y^9[64+\cdots]\\
&+\cdots
\end{aligned} \tag{21}$$

在以下的运算中，把这些系数用 a、b、c 表示出来并按照这三个量的幂次来排列各项是更加方便的。这将使对 c 求导数更容易些。于是我们就得到

$$\begin{aligned}
p_1 = {}&2a^2b^3c^{-5}+3a^2b^5c^{-7}+4a^2b^7c^{-9}+(5a^2b^9+8a^5b^6)c^{-11}\\
&+(6a^2b^{11}+39a^5b^8+18a^7b^6)c^{-13}\\
&+(7a^2b^{13}+75a^5b^{10}+90a^7b^8+32a^9b^6)c^{-15}+(8a^2b^{15}\\
&+154a^5b^{12}+288a^7b^{10}+32a^8b^9+200a^9b^8+50a^{11}b^6)c^{-17}\\
&+(9a^2b^{17}+280a^5b^{14}+735a^7b^{12}+192a^8b^{11}+780a^9b^{10}\\
&+144a^{10}b^9+375a^{11}b^8+72a^{13}b^6)c^{-19}+\cdots
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
q_1 = {}&a^2c^{-2}+4a^5b^3c^{-8}+(6a^7b^3+9a^5b^5)c^{-10}\\
&+(8a^9b^3+18a^7b^5+16a^5b^7)c^{-12}\\
&+(10a^{11}b^3+30a^9b^5+16a^8b^6+40a^7b^7+25a^5b^9)c^{-14}\\
&+(12a^{13}b^3+45a^{11}b^5+60a^{10}b^6+80a^9b^7\\
&+72a^8b^8+75a^7b^9+36a^5b^{11})c^{-16}\\
&+(14a^{15}b^3+63a^{13}b^5+150a^{12}b^6+140a^{11}b^7+342a^{10}b^8\\
&+175a^9b^9+209a^8b^{10}+126a^7b^{11}+49a^5b^{13})c^{-18}\\
&+(16a^{17}b^3+84a^{15}b^5+308a^{14}b^6+224a^{13}b^7+105a^{12}b^8\\
&+414a^{11}b^9+1222a^{10}b^{10}+336a^9b^{11}+488a^8b^{12}+196a^7b^{13}\\
&+64a^5b^{15})c^{-20}+\cdots
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
p_2 = {}&3a^3b^3c^{-6}+6a^3b^5c^{-8}+10a^3b^7c^{-10}+(12a^6b^6+15a^3b^9)c^{-12}\\
&+(27a^8b^6+54a^6b^8+21a^3b^{11})c^{-14}\\
&+(48a^{10}b^6+162a^8b^8+158a^6b^{10}+28a^3b^{13})c^{-16}\\
&+(75a^{12}b^6+360a^{10}b^8+48a^9b^9+606a^8b^{10}\\
&+372a^6b^{12}+36a^3b^{15})c^{-18}+\cdots
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
q_2 = {}&a^3c^{-3}+6a^6b^3c^{-9}+(9a^3b^3+18a^6b^5)c^{-11}\\
&+(12a^{10}b^3+36a^8b^5+40a^6b^7)c^{-13}\\
&+(15a^{12}b^3+60a^{10}b^5+24a^9b^6+100a^3b^7+75a^6b^9)c^{-15}
\end{aligned}$$

$$(18a^{14}b^3+90a^{12}b^5+90a^{11}b^6+200a^{10}b^7$$
$$+126a^9b^8+225a^8b^9+196a^6b^{13})c^{-17}$$
$$+(21a^{16}b^3+126a^{14}b^5+225a^{13}b^6+350a^{12}b^7+594a^{11}b^8$$
$$+525a^{10}b^9+418a^9b^{10}+441a^8b^{11}+196a^6b^{13})c^{-19}+\cdots \quad (25)$$

$$p_3=4a^4b^3c^{-7}+10a^4b^5c^{-9}+20a^4b^7c^{-11}+(16a^7b^6+35a^4b^9)c^{-13}$$
$$+(36a^9b^6+84a^7b^8+56a^4b^{11})c^{-15}$$
$$+(64a^{11}b^6+252a^9b^8+282a^7b^{10}+84a^4b^{13})c^{-17}+\cdots \quad (26)$$

$$q_3=a^4c^{-4}+8a^7b^3c^{-10}+(12a^9b^3+30a^7b^5)c^{-12}$$
$$+(16a^{11}b^3+60a^9b^5+80a^7b^7)c^{-14}$$
$$+(20a^{13}b^3+100a^{11}b^5+32a^{10}b^6+200a^9b^7+175a^7b^9)c^{-16}$$
$$+(24a^{15}b^3+150a^{13}b^5+120a^{12}b^6+400a^{11}b^7+192a^{10}b^8$$
$$+525a^9b^9+336a^7b^{11})c^{-18}+\cdots \quad (27)$$

$$p_4=5a^6b^3c^{-8}+15a^5b^5c^{-10}+35a^5b^7c^{-12}+(20a^8b^6+70a^6b^9)c^{-14}$$
$$+(45a^{10}b^6+120a^8b^8+126a^5b^{11})c^{-16}+\cdots \quad (28)$$

$$q_4=a^5c^{-5}+10a^8b^3c^{-11}+(15a^{10}b^3+45a^8b^5)c^{-13}$$
$$+(20a^{12}b^3+90a^{10}b^5+140a^8b^7)c^{-15}$$
$$+(20a^{13}b^3+100a^{11}b^5+32a^{10}b^6+200a^9b^7+175a^7b^9)c^{-16}$$
$$+(25a^{14}b^3+150a^{12}b^5+40a^{11}b^6+350a^{10}b^7+350a^8b^9)c^{-17}+\cdots \quad (29)$$

$$p_5=6a^6b^3c^{-9}+21a^6b^5c^{-11}+56a^6b^7c^{-13}$$
$$+(24a^9b^6+126a^6b^9)c^{-15}+\cdots \quad (30)$$

$$q_5=a^6c^{-6}+10a^9b^3c^{-12}+(18a^{11}b^3+63a^9b^5)c^{-14}$$
$$+(24a^{13}b^3+126a^{11}b^5+224a^9b^7)c^{-16}+\cdots \quad (31)$$

$$p_6=7a^7b^3c^{-10}+28a^7b^5c^{-12}+84a^7b^7c^{-14}+\cdots \quad (32)$$

$$q_6=a^7c^{-7}+14a^{10}b^3c^{-13}+(21a^{12}b^3+84a^{10}b^5)c^{-15}+\cdots \quad (33)$$

$$p_7=8a^8b^3c^{-11}+36a^8b^5c^{-13}+\cdots \quad (34)$$

$$q_7=a^8c^{-8}+16a^{11}b^3c^{-14}+\cdots \quad (35)$$

$$p_8=9a^9b^3c^{-12}+\cdots \quad (36)$$

$$q_8=a^9c^{-9}+\cdots \quad (37)$$

各个 r 和 s 的值,可以通过分别在各个 q 和 p 中将 a 和 b 互换来写出。现在如果我们在下列形式下按照这些系数来计算两个球的势,

$$\alpha=lA+mB,\ (38)$$

$$\beta=mA+nB,\ (39)$$

则 l、m、n 是电势系数（第 87 节），其中

$$m=c^{-1}+p_1ac^{-2}+p_2a^2c^{-3}+\cdots (40)$$

$$n=b^{-1}-q_1ac^{-2}-q_2a^2c^{-3}-\cdots (41)$$

或者，按 a、b、c 展开，就有

$$m=c^{-1}+2a^3b^3c^{-7}+3a^3b^3(a^2+b^2)c^{-9}+a^3b^3(4a^4+6a^2b^2$$
$$+4b^4)c^{-11}+a^3b^3[5a^6+10a^4b^2+8a^3b^3+10a^2b^4+5b^6]c^{-13}$$
$$+a^3b^3[6a^8+15a^6b^2+30a^5b^3+20a^4b^4+20a^4b^4$$
$$+30a^3b^5+15a^2b^6+6b^8]c^{-15}$$
$$+a^3b^3[7a^{10}+21a^8b^2+75a^7b^3+35a^6b^4+144a^5b^5+$$

$$35a^4b^6+75a^3b^7+21a^2b^8+7b^{10}]c^{-17}$$
$$+a^3b^3[8a^{12}+28a^{10}b^2+154a^9b^3+56a^8b^4+446a^7b^5$$
$$+102a^6b^6+446a^5b^7+5ba^4b^8+154a^3b^9+28a^2b^{10}$$
$$+8b^{12}]c^{-19}+a^3b^3[9a^{14}+36a^{12}b^2+280a^{11}b^3+84a^{10}b^4$$
$$+1107a^9b^5+318a^8b^6+1668a^7b^7+318a^8b^6+1668a^7b^7$$
$$+318a^6b^8+1107a^5b^9+84a^4b^{10}+280a^3b^{11}$$
$$+36a^2b^{12}+9b^{14}]c^{-21}+\cdots \qquad (42)$$

$$n=b^{-1}-a^3c^{-4}-a^5c^{-6}-a^7c^{-8}-(a^2+4b^3)a^6c^{-10}$$
$$-(a^5+12a^2b^3+9b^5)a^6c^{-12}-(a^7+25a^4b^3+36a^2b^5+$$
$$16b^7)a^6c^{-14}-(a^9+44a^6b^3+96a^4b^5+16a^3b^6+80a^2b^7$$
$$+25b^9)a^5c^{-16}-(a^{11}+70a^8b^3+210a^6b^5+84a^5b^6$$
$$+260a^4b^7+72a^3b^8+150a^2b^9+36b^{11})a^6c^{-18}$$
$$-(a^{13}+104a^{10}b^3+406a^8b^5+272a^7b^6+680a^6b^7$$
$$+468a^5b^8+575a^4b^9+209a^3b^{10}+252a^2b^{11}$$
$$+49b^{13})a^6c^{-20}-(a^{15}+147a^{12}b^3+720a^{10}b^5+693a^9b^6$$
$$+1548a^8b^7+1836a^7b^8+1814a^6b^9+1640a^5b^{10}+1113a^4b^{11}$$
$$+488a^3b^{12}+392a^2b^{13}+64b^{15})a^6c^{-22}+\cdots \qquad (43)$$

l 的值可以通过在 n 中把 a 和 b 互换来求得。根据第 87 节，体系的势能是

$$W=\frac{1}{2}lA^2+mAB+\frac{1}{2}nB^2\text{，}\quad(44)$$

而根据第 93a 节，二球之间的推斥力是

$$-\frac{dW}{dc}=\frac{1}{2}A^2\frac{dl}{dc}+AB\frac{dm}{dc}+\frac{1}{2}B^2\frac{dn}{dc}\text{.}\quad(45)$$

任一球上任一点处的面密度，由方程(1)和(4)而通过各系数 A_n 和 B_n 来给出。

第十章　共焦二次曲面[①]

147.〕设一个共焦族的普遍方程是

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1， \qquad (1)$$

式中 λ 是一个变化的参数。我们将用 λ 的下标来区分二次曲面的品种，即用 λ_1 表示双页双曲面，用 λ_2 表示单页双曲面，而用 λ_3 表示椭球面。各量

$$a，\lambda_2，b，\lambda_2，c，\lambda_3$$

是按数值递增的次序排列的。a 这个量是为了形式对称才被引入的，但是在我们的结果中我们将永远假设 a＝0。

考虑一下参数各为 λ_1、λ_2、λ_3 的三个曲面，我们就发现，通过在他们的方程之间消去变数，他们的交点上的 x^2 的值满足方程

$$x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)=(\lambda_1^2-a^2)(\lambda_2^2-a^2)(\lambda_3^2-a^2). \quad (2)$$

y^2 和 z^2 的值可以通过把 a、b、c 互相轮换来得出。

把这个方程对 λ_1 求导数，我们就得到

$$\frac{dx}{d\lambda_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2-a^2}x. \qquad (3)$$

如果 ds_1 是夹在曲面 λ_1 和 $\lambda_2+d\lambda_1$ 之间的 λ_2 和 λ_3 的交线的截距长度，则有

■

这个分式的分母，就是曲面 λ_1 的各个半轴的平方乘积。如果我们令

$D_1^2=\lambda_3^2-\lambda_2^2$，$D_2^2=\lambda_3^2-\lambda_1^2$，和 $D_3^2=\lambda_2^2-\lambda_1^2$，(5)并令 a＝0，就有

$$\frac{ds_1}{d\lambda_1}=\frac{D_2D_3}{\sqrt{b^2-\lambda_1^2}\sqrt{c^2-\lambda_1^2}} \qquad (6)$$

很容易看到，D_2 和 D_3 就是 λ_1 的中央部分的半轴，该部分和通过给定点的直径相共轭，而且，D_3 平行于 ds_2 而 D_2 平行于 ds_3。

如果我们也把三个参数 λ_1、λ_2、λ_3 代成他们通过下列方程而由三个函数 α、β、γ 来定义的值，

$$\alpha=\int_0^{\lambda_1}\frac{cd\lambda_1}{\sqrt{(b^2-\lambda_1^2)(b^2-\lambda_1^2)}}，$$

$$\beta=\int_b^{\lambda_{21}}\frac{cd\lambda_2}{\sqrt{(\lambda_2^2-b^2)(c^2-\lambda_2^2)}}， \quad (7)$$

$$\gamma=\int_c^{\lambda_3}\frac{cd\lambda_3}{\sqrt{(\lambda_3^2-b^2)(\lambda_3^2-c^2)}}；$$

则有

[①] 这种考察主要采自一本很有趣的著作，即 Levns sur les Fonctions Inverses des Transcen－dantes et les Surfaces Isothermes Par G.Lamé,Paris,1857.

$$ds_1 = \frac{1}{c} D_2 D_3 d\boldsymbol{\alpha}，\ ds_2 = \frac{1}{c} D_3 D_1 d\boldsymbol{\beta}，\ ds_3 = \frac{1}{c} D_1 D_2 d\boldsymbol{\gamma}. \quad (8)$$

148.〕现在，设 V 是任一点α、β、γ上的势，则沿 ds_1 的合力是

$$R_1 = -\frac{dV}{ds_1} = -\frac{dV}{da}\frac{da}{ds_1} = -\frac{dV}{da}\frac{c}{D_2D_3}. \quad (9)$$

既然 ds_1、ds_2 和 ds_3 是互相垂直的，面积元 ds_2ds_3 上的面积分就是

$$R_1 ds_2 ds_3 = -\frac{dV}{da}\frac{c}{D_2D_3} \cdot \frac{D_3D_1}{c} \cdot \frac{D_1D_2}{c} \cdot d\beta dy$$

$$= -\frac{dV}{da}\frac{D_1^{\ 2}}{c} d\beta d\gamma. \quad (10)$$

现在考虑介于各曲面α、β、γ和α＋dα、β＋dβ、γ＋dγ之间的体积元。共有八个这样的体积元，每一空间卦限中有一个。

我们已经得出力的法向分量（向内测量）在由曲面β和β＋dβ、γ和γ＋dγ从曲面α上截下的面积元上的面积分[①]。曲面α＋dα的对应面积元上的面积分将是

$$+\frac{dV}{da}\frac{D_1^{\ 2}}{c} d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{\gamma} + \frac{d^2V}{da^2}\frac{D_1^{\ 2}}{C} d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{\gamma}$$

因为 D_1 是不依赖于α的。体积元的两个对面表面上的面积分将是

$$\frac{d^2V}{da^2}\frac{D_1^{\ 2}}{c} d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{\alpha}.$$

同样，另外两对表面上的面积分将是

$$\frac{d^2V}{d\beta^2}\frac{D_2^{\ 2}}{c} d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{\gamma} \text{和} \frac{d^2V}{d\boldsymbol{\gamma}^2}\frac{D_3^{\ 2}}{c} d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{\gamma}.$$

这六个表面包围了一个体积元，其体积是

$$ds_1 ds_2 ds_3 = \frac{D_1^{\ 2} D_2^{\ 2} D_3^{\ 2}}{c^3} d\boldsymbol{\alpha} d\boldsymbol{\beta} d\boldsymbol{\gamma}，$$

而且，如果体积元中的体密度是ρ，则我们由第 77 节得到，这一体积元表面的总的面积分加上它里面的电量乘以 4π，应等于零，或者除以 dαdβdγ就有

$$\frac{d^2V}{da^2} D_1^{\ 2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} D_2^{\ 2} + \frac{d^2V}{d\gamma^2} D_3^{\ 2} + 4\pi\rho \frac{D_1^{\ 2} D_2^{\ 2} D_3^{\ 2}}{c^3} = 0. \quad (11)$$

这就是椭球座标下的拉普拉斯方程的泊松推广形式。

如果ρ＝0，第四项就不存在，而方程就和拉普拉斯方程相等价。

关于这一方程的普遍讨论，读者可以参阅已经｛在前面的小注中｝提到的拉梅的著作。

149.〕为了确定α、β、γ各量，我们可以通过引用辅助角θ、φ、ψ来把他们写成普通的椭圆积分的形式，此处

[①] ｛译注：这里所说的“面积分”显然就是后人所说的“通量”。｝

$$\lambda_1 = b\sin\theta, \qquad (12)$$

$$\lambda_2 = \sqrt{c^2\sin^2\phi + b^2\cos^2\phi} \qquad (13)$$

$$\lambda_3 = c\sec\psi. \qquad (14)$$

如果令 $b=kc$ 和 $k^2+k'^2=1$,我们就可以把 k 和 k′叫做共焦族的两个互补模数，而且我们得到

$$a = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \quad (15)$$

这是一个第一类的椭圆积分，我们可以按照通常的符号把它写成 $F(k, \theta)$。

同样我们得到

$$\beta = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k'^2\cos^2\phi}} = F(k') - F(k', \phi), \quad (16)$$

式中 $F(k')$是关于模数 k′的完备函数，

$$\gamma = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\cos^2\psi}} = F(k) - F'(k, \psi). \quad (17)$$

在这里，α被表示成角θ的一个函数，从而它是参数λ_1的函数；β是φ的从而是λ_2的函数；γ是ψ的从而是λ_3的函数。

但是这些角和这些参数可以看成α、β、γ的函数。这些反函数及其有关函数的性质，在拉梅的有关著作中进行了说明。

很容易看到，既然各函数是各辅助角的周期函数，他们也将是α、β、γ这些量的周期函数：λ_1和λ_3的周期是 $4F(k)$，而λ_2的周期是 $2F(k')$。

特殊解

150.〕如果 V 是α、β或γ的线性函数，方程就是满足的。因此我们就可以从方程推出同族中保持在给定的势的任何两个共焦曲面上的电分布，以及二曲面之间任一点上的势。

双页双曲面

当α为常数时，对应的曲面是双页双曲面。让我们把α的符号取为和所考虑的一页上的 x 的符号相同。这样我们就可以每次考虑其中的一页。

设α_1、α_2是和两个单独页相对应的α值，这两页可以属于相同的或不同的双曲面。另外又设 V_1、V_2是这两页被给予的势。于是，如果我们令

$$V = \frac{\sigma_1 V_2 - \sigma_2 V_1 + a(V_1 - V_2)}{a_1 - a} \qquad (18)$$

条件就会在两个曲面上和他们之间的全部空间中得到满足。如果我们今 V 在曲面α_1的外侧空间中等于常量并等于 V_1，而在曲面α_2的外侧空间中等于 V_2，我们就将得到这一特殊事例的完备解。在某一页的任一点上，合力是

$$\pm R_1 = -\frac{dV}{ds_1} = -\frac{dV}{da}\frac{da}{ds_1}, \qquad (19)$$

$$\text{或} R_1 = \frac{V_1 - V_2}{a_2 - a_1}\frac{c}{D_2 D_3}. \qquad (20)$$

如果 p_1 是从中心到任一点的切面的垂直距离，而 p_1 是曲面的半轴的乘积，则有 $p_1 D_2 D_3 = P_1$.

由此我们得到

$$R_1 = \frac{V_1 - V_2}{a_2 - a}\frac{cp_1}{P_1}, \qquad (21)$$

或者说，曲面上任一点上的力，垂直于从中心到切面的垂线。面密度 σ 可由下列方程求出：

$$4\pi\sigma = R_1. (22)$$

方程为 $x=d$ 的一个平面从双曲面的一页上切割下一个部分，这一部分曲面上的总电量是

$$Q = \frac{c}{2}\frac{V_1 - V_2}{a_2 - a_1}\left(\frac{d}{\lambda_1} - 1\right). \qquad (23)$$

从而整个无限大的一页上的电量就是无限大。曲面的一些极限形式是：

(1)当 $\alpha = F(k)$ 时，曲面就是 xz 平面上位于方程为

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1. \qquad (24)$$

的双曲纷正支的正侧的那一部分平面。

(2)当 $\alpha = 0$ 时，曲面是 yz 平面。

(3)当 $\alpha = -F(k)$ 时，曲面是 xz 平面上位于同一双曲线负支的负侧的那一部分平面。

单页双曲面

令 β 等于常数，我们就得到单页双曲面的方程。因此，形成电场之边界面的那两个曲面必然属于两个不同的双曲面。其他方面的考察和在双页双曲面的事例中相同，从而当势差给定时，曲面上任一点处的密度将正比于从中心到切面的垂直距离，而无限大页上的总电量将是无限大。

极限形式

(1)当 $\beta = 0$ 时，曲面就是 xz 平面上介于双曲线之间的那一部分平面，该双曲线的方程已在前面写出，即(24)。

(2)当 $\beta = F(k')$ 时，曲面就是 xy 平面上于方程为

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1 \qquad (25)$$

的椭圆外面的那一部分平面。

椭球面

对于任一给定的椭球面，γ是常数。如果两个椭球面γ_1和γ_2被保持在势V_1和V_2，则在二者之间的空间中的任一点γ上，我们有

$$V = \frac{\gamma_1 V_2 - \gamma_2 V_1 + \gamma(V_1 - V_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}. \qquad (26)$$

任一点上的面密度是

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_1}\frac{cp_3}{P_3}, \qquad (27)$$

式中p_3是从中心到切面的垂直距离，而p_3是半轴的乘积。

每一曲面上的总电荷由下式给出，

$$Q_2 = c\frac{V_1 - V_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = -Q_1, \qquad (28)$$

从而是有限的。

当γ＝F(k)时，椭球的表面在一切方向上都在无限远处。

如果令V_1＝0而γ_2＝F(k)，我们就得到位于一个无限广阔的场中的保持在势V的一个椭球面上的总电量，

$$Q = c\frac{V}{F(k) - \gamma}. \qquad (29)$$

椭球面的极限形式出现在γ＝0时，其时曲面是xy平面位于一个椭圆内的那一部分平面，该椭圆的方程已在前面写出，即(25)。

方程为(25)而离心率为k的椭圆形平板的每一面上的面密度是

$$\sigma = \frac{V}{4\pi\sqrt{c^2 - b^2}}\frac{1}{F(K)}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{c^2 - b^2}}}, \qquad (30)$$

而其电荷是

$$Q = c\frac{V}{F(k)}. (31)$$

特　例

151.〕如果c保持不变，而b从而还有k则无限地减小而终于变为零，曲面族就会变化如下：

双页双曲线的实轴和其中一个虚轴都无限减小，而曲面最后就和相交于z轴的两个平面相重合。

量α变为和θ相等同，而第一族曲面退化成的那一族子午面的方程就是

$$\frac{x^2}{(\sin\alpha)^2} - \frac{y^2}{(\cos\alpha)^2} = 0. \qquad (32)$$

至于β这个量，如果采用在第(259)页上由(7)式给出的定义，我们就会在积分的下限处被引导到积分的无限大值。为了避免这一点，我们在这一特例中把β定义为下列积分的值，

$$\int_{\lambda_2}^{c}\frac{c\,d\lambda_2}{\lambda_2\sqrt{c^2-\lambda_2{}^2}}.$$

如果我们现在令 $\lambda_2 = c\sin\phi$，则 β 变成

$$\int_{\phi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sin\phi}，即 \log\cot\frac{1}{2}\phi；$$

于是

$$\cos\phi = \frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{e^{\beta}+e^{-\beta}}，\qquad (33)$$

从而

$$\sin\phi = \frac{2}{e^{\beta}+e^{-\beta}}. \quad (34)$$

如果我们把指数 $\frac{1}{2}(e^{\beta}+e^{-\beta}$ 叫做 β 的双曲余弦并写成 $\cosh\beta$，而且把 $\frac{1}{2}(e^{\beta}-e^{-\beta})$ 叫做 β 的双曲正弦并写成 $\sinh\beta$，而且如果我们按相同的相同的方式应用一些在特点上和其他那些简单三角函数相类似的函数，则 $\lambda_2 = c\,\mathrm{sech}\,\beta$，而单页双曲线族的方程则是

$$\frac{x^2+y^2}{(\mathrm{sech}\,\beta)^2}-\frac{z^2}{(\tanh\beta)^2}=c^2. \qquad (35)$$

量 γ 简代成了 Ψ，从而 $\lambda_3 = c\sec\gamma$，而椭球族的方程就是

$$\frac{x^2+y^2}{(\sec\gamma)^2}-\frac{z^2}{(\tan\gamma)^2}=c^2. \qquad (36)$$

这是一些绕共轭轴的旋转图形。这一类椭球叫做“行星椭球”。无限场中一个保持在势 V 的行星椭球上的电量是

$$Q = c\frac{V}{\frac{1}{2}\pi-\gamma}，(37)$$

式中 $c\sec\gamma$ 是赤道半径，而 $c\tan\gamma$ 是极向半径。

如果 $\gamma=0$，图形就是半径为 c 的圆盘，而且

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2\sqrt{c^2-r^2}}，(38)$$

$$Q = c\frac{V}{\frac{1}{2}\pi}. \qquad (39)$$

152.〕第二个事例。设 b＝c，则 k＝1 而 k′＝0，a＝logtan $\frac{\pi+2\theta}{4}$，由此即得 $\lambda_1 = c\,\mathrm{tabh}a.$ (40) 而双页旋转双曲面的方程变为

$$\frac{x^2}{(\tanh a)^2}-\frac{y^2+z^2}{(\mathrm{sech}\,a)^2}=c^2. \quad (41)$$

量 β 被简化为 φ，而每一个单页双曲面则退化为一对交于 x 轴的平面，其方程是

$$\frac{y^2}{(\sin\beta)^2}-\frac{z^2}{(\cos\beta)^2}=0. \qquad (42)$$

这是一族子午面，而β即其经度。

在第 259 页的(7)式中定义的量γ，在此事例中在积分下限处变为无限大。为了避免这一点，让我们把它定义为下列积分的值，

$$\int_{\lambda_3}^{\infty}\frac{cd\lambda_3}{\lambda_3{}^2-c^2}.$$

如果令$\lambda_3=c\sec\psi$，我们就得到$\gamma=\int_{\frac{\pi}{9}}^{\psi}\frac{d\psi}{\sin\psi}$，由此即得$\lambda_3=c\coth\lambda$，而椭球族的方程就是

$$\frac{x^2}{(\coth\gamma)^2}+\frac{y^2+z^2}{(\operatorname{cosech}\gamma)^2}=c^2. \qquad (43)$$

这些以短轴为其旋转轴的椭球叫做"卵形椭球"。在这一事例中，由(29)式即得，无限场中一个保持在势 V 的卵形椭球上的电量是

$$cV\div\int_{\psi_0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sin\psi}, \qquad (44)$$

式中$c\sec\psi_0$是极向半径。

如果我们用 A 代表极向半径而用 B 代表赤道半径，则刚刚求得的结果变成

$$V\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{\log\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{B}}. \qquad (45)$$

如果和极向半径相比赤道半径是很小的，就像在圆头导线的事例中那样，则有

$$Q=\frac{AV}{\log 2A-\log B}. \quad (46)$$

当 b 和 c 都变为零而他们之比则保持有限时，曲面族就变成两个共焦锥面族和半径反比于γ的一个球面族。如果 b 和 c 之比是零或一，曲面族就变成一个子午面族、一个共轴正锥面族和一个半径反比于γ的同心球面族。这就是普通的球极座标系。

柱　面

153.〕当 c 为无限大时曲面是柱面，其母线平行于 z 轴，一族柱面是双曲柱面，也就是由双页双曲线所生成的柱面。既然当 c 为无限大时 k 为零，从而θ＝α，可见这一族柱面的方程是

$$\frac{x^2}{\sin^2 a}-\frac{y^2}{\cos^2 a}=b^2. \quad (47)$$

另一族是椭圆柱面，而既然当 k＝0 时β变成

$$\int_b^{\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2{}^2-b^2}}，或\ \lambda_2=b\cosh\beta，$$

这一族柱面的方程就是

$$\frac{x^2}{(\cosh\beta)^2}+\frac{y^2}{(\sinh\beta)^2}=b^2. \quad (48)$$

这两族曲面在本卷末尾的第十图中表示了出来。

共焦抛物面

154.〕如果我们在普遍方程中把座标原点移到 x 轴上离曲面族中心的距离为 t 的一点，并把 x、λ、b 和 c 分别改写成 t＋x、t＋λ、t＋b 和 t＋c，然后使 t 无限增大，则我们在极限情况下得到一族抛物面，其焦点位于 x＝b 和 x＝c 二点，就是说，方程是

$$4(x-\lambda)+\frac{y^2}{\lambda-b}+\frac{z^2}{\lambda-c}=0. \quad (49)$$

如果第一个椭圆抛物物面族的变动参数是λ，双曲抛物面族的变动参数是μ，而第二个椭圆抛物面族的变动参数是 ν，则我们有按数值递增的次序排列的λ、b、 μ、c、ν，而且 x＝λ＋μ＋ν－c－b，

$$\left.\begin{aligned} &x=\lambda+\mu+\nu-c-b,\\ &y^2=4\frac{(b-\lambda)(\mu-b)(\nu-b)}{c-b},\\ &x^2=4\frac{(c-\lambda)(c-\mu)(\nu-b)}{c-b},\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

为了避免积分(7)中的无限大值,抛物面族中的对应积分是在不同的积分限之间计算的。

我们在这一事例中写出

$$\alpha=\int_{\lambda}^{b}\frac{d\lambda}{\sqrt{(b-\lambda)(c-\lambda)}},$$

$$\beta=\int_{b}^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{(\mu-b)(c-\mu)}},$$

$$\gamma=\int_{c}^{\nu}\frac{d\nu}{\sqrt{(\nu-b)(\nu-c)}}.$$

由此即得

$$\left.\begin{aligned} &\lambda=\frac{1}{2}(c+b)-\frac{1}{2}(c-b)\cosh\alpha,\\ &\mu=\frac{1}{2}(c+b)-\frac{1}{2}(c-b)\cos\beta,\\ &\nu=\frac{1}{2}(c+b)+\frac{1}{2}(c-b)\cosh\gamma;\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{2}(c+b)+\frac{1}{2}(c-b)(\cosh\gamma-\cos\beta-\cosh\alpha),\\ y&=2(c-b)\sinh\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cosh\frac{\gamma}{2},\\ z&=2(c-b)\cosh\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sinh\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}\right\}\qquad(52)$$

当 b＝c 时，我们有绕 x 轴的旋转抛物面的事例，而且｛见附注｝

$$\begin{aligned}x&=a(e^{2a}-e^{2\gamma}),\\ y&=2ae^{a+\gamma}\cos\beta,\qquad(53)\\ z&=2ae^{a+\gamma}\sin\beta.\end{aligned}$$

β为常数的曲面是一些通过轴的平面，β就是这样一个平面和通过轴的一个固定平面之间的夹角。

α为常数的曲面是一些共焦抛物面。当α＝－∞时，抛物面退化成一条以原点为端点的直线。

我们也可以利用以焦点为原点而以抛物面的轴为θ轴的球极座标γ、θ和φ来给出α、β、γ的值，

$$\begin{aligned}\alpha&=\log(r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}\theta),\\ \beta&=\phi,\qquad(54)\\ \gamma&=\log(r^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}\theta).\end{aligned}$$

我们可以把势等于α的事例和带体谐函数 r^iQ^i 相比较。二者都满足拉普拉斯方程，而且都是 x、y、z 的齐次函数，但是在从抛物面导出的事例中在轴上有一种不连续性｛因为当把θ改写成θ＋2π时α是改变的｝。

无限场中一个带电抛物面（包括在一个方向上为无限的直线事例）上的面密度，反比于离焦点的距离的平方根，或者，在直线的事例中是反比于离端点的距离的平方根[①]。

---

① ｛第 154 节中的结果可以推导如下。从 x、y、z 到λ、μ、v 换变数，拉普拉斯方程就变成 或者，如果 则拉普拉斯方程变成 因此，α、β、γ的一个线性函数就满足拉普拉斯方程。当 b＝c 时，我们可以取 由(51)就有 于是由(50)就得到 由此就可以得出具有(54)形式的方程。既然由这些方程可知沿半径的力是像 1/r 那样变化的，法向力从而还 于是面密度就像 1/p 那样地变化，从而就是反比于 r 的平方根的。｝

第十一章　电像和电反演的理论

155.〕我们已经证明，当一个导体球受到一种已知的电分布的影响时，球表面上的电分布是可以用球谐函数的方法来确定的。

为此目的，我们需要把被影响体系的势展成以球心为原点的一些正阶体谐函数的级数，然后我们求出一些负阶体谐函数的一个对应的级数，它表示由球上的电所引起的势。

通过这种很有威力的分析方法的应用，泊松确定了在给定的电体系影响下的一个球的带电情况，而且他也解决了确定互相影响下的两个导体球上的电分布这一更困难的问题。这些研究曾由普兰纳等人详细进行，他们证实了泊松的精确性。

当把这种方法应用于受到单独一个带电点的影响的一个球这一最基本的事例时，我们要求把由带电点引起的势展成体谐函数的级数，并定出表示着由球上的电在球外空间中引起的势的第二个体谐函数级数。

看来任何一个数学家都不曾注意到，这第二个级数表示着由一个想像的带电点所引起的势；那个想像的点绝不像一个带电质点那样有其物理的存在，但它却可以叫做一个电像，因为表面对外界一点的作用，是和球面被取走时即将由该想像的带电点所起的作用相同的。

这种发现似乎是直到W.汤姆孙爵士才作出的，他曾经把这种发现发展成一种求解电学问题的很有威力的方法，而同时又能用初等几何的形式表示出来。

他的原始研究见《剑桥和都柏林数学期刊》(Cambridge and Dublin Mathematical Journal,1848)；那些研究是用普通的超距吸引力的理论表示出来的，而并没有用到势和第四章中各定理的那种方法，尽管那些研究也许是利用这些方法来发现了的。然而，只要能够把问题弄得更清楚易懂，我就不想遵循原作者的方法而将不受限制地应用势和等势面的概念。

电像理论

156.〕设图 7 中的 A 和 B 代表无限大的均匀电介媒质中的两个点。设 A 和 B 的电荷分别是 e_1 和 e_2。设 P 是空间中的任意点，它到 A 和 B 的距离分别是 r_1 和 r_2。于是 P 点处的势就是

$$V=\frac{e_1}{r_1}+\frac{e_2}{r_2} \quad (1)$$

这种电分布所引起的等势面，当 e_1 和 e_2 同号时由（本卷末尾的）图一来表示，当 e_1 和 e_2 异号时由图二来

图 7

表示。我们现在必须考虑 V＝0 的曲面，这是等势面族中唯一的球面。当 e_1 和 e_2 同号时，这个曲面完全位于无限远处。但是当 e_1 和 e_2 异号时，却存在一个位于有限距离处的平面或球面，而面上各点的势为零。

这一曲面的方程是

$$\frac{e_1}{r_1}+\frac{e_2}{r_2}=0. \quad (2)$$

它的中心位于 AB 延线上的一点 C，使得

$$AC : BC :: e_1^2 : e_2^2,$$

而且球的半径是

$$AB\frac{e_1e2}{e_1^2-e_2^2}$$

A、B 二点是相对于这一球面而言的反演点。这就是说，他们位于同一半径上，而半径就是他们到球心的距离的比例中项。

既然这个球面位于零势，如果我们假设它由金属薄片制成并已接地，则球外或球内任一点的势都不会改变，而任何地方的电作用将仍然只是由两个带电点 A 和 B 引起的。

如果我们现在使金属壳保持接地而把 B 点取走，则球内的势将到处变为零，而球外的势则仍和以前一样。因为球面将仍然有相同的势，而外部带电情况也没有任何改变。

由此可见，如果一个带电点 A 被放在一个势为零的球形导体外面，则球外一切点上的电作用将是由点 A 和球内另一点 B 所共同引起的那种作用；这个点 B 就可以叫做 A 的电像。

同样我们也可以证明，如果 B 被放在球壳里边，则球内的电作用｛可以看成｝是由 B 和它的电像 A 所共同引起的。

157.〕电像的定义　一个电像就是一个或一组位于一个曲面一侧的带电点，它在曲面的另一侧将和曲面上实际上带的电引起相同电作用。

在光学中，一个镜面或一个透镜一侧的一个或一组点，如果存在时将发射和实际存在于镜面或透镜的另一侧的光线，就叫做一个虚像。

电像对应于光学中的虚像，因为它是和曲面另一侧的空间有关的。电像并不是在位置上或只在焦点的近似特性上和光学中的虚像相对应的。

不存在实电像，也就是不存在将在带电曲面的同侧引起和带电曲面的效应相等价的效应的那种想像的带电点。

因为，如果任一空间域中的势等于由同一域中的某种电分布所引起的势，它就必然真是由那种电分布所引起的。事实上，任一点上的电{密度}，可以通过泊松方程的应用而从该点附近的势求出。

设 a 是球的半径。

设 f 是带电点 A 到球心 C 的距离。

设 e 是该点的电荷。

于是此点的像就位于此球的同一半径上的一点B，到球心的距离是 $\frac{a^2}{f}$，而像的电荷是$-e\frac{a}{f}$。

图 7

我们已经证明，这个像将在球的另一面和球面上的实际电荷引起相同的效应。其次我们将确定这种电荷在球面任一点 P 处的面密度；为此目的，我们将利用第 80 节中的库仑定理，就是说，如果 R 是一个导体表面上的合力，而σ是面密度，则

$$R=4\pi\sigma,$$

R 是由表面向外测量的。

我们可以把R看成两个力的合力，其中一个是沿AP作用的推斥力 $\frac{e}{AP^2}$，而另一个是沿PB作用的吸引力$e\frac{a}{f}\frac{1}{PB^2}$。

把这些力分解在 AC 和 CP 方向上，我们就发现，推斥力的分力是

$$\frac{ef}{AP^3}\text{沿}AC,\quad \frac{ea}{AP^3}\text{沿}CP.$$

吸引力的分力是

$$-e\frac{a}{f}\frac{1}{BP^3}BC\text{沿}AC,\quad -e\frac{a}{f}\frac{1}{BP^3}\text{沿}CP.$$

喏，$BP=\frac{a}{f}AP$而$BC=\frac{a^2}{f}$，从而吸引力的分力可以写成

$$-ef\frac{1}{AP^3}\text{沿}AC,\quad -e\frac{f^2}{a}\frac{1}{AP^3}\text{沿}CP.$$

吸引力和推斥力沿 AC 的分力是相等而反号的,从而合力是完全沿着半径 AC 的方向的[①]。这只不过肯定了我们已经证明的结论，就是说，球面是一个等势面，从而是一个到处和合力相垂直的曲面。

沿着 CP，也就是沿着向 A 所在的一侧画去的曲面的法线测量的合力是

$$R=-e\frac{f^2-a^2}{a}\frac{1}{AP^3}.\quad (3)$$

如果 A 是取在球内的，f 就小于 a，而我们就应该向内测量 R。因此，对于这一事例就有

$$R=-e\frac{a^2-f^2}{a}\frac{1}{AP^3}.\quad (4)$$

在一切事例中，我们都可以写出

[①] {译注：原书笔（或印）误，AC 应作 CP。}

$$R = -e\frac{AD.Ad}{CP}\frac{1}{AP^3} \quad (5)$$

式中 AD、Ad 是任一条过 A 的直线和球面相交而成的线段，而且他们的乘积在一切事例中都应取为正。

158.〕利用第 80 节中的库仑定理，由此即得 P 点处的面密度，

$$\sigma = -e\frac{AD\cdot Ad}{4\pi\cdot CP}\frac{1}{AP^3} \quad (6)$$

球面任一点上的电密度反比于该点到 A 点距离的三次方。这一表面分布的效应，和 A 点的效应一起，应该在 A 点所在的曲面一侧引起由 A 点上的e和B点上的电像$-e\frac{a}{f}$所引起的效应，而在曲面的另一侧则势到处为零。因此，表面分布本身的效应就应该在 A 点一侧引起和 B 点上的电像$-e\frac{a}{f}$的势相同的势，而在另一侧则引起和A点上的e的势相反的势。

球面上的总电荷显然是$-e\frac{a}{f}$，因为它和B点上的电像等价。因此我们就已经得到了关于一个球面上电分布的作用的下列各定理，该球上的面密度反比于离开球外或球内一点 A 的距离的立方。

设面密度由方程

$$\sigma = \frac{C}{AP^3} \quad (7)$$

给出，式中 C 是某一常量，则由方程(6)得到

$$C = -e\frac{AD\cdot Ad}{4\pi a} \quad (8)$$

这一表面分布在和 A 由此表面隔开的任一点上的作用，等于集中在 A 点上的一个电量－e 或

$$\frac{4\pi aC}{AD\cdot Ad}$$

的作用。

它在和 A 位于曲面同侧的任一点上的作用，等于集中在 A 的像点 B 上的一个电量

$$\frac{4\pi Ca^2}{f\cdot AD\cdot Ad}$$

的作用。

球面上的总电量，如果 A 在球内则等于第一个电量，如果 A 在球外则等于第二个电量。

这些命题都是由 W.汤姆孙爵士在他参照球形导体上的电分布所作的原始几何研究中确立的，读者应参考他的原著。

159.〕如果把一个已知其电分布的体系放在一个半径为 a 的导体球附近，该球通过接地而保持其势为零，则球上由体系之各部分所引起的电荷将互相叠加。

设 A_1、A_2 等等是体系中的带电点，f_1、f_2 等等是各点到球心的距离，e_1、e_2 等等是他们的电荷，则这些点的像 B_1、B_2 等等将和各点本身位于

相同的半径上，到球心的距离将是$\frac{a^2}{f_1}$、$\frac{a_2}{f_2}$等等，而他们的电荷将是

$$-e_1\frac{a}{f_1}、-e_2\frac{a}{f_2}等等。$$

球面电荷在球外引起的势，将和像体系 B_1、B_2 等等所将引起的势相同。因此这个体系就叫做体系 A_1、A_2 等等的电像。

如果球不是保持在零势而是保持在一个势 V，我们就必须在它的外表面上叠加上一个具有均匀面密度

$$\sigma=\frac{V}{4\pi a}$$

的电分布。这种分布在球外各点的效应，将等于集中在球心上的一个电量 V_a 的效应，而在球内的各点上则势将简单地增加一个值 V。

由外部各影响点 A_1、A_2 等等的体系在球上引起的总电荷是

$$E=V_a-e_1\frac{a}{f_1}-e_2\frac{a}{f_3}-\cdots,\quad(9)$$

由此就可以计算电荷 E 或势 V，当其中另一个已经给定时。

当带电体系位于球面之内时，球面上的感生电荷将和施感电荷相等而反号，正如我们在以前已经在任意闭合曲面的情况下对其内部各点证明了的那样。

①160.〕当位于离球心距离 f 大于球的半径 a 处的一个带电点和在带电点及球上电荷影响下的球面上的电分布之间发生相互作用时，作用能量是

$$M=\frac{Ee}{f}-\frac{1}{2}\frac{e^2a^3}{f^2(f^2-a^2)},\qquad(10)$$

V 是球的势，而 E 是球的电荷。

因此，由第 92 节可知，带电点和球之间的推斥力是

$$F=ea(\frac{V}{f^2}-\frac{ef}{(f^2-a^2)^2}$$

$$=\frac{e}{f^2}(E-e\frac{a^3(2f^2-a^2)}{f(f^2-a^2)^2}.\qquad(11)$$

由此可见，点和球之间的力在下列各事例中永远是一个吸引力：

(1)当球不被绝缘时。

(2)当球不带电荷时。

(3)当带电点离球面很近时。

---

① [如果把问题看成第 86 节的一个例子，正文中的结果也许就会更好懂一些。那么，让我们假设所说的带电点其实是一个小的导体球，其半径为 b 而势为 v。于是我们就有两个球的问题的一个特例，该问题的一种解已在第 146 节中给出，而另一种解将在第 173 节中给出。然而在我们所面临的事例中，b 是如此地小，以致我们可以认为小物体上的电是均匀地分布在它的表面上的，从而除了小物体的第一个电像以外所有的电像都可以忽略不计。既然球上的电荷 E 已经给定，我们除了像点上的电荷－ea/f 以外还必须在球心上有一个电荷 ea/f。于是我们就有 因此体系的能量就是（见第 85 节） 利用以上各式，我们也可以用势把能量表示出来：在相同的近似程度下，能量是

为了使力可以是推斥性的，球的势必须为正并大于$e\frac{f^3}{(f^2-a^2)^2}$，而球的电荷必须和e同号并大于$c\frac{a^3(zf^2-a^2)}{f(f^2-a^2)^2}$。

在平衡点上，平衡是非稳定的；当物体相距较近时力是吸引力，当他们相距较远时力是推斥力。

当带电点位于球面之内时，作用在带电点上的力永远指向远离球心的方向，并等于

$$\frac{e^2af}{(a^2-f^2)^2}.$$

当带电点位于球外时，球上离该点最近的一点处的面密度是

$$\sigma_1=\frac{1}{4\pi a^2}\{Va-e\frac{a(f+a)}{(f-a)^2}\}$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\{E-e\frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2}\}. \qquad (12)$$

球上离带电点最远的一点处的面密度是

$$\sigma_2=\frac{1}{4\pi a^2}\{Va-e\frac{a(f-a)}{(f+a)^2}\}$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\{E+e\frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2}\}. \qquad (12)$$

当球的电荷 E 介于

$$e\frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2}\text{和}-e\frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2}$$

之间时，靠近带电点处的电将是负的，而远离带电点处的电将是正的。球面上带正电的部分和带负电的部分之间有一条圆形的分界线，而这条线将是一条平衡线。

如果

$$E=ea(\frac{1}{\sqrt{f^2-a^2}}-\frac{1}{f}), \qquad (14)$$

和球相交于一条平衡线的那个等势面就是一个球面，其球心是带电点，其半径是$\sqrt{f^2-a^2}$。

属于这种事例的力线和等势面，在本卷末尾的图四中给出。

无限大平面导体表面上的像

图 161.〕如果第 156 节中的两个带电点 A 和 B 是带的相等而反号的电荷，零势面就将是一个平面，而上的每一点都和 A、B 等距。

图 8

因此，如果 A 是一个电荷为 e 的带电点，而 AD 是到平面的垂线，延长 AD 到 B，使得 DB＝AD，并在 B 点放一个等于－e 的电荷，则这个位于 B 的电荷将是 A 的像，并将在平面的 A 所在的一侧各点上产生一种效应，等于

平面上的实际电荷所产生的效应。因为，A 侧由 A 和 B 引起的势，满足除在 A 点外到处有$\nabla^2 V=0$ 和在平面上 V＝0 的条件，而只有一种形式的 V 能够满足这些条件。

为了确定平面上 P 点处的合力，我们注意到它是由两个力合成的；两个力都等于$\frac{e}{AP^2}$，一个沿着AP的方向，另一个沿着PB的方向。因此这些力的合力就沿着平行于 AB 的方向，并等于

$$\frac{e}{AP^2}\cdot\frac{AB}{AP}.$$

因此，从平面向 A 所在的空间中量度的合力 R 就是

$$R=-\frac{2eAD}{AP^3}, \qquad (15)$$

而 P 点处的密度就是

$$\sigma=-\frac{eAD}{2\pi AP^3}. \qquad (16)$$

论电反演

162.〕电像法直接导致一种变换法；利用这种变换法，可以从我们已知其解的任一电学问题导出任意多的其他问题和他们的解。

我们已经看到，位于离半径为 R 的球的球心为距离 r 处的一个点，它的像位于同一半径的 r′处，使得 $rr'=R^2$。因此，一组点、一组线或一组面的像，就是通过在纯几何学中被称为反演法，并由恰斯耳斯、萨耳芒以及别的数学家们描述了的方法来从原体系得出的。

如果 A 和 B 是两个点，A′和 B′是他们的像，O 是反演中心，而 R 是反演半径，则有

$$OA.OA'=R^2=OB.OB'.$$

由此可见，三角形 OAB 和 OB′A′是相似的，且有

$$AB:A'B'::OA:OB'::OA.OB:R^2.$$

如果一个电量 e 被放在 A，则它在 B 的势将是

$$V=\frac{e}{AB}.$$

图 9

如果 e′被放在 A′，则它在 B′的势是

$$V'=\frac{e'}{A'B'}.$$

在电像理论中有 $e:e'::OA:R::R:OA'$.由此即得

$$V:V'::R:OB, \qquad (17)$$

或者说，A 点的电在 B 点上引起的势和 A 点的电像在 B 的像点上引起的势之比，等于 R 和 OB 之比。

既然比值只依赖于 OB 而不依赖于 OA，任何带电体系在 B 点引起的势和体系之像在 B′点引起的势之比就都等于 R 和 OB 之比。

如果 r 是任一点 A 到中心的距离，r′是 A′到中心的距离，e 是 A 所带的电，e′是 A′所带的电，而且如果 L、S、K 是 A 点上的线段元、面积

元和体积元，L′、S′、K′是他们在 A′点的像，而λ、σ、ρ、λ′、σ′、ρ′是这两个点上对应的线密度、面密度和体积度，V 是由原体系在 A 点引起的势，V′是由反演体系在 A′点引起的势，则有

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{r'}{r}=\frac{L'}{L}=\frac{R^2}{r^2}=\frac{r'^2}{R^2},\ \frac{S'}{S}=\frac{R^4}{r^4}=\frac{r'^4}{R},\ \frac{K'}{K}=\frac{R^6}{r^6}=\frac{r'^6}{R^6},\\
&\frac{e'}{e}=\frac{R}{r}=\frac{r'}{R},\ \frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{r}{R}=\frac{R}{r'},\\
&\frac{\sigma'}{\sigma}=\frac{r^3}{R^3}=\frac{R^3}{r'^3},\ \frac{\rho'}{\rho}=\frac{r^5}{R^5}=\frac{R^5}{r'^5},\\
&\frac{V'}{V}=\frac{r}{R}=\frac{R}{r'}.
\end{aligned}\right\}$$

[①](18)

如果原体系中有一个曲面是一个导体的表面，从而具有常量势 P，则在变换后的体系中，该曲面的像将具有势$P\frac{R}{r}$。但是通过在反演中心O上放一个等于－RR 的电量，变换后的曲面的势就被简化为零。

由此可见，当一个导体在空间中被绝了缘并充电到势 P 时，如果我们知道了该导体上的电分布，我们就可以通过反演来求出另一导体上的电分布，该另一导体是第一个导体的像，处于放在反演中心上的一个电荷等于－PR 的带电点的影响之下，并且被接了地。

163.〕下列的几何定理在研究反演事例时是有用的。当反演以后，每一个球都变成另一个球，除非它通过反演中心，那时它就变成一个平面。

如果两个球的球心离反演中心的距离是 a 和 a′,他们的半径是 a 和 a′，而且，如果我们把一个球相对于反演中心的强度定义为该球在通过反演中心的一条直线上截取的两条线段的乘积，则第一个球的强度等于 a^2-a^2，而第二个球的强度等于 $a'^2-a'^2$，在这一事例中，我们有

$$\frac{a'}{a}=\frac{a'}{a}=\frac{R^2}{a^2-\alpha^2}=\frac{a'^2-\alpha'^2}{R^2},\qquad(19)$$

或者说，第一个和第二个球到中心的距离之比等于他们的半径之比，也等于反演球的强度和第一个球的强度之比，或等于第二个球的强度和反演球的强度之比。

反演中心对一个球而言的像，就是另一个球的球心的反演点。

在反演后的曲面是一个平面和一个球面的事例中，从反演中心到平面的垂直距离和反演半径之比，等于反演半径和球的直径之比。

每一个圆都反演成另一个圆，除非它通过反演中心，那时它就变成一条直线。

两个曲面或两条曲线在相交处的夹角不因反演而变。

任何一个通过一个点及其对一个球而言的像点的圆都和该球相正交。

由此可见，任何通过一点并和一球正交的圆也将通过该点的像点。

164.〕我们可以利用反演法来从不受任何其他物体影响的已绝缘球上的均匀分布推出另一个受到一个带电点影响的已绝缘球上的电分布。

---

① 见 Thomson and Tait′s Natural Philosophy,§515.

如果带电点位于 A，就取该点为反演中心。如果 A 离半径为 a 的球心的距离是 a，则反演图形将是一个球，其半径为 a′，其中心距离为 f′，此处

$$\frac{a'}{a}=\frac{f'}{f}=\frac{R^2}{f^2-a^2}. \qquad (20)$$

其中一个球的心，对应于另一球的心对 A 而言的反演点，或者说，如果 C 是第一个球的心而 B 是它的反演点,则 C′就是反演点而 B′是第二个球的心。

现在设把一个电量 e′传给第二个球，并设它不受外界影响。这个电量将均匀地分布在球上，其面密度为

$$\sigma'=\frac{e'}{4\pi a'^2}. \qquad (21)$$

它在球外任何一点的作用，将和放在第二个球心 B′上的一个电荷 e′的作用相同。

在球面上和球面内，势是

$$P'=\frac{e'}{a'}, \qquad (22)$$

即一个常量。

现在让我们对这一体系进行反演。球心 B′在反演体系中变成反演点 B，而位于 B′的电荷 e′变成位于 B 的 $e'\frac{R}{f'}$，而且在和 B 点由曲面隔开的任何点上，势是由位于 B 的这一电荷引起的。

在反演体系中，球面上任一点或和 B 位于同侧的任一点上的势是

$$\frac{e'}{a'}\frac{R}{AP}.$$

如果现在我们在这一体系上叠加一个位于 A 的电荷 e，此处

$$e=-\frac{e'}{a'}R, \qquad (23)$$

则球面上的势以及和 B 位于同侧的一切点上的势将简化为零。在和 A 位于同侧的一切点上，势将是由位于 A 的一个电荷 e 和位于 B 的一个电荷 e′ $e'\frac{R}{f'}$所引起的。

但是 $e'\frac{R}{f'}=-e\frac{a'}{f'}=-e\frac{a}{f}$，(24)

正如我们在前面求得的 B 上的像电荷那样。

为了求出第一个球上任意点处的面密度，我们有

$$\sigma=\sigma'\frac{R^3}{AP^3}. \qquad (25)$$

把σ′代成用属于第一个球的那些量表示的值，我们就得到和第 158 节中的值相同的值

$$\sigma=-\frac{e(f^2-a^2)}{4\pi a AP^3}. \qquad (26)$$

论相继电像的有限系列

165.〕如果两个导电平面相交于一个角，而该角等于两倍直角的一个分数，则将存在一个有限的电像系列，而该系列将完全地确定电分布。

因为，设 AOB 是垂直于二导电平面之交线的一个截面，设交角为 AOB $=\frac{\pi}{n}$，并设P是一个带电点。那么，如果我们以O为心以OP为半径画一圆，并从 OB 开始找出作为 P 对两个平面而言的相继电像的各点，我们就将得到作为 P 对 OB 而言的像的 Q_1、作为 Q_1 对 OA 而言的像的 P_2、作为 P_2 对 OB 而言的像的 Q_3、作为 Q_3 对 OA 而言的像的 P_3，作为 P_3 对 OB 而言的像的 Q_2，余类推。

图 10

如果我们从 P 对 OA 而言的像开始,我们将按照相反的顺序而得到同样的点 Q_2、P_3、Q_3、P_2、Q_1 等等，如果 AOB 是二直角的分数的话。

因为，带电点和每隔一个的像点 P_2、P_3 是按照等于 2AOB 的角度间隔而排列在圆周上的，而中间的各点 Q_1、Q_2、Q_3 是按照相同大小的间隔排列的。因此，如果 2AOB 是 2π的一个分数，就将存在有限个像，而其中没有一个会落在角 AOB 中。然而，如果 AOB 不是π的分数，那就不可能作为有限系列带电点的结果来表示实际的带电情况。

如果AOB＝–，就将有几个负像 Q_1、Q_2 等等，每一个都和P相等而反号，并有 n－1 个正像 P_2、P_3 等等，每一个都等于 P，而符号也相同。

符号相同的相继二像之间的角度是$\frac{2\pi}{n}$。如果我们把其中一个导电平面看成一个对称面，我们就将发现带电点和正像及负像是对该平面对称排列的，使得对于每一个正像都有一个负像和它位于相同的法线上，并位于平面两侧的相同距离处。

如果我们现在相对于任何一点对这一体系进行反演，两个平面就变成两个球，或变成以$\frac{\pi}{n}$角相交的一个球和一个平面，而P的反演点P′则位于这个角内。

相继的像点位于通过 P′点并和两个球都正交的圆上。为了找出各像点的位置，我们可以利用一条原理，即一个点和它对一个球而言的像是位于球的同一条半径上的。我们可以从 P′开始画出像点位于其上并交替通过两个球心的弦。为了求出必须指定给每一个像的电荷，在交线圆上任取一点，于是每一个像的电荷就正比于它到此点的距离，而其符号的正负则取决于它是属于第一个或第二个序列。

166.〕这样我们就求得了一种情况下的像点分布，即当任何空间以一个导体为边界时的情况，该导体包括相交于$\frac{\pi}{n}$角的两个球，保持在零位，并受到一个带电点的影响。

图 11

我们可以利用反演来推出由以$\frac{\pi}{n}$角相交的两个球截体构成的一个导

体的事例，该导体被充电到单位势，并放在自由空间中。

为此目的，我们把二平面体系相对于 P 点进行反演并改变各电像的符号。起先各像点所在的那个圆现在变成了通过球心的直线。

如果图 11 代表通过连心线 AB 的一个截面，而 D、D′是交线圆和纸面相交的点，则为了找出相继的像，可以先画出第一个圆的半径 DA，然后再画 DC、DE 等等，他们和 DA 成角 $\frac{\pi}{n}$、$\frac{2\pi}{n}$ 等等。他们和连心线的交点 A、C、E 等等将是各正像的位置，而每一个像的电荷将由它到 D 的距离来表示。这些像中的最后一个将位于第二个圆的圆心上。

为了找出各个负像，作 DQ、DR 等等，和连心线成角 $\frac{\pi}{n}$、$\frac{2\pi}{n}$ 等等。这些线和连心线的交点将给出各负像的位置，而每个像的电荷将由它到 D 的距离来表示{因为如果 E 和 Q 是对球 A 而言的反演点，则角 ADE 和角 AQD 相等}。

其中任一球上任一点处的面密度，是由这一系列像所引起的面密度之和。例如，球心为 A 的球上任一点 S 处的面密度是

$$\sigma=\frac{1}{4\pi DA}\{1+(AD^2-AB^2)\frac{DB}{BS^3}+(AD^2-AC^2)\frac{DC}{CS^3}+\cdots\},$$

式中 A、B、C 等等是正像系列。

当 S 在交线圆上时，面密度为零。

为了求出其中一个球截体上的总电荷，我们可以求由每一个像在该截体上引起的电感的面积分。

位于 A 点而电荷为 DA 的像在球心为 A 的截体上引起的总电荷是

$$DA\frac{DA+OA}{2DA}=\frac{1}{2}(DA+OA),$$

式中 O 是交线圆的圆心。

同样，位于 B 点的像在同一截体上引起的电荷是 $\frac{1}{2}(DB+OB)$，余类推 OB 之类从 O 向左测量的线段取负值。

由此即得，球心为 A 的截体上的总电荷是

$$\frac{1}{2}(DA+DB+DC+\cdots)+\frac{1}{2}(OA+OB+OC+\cdots)$$

$$-\frac{1}{2}(DP+DQ+\cdots)-\frac{1}{2}(OP+OQ+\cdots).$$

167.〕电像法可以应用于由平面或球面所限定的任何空间，如果这些边界面都相交于二直角的分数角的话。为了这样一组球面可以存在，图形的每一个立体角都必须是三面体角，它的两个角是直角，而第三个角或是直角或是二直角的分数。

由此可知，像数为有限的事例是：

(1)单独一个球面或平面。

(2)两个平面、一个球面和一个球面或两个球面相交于 $\frac{\pi}{n}$.

(3)这些面以及可以是平面或球面的第三个面和他们相正交。

(4)这些面和第四个平面或球面，它和前两个面相正交，而和第三个面

交于角$\frac{\pi}{n}$。在这四个面中至少有一个必须是球面。我们已经分析了第一个和第二个事例。在第一个事例中，我们有单独一个像。在第二个事例中，我们有 2n－1 个像，沿着一个圆排列成两个系列，该圆通过影响点并和两个面相正交。在第三个事例中，除了这些像和影响点以外，我们还有他们对第三个面而言的像，也就是说，除了影响点，共有 4n－1 个像。

在第四个事例中，我们首先画一个和前两个面相正交的圆并确定圆上的几个负像和 n－1 个正像的位置和电荷，然后，通过包括影响点在内的 2n 个点中的每一个点，我们画一个圆和第三个及第四个面相正交并确定圆上的两系列像，每系列有 n＇个像。用这种办法，除了影响点以外，我们将得到 2nn＇－1 个正像和 2nn＇个负像。这 4nn＇个点是属于一条旋轮线的两组曲率线的那些圆的交点。

如果其中每一点都带有应有的电量，则其势为零的曲面将包括 n＋n＇个球面；他们形成两个系列，其中第一个系列中的相继球面相交于角$\frac{\pi}{n}$，而第二个系列中的相继球面相交于角$\frac{\pi'}{n}$，而第一个系列中的每一个球面都和第二个系列中的每一个球面互相正交。

两个正交球的事例.见本卷书末图四

168.〕设图 12 中的 A 和 B 是互相正交于一个圆的两个球的球心，该圆通过 D 和 D＇，直线 DD＇和连心线相交于 C。于是 C 就是 A 对球 B 而言的像，也是B对球A而言的像。如果$AD=\alpha$, $BD=\beta$,则$AB=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$，而如果我们在A、B、C上分别放上等于$\alpha$、$\beta$和$-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$的电量，则两个球都将是势等于 1 的等势面。

因此，我们可以根据这一体系导出下列各事例中的电分布：

(1)在由二球的较大截体形成的导体 PDQD＇上，它的势是 1，而它的电荷是

$$\alpha+\beta-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=AD+BD-CD.$$

因此，这个量就量度了这样一个图形在不受其他物体的感应作用时的电容。

球心为 A 的球上任一点 P 处的密度，以及球心为 B 的球上任一点 Q 处的密度，分别是

$$\frac{1}{4\pi\alpha}(1-(\frac{\beta}{BP})^3)\text{和}\frac{1}{4\pi\beta}(1-(\frac{\alpha}{AQ})^3).$$

在交线圆上，密度为零。

如果其中一个球比另一个球大得多，小球顶点上的密度最后就将是大球顶点上的密度的三倍。

(2)在由二球的较小截体形成的透镜体 P＇DQ＇D＇上，设电量＝

$-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$，并在单位势下受到A点和B点上的电量α和β的影响，则任何点的密度将由相同的公式来表示。

(3)在带有电量α的缺月体DPD'P'上，设受到B点和C点上的电量β和$\frac{-\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$的作用，则它也是在单位势下处于平衡的。

(4)在带有电量β并受到A和C的影响的另一个缺月体QDP'D'上。

我们也可以确定下列各内表面上的电分布：

受到圆DD'的圆心上的内部带电点C的影响的透镜形的空腔。

受到凹面中心上的一个点的影响的缺月形空腔。受到三个点 A、B、C的影响的由二球的较大截体形成的空腔。但是，我们不想直接算出这些事例的解，而却将利用电像原理来确定由放在O上并带有单位电荷的一个点在导体PDQD'之外表面上的一点P处感应出来的电密度。

令$OA=a, OB=b, OP=r, BP=p,$

$AD=\alpha, BD=\beta, AB=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

相对于以C为心以1为半径的一个球来对体系进行反演。两个球将仍然是互相正交的球，球心在A和B并有相同的半径。如果我们用带撇的字母来代表对应于反演体系的各量，就有

$$a'=\frac{a}{a^2-\alpha^2}, b'=\frac{b}{b^2-\beta^2}, \alpha'=\frac{\alpha}{a^2-\alpha^2}, \beta'=\frac{\beta}{b^2-\beta^2},$$

$$r'=\frac{1}{r}, p'^2=\frac{\beta^2r^2+(b^2-\beta^2)(p^2-\beta^2)}{r^2(b^2-\beta^2)^2}.$$

如果在反演体系中曲面的势是1，则P'点处的密度是

$$\sigma'=\frac{1}{4\pi\alpha'}\left(1-\left(\frac{\beta'}{p'}\right)\right).$$

如果在原体系中P点处的密度是σ，则

$$\frac{\sigma}{\sigma'}=\frac{1}{r^3},$$

而势是$\frac{1}{r}$。通过在O点放一个等于1的电荷，原曲面上的势将变为零，而P点处的密度将是

$$\sigma=\frac{1}{4\pi}\frac{a^2-\alpha^2}{\alpha r^3}\left(1-\frac{\beta^3r^3)}{(\beta^2r^2+(b^2-\beta^2)(p^2-\beta^2))^{\frac{1}{2}}}\right.$$

此式给出由位于O点的一个电荷在其中一个球截体上引起的电分布。另一个球截体上的分布可以通过交换a和b、α和β并把p换成q或AQ来得出。

为了求出由O点上的带电点在导体上感应出来的总电荷，让我们研究反演体系。

在反演体系中，我们在A'有电荷α'，在B'有电荷β'，在A'

B'上的一点C'有一个负电荷$\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$，使得

A'C'：C'::Bα'²：B'²

如果OA'＝a'，OB＝b'，OC'＝c'，我们就得到

$$c'^2=\frac{a'^2\beta'^2+b'^2\alpha'^2-a'^2\beta'^2}{a'^2+\beta'^2}$$

对这一体系进行反演，各电荷就变成

$$\frac{\alpha'}{a'}=\frac{\alpha}{a},\quad \frac{\beta'}{b'}=\frac{\beta}{b},$$

$$-\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}\frac{1}{c'}=-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2\beta^2+b^2a^2-\alpha^2\beta^2}}.$$

由此可见，由O点上的一个单位负电荷在导体上引起总电荷就是

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2\beta^2+b^2a^2-\alpha^2\beta^2}}.$$

三个正交球上的电分布

169.〕设各球的半径为α、β、γ，则

$$BC=\sqrt{\beta^2+\gamma},CA=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2},AB=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}.$$

设图13中的PQR是从ABC到对边的垂线的垂足，并设O是三条垂线的交点。

于是，P就是B对球γ而言的像，也是C对球β而言的像。同样，O就是P对球α而言的像。

设把电荷α、β和γ放在A、B和C各点上。

于是，应该放在P点上的电荷就是

$$-\frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

同样也有$AP=\frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}$，从而把O看成P的像，O点上的电荷就是

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

用同样的办法，我们可以找出一组像来在电的方面和相互正交的处于势1的四个球面相等价。

如果第四个球的半径是δ而且我们令它的球心上的电荷也等于δ，则任何两个球例如α和β的连心线和他们交面的交点上的电荷将是

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}}.$$

任意三个球心 ABC 的平面和球心 D 上之垂线的交点上的电荷是

$$+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

而四条垂线的交点上的电荷是

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}}}.$$

相互正交的四个球，势为零，受到一个单位带电点的作用

170.〕设四个球为 A、B、C、D，而带电点为 O。画四个球 A_1、B_1、C_1、D_1，使得其中任何一个例如 A_1 通过 O 并和另外三个球即 B、C、D 相正交。再画六个球(ab)、(ac)、(ad)、(bc)、(bd)、(cd)，使得其中每一个都通过 O 并通过两个原有球的交线圆。

三个球 B_1、C_1、D_1 除 O 点外还交于另外一点。设把此点叫做 A'，并设 B'、C'、D' 分别是 C_1、D_1、A_1，D_1、A_1、B_1，以及 A_1、B_1、C_1 的交点。这些球中的任意两个，例如 A_1、B_1，将和六球之一(cd)相交于一点 (a'b')，共有六个这样的点。

其中任何一个球例如 A_1 将和六球中的三球(ab)、(ac)、(ad)相交于一点 a'。共有四个这样的点。最后，六个球(ab)、(ac)、(ad)、(cd)、(db)、(bc)除 O 点以外还将相交于另一个点 S。

如果我们现在相对于一个以 O 为心以 1 为半径的球来对体系进行反演，四个球 A、B、C、D 就将反演为球，而其他的十个球则将变成平面。在各个交点中，前四个 A'、B'、C'、D' 将变成球心，而其他各点则将对应于以上所述的十一个点。这十五个点就形成 O 对四个球而言的像。

在作为 O 对球 A 而言的像的 A' 点上，我们必须放上一个等于 O 的像的电荷，即 $-\frac{\alpha}{a}$，此处 α 是球 A 的半径，而 a 是它的球心到 O 点的距离。按照同样的办法，我们必须在 B'、C'、D' 放上适当的电荷。

其他十一个点上的电荷可以通过在上节的表示式中把 α、β、γ、δ 换成 α'、β'、γ'、δ' 并把有关每一点的结果乘以到 O 点的距离来求得，此处

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{a^2-\alpha^2},\ \beta' = -\frac{\beta}{b^2-\beta^2},\ r' = \frac{\gamma}{c^2-\gamma^2},\ \delta' = -\frac{\delta}{d^2-\delta^2}.$$

[在第 169、170 节中讨论的各事例可以处理如下：取三个互相正交的座标平面，让我们在一组八个点（$\pm\frac{1}{2\alpha}$，$\pm\frac{1}{2\beta}$，$\pm\frac{1}{2\gamma}$）上放上电荷 ± e，在有 1 个或 3 个负座标的点上放负电荷。于是显然可见，各座标面的势为零。现在让我们相对于任何一点来进行反演，于是我们就得到受到一个带电点作用的三个正交球。如果我们相对于其中一个带电点来进行反演，

我们就得到由相互正交而半径为α、β、γ的三个球形成的自由带电导体事例的解。

如果在上述一组带电点上再增加上他们对原点为心的一个球而言的像，我们就看到，除了三个座标平面以外，球面也形成零势面的一个部分。]

不相交的两个球

171.〕当空间由两个不相交的球面所限定时，这一空间中一个影响点的相继像就形成两个无限系列，其中任一个像都不会位于二球面之间，从而是满足电像法的适用性条件的。

任何两个不相交的球都可以通过取他们的两个公共反演点之一来作为反演点而反演成两个同心球。

因此我们将从两个未绝缘的同心球面的事例开始，他们受到放在他们之间的一个影响点 P 的感应作用。

设第一个球的半径为 b，第二个球的半径为 be^{w}，而影响点到球心的距离为 $r=be^{u}$。

于是所有的相继像就都将和影响点位于同一条半径上。

设图 14 中的 Q_0 是 P 对第一球而言的像，P_1 是 Q_0 对第二球言的像，Q_1 是 P_1 对第一球而言的像，依此类推。于是就有

$$OP_s.OQ_s=b^2,$$
$$OP_s.Oq_{s-1}=b^2e^{2\overline{w}},$$

同样也有

$$OQ_0=be^{-u},$$
$$OP_1=be^{u+2\overline{w}},$$
$$OQ_1=be^{-(u+2)\overline{w}}，\text{等等。}$$

由此即得

$$OP_s=be^{(u+2s\overline{w})},$$
$$OQ_s=be^{-(u+2s\overline{w})}.$$

如果 P 点的电荷用 P 来代表，P_s 点的电荷用 P_s 来代表，则

$$P_s=Pe^{\overline{\varpi}}，Q_s=-Pe^{-(u+s\overline{\varpi})}.$$

其次，设 Q_1'是 P 对第二球而言的像，P_1'是 Q_1'对第一球而言的像，依此类推，则有

$$OQ_1'=be^{2\overline{\varpi}-u}，OP_1'=be^{\upsilon-2\overline{\varpi}},$$
$$OQ_2'=be^{4\overline{\varpi}-u}，OP_2'=be^{u-4\overline{\varpi}},$$
$$OQ_s'=be^{2s\overline{\varpi}-u}，OP_s'=be^{u-2s\overline{\varpi}},$$
$$Q_s'=-Pe^{s\overline{\varpi}-u}，P_s'=Pe^{-s\overline{\varpi}},$$

在这些像中，所有的 P 都是正的而所有的 Q 都是负的；所有

的 P'和 Q 都属于第一个球，而所有的 P 和 Q'都属于第二个球。第一个球内的各像形成两个收敛的系列，其和是

$$-P\frac{e^{\overline{\omega}-u}-1}{e^{\overline{\omega}}-1}.$$

因此这就是第一个球或内球上的电量。第二个球外面的各像形成两个发散的系列，但是由每一系列在球面上引起的面积分却是零。因此，外球上的电量就是

$$P\left(\frac{e^{\overline{\omega}-u}-1}{e^{\overline{\omega}}-1}\right)=-P\frac{e^{\overline{\omega}}-e^{\overline{\omega}-u}}{e^{\overline{\omega}}-1}.$$

如果用 OA、OB 和 OP 把这些表示式的值表示出来，我们就发现

$$A\text{上的电荷}=-P\frac{OA}{OP}\frac{PB}{AB},$$

$$B\text{上的电荷}=-P\frac{OB}{OP}\frac{AP}{AB}.$$

如果我们假设各球的半径变为无限大，我们就得到放在二平行板 A 和 B 之间的一个点的事例。在这一事例中，这些表示式变为

$$A\text{上的电荷}=-P\frac{PB}{AB},$$

$$B\text{上的电荷}=-P\frac{AP}{AB}.$$

172.〕为了从这一事例过渡到不相交的两个任意球的事例，我们首先找出两个公共反演点 O 和 O'，而通过这两个点的一切圆都和两个球相正交。于是，如果我们相对于其中一个点来对体系进行反演，两个球就变成第一个事例中那样的同心球。

如果我们取图 15 中的 O 点作为反演中心，则此点将位于图 14 中两个球面之间的某个地方。

喏，在第 171 节中，我们求解了一个带电点位于具有零势的两个同心球之间的事例。因此，通过对于 O 点来对这一事例进行反演，我们将导出由附近一个带电点在一内一外两个球面导体上感应出来的分布。在第 173 节中即将指明，可以怎样应用如此求得的结果来找出只有相互作用的球形带电导体上的分布。

图 14 中各相继像点位于其上的那个半径 OAPB，在图 15 中变成通过 O 和 O'的圆上的一段弧，而 O'P 和 OP 之比等于 Ce^u，此处 C 是一个数字量。

如果我们令 $\theta=\log\frac{O'P}{OP'}$，$\alpha=\log\frac{O'A}{OA}$，$\beta=\log\frac{O'B}{OB}$，就有 $\beta-\alpha=\omega$，$u+\alpha=\theta$[①].

P 的一切相继像点都将位于圆弧 O'APBO 上。

P 对 A 而言的像是 Q_0，此处

$$\theta(Q_0)=\log\frac{O'Q_0}{OQ_0}=2\alpha-\theta.$$

Q_0 对 B 而言的像是 P_1，此处

$$\theta(P_1)=\log\frac{O'P_1}{OP_1}=\theta+2\overline{\omega}.$$

---

① {既然 O'反演为二球的公共球心 O，我们由第 162 节就有

同理

$$\theta(P_s)=\theta+2s\overline{\omega}，\theta(Q_s)=2\alpha-\theta-2s\overline{\omega}.$$

同样，如果 P 对 B、A、B 等等而言的相继像是 $Q_0{}'$、$P_1{}'$、$Q_1{}'$ 等等，就有

$$\theta(Q_0{}')=2\beta-\theta，\theta(P_1{}')=\theta-2\overline{\omega}，$$

$$\theta(P_s{}')=\theta-2s\overline{\omega}，\theta(Q_s{}')=2\beta-\theta+2s\overline{\omega}，.$$

为了求出任一像 P_s 的电荷，我们注意到，在反演的图形（14）上，它的电荷是

$$P\sqrt{\frac{OP_S}{OP}}.$$

在原图形（15）中，我们必须用 OP_S 来乘这个值。因此，在偶极图中因为 P＝P/OP，所以 P_s 上的电荷是

$$P\sqrt{\frac{OP_S.O'P_S}{OP.O'P}}$$

如果我们令 $\xi=\sqrt{OP.O'P}$，并把 ξ 叫做 P 点的参数，我们就可以写出

$$P_s=\frac{\xi_s}{\xi}P，$$

或者说，任何像的电荷都正比于它的参数。

如果我们利用曲线座标 θ 和 ϕ，使得

$$e^{\theta+\sqrt{-1}\phi}=\frac{x+\sqrt{-1}y-k}{x+\sqrt{-1}y+k}，$$

式中 2k 是距离 OO′，则有

$$x=-\frac{k\sinh\theta}{\cosh\theta-\cos\phi}，\quad y=-\frac{k\sin\phi}{\cosh\theta-\cos\phi}；$$

$$x^2+(y-k\cot\phi)^2=k^2\operatorname{cosec}^2\phi，$$

$$(x+k\coth\phi)+y^2=k^2\operatorname{cosech}^2\theta，$$

$$\cot\phi=\frac{x^2+y^2-k^2}{2ky}，\quad \coth\theta=-\frac{x^2+y^2+k^2}{2kx}；$$

$$\xi=\frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{\cosh\theta-\cos\phi}}.$$

[1]

既然每个像的电荷正比于它的参数 ξ，而且是按照它采取 P 的或 Q 的形式而为正或负的，我们就得到[2]

---

[1] {此处 φ 对各像点所在的那段弧上的各点为常数。}

[2] 在这些表示式中，我们必须记得 而 θ 的其他函数是通过和对应的三角函数相同的定义而从这些函数导出的。对这一事例利用偶极座标的方法，是由汤姆孙在 Liouville's Journal for 1847 中给出的。见汤姆孙重印的 Electrical Papers; §§211，212。在正文中，我曾经引用了 Prof. Betti, Nuovo Cimento, vol. xx，中

$$P_s=\frac{P\sqrt{\cosh\theta-\cos\phi}}{\sqrt{\cosh(\theta+2s\overline{\omega})-\cos\phi}},$$

$$Q_s=\frac{P\sqrt{\cosh\theta-\cos\phi}}{\sqrt{\cosh(2\alpha-\theta-2s\overline{\omega})-\cos\phi}},$$

$$P_s{}'=\frac{P\sqrt{\cosh\theta-\cos\phi}}{\sqrt{\cosh(\theta-2s\overline{\omega})-\cos\phi}},$$

$$Q_s{}'=\frac{P\sqrt{\cosh\theta-\cos\phi}}{\sqrt{\cosh(2\beta-\theta+2s\overline{\omega})-\cos\phi}}.$$

现在我们已经得出了两个无限系列的橡的位置和电荷。其次我们就必须通过求出球 A 内具有 Q 和 P＇形式的所有各像之和来定出球 A 上的总电荷。我们可以写出

$$P\sqrt{\cosh\theta-\cos\phi}\Sigma_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(\theta-2s\overline{\omega})-\cos\phi}},$$

$$P-\sqrt{\cosh\theta-\cos\phi}\Sigma_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha-\theta-2s\overline{\omega})-\cos\phi}}.$$

同样，B 上总的感生电荷就是

$$P\sqrt{\cosh\theta-\cos\phi}\Sigma_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(\theta+2s\overline{\omega})-\cos\phi}},$$

$$-P-\sqrt{\cosh\theta-\cos\phi}\Sigma_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sqrt{\cosh(2\beta-\theta+2s\overline{\omega})-\cos\phi}}.$$

173.〕我们将应用这些结果来确定两个球的电容系数和感应系数，二球的半径是 a 和 b，其球心距离是 c。设 A 的势是 1 而 B 的势是 0。

于是，放在球 A 中心上的一个电荷α的各个相继像就将是实际的电分布。所有的像都将位于二球的极点和球心之间的轴线上，而且也可以看到，在第 172 节中所确定的四组像中，只有第三组和第四组存在于这一事例中。

如果我们令

$$k=\frac{\sqrt{a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2}}{2c},$$

就有$\sin a\,\alpha=-\frac{k}{a}$，$\sinh\beta=\frac{k}{b}$.

球 A 中心的 Q 值和ϕ值是

$\theta=2\alpha$，$\phi=0$.

因此，在方程中我们必须把P代成α或$-k\frac{1}{\sinh\alpha}$，把θ代成2α，而把φ代成零，这时要记得 P 本身就形成 A 的电荷的一部分。于是，关于 A 的电容系数，我们就得到

对分析法的考察，但是我保留了汤姆孙在 Phil.Mag,1853 中所用的对电像概念的原始考察。

$$q_{\alpha a}=k\Sigma_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sinh(s\varpi-\alpha)},$$

关于 A 对 B 或 B 对 A 的感应系数，就有

$$q_{ab}=k\Sigma_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sinh s\varpi}.$$

按照同样的方式，我们可以假设 B 的势是 1 而 A 的势是 0，这样就可以定出 q_{bb}。按照现在的符号，我们将得到

$$q_{bb}=k\Sigma_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sinh(\beta+s\varpi)}.$$

为了按二球的半径 a 和 b 以及他们的球心距离 c 来计算这些系数，我们注意到，如果

$$K=\sqrt{a^4+b^4-c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2},$$

就可以写出

$$\sinh\alpha=-\frac{K}{2ac},\ \sinh\beta=\frac{K}{2bc},\ \sinh\overline{\varpi}=\frac{K}{2ab}$$

$$\cosh\alpha=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},\ \cos\beta=\frac{c^2+b^2-a^2}{2cb},\ \cosh\overline{\varpi}=\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab};$$

而且我们可以利用

$$\sinh(\alpha+\beta)=\sinh\alpha\cosh\beta+\cosh\alpha\sinh\beta,$$

$$\cosh(\alpha+\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta+\sinh\alpha\sinh\beta.$$

利用这种手续或利用在 W.汤姆孙爵士的论文中论述了的那种相继电像的直接计算，我们就得到

$$q_{aa}=a+\frac{a^2b}{c^2-b^2}+\frac{a^3b^2}{(c^2-b^2+ac)(c^2-b^2-a_c)}+\cdots$$

$$q_{ab}=-\frac{ab}{c}-\frac{a^2b^2}{c(c^2-a^2-b^2)}-$$

$$\frac{a^3b^3}{c(c^2-a^2-b^2+ab)(c^2-a^2-b^2-ab)}-\cdots$$

$$q_{bb}=b+\frac{ab^2}{c^2-a^2}+\frac{a^2b^3}{(c^2-a^2+bc)(c^2-a^2-bc)}+\cdots$$

174.〕于是我们就有下列的方程来确定当分别充电到势为 V_a 和 V_b 时两个球上的电荷 E_a 和 E_b，

$$E_a=V_aq_{aa}+V_bq_{ab}.$$
$$E_b=V_aq_{ab}+V_bq_{bb}.$$

如果我们令

$$q_{aa}q_{bb}-q_{ab}{}^2=D=\frac{1}{D'},\ p_{aa}=q_{bb}D',\ p_{ab}=-q_{ab}D',\ p_{bb}=q_{aa}D'$$

从而 $p_{aa}p_{bb}-pab^2=D'$；

则利用电荷来确定势的方程是

$$V_a=p_{aa}E_a+p_{ab}E_b,$$

$$V_b = p_{ab}E_a + p_{bb}E_b,$$

式中 p_{aa}、p_{ab} 和 p_{bb} 是电势系数。

由第 85 节可知，体系的总能量是

$$Q = \frac{1}{2}(E_a V_a + E_b V_b)$$

$$= \frac{1}{2}(V_a^2 q_{aa} + 2V_a V_b q_{ab} + V_b^2 q_{bb})$$

$$= \frac{1}{2}(E^{2a} p_{aa} + 2E_a E_b p_{ab} + E_b^2 p_{bb})。$$

因此，由第 92、93 节可知，二球之间的推斥力是

$$F = \frac{1}{2}\{V_a^2 \frac{dq_{aa}}{dc} + 2V_a V_b \frac{dq_{ab}}{dc} + V_b^2 \frac{dq_{bb}}{dc}\}$$

$$= -\frac{1}{2}\{E_a^2 \frac{dp_{aa}}{dc} + 2E_a E_b \frac{dp_{ab}}{dc} + E_b^2 \frac{dp_{bb}}{dc}\},$$

式中 c 是球心之间的距离。

在推斥力的这两个表示式中，第一个即利用二球的势及其电容系数和感应系数之变化率来表示力的表示式最便于计算。因此我们必须对 c 微分各个 q，这些量是表示成 k、α、β 和 ω 的函数的，而且在微分时应该假设 a 和 b 为常量。我们由方程

$$k = -a\sinh a = b\sinh\beta = -c\frac{\sinh\alpha\sinh\beta}{\sinh\varpi},$$

$$\frac{dk}{dc} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\varpi},$$

得到

$$\frac{da}{dc} = \frac{\sinh\alpha\cosh\beta}{k\sinh\varpi},$$

$$\frac{d\beta}{dc} = \frac{\cosh\alpha\sinh\beta}{k\sinh\varpi},$$

$$\frac{d\varpi}{dc} = \frac{1}{k};$$

由此就有

$$\frac{dq_{aa}}{dc} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\varpi}\frac{q_{aa}}{k} - \Sigma_{s=0}^{s=\infty}\frac{(sc + b\cosh\beta)\cosh(s\varpi - \alpha)}{c(\sinh(s\varpi - \alpha))^2},$$

$$\frac{dq_{ab}}{dc} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\varpi}\frac{q_{ab}}{k} + \Sigma_{s=0}^{s=\infty}\frac{s\cosh s\varpi}{(\sinh s\varpi)^2}$$

$$\frac{dq_{bb}}{dc} = \frac{\cosh\alpha\cosh\bar{\beta}}{\sinh\varpi}\frac{q_{bb}}{k} - \Sigma_{s=0}^{s=\infty}\frac{(sc + \alpha\cosh\alpha)\cosh(\beta + s\varpi)}{c(\sinh(\beta + s\varpi))^2}.$$

威廉·汤姆孙爵士曾经计算了半径相同而距离小于各球之直径的两个球之间的力，对于更大的距离来说，是不必用到多于两个或三个的相继电像的。

各个 q 对 c 的微分系数的级数表示式，很容易通过直接的微分计算来求得

$$\frac{dq_{aa}}{dc}=-\frac{2a^2bc}{(c^2-b^2)^2}-\frac{2a^3b^2c(2c^2-ab^2-a^2)}{(c^2-b^2+ac)(c^2-b^2-ac)^2}-\cdots,$$

$$\frac{dqab}{dc}=\frac{ab}{c^2}+\frac{a^2b^2(3c^2-a^2-b^2)}{c^2(c^2-a^2-b^2)^2}$$
$$+\frac{a^3b^3\{(5c^2-a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)-a^2b^2\}}{c^2(c^2-a^2-b^2+ab)^2(c^2-a^2-b^2-ab)^2}-\cdots,$$

$$\frac{dq_{bb}}{dc}=-\frac{2ab^2c}{(c^2-a^2)^2}-\frac{2a^2b^3c(2c^2-2a-b^2)}{(c^2-a^2+bc)^2(c^2-a^2-bc)^2}-\cdots.$$

两个相互接触的球上的电分布

175.〕如果我们假设处于单位势的两个球是没受任何点的影响的，那么，如果相对于接触点来对体系进行反演，我们就将得到离反演点为$\frac{1}{2a}$和$\frac{1}{2b}$）并在该点的一个单位正电荷的作用下带了电的两个平面。

这时将有一系列正像，每个都等于1，到原点的距离是$s(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$，此处 s 可取从－∞到＋∞的任意整数值。

也将存在一系列负像，每一个都等于－1，沿 a 的方向计算的到原点的距离是$\frac{1}{a}+s(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$。

当这一体系被反演回去而成为互相接触的两个球时，对应于各个正像我们将有一系列负像，他们到接触点的距离被表示成$\frac{1}{s(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$，式中s对球 A 为正数而对球 B 为负数。当各球的势为 1 时，每一个像的电荷在数值上等于它到接触点的距离，而且永远是负的。

也将有一系列正像和两个平面的负像相对应，沿着向 a 球的球心的方向来量度，各正像到接触点的距离可以写成$\frac{1}{\frac{1}{a}+s(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}$。

当 s 为零或正整数时，像位于球 A 内。

当 s 为负整数时，像位于球 B 内。

每一个像的电荷在数值上等于它到原点的距离，而且永远是正的。

因此，球 A 的总电荷就是

$$E_a=\Sigma_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\frac{1}{a}+s(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}-\frac{ab}{a+b}\Sigma_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{s}.$$

这些级数的每一个都是无限大，但是如果我们把他们合并成

$$E_a=\Sigma_{s=1}^{s=\infty}\frac{a^2b}{s(a+b)\{s(a+b)-a\}}$$

的形式，级数就会变成收敛的。

用同样办法，我们得到球 B 的电荷

$$E_b=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{ab}{s(a+b)-b}-\frac{ab}{a+b}\sum_{s=-1}^{s=\infty}\frac{1}{s}$$

$$=\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{ab^2}{s(a+b)\{s(a+b)-b}$$

E_a 的表示式显然等于

$$\frac{ab}{a++b}\int_0^1\frac{\theta^{\frac{b}{a+b}-1}-1}{1-\theta}d\theta,$$

这一事例中的结果就是在这种形式下由泊松给出的。也可以证明(Legendre,TraitédesFonctionsElliptiques,ii.438)上述 E_a 的级数等于

$$a-\{\gamma+\Psi(\frac{b}{a+b})\}\frac{ab}{a+b},$$

式中 $\gamma=.57712\cdots$，而 $\Psi(x)=\frac{d}{dx}\log\Gamma(1+X)$.

Ψ的值已由高斯制了表(Werke,Bandiii.pp.161－162)。

如果暂时用 x 代表 b÷(a＋b)，关于电荷 E_a 和 E_b 之差我们就得到

$$-\frac{d}{dx}\log\Gamma(1-x)\times\frac{ab}{a+b},$$

$$=\frac{ab}{a+b}\times\frac{d}{dx}\log\sin\pi x,$$

$$=\frac{\pi ab}{a+b}\cot\frac{\pi b}{a+b}$$

当二球相等时，在单位势下，每一球的电荷就是

$$E_a=a\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{2s(2s-1)}$$

$$=a(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots)$$

$$=a\log_e 2=.69314718a.$$

当球 A 比球 B 小得多时，A 上的电荷就近似地是

$$W_a=\frac{a^2}{b}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^2}$$

或 $E_a=\frac{\pi^2}{6}\frac{a^2}{b}$.

B 上的电荷和 A 被取走时近似地相同，或者说

$$E_b=b.$$

每一个球的平均密度通过用表面积去除电荷来求得。这样我们就得到

$$\sigma_a = \frac{E_a}{4\pi a^2} = \frac{\pi}{14b}$$

$$\sigma_b = \frac{E_b}{4\pi b^2} = \frac{1}{4\pi b},$$

$$\sigma_a = \frac{\pi^2}{6}\sigma_b.$$

因此，如果使一个很小的球和一个很大的球接触到一起，则小球上的平均密度等于大球上的平均密度乘以$\frac{\pi^2}{6}$或1.644936.

反演法对球形碗事例的应用

176.〕W.汤姆孙爵士的电像法的威力的一个最惊人的例示，是由他对以一个小圆为界的一部分球面上的电分布的研究提供出来的。这种研究的结果被报道给了 M.刘维（但未加证明），并于 1847 年在他的《学报》(Journal)上发表了。完备的研究见重印的汤姆孙的《电学论文集》(ElectricalPapers,文 XW)。我不知道有任何别的数学家曾经给出任何曲面之有限部分上的电分布问题的解。

因为我是想论述方法而不是验证计算，我将不再详细介绍几何情况和积分算法，而只请读者们参阅汤姆孙的著作。

椭球上的电分布

177.〕已经用一种众所周知的方法证明[①]，由两个相似的同样取向的同心椭球所限定的一个椭球壳的吸引力是这样的：在壳内任何点上，没有合吸引力。如果我们假设壳的厚度无限地减小而它的密度则增大，我们在最后就得到面密度按从中心到切面的垂直距离而变的观念，而且，既然面密度对椭球内任一点的合吸引力为零，如果电是这样分布在表面上的，它就是处于平衡的。

由此可见，在一个没受外界干扰的椭球上，任一点的面密度都将正比于从中心到该点切面的垂直距离。

圆盘上的电分布

通过令椭球的两个轴相等并令第三个轴趋于零，我们就得到圆盘的事例，并得到当充电到势 V 而不受外来影响时这样一个圆盘的任意点 P 上的面密度的一个表示式。如果σ是圆盘一面的面密度而 KPL 是通 P 点的一个弦，则有

$$a = \frac{V}{2\pi^2\sqrt{KP.PL}}$$

[①] 见 Thomson and Tait's Natural Philosophy,§520，或本书第 150 节。

电反演原理的应用

178.〕取任意一点 Q 作为反演中心，并设 R 是反演球的半径，则圆盘的平面将变成通过 Q 点的一个球面，而圆盘本身则变成球面上以一个圆周为界的一部分。我们将把这一部分曲面叫做碗。

如果 S＇是充电到势 V＇而未受外界影响的圆盘，则其电像 S 将是势为零并在一个放在 Q 点的电量 V＇R 的影响下而带电的一部分球面。

因此我们已经利用反演手续求得了势为零的并受到放在球或平面的延伸部分的一个带电点影响的碗或平面圆盘的电分布问题的一种解。

放在球面之空余部分上的一个带电点的影响

利用已经给出的原理和反演几何学而求得的解形式如下：如果 C 是球形碗 S 的中心或极点，而 a 是从 C 到碗边上任一点的距离，那么，如果有一个电量 q 被放在球面延伸部分的一点 Q 上，而且 S 被保持在零势，则碗的任一点 P 上的密度 σ 将是

$$\sigma=\frac{1}{2\pi^2}\frac{q}{QP^2}\sqrt{\frac{CQ^2-a^2}{a^2-CP^2}},$$

式中 CQ、CP 和 QP 是 C、Q 和 P 各点的连线。

很可注意的是这个表示式不依赖于碗作为其一部分的那个球面的半径。因此它可以不加改动地应用于平面圆盘的事例。

任意多个带电点的影响

现在让我们把球看作分成了两部分，其中我们已经定出其电分布的那一部分，我们将称之为碗，而其余的部分，或球的空余部分，则是要放影响点的地方。

如有任意数目的影响点被放在球的空余部分上，他们在碗的任一点上感应出来的电可以通对每一个影响点所分别感应出来的密度求和来得出。

179.〕设球面的其余部分是均匀带电的，其面密度为 ρ，则碗的任意点上的密度可以通在这样带电的曲面上求普通的积分来得出。

这样我们就将得到一种事例的解；在那种事例中，碗处于零势并在密度为 ρ 的刚性带电的球面其余部分的影响下带了电。

现在，设整个体系被绝缘并放在一个直径为 f 的球内，并设该球均匀而刚性地带了电，其面电荷为 ρ＇。

在这个球内，将不会有合力，从而碗上的电分布就不会改变，但是球内各点的势却将增大一个量 V，此处 V＝2πρ＇f。因此现在碗上每一点的势都将是 V。

现在让我们假设这个球与碗作为一部分的那个球是同心的，而且二球的半径只相差一个无限小的量。

现在我们就有一个事例，即碗保持在势 V，并受到表面密度为 ρ＋ρ＇的刚性带电的球面其余部分的影响。

180.〕我们现在只要假设 ρ＋ρ＇＝0，就得到碗保持在势 V 而未受外

界影响的事例。

如果σ是当碗处于零势并受到带电密度为ρ的球面其余部分的影响时的一个表面上给定点处的密度，则当碗被保持在势V时，我们就必须在碗的外表面上把密度增加一个ρ'，即增加上所假设的外围球上的密度。

这种研究的结果就是，如果 f 是球的直径，a 是作为碗口半径的弦，而 r 是作为从 P 到碗极点之距离的弦，则碗的内表面上的面密度是

$$\sigma=\frac{V}{2\pi^2 f}\{\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}}-\tan^{-1}\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}}\},$$

而碗的外表面上同一点处的面密度是

$$\sigma+\frac{V}{2\pi f}.$$

在这种结果的计算中，没有用到比在球面的一个部分上求普通积分更深奥的任何运算。为了补全关于球形碗的带电的理论，我们只需要关于球面的反演的几何学。

181.〕设要找出由放在并不位于球面延伸部分的一点 Q 上的一个电量 q 在未绝缘碗的任一点上感应出来的面密度。

相对于 Q 点来对碗进行反演，设反演半径为 R。碗 S 将反演为它的像 S'，而点 P 将以 P'为它的像。我们现在必须确定 P'点上的密度σ'，这时碗 S'保持在势 V'，使得 q＝V'R，而且不受任何外力的影响。

原碗的一点 P 上的密度σ是

$$\sigma=-\frac{\sigma' R^3}{QP^3},$$

这个碗是保持在零势并受到放在 Q 点的一个电量 q 的影响的。

这一手续的结果如下：

设图 16 代表通过球心 O、碗的极点 C 和影响点 Q 的一个截面。D 是一个点,在反演图形中和碗沿的空余极点相对应 这个点可以通过下述作图来找出。

通过 Q 点画弦 EQE'和 FQF'，于是，如果我们假设反演球的半

径是一条弦由 Q 点分成的两个线段的比例中项，则 E'F'将是 EF 的像。平分弧 F'CE'于 D'，使得 F'D'＝D'E'，并作 D'QD 交球面于 D，则 D 就是所求的点。另外，通过球心 O 和 Q 作 HOQH'交球面于 H 和 H'。于是，如果 P 是碗上的任一点，则在由完整球面和 Q 点隔开的一侧，由放在 Q 点的电量 q 在 P 点上感应出来的面密度是

$$\sigma=\frac{q}{2\pi^2}\frac{QH.QH'}{HH'.QP^3}\{\frac{PQ}{DQ}(\frac{CD^2-a^2}{a^2-CP^2})^{\frac{1}{2}}-\tan^{-1}[\frac{PQ}{DQ}(\frac{CD^2-a^2}{a^2-CP^2})^{\frac{1}{2}}]\},$$

式中 a 代表从碗的极点 C 画到碗的边沿的弦[①]。

在和 Q 相近的一侧，面密度是

[①] {关于碗上电分布的进一步研究，见 Ferrer's Quarterly Journal of Math.1882；Gallop.,Quarterly Journal,1886,p.229.在这 的那个球的半径，而 a 是通过碗边而顶角在球心上的圆锥面的半顶角。并参阅 Kruseman On the Potential of the Electric Field in the neighbourhood of a Spherical Bowk, xxiv .38, 1887. Basset, Proc. Lond. Math. Soc.xvi.p.286.}

$$\sigma + \frac{q}{2\pi}\frac{QH.QH'}{HH'.PQ^3}.$$

第十一章附录

{互相影响的两个球上的电分布，曾经吸引了许多数学家的注意。用定积分表示出来的最初的解，是由泊松在两篇最有威力和最引人入胜的论文中给出，见 Mem.de l ’Institut,1811,(1)p.1,(2)p.163.除了在正文中提到的以外，下列各作者以及另一些人都考虑过这个问题。Plana,Mem.diTorino7,p.71,16,p.57; Cayley,Phil.Mag.(4),18,pp.119,193;Kirchhoff,Crelle,59,p.89,Wied. Ann.27,p. 673;Mascart, C.R.98,p.222,1884.

给出二球上的电荷的两个级数,曾由基尔霍夫写成最简炼的形式。他们也很容易推导如下。

设以 A、B 为心的两个球的半径是 a、b，他们的势分别是 U、V，那么，假如二球并不互相影响，则其电效应将和放在二球心上的两个电荷 aU、bV 的效应相同。当球心距离 c 为有限时，这种电分布就不会使球上各点的势为常量；例如 A 上的电荷将改变 B 球的势。如果我们想要使这个势保持不变，我们就必须找出 A 对 B 而言的像并在那儿放一个电荷，然而这个电荷将改变 A 的势，从而我们又必须找出这个像的像，依此类推。于是我们就将得出一个无限系列的像，而这些像可以很方便地分成四组 α、β、γ、δ。前两组是由球心 A 上的电荷引起的，α 包括位于球 A 内的那些像，而 β 包括位于球 B 内的那些像。另外两组 γ 和 δ 是由球心 B 上的电荷引起的；γ 包括位于 B 内的而 δ 包括位于球 A 内的那些像。设 p_n、f_n 代表第一组中第 n 个像的电荷和到 A 的距离，p_n'、f_n' 代表第二组中第 n 个像的电荷和到 B 的距离，我们就有各相继电像之间的关系式如下

$$f_n' = \frac{b^2}{c-f_n}，\ p_n' = -\frac{p_n f_n'}{b}，$$

$$f_{n+1} = \frac{a^2}{c-f_n'}，\ p_{n+1} = -\frac{p_n' f_{n+1}}{a}.$$

由各式消去 f_n' 和 p_n'，我们就得到

$$p_{n+1} = \frac{p_n(cf_{n+1}-a^2)}{ab}， \quad (1)$$

但是 $$f_{n+1} = \frac{a^2}{c-\dfrac{b^2}{c-f_n}}，\text{从而} cf_{n+1}-a^2 = \frac{a^2b^2}{e^2-cf_n-b^2}，$$

$$p_{n+1} = p_n\frac{ab}{c^2-cf_n-b^2}，$$

或者写成 $$\frac{p_n}{p_{n+1}} = \frac{c^2-cf_n-b^2}{ab}；$$

但是由（1）可知 $$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{cf_n-a^2}{ab}，$$

从而就有 $$\frac{p_n}{p_{n+1}}+\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{c^2-b^2-a^2}{ab}，$$

或者，如果令$p_n=\frac{1}{P_n}$，$p_{n-1}=\frac{1}{P_{n-1}}$，$p_{n+1}=\frac{1}{P_{n+1}}$，我们就得到

$$P_{n+1}+P_{n-1}=\frac{c^2-b^2-a^2}{ab}P_n$$

我们由各方程的对称性就能看出，如果令$p_n{'}=\frac{1}{P_n'}$，就将得到关于$P_n{'}$或P_n的同样的递推公式。

由递推公式可见

$$P_n=Aa^n+\frac{B}{a^n}；$$

式中 a 和 1/a 是方程

$$x^2-x\frac{(c^2-a^2-b^2)}{ab}+1=0$$

的根。我们将假设 a 是小于 1 的那个根，于是就有

$$p_n=\frac{a^n}{Aa^{2n}+B},$$

而由这一系列像在球上引起的电荷就是

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{a^n}{Aa^{2n}+B}$$

为了确定 A 和 B，我们有方程[①]

$$P_0=\frac{1}{U_n}=A+B,$$

$$P_1=\frac{c^2-b^2}{Ua^2b}=Aa+\frac{B}{a}；(\text{第}164\text{节})$$

由此即得

$$\frac{A}{B}=-\frac{(a+ba)^2}{c^2}=-\xi^2,$$

$$p_n=aU\{1-\xi^2\}\frac{a^n}{1-\xi^2a^{2n}},$$

$$\Sigma p_n=aU(1-\xi^2)\{\frac{1}{1-\xi^2}+\frac{a}{1-\xi^2a^2}+\frac{a^2}{1-\xi^2a^4}+\cdots\}；$$

$$p_n{'}=\frac{a^n}{A'a^{2n}+B'},$$

$$p_0{'}=-\frac{abU}{c}=\frac{1}{A'+B'},$$

$$p_1{'}=-\frac{a^2b^2U}{c(c^2-(a^2+b^2))}=\frac{a}{A'a^2+B'}。$$

由此即得

$$A'/B'=-a^2$$

---

① {译注：此处的 A 和 B 是两个系数，而不是前面所设的两个球心。}

以及 $$\Sigma p_n{}' = -\frac{abU}{c}\{1-a^2\}\{\frac{1}{1-a^2}+\frac{a}{1-a^4}+\frac{a^3}{1-a^6}+\cdots\}.$$

因此，如果 E_1 和 E_2 是二球上的电荷，而且如果

$$E_1 = q_{11}U + +q_{12}V,$$
$$E_2 = q_{12}U + q_{22}V;$$

则有

$$q_{11} = a(1-\xi^2)\{\frac{1}{1-\xi^2}+\frac{a}{1-\xi^2a^2}+\frac{a^2}{1-\xi^2a^4}+\cdots\},$$

$$q_{12} = -\frac{ab}{c}(1-a^2)\{\frac{1}{1-a^2}+\frac{a}{1-a^4}+\frac{a^2}{1-a^6}+\cdots\},$$

$$q_{22} = b(1-\eta^2)\{\frac{1}{1-\eta^2}+\frac{a}{1-\eta^2a^2}+\frac{a^2}{1-\eta^2a^4}+\cdots\},$$

式中 $$\eta^2 = \frac{(b+aa^2)}{c^2}$$

这就是由泊松和基尔霍夫给出的那些级数。

既然 $$\frac{\in^p+1}{\in^p-1} = \frac{2}{p}+4\int_0^\infty \frac{\sin pt}{\in^{2\pi t}-1}dt\text{①},$$

$$\frac{1}{1-\in^p} = \frac{1}{2}-\frac{1}{p}-2\int_0^\infty \frac{\sin pt}{\in 2\pi t-1}dt,$$

就有

$$\frac{a^n}{1-\xi^2a^{2n}} = \frac{1}{2}a^n - \frac{1}{2n\log a+2\log\xi} - 2\int_0^\infty \frac{a^n\sin(2n\log a+2\log\xi)}{\in^{2\pi t}-1}dt,$$

$$\sum\frac{a}{1-\xi^2a^{2n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-a} - \sum\frac{a^n}{2n\log a+2\log\xi}$$
$$-2\int_0^\infty\sum\frac{a^n\sin(2n\log a+2\log\xi)t}{\in^{2\pi t}-1}dt.$$

现在 $$\sum\frac{a^n}{2n\log a+2\log\xi} = \int_0^\infty \frac{\in^{2t\log\xi}}{1-a\in^{2t\log a}}dt,$$

而且

$$\Sigma a^n\sin(2n\log a+2\log\xi)t = \frac{\sin(2t\log\xi)-a\sin(2t\log\xi/a)}{1-2a\cos(2t\log a)+a^2};$$

从而就得到

$$q_{11} = a(1-\xi^2)\{\frac{1}{2}\frac{1}{1-a} - \int_0^\infty \frac{\in^{2t\log\xi}}{1-a\in^{2t\log a}}dt$$
$$-2\int_0^\infty \frac{\sin(2t\log\xi)-a\sin(2t\log\xi/a)}{(\in^{2\pi t}-1)(1-2a\cos(2t\log a)+a^2)}\}dt,$$

这就是关于这些表示式的泊松积分。}

① {De Morgan,Diff.and Int.Cal.p.672.}

第十二章　二维空间中的共轭函数理论

182.〕电平衡问题已经解出的那些独立的事例是为数很少的。球谐函数法曾被应用于球形导体，而电像法和反演法在他们可以应用的事例中是更强有力的。就我所知，二次曲面的事例是当力线并非平面曲线时人们已知其等势面和力线的唯一事例。

但是，在电平衡理论中，以及在电流的传导理论中，却存在一类重要的问题，即我们只要考虑二维空间的那种问题。

例如，如果在所考虑的整个那一部分电场中以及在它以外的一段相当距离之内，一切导体的表面都是由平行于 z 轴的直线的运动所生成的，而且这种情况不再存在的那一部分场离所考虑的一部分场很远，以致远方场的电作用可以忽略不计，则电将沿着每一条母线而均匀分布，从而如果我们考虑由相距为一单位的两个垂直于 z 轴的平面所限定的一部分场，势和电分布就将只是 x 和 y 的函数。

如果 $\rho\,dxdy$ 代表一个体积元中的电量，该体积元的底是 dxdy 而其高为 1，而 σds 代表一个面积元上的电荷，该面积元的底是线段元 ds 而其高为 1，则泊松方程可以写成

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+4\pi\rho=0.$$

当不存在自由电荷时，此式就简化成拉普拉斯方程

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=0.$$

普遍的电平衡问题可以叙述如下：

给定一个由闭合曲线 C_1、C_2 等等限定的二维连续空间，试求一个函数 V 的形式，使它在这些边界线上的值分别为 V_1、V_2 等等，且对每一边界线来说为常量，而在空间中，V 则可以是有限的、连续的和单值的，而且是可以满足拉普拉斯方程的。

即使是这个问题，我也不知道有人给出过任何普遍的解，但是在第 190 节中给出的一种变换法却对这一事例是适用的，而且是比适用于三维问题的任何已知方法都更加有力的。

这种变换法依赖于二变数共轭函数的性质。

共轭函数的定义

183.〕两个量 α 和 β 称为 x 和 y 的共轭函数，如果 $\alpha+\sqrt{-1}\beta$ 是 $x+\sqrt{-1}y$ 的函数。

由这一定义可以推出

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{d\beta}{dy} \text{ 和 } \frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\beta}{dx}=0\text{；}\quad(1)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2}+\frac{d^2\alpha}{dy^2}=0,\quad \frac{d^2\beta}{dx^2}+\frac{d^2\beta}{dy^2}=0.\quad(2)$$

由此可见，两个函数都满足拉普拉斯方程，另外还有

$$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}=\left.\overline{\frac{d\alpha}{dx}}\right|^2+\left.\overline{\frac{d\alpha}{dx}}\right|^2=\left.\overline{\frac{d\beta}{dx}}\right|^2+\left.\overline{\frac{d\beta}{dy}}\right|^2=R^2. \quad (3)$$

如果 x 和 y 是直角座标，而且 ds_1 是曲线 β＝常数在曲线(α)和(α＋dα)之间的段落，而 ds_2 是 α 在(β)和(β＋dβ)之间的段落，则有

$$-\frac{ds_1}{d\alpha}=\frac{ds_2}{d\beta}=\frac{1}{R}, \quad (4)$$

而各曲线是互相正交的。

如果我们假设势 $V=V_0+k\alpha$，或中 k 是某一常量，则 V 将满足拉普拉斯方程，而各曲线(α)就将是一些等势线。各曲线(β)将是一些力线，而在 xy 平面上的投影是曲线 AB 的一段单位长度的柱面上的面积分就将是 $k(\beta_B-\beta_A)$，此处 β_A 和 β_B 是 β 在曲线二端点上的值。

如果在平面上画出一系列曲线来和按算术级数变化的 α 值相对应，并画出另一系列曲线来和具有相同公共差值的 β 值相对应，则这两组曲线将到处正交；而且，如果公共差值足够小，平面被分成的面积元最终就将是一些小方块，他们的边在场的不同部分将有不同的方向和大小，即反比于 R。

如果两条或更多条等势线(α)是在他们之间围出一个连续空间的闭合曲线，我们就可以把这些曲线看成其势分别为 $V_0+k\alpha_1$、$V_0+k\alpha_2$ 等等的一些导体的表面。其中任一表面上在力线(β_1)和(β_2)之间的电量，

将是 $\frac{k}{4\pi}(\beta_2-\beta_1)$，

因此，两个导体之间的等势线的数目，就指示他们之间的势差，而从一个导体出发的力线的数目，就将指示导体上的电量。

其次我们就必须叙述几条有关共轭函数的最重要的定理，而在证明这些定理时我们或是利用包含着微分系数的方程组(1),或是利用涉及虚数符号的原始定义。

184.〕定理一　如果 x′和 y′是对 x 和 y 而言的共轭函数，而 x″和 y″也是对 x 和 y 而言的共轭函数，则 x′＋x″和 y′＋y″也将是对 x 和 y 而言的共轭函数。

因为，$\frac{dx'}{dx}=\frac{dy'}{dy}$，而 $\frac{dx''}{dx}=\frac{dy''}{dy}$；

故有 $$\frac{d(x'+x'')}{dx}=\frac{d(y'+y'')}{dy}.$$

又因 $\frac{dx'}{dy}=-\frac{dy'}{dx}$，和 $\frac{dx''}{dy}=-\frac{dy''}{dx}$；

故有 $$\frac{dd(x'+x'')}{dy}=-\frac{d(y'++y'')}{dx};$$

或者说 x′＋x″和 y′＋y″而言的共轭函数。

作为二给定函数之和的一个函数的图解表示法

设 x 和 y 的一个函数(α)在 xy 平面上用一系列曲线表示了出来,其中

每一条曲线对应于一个α值，而各条曲线所对应的值有一个公共差值δ。

设x和y的任一另外的函数(β)按同样的办法用一系列曲线表示了出来，各曲线对应于一系列和各α值有着同样公共差值的β值。

于是，为了用同样方式把函数(α＋β)表示出来，我们必须画一系列曲线通过(α)曲线和(β)曲线的交点,从(α)和(β)的交点到(α＋δ)(β－δ)的交点，然后到(α＋2δ)和(β－2δ)的交点，余类推。在其中每一个交点上,函数将有相同的值,即(α＋β)。下一条曲线必须画得通过(α)和(β＋δ)的交点、(α＋β)和(β)的交点、(α＋2δ)和(β－δ)的交点，等等。属于这条曲线的函数值将是(α＋β＋δ)。

按照这种办法，当(α)的曲线系列和(β)的曲线系列已经画出时，(α＋β)的系列就可以被画出。这三组曲线可以分别画在透明的纸上，而当把第一组和第二组适当地重叠起来时，第三组曲线就可以画出。

用这种相加的办法来对共轭函数进行组合，我们就能毫不困难地画出许多有趣事例的图形，如果我们知道怎样画他们所由组成的更简单事例的图形的话。然而我们却有一种更加有力得多的变换解的方法，这依赖于下述的定理。

185.〕定理二　如果x″和y″是对变数x′和y′而言的共轭函数，而x′和y′是对x和y而言的共轭函数，则x″和y″将是对x和y而言的共轭函数。

因为
$$\frac{dx''}{dx}=\frac{dx''}{dx'}\frac{dx'}{dx}+\frac{dx''}{dy'}\frac{dy'}{dx},$$
$$=\frac{dy''}{dy'}\frac{dy'}{dy}+\frac{dy''}{dx'}\frac{dy'}{dy},$$
$$=\frac{dy''}{dy};$$

而且
$$\frac{dx''}{dy}=\frac{dx''}{dx'}\frac{dx'}{dy}+\frac{dx''}{dy'}\frac{dy'}{dy},$$
$$=-\frac{dy''}{dy'}\frac{dy'}{dx}-\frac{dy''}{dx'}\frac{dx'}{dx},$$
$$=-\frac{dy''}{dy};$$

而这就是x″和y″应为x和y的共轭函数的条件。

这一点也可以根据共轭函数的原始定义来证明。因为$x''+\sqrt{-1}y''$是$x'+\sqrt{-1}y'$的函数，而$x'+\sqrt{-1}y'$是$x+\sqrt{-1}y$的函数。由此就知道$x''+\sqrt{-1}y''$是$x+\sqrt{-1}y$的函数。

同样我们也可以证明，如果x′和y′是x和y的共轭函数，则x和y是x′和y′的共轭函数。

这一定理可以图解地诠释如下：

设把x′和y′看成直角座标，并设在纸上画出了按算术级数取值的x″和y″的曲线。这样就有两组曲线把纸面分成小的方块。设纸上还有一些等距的水平线和竖直线，上面标有对应的x′值和y′值。

其次，设用另一张纸，在上面画出x和y作为直角座标，并画出x′

和 y′的两组曲线，每一条曲线上都标有对应的 x′值或 y′值。这一个曲线座标系将和第一张纸上的直角座标系 x′、y′一点一点地互相对应。

因此，如果我们在第一张纸上的 x″曲线上取任意数目的点，并注意这些点上的 x′值和 y′值，然后在第二张纸上标出对应的点，我们就将找到变换后的 x″曲线上的若干个点。如果我们在第一张纸上对 x″的和 y″的曲线全都这么作，我们就将在第二张纸上得出形式不同的 x″曲线和 y″曲线，这些曲线具有相同的把纸面分成小方块的性质。

186.〕定理三　如果 V 是 x′和 y′的任一函数，而 x′和 y′是 x 和 y 的共轭函数，则

$$\iint\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\right)dxdy=\iint\left(\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}\right)dx'dy',$$

式中两端的积分限相同。

因为，

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{dx'}\frac{dx'}{dx}+\frac{dV}{dy'}\frac{dy'}{dx},$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{d^2V}{dx'^2}\left(\frac{dx'}{dx}\right)^2+2\frac{d^2V}{dx'dy'}\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dx}+\frac{d^2V}{dy'^2}\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2$$
$$+\frac{dV}{dx'}\frac{d^2x'}{dx^2}+\frac{dV}{dy'}\frac{d^2y'}{dx^2};$$

而且

$$\frac{d^2V}{dy^2}=\frac{d^2V}{dx'^2}\left(\frac{dx'}{dy}\right)^2+2\frac{d^2V}{dx'dy'}\frac{dx'}{dy}\frac{dy'}{dy}+\frac{d^2V}{dy'^2}\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2$$
$$+\frac{dV}{dx'}\frac{d^2x'}{dy^2}+\frac{dV}{dy'}\frac{d^2y'}{dy^2}.$$

把最后二式相加并记得共轭函数的定义(1)，我们就得到

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=\frac{d^2V}{dx'^2}\left\{\left(\frac{dx'}{dx}\right)^3+\left(\frac{dx'}{dy}\right)^2\right\}+\frac{d^2V}{dy'^2}\left\{\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dy}\right)^2\right\},$$
$$\left(\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}\right)\left(\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dy}-\frac{dx'}{dy}\frac{dy'}{dx}\right).$$

由此就有

$$\iint\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\right)dxdy=\iint\left(\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}\right)\left(\frac{dx'}{dx}\frac{dy'}{dy}-\frac{dx'}{dy}\frac{dy'}{dx}\right)dxdy,$$
$$=\iint\left(\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}\right)dx'dy'.$$

如果 V 是一个势，则由泊松方程得到

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+4\pi\rho=0,$$

从而我们可以把结果写成

$$\iint\rho\, dxdy=\iint\rho'\, dx'dy',$$

或者说，如果一个体系的座标是另一体系的座标的共轭函数，则二体系的对应部分上的电量是相同的。

关于共轭函数的其他定理

187.〕定理四　如果 x_1 和 y_1，以及 x_2y_2 是 x 和 y 的共轭函数，并有 $X=x_1x_2-y_1y_2$，和 $Y=x_1y_2+x_2y_1$，
则 X 和 Y 将是 x 和 y 的共轭函数。
因为

$$X+\sqrt{-1}Y=(x_1+\sqrt{-1}y_1)(x_2+\sqrt{-1}y_2).$$

定理五　如果φ是方程

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}+\frac{d^2\phi}{dy^2}=0,$$

的一个解，并有

$$2R=\log\left(\left|\overline{\frac{d\phi}{dx}}\right|^2+\left|\overline{\frac{d\phi}{dy}}\right|^2\right)，和\Theta=-\tan^{-1}\frac{\frac{d\phi}{dx}}{\frac{d\phi}{dy}},$$

则 R 和Θ将是 x 和 y 的共轭函数。

因为R和Θ是 $\frac{d\phi}{dy}$ 和 $\frac{d\phi}{dx}$ 的共轭函数，而这些又是x和y的共轭函数。

例一——反演

188.〕作为普遍的变换法的一个例子，让我们采取二维空间中的反演这一事例。

如果 O 是空间中的一个固定点，而 OA 是一个固定方向，而且 $r=OP=ae^{\rho}$ 而 $\theta=AOP$，此外并设 x、y 是 P 对 O 而言的直角坐标，

$$\left.\begin{aligned}&\rho=\log\frac{1}{\alpha}\sqrt{x^2+y^2},\quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x},\\&x=ae^{\rho}\cos\theta,\quad y=ae^{\rho}\sin\theta,\end{aligned}\right\}(5)$$

于是ρ和θ就是 x 和 y 的共轭函数。

如果ρ′=nρ而θ′=nθ，则ρ′和θ′将是ρ和θ的共轭函数。在 n=－1 的事例中，我们有

$$r'=\frac{a^2}{r}，和\theta'=-\theta，\quad(6)$$

这就是普通的反演再加上图形从 OA 开始的 180°转动。

二维空间中的反演

在这一事例中，如果 r 和 r′代表对应点到 O 的距离，e 和 e′代表物体的总电量，S 和 S′代表面积元，V 和 V′代表体积元，σ和σ′代表面密度，ρ和ρ′代表体密度，φ和φ′代表对应的势，则有

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{r'}{r}=\dfrac{S'}{S}=\dfrac{a^2}{r^2}=\dfrac{r'^2}{a^2},\quad \dfrac{V'}{V}=\dfrac{a^4}{r^4}=\dfrac{r'^4}{a^4},\\ \dfrac{e'}{e}=1,\quad \dfrac{\sigma'}{\sigma}=\dfrac{r^2}{a^2}=\dfrac{a^2}{r'^2},\quad \dfrac{\rho'}{\rho}=\dfrac{r}{a^4}=\dfrac{a^4}{r'^4},\\ \text{而按照假说，}\phi'\text{是通过用新的变数来表示旧的}\\ \text{变数而从}\phi\text{得出的，故有}\dfrac{\phi'}{\phi}=1\text{。}\end{array}\right\},\quad (7)$$

例二——二维空间中的电像

图 17

189.〕设 A 是一个处于零势的半径 AQ＝b 的圆的中心，而 E 是一个位于 A 的电荷，则任一点 P 上的势是

$$\phi=2E\log\frac{b}{AP};\ (8)$$

而如果此圆是一个中空导体圆柱的截面，则任意点 Q 上的面密度是 $-\dfrac{E}{2\pi b}$。

相对于一个点 O 来对这一体系进行反演，令

$$AO=mb,\text{和 } a^2=(m^2-1)b^2;$$

则圆反演为它自己，而我们在 A′有一个等于 A 点电荷的电荷，此处

$$AA'=\frac{b}{m}.$$

Q′点的密度是

$$-\frac{E}{2\pi b}\frac{b^2-\overline{AA'}|^2}{A'Q'^2},$$

而圆内任一点 P′上的势是

$$\begin{aligned}\phi'=\phi&=2E((\log b-\log AP),\\ &=2E(\log OP'-\log A'P'-\log m).\ (9)\end{aligned}$$

这和一个势相等价，该势起源于 A′点的一个电荷 E 和 O 点的一个电荷－E，后一电荷是 A′对圆而言的像。因此 O 点上的想像电荷就和 A′点上的电荷相等而反号。

如果 P′点是用它的相对于圆心的极坐标来确定的，而且我们令

$$\rho=\log r-\log b,\text{和 }\rho_0=\log AA'-\log b,$$

就有

$$AP'=be^{\rho},\ AA'=be^{\rho_0},\ AO=be^{-\rho_0};\ (10)$$

而点（ρ，θ）上的势就是

$$\begin{aligned}\phi=&E\log(e^{-2\rho_0}-2e^{-\rho_0}e^{\rho}\cos\theta+e^{2\rho})\\ &-E\log(e^{2\rho_0}-2e^{\rho_0}e^{\rho}\cos\theta+e^{2\rho})+2E_{\rho_0}.\ (11)\end{aligned}$$

这就是由放在点（ρ_0，0）上的一个电荷 E 所引起的势，其条件是当 P＝0 时 φ＝0。

在这一事例中，ρ和θ就是方程(5)中的共轭函数：ρ就是一点的矢径和圆的半径之比的对数，而θ是一个角。

圆心是这一座标系中的唯一奇点，而沿一条闭合曲线的线积分$\int \frac{d\theta}{ds} ds$是零或$2\pi$，全看闭合曲线是不包围或包围圆心而定。

例三——这一事例的诺意曼变换[①]

190.〕现在设α和β是x和y的任意共轭函数，使得(α)曲线是由一个体系引起的等势线而(β)曲线是力线；该体系包括放在原点上的每单位长度上为二分之一单位的电荷，和在离原点有一定距离处按任意方式放置的一个带电体系。

让我们假设，势为α_0的那条曲线是一条闭合曲线，而且除了原点处的二分之一单位的电荷以外带电体系的任何部分都不在曲线之内。

于是这一曲线和原点之间的一切(α)线都将是围绕原点的闭合曲线，而所有的(β)线都将相交于原点并和(α)线相正交。

曲线(α_0)内任一点的座标将取决于该点的α值和β值，而如果该点沿着正方向在其中一条(α)线上运动，则每运动一周β值就将增加2π。

如果现在我们假设曲线(α_0)是一个任意形状的中空导体的内表面，并假设该导体在线密度为E的一条以原点为其投影的直线电荷的影响下保持于零势，我们就可以把外部带电体系排除于考虑之外，而关于曲线(α_0)内任一点的势就有

$$\phi = 2E(\alpha - \alpha_0), \quad (12)$$

而关于曲线α_0上任意和β_1及β_2相对应的二点之间的部分上的电量则有

$$Q = \frac{1}{2\pi} E(\beta_1 - \beta_2). \quad (13)$$

如果利用这种办法或任意别的办法而当电荷放在取为原点的一个给定点上时确定了给定截面上一条曲线上的势分布，我们就可以利用普遍的变换法来过渡到电荷放在任意别的点上的事例。

设电荷所在点的α值和β值是α_1和β_2，则在方程(11)中把ρ代成$\alpha-\alpha_0$，把ρ_0代成$\alpha_1-\alpha_0$（在表面$\alpha=\alpha_0$上二者都等于零），并把θ代成$\beta-\beta'$，我们就得到座标为α和β的任一点上的势

$$\phi = E\log(1 - 2e^{\alpha+\alpha_1-2\alpha_0}\cos(\beta-\beta_1) + e^{2(\alpha+\alpha_1-2\alpha_0)})$$
$$- E\log(1 - 2e^{\alpha-\alpha_1}\cos(\beta-\beta_1) + e^{2(\alpha-\alpha_1)}) - 2E(\alpha_1-\alpha_0). \quad (14)$$

这一势的表示式当$\alpha=\alpha_0$时变为零，而且在曲线α_0内除（α_0，β_0）点以外的任何点上都为有限和连续；在（α_0，β_0）点上，第二项变为无限大，而在该点的邻域中，这一项趋于$-2E\log r'$，此处r'是到该点的距离。

因此我们就得到了一种手段，当位于任一其他点上的电荷的问题的解为已知时，可以导出位于一条闭合曲线内的任一点上的一个电荷的格林问

[①] 见 Crelle's Journal，lix.p.335,1861,并见 Schwarz Crelle,lxxiv.p.218,1872.

题的解。

放在一点（α_1，β_1）上的一个电荷 E 在曲线 α_0 上介于 β 和 $\beta + d\beta$ 二点之间的线段元上感应出来的电荷，按照第 183 节的符号就是

$$-\frac{1}{4\pi}\frac{d\phi}{ds_1}ds_2,$$

式中 ds 是向内测量的，而且在微分以后要令 α 等于 α_0。

由第 183 节的(4)式，此式变为

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d\phi}{d\alpha}d\beta,\ (\alpha=\alpha_0);$$

即
$$-\frac{E}{2\pi}\frac{1-e^{2(\alpha_1-\alpha_0)}}{1-2e^{(\alpha_1-\alpha_0)}\cos(\beta-\beta_1)+e^{2(\alpha_1-\alpha_0)}}d\beta. \quad (15)$$

由这一表示式，当闭合曲线的每一点上的势已经作为 β 的函数而被给出，而在闭合曲线内又不存在电荷时，我们就可以求出闭合曲线内任一点（α_1，β_1）上的势。

因为，由第 86 节可知，由于使闭合曲线上的一段 $d\beta$ 保持在势 V 而在（α_1，β_1）上引起的那一部分势是 nV，此处 n 是由（α_1，β_1）上的一个单位电荷在 $d\beta$ 上感应出来的电荷。因此，如果 V 是在闭合曲线的一点上作为 β 的函数而定义的势，而 ϕ 是闭合曲线之内的点（α_1，β_1）上的势，而且该曲线内又不存在电荷，则有

$$\phi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-e^{2(\alpha_1-\alpha_0)})Vd\beta}{1-2e^{(\alpha_1-\alpha_0)}\cos(\beta-\beta_1)+e^{2(\alpha_1-\alpha_0)}}. \quad (16)$$

例四——两个平面相交而形成的导体的棱线附近的电分布

191.〕在导体有一个无限平面 y＝0，沿 y 的负方向伸向无限远处并带有面密度为 σ_0 的电荷的事例中，我们求得离平面的距离为 y 处的势是

$$V=C-4\pi\sigma_0 y,$$

式中 C 是势在导体本身上的值。

在平面上取一条直线作为极轴并变换到极坐标，我们就得到势的表示式

$$V=C-4\pi\sigma_0 ae^{\sigma}\sin\theta,$$

而在宽为一单位而沿着极轴测量的长为 ae^{σ} 的一个长方形上，电量就是

$$E=\sigma_0 ae^{\sigma}.$$

其次让我们令 $\rho=n\rho'$ 而 $\theta=n\theta'$，则由于 ρ' 和 θ' 是与 ρ 和 θ 共轭的，方程

$$V=C-4\pi\sigma_0 ae^{n\rho'}\sin n\theta'$$

$$E=\sigma_0 ae^{n\rho'}$$

就表示势和电的一种可能的分布。

如果我们把 $ae^{\sigma'}$ 改写成 r，则 r 将是离轴的距离；我们也可以不用 θ' 而用 θ 来代表角度。于是我们就将得到

$$V=C-4\pi\sigma\frac{r^n}{a^{n-1}}\sin\theta,$$

$$E=\sigma_0\frac{r^n}{a^{n-1}}.$$

每当 $n\theta$ 等于 π 或 π 的倍数时，V 就将等于 C。

设棱线是导体的一个凸角，其二平面的夹角是 α，则电介质的角是 $2\pi-\alpha$，因此当 $\theta=2\pi-\alpha$ 时点就是在导体的另一个面上的。因此我们必须令

$$n(2\pi-\alpha)=\pi，或 n=\frac{\pi}{2\pi-\alpha}.$$

于是就有

$$V=C-4\pi\sigma_0\alpha(\frac{r}{\alpha})^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}\sin\frac{\pi\theta}{2\pi-\alpha},$$

$$E=\sigma_0\alpha(\frac{r}{\alpha})^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}.$$

在离棱线任一距离 r 处，面密度是

$$\sigma=\frac{dE}{dr}=\frac{\pi}{2\pi-\alpha}\frac{r}{\alpha})\sigma_0(\frac{r}{\alpha})^{\frac{a-r}{2\pi-\alpha}}.$$

当角为一凸角时，α 小于 π，从而面密度就随离棱线距离 r 的某一负数幂而变，从而在棱线本身上密度就变为无限大，尽管从棱线计算到任何有限距离处的总电荷永远是有限的。

例如，当 $\alpha=0$ 时棱角就是无限尖锐的，像一个数学平面的边沿那样。在这一事例中，密度和离棱线的距离的平方根成反比。

当 $\alpha=\frac{\pi}{3}$ 时，棱角有如一个等边三棱镜的角，而密度则和距离的 $\frac{2}{5}$ 次幂成反比。

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 时，棱角是一个直角，而密度则和距离的立方根成反比。

当 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 时，棱角有如一个正六角柱的角，而密度则和距离的四次方根成反比。

当 $\alpha=\pi$ 时，棱线不存在，而密度则为常量。

当 $\alpha=\frac{4\pi}{3}$ 时，棱角有如六角柱外面的角，而密度则和离棱线的距离的平方根成正比。

当 $\alpha=\frac{3\pi}{2}$ 时，棱角是一个反向直角，而密度正比于离棱线的距离。

当 $\alpha=\frac{5\pi}{2}$ 时，棱角是 60° 的反向角，而密度正比于离棱线距离平方。

事实上，在密度在任一点上变为无限大的一切事例中，都在该点有向电介质中的放电，正如在第 55 节中解释过的那样。

例五——椭圆和双曲线。图十

192.〕我们看到，如果

$$x_1 = e^{\phi}\cos\psi，y_1 = e^{\phi}\sin\psi，(1)$$

则 x_1 和 y_1 将是φ和ψ的共轭函数。

另外，如果 $x_2 = e^{-\phi}\cos\psi，y_2 = -e^{-\phi}\sin\psi，(2)$

则 x_2 和 y_2 将是φ和ψ的共轭函数。由此可知，如果

$2x = x_1 + x_2 = (e^{\phi} + e^{-\phi})\cos\psi，2y = y_1 + y_2 = (e^{\phi} - e^{-\phi})\sin\psi，(3)$

则 x 和 y 也将是φ和ψ的共轭函数。

在这一事例中，φ为常数的各点位于一个椭圆上，椭圆的轴是 $e^{\phi} + e^{-\phi}$和 $e^{\phi} - e^{-\phi}$。

ψ为常数的各点位于双曲线上，其轴为 2cosψ和 2sinψ。在 x 轴上，在 x＝－1 和 x＝＋1 之间，有

$$\phi = 0，\psi = \cos^{-1}x.(4)$$

在 x 轴上，在上述界限外面的两侧，我们有

$$x > 1，\psi = 2n\pi，\phi = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)，$$

$$x < -1，\psi = (2n + +1)\pi，\phi = \log\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right).(5)$$

因此，如果φ是势函数而ψ是流函数，我们就有这样的事例：电在－1 和＋1 二点间的空间中从 x 轴的正侧流向负侧,x 轴上这个界限以外的部分是不允许电通过的。

在这一事例中，既然 y 轴是一条流线，我们可以假设它也是不允许电荷越过的。

我们也可以把各椭圆看成等势面的截线，那些等势面由一个宽度为 2 的无限长的导体片所引起，导体的每单位长度上带有二分之一个单位的电荷。{这里包括导体片的两个表面上带的电荷。}

如果我们令ψ为势函数而φ为流函数，事例就变成这样：在一个无限大的平面上切除了宽度为 2 的一条，剩下的部分一边充电到势π而另一边则保持为零势。

这些事例可以看成在第十章中处理了的二次曲面的特例。各曲线的形式在图十中给出。

例六——图十一

193.〕其次让我们把 x′和 y′看成 x 和 y 的函数，此处

$$x' = b\log\sqrt{x^2 + y^2}，y' = b\tan^{-1}\frac{y}{x}，(6)$$

这时 x′和 y′也将是第 192 节中的φ和ψ的共轭函数。

由相对于这些新座标作出的图十的变换而得到的曲线，在图十一中给出。

如果 x′和 y′是直角座标,则第一个图中的 x 轴的那些性质在第二个图中将属于一系列平行于 x′轴的直线 y′＝bn′π，式中 n′是一个任意整数。

这些线上的正 x′值将和大于 1 的 x 值相对应，而正如我们已经看到的那样，对于这些值有

$$\psi = n\pi,\ \phi = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \log\left(e^{\frac{x^2}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1}\right).(7)$$

同一些线上的负 x′值将和小于 1 的 x 值相对应，而我们已经看到，对于这些值有

$$\phi = 0,\ \psi = \cos^{-1} x = \cos^{-1} e^{\frac{x'}{b}}.\ (8)$$

第一个图中的 y 的轴的那些性质，在第二个图中将属于一系列平行于 x′轴的直线，他们的方程是

$$y' = b\pi\left(n' + \frac{1}{2}\right).(9)$$

沿着这些线，ψ的值在一切正的和负的点上都是$\psi = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$，而且

$$\phi = \log((y + \sqrt{y^2 + 1}) = \log(e^{\frac{x'}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} + 1}).\ (10)$$

[φ和ψ为常数的那些曲线，可按方程

$$x' = \frac{1}{2} b \log \frac{1}{4}(e^{2\phi} + e^{-2\phi} + 2\cos 2\psi),$$

$$y' = b \tan^{-1}\left(\frac{e^{\phi} - e^{-\phi}}{e^{\phi} + e - \phi} \tan\psi\right).$$

直接画出。既然图形按 y′值的区间πb 而重复出现，只要在其中一个区间中画出曲线也就够了。

现在，按照是φ还是ψ随着 y′而变号，将有两种事例。让我们假设φ是这样变号的。这时ψ为常数的任何曲线都将对 x′轴为对称，并在负侧的某点上和该轴正交。如果我们从这个φ＝0 的点开始来逐渐增大φ，曲线就将渐渐弯曲，从起初和 x′轴正交而在大的φ值处终于变得和该轴平行。x′轴的正值部分是曲线组的一个轴，就是说，ψ在那儿为零，而且当$y' = \pm\frac{1}{2}\pi b$时$\psi = \frac{1}{2}\pi$。因此，在0到$\frac{1}{2}\pi$的范围内，ψ有常数值的那些线就形成一组包围着正 x′轴的曲线。

φ有常数值的那些曲线和ψ曲线组相正交，φ值的范围是从＋∞到－∞。对于在 x′轴的上方画出的任一条φ曲线来说，φ值都是正的，在负 x′轴的部分其值为零；而对于在 x′轴的下方画出的任何曲线来说，φ值是负的。

我们已经看到ψ组是对 x′轴为对称的；设 PQR 是任意一条曲线，和该组正交而在直线$y = \pm\frac{1}{2}\pi b$上的端点为P和R，Q点位于x′轴上。这时，曲线 PQR 是对 x′轴为对称的，但是，如果沿 PQ 的φ值是 c，则沿 QR 的φ值将是－c。这种φ值的不连续性，将在第 195 节所要讨论的事例中用一种电分布来加以说明。

如果我们其次假设不是φ而是ψ随 y′而变号，则φ值的范围是从 0 到∝。当φ＝0 时我们有 x′轴的负值方面，而当φ＝∝时我们有无限远处

的一条垂直于 x′轴的线。在这二者之间，沿着和ψ组正交的任一曲线PQR，φ的值在整条曲线上都是常数，并且是正的。

现在，任何的ψ值在它的等值线越过负 x′轴的地方都会经历一次突然的变化，它的符号将在该处改变。这种不连续性的意义将在第 197 节中给出。

我们已经说明其画法的那些线，已经画在图十一中，如果我们只看那张图的三分之二，而把最上部的三分之一去掉的话。]

194.〕如果我们把φ看成势函数而把ψ看成流函数，我们就可以认为事例是这样的：一个宽度为πb 的无限长的金属片，有一个不导电的开口从原点向正方向无限延伸，从而把长片的正向部分分成两个分离的通道。我们可以假设这个开口是金属片上的一条狭缝。

如果让一个电流沿着一个通道流走并沿着另一个通道返回，电流的出入点都在原点的正向一方的无限远处，则势和电流的分布将分别由函数φ和ψ给出。

另一方面，如果我们今ψ为势函数而φ为流函数，则事例将是这样的：一个电流通过一个长片而沿着 y′的普遍方向流动，长片上有若干条平行于 x′的不导电的开口，从 y′轴向负方向延伸到无限远处。

195.〕我们也可以把结果应用于两个重要的静电事例。(1)设把一个平面片状的导体，以一条直线为边而在其他方向则无限延伸，放在 xz 平面上原点的正侧，并设有两个无限大的导电平面和它平行地放着，在两侧各离开一个距离$\frac{1}{2}\pi b$。这时，如果ψ是势函数，则它的值在中间导体上是零，而在两侧导体上则是$\frac{1}{2}\pi$。

让我们考虑中间导体的一个部分上的电量，该部分在 z 方向上延伸到一个距离 1 并从原点延伸到 x′＝a。

这一长条的从x_1'延伸到x_2'的那一部分上的电量是$\frac{1}{4\pi}(\phi_1-\phi_2)$。

因此，从原点到 x′＝a，中间平板的一面上的电量就是

$$E=\frac{1}{4\pi}\log(e^{\frac{q}{b}}+\sqrt{e^{\frac{2a}{b}}-1}).\quad(11)$$

如果 a 比 b 大得多，此量就变成

$$E=\frac{1}{4\pi}\log 2e^{\frac{a}{b}},\quad(12)$$

$$=\frac{a+b\log_e 2}{4\pi b}.$$

由此可见，以一个直棱为界的平面上的电量，大于以它在离边界有一距离的的同一面密度而均匀带电时的电量，而且等于它向实际边界以外延伸一个宽度 $b\log_e 2$ 并具有相同的均匀面密度时的电量。

这种想像的均匀分布在图十一中用虚直线表出。竖直的线代表力线，而水平的线代表等势面，所根据的假说是，在沿各方向延伸到无限远处的两个平面上，密度都是均匀的。

196.〕电容器有时是这样做成的：一块平板放在两块平行平板的正中

间，而那块平板在各个方向上都比中间的一块延伸得远得多。如果中间平板的边界线的曲率半径比平板间的距离大得多，我们就可以把边界线近似地看成直线，并这样来计算电容器的电容：假设中间平板沿着边界线延伸出去了宽度均匀的一条，并假设延伸了的平板上的面宽度和不靠延边界处的面密度相同。

于是，如果 S 是该板的实际面积，L 是它的周长而 B 是二大板之间的距离，我们就有

$$b=\frac{1}{\pi}B,\quad(13)$$

而增加的长条的宽度就是

$$a=\frac{\log_e 2}{\pi}\cdot B,\quad(14)$$

从而延伸面积是

$$S'=S+\frac{\log_e 2}{\pi}BL.\quad(15)$$

中间平板的一面的电容是

$$\frac{1}{2\pi}\frac{S'}{B}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{S}{B}+L\frac{1}{\pi}\log_e 2\right\}.\quad(16)$$

平板厚度的改正

既然中间平板通常有一个和板间距离相比是不可忽略的厚度，我们就可以通过假设中间平板的截面和曲线$\psi=\psi'$相对应，来对这一事例的事实得到一种更好的表示。

在离边沿有一定距离处，平板将具有近似均匀的厚度$\beta=2b\psi'$，但是在靠近边沿处则厚度将是渐变的。

平板的实际边沿的位置，通过令$y'=0$来求得，由此即得

$$x'=b\log_e\cos\psi'.(17)$$

这一边沿上的φ值是零，而在$x'=\alpha$的一点上（α/b很大），它近似地是

$$\frac{a+b\log_e 2}{b}.$$

因此，总起来看，板上的电量就和下述情况下的电量相同：板面积增加了宽度为

$$\frac{B}{\pi}\left(\log_e 2+\log_e\cos\frac{\pi\beta}{2B}\right)$$

$$\text{即}\ \frac{B}{\pi}\log e\left(2\cos\frac{\pi\beta}{2B}\right)\quad(18)$$

的一条，而面密度则假设为到处都和离边沿有一定距离处的面密度相同。

靠近边沿处的面密度

板上任一点处的面密度是

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d\phi}{dx'}=\frac{1}{4\pi b}\frac{e^{\frac{x'}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}}-1}}$$

$$=\frac{1}{4\pi b}(1+\frac{1}{2}e^{-\frac{2x'}{b}}+\frac{3}{8}e^{-\frac{4x'}{b}}+\cdots). \quad (19)$$

当 x′增大时，括号中的量很快地趋于 1，因此，在离边沿的距离等于条宽α的几倍的地方，实际的密度约比标准密度大了标准密度的 $\frac{1}{2^{2n+1}}$ 倍。

同样我们也能计算无限平面上的密度，

$$=\frac{1}{4\pi b}\frac{e^{\frac{x'}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}}+1}}. \quad (20)$$

当 x′＝0 时，密度是标准密度的 $2^{-\frac{1}{2}}$ 倍。

在正方向上 n 倍条宽的地方，密度约比标准密度小了标准密度的 $\frac{1}{2^{2n+1}}$ 倍。

在负方向上 n 倍条宽的地方，密度约为标准密度的 $\frac{1}{2^{n}}$ 倍。

这些结果指示了当把这种方法应用于有限广延的平板或在离边沿不远处有些不规则性的平板时可以指望得到的准确度。在一个无限系列的等距排列的相似平板，而各板的势交替地是＋V 和－V 的事例中，同样的分布也将存在。在这一事例中，我们必须取板间的距离等于 B。

197.〕(2)我们即将考虑的第二个事例，就是一系列无限多个平行于 x′z 而距离为 B＝πb 的平面的事例，各平面都被 y′z 平面所截断，从而他们只向这一平面的负侧延伸过去，

让我们考虑φ等于常数的那些曲线。

当 y′＝nπb 时，也就是在每一平面的延伸部分上，我们有

$$x'=b\log\frac{1}{2}(e^{\phi}+e^{-\phi}), \quad (21)$$

当 $y'=(n+\frac{1}{2})\pi b$ 时，也就是中间位置上，则有

$$x'=b\log\frac{1}{2}(e^{\phi}-e^{-\phi}). \quad (22)$$

因此，当φ很大时，φ为常数的曲线就是一种振动曲线，它离 y′轴的平均距离近似地是

$$a=b(\phi-\log_e 2), \quad (23)$$

而在这条线的两侧，振幅是

$$\frac{1}{2}b\log\frac{e^{\phi}+e^{-\phi}}{e^{\phi}-e^{-\phi}}. \quad (24)$$

当φ很大时，此式变为 $be^{-2\phi}$，从而曲线趋近于一条平行于 y′轴而在正值一侧离该轴一个距离α的直线。

如果我们假设一个平面 x′＝α被保持于恒定的势，而那一系列平行平面被保持于一个不同的势，则由于 $b\phi=\alpha+b\log_e 2$，平面上的感生电的面密度将等于由平行于它本身的一个平面所感应出来的面密度，该平面的势等于那一系列平面的势，但是它的距离却比那些平面的边沿的距离大 $b\log_e 2$。

如果 B 是那一系列平面中二平面间的距离，则 $B=\pi b$，于是增加的距离就是

$$a=B\frac{\log_e 2}{\pi}. \quad (25)$$

198.〕其次让我们考虑包括在两个等势面之间的空间，其中一个等势面包括一列平行波，而另一个对应于大φ值的等势面则可以看成近似的平面。

如果 D 是这些振动从峰点到谷点的深度，则我们求得的对应φ值是

$$\phi=\frac{1}{2}\log\frac{e^{\frac{D}{b}}+1}{e^{\frac{D}{b}}-1}. \quad (26)$$

波峰上的 x′值是

$$b\log\frac{1}{2}\left(e^{\phi}+e^{-\phi}\right). \quad (27)$$

由此可见[①]，如果 A 是从波峰到对面平面的距离，则由平面和波形面组成的体系的电容和两个相距为 A＋α′的平面的电容相同，此处

$$a'=\frac{B}{\pi}\log_e\frac{2}{1+e^{-\pi\frac{D}{B}}}. \quad (28)$$

199.〕如果在一个导体上作出单独一条这种形状的沟槽，而其余部分的表面则是平面，而且另一个导体是位于距离 A 处的一个平面，则一个导体相对于另一导体的电容将减小。这一减量将小于由 n 条并列的这种沟槽所引起的减量的 $\frac{1}{n}$，因为后一事例中导体之间的平均电力将比前一事例中的为小，从而每一沟槽表面上的感应作用都将由于有相邻的沟槽而减小。如果 L 是沟长，B 是沟宽而 D 是沟深，则对面平面的一个面积为 S 的部分的电容将是

$$\frac{S-LB}{4\pi A}+\frac{LB}{4\pi(A+a')}=\frac{S}{4\pi A}-\frac{LB}{4\pi A}\cdot\frac{a'}{A+a'}. \quad (29)$$

如果 A 比 B 或 a′大得多，则由(28)可知改正量变成

$$\frac{L}{4\pi^2}\frac{B^2}{A^2}\log_e\frac{2}{1+e^{-\pi\frac{D}{B}}}, \quad (30)$$

而对于一条无限深的缝来说，令 D＝∞，改正量就是

$$\frac{L}{4\pi^2}\frac{B^2}{A^2}\log_e 2. \quad (31)$$

[①] 设Φ是平面的势，而φ是波形曲面的势。平面上单位面积的电量是 1÷4πb，从而电容近似地等于 1÷4πb（Φ－φ），＝1÷4π（A＋a），于是 A＋a′＝b（Φ－φ）.但是

为了求得一系列平行平面上的面密度，我们必有当$\phi=0$时$\sigma=\frac{1}{4\pi}\frac{d\psi}{dx'}$，我们得到

$$\sigma=\frac{1}{4\pi b}\frac{1}{\sqrt{e^{-2\frac{x'}{b}}-1}}. \quad (32)$$

离系列平板的边沿有一距离A的平板上的平均密度是$\bar{\sigma}=\frac{1}{4\pi b}$，因此，在离其中一板的边沿的距离等于na处，面密度是这一平均密度的$\frac{1}{\sqrt{2^{2n}-1}}$倍。

200.〕其次让我们试图从这些结果推出由第197节中的图绕$y'=-R$的轴线旋转而成的图形{一个平面前面的一系列同轴圆柱}中的电分布。在这一事例中，泊松方程的形式将是

$$\frac{d^2V}{dx'^2}+\frac{d^2V}{dy'^2}+\frac{1}{R+y'}\frac{dV}{dy'}+4\pi\rho=0. \quad (33)$$

让我们假设$V=\phi$，即等于在第193节中给出的那个函数，然后由这一方程来确定ρ的值。我们知道前二项等于零，从而就有

$$\rho=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y'}\frac{d\phi}{dy'}. \quad (34)$$

如果我们假设除了已经研究过的面密度以外空间中还按照刚刚叙述的规律存在着一种电分布，则势的分布将由图十一中的那些曲线来表示。

现在，由这个图可以看出，$\frac{d\phi}{dy'}$除了在边界附近以外通常是很小的，因此新的分布可以用平板边沿附近的某种面电荷的分布来近似地表示。

因此，如果我们在界限$y'=0$和$y'=\frac{\pi}{2}b$之间以及从$x'=-\infty$到$x'=+\infty$计算积分$\iint\rho\,dx'dy'$，我们就将求出由曲率引起的平板一面的总的附加电荷。

既然$\frac{d\phi}{dy'}=-\frac{d\psi}{dx'}$，我们就有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\rho dx' &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y}\frac{d\psi}{dx'}dx'\\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y'}(\psi_{\infty}-\psi_{-\infty})\\ &= \frac{1}{8}\frac{1}{R+y'}(2\frac{y'}{B}-1). \quad (35)\end{aligned}$$

对y'求积分，我们就得到

$$\int_0^{\frac{B}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho dx'dy' = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\frac{2R+B}{B}\log\frac{2R+B}{2R} \quad (36)$$

$$= -\frac{1}{32}\frac{B}{R} + \frac{1}{192}\frac{B^2}{R^2} + \cdots. \quad (37)$$

这就是我们必须假设在其中一个圆柱的单位周长的边沿附近分布在空间中的总电量的一半。既然密度只有在板的边沿附近才是明显的，我们就可以假设所有的电都集中在板的表面上而不会显著地改变它对对面平表面的作用，而且在计算该表面和柱面之间的吸引力时，我们可以假设这种电是属于柱面的。

假如不曾有曲率，则单位长度板的正表面上的表面电荷将是

$$-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{4\pi}\frac{d\phi}{dy'}dx' = \frac{1}{4\pi}(\psi_0 - \psi_{-\infty}) = -\frac{1}{8}.$$

因此，如果我们把前面这一整个的分布加在它上面，这一电荷就必须乘上一个因子（$1+\frac{1}{2}\frac{B}{R}$）才能给出正面的总电荷[①]。

在一个半径为 R 的圆盘放在两个相距为 B 的两个无限大平行平板的正中间的事例中[②]我们得到圆盘的电容为

$$\frac{R^2}{B} + 2\frac{\log_e^2}{\pi}R + \frac{1}{2}B. \quad (38)$$

汤姆孙保护环的理论

201.〕在 W.汤姆孙爵士的某些静电计中，一个大平面被保持于一个势，而在离这个表面的距离为 A 处放了一个半径为 R 的平面圆盘，它被具有半径 R′的并和圆盘同心的一个圆孔的大平板所围绕，这个大平板叫做保护环。圆盘和平板保持在零势。

圆盘和保护环之间的间隔可以看成一条无限深的圆形沟槽，宽度 R′－R 用 B 来代表。

由大盘上的单位势在圆盘上引起的电荷，如果密度均匀就将是$\frac{R^2}{4A}$.

在一条宽度为 B 而长度为 L＝2πR 的无限深的直沟的一边，电荷可以通过从大盘出发而终止在沟一边的力线数目来估计。因此，参照第 197 节

[①] {既然板的负面上存在一个等于正面电荷的电荷，看来单位周长的

[②] [在第 200 节中，当估计总的空间分布时，我们也许可以更正确地 圆盘的事例可以处理如下：让第 195 节中的图绕着一条垂直于板面并离中板边沿为＋P 的直线而转动一周。于是，边沿就将包络一个圆，这就是圆盘的边沿。正如在第 200 节中一样，我们从泊松方程开始，该方程在这一事例中将是 现在我们假设 V＝ψ，即等于第 195 节中的势函数。因此我们必须假设，板间的区域中存在电荷，其体密度是 总量是 现在，如果 R 比板间的距离大得多，则通过检视图十一中的等势线可以看到这一结果大体上和下式相同， 如果我们把圆盘的两面都考虑在内，总的面分布就是 为了求出后一积分，令 于是，如果 R/b 很大，我们就近似地得到

从而板上的电量就是 这一结果比正文中的结果约小 0.28。]

和小注，我们看到电荷将是

$$\frac{1}{2}LB\times\frac{1}{4\pi b},$$

即 $$\frac{1}{4}\frac{RB}{A+a'},$$

因为在这一事例中Φ＝1，φ＝0，从而b＝A＋a′。

但是，既然沟不是直的而是有一个曲率半径R，结果就应该乘上因子$(1+\frac{1}{2}\frac{B}{R})$ 。

因此，圆盘上的总电荷就是

$$\frac{R^2}{4A}+\frac{1}{4}\frac{RB}{A+a'}(1+\frac{B}{2R}) \qquad (39)$$

$$=\frac{R^2+R'^2}{8A}-\frac{R'^2-R^2}{8A}\cdot\frac{a'}{A+a'}. \qquad (40)$$

α′的值不可能大于

$\frac{B\log 2}{\pi}$，＝0.22B，近似地。

如果B和A或R相比是很小的，这一表示式就将给出关于由单位势差在圆盘上引起的电荷的一种足够好的近似。A和R之比可以有任意的值，但是大盘的半径和保护环的半径必须比R大出A的若干倍。

例七——图十二

202.〕在他的关于非连续流体运动的论文中[2]，亥姆霍兹曾经指出了若干公式的应用；在那些公式中，座标被表示成了势及其共轭函数的函数。

其中一个公式可以应用于这一事例：一个有限大小的带电板被放得和一个接地的无限大平面相平行。

既然$x_1=A\phi$和$y_1=A\phi$

以及$x_2=Ae^{\phi}\cos\psi$和$y_2=Ae^{\phi}\sin\psi$，

都是φ和ψ的共轭函数，通过把x_1和x_2相加以及把y_1和y_2相加而得到的函数就也将是共轭的，由此可见，如果

$$x=A\phi+Ae^{\phi}\cos\psi,$$
$$y=A\psi+Ae^{\phi}\sin\psi,$$

则x和y将对φ和ψ为共轭，而φ和ψ将对x和y为共轭。现在设x和y是直角座标，并设kψ是势函数，这时kφ就将和kψ相共轭，k是任意常数。

让我们令ψ＝π，于是就有y＝Aπ，x＝A（φ－e^{ϕ}）。

如果φ从－∞变到0，然后从0变到＋∞，由x从－∞变到－A，然后从－A变到－∞。由此可见，ψ＝π的那个等势面就是在离原点的距离为b＝πA处平行于xz平面并从x＝－∞伸展到x＝－A的一个平面。

页的小注，则圆盘上的电荷将比正文中给出的小B2/16（A＋α′）。}

[2] Monatsberichte der K(nigl.Akad.der Wiesenschaften,zu Berlin,April23,1868,p.215.

让我们考虑这个平面的一部分，从 x＝－（A＋a）伸展到 x＝－A 并从 z＝0 伸展到 z＝c；让我们假设它到 xz 平面的距离是 y＝b＝Aπ，而它的势是 V＝kψ＝kπ。

所考虑的这一部分平面上的电荷，通过确定它的边界上的φ值来求出。

因此我们必须由方程

$$x=-(A+a)=A(\phi-e^{\phi})$$

来确定φ；φ将有一个负值ϕ_1和一个正值ϕ_2，在平面的边沿 x＝－A 上，φ＝0。

由此可见，平面的一面所带的电荷是$-ck\phi_1\div4\pi$，而其另一面上的电荷是$ck\phi_2\div4\pi$。

这两个电荷都是正的，他们的和是

$$\frac{ck(\phi_2-\phi_1)}{4\pi}.$$

如果我们假设α比 A 大得多，就有

$$\phi_1=-\frac{a}{A}-1+e^{-\frac{a}{A}-1+e^{-\frac{a}{A}-1+\cdots}}$$

$$\phi_2=\log\{\frac{a}{A}+1+\log(\frac{a}{A}+1+\cdots)\}.$$

如果略去ϕ_1中的指数项,我们就将发现负表面上的电荷大于当面密度为均匀并等于离边界有一距离处的密度时的电荷，二者之差等于宽度为$A=\frac{b}{\pi}$并具有均匀面密度的一条面积上的电荷。所考虑的这一部分平面的总电容是

$$C=\frac{c}{4\pi^2}(\phi_2-\phi_1).$$

总电荷是 CV，指向方程为 y＝0 而势为ψ＝0 的无限平面的吸引力是

$$-\frac{1}{2}V^2\frac{dc}{db}=V^2\frac{ac}{8\pi^3A^2}(1+\frac{\frac{A}{a}}{1+\frac{A}{a}\log\frac{a}{A}}+e^{-\frac{a}{A}}+\cdots)$$

$$=\frac{V^2c}{8\pi b^2}\{a+\frac{b}{\pi}-\frac{b^2}{\pi^2a}\log\frac{a\pi}{b}+\cdots\}.$$

等势线和力线在图十二中给出。

例八——平行导线栅的理论。图十三

203.〕在许多电学仪器中，常用一个导线栅来保护仪器的某些部分，使之不会由于感应而带电，我们知道，如果一个导体被一个和它本身具有相同的势的金属容器所完全包围，则容器外面的任何带电体都不会在导体表面上感应出任何的电荷。然而，当完全被金属包围起来时，一个导体就不能被看到，因此在某些事例中就要在容器上开一个小口，并用细导线的栅网把它盖住。让我们考察一下这个栅在减弱电感应方面的效应。我们将

假设栅是由在同一平面内等距排列的一系列平行导线构成的，导线的直径比他们之间的距离小得多，而一边的带电体的最近部分和另一边的被保护的导体之间的距离，则颇大于相邻导线之间的距离。

204.〕设一条无限长的直导线在每单位长度上带有电量λ，则离此导线轴线的距离为γ处的势是

$$V=2\lambda \log r'+C.(1)$$

我们可以参照一条轴线来用极座标表示此式，该轴线离导线的距离是1；在这种事例中，我们可以令

$$r'^2=1-2r\cos\theta+r^2,(2)$$

而且，如果我们假设参照轴也带有线密度为λ′的电荷，我们就会得到

$$V=-\lambda \log(1-2r\cos\theta+r^2)-2\lambda' \log r,+C.(3)$$

如果我们现在令

则由共轭函数的理论可知，

$$V=\lambda \log(1-2^{\frac{2\pi}{a}}\cos\frac{2\pi x}{a}+e^{\frac{4\pi y}{a}})-2\lambda' \log e^{\frac{2\pi y}{a}}+C,(5)$$

式中x和y是直角座标,这就将是由一系列无限多条导线所引起的势的值，那些导线在xz平面上平行于z轴，通过x轴上x等于a的倍数的各点，并平行于和y轴相垂直的平面。其中每一条导线都带有线密度为λ的电荷。

含λ′的项表示一种带电情况，即在y方向上引起一个常力$\frac{4\pi\lambda'}{a}$的情况。

当λ′=0 时，等势面和力线的形式在图十三中给出。导线附近的等势面近似地是柱面，因此我们可以认为即使当各导线是直径有限（但比导线间的距离小得多）的圆柱时，解仍然是近似成立的。

离导线较远处的等势面将越来越变得近似于和栅的平面相平行的平面。

如果在方程中令$y=b_1$=一个比a大得多的量，我们就近似地得到

$$V_1=-\frac{4\pi b_1}{a}(\lambda+\lambda')+C.(6)$$

如果其次令$y=-b_2$，而b_2是一个比a大得多的正量，我们就近似地得到

$$V_2=\frac{4\pi b_2}{a}\lambda'+C.(7)$$

如果c是栅上导线的半径，而c比a小得多，我们就可以假设导线本身和在离z轴距离为c的地方和xz平面相交的的等势面重合,而由此求出栅本身的势。因此，为了求出栅的势，我们令x=c而y=0，由此即得

$$V=-2\lambda \log_e 2\sin\frac{\pi c}{a}+C.(8)$$

205〕现在我们已经得到一些表示式，表示着由一个导线栅和两个平面导电表面所构成的体系的电状态，这时导线的直径比他们之间的距离小得多，两个平面位于导线栅的两侧，到栅的距离比导线间的距离大得多。

第一个平面上的面密度σ_1由方程(6)得出，

$$4\pi\sigma_1=\frac{dV_1}{db_1}=-\frac{4\pi}{a}(\lambda+\lambda'),\quad(9)$$

第二个平面上的面密度σ_2由方程(7)得出，

$$4\pi\sigma_2=\frac{dV_2}{db_2}=\frac{4\pi}{a}\lambda'.\quad(10)$$

如果写出

$$a=-\frac{a}{2\pi}\log_e\left(2\sin\frac{\pi c}{a}\right),\quad(11)$$

并由(6)、(7)、(8)、(9)、(10)各式消去c、λ和λ'，我们就得到

$$4\pi\sigma_1\left(b_1+b_2+\frac{b_1b_2}{a}\right)=V_1\left(1+\frac{b_2}{a}\right)-V_2-V\frac{b_2}{a},\quad(12)$$

$$4\pi\sigma_2\left(b_1+b_2+\frac{b_1b_2}{a}\right)=-V_1+V_2\left(1+\frac{b_1}{a}\right)-V\frac{b_1}{a},\quad(13)$$

当导线是无限地细时，a 就变成无限大，从而以它为分母的各项就不复存在，从而事例就变成两个平行平面而中间没放导线栅的情况。

如果栅是和其中一个平面接通的，例如是和第一个平面接通的，则 $V=V_1$，从而σ_1的方程的右端就变成V_1-V_2。由此可见，放上栅时在第一个平面上感应出来的密度σ_1和把栅取走而第二个平面保持相同的势时所将感应出来的密度之比，等于1比$1+\frac{b_1b_2}{a(b_1+b_2)}$.

假如我们曾经假设栅是和第二个表面相接通的，我们也将得到有关栅在减弱第一个表面对第二个表面的电影响方面同样大小的效应。这是显而易见的，因为b_1和b_2按相同的方式出现在表示式中。这也是第 88 节中的定理的一个直接的结果。

一个带电平面隔着导线栅对另一个带电平面发生的感应作用，和把导线栅取走并把二平面间的距离从b_1+b_2增大到

$$b_1+b_2+\frac{b_1b_2}{a}.$$

时的感应作用相同。

如果两个平面保持在零势，而栅被充电到一个给定的势，则栅上的电量和即将在面积相同并放在相同位置的一个平面上感应出来的电量之比，将是

$$b_1b_2:b_1b_2+a(b_1+b_2).$$

这种考察只有当b_1和b_2比 a 大得多而 a 比 c 大得多时才是近似成立的。量 a 是一个可以有任意大小的线度。当 c 无限减小时它就变成无限大。

如果我们假设$c=\frac{a}{2}$，栅上导线之间就没有空隙，从而就将没有感应作用透过它。因此，对于这种事例应有 a＝0。然而公式(11)在这一事例中却给出

$$a=-\frac{a}{2\pi}\log_e 2,\quad=-0.11a,$$

这显然是错误的，因为感应绝不能因有栅而变号。然而，在由柱状导线构

成的栅的事例中，却很容易进行到更高的近似程度。我将只指出这种手续的步骤。

近似方法

206.〕既然导线是柱状的，既然每一根导线上的电分布对平行于 y 的直径来说是对称的，势的正确展式就有下列形式：

$$V = C_0 \log r + \Sigma C_i r^i \cos i\theta，(14)$$

式中 γ 是离其中一条导线之轴线的距离，而 θ 是 γ 和 y 之间的夹角；而且，既然导线是导体，当令 γ 等于半径时 V 就必须是常量，从而每一个 θ 的倍角余弦的系数必须变为零。

为了方便，让我们采用新座标 ξ、η，等等，使得

aξ＝2πx，aη＝2πy，aρ＝2πλ，aβ＝2πb，等等，(15)

并令$F_\beta = \log(e^{\eta+\beta} + e^{-(\eta+\beta)} - 2\cos\xi)$。(16)

于是，如果我们令

$$V = A_0 F_\beta + A_1 \frac{dF_\beta}{d\eta} + A_2 \frac{d^2 F_\beta}{d\eta^2} + \cdots \quad (17)$$

则通过给予各个 A 系数以适当的值，我们就可以表示作为 η 和 cosξ 的函数而除了当 η＋β＝0 和 cosξ＝1 时以外不会变成无限大的任意势。

当 β＝0 时，用 ρ 和 θ 表示出的 F 的展式是 ，

$$F_0 = 2\log\rho + \frac{1}{12}\rho^2\cos 2\theta - \frac{1}{1440}\rho^4\cos 4\theta + \cdots。(18)$$

对于 β 的有限值，F 的展式是

$$F_B = \beta + 2\log(1-e^{-\beta}) + \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\rho\cos\theta - \frac{e^{-\beta}}{(1-e^{-\beta})^2}\rho^2\cos 2\theta + \cdots。(19)$$

在栅和两个导电平面的事例中，设二平面的方程为 $\eta=\beta_1$ 和 $\eta=-\beta_2$，而栅的方程为 β＝0，这时就有栅的两个无限系列的像。第一个系列将包括栅本身和位于两侧带有相等而同号的电荷的无限多个像。这些想像的圆柱的轴，位于方程为

$$\eta = \pm 2n(\beta_1 + \beta_2)，(20)$$

的平面上，n 是一个整数。

第二个系列将包括无限多个像，他们的系数 A_0、A_2、A_4 等和栅本身的同样系数相等而反号，而 A_1、A_3 等等则相等而同号。这些像的轴位于方程为

$$\eta = 2\beta_2 \pm 2m(\beta_1 + \beta_2)，(21)$$

的平面上，n 是一个整数。

这种像的任何一个无限系列所引起的势，将取决于像的数目是奇数或偶数。因此由一个无限系列引起的势是不确定的。但是如果我们给它加上

…只差一个常数，式中 γ、$γ_1$、$γ_2$…是 P 到各导线的距离，就可以得出 F 的展式。我们可以对 F_β 应用相同的方法，因为这对应于使各导线平行于 y 而移动一个距离－b，然而展式却和正文中给出的不相同。}

一个函数 $B\eta+C$，则问题的条件将足以确定电分布。

我们首先可以借助于各系数 A_0、A_1 等等以及 B 和 C 来确定两个导电平面的势 V_1 和 V_2，然后我们必须确定这些平面的任一点上的面密度 σ_1 和 σ_2。σ_1 和 σ_2 的平均值由下式给出：

$$4\pi\sigma_1=\frac{2\pi}{\alpha}(A_0-B)，\ 4\pi\sigma_2=\frac{2\pi}{\alpha}(A_0+B). \quad (22)$$

然后我们必须把由栅本身及一切像所引起的势按 ρ 和 θ 的倍角余弦展开，并在结果上加上

$$B\rho\cos\theta+C.$$

于是，不依赖于 θ 的各项就给出栅的势 V，而令 θ 的每一倍角余弦的系数等于零，就得出各待定系数之间的一个方程。

用这种办法，就可以求出许多方程，适足以消去所有这些系数，而剩下两个方程用以按照 V_1、V_2 和 V 来确定 σ_1 和 σ_2。这两个方程的形式将是：

$$V_1-V=4\pi\sigma_1(b_1+a-\gamma)+4\pi\sigma_2(a+\gamma)，$$
$$V_{21}-V=4\pi\sigma_1(a+\gamma)+4\pi\sigma_2(b_2+a-\gamma). \quad (23)$$

受到栅的保护的一个平面的感生电量，当另一平面保持在一个给定的势差时将和平面不是位于距离 b_1+b_2 处而是位于距离

$$\frac{(a-\gamma)(b_1+b_2)+b_1b_2-4a\gamma}{a+\gamma}$$

处时的感生电荷相同。

a 和 γ 的值近似地如下：

$$a=\frac{a}{2\pi}\{\log\frac{a}{2\pi c}-\frac{5}{3}\cdot\frac{\pi^4c^4}{15a^4+\pi^4c^4}$$
$$+2e^{-4\pi\frac{b_1+b_2}{a}}(1+e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}+e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}+\cdots]+\cdots\}，(24)$$

$$\gamma=\frac{3\pi ac^2}{3a^2+\pi^2c^2}\left(\frac{e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}}{1-e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}}-\frac{e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}}{1-e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}}\right)+\cdots \text{[1]} \quad (25)$$

[1] {在补遗卷中，将论述另一种应用共轭函数的方法；利用那种方法，可以计算有限平面表面等等的电容。}

第十三章　静电仪器

关于静电仪器

我们当前必须考虑的仪器可以分成下列几类：
(1)用来引起带电并增强带电的起电机。
(2)按已知比例增加电量的倍加器。
(3)用来测量电势和电荷的静电计。
(4)用来储存大电荷的集电器{电容器}。

起电机

207.〕在普通的起电机中，一个玻璃板或玻璃圆筒被转动起来，使它和一个皮革表面相摩擦，皮革上散布着一种锌汞齐。玻璃的表面会变得带正电，而皮革表面则变得带负电。当带电的玻璃表面运动着远离皮革的负电时，它就获得一个高的正势。然后它就来到一组尖端附近，那些尖端和起电机上的导体相连。玻璃上的正电在尖端上感应出一种负电，尖端越尖和它们离玻璃越近，感应的负电就越多。

当机器正常工作时，在玻璃和尖端之间将通过空气而放电，玻璃失去它的一部分正电荷，这些电荷传递到尖端上，并由此而传递到起电机上绝了缘的主要导体上，或传递到和它相连的任何其他物体上。于是，正在向皮革接近过去的那一部分玻璃就比同时正在离开皮革的那一部分玻璃带的电要少一些，于是皮革以及和它相连的导体就会变成带负电的了。

正在离开皮革的那种高度带正电的玻璃表面，将比正在靠近皮革的部分地放了电的表面受到皮革上负电的更大吸引力。因此电力就起了反抗用来使机器转动的那个力的作用。因此，转动机器时所作的功就大于普通的摩擦力和其他阻力所消耗的功，而这一超额功就被用来产生一种带电状态，其能量和这一超额功相等价。

克服摩擦力时所作的功立即转变成互相摩擦的物体中的热量。电能可以或是转变成机械能量，或是转变成热。

如果机器并不储存机械能，则所有的能量都将转变为热，而由摩擦而生的热和由电作用而生的热之间的唯一不同就在于，前者是在互相摩擦的表面上产生的，而后者则可以在远处的导体中产生①。

我们已经看到，玻璃表面上的电荷是受到皮革的吸引的。如果这种吸引力足够强，在玻璃和皮革之间而不是在玻璃和集电尖端之间就会出现放电。为了避免这种事，就在皮革上加了一些绸子条儿。他们变成带负电的而附着在玻璃上，并从而减小皮革附近的势。

因此，当玻璃离开皮革时，势就增加得更慢一些，从而在任一点上就有较小吸引力把玻璃上的电荷吸向皮革，因此向皮革直接放电的危险也就

---

① 或许可能，在机械能由摩擦而转变为热的许多事例中，一部分能量可以先转变成电能，然后再作为在摩擦表面附近的小电路中保持电流而耗费的电能被转变成热。参阅 Sir W.Thomson，‘On the Electrodynamic Qualities of Metals.’Phil.Trans，1856.，p.649.

较小。

在某些起电机中，运动部分是用硬橡胶作成而不是用玻璃作成的，而摩擦物则是用羊毛或兽皮作成的。这时摩擦物就会带正电而主要导体则带负电。

伏打的起电盘

208.〕起电盘包括一个贴在金属板上的用树胶或硬橡胶作的板，和一个同样大小的金属板。其中一个板的背面，可以用螺丝装上一个绝缘柄。硬橡胶板上有一个金属针，当橡胶板和金属板相接触时，这个针就把金属板和橡胶板的金属背壳相接通。

通过把它和羊毛或猫皮摩擦，橡胶板上就会带了负电。然后利用绝缘柄把金属板移到橡胶板附近。橡胶板和金属板之间并没有直接的放电，但是金属板的势却通过感应而变成了负的，从而当它来到和金属针相距某一距离处时，就会有一个火花跳过，而如果这时把金属板拿到远处，它就会被发现带有一个正电荷，这个电荷可以移到一个导体上去。橡胶板背后的金属壳被发现带有一个负电荷，和金属板的电荷相等而反号。

在应用这种仪器来给一个电容器或集电器充电时，其中一个板放在一个接了地的导体上，而另一个板首先放在该板上面，然后被拿走并作用在电容器的电板上，然后再放在第一个板上，如此重复进行。如果像胶板是固定的，则电容器将被充以正电。如果金属板是固定的，则电容器被充以负电。

手在分开两个板时所作的功，永远大于当两板靠拢时电力所作的功，因此对电容器充电时的操作就涉及功的耗费。其中一部分功用充了电的电容器的能量来说明，一部分功被用来产生了火花的响声和热，而其余的部分则用来克服了对运动的其他阻力。

关于用机械功来起电的机器

209.〕在普通的摩擦起电机中，克服摩擦而作的功远远大于增大带电所作的功。因此，可以完全用反抗电力所作的机械功来产生带电的任何装置就是具有科学重要性的，即使没有实用价值的话。第一个这一类的起电机，似乎就是尼科耳孙的“转动倍加器”；在 1788 年的《哲学会报》（Philosophical Transactions）上，它被描写成“通过转动一个曲柄来产生两个电状态而不用摩擦或接地的一种仪器”。

210.〕正是利用一个转动倍加器，伏打作到了从电堆的电得到能够影响他的静电计的电。利用相同原理的仪器也由瓦尔莱[①]和 W.汤姆孙爵士独立地发明过。这些仪器主要由一些不同形状的绝了缘的导体所构成，其中有些导体是固定的，而其他导体则是活动的。活动的导体叫做“携带器”，而固定的导体则可以称为“感应器”、“接受器”和“再生器”。感应器和接受器被做得合适，以致携带器在转动到某些地方时会几乎完全地被一个导电体包围起来。由于感应器和接受器不能真正完全地包围携带器而同

[①] Specification of Patent，Jan.27,1860,No.206.

时又不必用一种可动部件的复杂装置就可以允许携带器自由地出入，若没有一对再生器，这种仪器就在理论上是不完善的；这些再生器将把携带器从接受器中出来时所保留着的微小电量储存起来。

然而，我们可以暂时认为携带器当在感应器和接受器之内时是被他们完全包围的，在这种情况下理论就会大为简化。

我们将假设机器包括两个感应器 A 和 C，两个接受器 B 和 D，以及两个携带器 F 和 G。

假设感应器 A 带有正电而其势为 A,并假设携带器 F 位于 A 内并有势 F。于是，如果 Q 是 A 和 F 之间的感应系数（取作正的），则携器上的电量将是 Q(F－A)。

如果携带器当在感应器内时被接了地，则 F＝0，而携带器上的电荷将是－QA，即一个负量。设携带器被移过去，以致它进入了接受器 B 内，并设这时它碰到一个弹簧，从而和 B 相接通。于是，正如在第 32 节中所证明的那样，携带器就将完全放电，并把它的全部负电荷传给接受器 B。

携带器随后就将移入感应器 C 中，我们将假设 C 是带负电的。当位于 C 内时携带器又被接地并从而获得一个正电荷，而它就把这个正电荷带走并把它传给接受器 D，如此类推。

这样，如果感应器的势永远保持不变，接受器 B 和 D 就会一次一次地得到电荷，而携带器每转一周，他们得到的电荷都相同，于是每一周就在接受器中产生一个相等的电量增量。

但是，通过使感应器 A 和接受器相接通，并使感应器 C 和接受器 B 相接通，各感应器的势就将不断地增高，而在每一周中传给接受器的电量也将不断地增大。

例如，设 A 和 D 的势是 U 而 B 和 C 的势是 V，那么，既然当携带器位于 A 内时因接地而有零势，它的电荷就＝－QU。携带器带着这个电荷进入 B 内并把它传给 B。如果 B 和 C 的电容是 B，则他们的势将从 V 变到 V－$\frac{Q}{B}U$。

如果另一个携带器同时把一个电荷－QV 从 C 带到 D，这就会使 A 和 D 的势从 U 变到 $U-\frac{Q'}{A}V$，如果 Q' 是携带器和 C 之间的感应系数而 A 是 A 和 D 的电容的话。因此，如果 U_n 和 V_n 是在 n 个“半周”之后两个感应器的势，而 U_{n+1} 和 V_{n+1} 是在 n＋1 个半周以后的势，则有

$$U_{n+1}=U_n-\frac{Q'}{A}V_n,$$

$$V_{n+1}=V_n-\frac{Q}{B}U_n.$$

如果写出 $p^2=\frac{Q}{B}$ 和 $q^2=\frac{Q'}{A}$，我们就得到

$$\begin{aligned}pU_{n+1}+qV_{n+1}&=(pU_n+qV_n)(1-qp)\\&=(pU_0+qV_0)(1-qp)^{n+1},\\pU_{n+1}-qV_{n+1}&=(pU_n-qV_n)(1+qp)\\&=(pU_0-qV_0)(1+qp)^{n+1}.\end{aligned}$$

由此即得

$$2U_n = U_0((1-pq)^n + (1+pq)^n)$$

$$+\frac{q}{p}V_0((1-pq)^n - (1+pq)^n)\text{，}$$

$$2V_n = \frac{p}{q} - U_0((1-pq)^n - (1+pq)^n)$$

$$+V_0((1-pq)^n + (1+pq)^n)\text{．}$$

由这些方程可以看出，pU＋qV 这个量是不断减小的，从而不论起初的带电状态如何，各携带器最后都将带有相反的电荷，使得 A 和 B 的势成 q 和－p 之比。

另一方面，pU－qV 这个量却不断增大，从而不论起初 pU 比 pV 大或小多么一点点，这一差值都将在每一周中按几何级数的比例而增大，直到电动势大得可以克服仪器的绝缘时为止。这一类仪器可以用于各式各样的目的：

用来在高势下产生一种丰富的供电，就如利用瓦尔莱先生的大机器所作的那样。

用来调节一个电容的电荷，正如在汤姆孙的静电计的事例中一样；那个电容的电荷可以通过一个很小的这种机器的几次转动来加大或减小，那个机器叫做“补电器”。

用于成倍地增大小的势差。感应器起初可能只充电到极小的势，例如由一个温差电偶引起的势；然后，通过机器的转动，势差可以一倍倍地增大到可以用一个普通的静电计来加以测量。通过用实验来测定机器每转一周使势差增大的比例，原先用来使感应器充电的那个电动势就可以根据转数和最后的带电情况推导出来。

在大多数这种仪器中，携带器是通过一个轴的转动而弄得绕一条轴线而转动并达到适当的相对于感应器的位置的。电的连接借助于弹簧来达成，弹簧装得使携带器在适当的时刻和他们接触。

211.〕然而 W.汤姆孙爵士[①]却制造了一个用来倍加电荷的机器，机器中的携带器是一些水滴，从一个放在导体中但不和它相接触的未绝缘的容器中滴到一个绝了缘的接受器中。这样，接受器就不断地得到电，其符号和感应器的电的符号相反。如果感应器是带正电的，接受器就将接受到一个不断增大的负电荷。

借助于一个漏斗，可以使水从接受器中逸出；漏斗的出口几乎被接受器的金属所包围。因此，从出口滴下的水滴是几乎不带电的。另一组结构相同感应器和接受器被安装得使一组中的感应器和另一组中的接受器相接通。于是接受器电荷的增加率就不再是常量，而是随着时间而按几何级数增加的，两个接受器的电荷具有相反的符号。这种增大继续进行，直到下落的水滴由于电的作用而偏离了他们的路程，以致落到接受器的外边，甚至打中了感应器时为止。

在这种装置中，电的能量是从下落水滴的能量中得来的。

212.〕另一些利用电感应原理的起电机也曾经被造出，其中最可注意

[①] Proc.R.S.,June20,1867.

的就是霍耳兹的起电机。这种起电机中的携带器是一块涂了虫胶的玻璃板，而其感应器是几块硬纸板。在转动携带器玻璃板的两侧有两块玻璃板，以防止在仪器各部分之间打火花。人们发现这种起电机是很有效的，而且不会受到大气状态的太大的影响。所用的原理和转动倍加器以及按同样的想法发展出来的那些仪器的原理相同，但是既然携带器是一个绝缘板而感应器是一些不完善的导体，它的动作的全面解释就比在携带器是形状已知的良导体并在确定的地点充电和放电的那种事例中更困难了[①]。

213.〕在上述这些起电机中，每当携带器接触到一个势不相同的导体时就会出现火花，

现在，我们已经证明，每当发生这种事时就会有能量的损失，从而用在转动机器方面的的功并不是以一种可用的方式而全部转化为电能，而是有一部分被消耗在产生电火花的声音和热方面的。

因此我曾想到，有必要说明可以怎样制造一种并无这种效率损耗的起电机。我不想说这是一种起电机的有用形式；这只是一种例子，说明可以把在热机中被称为再生器的那种设计应用在起电机中以防止功的损失的那种方法。

在图 18 中，设 A、B、C、A′、B′、C′代表一些中空的固定导体，排列得使携带器 P 可以逐个地通过他们的内部。其中 A、A′和 B、B′，当携带器通过他们的中点时将把携带器几乎完全包围起来，而 C 和 C′却不会包围得那么多。

我们将假设 A、B、C 和一个电容很大并处于势 V 的莱顿瓶相接，而 A′、B′、C′则和另一个处于势－V 的莱顿瓶相接。

图 18

P 是其中一个携带器,沿圆周从 A 转向 C′等等并沿途和一些弹簧相接触，其中弹簧 a 和 a′分别接在 A 和 A′上，而 e、e′则接地。

让我们假设，当携带器位于 A 的中点上时，P 和 A 之间的感应系数是－A。P 在这一位置上的电容大于 A，因为它并不是被接受器 A 所完全包围的。设此电容为 A＋a。

于是，设 P 的势是 U 而 A 的势是 V，则 P 上的电荷将是 $(A+a)U-AV$.

现在，设 P 当位于接受器 A 的中点上时和弹簧 a 相接触，则 P 的势是 V，即和 A 的势相同，从而它的电荷就是 aV。

如果现在 P 脱离开弹簧 a，则它将把电荷 aV 带走。当 P 离开 A 时，它的势就会减低，而且当它开始受到带负电的 C′的影响时，它的势还会进一步减低。

如果当 P 来到 C′内时它对 C′的感应系数是－C′而它的电容是 C′＋c′，如果 U 是 P 的势，则 P 上的电荷是

$$(C'+c')U+C'V'=aV.$$

如果 $$C'V'=aV,$$

则在这一点上 P 的势 U 将减小到零。

设 P 在这一点上和接地的弹簧 e′相接触。既然 P 的势等于弹簧的势，

---

① ｛目前用得最多的感应起电机是沃斯的和维姆胡斯的起电机。这些起电机的描述和图示可见 Nature,vol.xxviii,P.12.｝

在接触时就不会有火花。

通过它来使携带器能够接地而不致发生火花的这个导体 C′，就对应于热机中称为再生器的那种设计。因此我们将称之为“再生器”。

其次让 P 继续运动，仍然和接地弹簧相接触，直到它运动到势为 V 的感应器 B 的中部为止。如果－B 是 P 和 B 在这种位置上的感应系数，既然 U＝0，P 上的电荷就是－BV。

当 P 从接地弹簧离开时，它会把它的电荷带走。当它从带正电的感应器 B 中出来而转向带负电的接受器 A′，它的势将变得越来越负。在 A′的中点上，假若它保持了自己的电荷，它的势就将是

$$\frac{A'V' + BV}{A' + a'},$$

而且，如果 BV 大于 a′V′，则这个势的数值将大于 V′的数值。由此可见，在 P 到达 A′的中点以前，将有某一点，而 P 在该点上的势是－V′。在这一点上，让它和负电接受器的弹簧 a′相接触。这时不会有火花，因为两个物体是处于相同的势的。让 P 继续运动到 A′的中点，仍然和弹簧接触着，从而和 A′处于相同的势。在这一运动过程中，它向 A′传送一个负电荷。在 A′的中点上它离开弹簧并把一个电荷－a′V′带向带正电的再生器 C，在那里，它的势被降低到零，而且它将和接地弹簧 e 相接触。然后它就沿着弹簧滑入带负电的感应器 B′中,在运动期间它获得一个正电荷 B′V′，而这个正电荷最后被它传送给带正电的接受器 A，于是动作循环就完成了。

在这一循环中,正电接受器曾经损失了一个电荷 aV 而得到了一个电荷 B′V′。因此，总的正电增益就是 B′V′－aV。

同理，总的负电增益是 BV－a′V′。

通过使各导体在绝缘允许的情况下尽可能和携带器的表面靠近一些,B 和 B′可以弄成很大；而通过使接受器当携带器位于他们内部时尽可能完全地包围它,a 和 a′可以弄成很校于是两个莱顿瓶的电荷在每一转中都将增大。

再生器所应满足的条件是

$$C'V' = aV，和 CV = a'V'.$$

既然 a 和 a′很小，再生器就既不能太大也不能离携带器太近。

关于静电计和验电器

214.〕一个静电计就是可以用来测量电荷或电势的一种仪器。可以用来指示电荷或势差的存在但不能提供数值结果的仪器，叫做验电器。

如果足够灵敏，一个验电器就可以用于电学的测量，如果我们能够把测量结果弄得依赖于电的不存在的话。例如，如果我们有两个带电体 A 和 B,我们就可以利用在第一章中描述了的方法来确定哪一个物体带有较大的电荷。设用一个绝缘柄把物体 A 带入一个绝了缘的闭合容器 C 的内部。把 C 接地，然后再使它绝缘。这时 C 的外面就不会带电。现在把 A 取走而把 B 放进 C 中来，并用一个验电器来检验 C 的带电情况。如果 B 的电荷等于 A 的电荷，C 就不会带电，但是如果 B 的电荷较大或较小，就会出现和 B 的电荷种类相同或相反的电。

所要观察的是某种现象的不存在，这种方法就叫做零点法。它所要求的只是一种能够指示现象之存在的仪器。

在另一类记录现象的仪器中，仪器可以保证对所记录量的相同值永远显示相同的指示，但是仪器刻度的读数却并不和量的值成正比，而且这些读数和对应值之间的关系是未知的，除了一方面是另一方面的某一连续函数以外，若干种静电计依赖于仪器中同样带电的部件之间的推斥力；这些静电计就属于上述这一类仪器。这种仪器的用处在于记录现象，而不是量度现象。得到的不是所要测量的量的真实值，而是一系列的数字；这些数字在事后可以用来确定那些真实值，当仪器的刻度被适当研究并登记了以后。

在更高的一类仪器中，刻度读数正比于所要测量的量，因此量的完全测量所要求的，只是关于一个系数的知识，把刻度读数乘以这个系数，就得到量的真实值。

制造得本身就包含着确定量的真实值的手段的那种仪器，叫做“绝对仪器”。

库仑的扭秤

215.〕库仑用以确定其电学基本定律的许多实验，是通过测量两个带电小球之间的力来作出的；其中一个小球是固定的，而另一个小球则在两个力下保持平衡，那就是小球间的力和一个玻璃丝或金属丝的扭转弹性力，见第 38 节。

扭秤包括一个用虫胶制成的水平横杆，用细金属丝或玻璃丝悬挂着，它的一端上有一个平滑地镀了金的小通草球。悬丝的上端固定在一个臂的竖直轴上，那个臂可以沿着一个刻了度的水平圆周而运动，这样就可以使悬丝的上端绕它自己的轴扭转任意的度数。

整个的这套仪器封在一个外壳里。另一个小球适当地安装在一个绝缘杆上，它可以被充电并通过一个小孔被放入外壳中，而且弄得它的中心位于悬挂小球所描绘的水平圆周的一个定点上。悬挂小球的位置通过刻在仪器之柱状玻璃外壳上的一个刻度圆来确定。

现在假设两个球都带了电，而悬挂小球在一个已知位置上处于平衡，以致扭杆和通过固定小球中心的半径成一个θ角。于是球心间的距离就是 $2a\sin\frac{1}{2}\theta$，此处a是扭杆的半径，而且，如果F是球间的力，则力对扭轴而言的矩是

$$Fu\cos\frac{1}{2}\theta.$$

使两个球完全放电，设扭杆现在是在和通过固定小球中心的半径成φ角的位置上处于平衡。

于是，电力使扭杆转过的角度必为θ－φ，而且，如果 M 是悬丝的扭转弹性力矩，则我们有方程

$$Fa\cos\frac{1}{2}\theta = M(\theta-\phi).$$

由此可见，如果我们能够确定 M，我们就能够确定 F，这就是二球相

距$2a\sin\frac{1}{2}\theta$时的实际的力。

为了求出扭力矩 M，设 I 是扭臂的惯量矩而 T 是扭臂在扭转弹性的作用下往返振动两次所需的时间，则有

$$M = 4\pi^2 \frac{I}{T^2}.$$

在所有的静电计中，最重要的是要知道我们正在测量的是什么力。作用在悬挂小球上的力，一部分来自固定小球的直接作用，但也有一部分来自外壳壁上的电荷，如果有这种电荷的话。

如果外壳是用玻璃做成的，则除了在各点进行很困难的测量以外就不可能确定其表面的带电情况。然而，如果外壳是用金属做成的，或是在小球和玻璃外壳之间放一个几乎完全把仪器包围起来的金属壳来作为屏蔽，则金属屏的内表面上的带电情况将完全依赖于小球的带电情况，而玻璃外壳的带电情况则将对小球毫无影响。

为了用一个我们可以计算其中的一切效应的例子来说明这一点，让我们假设外壳是一个半径为 b 的球，而扭臂运动的中心和球心相重合，其半径为 a；另外假设两个球的电荷是 E_1 和 E_2，他们的位置之间的角度是 θ，固定小球到中心的距离是 a1，而二球之间的距离是 γ。

暂时忽略感应对小球上电分布的影响，两球之间的力将是一个推斥力

$$= \frac{EE_1}{r^2},$$

而这个力对通过中心的竖直轴而言的矩将是

$$\frac{EE_1 aa_1 \sin\theta}{r^3}.$$

由外壳的球形表面所引起的E_1的像，是同一半径上距中心为$\frac{b^2}{a_1}$处的一个点，其电荷是$-E_1\frac{b}{a_1}$，而E_1和这个像之间的吸引力对悬轴而言的矩是

$$EE_1\frac{b}{a_1}\frac{a\frac{b^2}{a_1}\sin\theta}{\{a^2-2\frac{ab^2}{a_1}\cos\theta+\frac{b^4}{a_1{}^2}\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= EE_1\frac{aa_1\sin\theta}{b^3\{1-2\frac{aa_1}{b^2}\cos\theta+\frac{a^2a_1^2}{b^4}\}^{\frac{3}{2}}}.$$

如果球形外壳的半径 b 比 a 和各球到中心的距离 a_1 大得多，我们就可以忽略分母上的第二项和第三项。令使扭杆发生转动的两个力矩彼此相等，我们就得到

$$EE_1 aa_1\sin\theta\{\frac{1}{r^3}-\frac{1}{b^3}\} = M(\theta-\phi).$$

测量电势的静电计

216.〕在所有的静电计中，活动的部分都是一个带电体，而它的势和周围某些固定部分的势不同，当像在库仑方法中那样所用的是一个带有某一电荷的绝了缘的物体时，电荷是测量的直接对象。然而我们可以利用导线把库仑静电计中的小球和一些不同的导体连接起来。于是球上的电荷就将依赖于这些导体的势的值，并依赖于仪器外壳的势的值。每一小球上的势将近似地等于它的半径乘以它的势比仪器外壳的势高出的值，如果球的半径比球间的距离和到外壳壁面或外壳开口的距离小得多的话。

然而库仑形式的仪器，由于当势差很小时二球在适当距离处的力也很小，所以是不太适宜用于这样一种测量的。一种更方便的形式是“吸引盘静电计”的形式。依据这一原理的最初一些静电计是由 W.斯诺·哈里斯爵士制造的[1]。从那时起，这些静电计已由 W.汤姆孙爵士在理论上和构造上作出了很大的改进[2]。

当势不相同的两个圆盘面对面地放在很小距离处时，在相向的面上就会出现近似均匀的电荷，而在背面则几乎没有电荷，如果附近没有别的导体或带电体的话。正盘上的电荷将近似地正比于它的面积，正比于盘间的势差而反比于盘间的距离。因此，通过把盘做得很大而把盘间的距离弄得很小，一个小的势差就可以引起一个可以测出的吸引力。

关于这样摆放的两个圆盘上的电分布的数学理论，已在第

202 节中给出，但是不可能把仪器外壳做得很大以致我们可以假设圆盘是在无限大的空间中被绝缘的，这种形式下的仪器的指示就是不容易进行数值上的解说的。

217.〕在被吸圆盘上增加一个保护环，这就是 W.汤姆孙爵士对这种仪器作出的主要改进之一。

现在不是把其中一个圆盘整个地悬挂起来并测定作用在它上面的力，而是从圆盘上分出一个中心部分来形成被吸引的圆盘，而形成剩余部分的外围环则保持固定。这样，力就是只在分布得最规律的圆盘部分上被测量的，而边沿附近电的不够均匀则不重要，因为那是出现在保护环上而不是出现在圆盘的悬挂部分上。

图 19

除此以外，通过把保护环和一个包围着被吸引盘的背面及其一切悬挂装置的金属外壳相连接，盘背面的带电就被弄得不可能了，因为它成了一个到处有相同的势的闭合中空导体的内表面的一部分。

因此，汤姆孙的“绝对静电计”基本上就是由两个势不相同的圆盘构成的；其中一个圆盘做得有一部分可以在电力作用下发生运动，而且该部分没有任何地方靠近整个盘的边沿。为了明确我们的想法，我们可以假设被吸引的圆盘和保护环是在上面的。固定的圆盘是水平的，装在一个绝缘

[1] Phil.Trang.1834.

[2] 参阅 W.汤姆孙爵士关于静电计的一篇很精彩的报告。Report of the British Associa－tion,Dundee，1867.

柱上，绝缘柱可以通过一个测微螺旋来得到一种可以测量的竖直运动。保护环至少要和固定圆盘一样大，它的下表面真正是平面并平行于固定的圆盘。在保护环上竖立一个精密天平，天平上挂着一个轻的可以活动的圆盘，它几乎填满保护环上的圆孔而不和孔的边沿相摩擦。悬挂圆盘的下表面必须是真正的平面，而且我们必须有办法知道它的平面何时与保护环的下表面相重合而形成仅仅由圆盘和保护环之间的窄缝隔断的单独一个平面。

为此目的，下面的圆盘被推上去，直到和保护环接触上为止；然后让悬挂的圆盘停止在下面的圆盘上，从而它的下表面就和保护环的下表面位于同一平面上。然后它的相对于保护环的位置就借助于一组基准标记来加以确定。为此目的，W.汤姆孙爵士通常是用一根附属在可动部件上的黑头发。这根头发在一种白釉背景上的两个黑点的正前方移上或移下，并且这根头发和这两个黑点都利用一个平凸透镜来进行观察，透镜上平的一面靠近眼睛。如果通过透镜看到的头发是直的，而且恰好位于两个黑点的正中间，它就算是处于正视位置，而这就表明它随之而动的那个悬挂圆盘在高度方面是处于适当位置的。悬挂圆盘的水平性可以通过比较任何物体的一部分在该盘上表面上的反射和同一物体的其余部分在保护环上表面上的反射来进行检验。

然后调节天平，使得当把一个已知砝码放在悬挂圆盘的中心时，该盘就在它的正视位置上处于平衡，这时通过把仪器的每一部分都用金属连接起来而保证仪器不带电。一个金属外壳被放在保护环的上方，把天平和悬挂盘都笼罩在内，但是留出足够的开口来观察基准标记。

保护环、外壳和悬挂圆盘都是互相接通的，但他们和仪器的其他部分却是绝缘的。

现在假设要测量两个导体的势差。将两个导体用导线分别和上下圆盘连接起来，将砝码从悬挂圆盘上拿开，并借助于测微螺旋把下面的圆盘向上推进，直到电吸引力把悬挂圆拉到它的正视位置时为止。这时我们就知道，圆盘之间的吸引力等于当时把圆盘带到正视位置的那个重力。

如果 W 是那个砝码的数值，而 g 是重力强度，则重力是 W_g；而且，如果 A 是悬挂圆盘的面积，D 是圆盘之间的距离，而 V 是圆盘之间的势差，则有[①]

$$W_g=\frac{V^2A}{8\pi D^2}\text{，或}V=D\sqrt{\frac{8\pi gW}{A}}.$$

[①] 让我们用 R 代表悬挂圆盘的半径，而用 R′代表保护环孔的半径，则圆盘和保护环之间的圆形窄缝的宽度将是 B＝R′－R。如果悬挂圆盘和固定大圆盘之间的距离是 D，而二圆盘之间的势差是 V，则按照第 201 节的考虑,悬挂圆盘上的电荷将是 如果保护环的表面和悬挂圆盘的表面并不恰好在同一平面上，让我们假设固定圆盘和保护环之间的距离不是 D 而是 D＋z＝D′，则由第 225 节中的考察可知，由于高度上的差别 z ｛译注，原文略误，今改｝，圆盘的边沿附近将出现附加的电荷。因此，这一事例中的总电荷就近似地是 而且在吸引力的表示式中我们必须把圆盘面积 A 代成改正后的值

式中 R＝悬挂圆盘的半径，R′＝保护环孔的半径，D＝固定盘和悬挂盘之间的距离，D′＝固定盘和保护环之间的距离，a＝0.220635（R′－R）.当 a 比 D 小得多时，我们可以略去第二项，而当 D′－D 很小时，我们可以略去最后一项。｛关于这一情况的另一种考察，见补遗卷。｝

如果悬挂盘是圆形的，且半径为 R，而且保护环的圆孔的半径是 R′，则有

$$A=\frac{1}{2}\pi(R^2+R'^2)\text{，以及}V=AD\sqrt{\frac{gW}{R^2+R'^2}}.$$

218.〕既然在确定和 D＝0 相对应的测微螺旋读数时总有某些不准确性，而且当 D 很小时悬挂盘的位置方面的任何误差都是至关重要的，W.汤姆孙爵士就宁愿把他的所有测量结果都弄成取决于电动势 V 之差。例如，如果 V 和 V′是两个势而 D 和 D′是对应的距离，则有

$$V-V'=(D-D')\sqrt{\frac{8\pi gW}{A}}.$$

例如，为了测量一个伽瓦尼电池的电动势，使用了两个静电计。

借助于一个在必要时用补电器保持为充电的电容器，主静电计的下盘被保持于一个恒定的势。这一点，通过把主静电计的下盘和一个辅静电计的下盘接通来加以检验；辅静电计的悬挂盘是接地的。既然辅静电计的盘间距离和把它的悬挂盘置于正视位置时所需的力都是恒定的，如果我们提高电容器的势，直至辅静电计达到它的正视位置时这止，我们就知道，主静电计下盘的势比地球的
势大一个常量，我们可以把这个常量叫做 V。

如果我们现在把电池的正极接地，把主静电计的悬挂盘和负极接通，则盘间的势差将是 V＋v，奴果 v 是电池的电动势的话。设 D 是这一情况下的测微螺旋读数，而 D′是当悬挂盘接地时的读数，则有

$$\upsilon=(D-D')\sqrt{\frac{8\pi gW}{A}}.$$

用这种办法，一个小的电动势 v 就可以用一个静电计来测量，这时静电计的二盘之间有一可以很方便地加以测量的距离。当距离太小时，绝对距离的很小变化就会引起力的很大变化，因为力是和距离的平方成反比的。因此，绝对距离的任何误差都会在结果中引起很大的误差，除非距离比测微螺旋的误差范围大得多。

各盘表面的不规则性和他们之间的间隔的不规则性，其影响是和距离的立方及更高次方成反比的，而且，不论一个摺绉表面是什么形状，它的那些突起点总是正好达到一个平面，而在比摺绉宽度大得多的距离处的电效应，和在突起点平面后面某一距离处的一个平面的电效应相同。参阅第 197、198 节。

借助于经过辅静电计检验的辅助电荷，就可以保证一个适当的盘间距离。

辅静电计可以结构比较简单，可以没有按绝对量值来测定吸引力的设备，因为所要求的无非是保证一种恒定的带电而已。这样一个静电计可以叫做一个计量静电计。

除了所要测量的电量还应用一个辅助电量,这种方法叫做量电学的‘异势差势”，以别于“同势差法”；在后一方法中，全部的效应都是由所要测量的带电情况引起的。

在某些形式的吸引盘静电计中，被吸引的盘子被放在一个臂的一端，该臂连接在一条通过它的重心并用弹簧保持拉紧的铂丝上。臂的另一端系

有发丝；通过改变盘间的距离来把电吸引力调节到一个常量值，可以把发丝调到一个正视位置。在这些静电计中，这个力通常并不是按绝对量值被定出，而只要知道它是常量，如果铂丝的扭转弹性并不改变的话。

整个的仪器放在一个莱顿瓶中，该瓶的内表面和吸引盘及保护环相连接。另一个盘用一个测微螺旋来调节，而且是接地之后又和要测其电势的那个导体相连接的。读数之差乘以一个对每一静电计都须单独测定的常量，就给出所要测量的势。

219.〕已经描述过的这些静电计不是自动的，而是每观测一次都要求调节一个测微螺旋，或是要求观测者进行某种别的动作。因此这些静电计都不适于用作必须自己活动到适当位置的自动记录静电计。这一条件是用“汤姆孙象限静电计”来满足的。

这种仪器所根据的原理可以解释如下：

A 和 B 是两个固定的导体，他们的势可以相同或不同。C 是一个处于高势的活动导体，被放得有一部分正对着 A 的表面而另一部分则正对着 B 的表面，而且当 C 运动时这两个部分之间的比例就会改变。

为此目的，最方便的办法就是使 C 可以绕着一个轴运动，而把 A 的和 B 的以及 C 的对面表面作成绕同一轴线的旋转曲面的一些部分。

这样，C 的表面和 A 的或 B 的对面表面之间的距离就永远保持相同，而 C 沿正方向的运动就只会增大对着 B 的面积和减小对着 A 的面积。

如果 A 的势和 B 的势相等，就不会有促使 C 从 A 向 B 运动的力。但是如果 C 的势和 B 的势相差较大而和 A 的势相差较小，则 C 将倾向于运动以增大它面对 B 的面积。

通过仪器的适当装配，这个力可以弄得在一定的界限内在 C 的不同位置上接近相同，因此，如果 C 是用一根扭丝悬挂着的，它的偏转就将近似地正比于 A 和 B 间的势差乘以 C 的势和 A、B 的平均势之差。

用一个附有补电器的电容器，C 被保持在一个高势并用一个计量静电计来加以检验，而 A 和 B 则接在须要测量其势差的那两个导体上。C 的势越高，仪器的灵敏度就越大。和所要测量的带电情况无关的这种 C 的带电情况，使静电计成为属于异势差类型的了。

我们可以把第 93、127 节中所给出的关于导体组的普遍理论应用在这种静电计上。

用 A、B、C 分别代表三个导体的势，设 a、b、c 分别是他们的电容，p 是 B 和 C 之间的感应系数，q 是 C 和 A 之间的感应系数，而 γ 是 A 和 B 之间的感应系数。所有这些系数通常都随 C 的位置而变，而且，如果 C 安装得合适，使得在一定的运动界限之内 A 的和 B 的边沿并不和 C 的边沿离得很近，我们就可以确定这些系数的形式。如果 θ 代表 C 从 A 向 B 偏转的角度，则 A 对着 C 的那一部分面积当 θ 增大时就将减小。由此可见，如果 A 被保持于势 1 而 B 和 C 被保持于势 0，则 A 上的电荷将是 $a=a_0-\alpha\theta$，式中 a_0 和 α 是常量而 a 是 A 的电容。

如果 A 和 B 是对称的，则 B 的电容是 $b=b_0+\alpha\theta$。

C 的电容不因运动而变，因这运动的唯一效应就是使 C 的不同部分对准 A 和 B 之间的间隙。由此得到 $c=-c_0$

当 B 升到单位势时在 C 上感应出来的电是 $p=p_0-\alpha\theta$。

A 和 C 间的感应系数是 $q=q_0+a\theta$。

A 和 B 间的感应系数不因 C 的运动而变，仍保持为 $\gamma=\gamma_0$。

因此，体系的电能是

$$W=\frac{1}{2}A^2a+\frac{1}{2}B^2b+\frac{1}{2}C^2c+BC_p+CA_q+AB_r,$$

而如果Θ是使 θ 增大的力矩，则有

$\Theta=\frac{dW}{d\theta}$，A、B、C被看成常量，

$$=\frac{1}{2}A^2\frac{da}{d\theta}+\frac{1}{2}B^2\frac{db}{d\theta}+\frac{1}{2}C^2\frac{dc}{d\theta}+BC\frac{dp}{d\theta}+CA\frac{dq}{d\theta}+AB\frac{dr}{d\theta},$$

$$=-\frac{1}{2}A^2a+\frac{1}{2}B^2a-BCa+CAa;$$

或$\Theta=a(A-B)\ \{C-\frac{1}{2}(A+B)\}$.[①]

在现在考虑的这种汤姆孙象限静电计中，导体 A 和 B 作成被

完全分成四个象限的一个圆盒的形状，各象限分别被绝缘，但是用导线把对角的象限连接起来，即 A 和 A′连接，B 和 B′连接。导体 C 被悬挂得可以绕竖直轴旋转，它可以是张在一些半径端点的两个对角的 90°的弧。在平衡位置上，这两个弧应该部分地位于 A 中而部分地位于 B 中，而各个支持着的半径应该近似地位于中空盒子的四个象限的中间平面上，以便盒子的分割线和 C 的边沿及支持半径可以互相离得尽可能地远。

形成仪器外壳的是一个莱顿瓶的内表面；通过和该表面相接，导体 C 被永远保持于一个高势。B 接地，而 A 和要测其势的物体相接。

图 20

如果物体的势是零而且仪器已经调好，那就不应该有使 C 运动的力；但是如果 A 的势和 C 的势同号，则 C 将在一个近似均匀的力下从 A 向 B 运动，于是悬挂装置就受到扭转，直到出现了相等的力并达成了平衡时为止。在一定的界限之内，C 的偏转将和乘积

$$(A-B\{C-\frac{1}{2}(A+B)\}$$

成正比。通过增高C的势，仪器的灵敏度可以提高，而且，当$\frac{1}{2}(A+B)$的值很小时，偏转将近似地正比于(A－B)C.

关于电势的测量

220.〕为了按照绝对量值来测定一个大的势差，我们可以利用吸引盘静电计并把吸引力和一个砝码的效应相比较。如果我们同时也用象限静电

---

① ｛这一点也可推导如下：如果针是对称地摆在各象限中的，则当 A＝B 时不会有力偶。既然 dW/dθ 在这种情况下对一切可能的 C 值都为零，我们必有

于是就有　如果各象限是把针完全包围起来的，则当把各个势都增大一个相同的量时力偶将不受影响，从而　于是　　示式。读者也应参考 G.霍普金孙博士关于象限静电计的论文，见 Phil.Mag.5thseries,xix.p.291，以及 Hallwachs Wied.Ann.xxix.p.11.｝

计来测量相同那些导体之间的势差，我们就将定出象限静电计的刻度的某些读数的绝对值，而利用这种办法，我们就可以按照悬挂部件的势和悬挂装置的扭力矩来得出象限静电计的刻度读数的值[1]。

为了测定一个有限大小的带电导体的势，我们可以把这个导体接在静电计的一个极上，而其另一个极则接地或接在一个具有恒定的势的导体上。静电计读数将给出导体在把它的电荷和它所连接的静电计部件分享以后的势。如 K 代表导体的电容而 K＇代表上述那一部件的电容，而 V、V＇代表这些物体在互相接通以前的势，则他们在接通以后的共同势将是

$$\overline{V}=\frac{KV+K'V'}{K+K'},$$

因此，导体的原有势就是

$$V=\overline{V}+\frac{K'}{K}(\overline{V}-V').$$

如果导体并不比静电计大得多，则 K＇将是可以和 K 相比的，从而除非我们可以确定 K 和 K＇的值，表示式中的第二项就将有一个可疑的值。但是如果我们能够在接通之前把静电计电极的势弄得和物体的势很相近，则 K 和 K＇的值的不准确性将没有多大影响。

如果我们近似地知道物体的势，我们就可以借助于一个“补电器”或其他装置来把电极充电到这个近似的势，而其次的实验就将给出一个更好的近似。用这种办法，我们可以测量其电容比静电计的电容小得多的一个导体的势。

空气中一点上的电势的测量

221.〕第一种方法.取一个小球，其半径比带电导体的距离小得多，把它的中心放在所给的点上。用一根细导线把小球接地，然后把它绝缘，并把它拿到一个静电计那里去测定它上面的总电荷。

于是，如果 V 是给定点上的势而 a 是球的半径，则球上的电荷将是－Va＝Q；而且，如果 V＇是当放在四壁接地的房间中时用一个静电计测得的球的势，则有 Q＝V＇a，由此即得 V＝＋V＇＝0，或者说，空气中球心曾放在那儿的一点上的势，和该球接地再绝缘并拿到一个房间中以后的势相等而反号。

这种方法曾被克勒茨纳赫的代耳曼先生用来测量离地面一定高度处的势。

第二种方法.我们曾经假设小球被放在给定点上，起初接地，然后绝缘并被带到一个由势为零的导电物质包围着的空间中。

现在让我们假设，有一条绝了缘的细导线被从静电计的电极拿到了要测其势的地方。设小球首先被完全放电。这可以通过把它放在一个用相同金属作成的几乎完全包围起它来的容器中并让它接触容器来作到。现在设把这样放了电的小球拿到导线端点那儿并让它碰一下导线端点。既然球是不带电的，它就将具有该点处空气的势。如果电极导线处于相同的势，则它不会受到这种接触的影响；但是，如果电极有一个不同的势，则通过和

[1] {大势差可以用威廉·汤姆孙爵士的新伏特计来更方便地加以量度。}

球接触它的势将变得比以前更接近于空气的势。通过一系列这样的动作，小球交替地放电和接触电极，静电计的电极的势就会不断地趋近于所给点上的空气的垫。

222.〕为了测量一个导体的势而不碰到它，我们可以测量导体附近一个任意点上的空气的势，并根据结果来算出导体的势。如果有一个几乎被导体包围起来的空腔，则空腔中任一点处的空气的势都将和导体的势很相近。

用这种办法，W.汤姆孙爵士曾经确定，如果有两个互相接触的中空导体，一个用铜做成而另一个用锌做成，则被锌包围着的空腔中的空气的势相对于被铜包围着的空腔中的空气的势来说是正的。

第三种方法.如果我们用任一种办法可以使一系列小物体脱离电极的端点，则电极的势将趋近于周围空气的势。这一点，可以通过让弹丸、碎屑、沙粒或水珠从连在电极上的一个漏斗或管子中漏出而作到。要测量其势的点，就是流注不再是连续的而分裂成分开的部分或小滴的那个点。

另一种方便的办法就是在电极上绑一根慢燃的寻火索。势很快就会变成等于导火索燃烧端处的空气的势。当势差颇大时，甚至一个很细的金属尖端就足以通过空气的粒子（或尘埃？）而造成一次放电，但是，如果想把这个势减低为零，我们就必须使用上述各方法中的一种。

如果我们只想确定两个地方之间的势差的正负而不考虑它的数值，我们就可以让液滴或碎屑从一个和其中一个地方相连的喷嘴中在另一个地方喷出，并把那些液滴或碎屑收集在一个绝了缘的容器中。每一个液滴在下落时都会得到一个电荷，而这个电荷就完全放出在容器中。因此容器的电荷就不断地积累，而在足够多的液滴已经落入以后，容器的电荷就可以用最粗糙的方法来进行检验。如果和喷咀相连的那个地方的势相对于另一个地方的势来说是正的，则电荷的符号也是正的。

电的面密度的测量

证明片理论

223.〕在检验关于导体表面上的电分布的数学理论的结果时，必须能够测量导体的不同点上的面密度。为此目的，库仑应用了一个贴在虫胶绝缘柄上的镀金纸小圆片。他把这个小片放在导体的不同点上，使它尽可能密切地和导体的表面相重合。然后他借助于绝缘柄把小片拿开，并利用他的静电计测量了小片上的电荷。

既然当放在导体上时小片的表面是和导体的表面接近重合的，他就得出结论说，小片外表面上的面密度近似地等于导体表面上那一点的面密度，而当拿开时，小片上的电荷就近似地等于导体表面上和小片一侧的面积相等的一个面积上的电荷。这样使用的一个小片，叫做“ 库仑的证明片 ”。

因为人们对库仑的使用证明片提出过一些不同意见，我将对实验的理论进行一些评述。

这个实验就在于使一个小的导电物体在要测密度的点上和导体表面相接触，然后拿开物体并测定其电荷。

我们首先必须证明，当和导体接触着时小物体上的电荷正比于在放上

小物体以前存在于接触点上的面密度。

我们将假设，小物体的各个线度，特别是沿接触点法线方向的线度，比导体在接触点上的哪一个曲率半径都小得多。因此，把导体假设为刚性带电，它所引起的合力在小物体所占空间范围内的变化就可以忽略不计，从而我们就可以把小物体附近的导体表面看成一个平面。

现在，小物体通过和一个平面表面相接触而取得的电荷，将正比于垂直于表面的合力，也就是正比于面密度。我们将针对特殊形状的物体来确定电荷的数量。

其次我们必须证明，当小物体被拿开时，在它和导体之间不会有将使它所带走的电荷发生改变的任何火花。这是显然的，因为当物体相接触时他们的势是相同的，从而离接触点最近的那些地方的密度是极小的。当小物体被拿到离导体有一很短的距离时，如果我们假设导体是带正电的，离小物体最近的那些部分上所带的电就不再等于零而是正的了。但是，既然小物体的电荷也是正的，靠小物体最近的那些部分所带的正电就将比表面上其他邻近点上的正电要少一些。喏，一个火花的通过一般依赖于合力的大小，而合力的大小又依赖于面密度。由此可见，既然我们假设导体的带电没有达到在它表面的其他部分上进行放电的程度，而我们又证明了离小物体最近的表面上的面密度较小，导体就不会从那些部分的表面上向小物体放出火花。

224.〕现在我们将考虑各种形状的小物体。

假设它是一个很小的半球，用它的平底面的中心和导体相接触。

设导体是一个大球。让我们稍微改动一下半球的形状，使它的表面比半球面稍大一点，并且和球面的夹角是直角。于是我们就得到一个事例，它的精确解我们已经求出了。见第 168 节。

如果 A 和 B 是两个互相正交的球，DD ' 是交线圆的一条直径，而 C 是该圆的中心，那么，如果 V 是一个导体的势，而导体的表面和两个球的表面相重合，则球 A 的暴露表面上的电量是

$$\frac{1}{2}V(AD+BD+AC-CD-BC),$$

而球 B 的暴露表面上的电量是

$$\frac{1}{2}V(AD+BD+BC-CD-AC),$$

总电量是二者之和，即

$$V(AD+BD-CD).$$

如果α和β是二球的半径，则当α比β大得多时，B 上的电荷和 A 上的电荷之比等于

$$\frac{3}{4}\frac{\beta^2}{\alpha^2}(1+\frac{1}{3}\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1\beta^2}{6\alpha^2}+\cdots \text{比} 1.$$

现在，设σ是当 B 被拿走时 A 上的均匀而密度，则 A 上的电荷是

$$4\pi a^2\sigma,$$

从而 B 上的电荷就是

$$3\pi\beta^2\sigma(1+\frac{1}{3}\frac{\beta}{\alpha}+\cdots),$$

或者说，当β远小于 a 时，半球 B 上的电荷等于以面密度σ分布在半

球的圆形底面积上的电荷的三倍。

由第 175 节可知，如果使一个小球和一个带电体相接触然后把它拿到远处，则球上的平均面密度和物体上的面密度之比，等于π^2和 6 之比，或者说是 1.645 和 1 之比。

225.〕证明片的最方便的形式就是一个圆片。因此我们将指明放在一个带电表面上的圆片上的电荷应该怎样测量。

为此目的，我们将构造一个势函数，使它的等势面像一个扁圆形的突起，其一般形状类似于放在平面上的一个圆盘。设σ是一个平面上的面密度，该平面我们将假设为 xy 平面。

由于这种带电情况而引起的势将是

$$V=-4\pi\sigma z.$$

现在设有两个半径为 a 的圆盘，刚性地带有面密度为$-\sigma'$和$+\sigma'$的电。设其中第一个圆盘放在 xy 平面上，圆心位于原点；第二个和它平行，并有一很小的距离 c。

于是可以证明，正如我们即将在磁学理论中看到的那样，这两个圆盘在任意点上引起的势是$\omega\sigma' c$，此处ω是圆盘边沿在该点所张的立体角。因此，整个体系的势将是

$$V=-4\pi\sigma z+\sigma' c\omega.$$

等势面和电感线的形状如下卷末尾图二十的左边所示。

让我们看看 V=0 的等势面的形状。这个等势面用虚线标出。令任意点离 z 轴的距离等于 r，当 r 比 a 小得多而 z 也很小时，我们就有

$$\omega=2\pi-2\pi\frac{z}{a}+\cdots.$$

因此，对于远小于 a 的 r 值，零等势面的方程就是

$$0=-4\pi\sigma z_0+2\pi\sigma' c-2\pi\sigma'\frac{z_0 c}{a}+\cdots;$$

或者 $$z_0=\frac{\sigma' c}{2\sigma+\sigma'\frac{c}{a}}.$$

由此可见，这个等势面在中轴附近是扁平的。

在圆片以外，r 大于 a，那 z 为零时ω为零，从而 xy 平面是等势面的一部分。

为了找出这两个部分在何处相接，让我们找出在这个平面的哪一点上$\frac{dV}{dz}=0$。

当 r 很接近于和 a 相等时，立体角ω就接近于一个球上的一部分，该球的半径是 1，而那一部分的顶角是$\tan^{-1}\{z\div(r-a)\}$，也就是说ω等于$2\tan^{-1}\{z\div(r-a)\}$，因此当$z=0$时就近似地有$\frac{dV}{dz}=-4\pi\sigma+\frac{2\sigma' c}{r-a}$。

因此，当$\frac{dV}{dz}=0$时，近似地就有

$$r_0=a+\frac{\sigma' c}{2\pi\sigma}=a+\frac{z_0}{\pi}.$$

因此，等势面 V=0 就包括一个半径为r_0并具有近似均匀的厚度z_0的

圆盘状的图形，并包括这一图形外面的那一部分无限大的 xy 平面。

在整个圆盘上计算的面积分就给出它的电荷。正如在第四编第 704 节的圆形电流的理论中那样，可以求出这一电荷是

$$Q = 4\pi\sigma' c\{\log\frac{8a}{r_0 - a} - 2\} + \pi\sigma r_0{}^2 .$$

平面表面的一个相等面积上的电荷是 $\pi a r_0^2$，因此，圆盘上的电荷大于平面上相等面积上的电荷，二者之比很近似地是

$$1 + 8\frac{z_0}{r_0}\log\frac{8\pi r_0}{z_0} \text{比} 1,$$

式中 z_0 是圆盘的厚度，r_0 是圆盘的半径，而 z_0 被假设为远小于 r_0。

关于集电器及其电容的测量

226.〕一个集电器或电容器是一个仪器，它包括两个导电表面，被一种绝缘的电介媒质所隔开。

一个莱顿瓶就是一个集电器，它的内层锡箔由构成瓶的玻璃来和外层相隔开。原始的莱顿瓿是一个装了水的容器，水和拿着容器的手被玻璃隔开。

任何一个绝了缘的导体的外表面都可以看成集电器的一个表面，其另一个表面就是地面或导体所在房间中的壁面，而中间的空气就是电介媒质。

一个集电器的电容，由为使二表面间的势差等于 1 而必须充给内表面的电量来量度。

既然任一电势都是若干部分之和，而各部分通过每一电量元除以它到一点的距离来求得，电量和势之比就必须具有长度的量纲，因此静电电容就是一个线量，或者说我们可以用英尺或米来毫不含糊地量度它。

在电学研究中，集电器被用于两个主要目的，即在一个尽可能小的体积内接受或储存大的电量，和借助于一个确定的电量所引起的集电器的势来测量该电量。

为了储存电荷，还没有发明出比莱顿瓶更完善的任何东西。电损耗的主要部分起源于电沿着未覆盖的潮湿玻璃表面从一个表层爬到另一个表层。这一点可以通过瓶内空气的人工干燥和未覆盖玻璃表面的涂油来在很大程度上予以避免。在 W.汤姆孙的静电计中，每过一大损失的电只占一个很小的百分数，而且我们相信当玻璃是好的时，任何的损失都不能归因于通过空气或通过玻璃的直接传导，而主要是起源于沿着仪器中各种绝缘杆和玻璃的表面而进行的传导。

事实上，同一电学家｛指 W．汤姆孙｝曾经把一个电荷传给一个长颈大玻璃泡中的硫酸，然后通过熔化把瓶颈密封了起来，从而电荷就是完全被玻璃所包围的，而过了些年以后，发现电荷还保存在那里呢。

然而，只有当温度较低时，玻璃才有这样的绝缘性，因为只要把玻璃加热到还不到 100℃，电荷立刻就会开始逃逸。

当希望得到小体积的大电容时，以弹性橡皮、石棉或腊纸作为电介质的集电器就是合用的。

227.〕对于第二类集电器即用于电量的测量的集电器来说，使用任何固体电介质时都要大大留心，因为他们有所谓“电吸收”的性质。

对于这种集电器来说，唯一保险的电介质就是空气，而空气也有一种不方便处，那就是，如果有些尘埃或杂物进入到两个相对表面之间本来只应该被空气所占据的狭窄空间中去，那就不但会改变空气层的厚度，而且可能在相对的表面之间建立一种联系，而那样一来集电器就将不能保留电荷了。

为了用绝对单位即用英尺或米来量度一个集电器的电容，我们必须或是首先确定它的形状和尺寸然后求解它的相对表面上的电分布问题，或是把它的电容和一个已经求解了问题的集电器的电容相比较。

由于这问题是很困难的，最好从一种形状的集电器开始，而对那种形状来说解是已知的。例如，已经知道，无限空间中一个绝了缘的｛导体｝球的电容用球的半径来量度。

挂在房间里的一个球，曾由考耳劳什和韦伯两位先生实际地当成一个绝对标准，他们把其他集电器的电容和这一标准进行了比较。

然而，一个中等大小的球的电容和常用的集电器的电容比起来是太小了，从而球并不是一种方便的标准单位。

通过用一个半径大一些的中空同心球面把它包围起来，球的电容可以大大增大。这时内表面的电容反比于空气层的厚度而正比于二表面的半径[①]。

W.汤姆孙爵士曾经利用这种装置作为电容的标准，｛它也曾由罗兰教授和罗斯先生在他们关于电的电磁单位和静电单位之比值的测定中应用过，见 Phil. Mag.ser.v.28，PP.304，315，｝但是把各表面制成真正的球面，把他们弄得真正同心并足够准确地测量他们的距离和半径，这却是相当困难的。

因此我们就被引导着更愿意采用那样一种形式的物体来作为电容的标准单位，其相对的表面是平行的平面。

平行平面的电容很容易测试，他们的距离可以用测微螺旋来测量，而且可以作得能够连续变化，而这是测量仪器的一种最重要的性质。

唯一剩下来的困难来自这样一个事实：平面肯定是有边的，而平面边沿附近的电分布还不曾严格地被求出。确实，如果我们把他们做成圆盘状，而圆盘的半径比他们之间的距离大得多，我们就可以把圆盘的边沿看成直线，并利用在第 202 节中描述过的由亥姆霍兹提出的方法来计算其电分布。但是应该注意到，在这一事例中，一部分电是分布在两个圆盘的背面的，而且在计算中曾经假设附近没有任何导体，而对一个小仪器来说事实却不是也不可能如此。

228.〕因此我们更愿意采用由 W.汤姆孙爵士发明的下述装置；我们可以把它叫做保护环装置，而利用这种装置，一个绝了缘的圆盘上的电量可以按照它的势来准确地加以确定。

保护环集电器

[①] ｛译注：这句话的原文意义不明,今略改，但仍欠妥。｝

Bb 是用导电材料制成的一个圆柱形的容器，它的外表面的上面是一个精密的平面。这个上面由两部分构成，一个圆盘 A，和围绕圆盘的阔环 BB，二者之间到处有一个小间隔，刚刚足以阻止火花的通过。圆盘的上表面和保护环的上表面准确地位于同一平面上。圆盘被用绝缘材料做成的支柱 GG 支住。C 是一个金属圆盘，它的下表面是精密的平面并平行于 BB。圆盘 C 比 A 大很多。它到 A 的距离用一个在图中没有画出的测微螺旋来调节和测量。

这种集电器用作一种测量仪器如下：

设 C 处于零势而圆盘 A 和容器 Bb 处于势 V。于是圆盘背面上不会有电，因为容器接近闭合并全体处于相同的势。圆盘边沿上的电也将很少，因为 Bb 和圆盘处于同势。在圆盘的面上，电将是接近均匀的，从而圆盘上的总电荷将由它的面积乘以平面上的面密度来几乎精确地表示，就如在第 124 节中给出的那样。

事实上，我们由第 201 节的考察就知道，圆盘上的电荷是

$$V\{\frac{R^2+R'^2}{8A}-\frac{R'^2-R^2}{8A}\frac{a}{A+a}\},$$

式中 R 是圆盘的半径，R′是保护环孔的半径，A 是 A 和 C 之间的距离，而a是62299不可能超过$(R'-R)\frac{\log_e 2}{\pi}$的一个量。

如果圆盘和保护环之间的间隙比 A 和 C 之间的距离小得多，则第二项将很小，而圆盘上的电荷就将很接近于

$$V\frac{R^2+R'^2}{8A}.$$

{这就和一个面密度为 V/4πA 的均匀带电的圆盘上的电荷很近似地相同，该圆盘的半径是原有圆盘和孔的半径的算术平均值。}

现在设把容器 Bb 接地。这时圆盘 A 上的电荷将不再是均匀分布的，但其数量将不改变，而且，如果我们现在使 A 放电，我们就将得到一个电荷，它的值可以根据原来的势差 V 和可以测量的量 R、R′及 A 来求出。

论集电器电容的比较

229.〕最适宜根据其各部件的形状及尺寸来用绝对单位确定其电容的那种形式的集电器，通常并不最适合电学实验之用。很重要的是，实际应用中的电容的量度应该是只有两个导电表面的集电器，其中一个表面应该尽可能近似地被另一个表面所包围。另一方面，保护环集电器却有三个独立的导电部分，他们必须按一定的顺序充电和放电。因此，最好能够通过一种电学过程来比较两个集电器的电容，以便检验后来可以用作次级标准的那些集电器。

我首先将指明如何验证两个保护环集电器的电容的相等。

设 A 是其中一个集电器的圆盘，B 是和导电容器的其余部分连在一起的保护环，C 是大圆盘，而 A′、B′、C′是另一个集电器的相应部件。

如果其中一个集电器属于更简单的类型，即只有两个导体，我们就只须略去 B 或 B′，而假设 A 是内导电表面而 C 是外导电表面，这时 C 被理解为包围着 A。

设接线步骤如下：

B 永远和 C＇相接，B＇永远和 C 相接，就是说，每一个保护环和另一电容器的大圆盘相接。

(1)令 A 和 B 及 C＇相接，并和一个莱顿瓶上带正电的电极 J 相接；令 A＇和 B＇及 C 相接，并接地。

(2)令 A、B、C＇和 J 断开。

(3)令 A 从 B 和 C＇断开，A＇从 B＇和 C 断开。

(4)令 B、C＇和 B＇、C 相接并接地。

(5)令 A 和 A＇相接。

(6)令 A、A＇和一个验电器 E 相接。

我们可以表示这些接线步骤如下：

(1)0＝C＝B＇＝A＇｜A＝B＝C＇＝J.

(2)0＝C＝B＇＝A＇｜A＝B＝C＇｜J.

(3)0＝C＝B＇｜A＇｜A｜B＝C＇.

(4)0＝C＝B＇｜A＇｜A｜B＝C＇＝0.

(5)0＝C＝B＇｜A＇＝A｜B＝C＇＝0.

(6)0＝C＝B＇｜A＇＝E＝A｜B＝C＇＝0.

在这儿，等号表示电接通而竖线表示绝缘。

在(1)中，两个集电器是相反地充电的，从而 A 为正而 A＇为负，而 A 和 A＇上的电荷是均匀分布在和每一个集电器中的大圆盘所对着的上表面上的。

在(2)中，莱顿瓶被取走，而在(3)中 A 和 A＇上的电荷被绝缘。

在(4)中，保护环和大圆盘接通，从而 A 和 A＇上的电荷尽管量值不变但现在却是分布在他们的整个表面上了。

在(5)中 A 和 A＇接通了。如果电荷是相等而反号的，则带电状态将完全消失，而在(6)中这一点用验电器 E 来进行了检验。

按照 A 或 A＇具有较大的电容，验电器 E 将指示正电荷或负电荷。

借助于一个构造适当的开关[①],所有的这些动作可以在一秒的一个很小分数之内按适当顺序完成，而且各电容也可以调节得使验电器检测不到任何电荷；用这种办法，一个集电器的电容可以调节得等于任何另一个集电器的电容或等于若干集电器的电容之和，因此就可以组成一个集电器组，其中每一个集电器的电容都是用绝对单位即英尺或米来测定了的，而同时他们的结构又是最适于电学实验之用的。

这种比较法也许在测定制成板状或盘状的不同电介质的静电比感本领方面将被证实为有用处。如果一个电介质圆盘被插入 A 和 C 之间，而圆盘比 A 大得相当多，则集电器的电容将被改变，并被弄得等于当同一个集电器的 A 和 C 相距较近时的电容。如果加了电介质板而 A、C 之间的距离为 x 的一个集电器，和不加电介质板而 A、C 之间的距离为 x＇的同一个集电器具有相同的电容，那么，如果 a 是板的厚度而 K 是相对于空气而言的电介质比感本领，则有

[①] {这样一个开关曾在霍普金孙博士关于气体和液体的静电电容的论文中加以描述，见 Phil.Trans.，1881，Part II，p.360.}

$$K=\frac{a}{a+x'-x}.$$

在第127节中描述了的那种三个柱面的组合，曾被W.汤姆孙爵士当作其电容可以按可测量的数量增大或减小的一种集电器来使用。

关于吉布孙先生和巴克雷先生用这种仪器作的实验的描述，见Proceedings of the Royal Society，Feb.2，1871，以及 Phil.Trans.，1871，P.573.他们发现固体石蜡的比感本领是 1.975，这时认为空气的比感本领是1.

第二篇　动电学

第一章　电流

230.〕我们在第 45 节中已经看到，当一个导体处于电平衡时，导体各点的势必然相同。

如果两个导体 A 和 B 被充了电，以致 A 的势高于 B 的势，则当用和他们二者相接触的一条金属线把他们接通时，A 的一部分电荷就会过渡到 B，而 A 和 B 的势就会在很短的时间内变为相等。

231.〕在这一过程的进行中，在导线 C 中观察到某些现象，这些现象叫做电流[①]。

其中第一种现象就是正电从 A 到 B 而负电从 B 到 A 的转移。这种转移也可以通过使一个绝了缘的小物体交替地和 A 及 B 相接触而用一种更慢的方式来达成。利用我们可称之为电运流的这种过程，每一个物体所带电的一个个的小部分可以转移到另一个物体上。不论在哪一种事例中，某一电量或带电状态都在物体之间的空间中沿着某一路径从一个地方运动到另一个地方。

因此，不论我们对电的本性有何见解，我们都必须承认所描述的过程构成电的一种流动。这种流动可以描述为正电从 A 到 B 的流动，或负电从 B 到 A 的流动，或这两种流动的组合。

按照菲希诺尔的学说和韦伯的学说，这是一种正电的流动和一种恰好相等的负电沿相反方向而通过相同物质的流动的组合。为了理解韦伯关于某些最有价值的实验结果的叙述，记住这种有关电流之组成的极其牵强的假说是必要的。

如果我们像在第 36 节中一样假设，在单位时间之内，有 P 个单位的正电从 A 转移到 B 而有 N 个单位的负电从 B 转移到 A，则按照韦伯的学说，应有 P＝N，而 P 或 N 就应该被取为电流的数值。

与此相反，我们对 P 和 N 之间的关系不作任何假定，而只注意流动的结果，那就是 P＋N 个单位的正电从 A 到 B 的转移，从而我们将把 P＋N 看成电流的真实量度。因此，韦伯将称之为 1 的电流，我们将称之为 2。

论恒稳电流

232.〕在处于不同势的两个绝缘导体之间的流动事例中，过程很快地就会因二物体的势的相等而停止，从而电流在本质上就是一种“瞬变电流”。

但是也有一些办法可以使导体之间的势差保持恒定，在那种情况下，电流就将以一种均匀的强度作为一种“恒稳电流”而继续流动。

伏打电池组

[①] {译注：原书还引用了“电矛盾”(electricconflict)一词作为“电流”的同义语。}

产生恒稳电流的最方便的方法是利用一个伏打电池组。

为了明确起见，我们将描述丹聂耳的恒势电池组：

一种硫酸锌的溶液放在一个多孔性的素烧瓷瓶子中，而这个瓶子又放在一个装有硫酸铜饱和溶液的容器中。一块锌浸在硫酸锌中，而一块铜浸在硫酸铜中。在液面以上，有导线焊在锌上和铜上。这一套东西，就叫做丹聂耳电池组的一个电池或单元。见第 272 节。

233.〕如果这个电池通过放在一个不导电的底座上而被绝缘，而使连在铜上的导线和一个绝了缘的导体 A 相接触，使连在锌上的导线和另一个绝了缘的并和 A 用相同金属制成的导体 B 相接触，则可以利用一个精密的静电计来证明，A 的势比 B 的高出某一个数量。这个势差叫做丹聂耳单元的“电动势”。

如果 A 和 B 现在从电池断开并利用一根导线互相连接起来，一个瞬变电流就会从 A 流向 B，而 A 和 B 的势就会变成相等。然后 A 和 B 又可以被电池所充电，而这种过程就可以重复进行，只要电池还能工作就行。但是，如果 A 和 B 用一根导线连接起来，而且像从前那样仍和电池连接着，则电池将在 C 中保持一个恒定的电流，而且也在 A 和 B 之间保持一个恒定的势差。我们即将看到，这个势差并不等于电池的总电动势，因为一部分电动势要被用来在电池本身中保持电流。

若干个电池串联起来，即用金属把第一个电池的锌和第二个电池的铜相接，如此等等，就叫做一个“伏打电池组”，这样一个电池组的电动势是它所由组成的各电池的电动势之和。如果电池组被绝了缘，作为整体它可能带电，但是铜端的势永远比锌端的势大，而二者之差就是它的电动势，不论这两个势的绝对值是什么。电池组中的那些电池可以有很不相同的构造，含有不同的化学溶液和不同的金属，如果当没有电流通过时没有化学反应继续进行的话。

234.〕现在让我们考虑两端互相绝缘的一个电池组。铜端将带正电或玻璃电，而锌端将带负电或树胶电。

现在设用一根导线把电池组的两端连接起来。于是一个电流就出现，并在一个很短的时间内达到一个恒定值。这时它就叫做一个“恒稳电流”。

电流的性质

235.〕电流形成一条回路，沿着从铜到锌的方向通过导线，并从锌到铜通过溶液。

如果把任何一条把一个电池的铜和其次一个电池的锌连接起来的导线切断，回路就被切断，电流就会停止，而连在铜上的导线的端点的势就会比连在锌上的导线的端点的势高出一个常量，这就是回路的总电动势。

电流的电解作用

236.〕只要回路是断开的，电池中就没有化学作用在继续进行，但是一旦回路接通，每一个丹聂耳电池中的锌块就会开始溶解，而在它的铜块上就会有铜沉积下来。

流酸锌的量将增加，硫酸铜的量将减少，除非有更多的硫酸铜不断地

被加进来。

被溶解的锌的量，和所沉积的铜的量，在整个回路中的每一个丹聂耳电池中都相同，不论各锌板的大小如何；而且，如果任何一个电池是具有不同的构造的，它里边的化学作用也会在数量上和丹聂耳电池中的化学作用有一个恒定的比值。例如，如果其中一个电池是由浸在用水稀释过的硫酸中的两个铂板构成的，就会有氧在电流进入液体处的那个板上放出，也就是在和丹聂耳电池的铜用金属连接着的那个板上放出，并有氢在电流离开液体处的板上即和丹聂耳电池的锌相连的那个板上放出。

氢的体积正好是在相同时间内放出的氧的体积的两倍，而氧的重量正好是氢的重量的八倍。

在回路的每一电池中，每一种溶解了的、沉积了的或分解了的物质的重量，等于一个叫做该物质之化学当量的量乘以电流的强度和电流流动的时间。

关于确立这一原理的那些实验，见法拉第《实验研究》的系列七和系列八。关于这一法则的表观例外的考察，见密勒的《化学物理学》和魏德曼的《动电》。

237.〕用这种方式分解的物质，叫做“电解质”。这种过程叫做“电解”。电流进入和离开电解质的地方叫做“电极”。其中电流所由进入电解质的电极叫做“阳极”，而电流所由离开电解质的电极叫做“阴极”。电解质分解而成的组分叫做“离子”：出现在阳极处的离子叫做“阴离子”，而出现在阴极处的离子叫做“阳离子”。

我相信这些名词是由法拉第在惠威耳博士的协助下制订的。其中前三个即电极、电解和电解质已经得到公认，而其中出现这种组分的分解和传递的导电模式叫做“电解导电”。

如果有一种均匀的电解质放在一根变截面的管子中，而电极装在这根管子的两端，则我们发现当电流通过时阴离子就出现在阳极上而阳离子就出现在阴极上，这些离子的数量是电化学地等价的，而且是共同和电解质的某一个量等价的。在管子的其他部分，不论截面是大是小，是均匀的还是变化的，电解质的成分都保持不变。因此，通过管子的每一截面进行的电解的数量都相同。因此，在截面小的地方，作用必然比在截面大的地方更强，但是在给定时间内通过任一完整截面的每一种离子的数量对所有的截面来说都是相同的。

因此，电流的强度可以用给定时间内的电解数量来量度。可以很方便地测量电解产物的数量的一种仪器叫做“电量计”。

这样量得的电流强度在回路的每一部分处都相同，而且在任一给定时间以后出现在电量计中的电解产物的总量，和在同一时间内通过任一截面的电量成正比。

238.〕如果我们在一个电池组的回路中接入一个电量计并在任何部分把回路切断，我们就可以假设电流的测量是如下进行的。设断路的两端是 A 和 B，并设 A 是阳极而 B 是阴极，让一个绝了缘的球交替地接触 A 和 B，则它在每一次行程中都会把某一个可测量的电量从 A 带到 B。这个电量可以用一个静电计来测量，它也可以通过用球的静电电容去乘回路的电动势而被算出。就这样，电就在一个过程中被一个绝了缘的球从 A 带到 B，这个过程可以叫做“运流”。与此同时，电解在电量计和电池组的各电池中

持续进行，而每一个电池中的电解数量可以和被绝缘球带过去的电量相比较。被单位电量所电解的物质的量，叫做该物质的“电化当量”。

如果用一个普通大小的球和一个可以摆弄的电池组来这样进行，这个实验就将是极其繁难和麻烦的，因为在一个可觉察数量的电解质被分解以前，必须来来回回搞了许许多多次。因此，实验必须被认为只是一种说明，而电化当量的实际测量则是用不同的方式进行的。但是这个实验也可以看成电解过程本身的一种说明。因为，如果我们把电解导电看成运流的一种，在这种运流中一个电化当量的阴离子携带着负电向阳极方向运动，而一个电化当量的阳离子携带着正电向阴极方向运动，而电的总传递量则是一个单位，那么我们就将得到有关电解过程的一种概念。就我所知，这种概念是和已知的事实并不抵触的，尽管由于我们对电的本性和化学化合物的本性不够了解，它可能只是实际上发生的事情的一种很不完善的表象。

电流的磁作用

239.〕奥斯特发现，放在直线电流附近的一个磁铁，倾向于使自己变得垂直于通过电流和磁铁的平面。见第 475 节。

假如一个人把自己的身体摆得沿着电流线的方向，使得从铜经过导线到锌的电流将从他的头向脚流，而且他的脸则向着磁铁的中心，则当电流在流时，磁铁的指北极将倾向于指向人的右手。

这种电磁作用的本性和规律，将在我们进行到本书第四编时再行讨论。目前我们所要谈到的是这样一个事实：电流有一种在电流外面起作用的磁效应；通过这种效应，电流的存在可以被确定，电流的强度可以被测量，而不必断开电路或在电流本身中接入任何仪器。

已经确定，磁作用的大小正比于由电量计中的电解产物来测量的电流强度，而和电流所流过的导体的本性完全无关，不论导体是金属还是电解质。

240.〕通过它的磁效应来指示一个电流的强度的仪器，叫做“电流计”。

电流计通常包括一个或多个用丝包线绕成的线圈，线圈内挂着一个轴线水平的磁铁。当电流在导线中通过时，磁铁就倾向于把自己摆在轴线垂直于线圈平面的方位上。如果我们假设线圈的平面是摆得和地球的赤道面相平行的，而电流是沿着太阳的表观运动方向从东向西在线圈中运行的，则线圈中的磁铁将倾向于把自己摆得使它的磁化和看成大磁铁的地球的磁化方向相同，地球的北极和罗盘指针指向南方的那一端相类似。

电流计是测量电流强度的最方便的仪器。因此我们将假设在电流规律的研究中制造这样一种仪器的可能性，而把仪器的原理留到我们的第四编中再来讨论。因此，当我们说一个电流具有某一强度时，我们就假设测量是用电流计来完成的。

第二章

电导和电阻

241.〕如果我们在一个保持着恒定电流的电路中用一个静电计来测定不同点上的电势，我们就会发现，在由温度均匀的单独一种金属构成的任何一段电路上，任何一点的势都比沿电流方向来看是更远一些的任何其他点的势大一个量，这个量依赖于电流的强度，并依赖于所研究的那一段电路的本性和尺寸。这一路段两端的势差，叫做作用在它上面的“外电动势”。如果所考虑的一段电路不是均匀的而却包含着从一种物质到另一种物质的过渡、从金属到电解质的过渡或从较热部分到较冷部分的过渡，则除了外电动势以外，还可能存在必须考虑在内的“内电动势”。

电动势、电流和电阻之间的关系，是由 G.S.欧姆博士在 1827 年发表的一篇题为《动电序列的数学研究》的论文中首先研究了的，该论文的英译本见泰勒的《科学论文集》(Taylor，ScientificMem-oirs)。在均匀导体的事例中，这些研究的结果通常称为“欧姆定律”。

欧姆定律

作用在电路任一部分的两端之间的电动势，是电流强度和该部分电路的电阻的乘积。

这里引用了一个新的名词，导体的“电阻”，它被定义为电动势和所产生的电流强度之比。欧姆曾经用实验证明，电阻一词是和一个实在的物理量相对应的，就是说，它有一个确定的值，只有当导体的本性改变时这个值才会改变。没有这种证明，名词的引用就将是没有任何科学价值的。

总之，第一，一个导体的电阻不依赖于通过导体的电流强度。

第二，电阻不依赖于导体所在的势，也不依赖于导体表面上的电分布的密度。

它完全依赖于构成导体的材料的本性、导体各部分的聚集态和导体的温度。

导体的电阻可以测量到它的值的万分之一乃至十万分之一的精确度，而且已经测试过的导体是如此之多，以致我们关于欧姆定律之真确性的信心现在是很大的了[①]。在第六章中，我们将追索它的应用和推论。

电流的生热

242.〕我们已经看到，当一个电动势使一个电流通过一个导体而流动时，电就从高势的地方转移到低势的地方。假如这种转移是通过运流来进行的，也就是通过在一个球上带着一个个的电荷从一个地方到另一个地方来的运动进行的，电力就会对球作功，而这种功就将需要说明。在一些干

[①] {关于针对各种金属导体对欧姆定律所作的验证，见 B.A.Report 1866p.36 上克里斯陶的文章，他证明了一条导线对无限弱的电流而言的电阻和它对很强的电流而言的电阻约相差百分之 10-10；关于针对电解质对该定律所作的验证，见 B.A.Report1886 上斐兹杰惹和特罗顿的文章。}

堆电路中，它也确实以一种部分的方式得到了说明；在那些电路中，电极被作成钟形，而运送电的小球则像一个摆似地在两个钟之间运动并交替地敲响他们。用这种办法，电作用被弄得和摆的摆动步调一致并把钟声传到远处。在导线的事例中，我们有同样的从高势处到低势处的电转移而没有任何的外功被作出。因此，能量守恒原理就引导我们到导体中去寻找内功。在一种电解质中，内功部分地表现为电解质组分的被分离。在其他导体中，它完全转化为热。

在这一事例中，转化为热的能量等于电动势和通过的电量的乘积。但是电动势等于电流和电阻的乘积，而电量等于电流和时间的乘积。由此可见，热量乘以热功当量就等于电流强度的平方乘以电阻再乘以时间。

在克服电阻中由电流产生的热量，曾由焦耳博士测定过。他首次确定了，在给定时间内产生的热量正比于电流的平方，而且后来又通过所有各有关量的仔细的绝对测量，证实了方程

$$JH=C^2Rt,$$

式中 J 是焦耳的热功当量，H 是热量，C 是电流强度，而 t 是电流流动的时间。电动势、功和热之间的这些关系，由 W.汤姆孙爵士在一篇关于机械效应对电动势测量之应用的论文中第一次作出了充分的解释[①]。

243.〕初看起来，电的传导理论和热的传导理论之间的类似性是完全的。如果我们取两个在几何上相似的体系，假设第一个体系中任一点上的热导率比个于第二个体系中对应点上的电导率，而且令第一个体系中任一部分处的温度正比于第二部分中对应点上的电势，则通过第一个体系中任一面积的热流将正比于通过第二个体系中对应面积的电流。

于是，在我们已经作出的说明中，既然电的流动对应于热的流动，而电势对应于温度，那么电就倾向于从高势处流向低势处，正如热倾向于从高温处流向低温处一样。

244.〕因此，电势理论和温度理论可以弄成互相例示的形式，然而在电现象和热现象之间却有一个引人注目的差别。

用一根丝线把一个导电物体挂在一个闭合的导电容器中并使容器带电。容器和它内部所有东西的势将立即升高，但是，不论容器被多么强烈地充了电，不论它里边的物体是否和它相接触，容器内部都不会出现任何带电的迹象，而且当物体被拿出时它也不会显示任何电效应。

但是如果容器被加热到一个高的温度，器内的物体也将达到相同的温度，但那要在一段相当长的时间以后，而且，如果后来把它拿出来，它就会是热的，而且它会保持为热的，直到它继续放了一段时间的热以后。

两种现象的差别在于这样一件事实：物体能够吸热和放热，而在电的方面他们却没有对应的性质。不向物体供应一定量的热，就不可能使它热起来，而所需的热量依赖于物体的质量和比热，但是一个物体的电势却可以用上述方法提高到任何程度而不必把任何的电传给该物体。

245.〕另外，假设一个物体首先被加热然后被放在闭合容器中。容器的外表面起先将和周围的物体温度相同，但它不久就会热起来，而且将保持为较热，直到内部物体所有的热都被放掉为止。

进行一个对应的电学实验是不可能的。不可能使一个物体带电，然后

[①] Phil.Mag.，Dec.1851.

把它放在一个中空容器中，而使容器的外表面起初并不显示任何的带电现象，但是后来却带了电。法拉第曾经徒劳地寻求过的所谓“ 绝对电荷 ”，正是某种这一类的现象。热可以隐藏在一个物体的内部而没有外部作用，但是却不可能把一个电量隔离起来，以阻止它和一个种类相反的相等电量处于经常的感应之中。

因此，在电现象中就没有任何东西和一个物体的热容量相对应。这可以从本书所肯定的学说中立刻推出来；那学说就是，电和一种不可压缩的流体服从相同的连续性条件。因此就不可能通过把一个附加的电量挤入任何物质中而使它得到一个体电荷。参阅第 61、111、329、334 各节。

第三章

接触物体之间的电动势

接触中的不同物质的势

246.〕如果我们把一个中空导电容器的势定义为器内空气的势，我们就可以借助于在第一编第 221 节中描述了的一个静电计来确定这个势。

如果现在取两个用不同金属例如铜和锌做成的中空容器，并使他们互相处于金属接触之中，然后检测每一个容器中的空气的势，则锌质容器中的空气的势和铜质容器中的空气的势相比将是正的。势差依赖于各容器的内表面的本性；当锌是光亮的而铜上附有一层氧化物时，势差最大。

由此可见，当两种金属互相接触时，通常会有一个电动势从一种金属向另一种金属作用着，以促使一种金属的势超过另一种金属的势。这就是伏打有关“接触电”的理论。

如果我们取一种金属例如铜作为标准，那么，如果铁在和势为零的铜相接触时的势是 I 而锌在和势为零的铜接触时的势为 Z，则锌在和势为零的铁相接触时的势将是 Z—I，如果各金属周围的媒质保持相同的话。

这种结果对任何三种金属都是对的。由这种结果可知，温度相同的任何两种金属相接触时的势差，等于他们和第三种金属相接触时二势之差，因此，如果一个电路由温度相同的任意几种金属所形成，则各金属一经得到了他们的适当的势，电路中就将存在一种电平衡，从而电路中就不会有电流继续存在。

247.〕然而，如果电路由两种金属和一种电解质所构成，则按照伏打的理论，电解质将倾向于使和它接触着的两种金属的势变成相等，于是金属接触点上的电动势就不再是被平衡掉的，而一个连续的电流就会得到保持。这个电流的能量由发生在电解质和金属之间的化学作用来提供。

248.〕然而，电效应也可以不用化学作用来产生，如果我们能够用任何别的办法来使相接触的两种金属的势

相互接近的话。例如，在 W．汤姆孙爵士所作的一个实验中[①]，一个铜漏斗被放在和一个竖直的锌圆筒相接触的位置上，从而当使一些铜屑通过漏斗时，他们就在锌筒的中部互相分开并离开漏斗而落入放在下面的绝缘接收器中。于是接收器就被发现为带负电，而且它的电荷将随着碎屑的不断下落而增加。与此同时，里边放了铜漏斗的那个锌筒就会越来越多地带正电。

如果现在用一根导线把锌筒和接收器连接起来，导线中就会有一个正电流从锌筒流向接收器。每一片铜屑都由于感应而带了负电，而铜屑流就形成从漏斗到接收器的一个负电流，或者换句话说，形成从接收器到铜漏斗的一个正电流。于是正电流就（由铜屑携带着）通过空气从锌流到铜，并通过金属联线而从铜流到锌，正如在普通的电池电路中一样。但是，在这一事例中，保持电流的力不是化学作用而是重力，这种重力使铜屑下落，尽管有带正电的漏斗和带负电的铜屑之间的电吸引力。

[①] North British Review，1864，p.353；以及 Proc.R.S.，June20，1867.

249.〕接触电理论的一种引人注目的证实曾由珀耳帖的发现所给出。他曾发现，设有一个电流通过两种金属的接触点，当电流沿一个方向流动时接触点就发热，而当它沿相反方向流动时接触点就变冷。必须记得，一个电流在通过一种金属时永远产生热，因为它会遇到电阻。因此，整个导体中的冷却效应必然永远小于发热效应。从而我们就必须区分每一种金属中由普通的电阻而引起的发热和两种金属接头处的热的产生或吸收。我们将把前者称为由电流引起的热的摩擦产生，而正如我们已经看到的那样，这种热量正比于电流的平方，从而不论电流沿正方向还是沿负方向流动热量都是相同的。我们可以把第二种效应叫做珀耳贴效应，它随着电流的变号而变号。

在由两种金属形成的组合导体的一个部分中，产生的总热量可以表示成

$$H=\frac{R}{J}C^2t-\Pi Ct,$$

式中 H 是热量，J 是热功当量，R 是导体的电阻，C 是电流，而 t 是时间；Π是珀耳帖效应的系数，也就是单位电流在单位时间内在接触点上吸收的热量。

喏，产生的热和在导体中反抗电力所作的功是在力学上等价的；就是说，它等于电流和产生电流的电动势的乘积。由此可见，如果 E 是使电流通过导体而流动的那个外电动势，则有

$$JH=CEt=RC^2t-J\Pi Ct,$$

从而

$$E=RC-J\Pi.$$

由这一方程可以看到，推动电流通过组合导体所需要的外电动势，比只由它的电阻所要求的电动势小一个电动势 JΠ。因此 JΠ就代表在接触点上沿正方向发生作用的电动势。

由 W.汤姆孙爵士[①]作出的这种热的动力理论对区域性电动势之确定的应用，具有很大的科学重要性，用导线把组合导体的两个点和一个电流计或验电器的两个极连接起来的那种普通方法，将由于导线和组合导体物质接头处的接触力而成为无用的。另一方面，在热学方法中，我们知道能量的唯一来源是电流，而除了使那一部分导体变热以外电流在电路的一部分中不作任何的功。因此，如果我们能够测量电流的大小和产生的或吸收的热量，我们就能确定促使电流通过那一部分导体时所需要的电动势，而且这种测量是和电路其他部分中的接触力效应完全无关的。

用这种方法测定的二金属接头处的电动势，并不能说明在第 246 节中描述的那种伏打电动势。后者通常是比本节所述的这种电动势大得多的，而且有时是符号相反的。因此，认为一种金属的势应该用和它接触着的空气的势来量度的那种假设就必然是错误的，而且伏打电动势的较大部分不应该到两种金属的接头处去找，而应该到把金属和形成电路之第三种单元的空气或其他媒质的一个或两个分界面上去找。

250.〕塞贝克发现，当接触点处于不同的温度时，由不同金属构成的电路中出现温差电流；这就表明，一个闭合电路中的接触势并不是永远互相平衡的。然而很明显，在由均匀温度下的不同金属构成的闭合电路中，

[①] Proc.R.S.Edin.,Dec.15,1851;以及 Trans.R.S.Edin.,1854.

接触势必然互相平衡。因为，假若不是这样，电路中就会出现电流，而这个电流就可以带动一个机器或在电路中产生热，也就是说可以作功，而与此同时却没有能量的任何消耗，因为电路到处的温度相同，而且也没有化学变化或其他的变化发生。由此可见，如果在由两种金属 a 和 b 的接触点上当电流从 a 流到 b 时珀耳帖效应用 Π_{ab} 来代表，则对由同温下的两种金属构成的电路来说，应用

$$\Pi_{ab}+\Pi_{ba}=0,$$

而对由三种 a、b、c 构成的电路来说，我们必有

$$\Pi_{bc}+\Pi_{ca}+\Pi_{ab}=0.$$

由这一方程可知，三个珀耳帖效应并不是独立的，而是其中一个可由另外两个推出。例如，如果我们假设 c 是一种标准金属，并写出 $P_a=J\Pi_{ac}$ 和 $P_a=J\Pi_{bc}$，则有

$$J\Pi_{ab}=P_a-P_b.$$

P_a 这个量是温度的函数，并取决于金属 a 的本性。

251.〕马格努斯也曾证明，如果一个电路是由单独一种金属构成的，电路中就不会形成任何电流，不论导体的截面和温度怎么变化[①]。

既然在这种事例中存在热传导以及由此引起的能量耗散，我们就不能像在以前的事例中那样把这一结果看成显而易见的。例如，电路两部分之间的电动势可能取决于电流是从导体的较粗部分流向较细部分还是相反，也可能取决于它是迅速地或缓慢地从较热部分流向较冷部分还是相反，而这就会使得由一种金属构成的不均匀加热的一个电路中的电流成为可能。

因此，利用和在珀耳帖现象的事例中相同的推理，我们就得到，如果电流在单一金属导体中的通过会引起任何的热效应，而当电流反向时该效应也反向，则这只有当电流从高温处流向低温处或从低温处流向高温处时才是可能发生的，而且，如果当从温度为 x 处流到温度为 y 处时在导体中产生的热是 H，则

$$JH=RC^2t-S_{xy}Ct,$$

而倾向于保持这一电流的电动势则是 S_{xy}。

如果 x、y、 z 是一个均匀电路中三个点上的温度，则按照马格努斯的结果，我们必有

$$S_{yz}+S_{zx}+S_{xy}=0.$$

因此，如果我们假设 x 是零温度，并令

$$Q_x=S_{xz} \text{ 而 } Q_y=S_{yz},$$

我们就得到

$$S_{xy}=Q_x-Q_y,$$

式中 Q_x 是温度 x 的一个函数，其函数形式取决于金属的本性。

如果我们现在考虑由两种金属 a 和 b 构成的一个电路，设电流从 a 流入 b 处的温度为 x 而它从 b 流入 a 处的温度为 y，则电动势将是

$$F=P_{ax}-P_{bx}+Q_{bx}-Q_{by}+P_{by}-P_{ay}+Q_{ay}-Q_{ax},$$

---

① {勒·罗意曾经证明，当各截面上存在突然的变化，以致在一段可以和分子距离相比的距离上出现有限大小的温度改变时，这一结果就是不成立的。}

式中 P_{ax} 代表金属 a 在温度 x 下的 P 值，或者说

$$F=P_{ax}-Q_{ax}-(P_{ay}-Q_{ay})-(P_{bx}-Q_{bx})+P_{by}-Q_{by}$$

既然在非均匀加热的不同金属的电路中一般是存在温差电流的，那就可以推知 P 和 Q 一般对同一金属和同一温度来说是不同的。

252.〕Q 这个量的存在最初是由 W.汤姆孙爵士在我们已经提到的论文中作为由克明[①]发现的温差电反转的一种推论而证实了的；克明发现，某些金属在温差电系列中的次序在高温下和在低温下是不同的，从而对一个确定的温度来说两种金属可以是无分轩轾的。例如，在由铜和铁构成的一个电路中，如果一个接触点保持在常温而另一个接触点的温度被提高，则有一个电流在热接触点上从铜流入铁中，而且电动势不断增大，直到热接触点达到一个温度 T 时为止，而按照汤姆孙的研究，这个温度约为 284℃。当热接触点的温度进一步升高时，电动势就变小，而到最后，如果温度升得够高，电流就会反向。电流的反向可以通过升高冷接触点的温度来更容易地得到。如果两个接触点的温度都高于 T，则电流在热接触点上从铁流入铜中，也就是和在两个接触点的温度都低于 T 时观察到的电流方向相反。

由此可见，如果一个接触点的温度是中性温度 T，而另一个接触点则较热或较冷，电流就总是将在中性温度的接触点上从铜流入铁中。

253.〕由这一事实出发，汤姆孙推理如下：假设另一个接触点处于一个低于 T 的温度。电流可被用来带动一个机器或在一根导线中产生热，而能量的消耗必将由从热到电能的转变来补充，也就是说热必许在电路的某个地方消失。现在，在温度 T 下，铜和铁是势均力敌的，从而在热接触点上不会有可逆的热效应，而在冷接触点上则由珀耳帖原理将由电流产生热。由此可见，热可以消失的唯一所在就是电路的铜段或铁段，因此，或是铁中一个从热到冷的电流将冷却铁，或是铜中一个从冷到热的电流将冷却铜，或是两种效应都可能发生。｛这种推理假设温差接触点在有电流通过时只作为一个热机而起作用，而在形成接触点的物质的能量方面没有任何别的变化（例如像电池组中那样的变化）.｝通过一系列精心设计的巧妙实验，汤姆孙成功地探测到了电流在流过温度不同的导体部分时的可逆的热作用，而且他发现电流在铜中和铁中将产生相反的效应[①]。

当一种物质性的流体在一根管子中从热的部分流到冷的部分时，它就使管子变热，而当它从冷的部分流到热的部分时，它就使管子变冷，而且这些效应依赖于流体的比热。假如我们假设电无论正负都是一种物质性的流体，我们就将可能通过非均匀加热导体中的热效应来量度电流体的比热。现在汤姆孙的实验证明，铜中的正电和铁中的负电都把热从热处带到冷处。由此可见，假如我们假设正电或负电是可以被加热和被冷却并能够把热传给其他物体的一种流体，我们就会发现这种命题对正电而言被铁所否定而对负电而言被铜所否定，从而我们将不得不放弃这两种假说。

关于电流对非均匀加热的单一金属的可逆效应的这种科学预见，又是应用能量守恒学说来指明科学研究新方向的一个很有教育意义的范例。汤姆孙也曾经应用热力学第二定律来指明了我们用 P 和 Q 来代表的那些量之

[①] Cambridge Transactions,1823.

[①] Onthe Electrodynamic Qualities of Metals.'Phil.Trans.,PartⅢ,1856.

间的关系，而且也研究了沿不同方向有着不同结构的那些物体的可能的温差电性质。他也在实验上研究了这些性质通过压力、磁化等等而得到发展的那些条件。

254.〕泰特教授[①]近来研究了接触点温度不相同的由不同的金属构成的电路中的电动势。他发现，一个电路的电动势可以很准确地用公式

$$E = a(t_1 - t_2)[t_0 - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)],$$

来表示，式中 t_1 是热接触点的绝对温度，t_2 是冷接触点的绝对温度，而 t_0 是两种金属相互中立时的温度。因子 a 是取决于构成电路的两种金属的本性的一个系数。这条定律曾由泰特教授和他的学生们在相当大的温度范围内进行了验证，而且他希望把温差电路弄成一种测温仪器，使之可以应用于他的关于热传导的实验中，以及汞温计不便于应用或其温度范围不足的其他事例中。

按照泰特的理论，汤姆孙称之为电的比热的那个量在每一种金属中都和温度成正比，尽管它的量值乃至正负号是随金属的不同而不同的。他由此而用热力学的原理导出了下述的结果。设 $k_a t$、$k_b t$、$k_c t$ 是三种金属 a、b、c 的比热，而 T_{bc}、T_{ca}、T_{ab} 是每两种金属互相中立时的温度，则方程

$$(k_b - k_c)T_{bc} + (k_c - k_a)T_{ca} + (k_a - k_b)T_{ab} = 0,$$

$$J\Pi_{ab} = (k_a - k_b)t(T_{ab} - t),$$

$$E_{ab} = (k_a - k_b)(t_1 - t_2)[T_{ab} - \frac{1}{2}(t_1 + t_2)]$$

将表示一个温差电路的各中立温度、珀耳贴效应的值和电动势之间的关系。

[①] Proc.R.S.Edin.,Session1870－71,p.308,亦见 Dec.18,1871.

第四章

电解导电

255.〕我已经叙述过，当一个电流在电路的任一部分通过一种叫做“电解质”的化合物时，它的通过就是由一种叫做“电解”的化学过程伴随着的；在这种过程中，化合物被分解成两种叫做“离子”的成分，其中一种叫做“阴离子”，或带负电的成分，它出现在阳极处，或电流进入电解质的地方，另一种叫做“阳离子”，出现在阴极处，或电流离开电解质的地方。

电解的全面考察有很大一部分属于化学，正如也有一部分属于电学一样。我们将从电学的观点来考虑它，而不考虑它在化合物的构造理论方面的应用。

在所有的电现象中，电解似乎是最有可能向我们提供一种关于电流之真实本性的实在识见的现象，因为我们发现普通物质的流动和电的流动都形成同一现象的本质性的部分。

也许正是由于这个原因，在目前还很不完善的我们关于电的概念状况下，电解的理论才是如此不能令人满意的。

由法拉第确立了的并迄已被比茨、希托尔夫等人的实验所证实了的基本电解定律如下：

在给定时间内由一个电流的通过而分解的一种电解质的电化当量数，等于在同一时间由电流所传递的电量的单位数。

一种物质的电化当量，就是通过该物质的单位电流在单位时间内所电解的该物的数量，或者换句话说，就是当单位电量通过时电解的数量。当电量的单位是用绝对单位定义的时，每一种物质的电化当量的值就可以用格令或克来计算。

不同物质的电化当量正比于他们的普通的化学当量。然而，普通的化学当量只是各物质互相化合时的数值比，而电化当量则是物质的一种具有确定量值的性质，它的量值依赖于电量的单位。

每一种电解质都包括两种组分，他们在电解过程中出现在电流进入和离开电解质的地方而不出现在任何别的地方。因此，如果我们设想在电解质的内部画一个曲面，则用沿相反方向通过曲面的各组分的电化当量数来量度的通过该面而进行的电解的数量，将正比于通过该曲面的总电流。

因此，沿相反方向而通过电解质的那些离子的实际传递，就是电流通过电解来传导的那种现象的一个部分。在电流所通过的那种电解质中的每一点上，也有阴离子和阳离子的两个物质流，他们和电流具有相同的流线，并且在量值上和电流成正比。

因此就可以极其自然地假设，离子流就是电的对流，而特别说来，每一个阳离子是带有一个确定的正电荷的；这一电荷在一切阳离子上都相同，而每一个阴离子则带有一个相等的负电荷。

于是，离子通过电解质的反向运动就将是电流的一种完备的物理表象。我们可以把这种离子运动和扩散过程中气体和液体互相通过的运动相比较；这两种过程间有一种区别，那就是，在扩散中，不同的物质只是互相混合的，而且混合物是不均匀的，而在电解中，不同的物质是化合的，

而且电解质是均匀的。在扩散中，一种物质在一个给定方向上的运动的决定性原因就在于每单位体积中的该物质数量沿该方向的减小，而在电解中，每一种离子的运动都起源于作用在带电分子上的电动势。

256.〕克劳修斯[①]曾经在物体的分子骚动理论方面进行过许多的研究；他曾假设一切物体的分子都处于一种经常骚动的状态，但是在固体中，每一个分子永远不会离它的原始位置远于一定的距离，而在流体中，一个分子在从它的原始位置运动离开一定的距离以后，却有同样的可能性来继续远离或开始回向原位置。因此，在表观上静止的一种流体中，各分子是不断地改变着自己的位置，并无规则地从流体的一部分过渡到另一部分的。在化合物的流体中，他假设不仅仅化合物的分子是这样运动的，而且在发生于各化合物分子之间的碰撞中，组成化合物分子的那些分子还常常分开并交换伙伴，从而某一个别原子就时而和某一个种类相反的原子相结合，时而又和另一个那种原子相结合。克劳修斯假设这种过程是一直在液中进行着的；但是当一个电动势作用在液体上时，起先在一切方向并无不同的分子运动就会受到电动势的影响，从而带正电的分子就比趋于正极具有较大的倾向趋于负极，而带负电的分子则有较大的倾向沿相反的方向而运动。因此，阳离子在其自由阶段内就将努力奔向阴极，但是他们却不断因为和阴离子短期配对而耽误行程，而阴离子也是不断地在离子群中挤着前进的，不过是沿着相反的方向。

257.〕克劳修斯的理论使我们能够理解，尽管一种电解质的实际分解需要一个有限大小的电动势，怎么电解质中的电传导还会服从欧姆定律，使得电解质中每一个哪怕是最微弱的电动势都产生一个量值与之成正比的电流。

按照克劳修斯的理论，电解质的离解和复合即使当没有电流时也是不断进行着的，而最微弱的电动势就足以使这种过程得到某种程度的方向性，并从而产生离子流和作为现象之一部分的电流。然而，在电解质中，离子根本不会以有限的数量被释放，而正是这种离子的释放才要求一个有限的电动势。在电极那儿，离子会积累起来，因为相继到来的那些离子不是在那里找到很容易和他们结合的反号的离子，而却发现自己置身于不能与之结合的同类离子群中。产生这种效应所要求的电动势是有一个有限量值的，而且它也形成一个反向的电动势，并当其他电动势被取消时将产生一个反向的电流。当由于离子在电极上的积累而引起的这种逆电动势被观察到时，电极就叫做被“极化”了。

258.〕确定一个物体是不是一种电解质的最好的方法就是把它放在两个铂电极之间并给它通一段时间的电流，然后，把电极从电池组切断而把他们接在一个电流计上，并观察是否有一个由电极的极化而引起的反向电流通过电流计。这样一个电流既然起源于不同物质在两个电极上的积累，它也就是物质曾被来自电池组的原有电流所电解的一个证明。当用直接的化学方法来探测分解产物在电极上的出现有困难时，这种方法常常可以应用。见第 271 节。

259.〕到此为止，电解理论都显得是很令人满意的。它借助于电解质的物质组分流来解释了我们不理解其本性的电流，而那些组分的运动虽然

[①] Pogg.Ann.ci.p.338(1857).

不能为肉眼所见但却是很容易证实的。正如法拉第所指明的那样，这种理论也解释了为什么在液态下可以导电的一种电解质当凝固以后却不是一种导体。这是因为，除非各分子能够从一个地方运动到另一个地方，就不能出现任何的电解导电，因此，为了成为一种导体，物质就必须通过融解或溶解而处于液态。

但是，如果我们继续下去，并假设电解质中的离子确实带有一定数量的正的或负的电荷，从而电解电流不过是一种对流，我们就会发现这种诱人的假说会把我们引导到很困难的处境中去。

首先，我们必须假设，在每一种电解质中，每一个阳离子当在阴极上被释放时都会传给阴极一个正电荷，而这个正电荷不仅对该阳离子来说而且对所有其他的阳离子来说都应该是相同的。同样，每一个阴离子在被释放时也将传给阳极一个负电荷，其数值和由阳离子传递的正电荷相等而符号相反。

如果我们不是考虑单独一个离子而是考虑形成该离子的一个电化当量的一群离子，则所有离子上的总电荷就像我们已经看到的那样是一个正的或负的单位电量。

260.〕我们还不知道在任何一种物质的一个电化当量中共有多少个分子，但是由许多物理考虑所制订的化学分子理论却假设一个化学当量中的分子数对一切物质来说都是相同的。因此在关于分子的思索中我们就可以假设一个化学当量中的分子数 N；这在目前还是一个未知的数，但是我们在以后可以设法确定它[①]。

因此，每一个分子当从化合态中被释放时都带走一个电荷，其量值是 $\frac{1}{N}$，其符号对阳离子为正而对阴离子为负。我们将把这个确定的电荷叫分子电荷。假如它是已知的，它就将是最自然的电量单位。

到此为止，我们通过在追索分子的带电和放电方面运用我们的想像而增大了我们的概念的精确性。

离子的释放和正电从阳极被送到阴极是同时的事件。离子当被释放时是不带电的，从而在化合状态下他们就将带有如上所述的分子电荷。

然而，分子的带电虽然谈起来容易，想像起来却并非容易。

我们知道，如果两种金属被放得在任一点上互相接触，则他们的表面的其余部分将带电，而如果这些金属做成平板的形式，而且中间由一个很窄的空气间隙所隔开，每个板上的电荷就可以变得相当大，当一种电解质的两种组分互相化合时，可以设想发生了某种类似的情况。可以假设，每一对分子将在一个点上互相接触，而他们的表面的其余部分则由于接触电动势而带了电。

但是，要想解释电有现象，我们就必须证明为什么这样产生的每一个分子上的电荷具有一个确定的数量，以及为什么当一个氯分子和一个锌分子相结合时，其分子电荷与一个氯分子和一个铜分子相结合时的分子电荷相同，尽管氯和锌之间的电动势比氯和铜之间的电动势大很多。如果分子的带电是接触电动势的效应，为什么强弱不同的电动势应该产生恰好相等的电荷呢？

[①] 见第 5 节的小注。

然而，假设我们通过简单地肯定分子电荷的常量值来跳过这一困难，并假设我们为描述上的方便而把这个常量分子电荷称为电的一个分子。

这个说法尽管很粗略，而且和本书的其余部分也不协调，但是它却使我们至少能够清楚地叙述关于电解的已知情况，并领会那些突出的困难。

每一种电解质必须被看成它的阴离子和阳离子的二元化合物。阴离子或阳离子或两种离子都可以是组合物体，从而一个阴离子或阳离子可以是由简单物体的若干个分子｛原子｝所构成的。一个阴离子和一个阳离子相结合，就形成电解质的一个分子。

为了在电解质中作为一个阴离子而起作用，起作用的分子必须带有我们已经称之为电分子的一个负电荷，而为了作为一个阳离子而起作用，分子则必须带有一个电分子的正电荷。

这些电荷，只有当各分子作为阴离子和阳离子而在电解质中互相化合时才是联系在分子上的。

当各分子被电解时，他们就把电荷带到电极那儿去，而当从化合中被释放时他们就作为不带电的物体而出现。

如果同一个分子能够在一种电解质中作为阳离子而起作用，而在另一种电解质中则作为阴离子而起作用，而且也能够参加到不是电解质的化合物中去，我们就必须假设当作为阳离子而起作用时它就得到一个正电荷，当作为一个阴离子而起作用时它就得到一个负电荷，而当不在电解质中时它就不带电荷。

例如，碘在金属碘化物和氢碘酸中是作为阴离子而起作用的，但是在碘的溴化物中却据说是作为阳离子而起作用的。

这种分子电荷的学说可以作为一种方法，我们可以用这种方法来记住有关电解的许多事实。然而，当我们终于理解了电解的真实本性时，我们仍然保持任何形式的分子电荷学说的可能性却是非常小的，因为那时我们将已经得到一种可靠的基础来建立一种真实的电流理论，并从而不再依赖于这些暂时性的学说了。

261.〕我们关于电解的知识的最重要步骤之一曾经是一些次级化学过程的认知；当各离子从电极那儿被放出时，这些次级过程就会出现。

在许多事例中，在电极那儿被发现的并不是电解质的实际离子，而是这些离子对电极的作用的产物。

例如，当一种硫酸苏打溶液被一个也通过了稀硫酸的电流所电解时，在硫酸苏打中的阳极和硫酸中的阳极上将得出相等数量的氧，而在各阴极处就得到相等数量的氢。

但是，如果电解在 U 形管或加了多孔壁障的容器之类的适当容器中进行，从而每一电极周围的物质都可以分别检查的话，那就会发现，在硫酸苏打中的阳极处，既存在一个当量的氧也存在一个当量的硫酸，而在阴极处则既存在一个当量的氢也存在一个当量的苏打。

初看起来，按照盐类构造的旧理论，似乎是硫酸苏打被电解成了它的组分硫酸和苏打，而溶液中的水则同时被电解成了氧和氢。但是这种解释将引导人们承认，通过稀硫酸并电解了一个当量的水的同一个电流，当它通过硫酸苏打的溶液时就既电解一个当量的水又电解一个当量的硫酸盐，而这就将是和电化当量定律相矛盾的。

但是，如果我们假设硫酸苏打的组分不是 SO_3 和 Na_2O 而是 SO_4 和 Na_2

（不是硫酸和苏打而是硫酸根和钠），则硫酸根将运动到阳极并被放出；但是由于不能自由存在，它将分解成硫酸和氧，各一当量。与此同时，钠也在阴极上被放出并在那里使溶液中的水分解，形成一当量的苏打和一当量的氢。

在稀硫酸中，收集在两个电极处的气体是水的组分，即一个体积的氧和两个体积的氢。阳极处的硫酸也有所增多，但它的量不等于一当量。

纯水是不是一种电解质是有疑问的。水的纯度越大，它在电解导电中的电阻就越大。极少的一点杂质就足以引起水的电阻的很大的减低。不同观察者所测定的水的电阻很不一致，从而我们还不能认为它是一个确定的量。水越纯电阻越大，从而假如我们能得到真正纯的水，它到底还能否导电就是很可疑的了①。

只要水还被看成一种电解质，而事实上它是被当作电解质的典型的，那就有很强的理由认为它是一种二元化合物，而且两个体积的氢是在化学上和一个体积的氧相等价的。然而，如果我们承认水不是一种电解质，我们就可以自由地假设一个体积的氧和一个体积的氢是在化学上等价的。

气体的分子运动论引导我们假设，在理想气体中，相同的体积中永远包含着相同数目的分子，而且比热的主要部分，即依赖于分子彼此之间的骚动的那一部分，对于一切气体的相同数目的分子来说是相同的。因此我们就更喜欢一种化学体系，在那里，体积相等的氧和氢被认为是等价的，而水是由两个当量的氢和一个当量的氧化合而成的，从而或许是不能直接电解的。

尽管电解现象充分确立了电现象和化合现象之间的密切关系，但是并非每一种化合物都是一种电解质这一事实却表明，化合过程是比任何单纯的电现象复杂程度更高的。例如，尽管金属是良导体，而且他们在接触带电的序列中占据着不同的位置，但是金属的一些结合物却甚至在液态下也不能被一个电流所分解①。作为阴离子而起作用的那些物质的多数结合物都不是导体，从而也不是电解质。此外我们还有许多化合物，他们包含着和一些电解质的组分相同的组分，但不是按当量的比例来包含的；这些化合物也不是导体，从而也不是电解质。

关于电解中的能量守恒

262.〕试考虑包括着一个电池组、一条导线和一个电解池的任一电路。

在单位电荷通过电路的任一截面的过程中，不论是在伏打电池中还是在电解池中，每一种物质都将有一个电化当量被电解。

和任一给定的化学过程相等价的机械能的数量，可以通过把由该过程引起的全部能量转化为热并乘以焦耳的热功当量而换算成力学单位来确定。

在这种直接方法不适用的地方，如果我们能够估计由各物质在归结到

---

① ｛见 F.Kohlrausch,‘Die Elektrische Leitungsf(higkeit des im Vacuum distillirten Wassers.’Wied. Ann. 24,p.48.Bleekrode Wied.Ann.3,p.161,曾经证明纯盐酸不是导体。｝

① ｛见 Roberts－Austen,B.A.Report,1887.｝

同一末状态的过程中放出的热，即首先考虑它在过程以前的状态，然后考虑它在过程以后的状态，则过程的热当量将是这两个热量之差。

在化学作用保持一个伏打电路的事例中，焦耳发现在伏打电池中发生的热少于由电池中的化学过程所造成的热，而其多余的热量则是在连接导线中发出的，或者，如果电路中有一个电机，一部分热量就可以用机器所作的机械功来说明。

例如，如果伏打电池的两极首先是用短而粗的导线连接，而后改用长而细的导线连接的，则对被溶解的每一格令锌来说，电池中产生的热量在第一事例中将比在第二事例中更大，但是导线中产生的热量在第二事例中却比在第一事例中为大。对于被溶解的每一格令锌来说，在电池中发生的热量和在导线中发生的热量之和在两个事例中是相同的。这一点已由焦耳用直接的实验确证过了。

电池中产生的热量和导线中产生的热量之比等于电池电阻和导线电阻之比，因此，假如导线被做得电阻够大，则几乎全部的热量都将是在导线中产生的，而假如它被做得有够大的导电本领，则几乎全部的热量都将是在电池中产生的。

设导线被做得具有很大的电阻，则以力学单位计的在导线中产生的热量就等于传送过去的电量和传送中所受到的电动势的乘积。

263.〕现在，在电池中的一个电化当量的物质经历引起电流的那种化学过程的时间之内，一个单位的电量将通过导线。因此，由一个单位电量的通过所产生的热量，在这一事例中就是用电动势来量度的。但是这一热量就是一个电化当量的物质当经历所给的化学过程时所产生的，不论是在电池中还是在导线中产生。

由此就得到首先由汤姆孙证明了的重要定理如下(Phil,Mag,Dec.1851)：

“以绝对单位计的一个电化学仪器的电动势，等于作用在一个电化当量的物质上的化学作用的机械当量①。”

许多化学作用的热当量已由安德鲁斯、赫斯、否尔和则耳伯曼、汤姆孙等人所测定，而由这些热当量就可以通过乘以热功当量而推得他们的机械当量。

这一定理不仅使我们能够根据纯粹的热数据来计算不同的伏打装置的电动势，并计算在不同的事例中达成电解所必需的电动势，而且也提供了实际地测量化学亲和势的手段。

长时间以来人们已经知道，化学亲和势，或者说指向某些化学变化之发生的那种趋势，在某些事例中是比在另一些事例中更强的，但是这一趋势的任何适当的量度却都没能得出，直到证明了这一趋势在某些事例中恰恰和一个电动势相等价，从而可以按照测电动势的相同原理来加以测量时为止。

因此，在某些事例中，化学亲和势被归结成了一个可测量的量的形式；这样一来，化学过程的整个理论，他们的进行速率的理论，一种物质

① {只有当电池中不存在可逆的热效应时，这一定理才是适用的；当存在这种效应时，电动势 p 和化学作用的机械当量ω之间的关系用方程 来表示，式中θ是电池的绝对温度。见 v.Helmholtx,‘Die Thermodynamik chemischer Vorg(nge.’Wissenschaftliche Abhandlungen,ii.p.958．}

被另一种物质所置换的理论，等等，就变得比化学亲合势被看成一种特别的、不能归结为数字测量的量时更好理解多了。

当电解产物的体积大于电解质的体积时，在电解过程中就要反抗压强而作功，如果一个电化当量的电解质当在压强 p 下被电解时体积增大了 v，则在单位电荷通过时反抗压强所作的功是 vp，而电解所要求的电动势必须包括等于 vp 的用来完成这一机械功的一个部分。

如果电解产物是气体，他们像氧和氢那样比电解质稀薄得多，而且很准确地服从玻意耳定律，则 vp 在相同的温度下将很近似地等于常量，而电解所要求的电动势将不会在任何可觉察的程度上依赖于压强[①]。因此，曾经发现，通过把气体的分解限制在一个小空间中来核对稀硫酸的电离，是不可能的。

当解产物是液体或固体时，vp 这个量将随着压强的增大而增大，因此，如果 v 是正的、则压强的增大将增大电解所要求的电动势。

同样，电解中所作的任何其他种类的功也将影响电动势的值；例如，如果有一个竖直的电流在一种硫酸锌溶液中的两个锌质电极之间流过，则当电流在溶液中向上流时，将比它向下流时要求一个较大的电动势，因为，在第一种事例中，电流将把锌从下面的电极带到上面的电极，而在第二种事例中则从上面的电极带到下面的电极。为此目的而要求的按每英尺计算的电动势，小于丹聂耳电池的电动势的百万分之一。

[①] {这一结果是和热力学第二定律相矛盾的；按照该定律，压强的增大将增大电解所要求的电动势。见 J.J.Thomson’s‘Applications of Dynamicsto Physicsand Chemistry,’p.86.v.Helmholtz，‘ Weitere Untersuchungen die Electrolysedes Wassers betreffend.’Wied. Ann. 34,p.737.}

第五章

电解极化

264.〕当一个电流在以金属电极为边界的一种电解质中通过时，各离子在电极上的积累就引起一种叫做“极化”的现象；这种现象就在于有一个电动势沿着和电流相反的方向发生作用，从而引起电阻的一个表观增量。

当所用的是一个连续的电流时，电阻显示为从电流开始时迅速增大；而最后则达到一个将近恒定的值。如果装着电解质的容器的形状发生改变，则电阻也发生改变，其改变的方式和一个金属导体形状的相似改变将改变其电阻的那种方式相同，但是一个附加的依赖于电极之本性的表观电阻永远必须被加在电解质的真实电阻上。

265.〕这些现象曾经引导某些人假设，需要一个有限的电动势来使一个电流通过一种电解质。然而，通过楞茨、诺依曼、比兹、魏德曼[①]、帕耳佐[②]以及近来的F.考耳劳什和W.A.尼波耳特[③]、斐兹杰惹和特罗顿[④]等人的研究，已经证明电解质本身中的导电，在和金属导体中的导电相同的精确度下服从欧姆定律，而电解质边界面上和电极表面上的表观电阻则完全是由极化引起的。

266.〕所谓极化现象在连续电流的事例中通过电流的减小而表现出来；电流减小就表示有一个反对电流的力。电阻也被感受为一种反对电流的力，但是我们可以通过在一瞬间取消或反转电动势来分辨这两种现象。

阻力永远是和电流方向相反的，而克服阻力所必需的外电动势则正比于电流强度，而且当电流的方向改变时它的方向也改变。如果外电动势变为零，电流就干脆停止。

另一方面，由极化所引起的电动势则存一个固定的方向，和引起极化的电流方向相反。如果产生电流的电动势被取消，极化｛电动势｝就沿相反的方向产生一个电流。

两种现象之间的区别可以比拟为通过一个长毛细管和通过一个普通口径的管子把水打入高处的水槽中时的区别。在第一种事例中，如果我们取消打水的压力，水流就会干脆停止。在第二种事例中，如果我们取消压力，水就会从水槽中再向下流。

为了使这种机械比喻更加全面，我们只须假设水槽具有中等的深度，从而当一定量的水被打入时水就会溢出来。这就将代表由极化引起的总电动势有一个最大限度。

267.〕极化的起因看来是由于在电极上出现了电极之间的流体的电分解产物。电极的表面变得在电的方面不相同了，从而就在电极之间引起了一个电动势，其方向和引起极化的电流方向相反。

由于他们的存在而引起极化的那些离子，并不是处于完全自由的状

[①] Klektricit(t,i,568,bd.j.

[②] Berlin.Monatsbericht,July,1868.

[③] Pogg.Ann.bd.exxxviii.s.286(October，1869).

[④] B.y.Report,1887.

态，而是处于以相当的力附着在电极表面上的状态。

由极化引起的电动势依赖于覆盖电极的离子密度，但却并不正比于这一密度，因为电动势并不像密度增长得那么快。

离子的这种沉积总是倾向于变成自由的而或是扩散到液体中去，或是作为气体而逸出，或是作为固体而下沉。

极化的这种耗散率，当极化程度很小时是非常小的，而在极化接近极限值时则是非常大的。

268.〕我们在第 262 节中已经看到，在任何电解过程中起着作用的电动势，在数值上等于该过程对物质的一个电化当量所造成的结果的机械当量。如果过程引起参加过程的各物质的内能的一种降低，就像在一个伏打电池中那样，则电动势是沿着电流的方向的。如果过程引起各物质的内能的增高，就像在一个电解池中那样，则电动势是和电流方向相反的，而这种电动势就叫做极化｛电动势｝。

在电解持续进行而各离子是在自由状态下在电极上被分离的那种恒稳电流的事例中，我们只要用适当的手续测量被分出的离子的内能并把它和电解质的内能相比较，就可以计算电解所要求的电动势。这将给出最大的极化。

但是，在电解过程的最初阶段，沉积在电极上的离子并不是处于自由状态，从而他们的内能也小于自由状态中的内能，尽管比他们结合为电解质时的内能要大一些。事实上，当沉积层很薄时，和电极相接触的离子是处于一个可以比拟为离子与电极相化合的那种状态，但是当沉积密度增大时，后来的部分就不再和电极结合得那么紧密，而只是附着在它上面而已了；而到了最后，如果沉积层是气体，它就会作为气泡而逸出；如果是液体，就会通过电解液而扩散；如果是固体，就形成一种沉淀。

因此，当研究极化时，我们必须考虑：

(1)沉积层的面密度，我们用 σ 来代表它。量 σ 代表沉积在单位面积上的离子的电化当量数。既然所沉积的每一个电化当量都对应于被电流传递了的一个单位电量，我们就可以把 σ 或是看成物质的面密度或是看成电的面密度。

(2)极化电动势，我们用 p 来代表它。p 这个量就是当通过电解质的电流非常弱，以致电解质的固有电阻在电极之间并不造成任何可觉察的势差时二电极之间的势差。

电动势 p 在任何时刻都在数值上等于在该时刻进行着的那种电解过程的和一个电化当量的物质相对应的机械当量。必须记得，这种电解过程就造成离子在电极上的沉积，而他们在沉积时所处的状态则依赖于电极表面的可以因先前的沉积而改变的实际状态。

由此可见，任一时刻的电动势都依赖于各电动极的以前历史。很粗略地说来，它是沉积密度 σ 的函数：当 $\sigma=0$ 时 $p=0$，而且 p 比 σ 更快得多地趋于一个极限值。然而 p 是 σ 的函数的说法不能被认为是准确的。更准确一些的说法或许是，p 是沉积物的表面层的化学状态的函数，而且这个状态按照某种和时间有关的规律而依赖于沉积密度。

269.〕(3)我们必须考虑到的第三个问题就是极化的耗散。当不受外界强制时，极化就减小，其减小率部分地依赖于极化强度或沉积密度，部分地依赖于周围媒质的本性和电极所受到的化学的、力学的或热学的作

用。

如果我们确定一个时间 T，使得按照沉积的耗散率来看，整个的沉积将在 T 内被消除，则我们可以把 T 叫做耗散时间的模量。当沉积密度很小时：T 是很大的，可能以天计或以月计，当沉积趋于它的极限值时 T 就迅速地减小，而且也许会是一秒的一个很小的分数。事实上，耗散率很快地增加，以致当电流强度保持不变时分离开的气体不是增大沉积密度而是刚一形成就会作为气泡而逸出。

270.〕因此，当极化很弱时和当极化达到其极限值时，电解池中各电极的极化状态就是很不相同的。例如，如果把一些带有铂电极的稀硫酸电解池串联起来，并且把一个小电动势例如单一丹聂耳电池的电动势接到电路中，这个电动势就会在一段非常短的时间内产生一个电流，因为，在一段很短的时间之后，由各电解池的极化所引起的电动势就会把丹聂耳电池的电动势平衡掉。

在如此微弱的极化状态下，耗散将是很小的，而且它将通过很缓慢的气体吸收和液体中的扩散来进行。这种耗散的速率由一个非常弱的电流来指示，这一电流继续流动而没有任何显著的气体分离。

如果我们在极化状态的很短的建立时间内忽略这种耗散，并且用 Q 来代表电流在这一时间内传递的电量，那么，如果 A 是一个电极的面积，而 σ 是假设为均匀的沉积密度，就有

$$Q=A\sigma.$$

如果现在我们把电解装置的电极从丹聂耳电池断开并把他们接在一个能够测量通过它的总电量的电流计上，则当极化消失时就会有一个近似等于 Q 的电量被放掉。

271.〕因此我们就可以把这种实际上是一种形式的里特尔次级电堆的装置的作用和一个莱顿瓶的作用相比较。

次级电堆和莱顿瓶都能够被充以一定数量的电，然后也可以把电再放掉。在放电过程中，一个近似等于所充电荷的电量将沿相反方向流过去，充入的和放掉的电量之差，部分地起源于耗散；这种过程在少量充电的事例中是很慢的，但是当充电超过某一限度时，过程就变得非常地快，充电和放电之差的另一部分起源于这样一件事实：当二电极连接了一段足以产生一次表观上完全的放电的时间，从而电流已经完全消失以后，如果我们把电极分开，过一段时间以后再把他们接起来，我们就会得到和原先的放电方向相同的第二次放电。这叫做剩余放电，而且是莱顿瓶的一个现象，正如是次级电堆的现象一样。

因此，次级电堆在许多方面都可以和莱顿瓶相比拟。然而也有某些重要的区别。莱顿瓶的电荷精确地正比于充电的电动势，也就是正比于两个表面的势差的，而对应于单位电动势的电荷就叫做瓶的电容，是一个恒量。可以称为次级电堆之电容的对应的量，当电动势增大时却是增大的。

莱顿瓶的电容依赖于相对的两个面积依赖于两个表面之间的距离，并依赖于二者之间的媒质的本性，但是却不依赖于金属表面本身的本性。次级电堆的电容依赖于电极表面的面积，但是却不依赖于电极之间的距离，而且它既依赖于电极之间的流体的本性也依赖于电极表面的本性。次级电堆中每一个单元中的电极之间的最大势差比起充电莱顿瓶的电极之间的最大势差来是很小的，因此，为了得到较大的电动势，就必须使用由许多单

元构成的电堆。

另一方面，次级电堆中的电荷面密度却比可以积累在一个莱顿瓶表面上的电荷面密度大得多,以致竟使瓦尔莱先生[①]在描述大电容的电容器的制造时从经济观点出发建议使用浸在稀酸中的金片或铂片而不使用由绝缘材料隔开的锡箔感应片。

储存在莱顿瓶中的能量的形式是导电表面之间的电介质的约束状态；我曾经在电极化的名称下描述过这种状态，当时指出了目前已知的和这一状态相伴随的那些现象，并且指示了我们对实际发生的事情的了解方面的不足。参阅第 62、111 节。

储存在次级电堆中的能量的形式是电极表面上的物质层的化学条件，其中包括电解质离子和电极物质之间的从化学结合到表面聚集、机械附着和简单并列的那种变化的关系。

这种能量的所在之处是电极的表面附近而不是电极物质的全部，而且它的存在形式可以叫做电解极化。

在联系到莱顿瓶而研究了次级电堆以后，读者还应该把伏打电池组和某种形式的起电机作一比较，例如和在第 211 节中描述过的那种起电机作一比较。

近来瓦尔莱先生曾经发现[①]，对于稀硫酸中的铂片来说，一平方英寸的电容是 175 到 542 微法拉以上，而且电容是随着电动势而增加的，当电动势是丹聂耳电池电动势的 0.02 倍时电容约为 175，当电动势是丹聂耳电池电动势的 1.6 倍时电容约为 542。

但是莱顿瓶和次级电堆之间的比较还可以进行得更远，正如在由杜夫[②]所作的下述实验中那样。只有当莱顿瓶的玻璃是冷的时，它才能保存电荷，在不到 100°C的温度下，玻璃就变成一个导体。如果把装有水银的一根试管放入一个装了水银的容器中，并把一对电极分别接在内部的外部的水银上，这种装置就构成一个莱顿瓶，它在常温下可以保存一个电荷。如果把各电极接到一个伏打电池组的电极上，只要玻璃是冷的，就不会有电流通过。但是如果仪器被慢慢加热，一个电流就会开始通过，而且它的强度会随着温度的升高而迅速地增大，尽管玻璃还是像从前那样硬。

这个电流显然是电解电流，因为如果把电极从电池组上断开并把他们接在一个电流计上，就会有一个相当大的由玻璃表面的极化所引起的反向电流通过。

如果当电池组还在起作用时仪器被冷却，电流就会像从前那样被冷的玻璃所阻止，但是表面的极化却还在。水银可以被取走，玻玻表面可以用硝酸和水洗净，然后换上新的水银。如果这时再把仪器加热，则玻璃刚一热到可以导电，极化电流立刻就会出现。

因此，我们可以把 100°C的玻璃看成一种电解质，尽管表面看来它是一种固体。而且有相当的理由可以相信，在一种电介质有一个很小的导电程度的多数事例中，导电都是电解性的。极化的存在可以看成电解的一种决定性的证据，而且如果一种物质的电导率是随着温度而增大的，我们就

[①] C.F.Varley,‘Klectric Telegraphs,＆c,’Jan.1860 中的论述。

[①] Proc.R.S.,Jan.12,1871.至于有关这一课题的其他研究，见 WiedemannsElektricit(t,bd.ii.pp.744—771.

[②] Annalen der Chemicund Pharmacie,bd.xc.257(1854）.

有很好的理由来推测导电是电解性的[①]。

关于恒定的伏打元件

272.〕当用一个内部出现着极化的伏打电池组来作一系列实验时，极化在电流不通的时间内将变小，从而当它再开始流时，电流就会比在它流了一段时间以后时更强一些。另一方面，如果允许电流通过一条短的支路而把电路的电阻减小，则当使电流重新通过普通的电路时，由于使用短电路而引起的大极化，电流强度在一开始时就会比它的正常强度要小一些。

电流方面的这些不规则性，在涉及精密测量的实验中是非常讨厌的。为了消除这些不规则性，必须消除极化，或至少是尽可能地减小极化。

当一块锌板被浸入硫酸锌溶液或稀硫酸中时，它的表面上似乎没有多大的极化。极化的主要部分出现在负金属的表面上，当负金属所浸入的液体是稀硫酸时，就可以看到它的表面布满了由液体的电分解而产生的氢气泡。这些气泡当然会通过阻止液体和金属相接触而减小接触面积并增大电路的电阻。但是，除了可以看到气泡以外，肯定还有一层或许并非处于自由状态的氢膜附着在金属上，而正如我们看到的那样，这层薄膜能够沿相反的方向产生一个电动势，它必然会减小电池组的电动势。

曾经采取了各种方案来消除这个氢膜。它可以通过机械方法而在某种程度上被减小，例如搅动液体或擦拭负金属的表面。在斯密的电池组中，负板是竖直的，而上面涂有很细的铂粉，气泡很容易从这种表面上逸出，而且在上升的过程中引起一种液流，而这种液流就有助于把新形成的其他气泡带走。

然而一种更有效得多的方法就是利用化学手段。化学手段有两种。在格罗夫的和本生的电池组中，负板被浸入于一种富含氧的液体中，从而氢就不是覆盖极板而是和这种物质相结合。在格罗夫的电池组中，极板是浸在强硝酸中的铂板。在本生的电池组中，极板是浸在同一种酸中的碳板。铬酸也被用于同一目的，而且有一个优点就是它没有由硝酸的还原而产生的那种烟雾。

一种不同的除氢方式就是用铜来作为负金属，并在表面上涂一层氧化物。然而当用它作为负极时，这种氧化物会很快地消失。为了更新它，焦耳曾经建议把铜板做成圆盘状，把它的一半浸入液体中并慢慢转动它，于是空气就对轮流暴露出来的部分起作用。

另一种办法就是用一种电解质来作为液体，该电解质的阳离子是比锌负得多的一种金属。

在丹聂耳电池组中，一个铜板被浸在一种硫酸铜的饱和溶液中。当电流通过溶液而从锌流到铜时，没有氢出现在铜板上而只有铜沉积在它上面。当溶液是饱和的而电流并不太强时，铜就作为真正的阳离子而起作用，而阴离子 SO_4 则向着锌运动。

当这些条件并不满足时，氢就会在阴极上出现，但是它立刻就会和溶液发生作用，并留下铜而和 SO_4 形成硫酸。当出现这种情况时，靠近铜板的硫酸铜就会被硫酸所取代，溶液变成无色的，而氢气就又开始引起极化。

[①] 〔译注：当时人们显然还不熟悉半导体。〕

用这种方式沉积下来的铜比由真正的电解所沉积下来的铜在结构上更加松脆。

为了保证和铜相接触的液体是被硫酸铜所饱和的，必须在铜附近的液体中放一些硫酸铜的晶体，以便当溶液由于铜的沉积而变得较稀时可以有更多的晶体被溶解。

我们已经看到，靠近铜的液体必须被硫酸铜所饱和。更加必要的是锌所浸入的液体中应该没有硫酸铜。如果任何这种盐跑到锌的表面上去，它就会被还原，而铜就会在锌上沉积下来。于是锌、铜和液体就会形成一种小电路，而电解作用就在该电路中迅速地进行，而锌就被一种对电池组并无任何有用效应的作用所不断地腐蚀掉。

为了避免这一点，锌就被浸在稀硫酸或硫酸锌溶液中，而为了避免硫酸铜溶液和这种液体互相混合，两种液体就被一个用膀胱或素烧瓷作的屏障互相隔开；这种屏障允许电解通过它来进行，但是却很有效地阻止了各液体通过可见的液流而互相混合。

在某些电池组中，是用锯末来阻止液流的。然而格喇汉的实验却证明，如果使用这样一种隔离物，扩散过程就将进行得差不多和液体直接接触但没有可见的液流时同样地快；而且情况或许是，如果采用一个减弱扩散的屏障，它就将按相同的比例增大元件的电阻，因为电解导电是一种过程，它的数学规律和扩散的规律形式相同，从而对一种过程的干预必将同样地干预另一种过程。唯一的区别就在于，扩散是永远进行的，而电流则只有当电池组起作用时才会存在。

在一切形式的丹聂耳电池中，最后的结果都是硫酸铜总有办法到达锌那里并对电池组进行破坏。为了无限期地阻止这种结果，W.汤姆孙爵士[①]曾经按照下面的形式制造了丹聂耳电池组。

图 22

在每一个电池中，铜板都是水平地放在底部的，铜板的上面倒上了硫酸锌的饱和溶液。锌被作成格子状，水平地放在溶液的表面附近，一根玻璃管竖直地插在溶液中，其下端刚好在铜板表面的上方，硫酸铜的晶体通过此管被放下去，并溶解在液体中，形成密度比纯硫酸锌的密度还要大的一种溶液，从而除了通过扩散以外不可能达到锌那儿。为了阻滞扩散过程，用玻璃管和棉花做成一个虹吸管，把它的一端放在锌和铜的中间，而其另一端则在电池外面的一个容器中，于是液体就从它的深度的中部被很慢地抽走。为了保证它的位置，在必要时从上面添入水或硫酸锌的稀溶液。这样，通过液体而扩散上来的硫酸铜的一大部分在到达锌以前就会被虹吸管所抽走，而锌就被一种几乎不含硫酸铜的并在电池中缓缓向下流动的液体所包围，而这种流动就会进一步阻止硫酸铜向上运动。在电池组的作用时间内，铜会沉积在铜板上，而 SO_4 则通过液体而慢慢地运动到锌，并和锌化合而形成硫酸锌。于是，底部的液体就通过铜的沉积而变稀，而上部的液体则通过锌的加入而变浓。为了阻止这种作用改变各液层的密度顺序并从而在容器中引起不稳定性和可见液流，必须注意保证管子中有充分的硫

[①] Proc.R.S.,Jan.19,1871.

酸铜晶体，并在上方加入足够稀的硫酸锌溶液，使它比电池中的任一其他液层都要轻。

丹聂耳电池组绝不是常用电池组中的最强大的一种。格罗夫电池的电动势是丹聂耳电池的电动势的 192，000，000 倍，而本生电池的电动势是丹聂耳电池的电动势的 188，000，000 倍。

丹聂耳电池的电阻通常大于同样尺寸的格罗夫电池的电阻和本生电池的电阻。

然而，在一切要求精确测量结果的事例中，这些缺点却抵不过一个优点，那就是，在电动势的恒定性方面，丹聂耳电池胜过一切已知的装置[①]。它还有能够长时间地正常工作和不放出任何气体的优点。

[①] {当要求一个标准电动势时，现在最常用的是一个克拉克电池。关于制造和使用这样一个电池的注意事项，见 Lord Rayleigh 的论文‘ The Clark Cell as a Staudard of Electromotive Force.,Phil.Trans.part ii.1885.}

第六章

线性电流

论线性导体组

273．〕任何一个导体可以当作一个线性导体来处理，如果它被安排得适当，使得电流在它的表面的两个部分之间永远按相同的方式而通过；那两个部分表面叫做它的电极。例如，设有任意形状的一块金属，除了两个地方以外整个的表面都被一种绝缘材料所覆盖，而在那两个地方，暴露着的导体表面则和用理想导电材料做成的电极相连接；这样一块金属就可以看成一个线性导体。因为，如果使电流从一个电极流入而从另一个电极流出，则流线将是确定的，而电动势、电流和电阻之间的关系将由欧姆定律来表示，因为物体每一部分中的电流都将是 E 的线性函数。但是，如果有多于两个的一些可能的电极，则导体中可以有多于一个的独立电流通过，而这些电流可以并不互相共轭。参阅第 282a 和 282b 节。

欧姆定律

274．]设 E 是一个线性导体中从电极 A_1 到电极 A_2 的电动势。（参阅第 69 节）。设 C 是沿该导体的电流强度，这就是说，设有 C 个单位的电量在单位时间内沿方向 A_1A_2 通过每一个截面，并设 R 是导体的电阻，则欧姆定律的表示式是

$$E=CR.(1)$$

串联的线性导体

275.〕设 A_1、A_2 是第一个导体的电极，并设第二个导体被摆得有一个电极和 A_2 相连接，于是第二个导体就以 A_2、A_3 为其两个电极。第三个导体的电极可以用 A_3 和 A_4 来代表。

设沿着这些导体的电动势用 E_{12}、E_{23}、E_{34} 来代表，对其他导体依此类推。

设各导体的电阻是

$$R_{12}，R_{23}，R_{34}，等等。$$

于是，既然各导体是串联的从而有一个相同的电流 C 通过他们，我们由欧姆定律就有

$$E_{12}=CR_{12}，E_{23}=CR_{23}，E_{34}=CR_{34}，\cdots.(2)$$

如果 E 是体系的合电动势而 R 是合电阻，则我们由欧姆定律必有

$$E=CR.(3)$$

现在

$$E=E_{12}+E_{23}+E_{34}+\cdots=各分电动势之和，(4)$$
$$=C(R_{12}+R_{23}+R_{34}+\cdots)，据方程(2)。$$

把这一结果和(3)式相比较，我们就得到

$$R=R_{12}+R_{23}+R_{34}+\cdots.(5)$$

或者说，串联导体的电阻是分别考虑的各导体的电阻之和。

串联导体的任一点上的势

设 A 和 C 是串联导体的电极而 B 是二者之间的一个点，设 a、c 和 b 分别是这些点的势。设 R_1 是从 A 到 B 的那一部分的电阻，R_2 是从 B 到 C 的那一部分的电阻，而 R 则是从 A 到 C 的整个体系的电阻，那么，既然

$$a-b=R_1C,\ b-c=R_2C,\ 而\ a-c=RC,$$

B 点的势就是

$$b=\frac{R_2a+R_1c}{R},(6)$$

当 A 点和 B 点的势已给定时，此式就确定 B 点的势

并联的线性导体

276.〕设有一些导体 ABZ、ACZ、ADZ 并排摆放，使得他们的两端都和相同的两个点 A、Z 相接。这些导体被说成是联成一个“多重弧”，或称并联。

设这些导体的电阻分别是 R_1、R_2、R_3，而其电流是 C_1、C_2、C_3，此外并设并联导体的电阻是 R，而其总电流是 C。于是，既然 A 和 Z 上的势对一切导体都相同，我们就有相同的势差，用 E 来代表。于是我们就有

$$E=C_1R_1=C_2R_2=C_3R_3=CR,$$

但是

$$C=C_1+C_2+C_3,$$

故得到

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_{23}}.\ (7)$$

或者说，并联导体的电阻的倒数，等于各分导体的电阻倒数之和。

如果我们把一个导体的电阻的倒数叫做导体的电导，我们就可以说，并联导体的电导是各分导体的电导之和。

并联导体的任一分支中的电流

由以上的各方程可以看出，如果 C_1 是并联导体的任一分支中的电流而 R_1 是该分支的电阻，则有

$$C_1=C\frac{R}{R_1},\ (8)$$

式中 C 是总电流，而 R 是以上确定的并联导体的电阻。

截面均匀的导体的纵向电阻

277.〕设一块立方形给定材料对平行于它的边棱的电流而言的电阻是ρ，而立方形的棱长为一个长度单位，则ρ叫做“该材料的单位体积的比电阻”｛电阻率｝。

现在考虑一个用相同材料做成的角柱形的导体，其长度为 l 而截面为1。这就相当于 l 个立方体串联在一起。因此这一导体的电阻就是 $l\rho$。

最后，考虑一个长度为 l 而均匀截面为 s 的导体，这就相当于 s 个上面那样的导体相并联。因此这一导体的电阻就是

$$R=\frac{l\rho}{s}.$$

当我们知道了一条均匀导线的电阻时，如果我们能够测量它的长度和截面，我们就能确定制成导线的材料的比电阻。

细导线的截面积可以通过测定样品的长度、重量和比重来最准确地确定。比重的测定有时是不方便的；在那种情况下，就用一根单位长度和单位质量的导线的电阻来作为“单位长度的比电阻”。

如果 r 是一根导线的这种比电阻，l 是它的长度而 m 是它的质量，则有

$$R=\frac{l^2 r}{m}.$$

关于这些方程中所含各量的量纲

278.〕一个导体的电阻就是作用在它上面的电动势和所引起的电流之比。导体的电导就是这个量的倒数，或者换句话说就是电流和引起电流的电动势之比。

现在我们知道，在静电单位制中，一个电量和带此电量的导体的势之比就是导体的电容，而且这是用长度单位来量度的。如果导体是一个放在无限场中的球，则这个长度是球的半径，因此，电量和电动势之比就是一个长度，但是电量和电流之比是一个时间，在该时间之内电流传递了那个电量。由此可见，电流和电动势之比就是长度和时间之比，换句话说就是一个速度。

导体的电导在静电单位制中是以速度单位计的；这一事实可以通过假设一个半径为 r 的球被充电到势 V 然后用所给的导体把球接地来加以验证。设球逐渐缩小，使得当电量通过导体而流走时球的势永远保持为 V。于是球上的电荷就在任何时刻都是rV，而电流就是 $-\frac{d}{dt}(rV)$；但是V是一个常量，故电流就是 $-\frac{dr}{dt}V$，而通过导体的电动势则是V。

导体的电导是电流和电动势之比，或者说是 $-\frac{dr}{dt}$，也就是说，它就是当电荷被允许通过导体流到地上时球的半径必须收缩以便保持其势不变的那个收缩速度。

因此，在静电单位制中，导体的电导是一个速度，从而具有量纲$[LT^{-1}]$。

因此导体的电阻具有量纲$[L^{-1}T]$。

单位体积的比电阻具有量纲$[T]$，而单位体积的比电导则具有量纲$[T^{-1}]$。

系数的数值只依赖于时间的单位，而这一单位在不同的国家中是相同的。

单位重量的比电阻具有量纲$[L^{-3}MT]$。

279.〕以后我们将发现，在电磁单位制中，导体的电阻是用一个速度来表示的，从而在该单位制中导体的电阻就具有量纲$[LT^{-1}]$。

导体的电导当然是这个量的倒数。

单位体积的比电阻在这一单位制中具有量纲$[L^2T^{-1}]$，而单位重量的比电阻则具有量纲$[L^{-1}T^{-1}M]$。

论一般的线性导体组

280.〕一个线性导体组的最普遍事例就是用$\frac{1}{2}n(2-1)$个线性导体成对连接起来的 n 个点A_1、A_2、…A_n。设连接任何一对点例如A_p和A_q的那一导体的电导（即电阻的倒数）用K_{pq}来代表。并设从A_p到A_q的电流是C_{pq}。设P_p和P_q分别是点A_p和点A_q处的电势，而如果有任何电动势沿着导体从A_p指向A_q，就用E_{pq}来代表它。

由欧姆定律，从A_p到A_q的电流是

$$C_{pq}=K_{pq}(P_p-P_q+E_{pq}).(1)$$

在这些量之间，我们有下列一组关系式：

导体的电导在正反两个方向上是相同的，或者说

$$E_{pq}=K_{qp}.(2)$$

电动势和电流是有方向{译：应作“正负”}的量，故有

$$E_{pq}=-E_{qp}，和\ C_{pq}=-C_{qp}.(3)$$

设P_1、P_2、…P_n分别是A_1、A_2、…A_n上的势，并设Q_1、Q_2、…Q_n是单位时间内分别在这些点上进入体系中的电量。这些电量肯定服从“连续性”条件。

$$Q_1+Q_2\cdots+Q_n=0，(4)$$

因为电既不能在体系中无限积累也不能在体系中无限产生。

在任一点A_p上，“连续性”条件是

$$Q_p=C_{pl}+C_{p2}+\cdots+C_{pn}.\ (5)$$

利用方程(1)把各电流的值代入此式中，就得到

$$Q_p=(K_{p1}+K_{p2}+\cdots+K_{pn})P_p-(K_{p1}P_1+K_{p2}P_2+\cdots+k_{pn}P_n)+(K_{p1}E_{p1}+\cdots+K_{pn}E_{pn}).\ (6)$$

符号K_{pp}并不出现在此式中，因此让我们设它的值是

$$K_{pp}=-(K_{p1}+k_{p2}+\cdots+K_{pn});(7)$$

也就是说，设K_{pp}是和相聚于A_p点的一切导体的电导之和相等而反号的一个量。于是我们就可以把A_p点处的连续性条件写成

$$K_{p1}P_1+K_{p2}P_2+\cdots+K_{pp}P_p+\cdots+k_{pn}P_n=K_{p1}E_{p1}+\cdots+k_{pn}E_{pn}-Q_p.(8)$$

在这一方程中令 p 等于 1、2、…n，我们就将得到种类相同的 n 个方程，由此就能定出 n 个势 P_1、P_2、…P_n。

然而如果我们把方程组(8)加起来，既然由(3)、(4)和(7)可知结果恒等于零，那就只会有 n-1 个独立的方程，这些方程将足以确定各点间的势差，而不能确定任一点的绝对势。然而在计算体系中的电流时并不需要任何绝对势。

如果我们用 D 来代表行列式

$$\begin{vmatrix} K_{11}, & K_{12}, & \cdots\cdots K_1(n-1) \\ K_{21}, & K_{22}, & \cdots\cdots K_2(n-1) \\ \cdots\cdots & & \\ K_{(n-1)}, & K_{(n-1)2}, & \cdots\cdots K_{(n-1)(-1n)} \end{vmatrix} \qquad (9)$$

并用 D_{pq} 代表 K_{pq} 的子行列式，我们就能求得 P_p-P_n 的值

$(P_p - P_n)D=(K_{12}E_{12}+\cdots - Q_1)D_{p1}+(K_{21}E_{21}+\cdots - Q_2)D_{p2}+\cdots+(K_{q1}E_{q1}+\cdots+K_{qn}E_{qn} - Q_q)D_{pq}+\cdots$.(10)

同理也可以定出任一其他点例如 A_q 的势比 A_n 的势大出的值。然后我们就能由方程(1)定出 A_p 和 A_q 之间的电流，并从而完全地解出问题。

281.〕现在我们将演证体系中任意二导体的一种倒易性，这是和我们已经在第 86 节中演证过的静电倒易性相对应的。

在P_p的表示式中，Q_q的系数是$-\frac{D_{pq}}{D}$。在P_q的表示式中，Q_p的系数是$-\frac{D_{pq}}{D}$。

喏，D_{pq} 和 D_{qp} 的区别只在于把 K_{pq} 代成 K_{qp}，但是由方程(2)可知这两个符号是相等的，因为导体沿正反方向的电导相同。由此即得

$$D_{pq}=D_{qp}.(11)$$

由此可知，由于在 A_q 点通入一个单位电流而在 A_p 引起的那一部分势，等于由于在 A_p 点通入一个单位电流而在 A_q 引起的那一部分势。

我们可以由这一定理推出一种更切实用的形式。

设 A、B、C、D 是体系中的任意四点，并设由于一个电流从 A 进入并从 B 离开体系而使 C 点的势比 D 点的势大出一个量 P。于是，如果一个相等的电流 Q 从 C 进入并从 D 离开体系，则 A 点的势将比 B 点的势大出同一个量 P。

如果引入一个电动势 E，使它在从 A 到 B 的导体中起作用，而如果这就引起一个从 X 到 Y 的电流 C，则引入到从 X 到 Y 的导体中的同一个电动势 E 将引起从 A 到 B 的相等的电流 C。

电动势 E 可以是一个伏打电池组的电动势，这时必须注意保证导体的电阻在引入电池组的以前和以后是相同的。

282a.〕如果有一个电动势 E_{pq} 沿着导体 A_pA_q 起作用，则很容易求出沿着体系中的另一导体 A_rA_s 引起的电流是

$$K_{rs}K_{pq}E_{pq}(D_{rp}+D_{rq} - D_{rq} - D_{sp})\div D.$$

如果

$$D_{rp}+D_{sq}-D_{rq}-D_{sp}=0,\ (12)$$

那就不会有电流，但是由(11)可知，同样的方程也成立，如果当电动势沿 A_rA_s 起作用时在 A_pA_q 中没有电流的话。由于这种倒易关系式，所谈到的两个导体就被说成是共轭的。

共轭导体的理论曾由基尔霍夫研究过，他曾按照下面这种避免考虑势的方式叙述了线性导体组的条件。

(1)（“连续性”条件。）在体系的任一点上，流向该点的一切电流之｛代数｝和等于零。

(2)在由一些导体构成的任何完整回路中，沿回路计算的电动势之和等于每一导体中的电流和该导体的电阻的乘积之和。

我们可以通过针对完整回路来把形如(1)的各方程加起来而得到这一结果，这时各个势必然不再出现。

[①]282b.〕如果一些导线形成一个简单的网络，而且我们假设绕着每一个网格都有一个电流在周流，则形成两个网格之公共边的那条导线中的实际电流，将是周流于二网格中的二电流之差，这时当电流按反时针的方向运行时就把它算作正的。在这种情况下，很容易建立下列定理：设任意网格中的电流是 x，电动势是 E，而总电阻是 R，并设和 x 在其中周流的那个网格具有公共边的各相邻网格中的周流电流是 y、z、…，而各公共边的电阻是 s、t、…，则有

$$Rx-sy-tz-\cdots=E.$$

为了举例说明这一法则的应用，我们将取所谓惠斯登电桥，并采用第 347 节中的图形和符号，于是我们就得到三个方程，他们代表这一法则在三个回路 OBC、OCA、OAB 的事例中的应用，而三个回路中的周流电流则分别是 x、y、z；方程就是

$$(\alpha+\beta+\gamma)x-\gamma y-\beta z=E,$$
$$-\gamma x+(b+\gamma+\alpha)y-\alpha z=0,$$
$$-\beta x-\alpha y+(c+\alpha+\beta)z=0.$$

由这些方程，我们现在就可以定出支路 OA 中的电流计电流

z-y 的值，但是读者请参阅第 347 节及以后各节，那里讨论了这一问题以及和惠斯登电桥有关的其他问题。

体系中产生的热

283.〕由第 242 节可知，单位时间内由一个电流 C 在电阻为 R 的一个导体中产生的热量的机械当量是

$$JH=RC^2.\ (13)$$

因此我们必须确定体系中一切导体上的 RC^2 类型的量的和。

对于从 A_p 到 A_q 的导体来说，电导是 K_{pq}，而电阻 R_{pq} 则满足

$$K_{pq}.R_{pq}=1\ (14)$$

按照欧姆定律，这一导体中的电流是

---

① [此节摘录 J.A.弗莱明先生所作的麦克斯韦教授的演讲，参阅弗莱明的论文，见 Phil.Mag.,xx.p.221,1885.]

$$C_{pq}=K_{pq}(P_p-P_q).(15)$$

然而我们将假设，电流的值不是由欧姆定值给出而是 X_{pq}，而且

$$X_{pq}=C_{pq}+Y_{pq}.(16)$$

为了确定体系中产生的热，我们必须求出形如

$$R_{pq}X_{pq}^2,$$

或 $$JH=\Sigma\left\{R_{pq}C_{pq}^2+2R_{pq}C_{pq}Y_{pq}+R_{pq}Y_{pq}^2\right\},(17)$$

的各量之和。

代入 C_{pq} 的值并记得 K_{pq} 和 R_{pq} 之间的关系，这一关系式就变成

$$\sum[(P_p-P_q)(C_{pq}+2Y_{pq})+R_{pq}Y_{pq}^2].\qquad(18)$$

现在，既然 C 和 X 都必须满足 A_p 处的连续性条件，我们就有

$$Q_p=C_{p1}+C_{p2}+\cdots+C_{pn},(19)$$

$$Q_p=X_{p1}+X_{p2}+\cdots+X_{pn},(20)$$

因此就得到

$$0=Y_{p1}+Y_{p2}+\cdots+Y_{pn}.(21)$$

因此，将(18)式的各项相加，我们就得到

$$\sum(R_{pq}X_{pq}^2)=\sum R_pQ_q+\sum R_{pq}Y_{pq}^2.\qquad(22)$$

现在，既然 R 永远为正而 Y^2 也必为正，上式中的最后一项必然是正的。因此，当每一导体中的 Y 都为零时，也就是当每一导体中的电流都由欧姆定律给出时，上式的左端必为极小值①。

由此就得到下列的定理：

284.〕在任何不包含内电动势的导体组中，由按照欧姆定律而分布的电流所产生的热量，小于由按照和电流的供入和流出的实际条件不相矛盾的任何其他方式而分布的电流所产生的热量。

当欧姆定律得到满足时，实际产生的热量的机械当量是 ΣP_pQ_p，也就是说，它等于在各个外电极上供入的电量和各该供电处的势的乘积之和。

---

① ｛我们可以用同样的办法证明，当不同支路中有电动势时，各电流将满足 $\Sigma RC2-2\Sigma EC$ 为极小值，式中 E 是支路中的电动势而 C 是支路中的电流。我们把这个量叫做 F。如果我们用沿各回路流动的那些独立电流把 F 表示出来，则各导体中的电流分布 x、y、z、…可由方程 来求出。例如，在第 382 节所考虑的惠斯登电桥的事例中，就有 从而该节中的方程就是和 等价的。这常常是求出电流按导体的分布的最方便的办法。第 281 节中的倒易性也可以很容易地用这种办法推出。｝

第六章附录

在第 280 节中研究了的电流分布规律，可以表示成很容易记住的法则如下。

让我们把其中一个点例如 A_n 的势取作零势，那么，如果有一个电量 Q_s 流入 A_s 中，则在正文中已经证明一点 A_p 处的势应是

$$-\frac{D_{ps}}{D}Q_s.$$

D 和 D_{ps} 各量可按下述法则求出：D 就是每次取(n-1)个电导的各乘积之和，而略去所有包括了形成闭合回路的各支路电导的乘积的那些项。D_{ps} 就是每次取(n-2)个电导的各乘积之和，而略去所有包含支路 A_pA_n 或 A_sA_n 的电导的那些项，或是包含本身形成闭合回路或借助于 A_pA_s 或 A_sA_s 可以形成闭合回路的各支路电导的乘积的那些项。

我们由方程(11)看到，沿支路 A_qA_r 作用着的一个电动势 E_{qr} 的效应，和 Q 处的一个强度为 $K_{qr}E_{qr}$ 的源头以及 R 处的一个相同强度的尾间的效应相同[①]，从而上一法则将包括这一事例。然而这一法则的应用结果可以更简单地叙述如下。如果一个电动势 E_{pq} 沿着导体 A_pA_q 而起作用，则沿另一导体 A_rA_s 引起的电流是

$$K_{rs}K_{pq}\frac{\Delta}{D}E_{pq},$$

式中 D 按上述法则得出，而 $\Delta=\Delta_1-\Delta_2$。这里的 Δ_1 是这样得出的：在每次取(n-2)个电导的各乘积的和式中，选取既包含 A_pA_r 的电导（或和 A_pA_r 一起形成闭合回路的各支路电导的乘积）又包含 A_qA_s 的电导（或和 A_sA_p 一起形成闭合回路的各支路电导的乘积）的那些乘积，而从如此选出的各项中略去所有包含 A_{rs} 或 A_{pq} 的电导的那些项，或是所有包含本身形成或和 A_rA_s 或 A_pA_q 一起形成闭合回路的那些支路电导的乘积的那些项。$\triangle_2$ 和 Δ_1 相对应，不过要分别取 A_pA_s、A_qA_r 来代替 A_pA_r 和 A_sA_q。

如果一个电流在 P 进入而在 Q 离开，则电流和 A_p、A_q 之间的势差之比是 $\frac{D}{\Delta'}$。

这里的$\triangle'$是每次取 n-2 个电导的乘积之和，而略去所有包含 A_pA_q 的电导或包含和 A_pA_q 一起形成闭合回路的支路电导之积的那些项。

在这些表示式中，所有包含形成闭合回路的各支路电导之积的那些项都应略去。

我们可以举例来说明这些法则，即把他们用于一个很重要的事例，那就是用 6 个导体连接起来的 4 个点的事例。让我们用 1、2、3、4 来代表这 4 个点。

于是 D=每次取 3 个电导的乘积之和，但是要略去 4 个乘积 $K_{12}K_{23}K_{31}$、$K_{12}K_{24}K_{41}$、$K_{13}K_{34}K_{41}$、$K_{23}K_{34}K_{42}$，因为他们对应于四个闭合回路(123)、

[①] {译注：原意如此，但 Q、P 二符号疑应作 Aq、Ar。下同。}

(124)、(134)、(234)。

于是就有

$D=(K_{14}+K_{24}+K_{34})(K_{12}K_{13}+K_{12}K_{23}+K_{13}K_{23})+K_{14}K_{24}(K_{13}+K_{23})+K_{14}K_{34}(K_{12}+K_{23})+K_{34}K_{24}(K_{12}+K_{13})+K_{14}K_{24}K_{34}$.

让我们假设有一个电动势 E 沿着(23)而作用，则通过支路(14)的电流

$$=\frac{\Delta_1-\Delta_2}{D}EK_{14}E_{23},$$

$\Delta_1=K_{13}K_{24}$（根据定义）

$\Delta_2=K_{12}K_{43}$.

由此可见，如果没有电流通过(14)，则 $K_{13}K_{24}-K_{12}K_{43}=0$，这就是(23)和(14)可以共轭的条件。

通过(13)的电流

$$\frac{K_{12}(K_{14}+K_{24}+K_{34})+K_{14}K_{24}}{D}EK_{14}K_{23}.$$

当一个电流在(2)进入而从(3)流出时，网络的电导

$$=\frac{D}{(K_{14}+K_{24}+K_{34})(K_{12}+K_{13})K_{14}(K_{24}+K_{34})}.$$

如果我们有 5 个点，则(23)和(14)相共轭的条件是

$$K_{12}K_{34}(K_{15}+K_{25}+K_{35}+K_{45})+K_{12}K_{35}K_{45}+K_{34}K_{51}K_5$$
$$=K_{13}K_{24}(K_{15}+K_{25}+K_{35}+K_{45})+K_{13}K_{52}K_{54}+K_{24}K_{51}K_{53}.$$

第七章

三维空间中的导电

电流的本性

285.〕设在任一点取一个面积元 dS 和 x 轴相垂直，并设有 Q 个单位的电量在单位时间内从负侧向正侧通过这一面积，那么，如果当 dS 无限缩小时 $\frac{Q}{ds}$ 变为等于u，则u叫做给定点上电流沿x方向的“分量”。同样我们可以定义 v 和 w，分们分别是电流沿 y 方向和 z 方向的分量[1]。

286.〕为了定义电流在给定点 O 上沿任一其他方向 OR 的分量，设 l、m、n 为 OR 的方向余弦；于是，如果我们分别在 A、B、C 三点上从 x、y、z 轴上截取等于

$$\frac{r}{l}，\ \frac{r}{m}，和\ \frac{r}{n}$$

的线段，则三角形 ABC 将垂直于 OR。

这个三角形 ABC 的面积将是

$$ds=\frac{1}{2}\frac{r^2}{lmn},$$

而通过减小 r，这个面积将无限地减小。

通过三角形 ABC 而离开四面体 ABCO 的电量，必然等于通过三个三角形 OBC、OCA 和 OAB 而进入这个四面体的电量。

图 23

三角形OBC的面积是 $\frac{1}{2}\frac{r^2}{mn}$，而垂直于它的平面的电流分量是u，故单位时间内通过这个三角形的电量就是 $\frac{1}{2}r^2\frac{u}{mn}$。

单位时间内分别通过三角形 OCA 和 OAB 而流进来的电量是

$$\frac{1}{2}r^2\frac{v}{nl}，和\ \frac{1}{2}r^2\frac{w}{m}.$$

如果 γ 是电流在 OR 方向上的分量，则单位时间内通过 ABC 而离开四面体的电量是

$$\frac{1}{2}r^2\frac{\gamma}{lmn}.$$

既然这一电量等于通过另外三个三角形流进来的电量，就有

$$\frac{1}{2}\frac{r^2\gamma}{lmn}=\frac{1}{2}r^2\left\{\frac{u}{mn}+\frac{v}{nl}+\frac{w}{lm}\right\};$$

[1] {译注：此处定义的是电流密度的分量。}

乘以$\frac{2lmn}{r^2}$，我们就得到

$$\gamma = lu+mv+nw. (1)$$

如果我们令 $u_2+v_2++w_2=\Gamma^2$，

并取 l'、m'、n'，使之满足

$$u=l'\Gamma，v=m'\Gamma，和 w=n'\Gamma；$$

就得到

$$\gamma=\Gamma(ll'+mm'+nn'). (2)$$

由此可见，如果我们可以把合电流定义为一个矢量，其量值是Γ，其方向余弦是 l'、m'、n'，而γ则代表沿着和合电流有一夹角θ的一个方向的电流分量，就有

$$\gamma=\Gamma\cos\theta；(3)$$

这就表明，电流的分解规律和速度、力以及其他矢量的分解规律相同。

287.〕为了确定一个给定的曲面可以是一个流面的条件，设

$$F(x，y，z)=\lambda (4)$$

是一族曲面的方程，其中每一个平面通过令 l 取一个常数值来给出。于是，如果我们令

$$\overline{\frac{d\lambda}{dx}}\Big|^2+\overline{\frac{d\lambda}{dy}}\Big|^2+\overline{\frac{d\lambda}{dz}}\Big|^2=\frac{1}{N^2}, \quad (5)$$

则沿λ增大的方向画出的法线的方向余弦是

$$l=N\frac{d\lambda}{dx}，m=N\frac{d\lambda}{dy}，n=N\frac{d\lambda}{dz}. \qquad (6)$$

因此，如果γ是沿曲面法线的电流分量，则有

$$\gamma=N\left\{u\frac{d\lambda}{dx}+v\frac{d\lambda}{dy}+w\frac{d\lambda}{dz}\right\}. \qquad (7)$$

如果$\gamma=0$，就没有电流通过曲面，从而曲面就可以叫做一个“流面”，因为各流线是在这个曲面上的。

288.〕因此，流面的方程就是

$$u\frac{d\lambda}{dx}+v\frac{d\lambda}{dy}+w\frac{d\lambda}{dz}=0. \qquad (8)$$

如果这一方程对一切的λ值都成立，则族中的一切曲面都将是流面。

289.〕设有另外一族曲面，其参数为λ'，那么，如果这些曲面也是流面，我们就将有

$$u\frac{d\lambda'}{dx}+v\frac{d\lambda'}{dy}+w\frac{d\lambda'}{dz}=0. \qquad (9)$$

如果有第三族流面，其参数为λ''，则有

$$u\frac{d\lambda''}{dx}+v\frac{d\lambda''}{dy}+w\frac{d\lambda''}{dz}=0. \qquad (10)$$

如果在这三个方程中消去 u、v、和 w，我们就得到

$$\begin{vmatrix} \frac{d\lambda}{dx}, & \frac{d\lambda}{dy}, & \frac{d\lambda}{dz} \\ \frac{d\lambda'}{dx}, & \frac{d\lambda'}{dy}, & \frac{d\lambda'}{dz} \\ \frac{d\lambda''}{dx}, & \frac{d\lambda''}{dy}, & \frac{d\lambda''}{dz} \end{vmatrix} = 0\,; \qquad (11)$$

或者说 $\lambda''=\phi(\lambda,\lambda')$；(12)

这就是说，λ″是λ和λ′的某一函数。

290.〕现在考虑四个曲面，其参数是λ、λ+δλ、λ′以及λ′+δλ′。这四个曲面包围成一个方截面的管子，我们称之为管δλ.δλ′。既然这个管子是由一些没有电流通过的曲面包围而成的，我们就可以称之为一个"流管"。如果我们在管上取两个截面，则通过一个截面流进来的电量必然等于通过另一个截面流出去的电量，从而这个电量就在一切截面上都相同，让我们用Lδλ.δλ′来代表它，此处L是定义特定流管的参数λ和λ′的函数。

291.〕如果δS代表由一个垂直于x的平面在一个流管上切出的截面，则我们由自变数的变化理论得到

$$\delta\lambda, \delta\lambda' = \delta\lambda\left(\frac{d\lambda}{dy}\frac{d\lambda'}{dz} - \frac{d\lambda}{dz}\frac{d\lambda'}{dy}\right), \qquad (13)$$

而由电流分量的定义就得到

$$udS=L\delta\lambda.\delta\lambda' \quad (14)$$

由此即得

$$\left.\begin{aligned} u &= L\left(\frac{d\lambda}{dy}\frac{d\lambda'}{dz} - \frac{d\lambda}{dz}\frac{d\lambda'}{dy}\right), \\ \text{同理可有}\; v &= L\left(\frac{d\lambda}{dz}\frac{d\lambda'}{dx} - \frac{d\lambda}{dx}\frac{d\lambda'}{dz}\right), \\ w &= L\left(\frac{d\lambda}{dx}\frac{d\lambda'}{dy} - \frac{d\lambda}{dy}\frac{d\lambda}{dx}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

292.〕当函数λ和λ′中的一个函数为已知时，总可以定义另一个函数使它的L等于1。例如，让我们取yz平面，在上面画一系列平行于y的等距线来代表这一平面在族λ′中切出的截面。换句话说，设函数由当x=0时λ′=z这个条件来确定。那么，如果我们令L=1，从而（当x=0时）

$$\lambda = \int udy,$$

则在平面(x=0)上通过任一部分的电量将是

$$\iint udydz = \iint d\lambda d\lambda'. \qquad (16)$$

由 yz 平面在各流面上切出的截面的本性既已确定，各流面在别处的形状就可以由条件式(8)和(9)来确定。这佯确定的两个函数λ和λ′就足以通过把L代成1以后的方程(15)来确定每一点上的电流。

关于流线

293.〕设已经选定一系列λ的值和λ′的值，相邻值之差为 1。由这些值定义的两系列曲面将把空间分成许多方形截面的流管，通过每一流管的将是一个单位电流。通过假设电流的单位很小，电流的细节就可以在任意的精确度下用这些流管来反映。于是，如果画一个任意曲面和这一组流管相交截，则通过这一曲面的电流的数量将由它所交截的流管数目来表示，因为每一个流管载有单位电流。

各曲面的实际交线可以叫做“流线”。当单位取得够小时，和曲面相交的流线就近似地等于和它相交的流管数，因此我们可以认为，各流线不仅表示着电流的方向而且表示着电流的强度，因为通过一个截面的每一条流线都对应于一个单位电流。

关于电流层和电流函数

294.〕包括在一族流面（例如λ′）中的两个相邻流面之间的一层导体，叫做一个“电流层”。这一层内的流线，由函数λ来确定。如果 λ_A 和 λ_B 分别代表点 A 和点 P 上的λ值，则从右向左越过在层上从 A 画到 P 的任何线的电流是 $\lambda_p - \lambda_A$[①]。如果 AP 是在层上画出的的一条曲线上的一个线段元 ds，则从右向左越过这一线段元的电流是

$$\frac{d\lambda}{ds}ds.$$

根据函数λ，可以完全地确定层中的电流分布；这一函数叫做“电流函数”。

两侧以空气或其他非导电媒质为界的任何金层薄层或导电物质薄层，都可以看成一个电流层，层中的电流分布可以利用一个电流函数来表示。参阅第 647 节。

“连续性”方程

295.〕如果我们把(15)中的三个方程分别对 x、y、z 微分，记得 L 是λ和λ′的一个函数，我们就得到

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{xy}+\frac{dw}{dz}=0. \qquad (17)$$

在流体力学中，对应的方程叫做“连续性方程”。它所表示的连续性是存在上的连续性，也就是表示的这样一件事实：一种物质实体不可能离开空间的一个部分到达另一部分而并不经过二者之间的空间。它不能简单地从一个地方消失和在另一个地方出现，而是必须沿着一条连续的路径而运动。因此，如果画一个闭合曲面，包围一个地方而不包围另一个地方，则一种物质实体在从一个地方运动到另一个地方时必将越过这个闭合曲面。流体力学中最普遍的方程形式是

$$\frac{d(\rho u)}{dx}+\frac{d(\rho v)}{dy}+\frac{d(\rho w)}{dz}+\frac{d\rho}{dt}=0\;; \qquad (18)$$

[①] {所谓“越过 AP 的电流”是指通过由曲面λA、λP、λ′和λ′＋1 所包围而成的那一流管的电流。}

式中ρ代表实体的数量和它所占的体积之比，这时体积应是体积元；(ρu)、(ρv)和(ρw)代表单位时间内越过一个面积元的实体数量和面积元之比，而各面积元分别垂直于 x、y 和 z 轴。在这样的理解下，方程就适用于任何的物质实体，不论是固体还是流体，不论运动是连续的还是非连续的，只要该实体的各部分的存在是连续的就行。如果任何一种东西，尽管不是一种实体，但是却满足在时间和空间中连续存在的条件，则这一方程将表示那种条件。在物理科学的其他部门中，例如在电学量和磁学量的理论中，形式相似的方程也存在。我们将把这样的方程叫做“连续性方程”，以指示他们的形式，尽管我们可能并不认为这些量有什么物质性，甚至并不认为他们在时间和空间中有什么连续存在。

如果在方程(18)中令ρ=1，也就是说，如果假设实体是均匀的和不可压缩的，则我们在电流的事例中求得的方程(17)将和方程(18)完全相同。在流体的事例中，这个方程也可以按照在流体力学中给出的任何一种证明方式来确立。在其中一种证明方式中，我们在某一个数量的流体的运动过程中追索它的变形过程。在另一种方式中，我们把注意力集中在一个空间体积元上，并考虑进入和离开该体积元的一切流体。前一种方法不能应用于电流，因为我们并不知道电在物体中的运动速度，甚至不知道它是沿着电流的正方向还是负方向而运动的。我们所知道的一切，只是在单位时间内越过单位面积的电量的代数值,这是和方程(18)中的(ρu)相对应的一个量。我们没有任何办法来确定因子ρ的或因子 u 的值，从而我们不能追索一部分电量在物体中的运动。另一种研究方法，即考虑通过一个体积元的各壁面的各个电量的方法，对电流是适用的，而且从我们已经给出的形式来看也许是更加可取的，但是既然这种方法可以在任何流体力学著作中找到，我们也就用不着在这里重述的。

通过一个给定曲面的电量

296.〕设Γ是曲面的任意点上的合电流。设 dS 是曲面的一个面积元，而∈是Γ和曲面的外向法线之间的夹角，则通过曲面的电流将是

$\int\int \Gamma\cos\in dS$,

积分遍及于该曲面。

正如在第 21 节中一样，在任何闭合曲面的事例中，我们可以把这一积分变换成

$$\iint \Gamma\cos\in S=\iiint(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz})dxdydz \qquad (19)$$

的形式，三重积分的积分限就是曲面所包括的界限。这就是闭合曲面上的外向通量的表示式。既然在一切恒稳电流的事例中这一通量不论积分限是什么都等于零，被积函数就必须为零，而这样我们就能得到连续性方程(17)。

第八章

三维空间中的电阻和电导

关于电流和电动势之间的最普遍的关系

297.〕设任意点上的电流分量为 u、v、w。

设电动强度的分量为 X、Y、Z。

任意点上的电动强度就是作用在位于该点的一个单位正电荷上的合力。它可以起源于(1)静电作用，这时如果 V 是势，就有

$$X = -\frac{dV}{dx}，Y = -\frac{dV}{dy}，Z = -\frac{dV}{dz}； \quad (1)$$

或起源于(2)电磁感应，其规律将在以后加以考查；或起源于(3)该点本身上倾向于沿给定方向产生电流的温差电作用或电化学作用。

一般说来，我们将假设 X、Y、Z 代表一点上的实际电动强度的分量，不论力的起源是什么，但是有时我们也将考查假设它完全起源于势的变化时所将得到的结果。

由欧姆定律，电流正比于电动强度。由此可知 X、Y、Z 必然是 u、v、w 的线性函数。因此我们可以采用“电阻方程”如下：

$$\left.\begin{aligned} X &= R_1u + Q_3v + P_2w, \\ Y &= P_3u + R_2v + Q_1w, \\ Z &= Q_2u + P_1v + R_2w. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

我们可以把各个系数 R 叫做沿各座标轴方向的纵向电阻系数。

各系数 P 和 Q 可以叫做横向电阻系数。他们指示的是沿一个方向产生电流时所要求的沿另一方向的电动强度。

假如我们能够假设一个固体可以看成一个线性导体组，则由线性组中任意二导体的倒易性（第 281 节），我们可以证明平行于 y 产生单位电流所要求的沿 z 的电动强度，等于平行于 z 产生单位电流所要求的沿 y 的电动强度。这就将表明 $P_1=Q_1$，同理我们将得到 $P_2=Q_2$ 和 $P_3=Q_3$。当这些条件得到满足时，系数组就被说成是“对称的”。当条件不满足时，系数组就被说成是“非对称的”{译注：原文是 Skewsystem，易引起误解，今略改。}。

我们有很强的理由相信在每一个实际事例中系数组都是对称的[①]，但是我们也将考查承认非对称可能性的某些后果。

298.〕u、v、w 这些量可以用一组方程来表示成 X、Y、Z 的线性函数，我们把这一组方程称为“电导方程”。

$$\left.\begin{aligned} u &= r_1X + p_3Y + q_2Z, \\ v &= q_3X + r_2Y + p_1Z, \\ w &= p_2X + q_1Y + r_3Z; \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

我们可以把各个系数 r 叫做“纵向电导系数”，而把各个 p 和各个 q 叫做“横向电导系数”。

[①] {参阅第 303 节的注。}

各个电阻系数是和各个电导系数互逆的。这种关系可以定义如下。

设[PQR]是电阻系数行列式，而[pqr]是电导系数行列式，于是就有

$[PQR]=P_1P_2P_3+Q_1Q_2Q_3+R_1R_2R_3-P_1Q_1R_1-P_2Q_2R_2-P_3Q_3R_3$.(4)

$[pqr]=p_1p_2p_3+q_1q_2q_3+r_1r_2r_3+p_1q_1r_1-p_2q_2r_2-p_3q_3r_3$,(5)

$$[PQR][pqr]=1，(6)$$

$[PQR]p_1=(p_2p_3-Q_1R_1)$,$[pqr]P_1=(p_2p_3-q_1r_1)$，(7)，

等等等等

其他的方程可以通过将各符号 P、Q、R、p、q、r 按各下标 1、2、3 进行轮换来得出。

热的产生率

299.〕为了求出电流在单位时间内克服电阻而产生热时所作的功，我们把电流分量和对应的电动强度分量相乘。于是我们就得到单位时间内消耗的功 W 的表示式如下：

$W=Xu+Yv+zw$；(8)

$=R_1u_2+R_2v_2+R_3w_2+(P_1+Q_1)vw+(P_2+Q_2)wu+(P_3+Q_3)uv$;(9)

$=r_1X^2+r_2Y^2+r_3Z^2+(p_q+q_1)YZ+(p_2+q_2)ZX+(p_3+q_3)ZX+(p_3+q_3)XY$.(10)

通过座标轴的适当选择，可以从(9)中消去含 u、v、w 的乘积的各项，或是从(10)中消去含 X、Y、Z 的乘积的各项。然而，把 W 简化成

$$R_1u^2+R_2v^2+R_3w^2$$

的座标系通常并不同于把它简化成

$$r_1X^2+r_2Y^2+r_3Z^2.$$

的座标系。

只有当系数 P_1、P_2、P_3 分别等于 Q_1、Q_2、Q_3 时两个座标系才会重合。

如果我们像汤姆孙[①]那样写出

$$\left.\begin{array}{l} p=S+T，\ Q=S-T；\\ p=s+t，\ q=s-t； \end{array}\right\} \qquad (11)$$

我们就得到

$$\left.\begin{array}{l} [PQR]=R_1R_2R3+2S_1S_2S_3-S_{1^2}R_1-S_{2^2}R_2-S_{3^2}R_3 \\ +2(S_1T_2T_3+S_2T_3T_1+S_3T_1T_2)+R_1T_{1^2}+R_2T_{2^2}+R_3T_{3^2}； \end{array}\right\} \qquad (12)$$

因此，如果我们使 S_1、S_2、S_3 不再存在，则各系数 s 并不会也不再存在，除非各系数 T 等于零。

稳定条件

300.]既然电的平衡是稳定的，用于保持电流的功就必须永远是正的。W 必为正的条件是三个系数 R_1、R_2、R_3 和三个表示式

① Trans.R.S.Edin.,1853－4,p.165.

$$\left.\begin{array}{l}4R_2R_3-(P_1+Q_1)^2,\\4R_3R_1-(P_2+Q_2)^2\\4R_1R_2-(P_3+Q_3)^2,\end{array}\right\}\qquad(14)$$

必须都是正的。

关于电导系数也有类似的条件。

均匀媒质中的连续性方程

301.]如果我们把电动强度的各分量写成势的导数，则连续性方程

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0\qquad(15)$$

在均匀媒质中将变成

$$r_1\frac{d^2V}{dx^2}+r_2\frac{d^2V}{dy^2}+r_2\frac{d^2V}{dz^2}+2s_1\frac{d^2V}{dydz}+2s_2\frac{d^2V}{dzdx}+3s_3\frac{d^2V}{dxdy}=0.\quad(16)$$

如果媒质是不均匀的，则会有起源于电导系数从一点到另一点的变化的一些项。

这一方程对应于各向异性媒质中的拉普拉斯方程。

302.]如果我们令

$[rs]=r_1r_2r_3+2s_1s_2s_3-r_1s_1^2-r_1s_2^2-r_3s_3^2$,(17)

$[AB]=A_1A_2A_3+2B_1B_2B_3-A_1B_1^2-A_2B_2^2-A_3B_3^2$，(18)

式中

$$\left.\begin{array}{l}[rs]A_1=r_2r_3-s_1^2,\\ [rs]B_1=s_2s_3-r_1s_1,\\ \cdots\cdots\end{array}\right\}\qquad(19)$$

等等，则 A、B 组将和 r、s 组互逆，而如果我们令

$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2B_1yz+2B_2zx+2B_3xy=[AB]\rho^2$，(20)

我们就会发现

$$V=\frac{C}{4\pi}\frac{1}{\rho}\qquad(21)$$

是方程的一个解[①]。

在各系数 T 为零的事例中，各系数 A 和 B 变成与第 299 节中的各系数 R 和 S 相等同。当 T 不等于零时，情况并不是这样的。

因此，在电从一种无限的、均匀的然而并非各向同性的媒质中的一个中心流出的事例中，等势面就是一些椭球，对其中每一个椭球来说 ρ 是常量。这些椭球的轴各沿电导的主轴，而这些轴并不和电阻的主轴相重合，

[①] {假设通过变换 能使(16)式的左端变成 为了作到这一点，我们看到 r1 ξ ＋r2 η 2＋r2 ξ 2＋2s1 η ξ ＋…必须和 相等同，我们用 U 来代表此式。如果我们利用方程 消去ξ，η，ξ，则因为 AB 组和 rs 组互逆，我们就得到 U＝A1x2＋A2y2＋A3z2＋2B1yz＋…但是我们由(1)和(3)看到 由此即得 U＝X2＋Y2＋Z1. 足该方程。}

除非体系是对称的。

通过方程(16)的变换，我们可以取电导的主轴作为 x、y、z 轴。于是形如 s 和 B 的系数将简化为零,而每一个形如 A 的系数将和对应的形如 r 的系数互为倒数。ρ 的表示式将是

$$\frac{x^2}{r_1}+\frac{y^2}{r_2}+\frac{z^2}{r_3}=\frac{\rho^2}{r_1r_2r_3}. \quad (22)$$

303.]电阻和电导的完整方程组的理论就是三变数线性函数组的理论；这种理论在协变理论[①]和物理学的其他部门中有其实例。处理这种问题的最合适的方法，就是哈密顿和泰特用来处理一个矢量的线性矢量函数的那种方法。然而我们不准备明显地引用四元数的符号。

各系数 T_1、T_2、T_3 可以看成一个矢量 T 的直角分量，该矢量的量值和方向是固定在物体中的，和座标轴的方向无关。对于 t_1、t_2、t_3 也有相同的情况，他们是另一个矢量 t 的分量。

矢量 T 和 t 的方向通常并不一致。

现在让我们把 z 轴取成和矢量 T 相重合，并相应地变换电阻方程。这时他们的形式将是

$$\left.\begin{aligned}X&=R_1u+S_3v+S_2w-tv,\\Y&=S_3u+R_2v+S_1w+Tu,\\Z&=S_2u+S_1v+R_3w。\end{aligned}\right\}(23)$$

由这些方程看来，我们可以把电动强度看成两个力的合力；其中一个力依赖于各系数 R 和 S，而另一个力则只依赖于 T，依赖于 R 及 S 的分力和电流的关系，与椭球切面的垂线和矢径的关系相同。另一个依赖于 T 的分力等于 T 和垂直于 T 的电流分量的乘积，其方向垂直于 T 和电流，并永远指向电流分量沿正方向绕 T 转动 90°时所指的方向。

如果我们把电流和 T 都看成矢量，由 T 引起的电动强度分量就是乘积“TX 电流”的矢量部分。

系数 T 可以叫做“旋转系数”。我们有理由相信它在任何已知的物质中都是不存在的。如果存在的话，它应该在一些磁体中被找到，那些磁体有一种沿着一个方向的也许是由物质内的旋转现象所引起的极化[①]。

304.〕于是，假设不存在任何旋转系数，我们就将指明可以怎样对在第 100a-100e 节中给出的汤姆孙定理进行推广，来证明电流在给定时间内在一个体系中产生的热量是一个唯一的极小值。

为了简化代数计算，设座标轴选得可以把表示式(9)简化为三项，而且在现有的事例中也把表示式(10)简化为三项；然后让我们考虑这时简化为

$$r_1\frac{d^2V}{dx^2}+r^2\frac{d^2V}{dy^2}+r_3\frac{d^2V}{dz^2}=0. \qquad (24)$$

的普遍特征方程(16)。

[①] 见 Thomson and Tait's Natural Philosophy,§154.

[①] {霍耳先生关于磁性对永久电流的作用的发现(Phil.Mag.ix.p.225;x.p.301,1880)，可以用一种说法来描述，即放在磁场中的一个导体有一个旋转系数。参阅霍普金孙(Phil.Mag.x.p.430,1880)。}

另外，设 a、b、c 是 x、y、z 的满足条件

$$\frac{da}{dx}+\frac{db}{dy}+\frac{dc}{dz}=0; \qquad (25)$$

的三个函数，并设

$$\left.\begin{aligned} a &= -r_1\frac{dV}{dx}+u, \\ b &= -r_2\frac{dV}{dy}+v, \\ c &= -r_3\frac{dV}{dz}+w. \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

最后，设三重积分

$$W=\iiint(R_1a^2+R_2b^2+R_3c^3)dxdydz \qquad (27)$$

遍及于一个空间，该空间的边界如第 100a 节所述；也就是说，在某些部分上，V 是常量而在另一些部分上矢量 a、b、c 的法向分量已经给定，而且前一个条件还附加着一个限制，即这一分量在整个边界面上的积分应为零。于是，当

$$u=0，v=0，w=0$$

时 W 将是一个极小值。

因为，我们在这一事例中有

$$r_1R_1=1，r_2R_2=1，r_3R_3=1；$$

从而由(26)即得

$$W=\iiint\left(r_1\left.\frac{dV}{dx}\right|^2+r_2\left.\frac{dV}{dy}\right|^2+r_3\left.\frac{dV}{dz}\right|^2\right)dxdydz+$$

$$\iiint(R_1u^2+R_2v^2+R_3w^2)dxdydz$$

$$-2\iiint\left(u\frac{dV}{dx}+v\frac{dV}{dy}+w\frac{dV}{dz}\right)dxdudz. \qquad (28)$$

但是既然

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0, \qquad (29)$$

第三项就因为积分限上的条件而等于零。

因此(28)式中的第一项就是 W 的唯一的极小值。

305.〕由于这一定理在电学理论中有很大的重要性，在不用分析运算的形式下给出下述最普遍事例的证明就可能是有用的。

让我们考虑电通过一个任意形状的、均匀或不均匀的导体的传播情况。

这时我们知道：

(1)如果我们沿着路径并沿着电流的方向画一条线，则这条线必然从高势的地方引向低势的地方。

(2)如果体系各点的势按一个给定的均匀的比例而变化，则按照欧姆定律，电流也将按相同的比例而变化。

(3)如果某种势分布引起某种电流分布，而第二种势分布引起第二种

电流分布，则其势为第一种和第二种分布中的势之和或差的第三种势分布将引起第三种电流分布，而这种分布通过给定有限曲面的总电流将等于在第一种和第二种分布中通过该曲面的总电流之和或差。因为，由欧姆定律，由于势的改变所引起的附加电流是和由原有势分布所引起的原有电流无关的。

(4)如果势在整个一个闭合曲面上是常量，而且曲面内没有任何的电极或内禀电动势，则闭合曲面内部不会有电流，而其内部各点的势将等于曲面上的势。

假如闭合曲面中有电流，则电流必然或是形成闭合曲线，或是其起点和终点都位于曲面之内或之上。

但是，既然电流必须从高势处流到低势处，它就不能形成闭合曲线。

既然曲面内没有任何电极，电流的起点和终点就不可在闭合曲面之内，而既然曲面上各点的势都相同，也不可能有任何电流沿着从曲面上一点到另一点的线而流动。

由此可见曲面内部没有任何电流，从而也不可能有任何势差，因为这样一个势差将引起电流，而因此闭合曲面内的势就到处都和曲面上的势相同。

(5)如果没有任何电流通过一个闭合曲面的任何部分，而又没有任何电极或内禀电动势位于曲面之内，则曲面内部将没有电流，而势将是均匀的。

我们已经看到，电流不能形成闭合曲线或是起始或终止于曲面之内，而既然根据假设它又不通过曲面，那就不可能有任何电流，从而势就是不变的。

(6)如果势在一个闭合曲面的一部分上是均匀的，而曲面的其余部分上又没有电流通过，则根据相同的理由可知势在曲面内部将是均匀的。

(7)如果一个物体的一部分表面的每一点上的势为已知，而在其余部分表面的每一点上通过的电流为已知，则物体内部各点上只能存在一种势分布。

因为，假若在物体内的任一点上可以有两个不同的势值，设在第一种事例中为 V_1 而在第二种事例中为 V_2，并且让我们设想第三种事例，那时物体每一点的势是第一、二两种事例中的势的差值。那么，在势为已知的那一部分表面上，第三种事例中的势将是零，而在所通过的电流为已知的那一部分表面上，则第三种事例中的电流将为零，于是由(6)可知，曲面内到处的势都将是零，或者说 V_1 和 V_2 并无差值。因此就只有一种可能的势分布。这一定理是对的，不论固体是以一个还是以若干个闭合曲面为其边界面。

一个形状给定的导体的电阻的近似计算

306.〕这里考虑的导体，其表面被分成三部分。在其中第一部分上，势被保持为一个常量。在第二部分上，势有一个不同于第一部分上的值的常量值。表面的整个其余部分都不允许电通过。我们可以假设第一部分和第二部分上的条件是通过在导体上加了两个用理想导电材料做成的电极来满足的，而其余表面上的条件则是通过用一种完全不导电的材料盖住它来

满足的。

在这些条件下，导体任何部分的电流将简单地正比于两个电极之间的势差。把这个势差称为电动势，从一个电极到另一个电极的总电流就等于电动势和整个导体的电导的乘积，而导体的电阻就是电导的倒数。

只有当一个导体近似地处于上述这样的条件下时，它才能被说成有一个确定的整体电阻。两头接在大铜块上的用细导线绕成的线圈就近似地满足这些条件，因为大电极中的势差不多是常量，而同一电极上各点之间的任何势差和二电极之间的势差比起来是可以忽略不计的。

计算这样的导体的电阻的一种很有用的方法，据我所知是由瑞利勋爵最初在一篇论文“关于共振理论”[①]中提出的。这是建筑在下面的想法上的。

如果导体任一部分的比电阻被改变而其余部分的比电阻保持不变，则整个导体的电阻将变大，如果该部分的电阻是增大了的，而整个导体的电阻将变小，如果该部分的电阻是减小了的。

这一原理可以认为是不言而喻的，但是可以很容易地证明，一个导体组在取为电极的二点之间的电阻表示式的值，是随着组内每一导体电阻的增加而增加的。

由此可以推知，如果在导体物质中画一个任意形状的曲面，而且进一步假设这个曲面是一个由理想导电物质构成的无限薄的层，则整个导体的电阻将减小，除非曲面是导体在自然状态下的一个等势面；在后一情况下，把该面做成理想导体不会产生任何效应，因为它已经是处于平衡的了。

因此，如果我们在导体内部画出一系列曲面，其中第一个曲面和第一个电极相重合，其最后一个曲面和第二个电极相重合，而中间的各曲面以导体的不导电表面为边界，而且并不相交，另外，如果我们假设这些曲面中的每一个曲面都是一个无限薄的理想导电层，我们就将得到一个体系，其电阻肯定不大于原有导体的电阻，而且只有当我们所选的那些曲面是自然等势面时，该体系的电阻才等于原有导体的电阻。

计算人为体系的电阻是比原有问题容易得多的一种运算。因为整体电阻就是包括在相邻曲面之间的所有各物质层的电阻之和，而每一物质层的电阻可以求出如下：

设 dS 是物质层表面的一个面积元，v 是层的垂直于面积元的厚度，ρ 是比电阻，E 是完全导电曲面之间的势差，而 dC 是通过 dS 的电流，于是就有

$$dC = E\frac{1}{\rho v}dS，(1)$$

而通过物质层的总电流就是

$$C = E\iint\frac{1}{\rho v}dS，(2)$$

积分遍及以导体的不导电表面为其边界的整个物质层。

由此可见，物质层的电导就是

$$\frac{D}{E} = \iint\frac{1}{\rho v}dS，(3)$$

[①] Phil.Trans.,1871,p.77.见第 102a 节。

而物质层的电阻是这个量的倒数。

如果物质层是以两个曲面为其边界面的，而函数 F 在该二曲面上的值分别是 F 和 F+dF，则有

$$\frac{dF}{v}=\Delta F=[(\frac{dF}{dx})^2+(\frac{dF}{dy})^2+(\frac{dF}{dz})^2]^{\frac{1}{2}}, \qquad (4)$$

而该层的电阻就是

$$\frac{dF}{\iint\frac{1}{\rho}\nabla F dS}. \qquad (5)$$

为了求出整个人为导体的电阻，我们只要对 F 求积分，于是就得到

$$R_1=\int\frac{dF}{\iint\frac{1}{\rho}\cdot\nabla F dS}. \qquad (6)$$

自然状态下的导体的电阻大于如此求得的值，除非我们所选的曲面全部都是自然等势面。另外，既然 R 的真实值是各个 R_1 值的绝对最大值，它就可以这样来求出：所选可曲面对真实等势面的微小偏离，将引起 R 的一个比较小的误差。

这种确定电阻值下限的方法显然是完全普遍的，而且是可以应用于任何形状的导体的，即使比电阻 ρ 是在导体内以任意方式变化的也无妨。

最熟知的例子就是确定变截面直导线的电阻的普通方法。在这一事例中，所选的各面是一些垂直于导线轴的平面，各物质层具有平行的表面，而截面为 S、厚度为 ds 的层的电阻就是

$$dR_1=\frac{\rho ds}{S}, \qquad (7)$$

而长度为 s 的整个导线的电阻就是

$$R_1=\int\frac{\rho ds}{S}, \qquad (8)$$

式中 S 是横截面，而且是 s 的函数。

在导线的截面随长度而缓慢变化的事例中，这一方法给出的结果和真实值很接近，但结果其实只是一个下限，因为真实的电阻永远大于这种结果，截面完全均匀的事例除外。

307.〕为了求出电阻的上限，让我们假设在导体中画出的一个曲面被弄成不导电的。此事的效应必然是增大导体的电阻，除非该曲面是自然电流面之一。借助于两组曲面，我们可以形成一组管子，他们将完全限定电流，而这些不导电曲面的效应，如果有任何效应的话，将是使电阻超过它的自然值。

每一根管子的电阻，可以用已经给出的计算细导线电阻的办法来计算，而整个导体的电阻是所有各管电阻倒数之和的倒数。这样求出的电阻大于自然电阻，除了各管和自然流线相一致时以外。

在已经考虑过的事例中，导体的形状是一个拉长了的旋转体；让我们沿物体的轴来测量 x，并设任一点上的截面半径为 b。设一组非导电曲面是通过轴线的一些平面，对其中每一个平面来说 φ 是不变的；设另一组曲面是一些旋转曲面，其方程是

$$y^2 = \psi b^2，\qquad (9)$$

式中ψ是介于 0 和 1 之间的一个数字。

让我们考虑由各面φ和φ+dφ、ψ和ψ+dψ、x 和 x+dx 限定的一个管子的一段。

垂直于轴线的管子截面是

$$ydyd\phi = \frac{1}{2}b^2 d\psi d\phi. \qquad (10)$$

如果θ是该管和轴线之间的夹角，则有

$$\tan\theta = \psi^{\frac{1}{2}}\frac{db}{dx}. \qquad (11)$$

管子的元段的真实长度是 dxsecθ，而其真实截面积是

$$\frac{1}{2}b^2 d\psi d\phi\cos\theta$$

因此它的电阻是

$$2\rho\frac{dx}{b^2 d\psi d\phi}\sec^2\theta = 2\rho\frac{dx}{b^2 d\psi d\phi}\left(1+\psi\overline{\frac{dV}{dx}}\Big|^2\right). \qquad (12)$$

令

$$A = \int\frac{\rho}{b^2}dx，\text{并且}B = \int\frac{\rho}{b^2}\left(\frac{db}{dx}\right)^2 dx， \qquad (13)$$

积分遍及导体的全部长度 x，则管 dψdφ的电阻是

$$\frac{2}{d\psi d\phi}(A+\psi B).$$

而其电导是

$$\frac{d\psi d\phi}{2(A+\psi B)}.$$

整个导体的电导是各管电导之和。为了求出这一电导，我们必须把此式从φ=0 积分到φ=2π，并从ψ=0 积分到ψ=1。结果是

$$\frac{1}{R'} = \frac{\pi}{B}\left(1+\frac{B}{A}\right)， \qquad (14)$$

这一结果可以小于但不能大于导体的真实电导。

当$\frac{db}{dx}$永远是一个小量时，$\frac{B}{A}$也将很小，从而我们可以把这个电导表示式展开，于是

$$\frac{1}{R'} = \frac{\pi}{A}\left(1-\frac{1}{2}\frac{B}{A}+\frac{1}{3}\frac{B^2}{A^2}-\frac{1}{4}\frac{B^3}{A^3}+\cdots\right). \qquad (15)$$

此式第一项，$\frac{\pi}{A}$，就是我们用以前的方法所应得到的电导的上限。因此，真实的电导就小于第一项而大于整个的级数。电阻的上限就是此式的倒数，或者说

$$R' = \frac{A}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\frac{B}{A}-\frac{1}{12}\frac{B^2}{A^2}+\frac{1}{24}\frac{B^3}{A^3}-\cdots\right). \qquad (16)$$

如果除了认为电流受到各曲面φ和ψ的限制以外还假设通过每一根管子的电流和 dψdφ成正比，我们就将得到这一附加约束下的电阻值

$$R'' = \frac{1}{\pi}(A + \frac{1}{2}B)^{①}，(17)$$

此值显然大于上一值，而由于附加的约束，这也是理所当然的。在瑞利勋爵的论文中这就是所作的假设，而文中给出的电阻上限就具有(17)的值，它比我们在(16)中得到的稍大一些。

308.〕我个现在必须应用相同的方法来求出当一个半径为 a 的圆柱导体的一端和一个很大的电极相接时必须对导体的长作出的改正量。这时我们可以假设电极是用另一种金属制成的。

为了得到电阻的下限，我们可以假设有一个无限薄的用理想导电物质制成的圆片被放在圆柱的一端和大块电极之间，以便使圆柱的端面上具有一个到处相同的势。于是圆柱内部的势将只是它的长度的函数，而且，如果我们假设电极和圆柱接触的部分近似地是平面，而且它的一切线度都比圆柱的直径大得多，则势的分布将是由放在无限媒质中的一个圆盘形导体所引起的那种势分布。见第 151、177 节。

如果 E 是圆片和电极最远部分之间的势差，C 是从圆片的表面出发而进入电极中的电流，而 ρ ′是电极的比电阻，那么，如果 Q 是我们将假设为像在第 151 节中那样分布在圆片上的电量，我们就看到，电动强度在圆上的积分是

$$\rho' C = \frac{1}{2} \cdot 4\pi Q = 2\pi \frac{aE}{\frac{\pi}{2}}，\text{据第151节}$$

$$= 4aE. \qquad (18)$$

因此，如果从一点到电极的导线长度是 L，而导线的比电阻是 ρ，则从该点到电极上不靠近接触面的任何一点的电阻是

$$R = \rho\frac{L}{\pi a^2} + \frac{\rho'}{4a}，$$

而且此式可以写成

$$R = \frac{\rho}{\pi a^2}(L + \frac{\rho'}{\rho}\frac{\pi a}{4})，\quad (19)$$

此处括号中的第二项就是在计算一根圆柱或导线的电阻时必须加在它的长度上的一个量，而这肯定是一个微不足道的改正量。

为了理解主要误差的本性，我们可以注意，尽管我们曾经假设导线中的电流直到圆片为止是在整个截面上均匀分布的，但是从圆片到电极的电流却不是均匀分布的，而是在任一点上都反比于通过该点的最短弦的(第 151 节)。在实际情况下，通过圆片的电流将不是均匀的，但它也不像所假设的情况一样从一点到一点变化得那么快。实际情况下的圆片的势将不是均匀的而是从中间到边沿逐步减小。

309.〕其次我们将通过把圆片中的电流约束成各点均匀来确定一个大于真实电阻的量。我们可以假设，为此目的而引入的电动势是垂直于圆片的表面而作用着的。

导线中的电阻将和以前相同，但是电极中的发热率将是电流和势的乘

---

① Lord Rayleigh,Theory of Sound,ii.p.171.

积的面积分。任何一点的流动率将是$\frac{C}{\pi a^2}$，而势将和面密度为σ的带电表面的势相同，此处

$$2\pi\sigma=\frac{C\rho'}{\pi a^2}, \quad (20)$$

ρ′是比电阻。

因此我们必须确定圆片均匀地带有面密度为σ的电荷时的势能。

[①]密度σ均匀的一个圆片的边沿上的势，很容易求出为 4aσ，在圆片边沿上增加宽度为 da 的一条时所作的功是 2πaσda.4aσ，而圆片的总势能就是此式的积分，或者说是

$$P=\frac{8\pi}{3}a^3\sigma^2. \quad (21)$$

在电传导的事例中，电阻为 R′的电极中的功率是 C^2R'。但是，由普遍的导电方程可知，穿过圆片的单位面积的电流应是

$$-\frac{1}{\rho'}\frac{dV}{dv}$$

或$\frac{2\pi}{\rho'}\sigma$.

如果 V 是圆片的势而 ds 是它的面积元，则功率

$$=\frac{C}{\pi a^2}\int Vds=\frac{2C}{\pi a^2}\frac{P}{\sigma}，因为P=\frac{1}{2}\int V\sigma ds,$$

$$=\frac{4\pi}{\rho'}P（据(20)）。$$

因此我们就有

$$C^2R'=\frac{4\pi}{\rho'}P, \quad (22)$$

于是，由(20)和(21)即得

$$R'=\frac{8\rho'}{3\pi^2a},$$

而必须加在圆柱长度上的改正量就是

$$\frac{\rho'}{\rho}\frac{8}{3\pi}a,$$

这个改正量大于真实值。因此，必须加在长度上的改正量是$\frac{\rho'}{\rho}an$，n是一个数字，介于$\frac{\pi}{4}$和$\frac{8}{3\pi}$之间，或者说介于0.785和0.849之间。

[①]利用二级近似，瑞利勋爵曾经把上限减小到 0.8282。

[①] 见 Cayley 教授的论文，London Math.Soc.Proc.vi.p.38.VOL.I.

[①] Phil.Mag.Now.1872，p.344.随后瑞利勋爵得到了 0.8242 作为上限。参阅 London Math.Soc.Proc.vii.p.74，并见 Theory of Sound,vol.ii.Appendix A.p.291.

第九章

不均匀媒质中的导电

关于在两种导电煤质的分界面上必须满足的条件

310.〕有两个条件是电流分布必须普遍满足的，即势必须连续的条件和电流的“连续性”条件。

在两种媒质的分界面上，第一个条件要求分界面两侧相距无限近的两个点上的势应该相等。这里所说的势，应理解为借助于一个用给定金属制成的电极而接在所给点上的一个静电计所测得的势。如果势是用第 222、246 节所描述的那种把电极放在金属中一个充有空气的空腔中的办法来测量的，则如此测得的靠近不同金属的点上的势将相差一个量，该量依赖于两种金属的温度和种类。

界面上的另一个条件是，通过任一面积元的电流当在两种媒质中测量时应该相等。

于是，如果 V_1 和 V_2 是两种媒质中的势，则在分界面的任一点上，有

$$v_1=v_2,\quad(1)$$

而且，如果 u_1、v_1、w_1 和 u_2、v_2、w_2 是两种媒质中的电流分量，而 l、m、n 是分界面法线的方向余弦，则有

$$u_1l+v_1m+w_1n=u_2l+v_2m+w_2n.\quad(2)$$

在最普遍的事例中，各分量 u、v、w 是 V 的导数的线性函数，其形式由方程

$$\left.\begin{aligned}u&=r_1X+p_3Y+q^2Z,\\v&=q_3X+r_2Y+p_1Z,\\w&=p_2X+q_1Y+r_3Z,\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

来给出，此处 X、Y、Z 分别是 V 对 x、y、z 的导数。

让我们考虑一种分界面的事例，分界面一侧的媒质具有这些电导系数，而其另一侧则是电导系数等于 r 的一种各向同性的媒质。

设 X'、Y'、Z' 是各向同性媒质中的 X、Y、Z 的值，于是我们在分界面上就有

$$V=V',\quad(4)$$

或 $$Xdx+Ydy+Zdz=X'dx+Y'dy+Z'dz,\quad(5)$$

当 $$ldx+mdy+ndz=0.\quad(6)$$

这一条件导致

$$X'=X+4\pi\sigma l,\ Y'=Y+4\pi\sigma m,\ Z'=Z+4\pi\sigma n,\quad(7)$$

式中 σ 是面密度。

在各向同性媒质中，我们还有

$$u'=rZ',\ v'=rY',\ w'=rZ',\quad(8)$$

从而分界面上的电流条件就是

$$u'l+v'm+w'n=ul+vm+wn,\quad(9)$$

或 $r(lX+mY+nZ+4\pi\sigma)$

$$=l(r_1X+p_3Y+1_2Z)+m(q_3X+r_2Y+p_1Z)+n(p_2X+q_1Y+r_3Z)，\quad(10)$$

由此即得

$$4\pi\sigma r=\{l(r_1-r)+mq_3+np_2\}X+\{lp_3+m(r_2-r)+nq_1\}Y+\{lq_2+mp_1+n(r_3-r)\}Z.\quad(11)$$

量σ代表分界面上的电荷面密度。在结晶的和有结构的物质中，它依赖于分界面的方向和垂直于分界面的力。在各向同性物质中，系数 p 和 q 是零而各个系数 r 都相等，从而就有

$$4\pi\sigma=(\frac{r_1}{r}-1)(lX+mY+nZ)．\qquad(12)$$

式中 r_1 是物质的比电导，r 是外部媒质的比电导，而 l、m、n 是向着比电导为 r 的媒质画出的法线的方向余弦。

当两种媒质都为各向同性时，条件可以大为简化，因为，如果 k 是单位体积的比电阻，就有

$$u=-\frac{1}{k}\frac{dV}{dx}，\ v=-\frac{1}{k}\frac{dV}{dy}，\ w=-\frac{1}{k}\frac{dV}{dz}，\qquad(13)$$

从而如果 v 是分界面任一点上从第一种媒质向第二种媒质画的法线，则连续性条件是

$$\frac{1}{k_1}\frac{dV_1}{dv}=\frac{1}{k_2}\frac{dV_2}{dv}．\qquad(14)$$

如果θ_1和θ_2分别是第一种媒质和第二种媒质中的流线和分界面法线所夹的角，则这些流线的切线和该法线位于同一平面上，且在法线的两侧，而且有

$$k_1\tan\theta_1=k_2\tan\theta_2．\quad(15)$$

此式可以叫做流线的折射定律。

311.〕作为电在穿越两种媒质的分界面时所必须满足的条件的例子，让我们假设分界面是半径为 a 的球面，球面内、外的比电阻为 k_1 和 k_2。

设把球面之内和之外的势能都按体谐函数展开，并设其依赖于面谐函数 S_i 的部分在球面之内和之外分别是

$$V_1=(A_1r^i+B_1r^{-(i+1)})S_i，\qquad(1)$$

$$V_2=(A_2r^i+B_2r^{-(i+1)})S_i，\qquad(2)$$

在分界面上，r=a，我们应有

$$V_1=V_2，\text{和}\ \frac{1}{k_1}\frac{dV_1}{dr}=\frac{1}{k_2}\frac{dV_2}{dr}．\qquad(3)$$

由这些条件式，我们得到方程

$$\left.\begin{aligned}&(A_1-A_2)a^{2i+1}+B_1-B_2=0，\\&(\frac{1}{k_1}A_1-\frac{1}{k_2}A_2)ia^{2i+1}-(\frac{1}{k_1}B_1-\frac{1}{k_2}B_2)(i+1)=0．\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

当我们知道了四个量 A_1、A_2、B_1、B_2 中的两个量时，这些方程就足以导出其余的两个量。

让我们假设 A_1 和 B_1 是已知的，于是我们就得到 A_2 和 B_2 的下列表示式，

$$
\left.\begin{aligned}
A_2 &= \frac{\{k_1(i+1)+k_2 i\}A_1+(k_1-k_2)(i+1)B_1 a^{(-2i+1)}}{k_1(2i+1)}, \\
B_2 &= \frac{(k_1-k_2)iA_1 a^{2i+1}\{k_1 i+k_2(i+1)\}B_1}{k_1(2i+1)}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

用这种办法，我们可以针对由同心球面分成的任意多层媒质来求出势的谐函数展式中每一项所必须满足的条件。

312.〕让我们假设第一个球面的半径是 a_1，并设有第二个球面，其半径 a_2 大于 a_1，而在这个球面以外，比电阻是 k_2。如果在这些球面内没有电荷的正负源头，那就不会有 V 的无限值，从而我们将有 $B_1=0$。

于是我们就求得外面媒质中的系数 A_3 和 B_3 的表示式

$$
\left.\begin{aligned}
&A_3 k_1 k_2(2i+1)^2=[\{k_1(i+1)+k_2 i\}\{k_2(i+1)+k_3 i\} \\
&+i(i+1)(k_1-k_2)(k_2-k_3)(\frac{a_1}{a_2})^{2i-1}]A_1, \\
&B_3 k_1 k_2(2i+1)^2=[i(k_2-k_3)\{k_1(i+1)+k_2 i\}a_2^{2i+1} \\
&+i(k_1-k_2)\{k_2 i+k_3(i+1)\}a_1^{2i+1}]A_1.
\end{aligned}\right\} \quad (6)
$$

外部媒质中的势值，部分地依赖于外部的电源，这种电源独立于内部不均匀物质球的存在而引起电流，而同时势值也部分地依赖于引入不均匀球而造成的干扰。

第一部分必然只依赖正阶次的体谐函数，因为它不可能在球内有无限值。第二部分必然依赖于负阶次的体谐函数，因为它在距球心无限远处必须为零。

由此可见，由外电动势引起的势必须展成正阶体谐函数的级数。设 A_3 是形如

$$A_3 S_i r^i$$

的一个体谐函数的系数。于是我们就就能由(6)求得内球的对应系数 A_1，并由此导出 A_2、B_2 和 B_3。在这些系数中，B_2 代表由于引入不均匀球而对外部媒质中的势所造成的影响。

现在让我们假设 $k_3=k_1$，于是情况就变成，一个 $k=k_2$ 的中间球壳把 $k=k_1$ 的一种媒质分成了内外两部分。

如果我们令

$$C=\frac{1}{(2i+1)^2 k_1 k_2+i(i+1)(k_2-k_1)^2(1-(\frac{a_1}{a_2})^{2i+1})}$$

就得到

$$
\left.\begin{aligned}
A_1 &= k_1 k_2(2i+1)^2 CA_3, \\
A_2 &= k_2(2i+1)(k_1(i+1)+k_2 i)CA_3, \\
B_2 &= k_2 i(2i+1)(k_1-k_2)a_1^{2i+1}CA_3, \\
B_3 &= i(k_2-k_1)(k_1(i+1)+k_2 i)(a_2^{2i+1}-a_1^{2i+a})CA_3.
\end{aligned}\right\} \quad (7)
$$

未受干扰的系数 A_3 和它在壳内部的值 A_1 之差是

$$A_3 - A_1 = (k_2 - k_1)^2 i(i+1)(1-(\frac{a_1}{a_2})^{2i+1})CA_3. \quad (8)$$

既然不论 k_1、k_2 的值是什么这一差值都永远和 A_3 同号，那就可以知道，不论球壳的导电性能比其余媒质的性能是好还是坏，球壳所占据的空间中的电作用都是比没有球壳时更弱一些的。如果球壳是比其余其质更好的一个导体，它就倾向于使内球各点的势变为相等。如果它是一个较坏的导体，它就倾向于阻止电流达到内球。

实心球的事例可以通过令 a=0 而由此事例推得，它也可以独立地被算出。

313.〕谐函数展式中最重要的项是 i=1 的那一项，对该项来说有

$$\left.\begin{aligned} &C = \frac{1}{9k_1k_2 + 2(k_2 - k_1)^2(1-(\frac{a_1}{a_2})^3)}, \\ &A_1 = 9k_1k_2CA_3，\ A_2 = 3k_2(2k_1 + k_2)CA_3, \\ &B_2 = 3k_2(k_1 - k_2)a_1{}^3CA_3, \\ &B_3 = (k_2 - k_1)(2k_1 + k_2)(a_2{}^3 - a_1{}^3)CA_3. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

比电阻为 k_2 的实心球的事例可以通过令 a_1=0 而从此式推出，于是我们就有

$$\left.\begin{aligned} &A_2 = \frac{3k_2}{k_1 + 2k_2}A_3，\ B_2 = 0, \\ &B_3 = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + 2k_2}a_2{}^3A_3. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

很容易由普遍表示式证明，在由电阻为 k_2 的球壳包围的电阻为 k_1 的球核的事例中，B_3 的值和电阻为 K 而具有外球半径的一个均匀实心球的事例中的值相同，此处

$$K = \frac{(2k_1 + k_2)a_2{}^3 + (k_1 - k_2)a_1{}^3}{(2k_1 + k_2)a_2{}^3 - 2(k_1 - k_2)a_1{}^3}k_2. \quad (11)$$

314.〕设有几个半径为 a_1 而其比电阻为 k_1 的球放在一种比电阻为 k_2 的媒质中，各球相距较远，以致他们对电流路线的干扰效应可以看成是相互独立的，那么，如果所有这些球都包括在一个半径为 a_2 的球中，则离此球心很大距离 r 处的势将有如下的形式。

$$V = (Ar + nB\frac{1}{r^2})\cos\theta, \quad (12)$$

式中 B 的值是

$$B = \frac{k_1 - k_2}{2k_1 + k_2}a_1{}^3A. \quad (13)$$

n 个小球的体积和包围他们的大球体积之比是

$$p = \frac{na_1{}^3}{a_2{}^3}. \quad (14)$$

因此，离球很远处的势的值可以写成

$$V=A\left(r+pa_2{}^3\frac{k_1-k_2}{2k_1+k_2}\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta. \qquad (15)$$

喏，假如半径为 a_2 的整个球都是用一种比电阻为 K 的材料制成的，我们就将得到

$$V=A\left\{r+a_2{}^3\frac{K-k_2}{2K+k_2}\frac{1}{r^2}\right\}\cos\theta. \qquad (16)$$

为了使一个表示式和另一个表示式相等价，应有

$$K=\frac{2k_1+k_2+p(k_1-k_2)}{2k_1+k_2-2p(k_1-k_2)}k_2. \qquad (17)$$

因此这就是一种组合媒质的比电阻，该媒质包括一种比电阻为 k_2 的媒质，里边分散着一些比电阻为 k_1 的小球，所有小球的体积和整个球的体积之比是 p。为了使这些球的作用可以没有依赖于他们的干涉的效应，他们的半径应该比他们的距离小得多，从而 p 必然是个很小的分数。

这一结果也可以用别的方法来求得，但是此处给出的求法只重复了已经得到的关于单一球的结果。

当各球之间的距离并非远大于他们的半径而且 $\frac{k_1-k_2}{2k_1+k_2}$ 也相当大时，结果中就会出现一些其他的项；我们现在不考虑那些项。由于这些项的存在，各球的某些分布方法将使组合媒质的电阻在不同方向上有不同的值。

电像原理的应用

315.〕作为例子，让我们考虑由一个平界面分开的两种媒质，并且让我们假设有一个电的源头位于第一种媒质中，离分界面的距离是 a，单位时间内从源头流出的电量是 S。

假若第一种媒质是无限延伸的，任一点 P 上的电流就将沿着 SP 方向的，而P点的势则将是 $\frac{E}{r_1}$，此处 $E=\frac{Sk_1}{4\pi}$，而 $r_1=SP$。

在实际事例中，各条件可以通过在第二种媒质取 S 的一个像来加以满足，此时 IS 垂直于分界面并被该面所平分。设 r_2 是任一点离开 I 的距离，则在分界面上有

$$r_1=r_2, \quad (1)$$

$$\frac{dr_1}{dv}=-\frac{dr_2}{dv}. \qquad (2)$$

设第一种媒质中任一点的势 V_1 是由放在 S 点上的一个电量 E 和放在 I 点上的一个电量 E_2 所引起的，而第二种媒质中任一点的势 V_2 是由放在 S 上的像电量 E_1 所引起的，那么，如果

$$V_1=\frac{E}{r_1}+\frac{E_2}{r_2} \text{ 而 } V_2=\frac{E_1}{r_1}, \qquad (3)$$

则边界条件 $V_1=V_2$ 给出

$$E+E_2=E_1, \quad (4)$$

而条件

$$\frac{1}{k_1}\frac{dV_1}{dv}=\frac{1}{k_2}\frac{dV_2}{dv} \qquad (5)$$

则给出

$$\frac{1}{k_1}(E-E_2)=\frac{1}{k_2}E_1, \quad (6)$$

由此即得

$$E_1=\frac{2k_2}{k_1+k_2}E, \quad E_2=\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}E. \quad (7)$$

因此，第一种媒质中的势就是由 S 处的电荷 E 和 I 处的电荷 E_2 按照静电理论而即将在空气中引起的势，而第二种媒质中的势则是由 S 处的电荷 E_1 所将在空气中引起的势。

第一种媒质中任一点上的电流和该媒质为无限时由源头 S 和放在 I 处的源头 $\frac{k_2-k_1}{k_1+k_2}S$所引起的电流相同，第二种媒质中任一点上的电流和该媒质为无限大时由放大S处的源头 $\frac{2k_2S}{(k_1+k_2)}$ 所起的电流相同。

于是，在由平面边界分开的两种媒质的事例中，我们就有一种完备的电像理论。不论第一种媒质中有些什么性质的电动势，他们在第一种媒质中引起的势都可以通过把他们的直接效应和他们的像的效应结合起来而得出。

如果我们假设第二种媒质是一种理想导体，则 $k_2=0$，而 I 处的像就和 S 处的源头相等并异号。这就是汤姆孙静电理论中的那种电像的事例。

如果我们假设第二种媒质是一种理想绝缘体，则 $k_2=\infty$，而 I 处的像就和 S 处的源头相等并同号。这就是流体运动学中当流体以一个刚性平面为界面时的像的事例[①]。

316.〕在分界面被假设为一个理想导体的表面时非常有用的反演法，是不能应用于比电阻不相等的两种导体的分界面的更普遍事例的。然而，二维空间中的反演法却是适用的，正如在第 190 节中给出的更普遍的变换法一样[②]。

分隔两种媒质的平板中的导电

① {类似的考虑将给出由放在一种电介质中的 S 点上的一个电荷所引起的电场，该电介质的比感本领是 K1，由一个平面和比感本领为 K2 的另一种电介质分平。在这一事例中，如果电荷＝K1E 而 K1k1＝1＝K2k2，则正文中的 V1 和 V2 将表示势。}

② 参阅 Kirchhoff,Pogg.Ann.lxiv.497,and lxvii.344;Quincke,Pogg.revii.382;Smith,Proc.R.S.Edin．,1869-70,p.79.Hozm(ller,Einfuhrung in die Theoris der isogonalen Verwandschaften, Leipzig,1882.Guebhard, Journal de Physique,t.i.p.483,1882.W.G.Adams,Phil.Mag.iv.50,p.548,1876;G.C.Foster and O.J.Lodge,Phil.Mag.iv.49,pp.385,453;50,p.475,1879 and 1880;O.J.Lodge,Phil.Mag.(5),i.373,1876.

317.〕其次让我们考虑一种厚度为 AB 的平板媒质，其比电阻为 k_2；它分隔开两种媒质，其比电阻为 k_1 和 k_2；设在第一种媒质 {k_2} 中有一个源头 S，试考虑其在该媒质中引起的势的改变。

图 24.

势将等于由一系列电荷引起的势，各电荷放在通过 S 的平板法线上的某些点上。

令

AI=SA，BI_1=SB，AJ_1=I1A，BI_2=J1B，AJ_2=I_2A，等等，我们就有一系列点，彼此之间的距离等于平板厚度的两倍。

318.〕第一处媒质中任一点 P 上的势是

$$\frac{E}{PS}+\frac{I}{PI}+\frac{I_1}{PI_1}+\frac{I_2}{PI_2}+\cdots,\quad(8)$$

在第二种媒质中的一点 P＇上，

$$\frac{E'}{P'S}+\frac{I'}{P'I}+\frac{I'}{P'I_1}+\frac{I_2'}{P'I_2}+\cdots+\frac{J_1'}{P'J_1}+\frac{J_2'}{P'J_2}+\cdots,\qquad(9)$$

在第三种媒质中的一点 P＂上，

$$\frac{E'}{P''S}+\frac{J'}{P''J_1}+\frac{J_2}{P''J_2}\cdots,\qquad(10)$$

式中 I、I＇等等代表放在 I 等点上的假想电荷，而撇号表示势是要在平板内部取的。

于是，按照第 315 节，我们由关于通过 A 点的分界面的条件就得到

$$I=\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1}E，\ E'=\frac{2k_2}{k_2+k_1}E.\quad(11)$$

对于通过 B 点的分界面，我们有

$$I_1{}'=\frac{k_2-k_2}{k_3+k_2}E'，E''=\frac{2k_3}{k_2+k_3}E'.\ (12)$$

同样，又是对于通过 A 点的分界面，

$$I_1{}'=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}I_1'，\ I_1=\frac{2k_1}{k_1+k_2}I_1',\qquad(13)$$

而对于通过 B 点的分界面则有

$$I_2{}'=\frac{k_3-k_2}{k_3+k_2}J_1{}'，\ J_1=\frac{2k_3}{k_3+k_2}J_1{}'.\qquad(14)$$

如果令

$$\rho=\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}，\ \rho'=\frac{k_3-k_2}{k_3+k_2},$$

则我们得到第一种媒质中的势的表示式如下，

$$V=\frac{E}{PS}-\rho\frac{E}{PI}+(1-\rho^2)\rho'\frac{E}{PI_1}+\rho'(1-\rho^2)\rho\rho'\frac{E}{PI_2}+\cdots$$

$$+\rho'(1-\rho^2)(\rho\rho')^{n-1}\frac{E}{PI_n}+\cdots(15)$$

关于第三种媒质中的势，我们得到

$$V=(1+\rho')(1-\rho)E\left\{\frac{1}{PS}+\frac{\rho\rho'}{PJ_1}+\cdots+\frac{(\rho\rho')}{PJ_n}+\cdots\right\}. \quad [①](16)$$

如果第一种媒质和第三种媒质相同，则有 $k_1=k_3$ 和 $\rho=\rho'$，而平板另一侧的势就将是

$$V=(1-\rho^2)E\left\{\frac{1}{PS}+\frac{\rho^2}{PJ_1}+\cdots+\frac{\rho^2}{PJ_n}+\cdots\right\}. \quad (17)$$

如果平板是比其余媒质好得多的导体，则ρ很近似地等于 1。如果平板几乎是一种理想绝缘体，则ρ近似地等于-1，而如果平板在导电性能上和其余的媒质相差很小，则ρ是一个正的或负的小量。

这一事例的理论是由格林在他的《磁感应理论》(Essay,p.65)中首次给出的。然而他的结果只有当ρ近似地等于 1 时才是正确的[①]。他所引用的量 g 是由下列方程来和ρ相联系的：

$$g=\frac{2\rho}{3-\rho}=\frac{k_1-k_2}{k_1+2k_2}，\rho=\frac{3g}{2+g}=\frac{k_1+k_2}{k_1+k_2}.$$

如果令 $\rho=\dfrac{2\pi\kappa}{1+2\pi\kappa}$，我们就将得到一个磁感应问题的解，那种磁感应是由放在磁化系数为 k 的无限平板中的一个磁极所引起的。

论层状导体

319.〕设一个导体是由导电系数不同的两种物质的交替层构成的，物质层的厚度为 c 和 c'。要求的是组合导体的电阻系数和电导系数。

设各层的平面垂直于 z。设和第二种层有关的符号用撇号来区分，并用横线来标明和组合导体有关的量，例如$\overline{X}$。于是就有

$$\overline{X}=X=X'，(c+c')\overline{u}=cu+c'u'，$$

$$\overline{Y}=Y=Y'，(c+c)\overline{v}=cv+c'v'；$$

$$(c+c)\overline{Z}=cZ+c'Z'，\overline{w}=w=w'.$$

首先我们必须根据第 297 节中的电阻方程或第 298 节中的电导方程，把u、u'、v、v'、Z和Z'用$\overline{X}$、$\overline{Y}$和$\overline{w}$表示出来。如果用D代表电阻系系数的行列式，我们就得到

$$ur_3D=R_2\overline{X}-Q_3\overline{Y}+\overline{w}q_2D，$$

$$vr_3D=R_1\overline{Y}-P_3\overline{X}+\overline{w}p_1D，$$

$$Zr_3=-p_2\overline{X}-q_1\overline{Y}+\overline{w}.$$

各符号加了撇号的类似方程就给出 u'、v'和 z'的值。既经借助

---

① {这些表示式可以利用关系式 来简化为定积分，式中 J0 代表零阶贝塞耳函数。由此可见，如果我们把 S 取作座标原点，而把平板的法线取作 x 轴，就有 式中 c 是平板的厚度， 等等。把这些值代入(15)中，我们就看到 V 等于 当 y＝0、x＝2nc 而 n 为整数时，此式的值很容易求出。}

① 见 Sir W.Thomson’s‘Note on Induced Magnetism in a Plate,’Camb.和 Dub.Math.Journ,Nov.1845,或 Reprint,art.ix.§156.

于$\overline{X}$、$\overline{Y}$和$\overline{Z}$求出$\overline{u}$、$\overline{u}$和$\overline{w}$，我们就可以写出分层导体的电导方程。如果令$h=\frac{c}{r_3}$和$h'=\frac{c'}{r_3'}$，我们就得到

$$\overline{p}_1=\frac{hp_1+h'p_1'}{h+h'}，\overline{q}_1=\frac{hq_1+hq_1'}{h+h'}，$$

$$\overline{p}_2-\frac{hp_2+hp_2'}{h+h'}，\overline{q}_2=\frac{hq_2+h'q_2'}{h+h'}，$$

$$\overline{p}_3=\frac{cp_3+c'p_3'}{c+c'}-\frac{hh'(q_1-q_1')(q_2-q_2')}{(h+h')(c+c')}，$$

$$\overline{q}_3=\frac{cq_3+cq_3}{c+c'}-\frac{hh'(p_1-p_1')(p_2-p_2')}{(h+h')(c+c')}，$$

$$\overline{r}_1=\frac{cr_1+c'r_1'}{c+c'}-\frac{h'h(p_2-p_2')(q_2-q_2')}{(h+h')(c+c')}，$$

$$\overline{r}_2=\frac{cr_2+c'r_2'}{c+c'}-\frac{h'h(p_1-p')(q_1-q_1')}{(h+h')(c+c')}$$

$$\overline{r}_3=\frac{c+c'}{h+h'}.$$

320.〕如果构成各层的两种物质都不具备第 303 节的那种旋转性，则任一 P 或 p 的值将等于和它对应的 Q 或 q 的值。由此可以推知，在分层导体中也有

$$\overline{p}_1=\overline{q}_1，\overline{p}_2=\overline{q}_2，\overline{p}_3=\overline{q}_3，$$

或者说，层化并不会造成任何的旋转性，除非单纯材料的一种或两种具备这种旋转性。

321.〕如果我们现在假设并不存在任何旋转性，而且 x、y、z 轴是主轴，则 p 系数和 q 系数为零，从而

$$\overline{r}_1=\frac{cr_1+cr_1'}{c+c'}，\overline{r}_2=\frac{cr_2+c'r_2'}{c+c'}，\overline{r}_3=\frac{c+c'}{\frac{c}{r_3}+\frac{c'}{r_3'}}$$

如果我们从电导 r 和 r'不同的两种各向同性的媒质开始，那么，既然$\overline{r}_1-\overline{r}_3=\frac{cc'}{c+c'}\frac{(r-r')^2}{(cr'+c'r)}$，分层的结果就将是，电阻在和各层相垂直的方向上为最大，而在各层平面上的一切方向上则都相等。

322.〕试取一种比电导为 r 的各向同性物质，把它切成厚度为 a 的非常薄的薄片，并把这些薄片和一些比电导为 s 而厚度为 k_1a 的薄片交替地叠合起来。

设这些薄片垂直于 x 轴。然后把这种组合导体切成厚度为 b 的厚得多并垂直于 y 的片子，并把他们和比电导为 s 和厚度为 k_1b 的片子交替起来。

最后，把这种新导体再切成厚度为 c 的更加厚的并垂直于 z 的片子，并把他们和比电导为 s 而厚度为 k_3c 的片子交替起来。

这三次手续的结果，将是把比电导为 r 的物质切成线度为 a、b 和 c

的一些长方体，其中 b 远小于 c 而 a 远小于 b，然后把这些长方体嵌在比电阻为 s 的物质中，使得他们之间的距离在 x 方向上是 k_1a，在 y 方向上是 k_2b，而在 z 方向上是 k_3c。这样形成的导体在 x、y 和 z 方向上的比电导通过按次序应用三次第 321 节中的结果来求得。我们于是就得到

$$r_1=\frac{\{1+k_1(1+k_2)(1+k_3)\}r+(k_2+k_3+k_2k_3)s}{(1+k_2)(1+k_3)(k_1r+s)}s,$$

$$r_2=\frac{(1+k_2+k_2k_3)r+(k_1+k_3+k_1k_2+k_1k_3+k_1k_2k_3)s}{(1+k_2)\{k_2r+(1+k_1+k_1k_2)\}s}s,$$

$$r_3=\frac{(1+k_3)(r+(k_1+k_2+k_1k_2)s)}{k_3r+(1+k_1+k_2+k_2k_3+k_3k_1+k_1k_2+k_1k_2k_3)s}s.$$

这种研究的精确性全靠长方体的三个线度具有不同的数量级，从而我们可以忽略在他们的边角等处所必须满足的条件。如果我们令 k_1、k_2 和 k_3 都等于 1，则有

$$r_1=\frac{5r+3s}{4r+4s}s,\ r_2=\frac{3r+5s}{2r+6s}s,\ r_3=\frac{2r+6s}{r+7s}s.$$

如果 r=0，也就是说，如果构成各长方体的物质是一种理想绝缘体，就有

$$r_1=\frac{3}{4}s,\ r_2=\frac{5}{6}s,\ r_3=\frac{6}{7}s.$$

如果 r=∞，就是说，如果各长方体是一些理想导体，则有

$$r_1=\frac{5}{4}s,\ r_2=\frac{3}{2}s,\ r_3=2s.$$

在每一个事例中，如果 $k_1=k_2=k_3$，则可以 r_1、r_2 和 r_3 具有递升的数量级，从而最大的比电导出现在长方体最大线度的方向上，而最大的比电阻则出现在最小线度的方向上。

323.〕设在一个长方形的导电固体中从一个顶角到对面的顶角开一个导电通路，设这条通路是一根用绝缘材料包着的导线，其横向线度很小，以致除了由导线所传导的电流以外，固体的电导并不受其他影响。

设长方体在各座标轴方向上的线度为 a、b、c，并设从原点到(abc)点的通路的电导是 abcK。

在通路两端作用着的电动势是

$$aX+by+cZ,$$

而如果 C 是通路中的电流，则

$$C'=Kabc(aX+bY+cZ).$$

穿越 bc 面的电流是 bcu，而这就包括由固体的电导所引起的电流和通路的电导所引起的电流，或者说

$bcu=bc(r_1X+p_3Y+q_2Z)+Kabc(aX+bY+cZ)$，

或 $u=(r_1+Ka^2)X+(p_3+Kab)Y+(q_2+Kca)Z$.

同样也可以求出 v 和 ω 的值。被通路的效应所改变了的各电导系数将是

r_1+Ka^2，r_2+Kb^2，r_3+Kc^2，

p_1+Kba，p_2+Kca，p_3+Kab，

q_1+Kbc，q_2+Kca，q_3+Kab.

在这些表示式中，由通路的效应所引起的 p_1 等等的值的增量等于 q_1 等等的值的增量。由此可见，p_1 和 q_1 的值不能由于在固体的每一体积元中引入线性通路而变成不相等，因此，如果第 303 节中那种旋转性起初在固体中并不存在，它是不会通过这种方法而被引入的。

图 25

324.〕试构成线性导体的一种构架，使它具有任意给定的形成对称组的电导系数。

设空间被分成许多相等的小立方体，其中一个如图所示。设 O、L、M、N 各点的座标和势如下

	x	y	z	势
O	0	0	0	X+Y+Z
L	0	1	1	X
M	1	0	1	Y
N	1	1	0	Z.

把这四个点用六个导体 OL，OM，ON，MN，NL，LM，连接起来，各导体的电导分别是

$$A, B, C, P, Q, R.$$

沿着这些导体而起作用的电动势将是

$Y+Z$，$Z+X$，$X+Y$，$Y-Z$，$Z-X$，$X-Y$，

而电流则是

$$A(Y+Z), B(Z+X), C(X+Y),$$
$$P(Y-Z), Q(Z-X), R(X-Y).$$

在这些电流中，沿着 x 的正方向而送电的电流就是沿着 LM、LN、OM 和 ON 而流动的那些，而所送的电量就是

$u=(B+C+Q+R)X+(C-R)Y+(B-Q)Z.$

同理得到

$v=(C-R)X+(C+A+R+P)Y+(A-P)Z$；

$w=(B-Q)X+(A-P)Y+(A+B+P+Q)Z$；

由此，我们通过和第 298 节中的导电方程相比较就得到

$4A=r_2+r_3-r_1+2p_1$，　$4P=r_2+r_3-r_1-2p_1$，

$4B=r_3+r_1-r_2+2p_2$，　$4Q=r_3+r_1-r_2-2p_2$，

$4C=r_1+r_2-r_3+2p_3$，　$4R=r_1+r_2-r_3-2p_3$.

第十章

电介质中的导电

325.〕我们已经看到，当有电动势作用在一种电介媒质上时，它就在媒质中引起一种我们曾称之为电极化的状态，而且我们曾经把这种状态描述成由媒质中的电位移和我们设想由电介质分成的每一个体积元上的表面电荷所构成；在各向同性媒质中电位移的方向和电动势的方向相同，体积元上的正电荷出现在电动势所指向的面上，而其负电荷则出现在电动势所由开始的面上。

当电动势作用在一种导电媒质上时，它也引起所谓的电流。

喏，电介媒质也是或多或少的非理想导体，如果有例外也是很少见的，而且许多并非良导体的媒质也显示电介感应的现象。因此我们就被引导到一种媒质的状态的研究，在那种媒质中感应和传导是同时在进行着的。

为了简单，我们将假设媒质在每一点上都为各向同性，但不一定在不同点上是均匀的。在这种情况下，由第 83 节可知泊松方程变为

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{dV}{dx}\right)+\frac{d}{dy}\left(K\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(K\frac{dV}{dz}\right)+4\pi\rho=0\text{，}\qquad(1)$$

式中 K 是“比感本领”。

电流的“连续性方程”变为

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dx}\right)+\frac{1}{dy}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dy}\right)+\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{r}\frac{dV}{dz}\right)-\frac{d\rho}{dt}=0\text{，}\qquad(2)$$

式中 r 是相对于单位体积而言的比电阻。

当 K 或 r 是不连续的时，这些方程必须被变换成适用于不连续界面的那些方程。

在一种严格均匀的媒质中，r 和 K 都是常量，从而我们就得到

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=-4\pi\frac{\rho}{K}=r\frac{d\rho}{dt}\text{，}\qquad(3)$$

由此即得

$$\rho=Ce^{-\frac{4\pi}{Kr}}\text{；}\qquad(4)$$

或者，如果我们令$T=\frac{Kr}{4\pi}$，就得到

$$\rho=Ce^{-\frac{t}{T}}\text{.}\qquad(5)$$

这一结果表明，在任何外电动势对其内部起初以任何方式带电的均匀媒质的作用下，内部的电荷永远将以一个不依赖于外力的速率而衰减，从而最后在媒质内部将不再有任何电荷，而在此以后，任何外力都不能在媒质的任何体内部分引起或保持一个电荷，如果电动势、电极化和电导之间的关系保持不变的话。当破坏性放电发生时，这些关系就不再成立，从而内部电荷就可能出现。

关于通过一个电容器的导电

326.〕设 C 是一个电容器的电容，R 是它的电阻，而 E 是作用在它上面的电动势，也就是两个金属极的表面之间的势差。

于是，电动势起点处的一个表面上的电量将是 CE，而沿着电动势的方向而通过电容器材料的电流将是 $\frac{E}{R}$。

如果带电状态被假设为是由在电容器形成其一个部分的电路中起作用的一个电动势E所引起的，而且 $\frac{dQ}{dt}$ 代表该电路中的电流，则有

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{E}{R}+C\frac{dE}{dt}. \qquad (6)$$

把一个电动势为 E 而包括各电极连接导线在内的电阻为 r 的一个电池接入电路中，就有

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{E_0-E}{r_1}=\frac{E}{R}+C\frac{dE}{dt}. \qquad (7)$$

由此可见，在任何时刻 t_1，应有

$$E(=E_1)=E_0\frac{R}{R+r_1}(1-e^{-\frac{t_1}{T_1}})\text{，式中}T_1=\frac{CRr_1}{R+r_1}. \qquad (8)$$

其次，把电路 r_1 切断一段时间 t_2，这时 r_1 为无限大，我们由(7)就得到

$$E(=E_2)=E_1e^{-\frac{t_2}{T_2}}\text{，式中}T_2=CR. \qquad (9)$$

最后，用一根电阻为 r_3 的导线把电容器的两个表面连接一段时向 t_3，则在(7)中令 E=0，r_1=r_3，我们就得到

$$E(=E_3)=E_2e^{-\frac{t_3}{t_3}}\text{，式中}T_3=\frac{CRr_3}{R+r_3}. \qquad (10)$$

如果 Q_3 是在时间 t_3 内流过这一导线的总电量，则有

$$Q_3=E_0\frac{CR^2}{(R+r_1)(R+r_3)}(1-e^{-\frac{t_1}{T_1}})e^{-\frac{t_2}{T_2}}(1-e^{-\frac{t_3}{t_3}}). \qquad (11)$$

用这种办法，我们就可以在电容器被充电一段时间 t_1 然后被绝缘一段时间 t_2 以后求出通过一根把它的两个表面连接起来的导线而进行总放电。如果像通常那样充电时间长得足以得到全部的电荷，而且放电时间也足以得到完全的放电，则所放的电是

$$Q_3=E_0\frac{CR^2}{(R+r_1)(R+r_3)}e^{-\frac{t_2}{CR}}. \qquad (12)$$

327.〕在这样的一种电容器中，当起初以任意方式充电其次通过一根小电阻的导线而放电然后被绝缘时，是不会出现任何新的带电现象的。然而，在多数的实际电容器中，我们却发现在放电和绝缘以后，一个新的电荷会逐渐长成，它和原有电荷同号，但强度较小。这就叫做残余电荷。为了说明它，我们必须承认电介媒质的构造是和我们刚刚描述过的有所不同的。然而我们却将发现，由不同种类的媒质小块堆集而成的一种媒质，将

具有这种性质。

组合电介质理论

328.〕为了简单起见，我们将假设电介质由一些不同材料的平面层所组成的，其面积为一个单位，而电力则是沿着各层的法线方向起作用的。

设 a_1、a_2 等等是不同层的厚度。

X_1、X_2 等等是各层中的合电力。

p_1、p_2 等等是各层中的传导电流。

f_1、f_2 等等是电位移。

u_1、u_2 等等是部分地起源于传导而部分地起源于电位移变化的全电流。

r_1、r_2 等等是对单位体积而言的比电阻。

K_1、K_2 等等是比感本领。

k_1、k_2 等等是比感本领的倒数。

E 是一个电池组所引起的电动势；该电池组接在从最后一层接到最初一层的电路中，而我们假设那电路由一些良导体构成。

Q 是直到时刻 t 为止通过电路的这一部分的总电量。

R_0 是电池和连线的电阻。

σ_{12} 是第一、二层的分界面上的电荷面密度。

于是，在第一层中，我们由欧姆定律得到

$$X_1 = r_1 p_1. \qquad (1)$$

由电位移理论得到

$$X_1 = 4\text{л} k_1 f_1.(2)$$

由全电流的定义得到

$$u_1 = p_1 + \frac{df_1}{dt}, \qquad (3)$$

在其他各层中也有相似的方程，而每一层中的各量都带有属于该层的下标。

为了确定任何一层上的面密度，我们有一个形如

$$\sigma_{12} = f_2 - f_1, \qquad (4)$$

的方程，而为了确定其变化，我们有

$$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = p_1 - p_2. \qquad (5)$$

对 t 微分(4)并使结果和(5)相等，我们就得到例如

$$p_1 + \frac{df_1}{dt} = p_2 + \frac{df_2}{dt} = u, \qquad (6)$$

或者，照顾到(3)，就有

$$u_1 = u_2 = \cdots = u. \qquad (7)$$

就是说，全电流在所有各层中都相同，并等于通过导线和电池组的电流。

由于有方程(1)和(2)，我们也有

$$u=\frac{1}{r_1}X_1+\frac{1}{4\pi k_1}\frac{dX_1}{dt}, \qquad (8)$$

由此我们通过对 u 的逆运算就能求出 X_1，

$$X_1=(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{4\pi k_1}\frac{d}{dt})^{-1}u. \qquad (9)$$

总电动势是

$$E=a_1X_1+a_2X_2+\cdots (10)$$

或 $$E=\left\{a_1(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{4\pi k_1}\frac{d}{dt})^{-1}+a_2(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{4\pi k_2}\frac{d}{dt})^{-1}+\cdots\right\}u, \quad (11)$$

这是外电动势 E 和外电流 u 之间的一个方程。

如果 r 和 k 之比在所有各层中都相同，则方程简化为

$$E+\frac{r}{4\pi k}\frac{dE}{dt}=(a_1r_2+a_2r_2+\cdots)u, \qquad (12)$$

这就是我们在第 326 节中已经分析过的事例，在那种事例中我们发现不可能出现任何残余电荷现象。

如果有 n 种物质具有不同的 r 和 k 之比，普遍方程(11)在执行了逆运算以后就将是对 E 为 n 阶而对 u 为(n-1)。阶的一个以 t 为自变数的线性微分方程。

由方程的形式可以显然看出，不同层的顺序是无关紧要的，因此，如果有若干个相同物质的层，我们可以假设他们合并成一层而并不改变现象。

329.〕现在让我们假设，起初 f_1、f_2 等等都是零，而一个电动势 E_0 突然发生了作用，让我们求出它的瞬时效应。

把(8)对 t 求积分，我们就得到

$$Q=\int u dt \frac{1}{r_1}\int X_1 dt+\frac{1}{4\pi k_1}X_1+\text{常量}. \qquad (13)$$

现在，既然 X_1 在这一事例中永远是有限的，当 t 很小时 $\int X_1 dt$ 就必然是很小的，因此，既然 X_1 起初为零，瞬时效应就将是

$$X_1=4\pi k_1Q. \qquad (14)$$

因此，由方程(10)就得到

$$E_0=4\pi(k_1a_1+k_2a_2+\cdots)Q, \quad (15)$$

而如果 C 是用这种瞬时方式测量的体系电容，就有

$$C=\frac{Q}{E_0}=\frac{1}{4\pi(k_1a_1+k_2a_2+\cdots)} \qquad (16)$$

这就是当忽略各层的电导时我们即将得到的同样的结果。

其次让我们假设，电动势继续均匀作用了一段无限长的时间，或是一直作用到在体系中建立了一个等于 p 的均匀的传导电流的时候。

于是我们就有 $X_1=r_1p_1$，等等，从而由(10)就有

$$E_0=(r_1a_1+r_2a_2+\cdots)p. (17)$$

如果 R 是体系的总电阻，则

$$R=\frac{E_0}{p}=r_1a_1+r_2a_2+\cdots (18)$$

在这一状态下，我们由(2)得到

$$f_1=\frac{r_1}{4\pi k_1}p，$$

从而就有

$$\sigma_{12}=(\frac{r_2}{4\pi k_2}-\frac{r_1}{4\pi k_1})p. \qquad (19)$$

如果我们现在突然用一个电阻很小的导体把两边的层接起来，E 就将突然地从它的原有值 E_0 变成零，而且一个电量 Q 就将流过该导体。

为了确定 Q，我们注意到，如果 X_1' 是新的 X_1 值，则由(13)可得

$$X_1'=X_1+4\pi k_1Q. \qquad (20)$$

于是，令 E=0，由(10)即得

$0=a_1X_1+\cdots+4\pi(a_1k_1+a_2k_2+\cdots)Q$，(21)

或 $$0=E_0+\frac{1}{C}Q. \qquad (22)$$

由此即得 $Q=-CE_0$，式中 C 是由方程(16)给出的电容。因此，瞬时的放电量等于瞬时的充电量。

其次让我们假设，在这一放电之后，连线立即被切断。这时我们将有 u=0，从而由方程(8)即得

$$X_1=X_0'e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1}}， \qquad (23)$$

式中 X_1' 是放电以后的初始值。

由此可见，在任一时刻 t，我们由(23)和(20)就得到

$$X_1=E_0\left\{\frac{r_1}{R}-4\pi k_1C\right\}e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1}t}.$$

因此，任一时刻的 E 值

$$=E_0\left\{(\frac{a_1r_1}{R}-4\pi a_1k_1C)e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1}t}+(\frac{a_2r_2}{R}-4\pi a_2k_2C)e^{-\frac{4\pi k_2}{r_2}t}+\cdots\right\}, \qquad (24)$$

而任何时间 t 以后的放电量是 EC，这叫做残余放电。

如果 r 和 k 之比在一切层中都相同，则 E 的值将减小到零。然而，如果这一比值并不相同，让我们把各项按这一比值的递减次序排列起来。

所有系数之和显然是零，从而当 t=0 时 E=0。各系数也是按量值递减的次序排列的，而当 t 为正时各个指数也是如此排列的。因此，当 t 为正时 E 将为正 ，从而残余放电永远和原始放电同号。

当 t 为无限大时所有的项都不复存在，除非有一层是一种理想的绝缘体；在那种事例中，该层的 r_1 是无限大，从而整个体系的 R 也是无限大，而且 E 的末值也不是零而是

$$E=E_0(1-4\pi a_1k_1C). \qquad (25)$$

由此可见，当某些层而不是所有的层是理想的绝缘体时，一种残余放电可以永远地保持在体系中。

330.〕其次我们将假设体系首先通过一个电动势 E 的长久持续作用而

或许就可以更容易地看到这一点。}

被充了电，来确定通过一根电阻为 R_0 的长期接在体系的两个边界层上的导线的总放电量。

在任一时刻，我们有

$$E=a_1r_1p_1+a_2r_2p_2+\cdots+R_0u=0 \quad (26)$$

另外,由(3)即得

$$u=p_1+\frac{df_1}{dt}. \qquad (27)$$

由此可见，

$$(R+R_0)u=a_1r_1\frac{df_1}{dt}+a_2r_2\frac{df_2}{dt}+\cdots. \qquad (28)$$

对 t 求积分以得出 Q，我们就有

$$(R+R)Q=a_1r_1(f_1'-f_1)+a_2r_2(f_2'-f_2)+\cdots, \quad (29)$$

式中 f_1 和 f_1' 是 f_1 的初值和末值。

在这一事例中，$f_1'=0$，而且由(2)和(20)得到

$$f_1=E_0\left(\frac{r_1}{4\pi k_1R}-C\right).$$

由此即得

$$(R+R_0)=-\frac{E}{4\pi R}\left(\frac{a_1r_1^2}{k_1}+\frac{a_2r_2^2}{k_2}+\cdots\right)+E_0CR, \qquad (30)$$

$$=-\frac{CE_0}{R}\sum\sum\left[a_1a_2k_1k_2\left(\frac{r_1}{k_1}-\frac{r_2}{k_2}\right)\right], \qquad (31)$$

式中的求和遍及属于每一对层的这种形式的量。

由此可见 Q 永远是负的，也就是说，放电是和用来对体系充电的电流方向相反的。

这种研究表明，一种由种类不同的物质层构成的电介质可以显示所谓的电吸收现象和残余放电现象，尽管构成它的各种物质当单独存在时全部不显示这些现象。各物质不是分成层而是按其他方式分布的那种事例的研究，也将导致类似的结果，尽管计算可能是更加复杂的。因此我们可以得出结论说，在由种类不同的部分构成的物质中，可以预期出现电吸收的现象，即使那些部分是微观地小的[①]。

由此绝不能推断，每一种显示这种现象的物质都是如此组合而成的，因为它可能指示均匀物质所可能具备的一种新式的电极化，而且在某些事例中这种电极化可类似于电化学极化而不那么类似于电介极化。

这一研究的目的只是要指出所谓电吸收的真正数学特性，并且指明它和热现象是多么地根本不相同，尽管初看起来二者是类似的。

331.〕让我们取任一物质的一块厚板并在一面对它加热，这样就会引起通过它的一个热流，而如果这时我们把加了热的一面突然冷却到和另一面相同的温度并让平板自行变化，则加过热的那一面将由于体内的热传导而再次变得热一些。

[①] {罗兰和尼科耳斯曾经证明，很均匀的冰洲石晶体并不显示电吸收，Phil．Mag.xi.p.414,1881.穆索达发现，尽管单独考虑时石腊和二甲苯并不显示残余电荷，一层石腊上加一层二甲苯却显示这种现象，Wied.Ann.40.331,1890.}

现在，和这种现象完全类似的一种电现象也可以产生，而且实际上是出现在电报电缆中的，然而它的数学规律虽然和热现象的规律精确相符，但这却是和分层电容器的规律完全不同的。

在热的事例中，存在热在物质中的真正吸收，结果使物质变热。在电的方面造成一个真正类似的现象是不可能的，但是我们可以在一种课堂演示实验的形式下用下述的方法来模拟它。

设 A_1、A_2 等等是一系列电容器的内表面而 B_0、B_1、B_2 等等是他们的外表面。

图 26

设 A_1、A_2 等等用一些电阻为 R 的连接物串联起来，并且使一个电流从左向右通过这一系列。

让我们首先假设 B_0、B_1、B_2 各板是各自绝缘和没有电荷的。于是每一个 B 板上的总电量必然保持为零，而既然各个 A 板上的电量是和对面的板上的电量相等而反号的，这些 A 板也将不带电，从而人们也就不会观察到电流的任何改变。

但是，让我们把所有的 B 板都连接起来并把他们每一个都接地。这时，既然 A_1 的势是正的而各个 B 板的势是零，A_1 就将带正电而 B_1 就将带负电。

设 P_1、P_2 等等是各板 A_1、A_2 等等的电势而 C 是每一个板的电容；如果我们假设一个等于 Q_0 的电量通过了左侧的导线，Q_1 通过了连接物 R_1，余类推，则存在于 A_1 板上的电量是 Q_0-Q_1，从而我们就有

$$Q_0-Q_1=CP_1.$$

同理得到

$$Q_1-Q_2=CP_2,$$

余类推。

但是由欧姆定律，我们有

$$P_1-P_2=R_1\frac{dQ_1}{dt},$$

$$P_2-P_3=R_2\frac{dQ_2}{dt}.$$

我们曾经假设各板的 C 值是相同的，如果假设各导线的 R 值也相同，我们就将得到一系列形式如下的方程，

$$Q_0-2Q_1+Q_2=RC\frac{dQ_1}{dt},$$

$$Q_1-2Q_2+Q_3=RC\frac{dQ_2}{dt}.$$

如果共有 n 个电量有待确定，而且如果或是总电动势或是某种等价的条件已经给定，则确定其中任一电量的微分方程将是线性的和 n 阶的。

利用这样装置起来的一部仪器，瓦尔莱先生作到了模拟一根 12，000 英里长的电缆的电作用。

当使一个电动势沿着左端的导线起作用时，流入体系中的电首先就被

用来对从 A_1 开始的不同电容器充电，而只有过了相当一段时间以后，电流的一个很小的部分才会在右端出现。如果在 R_1、R_2 等处把一些电流计接在电路中，他们就会一个跟着一个地受到影响，而当我们向右端看过去时，相等指示之间的时间间隔是越来越大的。

332.〕在电缆的事例中，传导电线和外面的导体是由一个用硬橡胶或其他绝缘材料制成的包皮隔开的。于是每一段电缆都变成一个电容器，其外表面永远处于零势。因此，在一段给定的电缆中，传导电线表面上的自由电量就等于势和看成一个电容器的那段电缆的电容的乘积。

如果 a_1、a_2 是绝缘包皮的外半径和内半径，而 K 是比感本领，则由第 126 节可知电缆的单位长度的电容是

$$c=\frac{K}{2\log\frac{a_1}{a_2}}. \qquad (1)$$

设 v 是电线任一点上的势，我们可以认为这个势在同一截面的不同部分上是相同的。

设 Q 是从电流开时以后流过了这一截面的总电量，则在时刻 t 存在于 x 处和 x+δx 处的二截面之间的电量是

$$Q-(Q+\frac{dQ}{dx}\delta x)\text{，或者说 }-\frac{dQ}{dx}\delta x，$$

而按照以上的论述，这应该等于 cvδx，从而就有

$$cv=-\frac{dQ}{dx}. \qquad (2)$$

另外，任一截面上的电动势是 $-\frac{dv}{dx}$，而由欧姆定律就得到

$$-\frac{dv}{dx}=k\frac{dQ}{dt}, \qquad (3)$$

式中k是导体单位长度的电阻，而 $\frac{dQ}{dt}$ 是电流强度。从(2)和(3)中消去Q，我们就得到

$$ck\frac{dv}{dt}=\frac{d^2v}{dx^2}. \qquad (4)$$

为了得到电缆的任意点上在任意时刻的势，这就是必须求解那个偏微分方程。它和傅里叶所给出的确定一个物质层中任意点上的温度的方程完全相同，在那个物质层中热是沿层的法线方向在流动的。在热的事例中，C 代表单位体积的热容量，此量被傅里叶写成 CD，而 k 代表热导率的倒数。

如果包皮不是一种理想绝缘体，而 k_1 是包皮对径向导电而言的单位长度的电阻，ρ_1 是绝缘材料的的比电阻，那就很容易证明

$$k_1=\frac{1}{2\pi}\rho_1\log_e\frac{a_1}{a_2} \qquad (5)$$

方程(2)将不再成立，因为电不但被用在把导线充电到 cv 所代表的程度，而且还会以 v/k_1 所代表的速率而流失。因此，电的消耗率将

$$-\frac{d_2Q}{dxdt}=c\frac{dv}{dt}+\frac{1}{k_1}v, \qquad (6)$$

和(3)式相比较，我们由此即得

$$ck\frac{dv}{dt}=\frac{d^2v}{dx^2}-\frac{k}{k_1}v, \qquad (7)$$

而这就是傅里叶所给出的一根棒或一个环中的导热方程[①]。

333.〕假如我们曾经假设当一个物体的势被提高时，它就在整个的物质内部带电，就好像电被挤压到它里边一样，我们就会得到恰恰是这种形式的一些方程。很可惊奇的是，由于受到电和热之间这种类似性的蒙蔽，欧姆本人就抱有这样一种见解，并从而通过一种错误的见解而被引导着还在这些方程的适用性的实在原因被推测到的很久以前，就用傅里叶的方程来表示了电通过长导线而传导的正确规律。

电介质性质的机械例示

334.〕如图所示，五根截面积相等的管子 A、B、C、D 和 P 连成一条回路，A、B、C 和 D 是竖直的和相等的，而 P 则是水平的。

A、B、C、D 的下半段充有水银，他们的上半段和水平管 P 中充有水。

一个带阀门的管子把 A、B 的下端和 C、D 的下端接通，而一个活塞 P 可以在水平管中滑动。

让我们在开始时假设四根管子中的水银水平面是等高的，用 A_0、B_0、C_0、D_0 来代表，活塞的位置是 P_0，而且阀门 Q 是关住的。

图 27

现在让活塞从 P_0 移动一段距离 a 而到达 P_1。那么，既然所有管子的截面都相等，A 和 C 中的水银液面就将上升一个距离而到达 A_1 和 C_1，而 B 和 D 中的水银则将下降一个相等的距离 a 而到达 B_1 和 D_1。

活塞两侧的压力差将由 4a 来代表。

这种装置可以用来代表受到一个电动势 4a 作用的电介质的状态。

管 D 中多出的水可以看成代表电介质一侧的正电荷，而管 A 中多出的水银则可以代表另一侧的负电荷。于是，管 P 中活塞靠近 D 的一边多出的压力就代表电介质正侧高出的势。

如果活塞可以随便活动，它就将回到 P_0 并在那里保持平衡。这就代表电介质的完全放电。

在“放电”过程中，整个管子中都存在液体的反向运动，而这就代表我们曾经假设存在于电介质中的电位移的变化。

我曾经假设管子体系的每一部分中都充满了不可压缩的液体，为的是要代表所有电位移的一种性质，即在任何地方都不存在电的真正积累。

现在让我们考虑当活塞位于 P_1 时打开阀门 Q 所引起的效应。

A_1 和 D_1 的液面将保持不变，但是 B 和 C 的将变为相同并将与 B_0 和 C_0 相重合。

[①] Théoriedela Chaleur,第 105 节。

阀门 Q 的打开就代表电介质中存在一个部分，它具有一个很小的导电性能，但是并不扩展到全体而形成一种导电通路。

电介质两面的电荷仍然是被绝缘的，但是他们的势差却减小了。

事实上，活塞两侧的压力差在液体通过 Q 的过程中将从 4a 降到 2a。

如果我们现在关上阀门 Q 并让活塞自由运动，它就会在 P_2 达到平衡，而所放的电则显然将只是电荷的一半。

A和B中的水银液面将比原始液面高 $\frac{1}{2}a$，而C和D中的液面则比原始液面低 $\frac{1}{2}a$，这一情况用水平表面 A_2、B_2、C_2、D_2 而来表示。

如果现在活塞被固定而阀门被打开，则水银将从 B 流到 C，直到两管中的液面又回到 B_0 和 C_0 时为止。这时在活塞 P 的两侧将出现一个等于 a 的压力差。如果阀门被关住而活塞又可以随便活动，它就又会在 P_2 和 P_0 的中点 P_3 上达到平衡。这就对应于当一种充了电的电介质首先被放电然后自己存在时所观察到的那种残余电荷。电介质将慢慢地恢复其电荷的一部分，而如果这一部分电荷又被放掉，则第三个电荷又将形成，但是各电荷逐个减小。在例示实验的情况下，每一个电荷都是前一电荷的一半，而等于原电荷的 $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$ 等等的各次放电则形成一个级数，其和等于原始电荷。

如果我们不是时而打开、时而关住阀门，而是让它在整个实验过程中处于几乎关住而又并不完全关住的状态，我们就会有一个事例，和一种电介质的带电状况相类似，该电介质是一种理想绝缘体，但却显示一种称为“电吸收”的现象。

为了代表在电介质中存在真实导电的事例，我们必须或是使活塞有漏洞，或是在管 A 的顶部和管 D 的顶部建立一种联系。

用这种办法，我们可以构造一种机械例示来代表任何一种电介质的性质；在这种例示中，两种电用两种实在的液体来代表，而电势差则用压力差来代表。充电和放电用活塞 P 的运动来代表，而电动势则用作用在活塞上的合力来代表。

第十一章

电阻的测量

335.〕在电科学的当前状况下，一个导体的电阻的测定可以看成电学中的基本工作，正如重量的测定是化学中的基本工作一样。

这一点的理由就在于，其他电学量例如电量、电动势、电流等等的绝对测量，在每一事例中都要求一系列很繁复的操作，通常包括时间的观测、距离的测量和惯性矩的测定，而这些操作，至少是其中的某些操作在每一次新的测定中都必须重复进行,因为把一个电量单位、电动势单位或电流单位保持在不变的状态以便随时用来进行直接的比较是不可能的。

但是，人们发现，当用适当选定的材料做成的一个适当形状的导体的电阻一旦被测定了时，它就会在相同的温度下保持相同的值，从而这个导体就可以当作一个标准电阻来使用，而别的导体的电阻就可以和这个电阻相比较，而且电阻的比较是一种可以达到很高精确度的操作。

当电阻的单位既经选定时，就可以在“电阻线圈”的形式下做成这种单位的一些物质性的样品来供电学家们使用，这样，在世界的每一部分，电阻就都可以用相同的单位来表示。这些单位电阻线圈，在目前就是可以保存、复制并应用于测量目的的那种物质性电学标准的唯一范例[①]。也很重要的电容的量度，由于有电吸收的干扰影响，现在还是有缺点的。

336.〕电阻的单位可以是完全任意的，就如在雅考比的原器事例中那样。那种原器是一条确定的铜线，重量为 22.4932 克，长度为 7.61975 米，而直径为 0.667 毫米。这种原器的一些复制品曾由莱比锡的莱瑟尔制成，而且可以在不同的地方见到。

按照另一种方法，单位可以定义为具有确定尺寸的一部分确定物质的电阻。例如，西门子的单位被定义为一个水银柱的电阻，水银柱的长度为一米，截面积为一平方毫米，而温度为 0°C。

337.〕最后，单位可从参照静电单位制或电磁单位制来定义。在实践中，电磁单位制是在一切的电报操作中被应用的，从而实际上被应用的唯一系统化的单位也就是这一单位制中的单位。

正如我们在适当的地方即将看到的那样，在电磁单位制中，电阻是一个具有速度量纲的量，从而是可以用速度的单位来量度的。参阅第 628 节。

338.〕按照这一单位制来进行的最早的实际测量是由韦伯作出的，他用毫米每秒来当作了自己的单位。W.汤姆孙爵士后来采用了英尺每秒来作为单位，但是许多电学家现在已经同意采用大英协会的单位，那是一个电阻，当表示为一个速度时等于一千万米每秒。这个单位的大小比韦伯单位的大小更适用，因为韦伯单位太小。这种单位有时称为 B.A.单位，但是为了把它和电阻定律的发现者的姓氏联系起来，这种单位被称为“欧姆”。

339.〕为了记忆它在绝对单位制中的值，知道一点是很有用的，那就是，一千万被认为是沿巴黎子午线测量的从地极到赤道的距离。因此，在一秒钟内从地极沿子午线运动到赤道的一个物体就具有一个在电磁单位制中理应代表一欧姆的速度。

[①] {作为电动势之标准的克拉克电池，现在可算是这种说法的一个例外。}

我说“理应”代表，因为，如果更精确的研究竟然证明按照大英协会的物质标准制成的“欧姆”实际上并不是用这个速度来表示的，电学家们也不会改换他们的标准，而只会应用一个改正量[①]。同样，一米理应是某一地球象限弧的一千万分之一，然而尽管人们发现这一点并不绝对正确，一米的长度却并没有被改动。而是地球的线度被用一个不那么简单的数字来表示了。

按照大英协会的单位制，这一单位的绝对值原先是被选得尽可能近似地代表由电磁单位制导出的一个量的。

340.〕当代表这一抽象量的一个物质单位已经做成时，其他的标准就可以通过复制这一单位而被制成；这是可以达到很大精确度的一个过程，例如比按照一个标准英尺来复制英尺要准确得多。

用最耐久的材料做成的这些复制品被分送到世界各地，从而假若原始标准被失去，也不太可能在获得复制品方面遇到任何困难。

但是，例如西门子的单位是不必费什么事就可以复制得很准确的，因此，既然一欧姆和一西门子单位之间的关系是已知的，即使没有一个标准来据以复制，标准欧姆也是可以重新制成的，尽管所费的功夫比直接复制要大得多而得到的精确度要小得多。

图 28

最后，标准欧姆也可以通过最初确定它的那种电磁方法来重新制造。这种方法比根据秒摆来确定英尺要费事得多，它或许比上述的方法更不精确。另一方面，以一种和电科学的进步相适应的精确度而借助于欧姆来确定电磁单位，却是一种顶重要的物理研究，而且是很值得重复进行的。

制造了用来代表欧姆的实际电阻线圈，是用两份银和一份铂制成的导线，其直径从 0.5 到 0.8 毫米，其长度从 1 到 2 米。这些导线焊在粗壮的铜电极上。导线本身包着两层丝绸，嵌在固体石腊中，并包从薄铜外壳，以便很容易把它调到电阻准确地等于一欧姆的那一温度。这个温度被标明在线圈的绝缘支柱上。（参阅图 28.）。

关于电阻线圈的形状

341.〕一个电阻线圈是一个导体，它很容易被接到电路中去并从而在电路中引入一个已知电阻。

线圈的两极或两端必须做得不会因为连接方式而引起可觉察的误差。对于量值较大的电阻来说，用粗铜线或粗铜棒来做电极也就够了，电极的头上经过很好地汞齐化，而且这一头应该压在汞杯中平坦的齐化铜的表面上。

对于非常大的电阻来说，用厚黄铜块来作电极就够了，连接物应该是用铜或黄铜做成的楔子，可以插入电极的间隙中。这种方法被发现是很方

[①] ｛瑞利爵士和席维克先生的实验已经证明，大英协会单位只是 0.9867 地球象限弧每秒，从而它比所拟议的值约小百分之 1.3。1884 年在巴黎召开的国际电学家会议采用了一个新的电阻单位，即“法定欧姆”，它被定义为一个长度为 106 厘米而截面积为 1 平方毫米的水银柱在 0°C下的电阻。｝

便的。

电阻线圈本身是用丝绸包得很好的导线，其两端永久性地焊在电极上。

线圈必须适当装配，以便很容易观察它的温度。为此目的，导线被绕在一个管子上，外面套着另一个管子，这样它就可以被放到一个水容器中，而水就可以接触它的里面和外面。

为了避免线圈中电流的电磁效应，导线先双起来然后绕在管子上，这样，在线圈的任何部分就都在导线的相邻部分中有着相等而反向的电流。

当有必要使两个线圈保持相同的温度时，有时把两根导线并排在一起然后绕成线圈。当保证电阻的相等比知道电阻的绝对值更加重要时，例如在惠斯登电桥的等臂中（第 347 节），这种方法就是特别有用的。

当最初尝试测量电阻时，用得很多的是用裸导线绕在绝缘材料圆筒上的螺旋沟槽中而制成的线圈，这种线圈叫做可变电阻器。不久人们就发现，用这种线圈来比较电阻时所能够达到的精确度，是和利用其接线方式不比利用可变电阻器所能作到的接线方式更完善的任何仪器来得到的精确度不相容的。然而，在并不要求精确测量的地方，可变电阻器仍然被用来调节电阻。

电阻线圈通常是用那些电阻最大而其随温度的变化又最小的金属制成的。德银很好地满足这些条件，但是有些德银的品种却会逐年改变其性质。因此，为了制造标准线圈，曾经使用过几中纯金属，也使用过铂和银的一种合金，而且人们发现，在若干年内，这些东西的相对电阻在现代精确度的范围内是并不改变的。

342.〕要得到很大的电阻，例如几兆欧姆的电阻，导线必须不是很细就是很长，从而线圈的制造就是昂贵而困难的。因此就曾有人建议用碲或硒来作为制造大电阻标准器的材料。一种很巧妙而又很容易的制造方法近来已由菲利普斯提出[①]。在一块胶木或磨砂玻璃上画一条很细的铅笔线。这条石墨细丝的两端被接在两个金属电极上，然后把整条细丝用绝缘漆覆盖起来。如果竟然发现这样一条铅笔线的电阻保持不变,这就将是得到若干兆欧姆电阻的最好的方法。

343.〕有一些装置可以用来很容易地把电阻线圈接到一个电路中去。

例如，其电阻按 2 的幂次递增为 1、2、4、8、16 等等的一系列线圈，可以串联起来装在一个箱子里。

电极用结实的黄铜块制成，适当地排列在箱子的外面，使得通过插入一个黄铜制的塞子或楔子作为旁路，对应的线圈可以排除于电路之外。这种装置是西门子引入的。

图 29

电极之间的每一个间隙都标有对应线圈的电阻值，从而如果想使箱中的电阻等于 107，我们只要就把 107 按二进制写成 64+32+8+2+1 或 1101011。然后我们就从和 64、32、8、2、1 相对应的洞中把塞子拔出来，而剩下 16 和 4 处的塞子。

[①] Phil.Mag,July;1870.

这种建筑在二进制上的方法是这样的：所要求的单个线圈的数目最小，而且可以最容易地加以检验。因为，如果我们有另一个等于 1 的线圈，我们就可以检验 1 和 1′的品质，然后是 1+1′和 2 的品质，然后是 1+1′+2 和 4 的品质，如此类推。

这种装置的唯一缺点就是它要求人们熟悉二进制计数法，而这通常是那些用惯了十进制记数法的人们并不熟悉的。

344.〕为了用来测量电导而不是电阻，一个电阻箱也可以按另一种方法来装配。

各个线圈可以这样装配：每个线圈的一端都接在一块长而厚的金属上，这就形成电阻箱的一个极，线圈的另一端和在上述事例中一样接在一块结实的黄铜上。

电阻箱的另一个极是一块黄铜长板，通过在此板和线圈极之间插入一个黄铜塞子，可以把这个极板通过任何一组给定的线圈而和第一个极连接起来。这时箱子的电导就是各该线圈的电导之和。

在图 30 中，各线圈的电阻是 1、2、4 等等，塞子插在 2 和 8 处，从而箱子的电导是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$，而箱子的电阻则是 $\frac{8}{5}$ 或 1.6。

这种组合线圈来测量分数电阻的方法是由 W.汤姆孙爵士在多重弧法的名称下引入的。参阅第 276 节。

图 30

论电阻的比较

345.〕如果 E 是一个电池组的电动势，R 是电池组和包括用来测量电流的电流计在内的连接线的电阻，如果当电池组的连线被接通时电流强度是 I，而当附加电阻 r_1、r_2 被接入电路中时电流强度是 I_1、I_2，则由欧姆定律可得

$$E=IR=I_1(R+r_1)=I_2(R+r_2).$$

消去电池组的电动势 E 和电池组及其连线的电阻 R，我们就得到欧姆的公式

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{(I-I_1)I_2}{(I-I_3)I_1}.$$

这种方法要求测量 I、I_1 和 I_2 的比值，而这就意味着要求一个有着绝对刻度的电流计。

如果电阻 r_1 和 r_2 相等，则 I_1 和 I_2 相等，而我们就可以用一个不能测量电流比值的电流计来检验电流的相等。

但是这却应该被看成一种测定电阻的有毛病的方法，而不是一种切合实用的方法。电动势 E 不能严格地保持恒定，而电池组的内阻也非常不稳定的，因此，在一种方法中即使假设这些量在一段短时间内保持不变，这种方法也是不可靠的。

346.〕电阻的比较可以利用两种方法中的任一种来很精确地进行；在这两种方法中，所得的结果都和 R 及 E 的变化无关。

其中第一种方法依赖于差绕电流计的应用。这种仪器中有两个线圈，线圈中的电流互相独立，从而当使两个电流沿相反的方向流动时，他们就对指针发生相反的作用，而且当电流之比是 m 和 n 之比时，他们对电流计指针的合效应就是零。

设 I_1、I_2 是通过电流计的两个线圈的电流，则指针的偏转可以写成

$\delta=mI_1-nI_2$.

现在让电池组的电流分头流入电流计的两个线圈中，并把电阻 A 和 B 分别接在第一个和第二个线圈上，设各线圈及其连线的其余电阻分别是α和β，设电池组及其 C、D 之间的连线的电阻为 r，而其电动势为 E。

图 31

于是，关于 C、D 之间的势差，我们由欧姆定律就得到

$$I_1(A+\alpha)=I_2(B+\beta)=E-Ir,$$

而且，既然

$$I_1+I_2=I,$$

就有

$$I_1=E\frac{B+\beta}{D},\quad I_2=E\frac{A+\alpha}{D},\quad I=E\frac{A+\alpha+B+\beta}{D},$$

式中

$D=(A+\alpha)(B+\beta)+r(A+\alpha+B+\beta)$.

因此，电流计指针的偏转就是

$$\delta=\frac{E}{D}(m(B+\beta)-n(A+\alpha)\},$$

而如果没有能够观察到的偏转，我们就知道括号中的量和零之差不能超过某一小量，该小量依赖于电池组的强度、装置的优劣、电流计的精确度和观察者的能力。

现在设用另一个导体 A′来代替 A，并设 A′被调节得使电流计指针仍没有显著的偏转。这时显然在初级近似下就有 A′=A。

为了确定这一估计的精确性，设在第二次观察中得到的变化了的量用撇号来区分，就有

$$m(B+\beta)-n(A+\alpha)=\frac{D}{E}\delta,$$

$$m(B+\beta)-n(A'+\alpha)=\frac{D'}{E'}\delta'。$$

由此即得

$$n(A'-A)=\frac{D}{E}\delta-\frac{D'}{E'}\delta'。$$

设δ和δ′不是在表观上都等于零，而是被观察到彼此相等，则方程右端不会等于零，除非我们能够确知 E=E′。事实上，这种方法只是已经描述过的方法的一种修改形式。

这种方法的优点在于这样一件事实：观察到的是任何偏转的不存在；换句话说，这是一种“调零法”，即根据观察来断定一个力的不存在的方

法，在那种观察中如果一个力和零的差值超过某一小量，它就会引起一个可以观察到的效应。

调零法在可以应用的地方是有很大价值的，但是只有当我们能够使两个种类相同的相等而相反的量一起进入实验中时，这种方法才能应用。

在我们遇到的事例中，δ和δ′是一些小得很难观察的量，从而 E 值的任何改变都不会影响结果的精确度。

这种方法的实际精确度，可以通过进行若干次分别调节 A′的观察并比较每次观察结果和所有结果的平均值来加以确定。

但是，通过使 A′从调整值偏离一个已知量，例如通过在 A 或 B 处增加一个等于 A 或 B 的百分之一的电阻，然后观察电流计指针的偏转，我们就能估计和百分之一的误差相对应的偏转度数。为了求出实际的精确度，我们必须估计可能观察不到的那一最小的偏转，并把它和由百分之一的误差所引起的偏转相比较。[①]

如果必须比较的是 A 和 B，而且 A 和 B 交换了位置，则第二个方程变成

$$m(A+\beta)-n(B+\alpha)=\frac{D'}{E}\delta',$$

由此即得

$$(m+n)(B-A)=\frac{D}{E}\delta-\frac{D'}{E'}\delta'。$$

如果 m 和 n、A 和 B、α和β、E 和 E′都近似地相等，则有

$$B-A=\frac{1}{2nE}(A+\alpha)(A+\alpha+2r)(\delta-\delta')。$$

这里的δ-δ′可以看成可观察的电流计最小偏转。

如果电流计的导线被做得更长一些和更细一些而总的质量不变，则 n 将按导线长度而变化，而α则按长度的平方而变化。因此，当

$$a=\frac{1}{3}(A+r)\left\{2\sqrt{1-\frac{3}{4}\frac{r^2}{(A+r)^2}}-1\right\}$$

时就将有 $\frac{(A+a)(A+a+2r)}{n}$ 的一个最小值。

如果我们假设和 A 相比电池组的电阻 r 是可以忽略的，则上式给出

$$a=\frac{1}{3}A;$$

或者说，电流计的每一个线圈的电阻应该是待测电阻的三分之一。

这时我们就得到

$$B-A=\frac{8}{9}\frac{A^2}{nE}(\delta-\delta')。$$

如果我们让电流只通过电流计中的二线圈之一，而由此引起的偏转是△（假设偏转确切地正比于致偏力），则有

$$\triangle=\frac{nE}{A+a+r}=\frac{3}{4}\frac{nE}{A}，如果 r=0 而 a=\frac{1}{3}A。$$

[①] 这种研究采自韦伯的关于量电流学的论文，见 G(ttingen Transactions,x.p.65.

由此即得

$$\frac{B-A}{A}=\frac{2}{3}\frac{\delta-\delta'}{\Delta}.$$

在差绕式的电流计中，两个电流被调得对悬挂着的指针引起相等而相反的效应。每一电流作用在指针上的力，不但依赖于电流的强度，而且依赖于导线各圈相对于指针的位置。由此可见，除非线圈被绕得很仔细，m 和 n 之比可能会随指针的位置而变，因此，在每一次实验过程中，如果预料会有指针位置的任何变化，那就有必要用适当的方法来确定这一比值。

另一种调零法要用到惠斯登电桥。这种方法只要求一个普通的电流计，而所观察到的指针的零偏转不是起源于两个电流的相反效应，而是起源于导线中电流的不存在。因此，作为观察到的现象，我们不但有一个零偏转而且有一个零电流，从而电流计线圈的不规则性或任何种类的变化都不会引起任何误差。电流计只要够灵敏，可以探测电流的存在和方向就行了，它用不着以任何方式测定电流的值或把该值和另一个电流的值互相比较。

347.〕惠斯登电桥本质上就是连接着四个点的六个导体。借助于接在 B 和 C 之间的一个伏打电池组，使一个电动势 E 作用于二点之间。另外两点 O 和 A 之间的电流用一个电流计来测量。

在某一情况下这个电流变为零。这时导体 BC 和 OB 就被说成是互相共轭的；这就意味着在其他四个导体的电阻之间有一个关系式，而这个关系式就被利用来测量电阻。

图 32

如果 OA 中的电流是零，则 O 点的势必然等于 A 点的势。现在，当我们知道 B 点和 C 点的势时，我们就可以利用第 275 节所给出的法则来确定 O 点和 A 点的势，如果 OA 中没有电流的话。我们得到，

$$O=\frac{B\gamma+C\beta}{\beta+\gamma},\quad A=\frac{Bb+Cc}{b+c},$$

由此即得条件式

$$b\beta=c\gamma,$$

式中 b、c、β、γ 分别是 CA、AB、BO 和 OC 的电阻。

为了确定用这种方法所能得到的精确度，我们必须在这一条件并非确切地得到满足时确定 OA 中的电流强度。

设 A、B、C 和 O 是四个点。设沿着 BC、CA 和 AB 而流动的电流是 x、y 和 z，而这些导体的电阻是 a、b 和 c。设沿着 OA、OB 和 OC 而流动的电流是 ξ、η、ζ，而电阻是 α、β 和 γ。设有一个电动势 E 沿着 BC 而起作用。试求沿 OA 的电流 ζ。

设 A、B、C 和 O 上的势用 A、B、C 和 O 来代表。导电方程是

$ax=B-C+E$，$\alpha\xi=O-A$，

$by=C-A$，$\beta\eta=O-B$，

$cz=A-B$，$\gamma\zeta=O-C$；

并有连续性方程

$$\xi+y-z=0,$$

$$\eta+z-x=0,$$

$$\zeta+x-y=0。$$

把体系看成由三个回路 OBC、OCA 和 OAB 构成，各回路中的电流分别为 x、y、z，并对每一个回路应用基尔霍夫的法则，我们就可以消去势 O、A、B、C 和电流 ξ、η、ζ 的值，而得到关于 x、y、z 的方程如下：

$$(\alpha+\beta+\gamma)x-\gamma y-\beta z=E,$$

$$-\gamma x+(b+\gamma+a)y-az=0,$$

$$-\beta x-ay+(c+a+\beta)z=0。$$

由此可见，如果令

$$D=\begin{vmatrix}\alpha+\beta+\gamma & -\gamma & -\beta\\ -\gamma & b+\gamma+a & -\alpha,\\ -\beta & -\alpha & c+a+\beta\end{vmatrix},$$

我们就得到

$$\zeta=\frac{E}{D}(b\beta-c\gamma),$$

和 $x=\frac{E}{D}\{(b+\gamma)(c+\beta)+a(b+c+\beta+\gamma)\}$ 。

348.〕D 的值可以写成对称式

$D=abc+bc(\beta+\gamma)+ca(\gamma+a)+ab(a+\beta)+(a+b+c)(\beta\gamma+\gamma a+a\beta)$[①]，或者，既然我们假设电池组是在 a 上而电流计是在 α 上，我们就可以把 a 换成电池组的电阻 B 而把 α 换成电流计的电阻 G。于是我们就得到

$$D=BG(b+c+\beta+\gamma)+B(b+\gamma)(c+\beta)$$

$$+G(b+c)(\beta+\gamma)+bc(\beta+\gamma)+\beta\gamma(b+c)。$$

假如使电动势沿着 OA 发生作用，而 OA 的电阻仍为 α，并把电流计接在 BC 上，而 BC 的电阻仍为 a，则 D 的值将仍然相同，而由沿 OA 作用的电动势 E 在 BC 中引起的电流将等于沿 BC 作用的电动势 E 在 OA 中引起的电流。

但是，如果我们简单地摘掉电池组和电流计，而且不改变他们各自的电阻就把电池组接在 O 和 A 之间而把电流计接在 B 和 C 之间，则我们必须在 D 中把 B 和 G 二值互换。如果互换之后的 D 值是 D′，我们就得到

$D-D'=(G-B)\{(b+c)(\beta+\gamma)-(b+\gamma)(\beta+c)\}$，$=(B-G)\{(b-\beta)(c-\gamma)\}$。

让我们假设，电流计的电阻大于电池组的电阻。

让我们也假设，在原来的位置上，电流计把两个具有最小电阻 β、γ 的导体的接头和两个具有最大电阻 b、c 的导体的接头连接了起来；或者换句话说，我们将假设，如果 b、c、γ、β 各量是按照大小次序排列的，则 b 和 c 是互接的而 γ 和 β 是互接的。由此可见，b-β 和 c-γ 这两个量同号，因此他们的乘积是正的，从而 D-D′ 和 B-G 同号。

因此，如果电流计是连接了两个最大电阻的接头和两个最小电阻的接头的，而且电流计电阻大于电池组电阻，则 D 的值将小于二者互换时的值，而电流计的偏转值则将较大。

---

① {D 是每次取三个电阻的各乘积之和，比时应略去交于一点的任意三个电阻的乘积。}

因此，在一个给定体系中得到最大电流计偏转的规则如下：

在电池组电阻和电流计电阻这两个电阻中，应把较大的一个电阻接在其他四个电阻中的两个最大电阻的接头和两个最小电阻的接头之间。

349.〕我们将假设我们必须测定导体 AB 和 AC 的电阻之比，而且作法就是在导体 BOC 上找到一个点 O，使得当 A 点和 O 点用一根中间接着电流计的导线连接起来，而电池组是在 B、C 之间起作用时，电流计指针没有可以觉察到的偏转。

导体 BOC 可以设想为被划分成若干等份的一根具有均匀电阻的导线，这样，BO 和 OC 的电阻之比就可以立即读出。

我们也可以不是把整个的导体做成一根导线而只在靠近 O 点处接上这样一根导线，而在每一侧的其他部分则可以采用一些其电阻为精确已知的任意形式的线圈。

现在我们将使用另外一套符号，而不再使用开始时使用的那种对称的符号。

设 BAC 的总电阻是 R。

设 $c=mR$ 而 $b=(1-m)R$。

设 BOC 的总电阻是 S。

设 $\beta=nS$ 而 $\gamma=(1-n)S$。

n 的值是直接读出的，而 m 的值则当不存在可觉察的电流计偏转时由 n 的值推出。

设电池组及其连线的电阻是 B，而电流计及其连线的电阻是 G。

像以前一样，我们得到

$$D=G\{BR+BS+RS\}+m(1-m)R^2(B+S)$$
$$+n(1-n)S^2(B+R)+(m+n-2mn)BRS,$$

而如果 ξ 是电流计导线中的电流，则有

$$\xi=\frac{ERS}{D}(n-m)。$$

为了得到最精确的结果，我们必须使指针的偏转和 $(n-m)$ 的值相比要尽可能地大。这一点可以通过适当选择电流计的规格和标准电阻线来作到。

当我们在第 716 节中讲到量电流学时就将证明，当电流计导线的形状改变而其质量保持不变时，单位电流引起的指针偏转是正比于导线长度的，但是电阻却像长度的平方一样地增大。由此就可以证明，当电流计导线的电阻等于电路其余部分的常量电阻时，最大的偏转就出现。

在现有的事例中，如果 δ 是偏转，则

$$\delta=C\sqrt{G}\,\xi,$$

式中 C 是某一常数，而 G 是随导线长度的平方而变的电流计电阻。我们由此就得到，在 D 的表示式中，如果 δ 是最大值，则必须令包含 G 的部分等于表示式的其余部分。

如果我们也令 $m=n$，正如当我们作出了正确的观察时所应有的情况那样，我们就发现 G 的最佳值是

$$G=n(1-n)(R+S)。$$

这一结果很容易通过考虑从 A 到 O 通过体系的电阻而求得，这时要记得 BC 和 AO 相共轭，从而对这一电阻没有任何效应。

同样我们即将发现，如果电池组的作用表面的总面积已经给定，则由于在这一事例中E正比于$\sqrt{B}$，电池组的最佳装配就出现在

$$B=\frac{RS}{R+S}。$$

最后我们将确定那个 S 值，它使 n 值的一个给定改变量将引起最大的电流计偏转。把ξ的表示式对 S 求导线，我们发现它当

$$S^2=\frac{BR}{B+R}(R+\frac{G}{(1-n)})$$

时有最大值。

如果我们必须进行许多次电阻测量，而所测的实际电阻具有接近相同的值，则为此目的而专门准备一个电流计和一个电池组是值得的。在这一事例中，我们发现最佳装配是

$$S=R，B=\frac{1}{2}R，G=2n(1-n)R，$$

而且如果$n=\frac{1}{2}$则$G=\frac{1}{2}R$。

关于惠斯登电桥的应用

350.〕我们已经论述了惠斯登电桥的普遍理论，现在我们将考虑它的一些应用。

可以作得最准确的是两个相等电阻的比较。

让我们假设β是一个标准电阻线圈。而我们想要调节γ使它的电阻等于β的电阻。

准备另外两个线圈 b 和 c，他们是相等的或接近相等的。把这四个线圈的电极插入水银杯中，并使电池组的电流分成两路，一路是β和γ而另一路是 b 和 c。线圈 b 和 c 是用一根导线 PR 连接的，该导线的电阻要尽可能地均匀，并且附有等分的标尺。

图 33

电流计的导线把β、γ的接头和导线 PR 上的一点 Q 相连接，并且变动接触点 Q，直到当先接通电池组电路而后接通电流计电路时观察不到电流计指针的偏转时为止。

然后交换线圈β和γ的位置，并找出 Q 点的一个新位置。如果新位置和旧位置相同，我们就知道β和γ的交换并没有引起电阻比例方面的变化，从而γ就是调好了的。如果 Q 点必须移动，这种变动的方向和大小就将显示为使γ和β的电阻相等所要求的γ的导线长度改变量的性质和数量。

线圈 b 和 c，再加上它们到零读数点的滑线 PR 上的那一段，如果二者的电阻分别等于滑线上 b 格和 c 格的电阻，那么，如果 x 是第一种情况下的 Q 点读数，而 y 是第二种情况下的 Q 点读数，则有

$$\frac{c+x}{b-x}=\frac{\beta}{\gamma}，\quad \frac{c+y}{b-y}=\frac{\gamma}{\beta}，$$

由此即得

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2}=1+\frac{(b+c)(y-x)}{(c+x)(b-y)}.$$

既然 b-y 近似地等于 c+x，而且二者都比 x 或 y 大得多，我们就可以把上式写成

$$\frac{\gamma^2}{\beta^2}=1+4\frac{y-x}{b+c},$$

从而就有

$$\gamma=\beta(1+2\frac{y-x}{b+c}).$$

当γ已经尽可能地调好时，我们把 b 和 c 换成例如电阻变为十倍的另外两个线圈。

这时在β和γ之间保留着的差值将比使用原来的线圈 b 和 c 时引起 Q 点位置的十倍大的差别，从而利用这种办法我们就可以继续提高电阻比较的精确度。利用滑线接触法来调节可以进行得比利用电阻箱更加迅速，而且还可以连续变化。

电池组绝不可以代替电流计而接在滑线上，因为强电流在接触点上的通过将损坏滑线的表面。因此，这种装配就适用于电流计电阻大于电池组电阻的情况。

当待测电阻γ、电池组电阻 a 和电流计电阻α已经给定时，奥立沃 ·亥维赛先生曾经证明(Phil.Mag.,Feb.1873)其他各电阻的最佳值是

$$c=\sqrt{a\alpha},$$

$$b=\sqrt{a\gamma\frac{\alpha+y}{a+y}},$$

$$\beta=\sqrt{a\gamma\frac{a+y}{\alpha+y}}.$$

关于小电阻的测量

351.〕当一个短而粗的导体被接入电路中时，它的电阻比由接触不良或焊接不好之类的不可避免的缺点所造成的电阻还要小得多，从而就不能用按上述方式作的实验来得出正确的电阻值。

图 34

这样一些实验的目的通常是测定物质的比电阻，而且当物质不能做成又长又细的导线时，或是当既要测量纵向导电的电阻又要测量横向导电的电阻时，这种实验就常被采用。

W.汤姆孙爵士[①]曾经描述了一种适用于这些事例的方法，我们将把这种方法看成一组九个导体的例子。

[①] Proc.R.S.,June 6,1861.

这种方法的最重要部分就在于不是测量导体的整个长度的电阻，而是测量靠它两端不远处的两个记号之间的那一段的电阻。

我们所要测量的，就是其强度在导体的任一截面都均匀分布而其流动方向则平行于导体轴线的那个电流所遇到的电阻。喏，在端点附近，当电流借助于电极而被引入时，不论是焊接的、汞齐化的还是简单地压在导体两端上的电极，通常电流在导体中的分布都是不够均匀的。在离开端点一段小距离的地方，电流就变得基本上均匀了。读者可以自行检视第 193 节中的考察和图片；在那儿，一个电流从一条边上被送入了一片有着平行边的导体中，而很快就变得和两边平行了。

图 35

要比较的是一些导体在某些记号 S、S′之间和 T、T′之间的电阻。

导体被串联起来，而且通过尽可能好的接法被接入一个电阻很小的电池组的电路中，一根滑线 SVT 的两端在 S 点及 T 点和导体相接触，而另一根滑线 S′V′T′则在 S′点及 T′点和导体相接触。

电流计的导线接在这些滑线的 V 点和 V′点上。

滑线 SVT 和 S′V′T′具有很大的电阻，以致由于 S、T、S′或 T′处的接触不良而引起的电阻和滑线的电阻比起来可以忽略不计；V、V′二点要取得适当，以使每一导线通向两个导体的支路电阻之比近似地等于二导体的电阻之比。

用 H 和 F 代表导体 SS′和 TT′的电阻。

用 A 和 C 代表支路 SV 和 VT 的电阻。

用 P 和 R 代表支路 S′V′和 V′T′的电阻。

用 Q 代表连接器 S′T′的电阻。

用 B 代表电池组及其连线的电阻。

用 G 代表电流计及其连线的电阻。

体系的对称性可以由线路图 34 看出。

图 36

电池组 B 和电流计 G 相共轭的条件，在这一事例中是[①]

$$\frac{F}{C}-\frac{H}{A}+\left(\frac{R}{C}-\frac{P}{A}\right)\frac{Q}{P+Q+R}=0.$$

现在，导体 Q 的电阻是弄得尽可能地小的。假如它等于零，条件就将简化为

$$\frac{F}{C}=\frac{H}{A},$$

从而所要比较的两个导体的电阻之比就将是 C 和 A 之比，就像在通常形式的惠斯登电桥中一样。

在现有的事例中，Q 的值和 P 或 R 相比都是很小的，因此，如果我们选择 V、V′二点，使得 R 和 C 之比近似地等于 P 和 A 之比，则方程中的最

[①] {这一条件可以通过在第五章附录中给出的法则来导出。}

后一项将变为零，而我们就将有

$$F:H=C:A。$$

这种方法的成功，在某种程度上依赖于滑线和被测导体在 S、S′、T、T′点上的接触良好性。在马提森和霍金[①]所应用的下述方法中，这一条件就不必要了。

352.〕待测的导体按以上已经描述的方式排列，其接通处要尽量完善，而所要比较的是第一个导体上 S、S′之间的电阻和第二个导体上 T′、T 之间的电阻。

两个导电的尖端或刀口被固定在一块绝缘材料上，从而他们之间的距离可以精确测量。这个仪器放在被测试的导体上，从而它和导体的两个接触点就是隔着一段已知的距离 SS′的。这些接触物中的每一个都接着一个水银杯，而电流计的一个极就可以插入杯中。

仪器的其他部分就像在惠斯登电桥中一样安排得有电阻线圈或电阻箱 A 和 C，和一根带着滑动接触器的导线，而电流计的另一个极 o 就接在这个接触点上。

现在把电流计接在 S 和 Q 上，调节 A_1 和 C_1 并调节 Q 的位置（即 Q_1），使得电流计的导线中没有电流。

于是我们就知道，

$$\frac{XS}{SY}=\frac{A_1+PQ_1}{C_1+Q_1R}.$$

式中 XS、PQ_1 等等代表各该导体的电阻。

由此我们得到

$$\frac{XS}{XY}=\frac{A_1+PQ_1}{A_1+C_1+PR}.$$

现在把电流计的电极接在在 S′上，并（通过把一些电阻线圈从一边挪到另一边）从 C 向 A 搬运电阻，直到可以通过把 Q 放在滑线的某点例如 Q_2 上而得到电流计导线中的电平衡。设现在 C 和 A 的值是 C_2 和 A_2，并设

$$A_2+C_2+PR=A_1+C_1+PR=R。$$

于是我们就和以前一样得到

$$\frac{XS'}{XY}=\frac{A_2+PQ_2}{R}.$$

由此即得

$$\frac{SS'}{XY}=\frac{A_2-A_1+Q_1Q_2}{R}.$$

按同样办法，把仪器放在第二个导体的 TT′段上，并且再次调动电阻，当电极位于 T′时我们就得到

$$\frac{XT'}{XY}=\frac{A_3+PQ_3}{R},$$

而当电极位于 T 时则得到

$$\frac{XT}{XY}=\frac{A_4+PQ_4}{R}.$$

[①] Laboratory.Matthiessen and Hockin on Alloys.

由此即得

$$\frac{T'T}{XY}=\frac{A_4-A_3+Q_3Q_4}{R}.$$

现在我们可以推出 SS＇和 T＇T 的电阻之比了，因为

$$\frac{SS'}{T'T}=\frac{A_2-A_1+Q_1Q_2}{A_4-A_3+Q_3Q_4}.$$

当并不要求很大的精确度时，我们就不必使用电阻线圈 A 和 C，这时我们就得到

$$\frac{SS'}{T'T}=\frac{Q_1Q_2}{Q_3Q_4}.$$

一根一米长的滑线上的 Q 点位置读数，不能精确到十分之一毫米，而且由于温度、摩擦等等的不相等，滑线的电阻可能在不同的部分变化颇大。因此，当要求很高的精确度时，就要在 A 和 C 两处引入电阻颇大的线圈，而这些线圈的电阻之比就可以比滑线在 Q 点被分成的两部分的电阻之比被测得更准确。

必须知道，在这种方法中，测定的精确度简直和 S、S＇或 T、T＇等处的接触的完善性完全无关。

这种方法可以叫做应用惠斯登电桥的差分用法，因为它依赖于分别作出的一些观察结果的比较。

这种方法中的精确性的一个根本条件就是，在完成测定所要求的四次观测过程中，各连接部分的电阻应该保持相同。因此，为了发现电阻的任何变化，观测系列永远必须重复进行[①]。

关于大电阻的比较

353.〕当要测量的电阻很大时，体系中不同点上的势的比较，可以借助于一个精密的静电计来进行，例如借助于第 219 节中的象限静电计来进行。

如果要测量其电阻的那些导体是串联的，而且借助于一个电动势很大的电池组使一个相同的电流通过这些导体，则每一导体两端的势差将正比于该导体的电阻。因此，通过把静电计的两极先接在第一个导体的两端而后再接在第二个导体的两端，就可以测定该二导体的电阻之比。

这是测定电阻的最直接的方法。它涉及一个读数可靠的静电计的应用，而且我们必须有某种保证，可使电流在实验过程中保持不变。

四个大电阻的导体也可以像惠斯登电桥那样地接起来，而桥路本身则可以包括一个静电计的而不是一个电流计的两极。这种方法的好处就在于，为了引起静电计的偏转，并不要求任何持久的电流，而电流计则非有一个电流通过不能偏转。

354.〕当一个导体的电阻非常大，以致用任何既有的电动势送进去的通过它的电流都小得无法用一个电流计来直接测量时，就可以用一个电容器来在一段时间内积累电荷，然后，让电容器通过一个电流计而放电，所

[①] {关于小电阻的另一种比较方法，见 Lord Rayleigh,Proceedings of the Cambridge Philoーsophical Society,vol.v.p.50．}

积累的电量就可以被估计出来。这就是布来特和克拉克用来测试海底电缆接头的那种方法。

355.〕但是，测量这样一个导体的电阻的最简单方法，就是把一个电容很大的电容器充电，并把它的两个表面和一个静电计的两个极接起来，而同时也和导体的两端接起来。如果 E 是静电计所指示的势差，S 是电容器的电容，Q 是电容器任一表面上的电荷，R 是导体的电阻而 x 是导体中的电流，则由电容器理论可得

$$Q=SE。$$

由欧姆定律，

$$E=Rx，$$

而由电流的定义，

$$x=-\frac{dQ}{dt}.$$

由此即得

$$-Q=RS\frac{dQ}{dt},$$

从而就有

$$Q=Q_0e^{-\frac{t}{RS}},$$

式中 Q_0 是起初 t=0 时的电荷。

同理，

$$E=E_0e^{-\frac{t}{RS}},$$

式中 E_0 是静电计的原始读数，而 E 是在时间 t 以后的读数。由此我们就得到

$$R=\frac{t}{S\{\log_e E_0-\log_e E\}},$$

此式按绝对单位给出了 R。在这一表示式中，关于静电计刻度的单位值的知识是不必要的。

如果电容器的电容 S 是在静电单位制中作为若干米而被给出的，则 R 也是在静电单位制中作为一个速度的倒数而被给出的。

如果S是在电磁单位制中被给出的，则它的量纲是 $\frac{T^2}{T}$，而R就是一个速度。

既然电容器本身并不是一个理想的绝缘体，那就有必要进行两个实验。在第一个实验中，我们测定导体本身的电阻 R_0；而在第二个实验中，我们测定当导体和电容器的两极相接时电容器的电阻，于是导体的电阻 R 就由下式给出，

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R'}-\frac{1}{R_0}.$$

这种方法曾由西门子先生应用过。

测定电流计电阻的汤姆孙方法

356.〕一种和惠斯登电桥相似的装置曾被 W．汤姆孙爵士很有好处地应用于电流计在实际使用中的电阻的测定。在这方面，W．汤姆孙爵士受到了曼斯方法的启发。参阅第 357 节。

设电池组仍像从前那样接在第 347 节的图中的 B 和 C 之间，但是电流计却接在 CA 上而不接在 OA 上。如果 $b\beta-c\gamma=0$，则导体 OA 和 BC 共轭，而且，由于 BC 上的电池组并不在 OA 中产生电流，任何其他导体中的电流强度就都和 OA 上的电阻无关。因此，如果电流计接在 CA 上，它的偏转就将保持相同，不论 OA 上的电阻是小还是大。因此，我们就可以观察电流计的偏转当 O 和 A 被一个导体接通时是否和不被接通时相同，而且，如果我们通过适当调节各导体的电阻而得到了这一结果，我们就知道电流计的电阻是

$$b=\frac{c\gamma}{\beta},$$

式中 c、γ和β是电阻已知的电阻线圈。{译按：原文如此，其意义当是“线圈的已知电阻”。}

图 37

可以注意，在电流计中并无电流的意义上，这不是一种调零法；但是所观察的是一个负效应，即当接通某一支路时电流计的偏转不变，而在这种意义上，这正是一种调零法。这样一种观察比同一电流计的两次不同偏转相等的观察更有价值，因为在后一事例中有一定的时间来让电池组的强度或电流计的灵敏度发生变化，而当我们可以随便重复某些变动而偏转则保持不变时，我们却可以确信电流是和这些变动完全无关的。

一个电流计线圈的电阻的测定很容易通过在 OA 上接入另一个电流计而用惠斯登电桥来按普通方法完成。利用现在所描述的方法，电流计本身却被用来测量它自己的电阻。

测定电池组电阻的曼斯方法

357.〕电池组正在起作用时的电阻的测定，是困难程度更大得多的，因为人们发现，在通过它的电流发生变化以后的一段时间内，电池组的电阻会有相当的变化。在通常用来测量一个电池组的电阻的许多方法中，通过电池组的电流强度在操作过程中是会发生这样的变化的，从而就使所得的结果很可怀疑了。

在没有这种缺点的曼斯方法中，电池组被接在 BC 上而电流计被接在 CA 上。然后 O 和 B 之间的电路就被交替地接通和断开。

喏，如果 OB 和 AC 是共轭的，则不论 OB 的电阻如何变化，电流计指针的偏转都会保持不变。这可以看成在第 347 节中已经证明的那种结果的一个特例，也可以通过从该节那些方程中消去 z 和β而直接看出，那时我们就有

---

① Proe.R.S.,Jan.19,1871.

① Proc.R.S.,Jan.19,1871.

$(a\alpha - c\gamma)x + (c\gamma + ca + cb + ba)y = Ea$。

如果 y 和 x 无关并从而和β无关，我们就必有 $a\alpha = c\gamma$。这样就由 c、γ、 α得出了电池组的电阻。

当条件式 $a\alpha = c\gamma$ 得到满足时，通过电流计的电流由下式给出，

$$y = \frac{Ea}{cb + a(a + b + c)}，\quad = \frac{E\gamma}{ab + \gamma(a + b + c)}.$$

为了检验这种方法的精确度，让我们假设条件式 $c\gamma = a\alpha$ 近似地而不是准确地得到满足，并假设 y_0 是当 O 和 B 被一个电阻可忽略的导体接通时通过电流计的电流，而 y_1 是 C 和 B 完全断开时通过电流计的电流。

图 38

为了求出这些值，我们必须在 y 的普通公式中令β等于 0 和∞，然后比较所得的结果。

y 的普遍值是

$$\frac{c\gamma + \beta\gamma + \gamma a + a\beta}{D}E,$$

式中 D 代表第 348 节中的同一个表示式。令 $\beta = 0$，我们得到

$$y_0 = \frac{\gamma E}{ab + \gamma(a + b + c) + \dfrac{c(c\alpha - c\gamma)}{a + c}}$$

$$= y + \frac{c(c\gamma - a\alpha)}{\gamma(c + a)}\frac{y^2}{E}，\text{近似地，}$$

令 $\beta = \infty$，我们得到

$$y_1 = \frac{E}{a + b + c + \dfrac{ab}{\gamma} - \dfrac{(a\alpha - c\gamma)b}{(\gamma + a)\gamma}},$$

$$= y - \frac{b(c\gamma - a\alpha)}{\gamma(\gamma + a)}\frac{y^2}{E}.$$

由这些值，我们即得

$$\frac{y_0 - y_1}{y} = \frac{a}{\gamma}\frac{c\gamma - a\alpha}{(c + a)(a + \gamma)}.$$

导体 AB 的电阻 c 应该等于电池组的电阻 a；α和γ应该相等并尽可能地小；而 b 应该等于 $a + \gamma$。

既然一个电流计当指针偏转很小时最为灵敏，我们在接通 O 和 B 以前就应该利用固定的磁体把指针弄到靠近零点的地方。

在这种测量电池组电阻的方法中，电流计中的电流在操作过程中是不受任何干扰的，因此我们就可以针对任何给定的电流计中的电流强度来确定电池组的电阻，以确定电流强度如何影响电阻[①]。

[①] [在 Philosophical Magazinefor 1877,vol.i.pp.515－525 上，奥立沃·亥维赛先生曾经作为曼斯方法的一个缺点而指出了，如果方程 $a\alpha = c\gamma$ 成立，则由于电池组的电动势依赖于通过电池组的电流，故当开关合上和开断时电流计指针的偏转不可能是相同的。洛治先生描述了曼斯方法的修订形式，这是他成

如果 y 是电流计中的电流，当开关合上时通过电池组的电流是 x_0，而当开关断开时的电流是 x_1，此处

$$x_0 = y\left(1+\frac{b}{\gamma}+\frac{ac}{\gamma(a+c)}\right),\quad x_1 = y\left(1+\frac{b}{b+\gamma}\right),$$

则电池组的电阻是

$$a=\frac{c\gamma}{\alpha},$$

而电池组的电动势是

$$E = y\left(b+c+\frac{c}{a}(b+\gamma)\right)。$$

第 356 节中确定电流计电阻的方法和这里的方法只有一点不同，那就是电路的通断是在 O、A 之间而不是在 O、B 之间，从而通过把 α 和 β 互换和把 a 和 b 互换，我们就在这一事例中得到

$$\frac{y_0-y_1}{y}=\frac{\beta}{\gamma}\frac{c\gamma-b\beta}{(c+\beta)(\beta+\gamma)}.$$

关于电动势的比较

358.〕在装置中没有电流通过时比较伏打装置及温差装置的下述方法，只需要一组电阻线圈和一个恒定电池组。

设电池组的电动势 E 大于所要比较的任何一个发电装置的电动势，那么，如果把一个足够大的电阻 R_1 插入到初级回路 EB_1A_1E 中的 A_1、B_1 二点之间，则从 B_1 到 A_1 的电动势可以弄成等于发电装置 E_1 的电动势。如果现在把这一装置的电极接在 A_1、B_1 二点上，就不会有电流通过该装置。在发电装置 E_1 的电路上接一个电流计 G_1，并调节 A_1 和 B_1 之间的电阻直到电流计不指示任何电流时为止，我们就得到方程

$$E_1=R_1C$$

式中 R_1 是 A_1 和 B_1 之间的电阻，而 C 是初级回路中的电流强度。

同样，取第二个发电装置并把它的电极接在 A_2 和 B_2 上，使得电流计 G_2 不指示任何电流，就得到

$$E_2=R_2C,$$

式中 R_2 是 A_2 和 B_2 之间的电阻。如果电流计 G_1 和 G_2 的观察是同时进行的，初级回路中的 C 值在两个方程中就是相同的，从而我们就得到

$$E_1:E_2=R_1:R_2。$$

用这种方法，就可以比较两个发电装置的电动势。一个发电装置的绝对电动势既可以在静电学上借助于一个静电计来测量又可以在电磁学上借助于一个绝对电流计来测量。

在这种方法中，在进行比较的时间内没有任何电流通过其中任何一个发电装置。这种方法是波根道夫方法的一种修订形式；这是由拉提摩·克拉克先生提出的，他曾经得出了下列的各电动势的值：

功地应用了的。]

浓溶液	伏特			
丹聂耳	Ⅰ.锌汞齐	H_2SO_4+4aq.	$CuSO_4$	铜=1.079
	Ⅱ.锌汞齐	H_2SO_4+12aq.	$CuSO_4$	铜=0.978
	Ⅲ.锌汞齐	H_2SO_4+12aq.	$CU(NO_3)_2$	铜=1.00
本生	Ⅰ.锌汞齐	H_2SO_4+12aq.	HNO_3	碳=1.964
	Ⅱ.锌汞齐	H_2SO_4+12aq.	ap.g.1.38	碳=1.888
格罗夫	锌汞齐	H_2SO_4+4aq.	HNO_3	铂=1.956

一伏特就是等于 100，000，000 厘米-克-秒单位的一个电动势。

第十二章

关于物质的电阻

359.〕按照电在他们中通过的情况，不同的物质可以分成三类。

第一类包括所有的金属及其合金、某些硫化物以及含金属的其他化合物，此外还包括煤化焦炭形态的碳和晶体形态的硒。

在所有这些物质中，导电都是在不引起物质的分解或化学本性的改变的情况下进行的，不论在物质的内部还是在电流进入和离开物体的地方都如此。在所有这些物质中，电阻是随温度的升高而增大的[①]。

第二类包括称为电解质的那些物质；其所以称为电解质，是因为电流和物质变成出现在电极上的两种成分的那种分解相伴随。通常说来，一种物质只有当处于液体形态时才是一种电解质，但是某些表观上是固体的胶体，例如 100℃下的玻璃，也是电介质[①]。按照 B．C．布罗迪爵士的实验来看，似乎某些气体也可以被很强的电动势所电解。

在所有通过电解而导电的物质中，电阻都随着温度的升高而减小。

第三类包括一些物质，他们的电阻如此之大，以致只有利用最精巧的方法才能探测电在他们中的通过。这些物质叫做电介质。属于这一类的有相当多的当融解时是电解质的固体，有一些液体例如松节油、石油精、融解的石腊等等，还有所有的气体和蒸汽。金刚石形态的碳和非晶态的硒也属于这一类。

这一类物体的电阻比起金属的电阻来是非常大的，它随着温度的升高而减小。由于这些物质的电阻很大，人们很难确定我们勉强在他们中得到的微弱电流是不是和电解相伴随。

关于金属的电阻

360.〕在电学的研究中，没有任何部分比金属电阻的确定有更多的和更精确的实验。在电报工作中，最重要的就是用来制造电线的金属应有尽可能小的电阻。因此在选定材料以前必须进行电阻的测量。当线路上出了故障时，故障的位置通过测量电阻就能立即确定，而现在占用了那么多人的这种测量就要用到用金属做成的电阻线圈，而那种金属的电学性质也必须经过仔细的测试。

金属及其合金的电学性质曾由马提森、佛格特、霍金、西门子等先生很仔细的研究过，他们在把精密的电学测量引入到实际工作中来的方面作出了许多贡献。

从马提森博士的研究可以看出，温度对电阻的影响在相当多的纯金属中是近似相同的 100℃时的电阻和 0℃时的电阻之比是 1.414 比 1，或者说是 100 比 70.7。对纯铁来说，比值是 1.6197，而对铊来说则是 1.458。

[①] ｛对于这一说法，碳是一种例外；而佛森诺近来曾经发现，一种锰铜合金的电阻当温度升高时是减小的。｝

[①] ｛考耳若什曾经证实，银的卤化物在固态下是电解导电的，见 Wied.Ann.17.p.642,1882｝。

金属的电阻曾由 V.W.西门子博士[①]在广阔得多的温度范围内观察过，其范围从冰点扩展到 350℃，而且在某些事例中扩展到 1000℃。他发现，电阻随温度的升高而增加，但是增加率却随温度的升高而减小。他发现有一个公式既和马提森博士在低温度下观察到的电阻符合得很好，也和他自己在 1000℃的范围内的观察结果符合得很好；那公式就是

$$r = aT^{\frac{1}{2}} + \beta T + \beta\gamma,$$

式中 T 是从-273℃算起的绝对温度，而α、β、γ是一些常量。例如，对于

铂……$r = 0.039369T^{\frac{1}{2}} + 0.00216407T - 0.2413$[②]，

铜……$r = 0.026577T^{\frac{1}{2}} + 0.0031443T - 0.22751$，

铁……$r = 0.072545T^{\frac{1}{2}} + 0.0038133T - 1.23971$。

由这一类的想法可知，一个炉子的温度，可以通过观察放在炉中的一根铂丝的电阻来加以测定。

马提林博士发现，当两种金属结合成合金时，合金的电阻在多数事例中都大于按照各成分金属的电阻及其性质来算出的电阻。在金和银的合金的事例中，合金的电阻既大于纯金的又大于纯银的电阻，而且，在各成分的一定限度的比例范围之内，合金的电阻几乎不随比例的变化而变化。基于这种原因，马提森博士就建议用两份重量的金和一份重量的银的合金来作为复制电阻单位的一种材料。

温度变化对电阻的效应，通常在合金中比在纯金属中要小。

因此普通的电阻线圈是用德银制成的，因为这种合金的电阻很大而其随温度的变化很小。

银和铂的一种合金也被用来制造标准线圈。

361.〕某些金属的电阻当金属被退火时就会改变，从而只有当一根金属丝通过反复地升到高温而不显再示电阻的永久变化时，它才能够可靠地被当作一种电阻的标准。有些金属丝即使没有遭受温度的变化也会在时间过程中改变自己的电阻。因此确定汞的比电阻就是重要的。汞这种金属是液体，从而永远有相同的分子结构，而且很容易通过蒸馏或用硝酸处理来加以提纯。W.西门子和 C.F.西门子曾经很细心地测定了这种金属的电阻，他们引用了这个电阻来作为一种标准。他们的研究曾经得到了马提森和霍金的实验的补充。

汞的比电阻是由观察到的一根长度为 l 并充有质量为ω的汞的管子的电阻按下述方式推出的。

没有任何玻璃管的内径是到处完全相同的，但是，如果把少量的汞装入管中使它占据管子的一个长度λ，而这个长度的中点到管子一端的距离

---

① Proc.R.S.,April，27,1871.

② {卡林达先生近来在开文迪什实验室中所作的关于铂的电阻的实验已经证明,这些表示式是和高温下的事实不一致的。西门子的关于铂的公式要求电阻的温度系数在高温下变为常量并等于 0.0021，而实验却似乎在很高的温度下指示着一个慢得多的增加率，如果不是减小率的话。见 H.L.Callendar,‘On the Practical Measurement of Tempera－ture,’PhilTrans.178 A.pp.161－230.}

是x，则这一点附近的截面积s将是$s=\frac{C}{\lambda}$。式中C是一个相同的常量。

充满整个管子的汞的质量是

$$w=\rho\int sdx=\rho C\sum(\frac{1}{\lambda})\frac{l}{n},$$

式中n是沿管子等距排列的在那里测量λ的各点的数目，而ρ是单位体积的质量。

整个管子的电阻是

$$R=\int\frac{r}{s}dx=\frac{r}{C}\sum(\lambda)\frac{l}{n},$$

式中r是单位体积的比电阻。

由此可得

$$\omega R=r\rho\Sigma(\lambda)\Sigma(\frac{1}{\lambda})\frac{l^2}{n^2},$$

从而单位体积的比电阻就是

$$r=\frac{wR}{\rho l^2}\frac{n^2}{\sum(\lambda)\sum(\frac{1}{\lambda})}$$

为了求出单位长度和单位质量的电阻，我们必须用密度来乘这个量。

由马提森和霍金的实验可知，长度为一米而重量为一克的均匀汞柱在0℃时的电阻是13.071大英协会单位；由此可见，如果汞的比重是13.595，则长度为一米而截面积为一平方毫米的汞柱的电阻是0.96146大英协会单位。

362.〕在下面的表中，是按照马提森的实验[①]得出的电阻，R是长度为一米而重量为一克的一个柱体在0℃下以大英协会单位计的电阻，而r是一个立方厘米体积以厘米每秒计的电阻，这时假设一个大英协会单位等于0.98677地球象限弧。

	比重		R.	r.	20℃下每1℃的电阻增量百分比
银……	10.50	冷拉	0.1689	1588	0.377
铜……	8.95	冷拉	0.1469	1620	0.388
金……	19.27	冷拉	0.4150	2125	0.365
铅……	11.391	压	2.257	19584	0.387
汞[①]…	13.595	液体	13.071	94874	0.072
金2，银1……	15.218	冷或退火	1.668	18326	0.065
100℃下的硒		晶态		6×10^{13}	1.00

关于电解质的电阻

[①] Phil.Mag.,Mag,1865.

[①] {更新的实验已经给出了汞的比电阻的不同值。下面是在0℃下对长度为一米而截面为一平方毫米的汞柱的电阻测定结果，以大英协会单位计：Lord Rayleigh and Mrs.Sidgwick,Phil.Trans.Part I.1883‥95412,Glazebrook and Fitzpatrick,Phil.Truns.A.1888‥95352,Hutchinson and Wilkes,Phil.Mag.(5).28.17.1889‥95341.}

363.〕电解质电阻的测量，由于电极上的极化而成为很困难的；这种极化导致观察到的金属电极之间的势差大于实际上产生电流的那个电动势。

这一困难可以用各种方法来克服。在某些情况下我们可以用适当材料的电极来消除极化，例如在硫酸锌溶液中用锌电极。通过把电极的表面做得比要测其电阻的那一部分电解质的截面大得多，并通过沿相反的方向交替地在短时间内接通电流，我们可以在电流的通过激起任何相当强的极化以前进行测量。

最后，通过进行两个不同的实验，我们也可以估计极化的总效应；在这两个实验中，电流在一个实验中在电解质中经过的路程要比在另一个实验中的路程长得多，而电动势则调节得使两个实验中的实际电流和他们流动的时间都接近相同。

364.〕在帕耳佐夫博士[②]的实验中，电极被做成大圆盘的形状，放在分开的扁平容器中，容器中充有电解质，另外把一个很长的充有电解质的虹吸管的两端插在两个容器中，以便把他们连接起来。用了两个不同长度的这种虹吸管。

观察到的这些虹吸管中的电解质的电阻是 R_1 和 R_2 然后在这些虹吸管中充入汞，测得他们的电阻是 R_1' 和 R_2'。于是就由公式

$$\rho = \frac{R_1 - R_2}{R_1' - R_2'}.$$

求出了形状相同的一部分汞和一部分电解质在 0°C下的电阻之比。

为了从各个 ρ 值推出长度为一厘米而截面积为一平方毫米的电解质的电阻，我们必须用汞在 0°C下的 r 值去乘这些 ρ 值。参阅第 361 节。

帕耳佐夫给出的结果如下：

硫酸和水的混合物

	温度	电阻和汞电阻之比
H_2SO_4	……15°C	96950
$H_2SO_4+14H_2O$	……19°C	14157
$H_2SO_4+13H_2O$	……22°C	13310
$H_2SO_4+499H_2O$	……22°C	184773

硫酸锌和水

$ZnSO_4+33H_2O$	……23°C	194400
$ZnSO_4+24H_2O$	……23°C	191000
$ZnSO_4+107H_2O$	……23°C	354000

硫酸铜和水

$CuSO_4+45H_2O$	……22°C	202410
$CuSO_4+105H_2O$	……22°C	339341

硫酸镁和水

$MgSO_4+34H_2O$	……22°C	199180
$MgSO_4+107H_2O$	……22°C	324600

[②] Berlin Monatsbericht,July,1868.

盐酸和水

$HCl+15H_2O$……23℃	13626
$HCl+500H_2O$……23℃	86679

365.〕F.考耳劳什先生和 W.A.尼波耳特先生[①]曾经测定了硫酸和水的混合物的电阻。他们使用了磁电式的电流，其电动势

变动于格罗夫电池的电动势的$\frac{1}{2}$到$\frac{1}{74}$之间，而借助于一个铜-铁温差电

偶，他们把电动势减到了格罗夫电池电动势的$\frac{1}{429000}$。他们发现，在整个的电动势范围之内，欧姆定律是适用于这种电解质的。

在含有大约三分之一的硫酸的混合物中，电阻有最小值。

电解质的电阻随温度的升高而减小。每增加 1℃时的电导增时百分比列在下面的表中：

以 0℃下的汞电阻表出的硫酸和水的混合物在 22℃下的电阻。据考耳若什和尼波耳特。

18.5℃下的比重	H_2SO_4的百分比	22℃下的电阻（Hg=1）	每 1℃的电导增量百分比
0.9985	0.0	746300	0.47
1.00	0.2	465100	0.47
1.0504	8.3	34530	0.653
1.0989	14.2	18946	0.646
1.1431	20.2	14990	0.799
1.2045	28.0	13133	1.317
1.2631	35.2	13132	1.259
1.3163	41.5	14286	1.410
1.3597	46.0	15762	1.674
1.3994	50.4	17726	1.582
1.4482	55.2	20796	1.417
1.5026	60.3	25574	1.794

关于电介质的电阻

366.〕关于古塔波胶和在电报电缆的制造中用作绝缘媒质的其他材料，曾经进行过许多的电阻测定，为的是要确定这些材料作为绝缘质的价值。

通常测定是在材料已经用作导线的包皮以后才进行的，而导线就被用作一个电极；电缆被浸入一个水槽中，槽中的水就被用作另一个电极。于是电流就是透过用绝缘质制成的一个面积很大而厚度很小的圆柱形包皮而流动的。

经发现，当电动势开始作用时，电流绝不是恒定的，就如电流计所指示的那样。最初的效应当然是一个强度相当大的瞬变电流，总的电量被用来把绝缘体的表面充电到和电动势相对应的面电荷分布。因此，最初的电

[①] Pogg.，Ann.cxxxviii.pp.280，370，1869.

流就不是电导的一种量度而是绝缘层电容的一种量度。

但是，即使在这种电流已经衰减掉以后，剩下来的电流也还不是恒定的，而且也并不指示物质的真实电导。人们发现电流至少在半小时之内还要继续减小，因此，如果过了一段时间以后再来按电流确定电阻，得到的值将大于刚一加上电池组就进行确定的电阻值。

例如，对于胡波尔的绝缘材料来说，十分钟结束时的表观电阻是一分钟结束时的表观电阻的四倍，而十九小时结束时的表观电阻则是一分钟结束时的表观电阻的二十二倍。当电动势的方向倒转时，电阻就降到等于或低于起初的电阻，然后又逐渐增高。

这些现象似乎起源于古塔波胶的一种状态；由于没有更好的名称，我们可以把这种状态叫作极化，并且一方面把它和一系列级联充电的莱顿瓶的状态相比拟，而另一方面又把它和第 271 节中的里特尔次级电堆相比拟。

如果把若干个大电容的莱顿瓶用一些电阻很大的导体（例如高更实验中的湿棉线）串联起来，则作用在这一串莱顿瓶上的一个电动势将产生一个电流，而正如一个电流计所指示的那样，这个电流将逐渐减小，直到各个莱顿瓶已经完全充电时为止。

这样一串东西的表观电阻将增大，而如果各个莱顿瓶的电介质是一种理想绝缘体，则表观电阻将无限地增大。如果电动势被取消，而把这一串东西的两端连接起来，那就可以观察到一个反向的电流，而其总电量在理想绝缘体的事例中将和正向电流的总电量相同。在次级电堆的事例中也观察到类似的效应，所不同的是最后的绝缘不是那么好，而且每单位面积的电容要大得多。

在用古塔波胶等等为包皮的电缆事例中，人们发现，在加上电池组半小时以后，若把导线和外电极连接起来，就会出现一个反向电流；这个电流将持续一段时间，并逐渐使体系还原到原来的状态。

这些现象是和由莱顿瓶的“残余放电”所指示的那些现象种类相同的，只除了极化的数量在古塔波胶等等中比在玻璃中要大得多。

这种极化状态似乎是材料的一种有向的性质；为了造成这种状态，不但要有一个电动势，而且要按照位移或其他方式而有一个相当大的电量的通过，而这种通过是需要相当的时间的。当极化状态已经建成时，就有一个内电动势在物质内部沿相反的方向而作用着；这种电动势将继续存在，直到它已经产生了一个总量等于第一个电流的反向电流，或是极化状态已经通过物质中的真实导电而暗暗消失时为止。

我们曾经称之为残余放电、电的吸收、起电或极化的那种现象的整个理论，是值得仔细研究的，而且是也许会导致有关物体之内部结构的重要发现的。

367.〕多数电介质的电阻是随温度的升高而减小的。例如，古塔波胶在 0℃时的电阻约为它在 24℃时的电阻的二十倍。布莱特先生和克拉克先生曾经发现，下面的公式可以给出和他们的实验相符的结果。如果 r 是古塔波胶在百分温度计 T 度下的电阻，则在 $T+t$ 度下的电阻将是

$$R=r\times C^{t},$$

式中 C 是一个常数，其数值随古塔波胶品种的不同而在 0.8878 和 0.9 之间变动。

霍金先生曾经证实了这样一件希奇的事实：只有当古塔波胶已经达到了它的末温度若干小时以后，它的电阻才能达到它的对应值。

温度对弹性橡皮的电阻的影响，不像对古塔波胶电阻的影响那么大。

当受到压力时，古塔波胶的电阻将有颇大的增加。

用在不同电缆中的不同古塔波胶的一立方米的电阻，以欧姆为单位，如下表所示[①]：

电缆名称	
红海	$.267\times10^{12}$ 到 $.362\times10^{12}$
马尔他—亚里山大里亚	1.23×10^{12}
波斯湾	1.80×10^{12}
第二大西洋	3.42×10^{12}
胡波尔的波斯湾缆芯	74.7×10^{12}
24℃下的古塔波胶	3.53×10^{12}

368.〕根据第 271 节所描述的布夫实验算出的下面这个表，表示了不同温度下一立方米玻璃的以欧姆为单位的电阻。

温度	电阻
200℃	227000
250°	13900
300°	1480
350°	1035
400°	735

369.〕C.F.瓦尔莱先生[①]近来曾经考察了电流通过稀薄气体的条件，他发现电动势 E 等于一个常量 E_0 和一个按照欧姆定律而依赖于电流的部分，即

$$E=E_0+RC.$$

例如，使某一个管子中开始出现电流时所需要的电动势，是 323 个丹聂耳电池的电动势，而 304 个电池的电动势就刚刚足以维持电流了。按照电流计的测量，电流强度正比于比 304 多出的电池数目。例如，对于 305 个电池，偏转为 2；对于 306 个电池，偏转为 4；对于 307 个电池，偏转为 6；如此等等，直到 380，那就是 304+76，这时偏转为 150，或 76×1.97。

由这些实验可以看出存在电极的一种极化，其电动势等于 304 个丹聂耳电池的电动势，而且直到此值为止，电动势是被用来建立这种极化状态的。当最大极化已经建成时，比 304 个电池电动势多出的部分电动势就被用来按照欧姆定律维持电流了。

因此，一种稀薄气体中的电流规律，和通过一种电解质的电流规律很相像；在电解质中，我们是必须照顾到电极的极化的。

联系到这一课题，我们必须研讨汤姆孙的结果；那就是，曾经发现，在空气中产生一个火花所需要的电动势不是正比于距离而是正比于距离加一个常量。和这个常量相对应的电动势可以看成电极极化的强度。

370.〕魏德曼先生和吕耳曼先生[①]近来研究了电在气体中的通过。电

[①] Jenkin’s Cantor Lectures.

[①] Proc.R.S.,Jan,12,1871.

[①] Berichte der Konigl,Sachs. Gesellschaft, Leipzing, Oct.20, 1871.

流是用霍耳兹起电机来产生的，放电发生于充有稀薄气体的一个金属容器中的球形电极之间。放电通常是不连续的，相继放电之间的时间阶段利用一个和霍耳兹起电机的轴一起转动的镜子来测量。放电系列的像借助于一个具有分格物镜的测日计来观察；测日计被调节好，使每一次放电的一个像和下一次放电的另一个像相重合。利用这种方法，得到了很自洽的结果。经发现，每次放电的电量不依赖于电流强度和电极材料，而是依赖于气体的种类和密度，并依赖于电极的距离和形状。

这些研究证实了法拉第的下列叙述[②]：使一个导体的带电表面上开始出现一次破坏性放电时所需要的电张力（参阅第 48 节），当所带的是负电时将比所带的是正电时稍小，但是当一次放电确已发生时，一次在正电表面上开始的放电所放出的电却要多得多。这些研究也倾向于支持在第 57 节中提出过的假说，那就是，凝聚在电极表面上的气体层在现象中起重要的作用。而且这些研究也指示出来，这种凝聚是在正电极上最大的。

[②] Exp.Res.,1501.