学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

试题研究 2000.2 初中数学

闯进中考试卷的数学开放题

湖北　吴正凯

随着九年义务教育的实施和教育模式由“应试教育”向素质教育转轨，一个崭新的数学题型的触角悄悄地伸向中考试卷，这就是开放型数学试题.让我们先看一个例子：

引例（1996 年宁夏回族自治区中考试题）如图 1，已知⊙O 内切于四边形 ABCD，AB=AD，连结 AC、BD.根据上述条件，结合图形直接写出结论（除图中 A、B、C、D、O 五个字母外不要标注或使用其他字母，不添加任何辅助线，不写推理过程）.

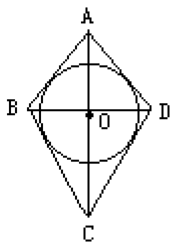


图1

这道题很特别，没有现成的结论，甚至结论可有多个而不惟一确定，考生可以根据自己对几何知识的认识写出一个到多个结论.这就是开放型数学题.

开放型数学问题是相对于给出了明确的条件和结论的封闭型问题而言的.所谓开放型数学题通常指答案不确定或条件不完备，或具有多种不同解法，或有多种可能的解答等类型的数学问题.如果我们把数学习题看作是一个系统：y、o、p、z，其中 y 表示习题的条件，o 表示解题依据，p 表示解题方法，z 表示习题的结论.这个系统中的四个要素若有两个未知则称为探索性题；若有三个未知则是问题性习题.开放题就属于问题性习题（少数属于探索性习题）.引例就是解题依据不明、解题方法不明、结论不明的问题性试题.将问题性试题即开放题引入中考无疑是因为这类试题具有其他试题所不可替代的功能.

一、条件开放型试题

例 1　（1997 南京市中考试题）已知：a、b、c 分别是△ABC 中∠A、∠B、∠C 的对边（a＞b）.二次函数 $y=(x-2a)x-2b(x-a)+c^2$ 的图象的顶点在 x 轴上，且 sinA、sinB 是关于 x 的方程 $(m+5)x^2-(2m-5)x+m-8=0$ 的两个根.

（1）判断△ABC 的形状，并说明理由；

（2）求 m 的值；

（3）若这个三角形的外接圆面积为 25π，求△ABC 的内接正方形（四个顶点都在三角形的边上）的边长.

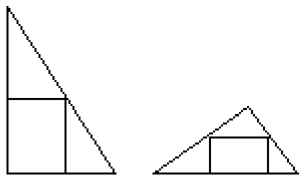
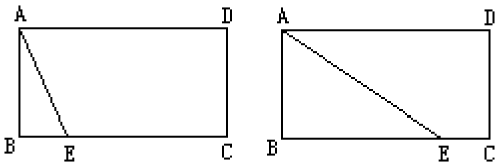


图2

所谓条件开放型试题是指在结论不变的前提下，条件不惟一的开放题.本例第（3）问中，由于正方形内接于三角形的方式不单一，因而如图 2 所示，将产生两个答案.由于课本上出现过类似乙图的图形，学生就可能受定势思维的影响只给出乙图时的解答，只有敢于突破，具有创新意识的同学才可能给出甲、乙两种情况下的解答.

例 2　（1997 年北京市中考试题）已知矩形的长大于宽的 2 倍，周长为 12，从它的一个顶点作一条射线，将矩形分成一个三角形和一个梯形，且这条射线与矩形一边所成的角的正切值为 1/2.设梯形面积为 S，梯形中较短底的长为 x，试写出梯形面积 S 关于 x 的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.



甲　　乙

图3

几何问题往往都对应于一定的图形，由于几何元素之间位置关系的可变性又决定了图形的多样性，而图形是问题条件的重要组成部分，图形的多样性就决定了问题条件的开放性.如本例中条件对应着图 3 的甲、乙两种情况，于是本例的解答亦有两个结论.由于题设条件中强调“长大于宽的 2 倍”，因此，部分学生会被导入乙图而忽视了甲图，只有思维发散性较强的同学才会画出两种图形分别求解.

二、结论开放型试题

例 3　（1995 年广东省中考试题）如图 4 所示，AD 是 RtΔABC 斜边 BC 上的高，AB=AC，过点 A、D 的圆与 AB、AC 分别交于点 E、F，弦 EF 与 AD 相交于点 G.

（1）图中有哪些三角形与ΔGDE 相似（不要求说明理由）？

（2）当 BC＝2 时，求 AE＋AF 的长.

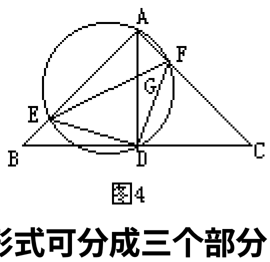


图4

数学命题，根据思维形式可分成三个部分：假设——推理——判断.所谓结论开放型题是指其中判断部分是未知要素的开放题，像本例这样：谁与ΔGDE 相似？并且此处的“谁”不惟一.更为特殊的是其答案中有ΔGFA、ΔEDA、ΔFDC，其中后两个三角形是全等的.不同水平的考生可作出不同的回答，既能充分反映考生思维能力的差异，又能促使考生

的思维发散.本例用于课堂教学将会有利于激发学生的好奇心，进而调动学习积极性，主动参与学习过程，且能培养学生思维的发散性，使课堂充满活力和生机.

例 4　（1996 年江西省中考试题）如图 5，在直角坐标系中，点 O′的坐标为（2、0），⊙O′与 x 轴交于原点 O 和点 A.又 B、C、E 三点的坐标分别为（-1，0）、（0，3）、（0，b），且 0＜b＜3.

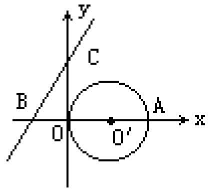


图5

（1）求点 A 的坐标和经过点 B、C 的直线的解析式；

（2）当点 E 在线段 OC 上移动时，直线 BE 与⊙O′有哪几种位置关系？并求出每种位置关系时，b 的取值范围.

相对于点 B 与点 C，点 E 条件被弱化，使得直线 BE 与⊙O′位置关系产生变化，从而使本例成为结论开放型试题.像本例这样的开放题具有一定的创新性和探究性，利于激发考生的探究精神和创新意识.

三、策略开放型试题

例 5　（1996 年宜昌市中考试题）

如图 6，已知菱形 ABCD 的面积为 m 平方单位，∠ABC＝120°，E、F、G、H 分别为 AB、BC、CD、DA 的中点.下面有四个结论：

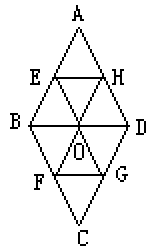


图6

（1）图中多边形 EBFGDH 为正六边形；

（2）图中余弦值为 $\frac{1}{2}$ 的不同角有且仅有24个；

（3）图中面积为 $\frac{m}{4}$ 平方单位的不同菱形有且仅有8个；

（4）图中面积为 $\frac{3m}{8}$ 平方单位的不同梯形有且仅有8个.

其中错误的结论有　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

（A）3 个.　　（B）0 个.

（C）2 个.　　（D）1 个.

所谓策略型开放题是指条件与结论之间的推理是未知的，或者说解法有很多种的开放题.如本例，我们可以用很多种不同的推理或计算方法来逐一验证四个结论的真假，但是考生则必须找到一条既省事又准确的途径来解决这个问题，因此学生的主体意识得以强化.

例 6　（1997 年安徽省中考试题）如图 7，在▱ABCD 中，EF ∥

BC，GH∥AB，EF、GH 的交点 P 在 BD 上，P 不是 BD 的中点，EF 和 GH 把原平行四边形分成互不重叠的四个小平行四边形.

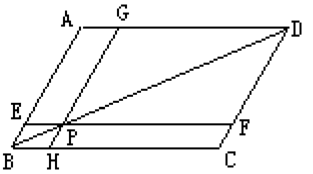


图7

（1）图中哪两个小平行四边形的面积相等？为什么？

（2）图中哪些小平行四边形相似？为什么？

由于题设中 P 不是 BD 的中点，考生很快就意识到面积相等的应该是▱PHCF 和▱PGAE.证明方法也是多样的，其中最佳方法是通过平行四边形的对角线平分其面积来实现.

四、综合开放型试题

例 7　（1998 年河北省中考试题）某工厂现有甲种原料 360 千克，乙种原料 290 千克，计划利用这两种原料生产 A、B 两种产品，共 50 件.已知生产一件 A 种产品，需用甲种原料 9 千克，乙种原料 3 千克，可获利 700 元；生产一件 B 种产品，需用甲种原料 4 千克，乙种原料 10 千克，可获利 1200 元.

（1）按要求安排 A、B 两种产品的生产件数，有哪几种方案？请你设计出来；

（2）设生产 A、B 两种产品获总利润为 y（元），其中一种产品生产件数为 x，试写出 y 与 x 之间的函数关系式，并利用函数的性质说明（1）中哪种生产方案获总利润最大？最大利润是多少？

所谓综合开放型试题是指只给出一定的情境，其条件、解题策略与结论都要考生到情境中去自行设定或寻找的问题.综合开放型试题较多关注考生创新意识.创造能力与数学应用意识.像本例这样具有实际意义的开放题，在中考试卷上已多次出现.如宁波市（1993 年）、江苏淮阴市（1996 年）、广州市（1996 年）等，这就为初中数学教育界提出了一个严峻而又紧迫的任务：认真研究数学开放教学法.

由于开放题在我国数学教育界引起关注还是近五年来的事（开放题引入我国是 1980 年，但在义务教育实施以前未能引起中学教育界的重视）.当前，随着素质教育的全面推进，中央强调：“智育工作要转变教育观念，改革人才培养模式，积极实行启发式和讨论式教学，激发学生独立思考和创新意识，切实提高教学质量.”因此，在我们走进 21 世纪的时刻，开放型试题将大踏步走进中考试卷.

中考试题中的函数问题

山西　高仰贵

函数是初中数学的重要内容，在历年的各地中考试题中都占有重要的份量，本文介绍中考试题中函数问题的常见题型、解题方法以及应注意的问题，供初三同学们复习参考.

一、求函数自变量的职值范围

此类问题通常根据函数解析式有意义的条件列不等式或不等式组求解.

例1　函数$\dfrac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt{3-x}}$的自变量x的取值范围是________.

解：要使原函数有意义，x应满足$\begin{cases}3x-1\geq 0,\\ 3-x>0\end{cases}$

解之，得$\dfrac{1}{3}\leq x<3.$

求函数自变量的取值范围时要注意：

1.分式的分母不能为零，偶次根式的被开方数不能为负，零指数及负整数指数幂的底数不能为零等.

2.对于有实际意义的函数，自变量的取值范围除了保证解析式有意义外，还必须使实际问题有意义.

二、求函数的解析式

此类问题常用待定系数法求解.

例 2　已知 $y=y_1+y_2$，y_1 与 x 成正比例，y_2 与 x 成反比例，并且当 x=1 时，y=-2；x=2 时，y=-7.求 y 与 x 之间的函数解析式.

提示：设$y_1=k_1x(k_1\neq 0)$，$y_2=\dfrac{k_2}{x}$（$k_2\neq 0$），则$y=k_1x+\dfrac{k_2}{x}$，再根据已知条件可列出关于 k_1、k_2 的方程组，解得 k_1、k_2，便可得到 y 与 x 之间的函数关系式.

例 3　求经过 A（0，1）、B（-1，1）、C（1，-1）三点，且对称轴平行于 y 轴的抛物线对应的函数解析式及其对称轴方程和最值.

提示：设函数表达式为 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq 0$），将 A、B、C 三点的坐标分别代入关系式中，得到关于 a、b、c 的方程组，解得 a、b、c 就得出函数表达式，其余问题便唾手可得.

求函数解析式时要注意下面几点：

1.用待定系数法求二次函数的解析式时要根据题目所给的条件，选用恰当的表达式.

2.熟悉各种函数（如正、反比例函数，一次、二次函数）的表达式.

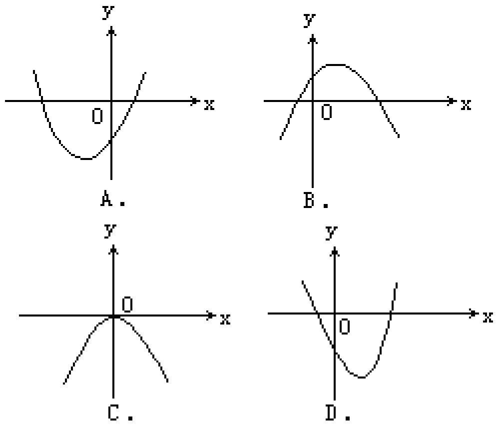
三、选择函数的图象或判断图象的特征.

函数的解析式决定函数图象的形状和位置，因此要选择函数的图象，必须根据解析式的系数特点，利用函数的性质分析判断作出选择.

此类问题常有如下几种题型：

1.单一函数的图象选择

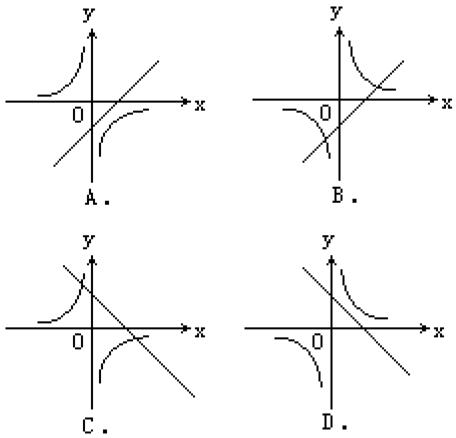
例 4　满足 b＜0，c＜0 的二次函数 $y=ax^2+bx+c$（其中 $a\neq0$）的图象是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［　　］



略解：由 c＜0 知，函数图象与 y 轴的交点在 x 轴下方，故只有(A)、(D)符合条件.因(A)、(D)中图象开口向上，所以 a＞0.又因 b＜0，从而 $-\frac{b}{2a}>0$，故顶点的横坐标为正，在y轴的右侧，故选（D）.

2.系数无关的两个函数的图象选择

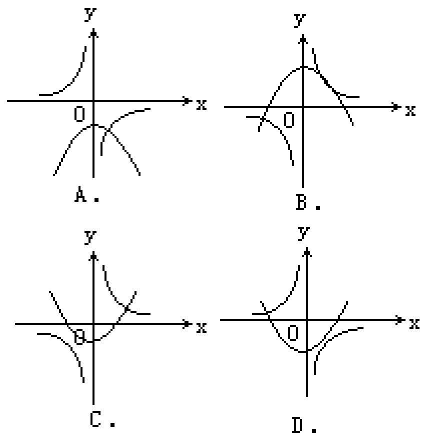
例5　函数$y=\frac{k_1}{x}$（k_1＜0）与$y=k_2x+b$（k_2＞0，b＜0）在同一坐标系中的图象大致是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［　　］



解：因k_1＜0，所以函数$y=\frac{k_1}{x}$的图象在第二、第四象限；又因k_2＞0，b＜0，所以函数 $y=k_2x+b$ 的图象在第一、第三、第四象限.符合这两个条件的图象只能是（A）.

3.系数相关的两个函数的图象的选择

例6　函数$y=\frac{k}{x}$和函数$y=k(x^2-1)$在同一坐标系里的图象大致是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［　　］



解：若$k<0$，则$y=\frac{k}{x}$的图象应在第二、第四象限，$y=k(x^2-1)$的图象开口向下，顶点$(0,-k)$在x轴上方，显然没有符合这两个条件的图形.若$k>0$，则$y=\frac{k}{x}$的图象应在第一、第三象限，$y=k(x^2-1)$的图象开口向上，顶点在 x 轴下方，符合这两个条件的图形只有（C），故选（C）.

4.判断函数图象的某些特征

例 7　对于二次函数 $y=ax^2+bx+c$，$a>0$，$c<0$，这个函数的图象与 x 轴交点的情况是　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．没有交点.　　B．有一个交点.

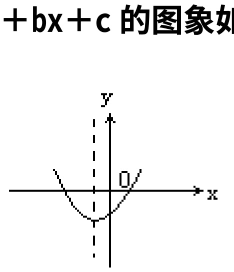
C．有两个交点.　D．不能确定.

解：因 $a>0$，$c<0$，所以 $ac<0$，故 $b^2-4ac>0$，所以图象与 x 轴有两个交点，故选（C）.

四、已知函数的图象或图象的某些特征，求解与函数解析式的系数有关的问题

此类问题一般是根据函数图象的特点，利用函数的性质得出系数或其符号加以解决.

例 8　　二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示，则点$(a+b，ac)$在直角坐标系中的　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]



A．第一象限.

B．第二象限.

C．第三象限.

D．第四象限.

解：因抛物线开口向上，所以 $a>0$；又因抛物线顶点在第三象限，所以$-\frac{b}{2a}<0$，由此可知$b>0$；因抛物线与y轴交点在x轴下方，所以$c<0$.从而 $a+b>0$，$ac<0$，故点$(a+b，ac)$在第四象限.

例 9　若对于任何实数 x，二次函数 y＝（m-1）x^2＋2mx＋m＋3 的图象全在 x 轴上方，求 m 的取值范围.

解：因对任何实数 x，图象在 x 轴上方，所以抛物线开口向上，与 x 轴没有交点，故有

$$\begin{cases} m-1>0, \\ (2m)2-4(m-1)\ (m+3)<0. \end{cases}$$

解之，得$m>\frac{3}{2}$，这就是m的取值范围.

五、二次函数与其它知识的综合问题

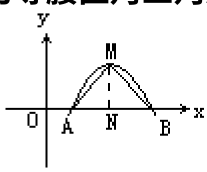
例 10　若不等式 $2x^2$＋mx＋n＜0 的解集是-2＜x＜3，则二次函数 y=$2x^2$＋mx＋n 的表达式为　　　　　　　　　　　　[　　]

A．y=2x2＋2x＋12．　　B．y＝2x2-2x＋12．

C．y=2x2+2x-12．　　　D．y=2x2-2x-12．

解：由不等式 $2x^2$+mx+n＜0 的解集是-2＜x＜3 知：方程 $2x^2$＋mx＋n＝0 的根是-2、3，所以函数 y＝$2x^2$＋mx＋n 与 x 轴两个交点为（-2，0）、（3，0），从而函数为 y＝2（x＋2）（x-3）＝$2x^2$-2x-12，选（D）．

例 11　设 A、B 为抛物线 y=-3x2-2x＋k 与 x 轴的两个相异交点，M 为抛物线的顶点，当ΔAMB 为等腰直角三角形时，求 k 的值.



解：如图，因抛物线与 x 轴有两个相异的交点，所以Δ=4-4（-3）k＞0，解得$k>-\frac{1}{3}$.依题意∠AMB＝90°，AM＝BM，过M作MN垂直x轴于N，则显然有$MN=\frac{1}{2}AB$.又因

$$MN=\frac{4(-3)k-4}{4\times(-3)}=k+\frac{1}{3},$$

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2}$$

$$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\sqrt{(-\frac{2}{3})^2-4(-\frac{k}{3})}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{1+3k},$$

所以$k+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\sqrt{1+3k}$.

解得$k_1=0$，$k_2=-\frac{1}{3}$（舍去）.故k的值为0.

图象与函数对应的思想及其应用

江苏　陈梓人

数形结合的思想是学习《函数及其图象》最重要的思想方法，而数形结合最基本的思想之一是图象与函数对应的思想.这种对应思想包括如下两方面的内容：

（Ⅰ）某个函数图象上点的坐标（实数对），一定满足这个函数的解析式.

（Ⅱ）满足某个函数解析式的实数对所表示的点，一定在这个函数的图象上.

这种思想是形与数相互转化的基本依据，它在解决函数有关问题中有着广泛的应用.

首先，如果某个未知函数的图象经过某些已知点，那么由（Ⅰ）的思想，可把这些点的坐标表示的实数对代入解析式，得出关于该函数未知系数的方程组，从而可求得函数解析式.

其次，要求某已知函数图象上满足某个条件的点的坐标，一般先设出该点的坐标，由（Ⅰ）的思想，可把纵坐标用含横坐标的式子（即该函数解析式）表示出来，再把只含一个未知量的实数对代入所给的条件，就能求得该点的坐标.

最后，要判定某点是否在某已知函数图象上，只要把该点坐标（实数对）代入函数解析式.根据（Ⅱ）的思想，如果满足解析式，那么该点就在函数图象上；如果不满足解析式，那么该点就不在函数图象上.

我们先举几个一次函数的例子.

例 1　一次函数的图象过点 M（3，2）、N（-1，-6）两点.

（1）求函数解析式；

（2）试通过计算判断点 P（2a，4a-4）是否在此函数的图象上.

（1998 年福州市中考试题）

解：（1）设一次函数为 y=kx＋b，则由（Ⅰ）的思想可得

$\begin{cases} 3k+b=2, \\ -k+b=-6. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=2, \\ b=-4. \end{cases}$

∴一次函数的解析式为 y＝2x-4.

（2）把实数对（2a，4a-4）代入解析式：

当 x＝2a 时，y=2·2a-4＝4a-4.

由（Ⅱ）的思想可知，点 P 在此函数的图象上.

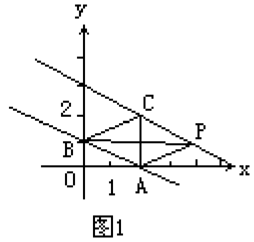


图1

例2　已知：如图1，直线$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$和x轴、y轴分别交于点A、B，以线段AB为边在第一象限内作等边三角形ABC，如果在第一象限内有一点P（m，1/2），且ΔABP的面积与ΔABC的面积相等，求m的值.

（1993年北京市中考试题）

解：易得A（$\sqrt{3}$，0），B（0，1）.

∴$OA=\sqrt{3}$，$OB=1$，$\angle OAB=30°$，且$AB=2$，

∴∠OAC=90°，且AC=AB=2.

∴点C的坐标为（$\sqrt{3}$，2）.

∵$S_{\Delta ABP}=S_{\Delta ABC}$，∴CP∥AB.

故可设直线CD的解析式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x=b.$

由（Ⅰ）知，实数对（$\sqrt{3}$，2）满足解析式.

于是得$-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}$，∴$b=3.$

∴直线CP的解析式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3.$

又由（Ⅰ）知，（m，$\frac{1}{2}$）也满足解析式，

∴$-\frac{\sqrt{3}}{3}m+3=\frac{1}{2}.$

解得$m=\frac{5}{2}\sqrt{3}.$

例3　已知：平面直角坐标系内两点A（-2，0）、B（4，0）．点P在直线$y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$上，且ΔABP为直角三角形.求点P的坐标，并在直角坐标系内标出点P的位置.（1997年北京市崇文区中考试题）

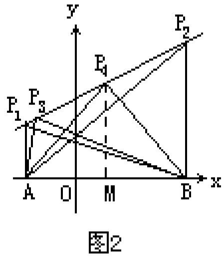


图2

解：本题分三种情形：

（i）当∠PAB=90°时，则点P坐标可表示为（-2，a），

由（Ⅰ）可得$a=\frac{1}{2}\times(-2)+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}.$

∴ P_1的坐标为（－2，$\frac{3}{2}$）

（ii）当∠PBA=90°时，点P坐标可表示为（4，b）.

由（Ⅰ）可得$b=\frac{1}{2}\times 4+\frac{5}{2}=\frac{9}{2}$.

∴P_2的坐标为（4，$\frac{9}{2}$）.

（ⅲ）当∠APB=90°时，过 P 作 PM⊥AB，垂足为 M，则易得ΔAPM∽ΔPBM.

可得 $PM^2=AM\cdot MB$.

设点 P 的坐标为（m，n），则 n＞0.

由（Ⅰ）可知$n=\frac{1}{2}m+\frac{5}{2}$.

而 AM＝OA＋OM=2＋m，

BM＝OB-OM＝4-m，

又$PM=n=\frac{1}{2}m+\frac{5}{2}$，

$$\therefore (\frac{1}{2}m+\frac{5}{2})^2=(2+m)(4-m).$$

解得 $m_1=-\frac{7}{5}$，$m_2=1$.

故$n_1=\frac{1}{2}(-\frac{7}{5})+\frac{5}{2}=\frac{9}{5}$，

$n_2=\frac{1}{2}\times 1+\frac{5}{2}=3$.

∴P_3（$-\frac{7}{5},\frac{9}{5}$），P_4（1，3）.

P_1、P_2、P_3、P_4的位置见图 2.

我们再举几个二次函数的例子.

例 4　已知抛物线 y＝（$9-m^2$）x^2-2（m-3）x+3m 的顶点 D 在双曲线$y=-\frac{5}{x}$上，求m的值.

（1997 年四川省中考试题）

解：先求得抛物线顶点 D 的坐标为

$$(-\frac{1}{m+3},\frac{3m^2+10m-3}{m+3}).$$

由（Ⅰ）可知，点 D 所表示的实数对一定满足

$y=-\frac{5}{x}$，即$xy=-5$.

故得$-\frac{1}{m+3}\cdot\frac{3m^2+10m-3}{m+3}=-5$.

解得 $m_1=-4$，$m_2=-6$.

例 5　已知抛物线 $y=x^2+(k-2)x+1$ 的顶点为 M，与轴交于 A（a，0）、B（b，0）两点，且 $k^2-(a^2+ka+1)(b^2+kb+1)=0$：

（1）求 k 的值；

（2）已知抛物线上是否存在点N，使ΔABN的面积为$4\sqrt{3}$？若存在，求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．

（1998 年南昌市中考试题）

解：由（Ⅰ）可知（a，0）、（b，0）满足二次函数解析式，即

a^2＋（k-2）a＋1=0，

b^2＋（k-2）b＋1=0．

∴a^2＋ka＋1=2a，　　①

b^2＋kb＋1=2b．　　②

又由根与系数关系可知 ab=1．

把①、②代入已知等式，得

k^2-2a·2b＝0，即 k^2-4＝0．

解得 k=±2．但 k=2 不合题意，舍去．

∴k=-2．

（2）由（1）知，抛物线的解析式为 $y=x^2-4x+1$．

∴a＋b=4，ab＝1．

于是，$AB=|a-b|=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$

$=\sqrt{4^2-4\times1}=2\sqrt{3}.$

如果满足条件的点 N 存在，可设 N（x_0，y_0），则由（Ⅰ）可知

$y_0=x_0{}^2-4x_0+1$．

由题意得$S_{\Delta ABN}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times|y_0|=4\sqrt{3}.$

解得 y_0=±4·

当 y_0=4 时，$x_0{}^2-4x_0+1=4$．

解得$x_0=2\pm\sqrt{7}.$

当 y_0＝-4 时，$x_0{}^2-4x_0+1=-4$，此方程无实数根．

∴ 满足条件的点 N 存在，其坐标为

（$2+\sqrt{7}$，4）或（$2-\sqrt{7}$，4）．

例6 如图3，已知抛物线$y=\dfrac{1}{2}x^2+px+q$（q≠0）与直线$y=x$交于两点 A、B，与 y 轴交于点 C，OA＝BO，BC∥x 轴．

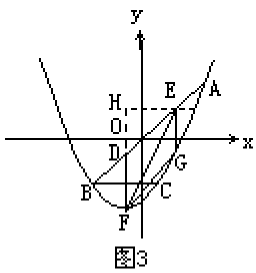


图3

（1）求 p 和 q 的值；

（2）设 D、E 是线段 AB 上异于 A、B 的两个动点（点 E 在点 D 的右上方），$DE=\sqrt{2}$，过D作y轴的平行线，交抛物线于F.（i）设点D的横坐标为 t，ΔEDF 的面积为 S，把 S 表示为 t 的函数，并求自变量 t 的

取值范围及函数S的最大值；（ii）再过点E作y轴的的平行线，交抛物线于G，试问能不能适当选择点D的位置，使四边形DFGE是平行四边形？如果能，求出此时点D的坐标；如果不能，请说明理由.

（1997年扬州市中考试题）

解：（1）由题意得C（0，q）

∵BC∥x轴，且点B在直线y=x上，由（Ⅰ）可知，点 B的坐标为（q，q）.

由OA=BO知，点A、B关于原点对称，

∴ 点A的坐标为（-q，-q）.

由（Ⅰ）可知

$$\begin{cases}\frac{1}{2}q^2+pq=q=q,\\ \frac{1}{2}(-q)^2+p(-q)+q=-q.\end{cases}$$

解得p=1，q=-2.

∴抛物线的解析式为$y=\frac{1}{2}x^2+x-2.$

（2）（i）因为点D在直线x=t和y＝x上，由（Ⅰ）可知点D的坐标为（t，t）.而点F在直线$x=t$上，又在抛物线$y=\frac{1}{2}x^2+x-2$上.

由（Ⅰ）可知，点F的坐标为（t，$\frac{1}{2}t^2+t-2$）.

过E作EH⊥DF交FD的延长线于H，由$DE=\sqrt{2}$可知，$EH=1.$

$DF=t-(\frac{1}{2}t^2+t-2)=-\frac{1}{2}t^2+2.$

$\therefore S=\frac{1}{2}DF\cdot EH=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}t^2+2)\times 1$

$=-\frac{1}{4}t^2+1.$

解方程组$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2+x-2\\ y=x\end{cases}$，可得

$\begin{cases}x_1=2,\\ y_1=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-2,\\ y_2=-2.\end{cases}$

∴ A（2，2），B（-2，-2）.

∴t的取值范围为-2＜t＜1.

且当t=0时，S有最大值1.

（ii）易知 E（t＋1，t＋1），而点G在直线x=t＋1上，又在$y=\frac{1}{2}x^2+x-2$上，

由（Ⅰ）可知点G的坐标为（$t+1$，$\frac{1}{2}(t+1)^2+(t+1)-2$）.

$\therefore EG=(t+1)-[\frac{1}{2}(t+1)^2+(t+1)-2]$

$=-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{3}{2}.$

若四边形DFGE是平行四边形，则$EG=DF$，即$-\frac{1}{2}t^2-t+\frac{3}{2}$

$=-\frac{1}{2}t^2+2.$

解得$t=-\frac{1}{2}.$

∴满足条件的点D存在，其坐标为（$-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$）.

由以上各例可知，图象与函数对应的思想常常是解决某些函数问题的关键.我们在函数学习过程中要把这种思想贯彻始终，并不失时机地运用这种思想（特别是Ⅰ）去解决有关问题.

运用全等三角形证题的基本思路

江苏　刘顿

运用全等三角形能够证明某些与线段或角有关的几何问题.那么如何证明两个三角形全等呢？一般来说，应根据题设条件，结合图形，寻求边或角相等，使之逐步逼近某一公理或判定定理，其基本思路有以下几种：

一、有两边对应相等，则寻求夹角或第三边对应相等

例 1　已知：如图 1，AB＝AC，AD=AE，∠1＝∠2.求证：BD=CE.

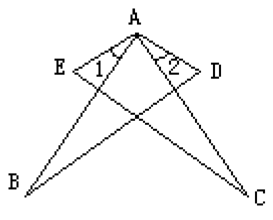


图1

分析：要证明 BD＝CE，只要证明ΔABD≌ΔACE.因为已知条件已给出了有两边对应相等，所以只需证明这两边的夹角也相等，即∠BAD＝∠CAE.而根据图形和已知条件“∠1=∠2”，即可获证.

证明：∵∠1=∠2，

∴∠1+∠BAC=∠2+∠BAC.

即∠BAD=∠CAE.

在ΔABD 和ΔACE 中，

$$\because \begin{cases} AB＝AC, \\ \angle BAD = \angle CAE, \\ AD＝AE, \end{cases}$$

∴ΔABD≌ΔACE（SAS）.故 BD＝CE.

例 2　已知：如图 2，AB＝DF，AC=DE，BE＝FC.求证：AB∥DF.

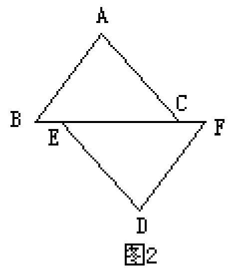


图2

分析：要证明 AB∥DF，只要证明∠B=∠F.由∠B、∠F 分别在ΔABC 和ΔDFE 中，这就要证明ΔABC≌ΔDFE.因为已知条件给出了两边对应相等，所以可证明两个三角形的第三条边对应相等，即 BC＝FE.根据图形和已知条件“BE＝FC”，即可获证.

证明：∵BE＝FC，

∴BE＋EC＝FC＋CE，即 BC＝FE.

在ΔABC 和ΔDFE 中，

$\because\begin{cases}AB=DF,\\AC=DE,\\BC=FE,\end{cases}$ ∴ΔABC≌ΔDFE（SSS）.

∴∠B=∠F，故 AB∥DF.

二、有两角对应相等，则寻求夹边或任一等角的对边对应相等

例 3　已知：如图 3， AB∥CD，AD∥BC.求证：AB=CD，AD＝BC.

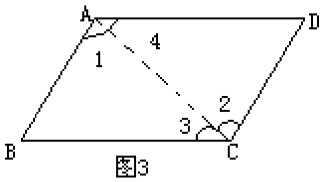


图3

分析：要证明 AB＝CD，AD＝BC，只要连结 AC，证明ΔABC≌ΔCDA.因为已知 AB∥CD，AD∥BC，这就有∠1＝∠2，∠3＝∠4，而 AC 又是它们的夹边，则问题获证.

证明：连结 AC.∵ AB∥CD，AD∥BC，

∴∠1=∠2，∠3=∠4.

在ΔABC 和ΔCDA 中，

$\because\begin{cases}\angle 1=\angle 2,\\AC=CA,\\\angle 3=\angle 4,\end{cases}$

∴ΔABC≌ΔCDA（ASA），故 AB＝CD，AD＝BC.

例 4　已知：如图 4，∠1=∠2，∠3=∠4.求证：BE＝CD.

分析：要证明 BE＝CD，只要证明ΔBCE≌ΔCBD.在这两个三角形中，∠1=∠2，∠3=∠4，而∠1 的对边是 BC，∠2 的对边是 CB，且有 BC=CB，则问题获证.

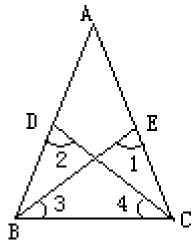


图4

证明：在ΔBCE 和ΔCBD 中，

$\because\begin{cases}\angle 1=\angle 2,\\\angle 3=\angle 4,\\BC=CB,\end{cases}$

∴ΔBCE≌ΔCBD（AAS）.故 BE=CD.

三、有一边和该边的对角对应相等，则寻求另一角对应相等

例 5　已知：如图 5，ΔABC 中，∠BAC=90°，AB=AC，直线 MN 经过点 A，BD⊥MN，CE⊥MN，垂足为 D、E.求证：BD=AE.

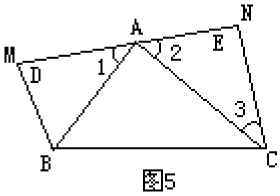


图5

分析：要证明 BD=AE，只要证明ΔABD≌ΔCAE.现有条件是一边和该边的对角对应相等，还需再证明另一角对应相等，而不难发现∠1+∠2=90°，∠2+∠3=90°，所以∠1=∠3，则问题获证.

证明：∵BD⊥MN，CE⊥MN，

∴∠ADB=∠CEA＝90°.

而∠BAC＝90°，∴∠1＋∠2=90°.

∵∠2+∠3=90°，∴∠1＝∠3.

在ΔADB 和ΔCEA 中，

$$\because \begin{cases} \angle ADB = \angle CEA, \\ \angle 1 = \angle 3, \\ AB = CA, \end{cases}$$

∴ΔADB≌ΔCEA（AAS）.故 BD=AE.

四、有一边和该边的邻角对应相等，则寻求夹等角的另一边对应相等，或另一角对应相等

例 6　已知：如图 6，ΔABC 中，∠ACB=90°，∠CBA=45°，E 是 AC 上一点，延长 BC 到 D，使 CD＝CE.求证：BF⊥AD.

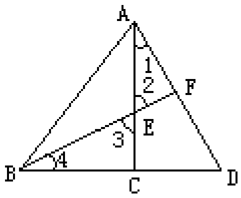


图6

分析：要证明 BF⊥AD，只要证明∠1＋∠2=90°.又∠3+∠4＝90°，∠2＝∠3，那么只需证明∠1=∠4，这样只要证明ΔACD≌ΔBCE.在这两个三角形中，已知有一边和该边的邻角对应相等，只要证明 CA=CB 即可，此时由条件中的∠CBA=45°，可得到 CA＝CB，则问题获证.

证明：∵∠ACB＝90°，∠CBA=45°，

∴ CA=CB.

在ΔACD 和ΔBCE 中，

$$\because \begin{cases} CA = CB, \\ \angle ACD = \angle BCE = 90°, \\ CD = CE, \end{cases}$$

∴ΔACD≌ΔBCE（SAS）.∴∠1=∠4.

∵∠4+∠3＝90°，∠3=∠2.

∴∠1＋∠2=90°，故 BF⊥AD.

例 7　已知：如图 7，AB=AC，∠B=∠C，∠1=∠2.求证：AD=AE.

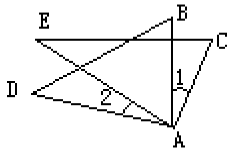


图7

分析：要证明 AD=AE，只要证明ΔABD≌ΔACE.由已知条件知，有一边和该边的邻角对应相等，只要再证明另一角对应相等，此时由∠1=∠2，可得∠BAD=∠CAE，问题获证.

证明：∵∠1＝∠2，

∴∠1+∠BAE=∠2+∠BAE，∴∠BAD＝∠CAE.

在ΔABD 和ΔACE 中，

$$\because \begin{cases} \angle B = \angle C, \\ AB = AC, \\ \angle BAD = \angle CAE, \end{cases}$$

∴ΔABD≌ΔACE（ASA）.故 AD=AE.

五、对于直角三角形来讲，应优先考虑运用“斜边、直角边公理”，当此路不通时，再回到上述思路中去

例 8 已知：如图 8，AD⊥DB，BC⊥CA，AC＝BD.求证：AD＝BC.

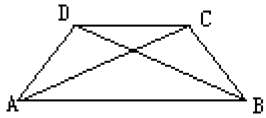


图8

分析：要证明 AD＝BC，只要证明ΔADB≌ΔBCA，而这两个三角形是直角三角形，可考虑运用“斜边、直角边公理”证明，此时由题设条件 AC＝BD，结合图形 AB=BA，则问题获证.

证明：∵AD⊥DB，BC⊥CA，

∴ΔADB 和ΔBCA 都是直角三角形.

在 RtΔADB 和 RtΔBCA 中，

$$\because \begin{cases} BD = AC, \\ AB = BA, \end{cases}$$

∴RtΔADB≌RtΔBCA（HL）.故 AD=BC.

六、对于运用全等三角形证明的结论一次不到位时，则可反复运用上述思路进行证明

例 9 已知：如图 9，AB=DE，AF=CD，EF＝BC，∠A＝∠D.求证：BF∥CE.

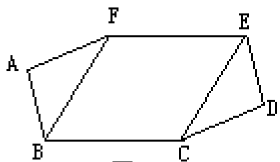


图9

分析：要证明 BF∥CE，只要考虑证明“同位角相等”或“内错角相等”或“同旁内角互补”，这需要根据已知条件和图形特点，先进行比较，再作选择.由于图中没有现成的“同位角”和“内错角”，但添加辅

助线后易得“内错角”（连结 BE 或 CF）；另一方面，如考虑“同旁内角”，则要证“互补”，而由已知条件较易证得ΔABF≌ΔDEC，估计进而证明角“相等”比证明角“互补”容易.所以可优先考虑证明“内错角相等”，即连结 BE，设法证明∠FBE=∠CEB，这又需证明ΔBEF≌ΔEBC，这样问题就解决了.请读者完成这一证明.

例 10　已知：如图 10，在ΔABC 和ΔDBC 中，∠1=∠2，∠3＝∠4，P 是 BC 上任意一点.求证：PA=PD.

分析：要证明 PA=PD，只要证明ΔABP≌ΔDBP.在这两个三角形中，由条件仅知道一边和该边的邻角对应相等，由图形知，还必须证明 AB=BD，这又需证明ΔABC≌ΔDBC.而由∠1＝∠2，∠3=∠4.BC＝BC，问题解决了.请读者完成这一证明.

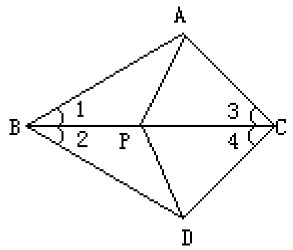


图10

综上所述，运用全等三角形处理几何证明问题，要灵活运用题设条件，结合待证结论，对照图形，从不同角度去试探，不要怕碰壁.