学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

小学数学特长生读本

（六年级）

BOOK

内部资料 非卖品

前　言

当今世界，自然科学、社会科学、数学已发展成为三足鼎立的独立的科学体系。中国青少年在数学学习上的潜能和成就，以及在国际大赛中多次获得世界团体冠军的佳绩，已为世界所公认。在即将进入 21 世纪的关键时期，中国教育的普及与提高被提到战略的高度，得到党和国家的重视。这当中，数学教育与教学质量的提高也就理所当然地成为全国关注的重点科学之一。

当前，教育的重要任务是变应试教育为素质教育。在数学教学上就要使学生在学好《大纲》要求的基础上，更多更快地学习到体现现代数学思想和更高教学背景的“活的数学”，以发展为数学特长，从而带动和推动相关学科的发展。而当前教师和家长倍感棘手的问题是，如何使后进生对学数学有兴趣，使优秀生向更高层次攀登。这就需要一个起转化作用的工具，建造起一个过渡的桥梁；需要一套既能以《全日制九年义务教育数学教学大纲》为依据，结合《初中数学竞赛大纲初订稿》而编辑的适合青少年思维发展特点的读物，使后进生提高兴趣，潜移默化地步入中等或优秀生行列；使优秀生发展思维，形成特长，形成竞赛能力，参与数学竞赛。本套书就是本着这个宗旨编写的，旨在“使您的孩子聪明起来”。

本套书分中学、小学两部分。小学部分为三个分册，中学部分六个分册（教学读本与练习各三分册）。适合青少年学生连续使用。为适应素质教育的要求，例题与习题解答力求深入浅出，使家长和教师能参与辅助工作，使本套书成为学生的良师，教师、家长的益友。

参加本套书编写的都是多年从事数学教学工作的数学教研员和富有教学经验的高级教师，并且都是国家级数学奥林匹克高级或一级教练员，以及北京数学奥林匹克教练员。在数学教学上具有丰富的经验，在培养数学国际竞赛选手上又是富有能力的实践者，可以说本书是这样一个群体的集体智慧与成功经验的小结，也是他们对学生智力转化工作的一个探索和实验。

祝愿本套书的读者，通过学习这套书能够更加聪明起来。、

编者

1996 年 8 月

第一课 分数、小数四则混合运算

分数、小数四则运算是小学算术中的一个重要内容，它对于培养同学们的计算能力起着十分重要的作用．要想掌握好分数、小数的四则混合运算，一要牢记分数、小数的基本运算法则，二要掌握分数与小数的互化．

首先让我们重温以下运算法则．

1．小数加、减法的计算法则：把各数的小数点对齐，按照整数的加、减法的法则计算，在得数里对齐横线上的小数点，点上小数点．

2．小数乘、除法的计算法则：按照整数乘法（或除法）的法则计算出积（或商），对于乘法要看乘数和被乘数里共有几位小数，就从积的右边数出几位、点上小数点，不够时补零．对于除法，商里的小数点要和被除数的小数点对齐．

3．分数的加、减法运算法则：同分母的分数相加减，只要把分子相加减，分母不变；异分母的分数相加减，要先通分（找出分母的最小公倍数，分子分母同时扩大相同的倍数，使不同的分母变成同分母，然后按同分母分数进行运算；带分数相加减，把分数部分和整数部分分别相加减，然后将所得结果合并．

4．分数的乘法运算法则：用分子相乘积作分子，分母相乘积作分母．带分数相乘时，先将带分数化成假分数，然后相乘．

5．分数的除法运算法则：将作为除数的分数的分子、分母相互换位，化成乘法来做．

其次，分数的约分也是分数运算的重要一环，掌握好约分能提高同学们的运算速度及准确性．约分的技巧主要是掌握整除的性质．

（1）一个数的个位数字能被 2（或 5）整除，那么这个数必是 2（或 5）的倍数．

例如：62，234，135，680．

（2）一个数末两位能被 4（或 25）整除，这个数必是 4（或 25）的倍数．

例如：264，356 能被 4 整除

225，450，能被 25 整除

（3）一个数的各位上的数字之和能被 3（或 9）整除，这个数必是 3（或 9）的倍数．

例如：174，402 能被 3 整除

729，4203 能被 9 整除

（4）一个数隔位数相加所得的两个和数，以大减小，差若是 11 的倍数，则此数必是 11 倍数．

例如：32736 是 11 的倍数，因为

3＋7＋6-（2＋3）=16-5=11

又：3944545 是 11 的倍数，因为

3+4+5+5-（9+4＋4）=17-17=0

（5）一个数末三位数能被 8（或 125）整除，此数必是 8（或 125）的倍数．

例如：3024，214872 是 8 的倍数

1000000，234750 是 125 的倍数

掌握以上整除的性质对分数的约分是很有利的．

分数与小数的互化在它们的四则运算中占有十分重要的地位．要根据题目的需要将分数化成小数或小数化成分数．互化一般原则是：

（1）分数能化成有限小数的，化成小数计算比较简单，分数不能化成有限小数时，则把小数化成分数再计算．

（2）再进行分数、小数混合计算时，题目含分数或小数的哪个个数多，就保留哪个，把个数少的转化成个数多的那种形式．特别是一些简单的分数和小数，要非常熟练地掌握它们的互化，做到一看便知．

例如：$0.2=\frac{1}{5}$，$0.5=\frac{1}{2}$，$\frac{2}{5}=0.4$，$\frac{3}{10}=0.3$，$\frac{3}{4}=0.75$，$6.25=6\frac{1}{4}$，$0.125=\frac{1}{8}$等等．

对于般的分数化小数，用分子除以分母即可得到结果．小数化分数，只需把原小数去掉小数点儿以后作为分子，原来的小数，小数点后有几位，就在 1 后面添几个零，作为分母，然后通分化成最简结果即可．在互化时要细心，互化的错误会导致整个题目的错误．

例1　计算$8.4\times\frac{1}{4}-\frac{16}{25}\div\frac{4}{15}+3\frac{1}{3}\times0.9$

分析　题目出现分数的个数大于出现的小数的个数，所以可考虑将小数化为分数进行运算，注意分数作为除数时，分子与分母的位置要互换后做乘数．

解　原式$=\frac{84}{10}\times\frac{1}{4}-\frac{16}{25}\times\frac{15}{4}+\frac{10}{3}\times\frac{9}{10}$

$=\frac{21}{10}-\frac{12}{5}+3=3+\frac{21}{10}-\frac{24}{10}$

$=2\frac{31}{10}-\frac{24}{10}=2\frac{7}{10}$

例2 计算$1.5\times[\frac{19}{21}\div6\frac{1}{3}\times(0.7-0.66)]\times4.9$

分析　此题分数化为小数可能会简单一些．因为分数少，所以可考虑分数化小数，但要注意，不能化成有限小数，所以还采取小数化分数的方法．

解原式$=1\frac{1}{2}[\frac{19}{21}\div\frac{19}{3}\times(\frac{7}{10}-\frac{33}{50})]\times\frac{49}{10}$

$=\frac{3}{2}[\frac{19}{21}\times\frac{3}{19}\times\frac{1}{25}]\times\frac{49}{10}$

$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{25}\times\frac{49}{10}=\frac{3}{2}[\frac{1}{7}\times\frac{1}{25}]\times\frac{49}{10}$

$=\frac{21}{500}$

例3 计算$(3.91+3\frac{3}{7}+6.09+6\frac{4}{7})\times(2\frac{1}{8}-1.125)+(1\div\frac{2}{3}-1.5)\times6.04$

分析　此题目属于形式较复杂形题目，且分数与小数在题目中出现的个数基本一样，所以不要急于进行分数小数的互化，先考虑能否有简便计算方法．

如第一个括号中$3.91+6.09=10$，第二个括号中有$\frac{1}{8}=0.125$，第三个括号中有$1\div\frac{2}{3}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$

解 原式$=$ $(3.91+6.09+3\frac{3}{7}+6\frac{4}{7})\times(2.125-1.125)+(\frac{3}{2}-\frac{3}{2})\times6.04$

$=(10+10)\times1+0\times6.04=20$

例4 计算$[1000\times(0.675-\frac{3}{8})+2\frac{1}{4}\times2\frac{7}{9}]\div6.25$

分析　先不要着急分数小数的互化，注意乘法分配律的应用．

解 原式$=[1000\times(0.675-\frac{3}{8})\times\frac{9}{4}\times\frac{25}{9}]\div6.25$

$=[(675-125\times3)+\frac{25}{4}]\div6.25$

$=(300+\frac{25}{4})\times\frac{4}{25}=48+1=49$

例5 计算$23.3\times(2-75\%)+56\times1\frac{1}{4}+(1+25\%)\times28.7$

分析　因为题目中有分数，有小数还有百分数，所以要考虑它们之间的互化，对于这道题目而言，将分数和百分数都化为小数比较容易计算，但要注意运算顺序及运算的技巧，如$56\times1\frac{1}{4}$可先约分再化小数．

解 原式$=23.3\times(2-0.75)+56\times\frac{5}{4}+(1+0.25)\times28.7$

$=23.3\times1.25+14\times5+1.25\times28.7$

$=1.25(23.3+28.7)+70$

$=1.25\times52+70$

$=65+70=135$

例6 解关于x的方程 $14\frac{1}{5}-(\frac{2}{5}x+2.4)=10.8$

分析　此题虽然是一道关于解 x 方程的题目，但是在解 x 的过程中还是要进行分数小数的四则混合运算．因为题目中的两个分数$14\frac{1}{5}$与$\frac{2}{5}$都可以化为有限小数，所以此题采用分数化小数的方法进行计算．

解　原方程可化为：$14.2-(0.4x+2.4)=10.8$

方程两边同减 10.8 得：

$3.4-(0.4x+2.4)=0$

去括号得 3.4—0.4x—2.4=0

将上式整理得：0.4x=1

∴x=1÷0.4=2.5

例 7 某小学五年级四个班为希望工程捐款，五（1）班捐款 150.25 元，五（2）班比五（1）班多捐了 15.45 元，五（3）班捐款是五（2）班捐款总数的$\frac{4}{5}$，五年级共捐款 612.21 元，求五（4）班捐款多少元？

分析 这是一道应用题，要根据题目中所给的条件列出算式，计算时还会遇到分数、小数的四则混合运算，所以计算时不但要细心还要尽量使用简便算法．

解 依题意五（4）班的捐款数应等于全年级四个班的捐款总数减去其他三个班一共捐款的钱数．所以可列算式如下：

$612.21-[150.25+150.25+15.45+(150.25+15.45)\times\frac{4}{5}]$

$=612.21-[150.25\times2+15.45+150.25\times\frac{4}{5}+15.45\times\frac{4}{5}]$

$=612.21-[150.25\times(2+\frac{4}{5})+15.45\times(1+\frac{4}{5})]$

=612.21-［150.25×（2＋0.8）＋15.45×（1＋0.8）］

=612.12-（150.25×2.8＋15.45×1.8）

=612.21-（420.7＋27.81）

=612.21—448.51=163.70（元）

答：五年级（4）班共捐款 163.70 元．

例 8 一个个体运输户承包运输 20000 只玻璃管，每运输 100 只可得运输费 0.80 元，如果损坏一只不但不给运输费还要贴款 0.20 元，这个个体运输户共得运输费总数的 97.4%，求他共损坏了几只玻璃管？

分析 运 100 只玻璃管可得运费 0.80 元，每只运费是：0.80÷100=0.008（元），如果全部运到可得运费：0.008×20000=160（元），而实际运费是 160×97.4%（元），这是在运输过程中打碎了玻璃管的缘故，打碎一只玻璃管不但不给运输费 0.008 元，还要赔偿 0.20 元，所以打碎一只玻璃管少得 0.20＋0.008=0.208（元），那么 160-160×97.4%中有多少个 0.208 元就是打碎玻璃管的只数．计算方法要采用百分数化小数的方法．

解（0.80×20000—0.80×20000×97.4%）÷（0.80÷100＋0.20）

=（160.00—160.00×0.974）÷（0.008+0.20）

=（160.00—155.84）÷0.208

=4.16÷0.208=20（只）

答：此个体户共损坏 20 只玻璃管．

练习题一

1．计算：

（1） $(2.5+\frac{8}{15}\div\frac{2}{3}\div0.4)\div\frac{3}{5}$

（2）$\left(3\frac{3}{5}+1\frac{5}{7}\right)\times 11\frac{2}{3}\div\left(1\frac{2}{9}-1\frac{1}{18}\right)$

（3）$4\frac{1}{2}\div\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\times 1\frac{1}{5}\right]\div 3\%-(3.14\times 36)\div(3.14\times 0.36)$

（4）$\left[\left(5\frac{7}{12}-3\frac{17}{36}\right)\div(1.9-0.5)\right]\times\frac{9}{13}$

（5）$\left(6.5-2\frac{3}{8}\right)\div\left(1-\frac{1}{4}\right)\div 2.75-75\%\times 1\frac{1}{3}$

2．计算下列各题，能简算的要简算

（1）$\left(4.92+6\frac{2}{7}+2.08+4\frac{5}{7}\right)\times\left(2\frac{1}{8}-0.125+1\right)$

（2）$3\frac{1}{8}\div\left(11\frac{1}{2}-1.625-2\frac{3}{8}\right)-\frac{1}{24}$

（3）$\left(2\frac{2}{9}\times\frac{4}{5}+2\frac{2}{9}\times 6.2-5.8\times 2\frac{2}{9}-\frac{1}{5}\times 2\frac{2}{9}\right)\times\frac{9}{20}$

3．解下列关于 x 的方程

（1）$\frac{x}{8}+\frac{1}{3}\times\left(x-151\frac{1}{2}\right)=2.4\times 5+3\frac{1}{2}$

（2）$13x-\left(4\frac{1}{2}x+2.9\right)=3.4\times 0.5+0.5x$

4．某小学购买新书的总数是1248册，其中科技书占$\frac{1}{3}$，故事书是科技书总数的 75%，剩下的书是各类杂志，问杂志占购买科技书的百分之几？

5．某小学六年级共有学生156人，选出男生的$\frac{1}{11}$和女生的12名，剩下的男生人数是女生人数的二倍，求这个小学六年级男女同学各有多少名？

第二课 繁分数

我们已经学习过分数，如：$3\div 7=\frac{3}{7}$，$5\div 11=\frac{5}{11}$，即两个数相除，其中被除数相当于分数的分子，除数相当于分数的分母，所以 $\frac{3}{7}\div 5$可以写成$\frac{\frac{3}{7}}{5}$，$2\div$（$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}$）可以写成$\frac{2}{\frac{3}{5}+\frac{2}{7}}$，（$\frac{3}{11}+\frac{1}{2}$）$\div$（$\frac{5}{8}+\frac{1}{3}$）可以写成$\frac{\frac{3}{11}+\frac{1}{2}}{\frac{5}{8}+\frac{1}{3}}$．由以上三式我们看到这些分数的分子或分母中又含有分数，甚至分子与分母中都含有分数，这样的分数我们称之为繁分数．在繁分数中，用较长的分数线分出分子部分和分母部分，这较长的分数线我们称它为主分数线．

繁分数的计算并不难，关键要掌握好分数运算的基本方法．如：分数的运算法则，约分的技巧及整除的性质等，这样就能化繁为简，很快地计算出来．其中要特别注意分数基本性质的应用，即：分子分母同时乘以同一个不为零的数，分数的值不变．即$\frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}$（其中$b\neq 0$，$c\neq 0$）。利用分数的基本性质可以约去分子部分与分母部分上分数的分母，从而达到化简繁分数的目的．

例1 计算$\frac{5-\frac{8-1\frac{2}{3}}{3}}{1+\frac{1}{3}\times 2\frac{10}{11}}$

分析一 此题可根据分数运算法则分别计算出分子和分母，然后用分子除以分母完成计算．

解（一）

$$原式=\frac{5-\frac{7\frac{3}{3}-1\frac{2}{3}}{3}}{1+\frac{1}{3}\times\frac{32}{11}}=\frac{\frac{15-6\frac{1}{3}}{3}}{1+\frac{32}{33}}$$

$$=\frac{\frac{14\frac{3}{3}-6\frac{1}{3}}{3}}{\frac{65}{33}}=\frac{\frac{8\frac{2}{3}}{3}}{\frac{65}{33}}=\frac{8\frac{2}{3}}{3}\div\frac{65}{33}$$

$$=\frac{26}{9}\times\frac{33}{65}=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$$

分析二 此题还可以用另一种方法来解，即分子分母同时扩大 3 倍，去掉分子中的分母，逐步达到化简的目的．

解（二）

$$\text{原式}=\frac{3\times\left(\dfrac{8-1\frac{2}{3}}{3}\right)}{3\times\left(1+\dfrac{1}{3}\times2\dfrac{10}{11}\right)}=\frac{15-\left(8-1\frac{2}{3}\right)}{3+2\dfrac{10}{11}}$$

$$=\frac{7+1\frac{2}{3}}{5\frac{10}{11}}=8\frac{2}{3}\div5\frac{10}{11}=\frac{26}{3}\times\frac{11}{65}=\frac{22}{15}=1\frac{7}{15}$$

方法（二）的优点是将繁分数中的数值减小，从而更便于计算，由此达到化简的目的．

例2 计算 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1996}}}}$

分析 这是一道分母含有分数并且只有加法运算的繁分数计算题，所以只需要从分母开始逐次通分化简即可．

$$\text{解原式}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{1997}{1996}}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1996}{1997}}}$$

$$=\frac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{1997+1996}{1997}}}=\frac{1}{1+\dfrac{1997}{3993}}=\frac{1}{\dfrac{3993+1997}{3993}}$$

$$=\frac{3993}{3993+1997}=\frac{3993}{5990}$$

这样的繁分数计算是自下而上的顺序逐步化简为普通分数，计算要心细．

例3 计算：$\dfrac{4\frac{2}{5}\times2\frac{1}{10}\times0.54\times1\frac{1}{10}}{\dfrac{5\frac{2}{5}\times121\%\times4\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}}{0.125\times4}}$

分析 此题是分数、小数的混合运算，其中分子又是分数形式，所以又构成了繁分数的运算，这种运算可先进行小数运算，再进行分数运算，特别是将分数化为小数后，注意分子分母同时扩大 100000 倍，这样分子分母化成整数后约分就容易了．

解原式 $=\dfrac{\dfrac{4.4\times2.1\times0.54\times1.1}{5.4\times1.21\times4.2\times0.4}}{0.5}=\dfrac{\dfrac{44\times21\times54\times11}{54\times121\times42\times4}}{0.5}$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{0.5}=\frac{0.5}{0.5}=1$$

此题中虽然含有的分数个数多于小数个数，但显然把分数化为小数计算起来更方便，但是要把小数化为分数此题的运算难度就加大了，所以采用什么方法要因题而异.

例4计算 $\dfrac{8\frac{16}{31}\times\frac{5}{102}\div\frac{5}{17}\times59}{\frac{33}{512}\div\frac{3}{236}\times\frac{32}{93}}$

分析 这道繁分数计算题中只含有乘除法运算，并且分子分母都含有分数，但它与例 3 有不同之处，所以采用的计算方法也不同，我们不必将每个分数化成小数，因为其中有的分数化成小数是无限小数，所以我们保留分数进行计算，特别要注意采取先约分，再计算，再约分的方法.

解原式 $=\dfrac{\frac{264}{31}\times\frac{5}{102}\times\frac{17}{25}\times59}{\frac{33}{512}\times\frac{236}{3}\times\frac{32}{93}}=\dfrac{\dfrac{264\times5\times17\times59}{31\times102\times25}}{\dfrac{33\times236\times32}{512\times3\times93}}$

$$=\frac{264\times5\times17\times59}{31\times102\times25}\times\frac{512\times3\times93}{33\times236\times32}$$

此时即可进行约分；264 与 102 它们都是 3 的倍数，5 与 25 它们是 5 的倍数，512 与 236 它们都是 4 的倍数，33 与 3，31 与 93 都可以约分. 这样有

原式 $=\dfrac{88\times17\times59}{34\times5}\times\dfrac{128\times3}{11\times59\times32}=\dfrac{32\times3}{2\times5}=\dfrac{48}{5}=9\dfrac{3}{5}$

例5 计算 $\dfrac{\frac{7}{18}\times4\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{13\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}\div\frac{5}{16}}\div2\dfrac{7}{8}$

分析 此题是一道包括加、减、乘、除综合运算的繁分数计算题，所以计算时要细心观察，注意简便算法的应用.

解原式 $=\dfrac{\frac{7}{18}\times\frac{9}{2}+\frac{1}{6}}{\frac{40}{3}-\frac{15}{4}\times\frac{16}{5}}\div\dfrac{23}{8}=\dfrac{\frac{7}{4}+\frac{1}{6}}{\frac{40}{3}-12}\div\dfrac{23}{8}$

$$=\frac{12\times\left(\frac{7}{4}+\frac{1}{6}\right)}{12\times\left(\frac{40}{3}-12\right)}\div\frac{23}{8}=\frac{21+2}{160-144}\div\frac{23}{8}$$

$$=\frac{23}{16}\times\frac{8}{23}=\frac{1}{2}$$

例6 **计算** $\dfrac{\{[1\frac{1}{10}-\left(0.75+\frac{7}{20}\right)]\div 75\%+\frac{4}{5}\}\times\frac{5}{7}}{\left(\frac{22}{35}+1\frac{4}{7}\times\frac{1}{5}\right)\div 6\frac{3}{5}}$

分析 此题是比较复杂的一道题，不但包括了加、减、乘、除各种运算，分子中还有层层括号，所以我们在进行计算时要格外细心，并注意在运算过程中使用简便的算法．

解 原式 $=\dfrac{[\left(\frac{11}{10}-\frac{75}{100}-\frac{7}{20}\right)\times\frac{100}{75}+\frac{4}{5}]\times\frac{5}{7}}{\left(\frac{22}{35}+\frac{11}{7}\times\frac{1}{5}\right)\div\frac{33}{5}}$

$$=\frac{[\left(\frac{11}{10}-\frac{3}{4}+\frac{7}{20}\right)\times\frac{4}{3}+\frac{4}{5}]\times\frac{5}{7}}{\left(\frac{22}{35}+\frac{11}{35}\right)\times\frac{5}{33}}$$

$$=\frac{\left(\frac{22}{15}-1-\frac{7}{15}+\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{7}}{\frac{2}{21}+\frac{1}{21}}$$

$$=\frac{\left(\frac{15}{15}-1+\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{7}}{\frac{3}{21}}=\frac{4}{5}\times\frac{5}{7}\times 7=4$$

例 7 化简繁分数：

$$\frac{\frac{1}{2}}{1\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}}$$

分析 此题分母虽然项数多比较复杂，但它有一定规律可循．若用 n 代表某一自然数，则 n＋1 就是比 n 大 1 的自然数，因为

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n\times(n+1)}$ **即** $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots\cdots\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=$

$\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$**，这种把一项折成两项的方法叫做“裂项”法，此题中分母就是采取裂项的方法求和，然后再和分子继续运算，得出最后的结果．**

解 原式 $=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}$

$$=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}=\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}=\frac{3}{5}$$

例 8 化简繁分数：

$$\dfrac{12}{\frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\frac{1}{9\times13}+\frac{1}{13\times17}+\frac{1}{17\times21}+\frac{1}{21\times25}}$$

分析 此题与例 7 类似，分母出现多个分数，且有规律可循，分母中的每个分数的分母都是两个整数相乘，且这两个整数之差为 4，如 $5—1=4$，$9-5=4\cdots\cdots25-21=4$，显然 $1\times\frac{1}{5}\neq1-\frac{1}{5}$，但是 $1\times\frac{1}{5}=\frac{1}{4}$（$1-\frac{1}{5}$），$\frac{1}{5\times9}=\frac{1}{4}(\frac{1}{5}-\frac{1}{9})\Lambda\Lambda\ \frac{1}{21\times25}=\frac{1}{4}(\frac{1}{21}-\frac{1}{25})$，那么此题仍然可用

裂项的方法求和.

解

原式 $=\dfrac{12}{\frac{1}{4}\ (1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{21}+\frac{1}{21}-\frac{1}{25}}$

$$=\dfrac{12}{\frac{1}{4}\ (1-\frac{1}{25})}=\dfrac{12}{\frac{24}{4\times25}}=12\times\frac{25}{6}=50$$

说明：这类用“裂项”的方法求和有没有一般规律可循呢？我们推推看.

设 n 是某一自然数，K 也为某一自然数，则 n＋k 是比 n 大 k 的自然数，从而 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}=\frac{n+k-n}{n\times\ (n+k)}=\frac{k}{n\times\ (n+k)}=\frac{1}{k}[\frac{1}{n\times(n+k)}]$.

所以这类题目是有规律可循的.

例 9 化简繁分数：

$$\dfrac{1}{\frac{1}{2\times5}+3\frac{1}{5\times8}+5\frac{1}{8\times11}+9\frac{1}{11\times14}+11\frac{1}{14\times17}}$$

分析 由例8我们已有经验了，$\frac{1}{2\times5}=\frac{1}{3}\times$（$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}$）.

但分母中还有 4 个代分数，若把代分数化成假分数进行计算，那么就不能采用“裂项”的方法对分母进行求和，必然会给运算带来麻烦，所以我们可采取把代分数化成整数部分和分数部分，分别进行求和计算.

解

原式 $=\dfrac{1}{(3+5+9+11)\ +\ \left(\dfrac{1}{2\times5}+\dfrac{1}{5\times8}+\dfrac{1}{8\times11}+\dfrac{1}{11\times14}+\dfrac{1}{14\times17}\right)}$

$$=\frac{1}{28+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{17}\right)}$$

$$=\frac{1}{28+\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{17}\right)}=\frac{1}{28+\frac{1}{3}\times\frac{15}{34}}=\frac{1}{28+\frac{5}{34}}$$

$$=\frac{34}{28\times34+5}=\frac{34}{957}$$

以上几道例题说明了繁分数的计算题实质上就是运用各种计算方法将繁分数化成最简分数．但是，不论做什么题目都不能生搬硬套某种方法，而应因题而异，找出最佳方法．也就是说一定要灵活运用所学规律、法则．这样才能真正掌握解题要领．

练习题二

1．将下列各式化成最简分数：

(1) $3-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{11}}}$　　(2) $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$

(3) $\cfrac{5}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2}}}}}$

2．化简下列各繁分数：

(1) $\dfrac{2.5\times\frac{4}{5}+1.8\div1\frac{4}{5}}{0.25+\frac{3}{4}}$　　(2) $\dfrac{1\frac{4}{11}-\frac{1}{33}}{0.5+9\frac{5}{7}+1\frac{1}{2}+\frac{2}{7}}$

(3) $\dfrac{\frac{7}{16}\times2\frac{2}{3}+\frac{1}{7}}{12\frac{1}{3}-3\frac{3}{4}\div\frac{5}{14}}\times1\frac{10}{11}$

(4) $\dfrac{13\times11\frac{4}{5}-11.8\times12}{\left(\frac{2}{3}-0.125\right)\times24}\div2.5$

3．计算下列各题：

（1） $$\frac{3\frac{5}{6}-2\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+5\frac{1}{2}\div1\frac{2}{9}}{[6\frac{1}{2}\times.\left(3.25+2\frac{3}{4}\right)]\times\frac{1}{6}}\times5\frac{1}{2}$$

（2） $$\frac{\left(10.75-4\frac{11}{12}\right)\times2\frac{7}{11}}{\left(1.125+\frac{1}{12}\right)\div\left(2.25\div10\frac{10}{11}\right)}$$

（3） $$\frac{4\frac{5}{7}+3\frac{5}{6}+5\frac{2}{7}+5\frac{1}{6}}{18\frac{1}{4}\times16\frac{8}{9}+16\frac{8}{9}+17\frac{1}{4}}+\frac{\left(1\frac{1}{20}+4.1\right)\times\frac{1}{10}}{3.5+4\frac{2}{3}+2\frac{2}{15}}$$

4．化简下列繁分数：

（1） $$\frac{1}{\frac{1}{2\times4}+\frac{1}{4\times6}+\frac{1}{6\times8}+\frac{1}{8\times10}+\frac{1}{10\times12}\cdots\cdots+\frac{1}{98\times100}}$$

（2） $$\frac{3}{1\frac{1}{6}+3\frac{1}{6\times11}+5\frac{1}{11\times16}+7\frac{1}{16\times21}+9\frac{1}{21\times26}}$$

第三课 [x]与{x}

在教学竞赛中，经常会遇到含有符号 [x] 和 {x} 的题目，那么[x]和{x}各表示什么意思呢？它们具有哪些特性，在我们解决有关的数学问题中有哪些应用呢？在这一课中，我们来作一些初步的探讨．

一、基本概念

1．定义：对于实数 x，[x]表示不大于 x 的最大整数；{x}表示 x 的小数部分．

例如：$[3.7]=3$；$\{3.7\}=0.7$；$[2]=2$；$\{2\}=0$；$\{\frac{3}{7}\}=\frac{3}{4}$

2．性质

（1）对任何实数 x 有：x=[x]＋ {x}

例如：2.2＝ [2．2] ＋ {2.2} ＝2＋0.2

（2）当 0≤x＜1 时，有[x]=0，反之，若[x]=0，则有 0≤x＜1．

（3）对任何实数 x，有[x]≤x＜ [x] ＋1，x-1＜ [x] ≤x．

例如： [3.8] ≤3.8＜ [3.8] +1

（4）若 [x＋y] =x，则 x 为整数，并且 0≤y＜1．

（5）若 n 为整数，x 为实数，则 {x＋n} = {x} ； [x＋n] [x] ＋ n．

（6）x、y 为任意实数，若{x}＋{y}=1，则 x+y=整数．

（7）x、y 为任意实数，若 x=y，则有[x]=[y]；若 x＜y，则[x]≤[y]；若[x]＜[y]，则 x＜y．

注意：

①由 x＜y 不一定有[x]＜[y]．

例如：4.2＜4.7，但[4.2]=[4.7]=4

②由[x]≤[y]也不能得到 x≤y 的结论，这是因为当[x]=[y]时，x、y 之间的关系有三种可能情况．例如：[4.2]=[4.5]，此时 4.2＜4.5；[4.3]=[4.3]此时 4.3=4.3；[5.2]=[5]，但 5.2＞5．

（8）对任意实数 x、y 有：

[x]+[y]≤[x+y]≤[x]+[y]+1， {x} + {y} ≥ {x+y} ．

例如：[4.3]+[4.8]＜[4.3+4.8]≤[4.3]+[4.8]+1

{4.3} + {4.8} ＞ {4.3+4.8}

（9）在自然数列 1，2，3，…，n 中，能被自然数 m 整除的数共有$[\frac{n}{m}]$个．

推论 1：在自然数列中，被m^p整除的数共有$\left[\frac{n}{m^p}\right]$个．

推论 2：n！（读作“n 的阶乘”，n！=1×2×3×…×n）中，质因数 m 出现的个数（质因数分解式中 m 的最高次幂指数）等于：

$\left[\frac{n}{m}\right]+\left[\frac{n}{m^2}\right]+\cdots\left[\frac{n}{m^p}\right]$，其中$m^p\le n$，而$m^{p+1}\rangle n$．

利用[x]的定义以及以上性质，我们可以解决一些与[x] 有关的问

题.

二、例题分析

例 1 比较大小

（1）[7.23]和[7.35]　（2）$[3.31]$和$3\frac{1}{3}$

（3）$\left[\frac{10}{3}\right]$和$\left[\frac{16}{5}\right]$

解（1）因为[7.23]=7，[7.35]=7

所以[7.23]=[7.35]

（2）因为$[3.21]=3$，$\left[3\frac{1}{3}\right]=3$

所以$[3.21]=\left[3\frac{1}{3}\right]$

（3）$\because\left[\frac{10}{3}\right]=3$，$\left[\frac{16}{5}\right]=3$

$\therefore\left[\frac{10}{3}\right]=\left[\frac{16}{5}\right]=3$

例2 求$\left[\frac{3\times1}{11}\right]+\left[\frac{3\times2}{11}\right]+\cdots+\left[\frac{3\times10}{11}\right]$的值

解 应用高斯求和法

$$\left[\frac{3\times1}{11}\right]+\left[\frac{3\times10}{11}\right]=\frac{3\times1}{11}+\frac{3\times10}{11}-\{\frac{3\times1}{11}\}-\{\frac{3\times10}{11}\}$$

$$=3-\{\frac{3\times1}{11}\}-\{\frac{3\times10}{11}\}$$

$\because\left[\frac{3\times1}{11}\right]$，$\left[\frac{3\times10}{11}\right]$，$3$均为整数.

又$1>\{\frac{3\times1}{11}\}\geq0$，$1>\{\frac{3\times10}{11}\}\geq0$且$\frac{3\times1}{11}$和$\frac{3\times10}{11}$都不为整数。

$\therefore\{\frac{3\times1}{11}\}+\{\frac{3\times10}{11}\}=1$

$\therefore\left[\frac{3\times1}{11}\right]+\left[\frac{3\times10}{11}\right]=3-1=2$

∴原式=2×5=10

例 3 如果[x]=4，[y]=1，[z]=2，求[x+y-z]的值．解 x=[x]+｛x｝，y=[y]+｛y｝，z=[z]+｛z｝∴[x+y-z]=[x]+[y]-[z]+[｛x｝+｛y｝-｛z｝]=3+[｛x｝+｛y｝-｛z｝]

∵0≤｛x｝＜1，0≤｛y｝＜1，0≤｛z｝＜1

∴-1≤｛x｝+｛y｝-｛z｝＜2

故[｛x｝+｛y｝-｛z｝]=-1 或 0 或 1

∴[x+y-z]=2 或 3 或 4

例 4 求 1996！的质因数分解式中 5 的个数．

解：由推论2及$5^4<1996<5^5$ 1996！

1996！的质因数分解式中 5 的个数为

$$\left[\frac{1996}{5}\right]+\left[\frac{1996}{5^5}\right]+\left[\frac{1996}{5^3}\right]+\left[\frac{1996}{5^4}\right]$$

=399+79+15+3=496

∴1996！的质因数分解式中 5 的个数为 496 个．例 5 若 $1\times2\times3\times4\times\cdots\times99\times100=12^n\cdot m$

其中 m 为自然数，n 为使等式成立的最大自然数，求证：m 能被 2 整除，但不能被 3 整除．

证明：由推论 2 知：在 100！的质因数分解中，因子 2 有：

$$\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\left[\frac{100}{2^4}\right]+\left[\frac{100}{2^5}\right]+\left[\frac{100}{2^6}\right]$$

=50+25+12+6+3+1=97（个）

因子 3 有

$$\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{100}{3^2}\right]+\left[\frac{100}{3^3}\right]+\left[\frac{100}{3^4}\right]$$

=33+11+3+1=48（个）

$\therefore 1\times2\times3\times\cdots\times100=2^{97}\times3^{48}\cdot P=12^{48}\cdot$（2p）

因为 $2|2p$，$3\nmid 2p$

所以 m 能被 2 整除，但不能被 3 整除．

例 6 在一个 6×6 个方格组成的边长为 6 的正方形盘内，放一个半径为 3 的圆，若把圆周经过的所有小方格的圆内部分记为 S_1，把圆周经过的所有小方格的圆外部分记为 S_2，

求：$\left[\frac{S_1}{S_2}\right]$

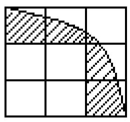


图3—1

解 根据正方形棋盘的对称性，只需考虑它的四分之一部分即可，如图 3—1

设这$\frac{1}{4}$圆周经过的所有小方格的圆内部分的面积之和为S'_1，

圆外部分的面积之和为 S'_2，则：

$S'_1=\frac{9}{4}\pi-4$，$S'_2=9-\frac{9}{4}\pi$

所以$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4S'_1}{4S''_2}=\frac{\frac{9}{4}\pi-4}{9-\frac{9}{4}\pi}\approx\frac{3.07}{1.93}$

$\therefore \left[\frac{S_1}{S_2}\right]=1$

含[x]的方程由于[x]的特殊性，使它与普通方程的解法不一样，一般地，是通过[x]的定义及性质来求解，有时需要用一些特殊的方法求解，有时还要通过讨论来求解．

例 7 求方程 3x+4｛x｝=5｛x｝的解

解 显然当 x=0 时，方程成立．

当 x≠0 时，

∵x=[x]+｛x｝，所以

3[x]+3｛x｝+4｛x｝=5[x]

7｛x｝=2[x] $0<\{x\}=\frac{2}{7}[x]<1$

从而有

$[x]=1$，$\{x\}=\frac{2}{7}$

所以方程的解为$x=0$或$\frac{7}{9}$

例 8 求满足[3.24x]=[3.24]x 的自然数 x

解[3.24x]=[3.24]x=3x，即

3x≤3.24x＜3x+1

∴0.24x＜1

$x<\frac{100}{24}=\frac{25}{6}$

因此，满足要求的自然数有 4 个：1，2，3，4．说明：本题的解法可能多种多样，但主导思想都是设法去掉[]，利用[x]的定义和性质，蒋含有整记号的方程转化为一般的不等式或不等式组来解决．

例 9 若 x 为实数，n 为自然数，求证：

$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots\left[r+\frac{n-1}{n}\right]+[nx]$

证明：设 x=[x]+r（0≤r＜1），则

[nx]=[n[x]+nr]=n[x]+[nr]

$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$

$[[x]+r]+\left[[x]+r+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[[x]+r+\frac{n-1}{n}\right]$

只需证：$[r]+\left[r+\frac{1}{n}\right]+\left[r+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[r+\frac{n-1}{n}\right]=[nr]$①

$\because 0\le r<1$，$0\le\frac{n-1}{n}<1$

$\therefore 0\le r+\frac{n-1}{n}<2$

（1）若$0\le r+\frac{n-1}{n}<1$，则$0\le nr<1$，此时①式的左$=0$，右$=0$，

①式成立．

（2）若$1\leq r+\frac{n-1}{n}<2$，则必存在$R\leq n$，使得$r+\frac{R-1}{n}<1\leq V+\frac{R}{n}$成立．

∴nr+R-1＜n≤nr+R

∴-R≤nr-n＜1-R

∴-R=[nr-n]=[nr]-n

$\therefore [r]+\left[r+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[r+\frac{R-1}{n}\right]=0$

而$\left[r+\frac{R}{n}\right]+\left[r+\frac{R+1}{n}\right]+\cdots+\left[r+\frac{n-1}{n}\right]$为$n-R$项，等于[nr]．∴①式成立，故原命题得证．

练习题三

1. 已知$y=\left[\frac{15}{2x}\right]\cdot\left[\frac{2x}{15}\right]$，且$x>0$，求y值的个数．

2. 求使$\frac{n^2}{4}$为质数的自然数n的值．

3．解方程 3x+5[x]-50=0

4．求 1996！中末尾 0 的个数

5．设 x 是满足[4.05x]=[4.05]x 的最大自然数，求 x！的质因数分解式中 2 的个数．

第四课 循环

小数是十进制分数的另一种表现形式，比较分数和小数大小时，经常遇到分数与小数的互化问题．由于“任何一个整数都能分解成若干个质数的积的形式”，我们把分数化为小数，可在分母的质因数分解上分类讨论．

结论 1，一个最简分数，如果分母中除了 2 和 5 以外，不含其它质因数，则这个分数必化为有限小数且在这个有限小数中，小数部分的位数等于分母中含 2，5 因数个数的最大数．

例如$\frac{1}{2}=0.5$．分母中含有一个2，小数部分的位数是1．

$\frac{3}{20}=0.15$．分母中含2、5个数的最大数是2（$20=2^2\times5$），小数部分的位数也是 2．

$\frac{5}{40}=0.125$．分母中含2、5个数的最大数是3（$40=2^3\times5$），小数部分的位数也是 3．

结论 2，一个最简分数，如果分母中只能分解出 2 和 5 以外的质因数，则这个分数必化成纯循环小数，这个纯循环小数的循环节的最少位数等于能被分母整除的、由 9 构成的数中最小数的 9 的个数．

例如$\frac{2}{3}=0.\dot{6}$．循环节最少位数是1位，分母3能整除由9构成数的最小数是 9，只含 1 个 9．

$\frac{4}{7}=0.\dot{5}7142\dot{8}$，循环节最小位数是$6$位，分母$7$能整除由$9$构成数的最小数是 999999，含有 6 个 9．

$\frac{5}{11}=0.\dot{4}\dot{5}$ 循环节中最少位数是2位，分母11能整除由9构成数的最小数是 99，含有 2 个 9．

结论 3，一个最简分数的分母中，如果既有 2，5 这样的因数，又含有 2，5 以外的质因数则这个分数定能化成混循环小数，它的不循环部分的数字个数等于分母因数中 2，5 个数较多一个的个数，循环节的最小位数等于分母中除 2，5 以外因数积能整除的 9 构成数字中最小数中含 9 的个数．

例如$\frac{1}{6}=0.1\dot{6}$（$6=2\times3$）不循环的数字有1个，循环节最少位是 1 位，分母中只有一个 2，其余因数 3 能整除的最小 9 构成的数是 9 且只有一个 9．

$\frac{1}{30}=0.0\dot{3}$（$30=5\times2\times3$）不循环的数字有1个，循环节最少位数是 1 位，而分母中含 2，5 各 1 个最大的也是 1；2，5 以外的因数是 3，能整除 9 构成数中最小数 9，只含 1 个 9．

$\frac{5}{24}=0.208\dot{3}$ （$24=2^3\times3$）**不循环的数字有**3**个，循环节最少位是 1 位，分母中含因数 2，5 的最大数是 3，含 2，5，以外因数 3，能整除 9 构成数中最小数 9，只含 1 个 9．**

$\frac{2}{105}=0.0\dot{1}9047\dot{6}$ （$105=3\times5\times7$）**不循环的数字有一个，循环节最少位是 6 位，分母只含 1 个 5，2、5 以外的因数积为 21，能整除 9 构成数中最小数 999999 有 6 个 9．**

例 1 求一个最小分数使它的分子为 7 且满足①化成小数后是纯循环小数，②循环节最少位数是 4．

分析 要化成纯循环小数则分母中不含因数 2 和 5，要使分数有四个循环节则分母最小能整除 9999 而不能超过这个数，故最大也是 9999．因而所求的最小数是 $\frac{7}{9999}$

例 2 将$0.\dot{3}1\dot{2}$ **和**$0.12\dot{3}\dot{4}$ **化成分数**

解 设$0.\dot{3}1\dot{2}=x$

则 $312.\dot{3}1\dot{2}=1000x$

故$1000x-x=312.\dot{3}1\dot{2}-0.\dot{3}1\dot{2}$

即 999x=312

$x=\frac{312}{999}=\frac{104}{333}$

设$0.12\dot{3}\dot{4}=y$

则 $12.\dot{3}\dot{4}=100y$

$1234.\dot{3}\dot{4}=10000y$

故 $9900y=1234.\dot{3}\dot{4}-12.\dot{3}\dot{4}$

即$y=\frac{1222}{9900}=\frac{611}{4950}$

结论 4 纯循环小数可化成这样的分数；分数的分子是一个循环节所表示的数，分母是由 9 构成的数，9 的个数等于一个循环节中数字的个数．混循环小数可化为这样的分数，它的分子是由第二个循环节以前的小数部分数字组成的数与小数部分中不循环数字数字组成数之差，分子前面由 9 构成，后面由 0 构成，9 的个数为循环节中数字个数，0 的个数为不循环数字的小数．

如 $0.\dot{5}1\dot{8}=\frac{518}{999}$**，**$0.3\dot{4}\dot{2}\dot{5}=\frac{3422}{9990}=\frac{1711}{4995}$

$12.30\dot{9}\dot{7}=\frac{3067}{9900}$

例3 已知循环小数$0.\dot{1}2365\dot{4}$，问小数点后1996个数字是什么？

分析 由于循环节有 6 位数字，考查第 m 个数字除以 6 所得余数对应的数字，得下表：

m除以 6 的余数	1	2	3	4	5	0
m 对应的数字	1	2	3	6	5	4

解 由于 1996=6×332+4

即 1996 除以 6 余 4，第 1996 个数字是 6

例 4 1995 年元旦是星期日，1997 年元旦是星期几？

分析 由于每周七天，每七天一循环．求到 m 天，是星期几的问题是 m 除以 7 的余数问题．由于 1996 年是闰年，从 1995 年元旦到 1997 年元旦共有 365×2+1+1=732 天. 从 1995 年元旦到第 m 天，m 除以 7 的余数与星期几的关系如下表：

m 除以 7 的余数	1	2	3	4	5	6	0
m 对应的星期几	日	一	二	三	四	五	六

解 从 1995 年元旦到 1997 年元旦共有 732 天

由于 732=7×104+4

即 732 除以 7 余 4

故 1997 年元旦应是星期三．

特别要注意过多少天比共多少天少一天，是过了 732 天此时所表为

1	2	3	4	5	6	0	m 除以 7 余数
1	2	3	4	5	6	日	m 对应周几

由于 732 除以 7 余 3 故得之是周三．

例 5 甲乙二人在 400 米环形跑道上相距 100 米，甲练习跑步，速度为 150 米/分，乙练习跑步，速度为 250 米/分．若他们同时出发，相向而行，问过多少分钟后第五次相遇？

分析 相向而行并没指出是朝相距 100 米方向还是朝相距 300 米方向．因而有两个答案．每次相遇事实上可看成一个循环，所用时间是相同的，时间是 $\frac{400}{150+250}=1$（分钟），若他们朝相遇100米方向相向而行，则第一次相遇用 $\frac{100}{400}=0.25$（分），第五次相遇时所用时间为

100÷（150+250）+4×400÷（150+250）=4.25（分）

若他们朝相距 300 米方向相向而行，则第五次相遇的时间为

300÷（150+250）+4×400÷（150+250）=4.75（分）

例 6 试求 $3^{1995}+4^{1996}+7^{1997}$ 的个位数字

分析 实验可得 a^n 的末位数字如下表：

a 的个位数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2 的个位数字	1	4	9	6	5	6	9	4	1
a^3 的个位数字	1	8	7	4	5	6	3	2	9
a^4 的个位数字	1	6	1	6	5	6	1	6	1
a^5 的个位数字	1	2	3	4	5	6	7	8	9

由此可归纳出：若 a 是一个数字则 a^{4k+1} 的末位数字仍是 a（其中 k 为自然数）

由于 1995=4×498+3 知 3^{1995} 个位数字是 7

1996=4×499 知 4^{1996} 个位数字是 6

1997=4×499+1 知 7^{1997} 个位数字是 7

故 $3^{1995}+4^{1996}+7^{1997}$ 个位数字为 0

例 7 菲波那契数列定义如下：前两个都是 1，从第三个数起，每个数是前面两个数的和，于是它的前面几个数是 1，1，2，3，5，8，13，21，…

1）求其中第 1994 个数被 3 除的余数？

2）如果在前 n 个数中恰有 500 个数是 3 的倍数，求 n

分析 如果按数列定义求出第 1994 个数，计算量很大，将前面每一数除以 3 求余数寻找规律：如下表

数列数	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89 …
除以 3 的余数	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2 …

可知余数按每 8 位循环重复出现．

由于 1994=8×249+2 而第二个数被 3 除余 1，故第 1994 个数被 3 除余 1．

由于数列余数每 8 位循环重复，而每 8 位中有两个是 3 的倍数，而 500÷2=250　250×8=2000 故 2000 个数中必有 500 个能被 3 整除的数．又由于循环的 8 个余数中第 8 个被 3 整除，故前 2000 个数中恰有 500 个数是 3 的倍数．

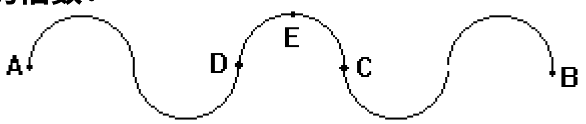


图4－1

例 8 如图 4—1 一只蚂蚁在 A、B 之间沿曲线作往返运动，由 A 爬到 C 时用 12 分钟，若从 A 点出发 2.5 小时后，这只蚂蚁在什么位置？请在图中标出这个位置．

分析 由 A 到 B 再由 B 到 A 可看成一个循环，先求出一个循环所需时间是 $\frac{12}{3}\times 10=40$（分）

由 2.5×60=40×3+10 可知由 A 爬 10 分钟（或由 C 向 A 爬 2 分钟）

即 $\overset{\frown}{CD}$ 中点E为所求

即中点 E 为所求

例 9 自然数中若一个数可表示两个不同自然数的平方差则称这个自

然数为“好数”，如 $16=5^2-3^2$，16 就是“好数”．在自然数中，从 1 算起第 1996 个“好数”除以 4 的余数是几？

分析与解 先找出“好数”并按从小到大顺序排列前几个并求除以 4 的余数找规律，如下表

好数排列	3	5	7	8	9	11	12	13	15	16	17…
除以 4 余数	3	1	3	0	1	3	0	1	3	0	1…

可知从第三个“好数”开始，除以 4 的余数每 3 位循环重复．由于 $1996-2=3\times664+2$

故第 1996 个“好数”除以 4 的余数是 0

练习题四

1．将分数 $\frac{3}{140}$，$\frac{4}{63}$ 化为小数

2．将小数 $0.\dot{5}18\dot{8}$，$0.0\dot{6}\dot{1}\dot{3}$ 化为分数

3．将 $\frac{5}{84}$ 化成小数后，小数点后100位的数字是什么？

4．在数列 1，5，9，13，17…中第 100 个数除以 7 的余数是什么？

5．如图 4—2 从 0 点开始到什么时间时，分针指向第 25 个被 3 除余 2 的数？

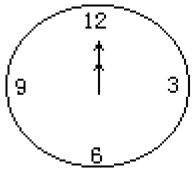


图4-2

第五课 分数、百分数应用题

分数和百分数这一部分内容是小学数学的重要组成部分，在日常生活和生产实际中，经常会遇到相关的问题，学好这部分知识，就会为我们处理有关问题及数量关系提供很多便利条件．

例1 某工厂三个车间生产一批机器零件．一车间比二车间多生产$\frac{1}{4}$，二车间比三车间多生产$\frac{1}{3}$，一车间比三车间多生产几分之几？

分析 一车间比二车间多生产$\frac{1}{4}$，二车间比三车间多生产$\frac{1}{3}$，由于单位“1”不相同，所以不能简单地认为一车间比三车间多$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$，解题时应先转化单位“1”．

解 设三车间生产的零件数为单位“1”，则二车间生产的零件数是三车间的$1\times(1+\frac{1}{3})=\frac{11}{3}$（倍）．

一车间生产的零件数是三车间生产的零件的$\frac{11}{3}\times(1+\frac{1}{4})=\frac{12}{3}$（倍）

一车间比三车间多生产几分之几：

$(1\frac{2}{3}-1)\div 1=\frac{2}{3}$

答：一车间比三车间多生产$\frac{2}{3}$．

例2 甲，乙，丙三人从同一个筐中取苹果．已知甲取走了筐中原有苹果的$\frac{1}{4}$，乙取走余下苹果的一半，丙取走的苹果是前两个人总和的$\frac{2}{5}$结果筐中还剩5斤，问：筐中原有苹果多少斤？

分析与解答 我们将筐中原有的苹果看作单位“1”，甲取走了筐中原有苹果的$\frac{1}{4}$，乙取走余下苹果的一半，由此可知，乙取走的苹果占筐中原有苹果的$(1-\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$；丙取走的苹果是前两人总和的$\frac{2}{5}$，

苹果占筐中原有苹果的$(\frac{1}{4}+\frac{3}{8})\times\frac{2}{5}=\frac{1}{4}$．所以三个人总共取 走了筐中原有苹果的$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$，筐中剩下的苹果是原 有苹果的$1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$．

所以筐中原有苹果数为$5\div\frac{1}{8}=40$（斤）

即：$5\div\left\{1-\frac{1}{4}-(1-\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}+(1-\frac{1}{4})\times\frac{1}{2}\right]\times\frac{2}{5}\right\}=40$（斤）

例3 兄弟三人合买一辆摩托车，老大付钱数的$\frac{1}{2}$等于老二付钱数的$\frac{3}{5}$，又等于老三付钱数的$\frac{3}{4}$．已知老二比老三多付了500元，问：这辆摩托车多少钱？

分析 将老大付钱数的$\frac{1}{2}$等于老二付钱数的$\frac{3}{5}$等于老三付钱数的$\frac{3}{4}$转化为同一基准，由于知道老二比老三多付500元，以老二的付钱数为单位“1”．

解法1：

根据已知条件可得：

∵老大付钱数×$\frac{1}{2}$ = 老二付钱数×$\frac{3}{5}$

∴老大付钱数 = 老二付钱数×$\frac{6}{5}$

即 老大付钱数是老二付钱数的$\frac{6}{5}$

∵老三付钱数×$\frac{3}{4}$ = 老大付钱数×$\frac{1}{2}$

∴老三付钱数 = 老大付钱数×$\frac{2}{3}$

∴老三付钱数是老二付钱数的$\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$．

∵老二比老三多付了 500 元，

∴老二付钱数：$500\div(1-\frac{4}{5})=2500$（元）

老大付钱数：$2500\times\frac{6}{5}=3000$（元）

老三付钱数：$3000\times\frac{2}{3}=2000$（元）

共付钱数：2500+3000+2000=7500（元）

答：这辆摩托车 7500 元．

解法2：

∵老大付钱数：老二付钱数 = $(1\div\frac{1}{2})$ ：$(1\div\frac{3}{5})$ = 6：5

老大付钱数：老三付钱数 = $(1\div\frac{1}{2})$ ：$(1\div\frac{3}{4})$ =3：2

∴老三付钱数：老二付钱数=4：5

∴老大：老二：老三=6：5：4

总份数：6+5+4=15（份）

共付钱数：$500\div(\frac{5}{15}-\frac{4}{15})=7500$（元）

答：这辆摩托车共 7500 元．

例 4 有一批粮食，甲、乙两车合运需 30 天运完．现在甲车先运 22 天，两车再合运 12 天，剩下的粮食乙还要运 16 天才能全部运完．又知乙每天比甲多运 4 吨，问：完成运输任务时乙车共运了多少吨粮食？

分析 甲车总共干了 34 天，乙车总共干了 28 天，这个问题可转化为：两车合干了 28 天，由于两车合运需 30 天运完，说明两车每天运完这批粮食的 $\frac{1}{30}$，28天就运完28个 $\frac{1}{30}$，剩下的部分是甲车6天运的．

解：两车合运 28 天完成总工作量的：

$\frac{1}{30}$×（$12+16$）$=\frac{14}{15}$

甲车每天运完总量的：

（$1-\frac{14}{15}$）÷（$22-16$）$=\frac{1}{90}$

乙车每天运完总量的：

$\frac{1}{30}-\frac{1}{90}=\frac{1}{45}$

这批粮食共有：

4÷（$\frac{1}{45}-\frac{1}{90}$）$=360$（吨）

所以乙车运的粮食为：

360×$\frac{1}{45}$×（$12+16$）$=224$（吨）

答：完成任务时，乙车运了 224 吨粮食．

例 5 有甲、乙两个工程队，甲队有 1200 人，其中老工人占 5%，乙队有 800 人，老工人占 20%．要使甲、乙两队中老工人所占的百分比相同，应从乙队中抽调多少名老工人与甲队中的年青工人进行一对一对换？

解法 甲队中有老工人：1200×5%=60（名）

乙队中有老工人：800×20%=160（名）

两队中老工人的总和占全体工人总和的：（60+160）÷（1200+800）=11%．

调换后乙队中老工人的人数为：

800×11%=88（人）

所以应调换的人数为：

160-88=72（人）

即：应将乙队中的 72 名老工人与甲队中的等量年青工人对换，才能保证两队中老工人所占百分比相同．

例 6 一辆汽车从甲地开往乙地，如果车速提高 20%，可以比原定时间提前一小时到达，如果以原速行驶 120 公里后再将速度提高 25%，则可提前 40 分钟到达，求甲、乙两地之间的距离及汽车原来的速度．

分析 车速提高 20%，现在的车速与原来车速的比为：（1+20%）：1=6：5

现在走完全程时间与原来的时间比为速度的反比，即 5：6，由于用现在的车速跑完全程可提前一小时到达，所以原车速跑完全程需用 6 小

时．

车速提高 25%，现在的车速与原车速之比为：（1+25%）：1=5：4，行相同路程所用时间比为4：5，现在用的时间缩短到原来的$\frac{4}{5}$．若从开始就将车速提高 25%，跑完全程时间可少用：

$6\times（1-\frac{4}{5}）=1\frac{1}{5}$（小时），而现在只提前40分钟$=\frac{2}{3}$小时，少提前$1\frac{1}{5}-\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$小时，这是因为前面的120公里是按原速行驶的，即：若将速度提高25%，行驶120公里可以提前$\frac{8}{15}$小时．

而当速度一定时，行驶的路程与所用时间是成正比例的，同样，行驶的路程与提前的时间也成正比例．

解 设甲乙两地相距 x 公里．

$\frac{x}{120}=\frac{\frac{6}{5}}{\frac{8}{15}}$，即$\frac{8}{15}x=120\times\frac{6}{5}$，$x=270$

∴ 原来的车速为：270÷6=45

答：甲乙两地相距 270 公里，原来的车速为每小时 45 公里．

例 7 某工厂运入一批钢材用来加工机器零件，第一天用掉全部钢材的$\frac{1}{10}$，第二天用掉余下钢材的$\frac{1}{9}$，以后7天，每天分别用掉当天钢材总量的$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{7}\cdots\cdots\frac{1}{2}$，最后，第10天用了15吨，正好将所有的钢材用完，问：这批钢材总共有多少吨？

解答：根据题意，从第 10 天，第 9 天，……倒推回去列式求出这批钢材总共有：

$15\div（1-\frac{1}{2}）\div（1-\frac{1}{3}）\div\cdots\div（1-\frac{1}{10}）$

$=15\div\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}\div\cdots\frac{9}{10}$

$=15\times2\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{10}{9}$

=150（吨）

答：这批钢材共有 150 吨．

注：此题还有其它解法，同学们不妨做一下．

例8 某区教委组织夏令营，其中A学校参加的人数占$\frac{1}{5}$，若A校再多去10个人，则A校人数占总人数的$\frac{1}{4}$．问这个夏令营共有营员多少人？A 校原来有多少人参加？

分析 其中A人数占$\frac{1}{5}$，其它学校占$\frac{4}{5}$．若A校再多 去10人，则

A校人数占$\frac{1}{4}$，其它学校人数占$\frac{3}{4}$．从表面上看每一个数量都在改变，但实际上，前面营员的$\frac{4}{5}$与后面营员的$\frac{3}{4}$所表示的数相等，认清这个问题是解决此问题的关键．

解法 1：

$\because$现有总人数×（$1-\frac{1}{4}$）＝原有总人数×（$1-\frac{1}{5}$）

$\therefore$现有总人数＝原有总人数的$\frac{16}{15}$

原有营员数为：$10\div$（$\frac{16}{15}-1$）＝150（人）

A校原参加人数为$150\times\frac{1}{5}=30$（人）．

答：夏令营原有营员 150 人，A 校原有 30 人参加．

解法 2：

根据原来其它校参加人数=现参加人数列方程，可设夏令营原有 x 人．

$x\times$（$1-\frac{1}{5}$）＝（$x+10$）×（$1-\frac{1}{4}$）

x=150

$150\times\frac{1}{5}=30$（人）

答：夏令营原有营员 150 人，A 校原有 30 名同学参加．

练习题五

1．某校有球若干个，其中$\frac{1}{4}$是篮球，$\frac{n}{7}$（n为自然数）是足球，其余的 90 个是排球．这个学校共有多少个球？

2．甲同学课外读物的数量是乙同学课外读物数量的$\frac{4}{7}$，若甲乙两人的课外读物均增加 5 本，则甲同学课外读物的数量是乙同学课外读物数量的$\frac{3}{4}$，问：甲乙两同学原来各有几本课外读物？

3．有a、b两条绳，第一次剪去a的$\frac{2}{5}$，b的$\frac{2}{3}$；第二次剪去a绳剩下的$\frac{2}{3}$，b绳剩下的$\frac{2}{5}$；第三次剪去a绳剩下的$\frac{2}{5}$，b绳剩下的$\frac{2}{3}$，最后 a 绳剩下的长度是 b 绳剩下的长度的 2 倍．求原来 a 绳长度是 b 绳长度的几分之几？

4．某制衣车间生产一批衬衫，检验结果为：90%的一级品，n%的二级品，剩下的 3 件为次品．这批衬衫共有多少件？

5．**三个人进行接力长跑，已知甲跑了全程的$\frac{4}{7}$，乙跑了甲的$\frac{2}{3}$，丙跑了 1000 米，这三个共跑了多少米？**

第六课 浓度问题

一、关于浓度的一些概念

举例说明：

喝糖水时糖水甜的程度是由糖与水二者重量的比值决定的，糖与糖水的重量的比值叫做糖水的浓度（也叫含糖率）．这个比值一般我们将它写成百分数，所以也称为百分比浓度．其中糖叫做溶质，水叫做溶剂，糖水叫做溶液．这三者的关系如下：

浓度=（溶质重量）/溶液重量

溶液重量=（溶质重量）/浓度

溶质重量=溶液重量×浓度

溶液重量=溶质重量+溶剂重量

二、例题分析

例 1 一大一小两只装满糖水的杯子，大杯中装有浓度为 4%的糖水 600 克，小杯中装有浓度为 20%的糖水 400 克．各取多少克分别放入对方杯内，才能使这两杯糖水的浓度一样？

解法 1：大杯中含糖重量为 600×4%=24（克）

小杯中含糖重量为 400×20%=80（克）

两杯糖水混合后浓度为：$\frac{24+80}{600+400}=10.4\%$

设从两杯中各取出 x 克糖水放入对方杯子中，才能使两杯糖水浓度一样．

（600-x）×4%+20%x=600×10.4%

$$24-\frac{1}{25}x+\frac{1}{5}x=62.4$$

x=240

答：应从两杯中各取出 240 克放入对方杯子中，才能使两杯糖水浓度一样．

解法 2：

依题意使两杯中糖水的浓度相等得等量关系：大杯糖水浓度=小杯糖水浓度．

设从两杯中各取出糖水 x 克．列方程得

$$\frac{(600-x)\times 4\%+x\times 20\%}{600}=\frac{(400-x)\times 20\%+x\times 4\%}{400}$$

解得：x=240

答：应从两杯中各取出 240 克放入对方杯子中才能使两杯糖水浓度一样．

例 2 现有浓度为 20%的盐水 50 千克．要想得到浓度为 10%的盐水，需加水多少千克？

解 依题意：加水前后盐水中含盐的重量相等．可设需加 x 千克水，列方程得：

50×20%=（50+x）×10%

100=50+x

x=50

答：需加水 50 千克．

例 3 甲容器中有 8%的农药 300 千克，乙容器中有 12%的农药 120 千克．在甲、乙两容器中倒入等量的水，使两个容器中农药的浓度一样，问倒入多少千克？

解 通过分析题意我们可以知道加水后：

甲容器中农药浓度=乙容器中农药浓度

设需往甲、乙两容器内各加入 x 千克水，列方程得：

$$\frac{300\times 8\%}{300+x}=\frac{120\times 12\%}{120+x}$$

x=150

答：倒入 150 千克水．

例 4 一容器内盛有浓度为 45%的硫酸，若再加入 16 千克水，则浓度变为 25%，这个容器内原来含有纯硫酸多少千克？

解答（一）：由于加水前后容器中所含纯硫酸的重量并没有改变，所以我们只需将加水前后容器中所含纯硫酸的量表示出来即可：

设容器中原有溶液 x 千克：则有

x·45%=（x+16%）·25%

x=20

∴ 容器中所含纯硫酸为 20×45%=9（千克）

答：容器中原来含有纯硫酸 9 千克．

解答（二）：设容器内原含有 x 千克纯硫酸．

依题意有：x÷45%=x÷25%-16

∴ x=9

答：容器内原含有纯硫酸 9 千克．

例 5 甲容器中有纯酒精 11 升，乙容器中有水 15 升，第一次将甲容器中的一部分纯酒精倒入乙容器，然后将乙容器中的一部分混合液倒入甲容器，这时甲容器中酒精含量为 62.5%，乙容器中酒精含量为 25%，问从乙容器中倒入甲容器中的混合液有多少升？

分析 由题意知，第一次将甲容器中的纯酒精倒入乙容器一部分后，乙容器中的混合液浓度为 25%，由此可知从甲容器中倒入乙容器中的纯酒精有多少．这样问题变为，将甲容器中剩下的纯酒精与浓度为 25%的酒精多少升混合，可得到浓度为 62.5%的混合液．

解 设第一次从甲容器倒入乙容器的酒精为 x 升，则有：

x=（15+x）·25% x=5（升）

所以甲容器中剩下的纯酒精为

11-5=6（升）

设从乙容器倒入甲容器的混合液为 y 升，则有：

（6+y）·62.5%=6+25%·y

解得：y=6（升）

答：从乙容器中倒入甲容器中的混合液为 6 升．

例 6 一容器内装有 20 升纯酒精，倒出 5 升后，用水加满，再倒出 10 升，再用水加满，然后再倒出 4 升，用水加满，这时容器内的混合液浓度为多少？

分析 第一次倒出的是纯酒精，而后两次倒出的是混合液，要想知道

最终容器中溶液的浓度，只要计算出总共倒出了多少纯酒精就可以了．

解 第二次倒出的溶液中所含纯酒精为：

$10 \times \frac{20-5}{20} = 7.5$（升）

第三次倒出的溶液中所含纯酒精为：

$4 \times \frac{20-5-7.5}{20} = 1.5$（升）

三次总共倒出的纯酒精为：

5+7.5+1.5=14（升）

此时容器内的溶液浓度为：

（20-14）÷20=30%

答：这时容器内混合溶液的浓度为 30%．

例 7 现有浓度为 10%和浓度为 30%的盐水，要想配制浓度为 22%的盐水 250 千克，需上述两种盐水各多少千克？分析 这是一个溶液混合问题，混合前后溶液的浓度改变了，但是总体上溶质及液的量均没有改变，即有混合前两种溶液重量和=混合后溶液重量

混合前溶质重量和=混合后溶质重量

解 设需 10%的盐水 x 千克，需 30%的盐水 y 千克，列方程组得：

$$\begin{cases} x+y=250 \\ x \cdot 10\% + y \cdot 30\% = 250 \times 22\% \end{cases}$$

整理得$\begin{cases} x+y=250 \\ x+3y=550 \end{cases}$

解得$\begin{cases} x=100 \\ y=150 \end{cases}$

答：需 10%的盐水 100 千克，需 30%的盐水 150 千克．上述问题也可以用只设一个未知数的方法来解：设需用 10%的盐水 x 千克，则需 30%的盐水为（250-x）千克，列方程得

x·10%+（250-x）·30%=250×22%

解得：x=100

即需用 10%的盐水 100 千克，需用 30%的盐水 150 千克．

例 8 甲种酒精溶液中含有酒精 6 升，水 9 升，乙种酒精溶液中有酒精 9 升，水 3 升，要配制成 50%的酒精溶液 7 升，问两种溶液各需多少升？

解 利用浓度×溶液=溶质和混合前后溶质的量不变找等量关系．

设需甲种溶液 x 升，则需乙种溶液（7-x）升，x 升甲溶液中酒精+（7-x）升乙溶液中酒精=混合后 7 升溶液中酒精．列方程：

$$\frac{6}{9+6} \cdot x + \frac{9}{9+3}(7-x) = 7 \times 50\%$$

解得：x=5

答：需甲种酒精溶液 5 升，需乙种酒精溶液 2 升．

这个问题还有其它解决方法，同学们不妨自己试一试．

例 9 在浓度为 x%的盐水中加入一定重量的水，则浓度变为 10%的新溶液，在此新溶液中再加入与前次所加入的水重量相等的盐，溶液浓度变为 30

%，求 x．

分析　这个问题的解决，除去 x 外，还需要增设一些辅助未知数（也叫参数）来沟通数量关系，为列方程创造条件，然后在解方程（组）过程中再想办法消去这些参数，即：引入辅助未知数的作用是将它们当作桥．

解　设浓度为 x%的盐水重为 a，加水的重量为 b，列方程组：

$$\begin{cases} x\% \cdot a = 10\% \cdot (a+b) & (1) \\ 10\% \cdot (a+b) + b = 30\% \cdot (a+2b) & (2) \end{cases}$$

由（2）得$a=\frac{5}{2}b$，代入（1）得

$x\% \cdot \frac{5}{2}b = 10\% \cdot (b+b)$

x=14

答：x=14．

练习题六

1．在 10 千克浓度为 15%的盐水中加入多少千克水，才能得到浓度为 10%的盐水？

2．将浓度为 10%的盐水 10 千克与多少千克浓度为 20%的盐水混合，才能得到浓度为 15%的盐水？

3．一容器内盛有浓度为 30%的农药，现加入 20 千克水，则浓度变为 20%，容器内原有浓度为 30%的农药是多少千克？

4．在浓度为 40%的酒精溶液中加入 5 千克水，浓度为 30%，再加入多少千克酒精，浓度变为 50%？

5．甲容器中有 10%的盐水 200 千克，乙容器中有浓度为 15%的盐水 100 千克，往甲、乙两容器中倒入等量的水，使两容器中盐水的浓度一样，问倒入水多少千克？

第七课　　工程问题

一、基本数量关系

工作量=工作效率×工作时间

工作效率=工作量÷工作时间

工作时间=工作量÷工作效率

总工作量=各分工作量之和

二 、例题分析：

例1 **一件工作，甲、乙二人合作**6**天完成了全部工作的**$\frac{1}{10}$**，余下的由甲单独干 10 天，再由乙单独干 3 天，正好完成全部工作．如果甲单独完成这件工作，需多少天？**

分析　全部工作结束时甲总共干了 16 天，乙总共干了 9 天，我们可以看成甲乙总共合干了 9 天，然后由甲再单独干 7 天，做完全部工作．由于甲乙合作6**天完成全部工作的**$\frac{1}{2}$**，那么合作**9**天可完成全部工作的**$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\div 6\times 3=\frac{3}{4}$**，即甲单独干**7**天可完成全部工作的**$\frac{1}{4}$**．所以甲单独完成全全部工作需**$7\div\frac{1}{4}=28$(**天**)

解（10 - 3）÷（1- $\frac{1}{2}$ - ÷6×3）＝28（**天**）

答：甲单独干需 28 天．

例 2 一件工程，甲工程队单独做 10 天可以完成，乙工程队单独做 15 天可以完成．现在由甲、乙两队合作 5 天，剩下的工程由乙单独做，还需几天？

分析 甲单独做每天完成全部工程的$\frac{1}{10}$**，乙单独做每天完成全部工程的**$\frac{1}{15}$**，甲乙两队合作**5**天完成全部工作的**$(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})\times 5=\frac{6}{5}$**．所以乙单独做的部分是全部工程的**$\frac{1}{6}$ ＝2.5（**天**）．

解$[1-(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})\times 5]\div\frac{1}{15}=2.5$（**天**）

答：乙单独完成剩下的工程还需 2.5 天．

例 3 一件工程，甲独做 20 天完成，乙独做 30 天完成．现在由甲、乙合作，因为甲中途休息了几天，结果用了 15 天才完成任务．问甲中途休息了几天？

分析　由于甲在合作过程中休息了几天，结果用了　15　天才完成全部任务．若甲中间不休息，合作 15 天就会超过全部工作量，而超过的部分恰好是甲休息没干的，由此可求出甲休息的天数．

解　$[(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}\times 15-1]\div\frac{1}{20}$

$=[\frac{1}{12}\times 15-1]\div\frac{1}{20}$

$=\frac{1}{4}\div\frac{1}{20}=5$(天)

答：甲中途休息了 5 天．

例 4　一件工程，如果甲先独做 12 天，然后乙再单独做 9 天正好完成；如果乙先独做 18 天，然后再由甲再独做 9 天，也正好完成．如果这件工程由乙单独做，几天可以完成？

分析与解答　这个问题我们可以看作：甲乙合作 9 天，余下的工作若由甲独做需 3 天完成，若由乙独做需 9 天完成．由此可以看出，乙 9 天做的工作量等于甲 3 天做的工作量．即乙、甲所用的时间比为 3∶1．因此，乙单独完成这件工程要用：

18+9×3=45（天）或 9+12×3=45（天）

答：这件工程由乙单独干，45 天可以完成．

例 5　一个水池有甲、乙两个进水管，如果单开甲管 10 小时可将空池注满；如果单开乙管，15 小时可将空池注满；现在先单独开甲管 4 小时，而后同时用甲、乙两水管注水，还需几小时？

分析与解答　单开甲水管，10 小时可注满水池，每小时可注满水池的 $\frac{1}{10}$；单开乙管15小时注满水池，每小时可注满水池的 ．同时开启甲、乙两水管每小时可注满水池的$\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$．现在单独开启甲管4小时，它完成工作的：$\frac{1}{10}\times 4=\frac{2}{5}$，还余下$\frac{3}{5}$，所以同时开启甲、乙两水管还需$(1-\frac{2}{5})\div\frac{1}{6}=\frac{3}{5}\div\frac{1}{6}=3.6$(小时)．

答：还需 3.6 小时．

例 6　一个水池有甲、乙两个进水管和一个排水管丙．如果单开甲管 10 小时可将空池注满水，若单开乙管，可用 15 小时将水池注满，若单开丙管，可用 18 小时将满池水放完．现在先单开甲管 5 小时，然后将乙，丙也同时开启，再用几小时可将水池注满？

分析与解答 单开甲管10小时可注满空池，每小时完成$\frac{1}{10}$，5小时完成$\frac{1}{2}$，单开乙管15小时注满空池，每小时完成$\frac{1}{15}$．单开丙管18个小时可将满池水放完，每小时放$\frac{1}{18}$．所以先单开甲管5小时，再将乙、丙两管也打开，注满水池还需用的时间为：

$$(1-\frac{1}{10}\times 5)\div(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}-\frac{1}{18})$$

$$=\frac{1}{2}\div\frac{1}{9}$$

$=4.5$(小时)

答：还需 4.5 小时，才能将水池注满．

例 7 某车间生产一批机器零件，原计划每天生产 180 个零件，24 天完成，实际比原计划提前 4 天完成，实际比原计划每天多生产多少个零件？

分析与解答 要求出实际比原计划每天多生产多少个零件，只需先求出实际每天生产多少个零件即可．

180×24÷（24-4）-180=4320÷20-180

=216-180=36（个）

也可以这样想，实际与原计划所完成的零件总数是相同的．由于当工作量一定时，工作效率与工作时间成反比例，故原计划完成任务的天数与实际完成任务的天数比是 24∶（24-4）即 6∶5，这就是实际每天生产零件个数与原计划每天生产零件个数的比．由此可求出实际每天比原计划每天多生产的零件个数为：

$(\frac{6}{5}-1)\times 180=36$(个)

例 8 一项工程，甲队单独干 20 天可完成，甲队做了 8 天后，由于另有任务，剩下的工作由乙队独做 15 天完成．乙队单独完成这项工程需多少天？

分析与解答 甲队单独干 20 天可完成，现在干了 8 天，做了全工程的 $\frac{1}{20}\times 8=\frac{2}{5}$，这时还余下 $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，余下的工程乙队干了 15 天完成，则每天完成全工程的 $\frac{3}{5}\div 15=\frac{1}{25}$．

即：乙队单独完成此项工程所需时间为

$$1\div[(1-\frac{1}{20}\times 8)\div 15]$$

$$=1\div[(1-\frac{2}{5})\div 15]$$

$$=1\div[\frac{3}{5}\div 15]$$

$=1\div\frac{1}{25}=25$(天)

答：乙队单独干需 25 天完成．

例 9 有一条公路，甲队独修需 10 天，乙队独修需 12 天，丙队独修需 15 天．现在让三队合修，但中间甲队撤出去到另外工地，结果用了 6 天才把公路修完．当甲队撤出后，乙丙两队又共同合修了多少天才修完这条路？

分析 乙队、丙队都干了 6 天，6 天中乙丙两队完成了全部工作的 $(\frac{1}{12}+\frac{1}{15})\times 6=\frac{9}{10}$，剩下的 $\frac{1}{10}$ 是由甲队做的，而甲队独修需要 10 天，故其每天修全工程的 $\frac{1}{10}$．由此知甲队干的天数为：$\frac{1}{10}\div\frac{1}{10}=1$．

解　甲队撤出后，乙、丙两队完成余下的工作所用时间为：

$6-[1-(\frac{1}{12}+\frac{1}{15})\times 6]\div\frac{1}{10}$

$=6-1$

=5（天）

答：当甲队撤出后，乙、丙两队又共同修了 5 天才修完这条路．

例 10 若干辆车从某一仓库中运粮食，若每辆车装 m 吨（m 为自然数），则剩 20 吨未装；若每辆车装 9 吨，则最后一辆车只装 6 吨，问共有几辆车？

分析　在这个问题中给出了两种不同的装运方案，虽然在两种方案中每辆车装的粮食数量不同，但是粮食总重量及车辆数并未改变．

解　设共有 x 辆车，根据题意列方程：

mx+20=9（x-1）+6

（9-m）x=23

x=23/（9-m）

由于 x、m 均为自然数，故 9-m 应为 23 的约数，且 9-m＞0，因为 23 为质数，所以 9-m=1，所以 m=8，x=23．

答：总共有 23 辆车．

例 11　有甲乙两队完成某项工作，开始时甲队工作了乙队完成全部工作所需时间的$\frac{1}{3}$，然后乙队工作了甲队完成全部工作所需时间的$\frac{1}{4}$，于是完成全部工作的$\frac{2}{3}$．如果甲队先工作4小时，然后两队再合作6小时，就可以完成全部工作的$\frac{7}{10}$，问两队单独完成这项工作各需多少小时?

解　设甲队单独完成全部工作需 x 小时，乙队单独完成全部工作需 y 小时，设全部工作量为 1，则根据题意有：

$$\begin{cases}\frac{y}{3x}+\frac{x}{4y}=\frac{2}{3} & (1)\\ \frac{4}{x}+(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})\cdot 6=\frac{7}{10} & (2)\end{cases}$$

由（1）得 x=2y 或 3x=2y

则有$\begin{cases}x=2y\\ \frac{10}{x}+\frac{6}{y}=\frac{7}{10}\end{cases}$　或$\begin{cases}3x=2y\\ \frac{10}{x}+\frac{6}{y}=\frac{7}{10}\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=7\frac{6}{7}\\ y_1=15\frac{5}{7}\end{cases}$　(舍)$\begin{cases}x_2=20\\ y_2=30\end{cases}$

答：甲单独完成全部工作需 20 小时，乙单独完成全部工作需 30 小时．

练习题七

1．一项工作甲单独做需 10 小时，乙单独做需 15 小时，现在由乙先做 5 小时，剩下的工作甲乙合作还需几小时？

2．一项工程甲队独做需 15 小时完成，甲队干了 3 小时后，将余下的工程交给乙队，乙队又干了 16 个小时正好完工．乙队单独完成需多少小时？

3．加工一批机器零件，甲车间单独加工需 24 小时完成．乙车间先加工 11 小时，然后两车间合作 4 小时完成工作，若乙车间单独加工需多少小时完工？

4．一个水池有两个排水管甲和乙，一个进水管丙．若同时开放甲、丙两管，20 小时可将满池水排空；若同时开放乙、丙两管，30 小时可将满池水排空；若单开丙管 60 小时可将空池注满．若同时打开甲、乙、丙三管，要排空满池水需几小时？

5．某工程先由甲独做 63 天，再由乙单独做 28 天可完成．若甲、乙合作需 48 天完成．现在由甲先单独做 42 天，然后由乙接着做，还需多少天？

第八课　行程问题

一、行程问题中基本数量关系

路程=时间×速度

时间=路程÷速度

速度=路程÷时间

二、例题分析：

例 1 某人由甲地去乙地，原计划每天走 100 公里，18 天走完全程，实际比原计划提前 3 天到达，实际比原计划每天多走多少公里？

分析与解答：要求出实际每天比原计划多走多少公里，可以先求出实际每天走多少公里．

100×18÷（18-3）-100=1800÷15-100

=120-100=20（公里）

答：实际比原计划每天多走 20 公里．

上述问题也可以用下面的方法来考虑：

实际与原计划所走的总路程是相同的．根据反比例意义可知，每天走的公里数与走完全程所用的时间成反比例关系，由此可知，原计划走完全程所用的天数与实际走完全程所用的天数比是 18：（18-3），即 6：5，由此可知，实际每天走的公里数比原计划每天走的公里数多$(\frac{6}{5}-1)$，于是实际每天比原计划每天多走的公里数是：

$$100\times(\frac{18}{18-3}-1)$$

$$=100\times(\frac{6}{5}-1)$$

$$=100\times\frac{1}{5}=20(\text{公里})$$

例 2 小明家离学校 4000 米．小明去上学，前一半时间跑步前进，每分钟跑 200 米，后一半时间搭乘一辆汽车，每分钟前进 600 米，小明后一半时间走了多少米？

分析 小明从家到学校的 4000 米路程，是分成两段走完的，每一段速度均已给出，只要求出走每一段的时间，就可求出每段的路程，其总和应为 4000 米．

解 设小明从家到学校用了 x 分钟，列方程得：

$$200\cdot\frac{x}{2}+600\cdot\frac{x}{2}=4000$$

解得：x=10（分钟）

∴后一半时间所走的路程为：

$$600\times\frac{10}{2}=3000(\text{米})$$

即：小明后一半时间走了 3000 米．

例 3 从 A 城到 B 城，甲要走 2 小时，乙要走 1 小时 40

分钟，若甲比乙先行 10 分钟，那么乙出发后多少分钟追上甲？

分析与解答 甲走完全程用 2 小时，即 120 分钟，乙走完全程需 1 小

时40分钟，即100分钟，所以每分钟甲走完全程的$\frac{1}{120}$，乙走完全程的$\frac{1}{100}$．现在甲先走10分钟，乙追上甲时，两人走的路程相同．不妨将A城到B城的路程看作“ 1”，将甲、乙两人所走的路程分别表示出来，根据两路程相等，即可求出所用时间．

解　设乙出发x分钟后追上甲，设全程为“ 1”，列方程得：

$$\frac{1}{120}\times 10+\frac{1}{120}x=\frac{1}{100}x$$

x＝50

答：乙出发50分钟后追上甲．

例4 一条轮船往返于甲、乙两地之间，由甲至乙是顺水航行；由乙至甲是逆水航行．已知船在静水中的速度是每小时15千米，逆水航行所用时间是顺水航行所用时间的2倍，求水流速度．

分析　不论逆水航行，还是顺水航行，轮船所行驶的路程相等，而船顺水航行时其速度是船在静水中的速度与水流速度之和，而逆水航行时船的实际速度等于船在静水中的速度与水流速度之差．

解　设水流速度为每小时x千米，由甲到乙所用时间为a小时，列方程得：

（15＋x）·a＝（15－x）·2a

15＋x＝2（15－x）

x＝5

答：水流速度为每小时5千米．

注：这里为了解决问题的需要，使用了参数．

例5　某人步行速度是每小时10千米，骑车的速度是每小时30千米．他从甲地到乙地$\frac{2}{5}$的路程走路，$\frac{3}{5}$的路程骑车．从乙地沿原路返回甲地时，$\frac{3}{5}$的路程走路，$\frac{2}{5}$的路程骑车，结果比去时多用了12分钟，求甲、乙两地距离．

解　设甲、乙两地相距x千米，列方程：

$$\frac{2}{5}x\div 10+\frac{3}{5}x\div 30=\frac{3}{5}x\div 10+\frac{2}{5}x\div 30-\frac{12}{60}$$

x＝15

答：甲、乙两地相距15千米．

例6 某人步行的速度是每小时10千米，乘车的速度是每小时40千米．他从甲地到乙地$\frac{1}{5}$的路程走路，$\frac{4}{5}$的路程乘车．回来时用$\frac{1}{6}$的时间走路，$\frac{5}{6}$的时间乘车，结果比去时少用1小时，求甲、乙两地的距离．

解　设甲、乙两地距离为x千米，去时所用时间为y小时，列方程得：

$$\begin{cases}\frac{1}{5}x/10+\frac{4}{5}x/40=y & (1)\\ \frac{1}{6}(y-1)\cdot 10+\frac{5}{6}(y-1)\cdot 40=x & (2)\end{cases}$$

由（1）得$y=\frac{1}{25}x$，代入（2）可解得

x=87.5（千米）

答：甲、乙两地之间的距离为 87.5 千米．

例 7 A、B 两标杆之间的距离为 70 米，甲、乙两人在 A、B 两标杆之间进行折返跑．已知甲的速度为每秒钟 x 米，乙比甲每秒钟快 2 米，若两人同时从标杆 A 处出发，经过 15 秒钟两人第二次相遇，求 x．

分析 当两人第二次相遇时，两人跑的距离的和是两标杆之间距离的 3 倍．

解 列方程得

x×15＋（x＋2）×15＝70×3

x＝6

答：x 的值为 6．

例 8 甲、乙二人同时从 A 地去 130 千米外的 B 地，两人同时出发，甲先乘车到达某一地点后改为步行，车沿原路返回接乙，结果两人同时到达 B 地．已知甲、乙二人步行的速度是 6 千米/小时，汽车的速度是每小时 60 千米．问甲下车的地点距 B 还有多少千米？

分析 甲、乙二人走的路程均分为步行、乘车两部分，两人速度相等，这说明，二人乘车的路程和步行的路程分别相等．由于二人步行的速度为每小时 6 千米，乘车的速度为每小时 60 千米，所以，在相同的时间里，乘车所走的路程是步行所走路程的 10 倍．

解 设甲下车的地点距 B 还有 x 千米，所以汽车返回接乙时，乙在距 Ax 千米处上车，此时，汽车再到 B 所行驶的距离为 11x，而车行驶的路程与两人步行路程的和恰好是 A、B 两地距离的 2 倍，所以有：

$$x+\frac{60}{6}x+x+x=130\times 2$$

x=20（千米）

答：甲下车地点距 B 还有 20 千米．

例 9 甲、乙两辆车分别在 A、B 之间和 A、C 之间往返运行．已知 A、B 两地之间的距离为 10 千米，A、C 两地之间的距离为 15 千米．若甲车每小时行驶 40 千米，乙车每小时行驶 50 千米，现在两辆车同时从 A 站出发，经过多少小时，两车第一次在 A 站相遇？

分析 当两车再次相遇时，所走路程不同，但所用时间相同，故可以考虑以时间做为等量关系．又当两车相遇时，两车所往返的次数必为整数，故可设两车再次相遇时甲车往返了 x 次，乙车往返 y 次，我们只需根据所用时间相等，求出满足条件的 x、y 的最小整数值即可．

解 设两车再次相遇于 A 站时，甲车往返了 x 次，乙车往返了 y 次，列方程得：

$$\frac{10\times 2\cdot x}{40}=\frac{15\times 2\cdot y}{50}$$

$$x=\frac{6}{5}y$$

当 y=5 时，x 即可取得整数．

所以：当乙车第五次返回 A 站时，再次与甲车相遇，此时乙车行驶的路程为 15×2×5=150，所用的时间为 150÷50=3（小时）

答：经过 3 小时，甲、乙两车又在 A 站相遇．

例 10　一个游泳池长 25 米，甲、乙二人分别从游泳池的两端同时出发，游到另一端立即返回，照这样往返游，两人游了 1 分钟．已知甲每秒钟游 3 米，乙每秒钟游两米，从出发后的一分钟内，二人相遇了几次？

分析与解答：两人同时从游泳池的两端出发，第一次相遇时，两人游的路程总和为 25 米，以后则每次两人游的路程和为 50 米时相遇．两人游了 1 分钟，总共游了 300 米，除去第一次相遇时的 25 米，还有 275 米，我们只需看一看这 275 米中含有几个 50 米就可得出两人相遇的次数．

故，在两人出发 1 分钟内，相遇的次数为： 1+[（3×60+2×60-25）／50]=1+[275／50]

=1+5=6

即：两人总共相遇 6 次．

练习题八

1．A、B 两地相距 150 千米，甲、乙两列火车同时从 A、B 两地出发，相向而行，经过 1.5 小时两车相遇，已知甲车的速度是乙车速度的 2/3，求两车的速度．

2．A、B 两地相距 30 千米，甲、乙二人骑摩托车同时从 A、B 两地出发，同向而行，经过几小时，甲追上乙？已知甲每小时比乙快 10 千米．

3．小刚沿着向上移动的自动扶梯从顶向下走到底，他走了 150 级，他的同学小明沿着自动扶梯从底向上走到顶,走了 75 级.如果小明行走的速度(以单位时间走的级数计）是小刚的 3 倍，那么，可以看到的自动扶梯的级数是多少（假定这个数为常数）？

4．一船逆水而上，船上某人有一件东西掉入水中，当船回头时已过 5 分钟，问再过多久，船才能追上所掉的东西？

5．甲、乙两城相距 91 千米，有 50 人一起从甲城到乙城，步行的速度是每小时 5 千米，汽车行驶的速度为 35 千米／小时，他们有一辆可乘坐五人的面包车，最短用多少时间使 50 人全部到达乙城？

第九课 估值

数学计算要求求出准确值，但在社会实践中，经常遇到的问题往往只要求近似值或估计值，比如：密云水库中有多少立方米的水？由于条件的限制，不可能计算出准确值，估值与实际相差几百立方米都是可能的．又如某星球到地球的距离是 8 光年，光年（就是光走一年的距离）是很大的单位，而 8 这个估值与实际值相差之大是令人吃惊的．又如我们手表显示的时间，从某同学的外表估计该同学的年龄，我们的出生时间等等，都是近似值．

据九章算术记载，我国古代数学家刘微用正多边形的面积近似圆的面积，从而计算出π的近似值为 3.1416．可见估算是一种非常重要的数学计算方法．

例 1 某班前 10 名同学的数学成绩如下：98、100、93、92、97、100、96、90、95、94，求他们的平均分数．

解法 1 平均分为

$\frac{1}{10}$（98＋100＋93＋92＋97＋100＋96＋90＋95＋94）

＝95.5

解法 2 估算出平均分为 95（也可为 96、94 等）

则平均分$=\frac{1}{10}(3+5-2-3+2+5+1-5+0-1)+$

$95=\frac{5}{10}+95=95.5$

估值越准确，计算量就越小，例 2 的计算可用口算进行．

例 2 张顺估计孙燕的身高为 162㎝，但孙燕说“不对！但只差 0.5㎝”．孙燕的身高是多少厘米？

解 由孙燕回答可知其身高为 162.5㎝ 或 161.5 厘米．

例 3 张经理走往机场的途中从路标处得知还有 141.365 公里的路程，距飞机起飞时间还有 1 小时 52 分，而他的车最快速度为 70 公里/小时，问他是否有必要赶往机场？

分析与解 这是一个决策问题，关键是能否利用比 1 小时 52 分少的时间到达机场．由于此时他到机场所需最少时间$t=\frac{141.365}{70}>2$（小时）

故他已赶不上这一航班，没必要赶往机场．

例 4 小白兔一次可跳跃 3 米，一条水沟宽恰好等于半径为 0.5 米的圆的周长，问小白兔能跳过去吗？

分析与解 估算出河宽=π＞3（米）

故小白兔跳不过去．

例5 求$\dfrac{1}{\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\Lambda+\frac{1}{109}}$的整数部分

分析与解（采用放缩法）由于分子相同时，分母越大则分数值越小，分母越小分数值越大进行估值．设这个数为 x，由于

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\Lambda+\frac{1}{109}<\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\Lambda+\frac{1}{100}=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\Lambda+\frac{1}{109}>\frac{1}{109}+\frac{1}{109}+\Lambda+\frac{1}{109}=\frac{10}{109}$$

有 10＜x＜10.9

故[x]=10

答：这个数的整数部分为 10.

例 6 某学生计算出 9 个整数的平均值为 14.21，老师告诉他最后一位计算错了，那么正确答案是多少？分析与解答 由于只有最后一位错了，就给出了这个平均值的范围是在 14.20 与 14.29 之间，继而知道了这 9 个整数和的范围，最后估算出准确值.

解 设正确答案为 x，则

14.20≤x≤14.29 于是

127.80≤9x≤128.71

由于 9x 是 9 个整数之和故为整数，于是

$9x=128$ 解得$x=\frac{128}{9}=14.22$

答：正确答案应为 14.22.

例 7 在自然数 25 与 193 之间，是 11 倍数的数有多少个？

解 $[\frac{25}{11}]=2$（个）

$\frac{193}{11}=17$（个）

故 17-2=15（个）

答：是 11 倍数的自然数有 15 个.

例 8 一个两位数与一个三位数的积最少是几位数？最多是几位数？

解 设两位数为 x，三位数为 y，则

10≤x＜100，100≤y＜1000

故 1000≤xy＜100000

即最少为 4 位数，最大为 5 位数.

例 8 若四个连续奇数的积为 9009，求它们中的最大数

分析与解 四个数之积为 9009 是四位数，可估算出四个数不可能都是两位数，若都是两位数则积≥10×10×10×10=10000，故至少有一个是小于 10 的整数，由于 9009 是积数，且四个数都是奇数，考察 1、3、5、7、9、11、13、15 中连续四个数的积，由于 9009 末位为 9，因而不可能有 5，用枚举法可知 7、9、11、13 合题意，故最大数为 13.

例 9 一本书的页码是连续的自然数 1、2、3、4…，当把这些页码加起来时，某页被加了 3 次，得到不正确的结果 1995，求出加 3 次的是哪个页码？

解 设正确结果为 x，本书共有 n 页

则$x=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

由于错加页在 1 和 n 之间即最小为 1，最大为 n，则有

$$\frac{n(n+1)}{2}+2\leq 1995\leq\frac{n(n+1)}{2}+2n$$

$n=60$时 $\frac{n(n+1)}{2}+2n=1950<1995$（舍）

$n=61$时 $\frac{n(n+1)}{2}+2n=2013>1995$

$\frac{n(n+1)}{2}=2=1891<1995$ 合题意

$n=62$时 $\frac{n(n+1)}{2}+2=2077>1995$ 不合题意

∴这本书共有 61 页

$\therefore x=\frac{61(61+1)}{2}=1891$，$1995-1891=104$答：这本书错加的页数为 52 页．

例 10 某宾馆客房一层比二层少 5 间，某旅游团 48 人到该宾馆住宿，若全部安排在一层，每间 4 人则房间不够用，每间住 5 人则房间住不满；若全安排在二层，三人一间房不够用，4 人一间房住不满．问一层有房多少间．

解 设一层有客房 x 间，二层有客房 y 间，由已知有

$\frac{48}{5}<x<\frac{48}{4}$

$\frac{48}{4}<y<\frac{48}{3}$

即 9.6＜x＜12，12＜y＜16

由于 x、y 都是整数

x=10 或 11

y=13 或 14 或 15

又由于一层比二层少 5 间客房，知

x=10，y=15

答 该宾馆一层有 10 间客房．

例 11 若一个数的 6 次方为 11390625，试求这个数．

解 设这个数为 x，由题意有 $x^6=11390625$ 是一个 8 位数．

由于 $10^6=1000000$、$20^6=64000000$

故 $10^6<x^6<20^6$

即 x 是 2 位数且十位数字为 1

又由于 x^6 的末位数字为 5 故 5 是 x^6 的因数进而得到 x 是 5 的倍数．在 11、12、13、14、15、16、17、18、19 这 9 个两位数中，只有 15 是 5 的倍数故 x=15．

练习题九

1．求 134 与 312 之间的所有自然数中，有多少个数能被 19 整除？

2．求积为 5760 的四个连续偶数之和．

3．求 $\dfrac{1}{\frac{1}{90}+\frac{1}{91}+\frac{1}{92}+\Lambda\Lambda+\frac{1}{99}}$ 的整数部分．

4．估计两个三位数乘积的位数范围．

5．某学生在计算偶数2、4、6、8……的和时，不小心少加了一个偶数，结果为1112．那么，这个结果与正确结果差多少呢？第十课 定义新运算

在种类繁多的糕点市场中，你会发现各式的糕点均是以面粉为基本原料加工而得，虽然同是面粉，但经过不同的加工程序却可得多种美味糕点．

对大家熟悉的数和加减乘除四则运算，细想一下，不也是相同的原料，经过不同的加工得到了不同的结果吗？加、减、乘、除四种运算就是我们已经规定了的四种不同的加工程序．

例如 $6，3 \longrightarrow \boxed{+} \longrightarrow 9$，

$6，3 \longrightarrow \boxed{-} \longrightarrow 3$，

$6，3 \longrightarrow \boxed{\times} \longrightarrow 18$，

$6，3 \longrightarrow \boxed{\div} \longrightarrow 2$．

其中，"＋"，"－"，"×"，"÷"分别代表加、减、乘、除四种运算，并且对于这四种运算，还定义了它们所满足的各种算律．

那么，除以上四种运算，我们是否还可以规定其它新的加工程序呢？比如

两个数 $\longrightarrow \boxed{运算} \longrightarrow$ 两个数的平均数，如果用"$\oplus$"表示这个运算，则对于数a，b有 $a \oplus b=\frac{a+b}{2}$．

"＊"表示这个运算，那么对于数a，b有 $a*b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$．

下面我们通过具体的运算来进一步熟悉"定义新运算"是怎么一回事．

例1 定义运算"*"，对于任何数a和b，有

$a*b=\frac{a+b}{2}$．

比如，当$a=1$，$b=3$**时，**$1*3=\frac{1+3}{2}=2$．

（1）计算 1995*1997，

（2）计算1998*（1993*1995），

（3）运算"*"有交换律吗？

（4）已知5*x=7.5，求x．

说明 解这类题，应注意以下两点：一是理解新运算；二是严格按新运算的定义所指定的要求进行计算，不得随意改变运算顺序，有括号时，应先求括号内的值再作其它运算．许多运算不具备交换律、结合律，因此在没有确定新运算是否具有这些性质时，不能运用这些运算律解题．

解：（1）直接根据运算"*"的定义，代入具体数值，进行计算：

$1995*1997=\frac{1995+1997}{2}=1996$．

（2）先计算括号中的值，因为

$1993*1995=\frac{1993+1995}{2}=1994$；

$1998*1994=\frac{1998+1994}{2}=1996$；

所以 1998*（1993*1995）=1996．

（3）对任何数 a 和 b，由于

$a*b=\frac{a+b}{2}$，

$b*a=\frac{b+a}{2}=\frac{a+b}{2}$，

所以 a*b=b*a；

即运算“ * ”有交换律．

（4）因为 $5*x=\frac{5+x}{2}=7.5$，所以

5+x=2×7.5

解得 x=10．

例 2 规定 x△y=5xy＋3x＋ay，其中 a 为常数．

比如 9△4=5×9×4＋3×9＋4a=207＋4a．

（1）已知 3△8=145，问 7△5 与 5△7 相等吗？

（2）问 a 取何值时，对任何数 x 和 y，有

x△y＝y△x，

即，运算“ △ ”有交换律？

分析 要想知道 7△5 与 5△7 是否相等必须计算出它们的值，这时，需要首先求出定义中常数 a 的值．

解：（1）由于 3△8=145，所以

5×3×8＋3×3＋8a=145，

于是 129＋8a=145，

解得 a=2

即定义的运算为

x△y=5xy＋3x＋2y

根据运算定义，代入具体值进行计算：

7△5=5×7×5+3×7+2×5

=175＋21＋10

=206，

5△7=5×5×7＋3×5＋2×7

=175＋15＋14

＝204，

所以 7△5≠5△7

（2）如果运算律“ △ ”有交换律，那么对任何数 x 和 y，有

x△y=y△x，

代入算式，得

5xy＋3x＋ay=5yx＋3y＋ax

化简，得

（3-a）（x-y）=0，

由于对任何数 x 和 y，都有上式成立，所以

3-a=0，即 a=3

所以，当 a=3 时，对任何数 x 和 y，有

x△y=y△x

即，当 a=3 时，运算“△”有交换律．

例3 定义一种运算“∧”，对于任何两个正数a和b，$a\wedge b=\dfrac{ab}{a+b}$．

（1）说明，运算“∧”满足结合律．即

（a∧b）∧c=a∧（b∧c）．

（2）计算：2∧4∧8∧16∧16．

解（1）因为

$$(a\wedge b)\wedge c=\frac{ab}{a+b}\wedge c$$

$$\frac{\frac{ab}{a+b}\cdot c}{\frac{ab}{a+b}+c}=\frac{\frac{abc}{a+b}}{\frac{ab+ac+bc}{a+b}}$$

$$=\frac{abc}{ab+bc+ac}$$

又因为

$$a\wedge(b\wedge c)=a\wedge\frac{bc}{b+c}$$

$$=\frac{a\cdot\frac{bc}{b+c}}{a+\frac{bc}{b+c}}=\frac{\frac{abc}{b+c}}{\frac{abc}{ab+ac+bc}}$$

$$=\frac{abc}{ab+bc+ac}$$

所以（a∧b）∧c=a∧（b∧c）．

故此，运算“∧”满足结合律．

（2）2∧4∧8∧16∧16

=2∧4∧8∧（16∧16）（利用结合律）

=2∧4∧8∧8

=2∧4∧（8∧8）

=2∧4∧4

=2∧（4∧4）

=2∧2

=1

例4 设$a\oplus b=[a,b]+(a,b)$，其中[a，b]为a与b的最小公倍数，（a，b）为 a 与 b 的最大公约数．

比如，6和9，最小公倍数是18，最大公约数是3，则$6\oplus 9=18+3=21$

（1）求$3\oplus 11$，$12\oplus 9$；

（2）说明，如果 $c\mid a$且$c\mid b$，则$c\mid a\oplus b$；如果$c\mid a$且$c\mid a\oplus b$，则 $c\mid b$；

（3）已知 $6\oplus x=33$，求x？

解（1）先求出 3 和 11 的最小公倍数和最大公约数，[3，11]=33，（3，11）=1，根据“⊕”的定义，

$3\oplus 11=33+1=34$，

同理

$12\oplus 9=36+3=40$

（2）如果 c｜a 且 c｜b，则 c｜[a，b]，c｜（a，b），于是，c｜[a，b]+（a，b），即

c｜a⊕b

如果 c｜a，则 c｜[a，b]

因为c｜a⊕b，即c｜[a，b]+（a，b），

所以 c｜[a，b]+（a，b）-[a，b]，即

c｜（a，b）

又因为（a，b）｜b，

所以有 c｜b

（3）解法一

由运算定义知

[6，x]+（6，x）=33，

而（6，x）只能是 1，2，3 或 6；

所以，[6，x]只能是 32，31，30，27．其中只有 30 是 6 的倍数，则有[6，x]=30，（6，x）=3

利用公式

[a，b]·（a，b）=ab，

得 30×3=6x

所以 x=15

解法二

缩小考虑范围，

由运算定义知

[6，x]+（6，x）=33，

而 1≤（6，x）≤6，

所以 27≤[6，x]≤32，

其中只有 30 是 6 的倍数，这时（6，x）=3，

由公式[a，b]·（a，b）=ab

有 30×3=6x

解得 x=15

例 5 对于两个自然数 a 和 b（a≥b），记 a 除以 b 的余数为 a⊖b．比如 7⊖3=1，23⊖7=2．

（1）说明，若 a⊖m=r，则（a-r）⊖m=0；若 a⊖m=b⊖m，且 a＞b，则（a-b）÷m=0

（2）若 x⊖3=1，x⊖5=3，x⊖7=5，求自然数 x 的最小值．

解（1）因为 a⊖m=r，所以

a=km+r，其中 k 为自然数，即

a-r=km，

于是有 m｜（a-r），（a-r）⊖m=0．

设 $a\oplus m=b\oplus m=r$，则有 $a=km+r$， $b=lm+r$，其中 k， l 为自然数，由 a＞b 显然有 k＞l．这时有（a-b）=（k-l） m，所以

m｜（a-b），即

（2）因为 $x\oplus 3=1$，所以（x+2）$\oplus$3=0，因为 $x\oplus 5=3$，所以（x+2）$\oplus$5=0，又因为 $x\oplus 7=5$，所以（x+2）$\oplus$7=0．即 3 ｜ x+2， 5 ｜ x+2，7 ｜ x+2．所以， 3 × 5 × 7 ｜ x+2．那么， x+2 的最小值为 105，则 x 的最小值为 103．

例 6　A 是常数，对于任意两个自然数 a、b，规定

$$a\bigtriangledown b=\frac{A}{a(a+b)}$$

已知：（1▽1）+（2▽1）+（3▽1）+……+（1996▽1）

=1996

求：A.

解根据运算“▽”的定义，有

$$1\bigtriangledown 1=\frac{A}{1\cdot 2}=A\cdot(1-\frac{1}{2})$$

$$2\bigtriangledown 1=\frac{A}{2\cdot 3}=A\cdot(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})$$

$$3\bigtriangledown 1=\frac{A}{3\cdot 4}=A\cdot(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})$$

……

$$1996\bigtriangledown 1=\frac{A}{1996\cdot 1997}=A\cdot(\frac{1}{1996}-\frac{1}{1997})$$

将上面所有各式子左右分别相加，有

$$(1\bigtriangledown 1)+(2\bigtriangledown 1)+(3\bigtriangledown 1)+\cdots\cdots+(1996\bigtriangledown 1)=A\cdot$$

$$(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{1996}-\frac{1}{1997})$$

$$=A\cdot(1-\frac{1}{1997})$$

$$=A\cdot\frac{1996}{1997}$$

由已知$A\cdot\frac{1996}{1997}=1996$

所以 A=1997

例 7　定义运算“⊙”，

$$\begin{cases}a\odot 1=a\\ a\odot n=2\times[a\odot(n-1)]+a,\ n>1,\end{cases}$$

已知 m⊙4=30，

求（1）m；（2）m⊙8

解（1）m⊙1＝m，

m⊙2＝2×（m⊙1）＋m＝3m，

m⊙3＝2×（m⊙2）＋m＝7m，

m⊙4=2×（m⊙3）+m=15m，

由已知 m⊙4=30，

所以 15m=30，

解得　m=2．

（2）由上题，我们发现：

m⊙1=（2-1）m=（2^{1}-1）m

m⊙2＝（4-1）m=（2^{2}-1）m

m⊙3=（8-1）m=（2^{3}-1）m

m⊙4=（16-1）m=（2^{4}-1）m

以此类推，可得：

m⊙8=（2^{8}-1）m=（256-1）×2=510

练习题十

1．规定 a☆b=3a-2b＋5，

问：（1）2☆3 与 3☆2 相等吗？

（2）如果 a☆b=b☆a，那么这两个数 a、b 有什么关系？

（3）“☆”有交换律吗？

2．规定 $a\otimes b=\frac{a}{b}-a\times\frac{b}{a}$，其中A为常数．又已知$7\otimes1=6$，问$14\otimes2$是多少？

3．规定对于任意两个正数 a、b，

$a\#b=\frac{1}{a+b}+ab$

问：$2\#2\#\frac{3}{4}$是多少？

4．两个不等的自然数 a 和 b，较大的数除以较小的数，余数记为 a①b，比如：

5①2=1，7①25=4，6①18=0

（1）求 1997①2000，（19①97）①20，19①（97①20），

（2）已知 11①x=2，而 x 小于 20，求 x，

（3）已知（19①x）①19=5，而 x 小于 50，求 x．

5．规定运算“＆”同例 3，求下式的值．

3＆4＆5＆6＆20

第十一课　抽屉原则（一）

抽屉原则，又叫狄利克雷原则，它是一个重要而又基本的数学原理，应用它可以解决各种有趣的问题，并且常常能够得到令人惊奇的结果，许多看起来相当复杂，甚至无从下手的问题，利用它能很容易得到解决．那么，什么是抽屉原则呢？我们先从一个最简单的例子谈起．

将三个苹果放到两只抽屉里，想一想，可能会有什么样的结果呢？要么在一只抽屉里放两个苹果，而另一只抽屉里放一个苹果；要么一只抽屉里放有三个苹果，而另一只抽屉里不放．这两种情况可用一句话概括：一定有一只抽屉里放入了两个或两个以上的苹果．虽然哪只抽屉里放入至少两个苹果我们无法断定，但这是无关紧要的，重要的是有这样一只抽屉放入了两个或两个以上的苹果．

如果我们将上面问题做一下变动，例如不是将三个苹果放入两只抽屉里，而是将八个苹果放到七只抽屉里，我们不难发现，这八个苹果无论以怎样的方式放入抽屉，仍然一定会有一只抽屉里至少有两个苹果．

如果将上述问题中的苹果换成兔子、糖果、书本或数，同时，将抽屉相应地换成兔笼、小孩、学生或数的集合，仍然可以得到相同的结论．由此可以看出，上面推理的正确性与具体的事物是没有关系的．如果我们把一切可以与苹果互换的事物称为元素，而把一切可以与抽屉互换的事物叫做集合，那么上面的结论就可以叙述为：八个元素以任意方式分到七个集合之中，一定有一个集合中至少有两个元素．

同样，苹果与抽屉的具体数目也是无关紧要的，只要苹果的数量比抽屉的数量多，推理依然成立．

通过上面的分析，我们可以将上面问题中包含的基本原理写成下面的一般形式．

抽屉原理（一）：把多于几个的元素按任一确定的方式分成几个集合，那么一定至少有一个集合中，至少含有两个元素．

应用抽屉原理来解题，首先要审题，即分清什么作为“元素”，什么做为“抽屉”；其次要根据题目的条件和结论，结合有关的数学知识，来设计抽屉，在应用抽屉原理解题时，正确地设计抽屉是解题的关键．

下面，我们先来看一看如何运用这一原则解决日常生活中的一些有趣的问题．

例 1　在某个单位里，任意选出 13 个人，则这 13 个人至少有两个人的属相相同．

证明　属相一共有 12 种，不妨假设 12 种属相为 12 个“抽屉”，而将 13 个人当作 13 个“苹果”．根据抽屉原则知，有一只“抽屉“里至少放入了两个“苹果”，也就是说，至少有两个人的属相相同．

例 2　求证同一年出生的四百个人中，一定有两个人的生日相同．

分析　也许有的同学看了这个问题以后会说，只要查一查这四百个人的户口就知道了，如果我们规定不能查户口，那么，怎样才能说明其中的道理呢？其实，完全没有必要查看户口，我们只要将一年中的每一天看作一只“抽屉”，而将每一个人的生日看作一个“苹果”，这样，运用抽屉原则就可以很方便地解答此问题．

证明　把一年中的三百六十五天（闰年三百六十六天）中的每一天看作

一个“抽屉”，将四百人的每一个人的生日看成一个“苹果”，由于“苹果”数目多于“抽屉”数目，根据抽屉原则可知，一定有一个“抽屉”里至少有两个“苹果”．也就是说，至少有两个人的生日相同．

例 3　有红、黄、绿三种颜色的小球各四颗混放在一只盒子里，为了保证一次能取到两颗颜色相同的小球，一次至少要取几颗？

解答　将三种不同的颜色看作三个抽屉，为了保证一次能取到两颗颜色相同的小球，即要求至少有两颗小球出自同一抽屉，因此一次至少要取 4 颗小球．

例 4　某班有 30 名学生，班里建立一个小书库，同学们可以任意借阅，问小书库中至少要有多少本书，才能保证至少有一个同学一次能至少借到两本书？

解答　将 30 名同学看作 30 个“抽屉”，而将书看作“苹果”，根据抽屉原则，“苹果”数目要比“抽屉”数目大，才能保证至少有一个抽屉里有两个或两个以上的“苹果”，因此，小书库中至少要有 31 本书，才能保证至少有一位同学一次能借到两本或两本以上的图书．

以上四例中有关“抽屉”和“苹果”的选择比较简单．但在很多情况下，“抽屉”和“苹果”并非一下子就能选好，而是要进行认真的分析与思考才能找到，有时“抽屉”和“苹果”的数目也不是现成的，需要我们通过分析，才能计算出结果．

例 5　红色，黄色，绿色的球各 6 个，混杂地放在一起，要想闭着眼睛从中取出颜色不同的两对球，问至少要取多少才能保证达到要求？

分析　这个问题不能象前四例那样一下就能找到“抽屉”和“苹果”，从而直接运用抽屉原则来解决．由于各种颜色的球混合在一起，我们又是闭着眼睛取球，这样，如果取出的球数不多于 6 个，就有可能取出的球都是同一种颜色，这是最不利的情况，因此，要保证取出颜色不同的两对球，取出的球数必须超过 6 个，为了保证达到要求，我们从最坏的情况出发，取出的球中有 6 个都是同一种颜色，这样，问题就变成了怎样才能使余下的球中保证有两个是同颜色的．这时剩下的颜色只有两种，把两种颜色当作两只“抽屉”，而将球当作“苹果”，根据抽屉原则，只要有三个球，就能保证其中有两个是同颜色的，即在最不利的情况下，只要取出 9 个球，就能保证其中一定有两对颜色不同的小球，在其它情况下，就更无问题了．

答：至少要取出 9 个球才能达到要求．

例 6　在某班学生中，有 8 个人都订阅了《小朋友》，《少年报》，《儿童时代》中的一种或几种，问：这 8 个人中至少有几个人所订的报刊种类完全相同？

解答　8 位同学订阅的报刊种类可分成如下 7 类：{小朋友}，{少年报}，{儿童时代}，{小朋友，少年报}，{小朋友，儿童时代}，{少年报，儿童时代}，{小朋友，少年报，儿童时代}

我们将这七类看作七个抽屉，订阅相同种类报刊的学生“放到”同一抽屉中，因为 $8=1\times7+1$，即有 $1+1=2$ 个订阅相同种类报刊的学生“放到”同一抽屉中，即至少有两名学生订阅的报刊种类完全相同．

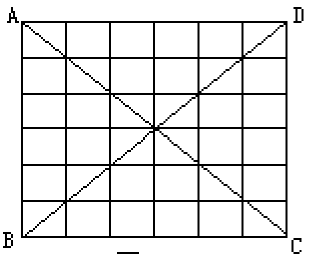


图11—1

例 7　能否在 6 行 6 列的方格表（如图 11—1）的每一个空格中分别填上 1、2、3 这三个数字中的任意一个，使得每一行，每一列及对角线 AC、BD 上的各个数字的和各不相同？并对你的结论加以说明．

分析　这个问题初看起来似乎与抽屉原则关系不大，但深入分析可以发现其中的密切联系．我们结合图来分析，图中 6 行 6 列及两条对角线，共有 14 条“线”，每条“线”上都填有 6 个数字，要使各条“线”上的数字和均不相同，那么每条“线”上数字和的取值情况应不少于 14 种．下面我们来分析一下各条“线”上取不同和的情况有多少种．如果某一条“线”上的 6 个数字都填上最小数 1，则可得到数字和的最小值 6；如果某一条“线”上的 6 个数都填上最大的数 3，那么可得到数字和的最大值 18．由于数字及数字和均为整数，所以从 6 到 18 共有 13 种不同的值，我们将数字和的 13 种不同的值当作 13 个抽屉，而将 14 条“线”看作 14 个“苹果”．根据抽屉原则一，将 14 个苹果放到 13 只抽屉中，一定有一只抽屉中放入了至少两个苹果．即：14 条线上的数字和至少有两个相同，故不可能使 14 条“线”上的各数字之和互不相同。

例 8　证明从 1，3，5，…，49 这前 25 个奇自然数中，任取 14 个数，其中必有两个数之和是 52．

证明　我们先将两数之和是 52 的数对找出来，形成满足要求的前 12 个抽屉，再由数字 1 构成第 13 个抽屉，具体构造如下：{3，49}，{5，47}，{7，45}，{9，43}，{11，41}，{13，39}，{15，37}，{17，35}，{19，33}，{21，31}，{23，29}，{25，27}，{1}．

根据抽屉原则〈一〉，从前 25 个奇自然数中，任取 14 个自然数，则必有两个出自同一抽屉，显然这两个数之和为 52．

说明：上述问题解决的关键在于恰当地利用数组来构造抽屉．

例 9　求证任意 10 个自然数中必存在两个数，它们的差是 9 的倍数．

证明　考虑任意一个自然数除以 9，其余数只属于 0，1，2，3，4，5，6，7，8，这 9 种情况中的一种，将 9 个余数当作 9 只抽屉，将任意 10 个自然数被 9 除所得余数（共 10 个）当作“苹果”，依抽屉原则〈一〉，必有两个数被 9 除其余数相同，余数相同的两数之差必是 9 的倍数．

说明　上述问题的解决，关键在于利用同余思想来构造抽屉．

例 10　设 x_1，x_2，…，x_8 是任意互异的 8 个整数，试证明其中一定存在 6 个整数 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6 使得（x_1-x_2）·（x_3-x_4）·（x_5-x_6）恰是 105 的倍数．

分析　由于 $105=3\times5\times7$，而 3，5，7 两两互质，所以只要能找到两个数 x_1、x_2 使得 x_1-x_2 是 7 的倍数，同理 x_3-x_4 是 5 的倍数，x_5-x_6 是 3 的倍数，题目即得证．

证明　根据抽屉原则 1，在所给的 8 个整数中，必有两个数被 7 除余数

相同，不妨设这两个数为 x_1，x_2，则有 $7|x_1-x_2|$，或表示为：$x_1-x_2=7k_1$（其中 k_1 为不等于零的整数）

在余下的 6 个数中，必有两个数被 5 除余数相同，不妨设这两个数为 x_3，x_4，使得 x_3，x_4 满足 $x_3-x_4=5k_2$（k_2 为非零整数）．

在余下的 4 个数中，必有两个整数被 3 除余数相同，不妨设这两个整数为 x_5，x_6，使得 $x_5-x_6=3k_3$．（k_3 为非零整数）

将上述各式相乘得到：

$$(x_1-x_2)\cdot(x_3-x_4)\cdot(x_5-x_6)=7k_1\cdot 5k_2\cdot 3k_3$$
$$=105\times\text{整数}$$

所以从给定的 8 个数中，一定可以找出 6 个数 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，使得：

$(x_1-x_2)\cdot(x_3-x_4)\cdot(x_5-x_6)$ 是 105 的倍数．

练习题十一

1．求证在某年某月出生的 32 个孩子中，至少有两个人是同一天出生的．

2．某旅店来了 25 名客人，无论怎样安排床位，都至少有两人需住同一间客房（假设原来所有客房都空着），问这个旅店最多有多少间客房？

3．求证任意 13 个数中，至少有两个数，它们的差是 12 的倍数．

4．在前 10 个自然数中任取 6 个数，求证一定存在两个数，其中一个是另一个的倍数．

5．有红色，白色，黑色玻璃球各 10 个混合放在一只袋子里，若想从中掏出两对不同颜色的玻璃球，至少要掏出多少，才能保证达到要求？

第十二课　抽屉原则（二）

在上一课中，我们学习了抽屉原则（一），通过学习我们可以发现，很多表面看来很难说清楚的问题，通过我们合理地构造抽屉，都可用抽屉原则〈一〉巧妙地进行解决．抽屉原理除去我们在上一课中所接触的结论，还有以下更一般的结论．

抽屉原则（二）：把多于 m×n 个物体放到 n 个抽屉里，那么一定有一个抽屉里有 m＋1 个或者 m＋1 个以上的物体．

例题分析：

例 1　某班组织全班 45 人进行体育比赛，项目有 A、B、C 三项，规定每人至少参加一项，最多参加两项，至少有几个人参加的项目完全相同？

解：按要求，我们将比赛项目分组：{A}，{B}，{C}，{A，B}，{A，C}，{B，C}．

我们将上述 6 种情况看作 6 个“抽屉”，由于 45=6×7＋3，根据抽屉原则〈二〉，至少有 8 个人参加的项目完全相同．

问题：在上述问题中，如果规定每个人必须参加，且只能参加一项比赛，情况如何？如果不加限制条件呢？

例 2　在一次钓鱼比赛中共有 100 人参加，比赛结束后，裁判宣布最少的钓了 7 条鱼，最多的钓了 20 条鱼，问这 100 人中，至少有几个人钓的鱼一样多？

解答：这 100 个人所钓的鱼按条数分为 14 种情况，将每一种情况看作一个抽屉，将 100 个人任意放入这 14 个抽屉中，由于 100=7×14＋2，由抽屉原则〈二〉可知，至少有 8 个人钓的鱼条数一样．

例 3　某班学生 40 人开展读书比赛活动，他们从学校图书馆借书，要保证其中至少有一人一次能借到 5 本书，图书馆至少应为这个班准备多少本书？

解答：将这个班的 40 个人看作 40 个“抽屉”，将图书馆为他们准备的书看作“苹果”，要使 40 个抽屉中至少有一个抽屉里放入了 5 个苹果，根据抽屉原则〈二〉可知，苹果数至少应为 40×4+1，即：图书馆至少应为这个班的学生准备 161 本书．

例 4　将 25 支笔放入六个铅笔盒中，证明至少有一个铅笔盒中放入了不少于 5 支笔．

证明，将六个铅笔盒看作六个“抽屉”，将 25 支笔看作“苹果”，由于 25=4×6＋1，根据抽屉原则〈二〉，至少有一个铅笔盒中放入的笔不少于 5 支．

以上几例抽屉和苹果均较明显，解决起来比较方便，而有些问题，抽屉和苹果较隐蔽，要想将问题解决，需要我们通过分析，合理地构造抽屉，才能使问题得到解决．

例 5　某单位购进一批桔子共计 90 箱，每箱至少 110 个，至多 138 个，现将桔子数相同的箱子作为一组，箱子数最多的一组至少有几箱桔子？

解答：根据题意，由于每箱至少 110 个，至多 138 个，按每箱的桔子个数，可构造 29 个“抽屉”，将 90 个元素放入到 29 个抽屉中，由抽屉原则〈二〉可知，箱子数最多的一组，至少有 4 箱桔子．

例 6　某年级共有学生 300 人，年龄最大的 15 岁，最小的 13 岁，问：

其中至少有多少人是同年同月出生的？

解答：根据题意，在这 300 名学生中，年龄最大的和年龄最小的相差三个年份，共计 36 个月份，将这 36 个月份看作 36 个抽屉，那么，将 300 个元素投放到 36 个抽屉中．

因为 300=8×36＋12．所以必有不少于 9 个元素在同一抽屉中．

即：其中至少有 9 名同学是同年同月出生的．

例 7　已知在边长为 1 的等边三角形内（包括边界），任意点了 10 个点（图12—1），求证，至少有三个点，两两之间的距离不大于$\frac{1}{2}$．

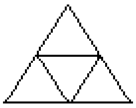


图12—1

证明：如图，等边三角形 ABC 三边中点为 D，E，F，这样 DE，EF，FD把边长为1的等边三角形分割成四个边长为$\frac{1}{2}$的等边三角形．如果规定线段 DE，EF，FD 上的点是属于 ADEF 的，那么，△ABC 内的所有点被划分为四个互不相交的区域，把每个区域看作一个“抽屉”．在△ABC 内任意点 10 个点，根据抽屉原则〈二〉，至少有三个点落入同一区域内，也就是一定有一个边长为$\frac{1}{2}$的等边三角形，其中包含三个点，显然，它们两两之间的距离不大于$\frac{1}{2}$．

例 8　在半径为 1 的圆内，任意点 17 个点，则一定有三个点使得以它们为顶点的三角形面积小于$\frac{\pi}{8}$，为什么？

解答：将单位圆 8 等分（分法如图 12—2），可得到 8 个面积相等的小扇形，每个扇形的面积为$\frac{\pi}{8}$．将这8个扇形当作8个抽屉，任意 17 个点看作元素，根据抽屉原则，至少有三个点落入同一扇形中，由这三个点为顶点构成的三角形面积必小于扇形面积,所以其面积 小于$\frac{\pi}{8}$．

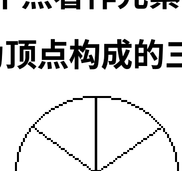
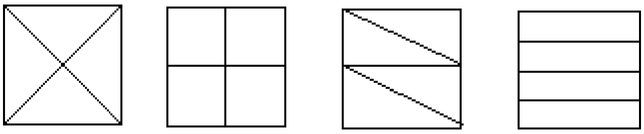


图12-2

说明：例 7，例 8 这两例是采用分割图形的方法来构造抽屉，利用这种方法构造抽屉在解决有关的几何问题上，效果往往比较显著．但要注意，不要认为用分割图形法构造抽屉只是简单地将几何图形若干等分就可以了．构造不科学仍达不到解决问题的目的，在下面的思考题中，给出了四种分割方法，大家来思考，四种分割方法构造抽屉是否都能用来说明问题．

思考：如果在边长为 1 的正方形中，任意放入 9 个点，则至少存在三个点，以它们为顶点构成的三角形面积不超过$\frac{1}{8}$．

这里给出四种分割图形来构造抽屉的方案（如图 12—3），问哪种方案不能用来说明问题？为什么？



（a）　（b）　（c）　（d）

例 9　用红、黄两种颜色的线段，分别连接平面上六个点（其中任意三点不共线）．证明：其中一定存在一个三角形，其三边是由同颜色的线段组成的．

证明：如图 12—4 所示，不妨记平面上这六个点为 A、B、C、D、E、F．考察从 A 点出发的五条线段，由于每条线段的颜色或为红色，或为黄色，由抽屉原则知，这五条线段中必有 3 条线段同色，不妨设 AB、AC、AD 同为红色，再考察连接端点 B、C、D 的线段 BC，BD，CD 若这三条线段同色，则△BCD 就是所要找的三角形．若△BCD 三边不同色，则由抽屉原则知必有两边同色，另一边为另一色，不妨设 BC 边为红色，则△ABC 就是一个红色三角形．故无论哪种情况，结论都是正确的．

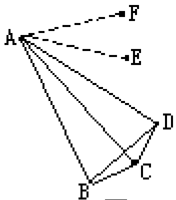


图12—4

例 10　把 1600 颗花生分给 100 只猴子，证明：无论如何分，至少有 4 只猴子得到的花生一样多．

证明：先考虑能否设计一种分法，使任意 4 只猴子分到的花生数不同．通过试算可以知道：3×（0＋1＋2+3＋…+32）=1584①，这说明对 99 只猴子可以做到任意 4 只猴子都可以不分得同样数量的花生，而第 100 只猴子只能分 16 颗花生，而前面 99 只猴子中，已有 3 只分到 16 颗花生了，故分 16 颗花生的猴子是 4 只．

实际上，通过①式可以说明，100 只猴子只能有 33 种不同分法，否则花生总数就会超过1600颗，根据抽屉原则，至少有$[\frac{100}{33}]+1=4$只猴子分得的花生一样多．

例 11　袋中有 25 个红球，24 个蓝球，23 个黄球，15 个白球及 14 个黑球，如果要保证摸出 16 个相同颜色的球，一共要从袋中摸取多少个球？

解答：显然摸到同色的 16 个球不可能是白色和黑色的．然而任意摸出的球中难免出现白色球和黑色球，从最不利的情况入手考虑，假如开始摸出的球都是白色的、黑色的，这总共有 15+14=29 个，而继续摸下去，最不利的情况是连续摸出的 45 个球中，红、黄、蓝色的球各占 15 个．在这种情况下，要保证有 16 只同色的球，最多只要摸出 15＋14＋3×15＋1=75 个球．

例 12　对于任意五个自然数，证明其中一定有 3 个数，它们的和能被 3 整除．

证明：任一整数除以 3，余数只能是 0，1，2 三种可能，将此看作三个抽屉，所给的五个数分布在这三个抽屉中，会有以下几种情况：

（1）若这三个抽屉中，每个抽屉都不空，则在每个抽屉中各取一个数，被 3 除的余数分别为 0，1，2．显然这三个数之和是 3 的倍数．

（2）若这三个抽屉中有一或两个是空的，根据抽屉原则（二）可知，必有三个数被 3 除余数相同，而余数相同的三个数之和必是 3 的倍数．

练习题十二

1．求证：任意五个人，必有三个人的性别相同．

2．将一副扑克牌去掉大王、小王，从中任取 9 张牌，其中必有 3 张牌是同一种花色，为什么？

3．在明年（即 1997 年）出生的 1000 个孩子中，至少有多少个孩子的生日相同？将来至少有多少个孩子不单独过生日？

4．在一圆内任意点 9 个点，则一定有 3 个点，用它们构成的三角形的面积小于圆面积的$\frac{1}{4}$，为什么？

5．在一个 3 行 7 列的 21 个方格构成的长方形中，每个方格涂成红色或黑色，证明：无论怎样染色，总能找到一个由小方格组成的长方形，它的四个角上的小方格颜色相同．

第十三课　推理（一）

思维是人类大脑的一种高级活动．而推理就属于思维的范畴．正确的推理可以使我们作出正确的判断，得到正确的结论．推理的能力不是天生的，而是在不断的实践活动中逐渐锻炼培养出来的．本课将使同学们得到这方面的训练．

例 1　有 A、B、C、D、E、F 六人坐在一张圆桌周围打牌．已知 E 与 C 相隔一人坐在 C 的右面（如图 13—1），D 坐在 A 对面，B 与 F 相隔一人坐在 F 的右面，F 与 A 不相邻．试问 A、B、D、F 各坐位置？

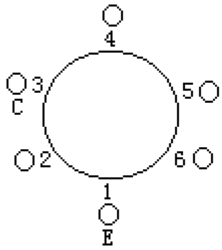


图13—1

分析　为了便于说明，先把六个位置编上号，E 所在位置为 1 号，然后顺时针依次排列．

解　由已知，D 坐在 A 对面，所以他们的位置只能是 2 号位和 5 号位．这样 B、F 只能是 4，6 号位，又知 B 在 F 的右面，所以 B 应在 4 号位置，F 在 6 号位置．由于 F 与 A 不相邻，所以 A 在 2 号位置，D 在 5 号位置．

例 2　有一个立方体，每个面上分别写上数字 1，2，3，4，5，6．这个立方体的三种摆法所显示出的数字如图 13—2，问这个立方体上的每一个数字的对面各是什么数字？

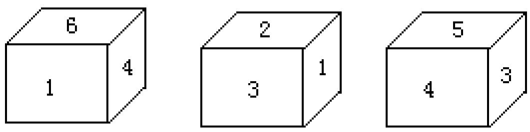


图13—2

分析　从第一个图上看，1 的对面不是 4 和 6，从第二个图上看，1 的对面不是 2 和 3，所以 1 的对面只能是 5．同理可求出立方体上的其它数字的对面各是什么数字．

解　由第一个图与第二个图可知，1 的对面数字是 5，由第二个图与第三个图可以看出 3 的对面数字是 6，由此可知剩下的二个数字即 4 和 2 是互对的数字．

例 3　一位老师当着 A、B、C 三位学生的面拿出 5 顶帽子，三白两黑．然后将三位学生的眼睛蒙住，分别给他们各戴上一顶帽子，其余两顶收了起来．老师先打开 A 学生的眼罩，问他知不知道自己戴的是什么颜色的帽子，A 回答不出来．老师又打开了 B 学生的眼罩，问 B 知不知道自己戴的是什么颜色的帽子，B 也回答不出来．这时 C 学生正确地说出自己戴的是白帽子，试说明其理由．

分析　由题设，共有 5 顶帽子，三白两黑．A、B、C 各戴一顶．当 A 的眼罩被打开他所看到只是 B、C 头上的帽子．假如 B、C 所戴的都是黑帽子，则 A 马上可以断定自己戴的是白帽子．由于 A 判断不出自己的帽子的颜色，说明他所看到只能是两白或一白一黑的帽子．轮到 B 时，他仍然说不出自己

的帽子颜色，说明他看到 C 戴的是顶白帽子．这是因为如果 C 戴的是黑帽，根据上面刚说的两种情况，B 必然戴的是白帽．

解　由以上分析可知，C 是根据 A、B 提供的信息，轻松地说出自己戴的帽子是白色的．

例 4　把 1，2，3，4，5，6 填入表格内（见表 13—3），要使得每一行右边的数字比左边的数字，每一列下面的数字比上面的数字大，问共有几种填法？

A	B	C
D	E	F

图13—3

解　依题意，A＜B＜C，D＜E＜A/B/CF，A＜D，B＜E，C＜F，可见 A 最小，FD/E/F 最大，故 A=1，F=6，因为 B＜C，B＜E 表 13-3 故 B 只能取值 2，3

（i）若 B=2，则 C 可为 3，4，5．共三种填法如下：

1	2	3
4	5	6

1	2	4
3	5	6

1	2	5
3	4	6

图13—4

（ii）若 B=3，则 C 可为 4，5．共两种填法如下：

1	3	4
2	5	6

1	3	5
2	4	6

图13—5

因此符合题意的填法共五种．

例 5　某工厂有六名棋手进行单循环比赛．比赛分三场同时进行，共赛五天，每人每天赛一场．已知在第一天 C 和 E 对弈，第二天 B 和 D 对弈，第三天 A 和 C 对弈，第四天 D 和 E 对弈．试问：F 在第五天与谁对弈？

解　先考虑 C 每天与谁比赛．已知：第一天 C 与 E，第三天 C 与 A，因而 C 与 D、B、F 的比赛只能分别在第二、四、五天．由于第二天 D 与 B 比赛，所以 C 与 F 的比赛只能是第二天．又由于第四天 D 和 E 对弈，所以第四天 C 与 B，第五天 C 与 D．用同样的方法可以得出 D 每天与谁比赛的情况．即第二天 D 与 B，第四天 D 与 E，第三天 D 与 F，第一天 D 与 A，第五天 D 与 C．

由以上的结果，很容易可以推出，第一天 F 与 B 比赛，第二天 F 与 C 比赛，第三天 F 与 D，第四天 F 与 A，所以第五天 F 与 E 比赛．

例 6　由 A、B、C 三个班中各出 3 名学生比赛长跑．规定第一名得 9 分，第二名得 8 分，第三名得 7 分，…，第八名得 2 分，第九名得 1 分．比赛结果是三个班总分相等，而且九名学生没有名次并列的，也没有同一个班的学生获得相连名次的．如果第一名是 C 班的，第二名是 B 班的，那么最后一名是哪个班的？

解　九名学生的总分为：

1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＋8＋9=45

由于三个班的总分相等，即每个班均为 15 分，将 1—9 这九个自然数，三个数一组分为 3 组，使每组之和都是 15，只有以下两种情况：

（1）一组得分为：9，5，1

二组得分为：7，6，2

三组得分为：8，4，3

（2）一组得分为：8，6，1

二组得分为：9，4，2

三组得分为：7，5，3．

在第一种情况中，二组、三组都有相连的数，即相连的名次，这不合题意，所以只能取第二组的数字．

那么 C 班有第一名，得分是 9，4，2；B 班有第二名，得分是 8，6，1；则 A 班得分为 7，5，3．可见最后一名是 B 班的学生．

例 7　三名学生进行了若干科目的考试，以考得的名次进行记分，考得第一名得分最多，其次是第二名，第三名得分最少．各科都是如此记分．已知甲最后得分 22 分，乙最后得分 9 分，丙也是得 9 分．并且已知乙英语考试得了第一名，问数学第二是谁？

解　由乙英语第一，至少乙得 3 分．且总分为 9 分，所以科目不会多于 7 科，且每科第一名至多得 8 分，又由甲总分为 22 分，所以考试科目不少于 3 科．

因为三人共得 40 分，而每科分配得分情况相同，故考试科目数应是 40 的约数，而 3、6、7 都不是 40 的约数，所以只可能是 4 科或 5 科．若是 4 科，每科共为 10 分．按名次分配应有 4 种：（7，2，1），（6，3，1），（5，4，1），（5，3，2）

由甲共得 22 分，且至多有 3 科第一（英语不是第一），则后三种情况不成立，因为既便是 3 科第一，1 科第二，总分也达到不了 22 分．

又由乙得 9 分，且英语第一．如果按（7，2，1）分配，即便其他三科都是最后一名，得 1 分，总分也超过 9 分．所以，以上几种情况不能成立．

若是 5 科，每科共为 8 分．按名次分配只有两种：（5，2，1）；（4，3，1）．而后一种也不能成立，原因仍然是不能与甲 22 分吻合．所以只有（5，2，1）符合题意．

按照这种分配方案：乙的得分情况是 5，1，1，1，1．甲的得分情况是 5，5，5，5，2．且得 2 分的科目只能是英语，所以数学第二只能是丙．

练习题十三

1．赵、钱、孙、李四个人比赛乒乓球，每两人都要赛一场．比赛结果赵胜了李，并且赵、钱、孙三人胜的场数相同．李胜了几场？

2．一位学者逝世时的年龄是他出生年份的 $\frac{1}{29}$，这位学者 1955 年曾主持了一次学术讨论会，说出他当时的年龄．

3．A、B、C、D、E、F、G、H 共八人为四对夫妻．已知：（一）E 曾作为客人参加了 D 的结婚典礼．（二）A 的爱人是 H 的表兄．（三）E 和 F 性别相同．（四）A、B、E 三人在结婚前，同住一间宿舍．（五）H 夫妇出国旅行时，B、C、E 代表各自的爱人到机场送行．

请你说出八个人，谁和谁是夫妻．

4．有六个大小相同的彩球，三个红，三个白．分别放入三个罐子里，一个罐放两红球，一个罐放两白球，另一个罐放一红一白，然后将写有“两红”、“两白”、“红白”的三个标签贴在三个罐子上．由于粗心，

三个标签全部贴错了．试问此时最少要从罐子中取出几个球，才能确定三个罐分别装的是什么彩球？

5．教师对五名学生进行了一次测验．测验成绩按总分排列为：甲、乙、丙、丁、戊．考试的科目是英语、数学、历史、物理和语文．记分办法是每科第一名得 5 分，以下依次得分为 4、3、2、1．现知道：

（1）在同一科目中以及在总分中没有得相同分数的人．

（2）甲的总分是 24 分．

（3）丙有四门功课得了相同的分数．（4）戊的物理得 5 分，语文得 3 分．（5）丁的历史得 4 分．

列出这次考试每个人的成绩表．

第十四课 推理（二）

上一课我们进行了推理的初步训练．推理的方法各种各样．上一课的例子都是从已知的条件出发直接作出判断，从而最终得到正确的结论．本课将继续进行推理的训练，但将介绍新的方法．

在推理过程中，有时不能直接由已知条件断定所得的结论，即可能存在着多种情况，此时我们可以采用“假设推理法”，对一种情况提出假设，若推出了矛盾，则排除该种情况，从而得出进一步的判断，最终得到正确的结论．

例 1 一位法官在审理一起盗窃案时，对涉嫌的甲、乙、丙、丁四人进行了审问，四人分别供述如下：

甲：“此案与我无关，罪犯在乙、丙、丁三人之中．”

乙：“是丙干的，我可以作证．”

丙：“罪犯是两个人，其中有丁．”

丁：“乙说的是事实．”

经调查，证实这四人中有两人说了假话，另外两人说的是实情．请你找出真正的罪犯．

解此题的关键是先确定哪两个人说了假话．通过题目不难发现：乙和丙回答是一致的，即他们要么说的都是真话，要么说的都是假话．

假设：乙和丁说的是真话，即罪犯是丙．而甲所说的“罪犯在乙、丙、丁三人之中”与此没有矛盾，说明甲也说了真话，即只有丙说了假话，这与调查结果矛盾．说明假设不对，即乙和丁说的是假话．那么甲和丙说的是实情，所以罪犯是丁和乙．这是因为罪犯有两人，其中之一是丁，另一人只能是乙．（排除了甲和丙）

例 2 由于下雨，赵、钱、孙、李、周五位学生上学时，各带了一把雨伞．放学时，他们各拿了一把雨伞，拿后，他们发现五个人都拿错了，而且没有两把伞正好调换的情况（如：周拿了赵的伞，赵拿了周的伞），又知：

（1）赵拿的伞不是李的，也不是钱的．

（2）钱拿的伞不是李的，也不是孙的．

（3）孙拿的伞不是钱的，也不是周的．

（4）李拿的伞不是孙的，也不是周的．

（5）周拿的伞不是李的，也不是赵的．

试问孙拿的伞是谁的？孙的伞被谁拿走了？

解 设可知，赵拿的伞只能是孙或周的，钱拿的伞只能是赵或周的，孙拿的伞只能是赵或李的，李拿的伞只能是赵或钱的，周拿的伞只能是钱或孙的．

假设孙拿的伞是赵的，那么钱拿的伞只能是周的，则赵拿的伞只能是孙的．这样就与题设矛盾（没有两把伞正好是对换的情况，即“孙拿赵的，赵拿孙的”），所以，孙拿的伞不是赵的，只能是李的．

又假设孙的伞被赵拿了．那么周拿的伞只能是钱的，则李拿的伞只能是赵的，钱拿的伞只能是周的．这样就又与题设矛盾“周拿钱的，钱拿周的”．所以孙的伞只能是被周拿了，

例 3 我国有“三山五岳”之说，其中五岳是指“东岳泰山，南岳衡

山，西岳华山，北岳恒山和中岳嵩山．一位教师拿出这五座山岳的图片，并在图片上标出数字，他让五位学生来辨别，每人说出两个，学生回答如下：

甲：2 是泰山，3 是华山．

乙：4 是衡山，2 是嵩山．

丙：1 是衡山，5 是恒山．

丁：4 是恒山，3 是嵩山．

戊：2 是华山，5 是泰山．

老师发现五个学生都只说对了一半，那么正确的说法应该是什么呢？

解假设甲说的前半句正确，即 2 是泰山．后半句是错的，3 不是华山，由丁所说 3 就是嵩山，则 4 不是恒山，再由乙说，4 是衡山，故 1 就不是衡山，5 是恒山，而如戊所说 5 是泰山，产生矛盾（由假设 2 是泰山，则 2 不是华山，故 5 是泰山），产生矛盾，甲的前半句不对，后半句正确．即 3 是华山；由丁：4 是恒山；由乙：2 是嵩山；再由戊：5 是泰山；由丙；1 是衡山．

例 4 请你从下列谈话中确定甲、乙、丙三人的年龄．

甲说：“我 22 岁，比乙小 2 岁，比丙大 1 岁”；

乙说：“我不是年龄最小的，丙和我差 3 岁，丙是 25 岁”；

丙说：“我比甲年岁小，甲 23 岁，乙比甲大 3 岁”；

以上每人所说的三句中，都有一句是虚构的．

分析这道题类似于例 3，我们认真审题就会发现以上语句中有两句是互相矛盾的：一句是甲说的“我 22 岁”；另一句是丙说的“甲 23 岁”这两句必有一句是假的，我们就从这里入手，使本题得以解决．

解 由题设每人所说的三句中，有一句是假的，先假设丙说“甲 23 岁”是假的．则丙说另两句就是真的；由“乙比甲大 3 岁”，就可以推出“乙是 25 岁”（因为“甲 22 岁”此时是确认的），由“我比甲年岁小”，可以推出丙小于 22 岁．这样就与乙所说的两句话都有矛盾，即乙所说的“丙和我差 3 岁”和“丙是 25 岁”都不能成立，这不符合题意，故假设是错误的．那么“甲 23 岁”是真的，而甲所说“我 22 岁”就是假的，则甲的另两句话就是真的，由此得出乙 25 岁，丙 22 岁．

下面我们看到的例子，已知条件比较复杂，单利用前面所举的方法很难得出结果，我们介绍一种新方法，利用表格分离“是”与“非”，从而帮助我们找出正确的答案．

例 5 甲、乙、丙、丁四个人，一个人是教师，一个是售货员，一个是工人，一个是机关干部．根据下面所列的情况判断出每个人的职业．

（1）甲和乙是邻居，每天一起骑车上班；

（2）乙比丙年龄大；

（3）甲正在教丁打太极拳；

（4）教师每天步行上班；

（5）售货员的邻居不是机关干部；

（6）机关干部与工人互不相识；

（7）机关干部比售货员和工人的年龄大．

解由条件（1），（4）可以知道甲和乙不是教师．（我们在所画出

的表格中，“甲、乙”与“教师”的交叉格上画上“×”来表示．）由条件（2）“乙比丙年龄大”可推知丙不是干部．因为由条件 7 可知：比干部年龄大的只能是教师，而乙不是教师．

甲如果是干部，由条件（6），（1），乙不能是工人，再由条件（5），乙也不能是售货员．又由前面已得结果“乙不是教师”产生矛盾，所以甲不是干部．

甲如果是工人，由条件（6），（1），（3），乙和丁不是干部，又由前面已得结果“丙不是干部”，产生矛盾，所以甲不是工人．即甲只能是售货员．所以由（1），（5）乙不是干部．至此从表格上可以清楚的得到答案（见表 14—1）．

例 6 A、B、C、D 四人分别掌握英、法、德、日四种语言中的两种，其中有三人会说英语，但没有一种语言是四人都会的，并且知道：没有人既会日语，又会法语．A 会日语，而 B 不会，但他们可以用另一种语言交谈．C 不会德语，A 和 D 交谈时，需要 C 为他们作翻译 B、C、D 不会同一种语言，请说出四个人分别掌握哪两种语言？

表 14-1

	售	工	教	干
甲		×	×	×
乙	×		×	×
丙	×	×		×
丁	×	×	×	

解 A 会日语（在表格“A”与“日”的交叉格上打“√”），会日语的不会法语（在表格“A”与“法”的交叉格上打“×”）．

A 会的第二种语言有两种可能：英语或德语，若为德语，则由“有 3 人都会英语”，推得 B、C、D 都会英语，而这与“B、C、D 不会同一种语言”矛盾，所以 A 会的第二种语言只能是英语．因为 A 和 D 交谈时需要 C 做翻译，所以 A 和 D 不会同种语言即 D 不会日语和英语，由此可得 B 和 C 都会英语，而 C 分别与 A 和 D 掌握着同一种语言，C 本人又不会德语，所以 C 和 D 只能同会法语．

B 不会日语，根据“B、D、C 不会同一种语言”的条件，B 会的第二种语言为德语．根据推理将“√”和“×”填在表格上，结果就会一目了然（见表 14—2）．

表 14-2

	英	法	德	日
A	√	×	×	√
B	√	×	√	×
C	√	√	×	×
D	×	√	√	×

例 7 某宾馆里住着 A、表 14—2B、C、D、E、F 六个不同国籍的客人．他们来自美、英、法、德、日本和意大利．现在知道：（1）A 和美国人是医生；（2）E 和日本人是教师；（3）C 和德国人是工程师；（4）B 和 F

都曾是运动员；（5）而德国人从来不爱运动；（6）并且法国人比 A 年龄大；（7）C 比意大利人年龄小；（8）B 同美国人要同到英国去旅行；（9）C 同法国人要到瑞士去度假；问 A、B、C、D、E、F 各是哪国人？

解由（1），A 不是美国人，由（2），E 不是日本人，由（3），C 不是德国人，由（4）（5），B、F 不是德国人，由（6），A 不是法国人，由（7），C 不是意大利人，由（8），B 不是美国人，由（9），C 不是法国人，以上是根据已知直接得出的．另外根据他们的职业，可以得出，A 不是德国人，不是日本人（因为 A 是医生，德国人是工程师，日本人是教师），C 不是美国人，不是法国人．E 不是美国人，不是德国人．

由此从表格上可以依次确定：C 是英国人，D 是德国人，F 是美国人，A 是意大利人，E 是法国人，B 是日本人（见表 14—3）．

表 14-3

	A（医）	B	C（工）	D	E（教）	F
美（医）	×	×	×		×	√
英			√			
法	×		×		√	
德（工）	×	×	×	√	×	×
日（教）	×	√	×		×	
意	√		×			

练习题十四

1．某地质学院的三名学生对一种矿石进行分析：甲判断：不是铁，也不是铜；乙判断：不是铁，而是锡；丙判断：不是锡，而是铁．

经化验证明：有一人判断完全正确，有一人说对了一半，而另一个人则完全说错了，你知道三人中谁是对的，谁是错的吗？

2．一天，一位教师让五名学生来分辨五位科学家的画像．老师把画像从 1 到 5 编了号，让各个学生说出其中任意两位科学家的名字．

A 说：2 号是牛顿，3 号是伽利略；

B 说：1 号是瓦特，2 号是爱因斯坦；C 说：3 号是爱因斯坦，5 号是瓦特；

D 说：2 号是牛顿，4 号是哥白尼；

E 说：4 号是哥白尼，1 号是伽利略．

老师听后，发现每人都只说对了一半．试问这几位科学家的画像分别是几号？

3．桌子上放了 8 张扑克牌，都是背面向上．牌放置的位置如图 14—4 所示，现已知

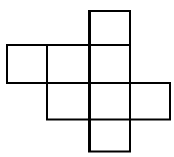


图14-4

（1）每张牌都是 A、K、Q、J 中的某一张；

（2）这 8 张牌中至少有一张 Q；

（3）其中只有一张 A；

（4）所有的 Q 都夹在两张 K 之间；

（5）至少有一张 K 夹在两张 J 之间；

（6）J 和 Q 互不相邻，A 与 K 也互不相邻；

（7）至少有两张 K 相邻．

试判断 8 张牌各是什么牌．

4．假期内，同学们学雷锋，做好事．小梅、小新和小红每人也做了两件好事．

（1）小梅、小红中有一人帮军属搞卫生；

（2）“义务植树”与“拾金不昧”不是同一人所为；（3）“拾金不昧”的小梅同学与修桌椅的同学是好朋友；（4）修桌椅的同学没有给别人补课；

（5）小梅发现，为军属搞卫生的同学与坚持每天为同学补课的同学不是同一人；

（6）有一位同学经常清扫街道．

请你说出他们三人各干了哪两件好事．

5．某外国语学院有五名外籍教师，他们分别是：英、法、德、俄和西班牙人．这五名教师每天都在教英、法、德、俄、西五种外语中教两种语言的课程．且每科外语都由两名教师任教．奇怪的是他们每人所教的语言都不是本国的语言．此外：

（1）西班牙籍教师和两名英语教师在一起打过扑克；

（2）俄国籍教师的妻子是一位德语教师的妹妹；而俄籍教师的妹妹是另一位德语教师的妻子；

（3）英籍教师不会法语，法籍教师不懂俄语；

（4）德籍教师曾利用假期同两位西班牙语教师一起去旅行；

（5）西班牙籍教师与俄籍教师教有相同的外语课；

（6）两名法语教师的本国语言都不是法籍教师所教的语言；

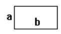
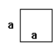
（7）学校的法语课和德语课总是在同一时间上课．

根据以上情况，你能知道这五名外籍教师各教哪两种外语课吗？

第十五课 长方体和正方体

说到长方体和正方体，会使我们想起长方形与正方形，字面上它们仅一字之差，但却是不同的两个概念．前者是空间图形，后者是平面图形．然而它们之间却紧密关联．掌握好平面图形的概念，是学好空间图形概念的基础．

下面让我们回顾一下长方形和正方形的基本概念．见表 15—1．

图形名称	图形	周长公式	面积公式
长方形		C=2 （a+b）	S=ab
正方形		C=4a	$S=a^2$

那么什么是长方体？什么是正方体呢？

一、长方体和正方体的基本概念

在日常生活中，我们经常可以看见长方体形状的物体．如盖房子用的红砖、装拚图玩具的盒子，我们学习用的课本等，它们都是以长方体形状出现的．如图 15—2．

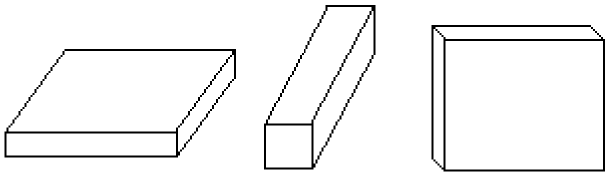


图15-2

长方体一共有六个面，每个面都是长方形（或正方形），并且相对的两个面的大小是相等的，所以长方体一共有 3 对大小相等的面，即相对面的面积相等．长方体中两个面相交的边叫做棱，它共有 12 条棱，并且相互平行的棱的长度是一样的．长方体有 8 个顶点，相交于一个顶点的三条棱的长度，分别叫做长方体的长、宽、高（见图 15—3）．

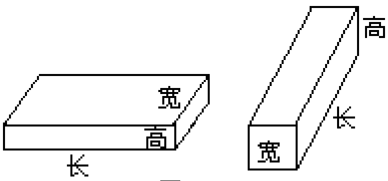


图15-3

要注意的是长方体的长、宽、高具有相对性．如果我们先认为哪条棱为宽，那么另两条棱相对来说就是长方体的长和高，所以宽不一定长度最短．长方体的摆放位置是可以变动的，也就是说长方体的长、宽、高是人们根据自己的需要而规定的．

长、宽、高相等的长方体叫正方体．正方体的长、宽、高统称为棱长．正方体是一种特殊的长方体，它也有六个面，是六个面积均相等的正方形且 12 条棱的长度也相等，即正方体是长方体的特殊情况．所以长方体的概念包含了正方体的概念（见图 15—4）．

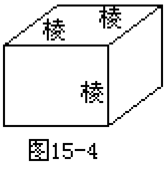


图15-4

例 1 如图（15—5）是一个长方体，它是由四个小矩形组成的，其中三个小正方形的面积是已知的，它们分别是 14、21、32．求第四个小矩形（阴影部分）的面积是多少？（单位：cm^2）

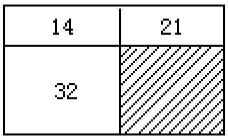


图15-5

分析设面积为 21cm^2 的矩形的长乘以面积为 32cm^2 矩形的宽为所求面积，而面积为 21cm^2 矩形的宽乘以面积为 32cm^2 矩形的长恰好是面积为 14cm^2 的面积．抓住了问题的关键，便可以解题了．

解依题意可列式 $32\times21\div14=\frac{32\times21}{14}=48$（$cm^2$）

答：所求矩形面积为 48cm^2．

例 2 一个长方形纸盒，长 8cm，宽是长的 3／4，高是宽的一半，求这个长方体的棱长总和是多少厘米？

分析因为长方体一共 12 条棱且互相平行的棱的长度是相等的，所以长度为8cm的棱有4条，宽为$8\times\frac{3}{4}$cm的棱有4条，高为$8\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}cm$的棱有 4 条．

解设棱长的总和为 1，则依题意有

$$1=8\times4+\left(8\times\frac{3}{4}\right)\times4+\left(8\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)\times4$$

=4（8＋6＋3）=4×17=68（cm）

答：棱长的总和为 68cm．

二、长方体和正方体的表面积

长方体共有六个面，它的表面积为六个面积的总和，而每一面都是矩形（或正方形）．又因为长方体每相对的两个面积相等，所以它的表面积公式由长方体的长（用字母 a 表示）、宽（用字母 b 表示）、高（用字母 c 表示），那长方体的表面积公式为：S=2（a×b＋b×c＋c×a）（图 15—6）

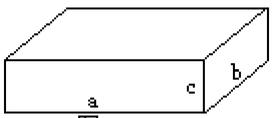


图15-6

而正方体的六个面是全等的正方形．所以正方体的表面积公式为（正方体的棱长用字母 a 表示）（见图 15—7）：$S=6a^2$

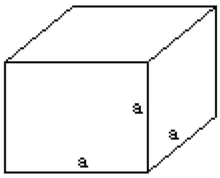


图15-7

例 3 育英小学要修建一个游泳池，它的长是 40 米，宽是 20 米，平均水深是 2 米，把游泳池的四壁和底部都用边长为 4 分米的白瓷砖铺盖一层，至少要用白瓷砖多少块？

分析首先要弄清楚这个游泳池共有几个面要铺白瓷砖，铺白瓷砖的面积总和是多少，有了面积和，再求需要多少块白瓷砖．

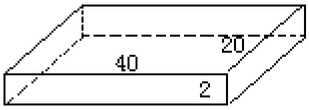


图15-8

解如图 15—8 共有侧面和下底面要铺白瓷砖，它们的面积总和为：

$S=40\times20+2\times20\times2+2\times40\times2$

$=800+80+160=1040$（米^2）

共需要白瓷砖 $1040\div0.4^2=6500$（块）

答：这个游泳池共需要白瓷砖 6500 块．

例 4 一个正方体增高 3 厘米，就得到一个底面不变的长方体，它的表面积比原来的正方体的表面积增加 96 平方厘米，求原来正方体的表面积？

分析原正方体的高增加，则它的面积扩大，而扩大的这部分面积只有 4 个侧面的面积上下底面积并没有变化，注意到这一点问题就好解决了．

解：设正方体的棱长为 x 厘米，则

$96=4\times3x=12x\quad\therefore x=8$

所以正方体的表面积为 $6\times8^2=384$（平方厘米）

答：原来正方体的表面积为 384 平方厘米．

例 5 一个物体的尺寸如图（15—9），(单位 dm) 求此物体的表面积？

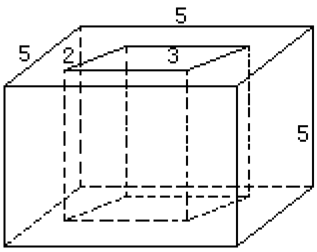


图15-9

分析由图 15—9 可以看出此物体为正方体与长方体的组合体，它的表面积为正方体的表面积减去两个长方形面积还要加上中孔四周的面积．

解 $S=6\times5^2-2\times3\times2+2\times5\times2+3\times5\times2$

$=6\times25-12+20+30=150+38=188$（$dm^2$）

答：此物体的表面积为 188 平方分米．

例 6 如图（15—10），由 20 个棱长为 4 厘米的正方体重叠放在一起构成了一个新的组合体．求这个组合体的表面积？

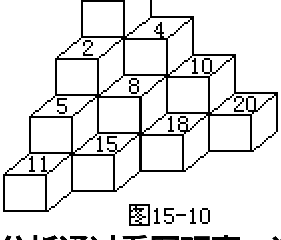


图15-10

分析通过看图观察，这 20 个正方体没有一个正方体的六个面都能看到，为了解题方便我们把这 20 个正方体按层分别编号，见图 15—11，其

中能看到5个面的正方体有1、11、20号，能看到4个面的正方体有2、4、5、10、15、18号，能看到3个面的正方体有 8 和 14 号，能看到 2 个面的正方体有 3、7、12、13、17 和 19 号，只能看到一个面的正方体有6、9、16号．

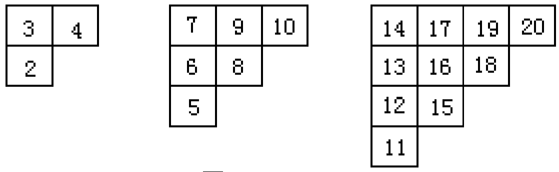


图15-11

解设 S_i 表示能看到 i 个面的正方体，（其中 i=1，2，3，4，5）则有：

$S_1=4^2\times3=48$，$S_2=4^2\times6=96$，$S_3=4^2\times2=32$　$S_4=4^2\times6=96$，$S_5=4^2\times3=48$

所以：表面积为 $S=S_1+S_2+S_3+S_4+S_5=320$（平方厘米）

这类题目要求同学在观察图形时必须具备一定的空间想象能力还要细心．

三、长方体和正方体的体积

前面我们已经提到过日常生活中我们见过不少长方体形状的物体，如家里的电冰箱，火柴盒．虽然它们都是长方体形状的物体，但它们在家里占有空间的位置可大不一样，电冰箱比火柴盒占有的空间位置可大的多．我们规定物体的体积就是物体占有空间位置的大小．我们用字母V表示长方体的体积，a，b，h 三个字母分别表示长方体的长、宽、高，则长方体的体积公式为长方体的底面积乘以它的高即：$V=a\times b\times h$．因为正方体中 a=b=h，所以正方体的体积公式是 $V=a^3$．下面我们通过以下几道例题看看如何应用它们的体积公式解决问题．

例 7　两根同样长的钢丝，一根做长方体的模型架子，另一根做正方体模型的架子，已知长方体模型的长是 12 分米，宽是 9 分米，高是 6 分米，求哪个模型所代表的物体的体积大？大多少？（接头处略去不计）

分析　由已知可求出长方体棱长的总和而这个数字正好是正方体的棱长总和，有了正方体的棱长正方体的体积便可以求出来．

解　因为长方体棱长总和=4×（12＋6＋9）=4×27=108（dm），所以正方体的一条棱长=108÷12=9（dm），所以长方体的体积 $V_1=72\times6\times9=648$（dm^3），正方体的体积 $V_2=93=729$（dm^3）$V_2-V_1=729-648=81$（dm^3）

答：正方体模型所代表的体积大．大81立方分米．

例8　有一块长方形铁皮长24厘米，宽14厘米，如图15-12，剪掉同样的四个角（阴影部分）再沿虚线折起，做成一个无盖铁盒，求这个铁盒的容积？

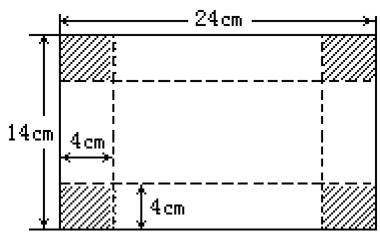


图15-12

分析 剪去四个角长为 24-4×2=16（cm）宽为 14-4×2=6（cm）高

为 4（cm）

解 $V=16\times6\times4=384$（cm^3）

答：这个铁盒的容积是 384 立方厘米．

例 9　一个长方体水箱，水箱内长 12 分米，宽 8 分米，水深 4 分米，现把水箱的水全部倒入一个棱长为 8 分米的一个正方体容器内，求倒入水的高度是多少分米？

分析　此题的关键是抓住原来水的体积等于倒入正方体容器内水的体积．

解　$[(12\times8\times4)\div8]\div8=(384\div8)\div8$

$=48\div8=6$（dm）

答：倒入正方体容器内水的高度是 6 分米．

例 10　一个长方体容器，从里面量，长为 50 厘米，宽 40 厘米，高为 30 厘米，原来容器里的水面离容器口的距离是 4 厘米，现放入一个棱长为 10 厘米的正方体铁块，求此时水面离容器口的距离是多少厘米？

分析　棱长为 10 厘米的正方体铁块放入容器后水面的高度上升，上升水的体积就是铁块的体积．

解 $V_{铁}=10^3=1000$（cm^3）

水面上升的高度 $h=1000\div50\div40=0.5$（cm）

∴水面离容器口的距离是 $4-0.5=3.5$（cm）

例 11　一个正方体木块，在它的一个角上割去一个小正方体，如图（15-13），问现在这个多面体表面积与以前的正方体表面积相比有无变化？若小正方体的棱长是原大正方体棱长的 $\frac{1}{3}$，问小正方体的体积是大正方体体积的几分之几？

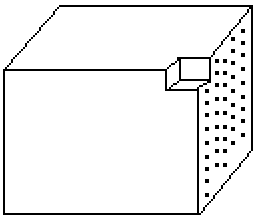


图15-13

分析　大正方体的角上割去一个小正方体后，表面积并没有发生变化，只是体积减小了．

解　由图 15-13 可以看出割去一个小正方体后表面积没有发生变化．设原正方体棱长为 x，则：

$$\frac{V_{小正方体}}{V_{大正方体}}=\frac{(\frac{1}{3}x)^3}{x^3}=\frac{1}{27}$$

所以，小正方体的体积是大正方体体积的 $\frac{1}{27}$．

关于长方体与正方体的计算题目有很多，我们从小学就开始学习，以后还要继续学习，因为它们有很广泛的应用．这类题目的解法关键是掌握好它们的基本性质和基本计算公式．

练习题十五

1．一个大长方形由 4 个小长方形组成，其中三个小长方形的面积比是 4∶5∶8，求另一块小长方形的面积与原来大长方形的面积比？（见图 15-14）a∶b∶c=4∶5∶8

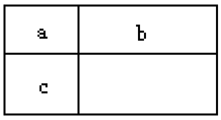


图15-14

2．一块正方体形状的木料棱长为 2 分米，把它锯成 8 块大小相等的正方体，求锯后表面积增加了多少？

3．一个长方体的长、宽、高的比是 3∶2∶1，它的棱长总和是 48 厘米，求此长方体的表面积？

4．某规划局计划挖一个能蓄水 3240 立方米的长方体形状的水池，池面长 30 米，宽 24 米，则这个蓄水池至少深多少米？水池建成后，如果蓄水 3.8 米深，每小时蓄水 48 立方米，需要蓄水多少分钟？

5．一个长方体玻璃缸，从里面量，它的长为 35 厘米，宽为 20 厘米，现在水深为 12 厘米，当把一个零件浸没在水中时，水的高度上升至 15 厘米，求这个零件的体积？

6．一个长方体形状的汽油桶，将桶里的汽油倒入一个正方体形状的容器内正好倒满，已知长方体汽油桶高 1 米，底面边长 0.8 米，宽为 0.64 米，求正方体容器的棱长？

第十六课 圆（一）

圆是一种平面图形，在日常生活中到处可见．如：圆桌、圆凳、盛菜的圆盘、车辆的轱辘，以及游戏用的棋子、飞盘、呼啦圈等．由于圆有着本身独特的性质，在某些地方是其他形状所不能代替的．车轱辘就是一个很好的例子．

圆的形成是：当线段 OA 的端点 O 固定不动，然后线段 OA 绕 O 运动一周，另一端点 A 所经过的封闭曲线就是圆．固定点 O 叫做这个圆的圆心；线段 OA 的长叫做这个圆的半径．通常圆心用字母 O 表示，半径用字母 R 或 r 表示．此外我们把通过圆心并且两端都在圆上的线段，叫做直径，直径通常用字母 d 表示．而圆上的任意两点连结的线段叫做弦，显然最长的弦就是圆的直径．

圆还具有两种对称性：（1）圆的点对称性（或叫做中心对称性），即圆周上任意一点，关于圆心都有一个对称点，所谓对称点就是这两个点到圆心的距离相等，并且这两个点都在过圆心的直线上．图 16-1 中点 A 与点 B；点 C 与点 D 都是这样的对称点．

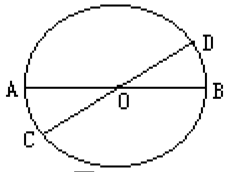


图16—1

当把一个圆沿着任意一条直径对折，直径两边的两个半圆就能够完全重合．这就是圆的特性（2）圆的轴对称性（即若一个图形沿某一条直线对折直线两边的部分能够完全重合，则这个图形称为关于这条直线的轴对称图形），圆的每一条直径都是它的对称轴．

有了圆的概念，自然就会想到圆周长和圆所围成的面积．我们作一个半径为 r 的圆，然后用一根绳子绕圆一周，发现绳子的长是圆半径的六倍多，也就是直径的三倍多．如果我们将半径换成具体数字，也相应量绳子的具体长度，我们就会算出圆周长与圆直径的比值（圆直径除圆周长）是一个无限不循环小数 3.1415926……这就是“圆周率”，即圆的周长等于圆的直径与圆周率的乘积．如果用字母 C 表示圆周长，字母π表示圆周率，那么有：

$C=\pi d$ 或 $C=2\pi r$

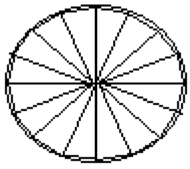


图16—2

这就是圆的周长公式．下面再看看圆的面积．在圆内作圆内接正多边形（即顶点在圆周上，各边长相等的多边形），如图 16-2 所示，圆内接正多边形的面积小于圆面积，但当正多边形的边数增加时，正多边形的面积就越来越接近圆的面积．这个圆内接正多边形的面积是由若干个小三角形的面积相加得到的，这在图 16-2 上看得很清楚．换句话说，圆内接正多边形的周长（各边长之和）当边数增加时，它就越来越近圆的周长，所以我们可以利用这个重要的特点来求得圆的面积．三角形的面

积应该是底乘高的一半，若把组成圆内接正多边形的所有三角形的面积相加就得到了圆面积的近似值．如图 16-3，a 表示三角形的高，l

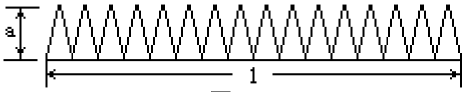


图16—3

表示正多边形的边长之和，即正多边形周长，那么这些三角形的面积之和，即正多边形的面积就等于：$S_{正}=al$，其中 $S_{正}$代表正多边形面积，由于当正多边形边数很多时，l 近似于圆周长 2πr，a 近似于圆半径 r，所以 $S_{正}$就相似等于圆面积 S；要得 S 的精确值，只需将 l 换成 2πr，a 换成 r 即可，如此得到圆面积公式：

$S=r\cdot 2\pi r=\pi r^2$

即，圆面积等于半径的平方与圆周率的乘积．

下面我们来看几道例题．

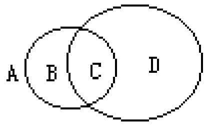


图16—4

例 1　一个圆把平面分成两部分，两个圆最多可以把平面分成四部分，如图 16-4 所示，字母 A，B，C，D 分别表示四个部分．问四个圆最多把平面分成几部分？

分析　我们知道了两个圆至多将平面分成四部分，这是由于两个圆相交后形成的，若两个圆不相交，则只能将平面分成三部分．仿此作法，我们将四个圆都相交，即可得到所求结果．

解　将四个圆相交，如图 16-5 所示，则可知四个圆最多可以将平面分成十四部分．

例 2　一只小狗遇到了一只豹子，撒腿就跑，豹子紧紧追赶，眼看要抓住小狗的时候，小狗逃到了一个圆形池塘的旁边，连忙跳进水里，豹子扑了个空，豹子并不甘心，它紧紧地盯着小狗，在池边跟着小狗跑动，准备在小狗游上岸时抓住它．豹子的奔跑速度是小狗游水速度的 2.5 倍，问小狗有没有办法在它游上岸时，不被豹子抓住．

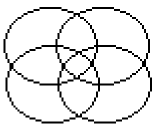


图16—5

分析　很显然，如果小狗沿着池塘游，伺机上岸，那么不管它游到哪，豹子都会跟到哪，这样，小狗一上岸就会被豹子抓住．如果小狗跳下水后沿池塘直径游，等它游到岸边时，豹子也早已在那等候了．这是因为，虽然小狗游的是直线，豹子跑的是曲线，即小狗是顺着直径游，豹子是沿着半圆周跑．但由于半圆周只是直径的倍（约为 1.57 倍），而豹子的速度却是小狗游水速度的 2.5 倍，小狗还是逃不掉．

解　小狗要脱离险境就必须利用豹子只能沿池塘边跑的特点，拉大自己的路程与豹子的路程的差距，小狗跳下池塘后先游到池塘的中心，看准豹子此时所在的位置，然后朝相反方向游，如图 16-6，A 是小狗下水的位置，B 是豹子的位置，C 是小狗将要上岸的位置．这样就在小狗游 OC

的距离（即半径长）而豹子却要跑半个圆周，这是半径的π倍（约 3.14 倍）．尽管豹子的速度是小狗游水速度的 2.5 倍也晚了．

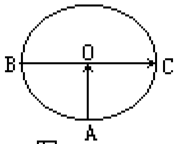


图16—6

例 3 如图 16-7，三角形 ABC 是直角三角形，AB 是圆的直径，并且 AB=20 厘米．如图阴影Ⅰ的面积比阴影Ⅱ的面积大 7 平方厘米，求出 BC 的长度．（π取 3.14）

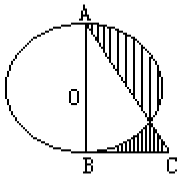


图16—7

分析 依题意“阴影Ⅰ的面积比阴影Ⅱ的面积大 7 平方厘米”，那么半个圆的面积就比三角形 ABC 的面积大 7 平方厘米（这是因为Ⅰ、Ⅱ加上一个相同的部分，就成了一个半圆和一个三角形，差不变）．

解 三角形的面积 $=\frac{1}{2}\times AB\times BC=\frac{1}{2}\times 20\times BC$

=10×BC

=半圆面积-7

$=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{20}{2}\right)^{2}-7=157-7$

=150（平方厘米）

所以 BC=150÷10=15（厘米）

例 4 如图 16-8,三角形 ABC 为等腰直角三角形,D 是 AB 的中点,AB=20 厘米,圆弧 GD、HD 是分别以 A、B 为圆心所作,求图中阴影部分的面积.(π取 3.14)

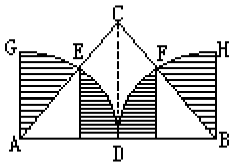


图16—8

分析 从图上看要求得阴影部分的面积,就要用四分之一圆面积减去它所包含的小三角形面积，然而要求出小三角形的面积仅用同学们现有的知识是做不到的.而是要根据圆的特性,利用图形的旋转变换将图 16-8 变成图 16-9 的样子（即沿 CD 裁开，以 D 为轴旋转，使 AD 边与 BD 边重合），此时阴影面积就等于半圆面积减去所含三角形 AEF 的面积．

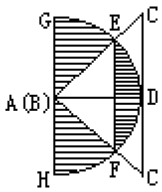


图16—9

解 三角形 ABC 是等腰直角三角形，所以∠CAD=∠CBD=45°，则∠

EAF=∠CAD＋∠CBD=90°，三角形 EAF 是直角

三角形且AE = AF = 圆半径 = 10厘米，即三角形EAF的面积 = $\frac{1}{2}$×10×10=50（平方厘米）则

阴影面积 = $\frac{1}{2}\times\pi\times10^2-50$

$=\frac{1}{2}\times3.14\times10^2-50=107$（平方厘米）

例5如图16-10，有一个直径为$\frac{20}{\pi}$厘米的圆，在圆直径上有一条曲线，它是由五个半圆弧构成，五个半圆的圆心都在圆直径 AB 上，求这条曲线长.

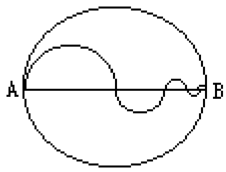


图16—10

分析 要求的曲线长，实际上就是五个小半圆弧长之和，即要求出每个小半圆弧长．这从题目所给的已知条件上看，是不大可能的，所以我们还要用圆本身的特点．

解 由题意，五个半圆的圆心都在大圆的长径上，即五个半圆的直径与大圆直径在同一条直线上，并且五个半圆直径之和等于大圆的直径．

设 a，b，c，d，e 分别为五个半圆的直径，则 a＋b＋c＋d＋e = $\frac{20}{\pi}$（cm）

由圆周长公式 c=πd

则半圆周长为$\frac{\pi d}{2}$

曲线弧长 = $\frac{\pi a}{2}+\frac{\pi b}{2}+\frac{\pi c}{2}+\frac{\pi d}{2}+\frac{\pi e}{2}$

$=\frac{\pi}{2}$（a＋b＋c＋d＋e）

$=\frac{\pi}{2}\times\frac{20}{\pi}=10$（cm）

例 6 如图 16-11 甲圆和乙圆的面积之和是丙圆面积的五分之三，甲圆内阴影部分面积占甲圆面积的三分之一，乙圆阴影部分的面积占乙圆面积的二分之一，丙圆内阴影 P 分面积占丙圆面积的四分之一，那么甲乙两圆面积之比是多少？

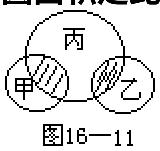


图16—11

分析 从题目所给的条件，无法直接求出甲和乙两个圆的面积值，而题目所求的是它们的面积的比值，所以只需要找出甲乙两圆存在的关

系，再从中找出它们的比值．我们注意到甲、乙两圆的阴影面积之和为丙圆的阴影面积，所以应用等量关系：

$\frac{1}{3}$（甲圆面积）＋$\frac{1}{2}$（乙圆面积）$=\frac{1}{4}$（丙圆面积）

解　设甲、乙、丙三个圆的面积分别为 a、b、c，则由已知条件有：

$a+b=\frac{3}{5}c$ 与

$\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b=\frac{1}{4}c$

在第一个等式两边同乘以$\frac{5}{3}$，得到$\frac{5}{3}a+\frac{5}{3}b=c$；在第二个等式两边同乘以4，得到$\frac{4}{3}a+2b=c$

即$\frac{5}{3}a+\frac{5}{3}b=\frac{4}{3}a+2b$

于是得（$\frac{5}{3}-\frac{4}{3}$）$a=$（$2-\frac{5}{3}$）b 即$a=b$

所以，甲圆与乙圆的面积之比为 1∶1．

练习题十六

1．环形的外圆 O_1 和内圆 O_2 的周长分别为 250 厘米和 150 厘米，如图 16-12，求环形的宽 x？

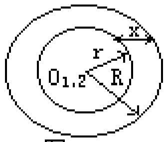


图16-12

2．求图 16-13 中阴影部分的周长（精确到 0.01）

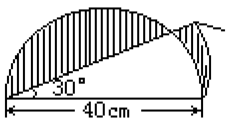


图16-13

3．已知直角三角形 ABC 中三边边长分别为 AB=5 厘米，AC=4 厘米，BC=3 厘米（图 16-14），分别以这三边为直径画圆，求阴影面积？

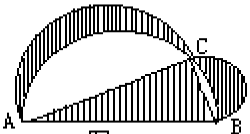


图16-14

4．图 16-15 是两个边长分别为 6 厘米，4 厘米的正方形，求阴影面积．

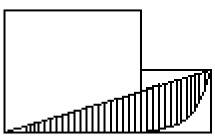


图16—15

5．求图 16-16 中阴影部分的面积．（长度单位：毫米，保留整数）

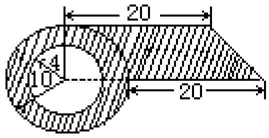


图16—16

第十七课 圆（二）

我们了解了圆之后，就可以进一步研究一个圆的局部，也就是圆的一部分的特点和性质，如图 17-1，这是圆的一部分，它的形状就象一把打开的扇子，所以我们称它为扇形．

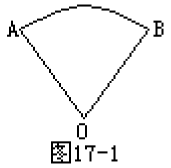


图17-1

扇形也有弧长、面积两个量，这两个量都与扇形中弧的度数（或者说弧所对应的圆心角的度数，即如图 17-1 中∠AOB 的度数）有关．我们设扇形的弧是n°，那么扇形弧的长度为：$\frac{\pi \cdot n \cdot R}{180}$，其中R是扇形的半径．扇形的面积为：$\frac{\pi \cdot n \cdot R^2}{360}$这是因为将圆分成360等份，每一份都是一个小扇形，如图 17-2，此时小扇形的弧是 1°的弧，它的长应该是$\frac{\pi R^2}{360}$（把圆周长分成360等份），那么n°弧就是取n份故得$\frac{\pi Rn}{180}$．同理，1°弧所对应的小扇形面积应是$\frac{\pi R^2}{360}$，那么n°弧所对应的扇形面积是$\frac{nR^2n}{360}$．我们用字母l表示弧长，用S表示面积，得到公式：

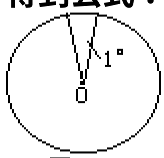


图17-2

$$l_{扇} = \frac{\pi Rn}{180}，\quad S_{扇} = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

从以上两个公式我们还可以发现：$S_{扇} = \frac{1}{2}Rl_{扇}$

现在我们若将图 17-1 中 A、B 两点连一条线段，则把扇形分成了两部分，下面是一个三角形，上面的图形我们称之为弓形．（图 17-3）

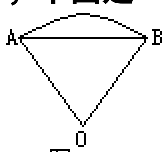


图17-3

弓形是由一条弧和它所对的弦组成．下面三个圆中的阴影部分都是弓形．图 17-4（a），弓形弧小于半圆弧，它的面积 $S_{弓}$=扇形 AmBO 的面积减去三角形 ABO 的面积；图 17-4（b）弓形弧等于半圆弧，它的面积为半圆面积；图 17-4（c）弓形弧大于半圆弧，它的面积 $S_{弓}$=扇形 AmBO 的面积加三角形 ABO 的面积．

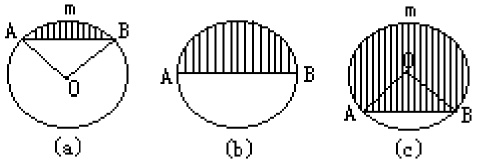


图17-4

例 1 如图 17-5，∠AOB=45°，求空白部分面积及阴影部分的周长？

分析 空白部分的面积是由两部分组成，半径为 3 的小扇形面积可直接用公式求出．另一部分则要由整个大扇形面积减去半径为 8 的扇形面积再加半径为 3 的扇形面积得到；阴影部分的周长是由四部分组成，即两条弧和两条线段．

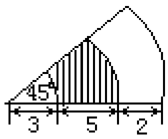


图17-5

解 由公式$S_{扇}=\frac{\pi R^2 n}{360}$　$l_{扇}=\frac{\pi Rn}{180}$

空白部分面积$=\frac{3.14\times45\times(2+5+3)^2}{360}-\frac{3.14\times45\times(3+5)^2}{360}+\frac{3.14\times45\times3^2}{360}$

$=\frac{3.14\times45\left(10^2-8^2+3^2\right)}{360}=17.6625$

阴影部分周长$=\frac{3.14\times45\times3}{180}+\frac{3.14\times45\times(3+5)}{180}+2\times5=\frac{3.14\times45\times(3+8)}{180}+10$

$=18.635$

例 2 如图 17-6，求阴影部分面积．图中是一个正六边形，面积为 1040 平方厘米，空白部分是半径为 10 厘米的小扇形．

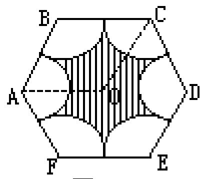


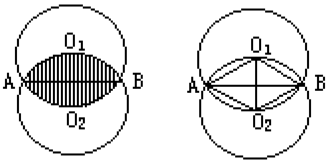
图17-6

分析 要求的阴影部分面积是用正六边形的面积减去六个小扇形面积，正六边形面积已知，现在关键是小扇形面积如何求，由扇形面积公式$S_{扇}=\frac{\pi R^2 n}{360}$**可知，需要半径和扇形弧的度数（即扇形弧所对圆心角的度数）.由已经知道正六边形每边所对圆心角为 60°,那么∠AOC=120°；又已知四边形 ABCO 是平行四边形（四边都相等）所以∠ABC=120°（平行四边形对角相等），这样就能求出扇形的面积．**

解 阴影面积$=1040-6\times\frac{3.14\times10^2\times120}{360}$

=1040-628=412（平方厘米）

例 3 如图 17-7（a）两个半径相等的圆相交，两圆的圆心相距正好等于半径，AB 弦等于 17 厘米，半径为 10 厘米，求阴影部分面积？



（a） 图17-7 （b）

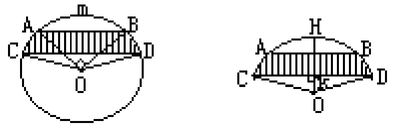
分析 阴影部分是由两个相等的弓形组成，我们只需要求出一个弓形面积，然后二倍就是要求的阴影面积了．由已知，若分别连结 AO_1，AO_2，BO_1，BO_2，O_1O_2，如图 17-7（b），我们就可以得到两个等边三角形（各边长等于半径），则$\angle AO_2O_1=\angle BO_2O_1=60°$，即$\angle AO_2B=120°$，这样就可以求出扇形 AO_1B 的面积，然后再减去三角形 AO_2B 的面积，就得到弓形面积．三角形 AO_2B 的面积就是二分之一底乘高，底就是 AB 弦，高就是 O_1O_2 的一半．

解 阴影面积 $=2\times(S_{\text{扇形}AO_1B}-S_{\triangle AO_2B})$

$$=2\times\left(\frac{3.14\times10^2\times120}{360}-\frac{17\times\frac{10}{2}}{2}\right)$$

$=209\frac{1}{3}-85=124\frac{1}{3}$（平方厘米）

例 4 如图 17-8（a）⊙O（读作圆 O）的半径是 15 厘米，∠AOB=90°，∠COD=120°，CD=26 厘米，求阴影面积．



（a） （b）

图17-8

分析 阴影部分是用弓形 CmD 减去小弓形 AmB，弓形 AmB 的面积可由已知条件直接求出．弓形 CmD 的面积要用到三角形 COD 的面积，它的底边 CD 已知，底边上的高没有直接给出，我们取 $\overset{\frown}{CmD}$ 的中点 H，连结 HO 与 CD 交于 K 点，如图 17-8（b），则∠COH=∠DOH=60°，所以∠CKO=90°（因为∠OCK=∠ODK=30°）．若连结 CH、DH，

得到两个等边三角形CHO及DHO，所以$HK=KO=\frac{15}{2}$．

解弓形AmB的面积 $=\frac{3.14\times15^2\times90}{360}-\frac{15\times15}{2}$

=176.625-112.5＝64.125

弓形CmD的面积 $=\frac{3.14\times15^2\times120}{360}-\frac{26\times7.5}{2}$

=235.5-97.5=138

阴影面积=138-64.125=73.875（平方厘米）

例 5 已知如图 17-9 所示，AB=AC=12 并且小阴影面积为 3.26，求大

阴影（弓形）的面积．（π取 3.14）

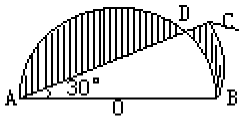


图17-9

分析 要求出弓形面积，只要用半圆的面积减去空白图形 ABD 的面积，而空白图形 ABD 的面积又等于扇形 ABC 的面积减去小阴影部分的面积．

解 扇形 ABC 的面积

$=\frac{\pi\times12^2\times30}{360}=3.14\times12$

=37.68

空白图形的面积=37.68-3.26=34.42

半圆的面积$=\frac{1}{2}\pi\times(\frac{12}{2})^2=56.52$

则弓形面积=56.52-34.42=22.1

即大阴影（弓形）的面积为 22.1 面积单位．

例 6 有两个半圆与两个圆位置如图 17-10 所示．

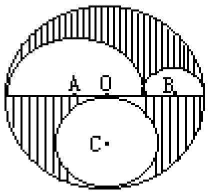


图17-10

圆 A 的半径为 3 厘米，⊙B 的半径为 2 厘米，⊙O 的直径是⊙A 与⊙B 的直径和，⊙C 的直径是⊙O 的半径，求阴影部分的面积与空白部分的面积比？

分析 空白部分的面积是⊙A 面积的一半加上⊙B 面积的一半加上⊙C 的面积，而整个大圆面积减去空白部分的面积就是阴影部分的面积，有了这两部分的面积数值，它们的比值也就可以求出来了．计算时数值中可保留π，不必取 3.14 乘出来，因为计算比值时，π可以约掉．

解 空白部分面积$S_1=\frac{1}{2}\pi\times3^2+\frac{1}{2}\pi\times2^2+\pi\times(\frac{2\times3+2\times2}{\frac{2}{2}})^2$

$(\frac{\frac{2\times3+2\times2}{2}}{2})^2=\frac{\pi}{2}\times9+\frac{\pi}{2}\times4+\frac{25}{4}\pi$

$=\frac{\pi}{2}(9+4+\frac{25}{2})=\frac{\pi}{2}\times\frac{51}{2}=\frac{51}{4}\pi$

阴影部分面积$S_2=\pi\times(\frac{2\times3+2\times2}{2})^2-S_1$

$=25\pi-\frac{51}{4}\pi=\frac{100-51}{4}\pi=\frac{49}{4}\pi$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{49}{4}\pi}{\frac{51}{4}\pi}=\frac{49}{51}$$

即阴影部分的面积与空白部分的面积比是 49∶51．

例 7 有一个半径为 1 的大圆和一些半径为的小圆，现在要用这些小圆将大圆盖住，至少要用多少个小圆？

分析 要将大圆盖住，首先要将大圆圆周盖住，由大圆半径是小圆半径的 2 倍，即大圆的半径是小圆的直径，故此我们想到正六边形的性质“边长与半径相等”，可用六个小圆盖住大圆圆周．现在还剩下中间部分没有盖住，但中间这个图形的六个顶点恰好在一个直径为 1 的圆周上，所以再用一个小圆就可以把这个大圆盖住（如图 17-11）．

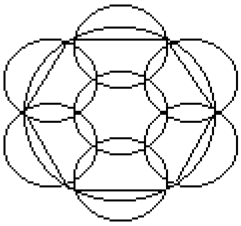


图17-11

解 将大圆盖住至少要用七个小圆．

例 8 有一根长 40 厘米的铁丝，使它首尾相接围成一个面．问它围成的正方形面积大，还是围成的圆形面积大？（接头忽略不计）

分析 要想知道哪个图形的面积大，必须求出正方形的面积和圆形面积，求正方形面积必须先要求出正方形的边长，求圆形面积必须先要求出圆的半径．

解 周长为40厘米的正方形一边长为$\frac{40}{4}=10$（厘米），其面积

$S_{正方形}=10^2=100$（平方厘米）

圆的周长是 40 厘米，由周长=2πR（R 为圆半径），

得$R=\frac{40}{2\pi}=\frac{20}{\pi}$所以圆的面积为$S_{周}=\pi R^2=\pi\times\left(\frac{20}{\pi}\right)^2=\frac{400}{\pi}=\frac{400}{3.14}$

≈ 127（平方厘米）

所以由以上计算可以看出圆形面积比正方形面积大（同学们可以记住这个结论：周长一定时，圆的面积大于正方形面积）．

练习题十七

1．已知一个扇形 OAB 它的弧长为 4.71 厘米，扇形弧为 60°，求它所对的弦长？

2．如图 17-12，AB 与 CD 是两条垂直的直径，圆 O 的半径为 15 厘米，$\overset{\frown}{AEB}$是以 C 为圆心，AC 为半径的圆弧，求阴影部分面积．

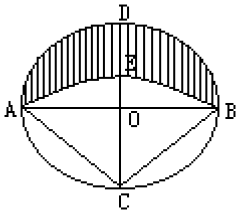


图17-12

3．如图 17-13，AD 是圆的直径，B、C 是圆直径上的点，并且 AB=BC=CD=a，求阴影部分的周长，以及它圆周长的比值？

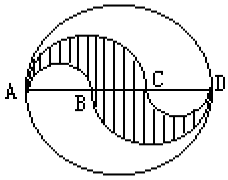


图17-13

4．在半径是 8 厘米的圆中，弓形弧的度数为 60°，弓形的高（弓形弧的中点到弦的垂直线段的长）是 2 厘米，求弓形的面积？（见图 17—14）

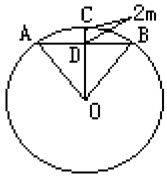


图17-14

5．有一块凸边形的草地，如果以凸多边形每个边为直径画一个圆，这些圆能把这块草地覆盖住吗？也就是说，草地上每个点都至少落在一个圆圈内，这可能吗？如果不可能，对边数有什么限制就可以了？（见图 17—15）

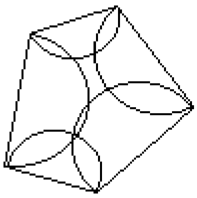


图17-15

第十八课 圆柱和圆锥

圆柱和圆锥，是我们日常生活和生产实际中常见的两种物体，很多问题的解决都与圆柱及圆锥的体积和表面积的计算有着密切的关系．

例 1 有甲、乙两只水杯（如图 18—1），问哪一只杯子盛的水多（两只杯子都装满水）？（单位：㎝）

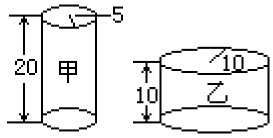


图18—1

分析 要想知道甲、乙两只杯子哪一只盛的水多，我们只需计算一下甲、乙两只杯子的容积各是多少，然后比较一下就可以了．

解 ∵$V_{甲}=\pi\times5^2\times20=500\pi$（㎝^{3}）

$V_{乙}=\pi\times10^2\times10=1000\pi$（㎝^{3}）

通过计算可知，乙水杯装的水多．

例 2 两个相同的圆锥容器中各装一些水，使水深都是圆锥高的$\frac{1}{3}$．那么，如图18—2，甲，乙两容器中哪一个水多？多的是少的几倍？

分析 只需计算一下两容器中的水的体积．

解 设圆锥底面半径为 r，高为 h，则甲容器中水面半径为$\frac{2}{3}$r，乙容器中水面半径为$\frac{1}{3}$r．分别用$V_{甲}$、$V_{乙}$表示两容器中水的体积，则：

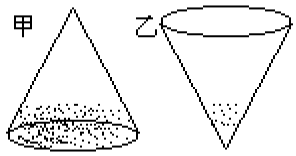


图18—2

$$V_{甲}=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h-\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{2}{3}r\right)^2\cdot\frac{2}{3}h=\frac{19}{81}\pi r^2\cdot h$$

$$V_{乙}=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{3}r\right)^2\cdot\frac{1}{3}h=\frac{1}{81}\pi r^2\cdot h$$

$$V_{甲}/V_{乙}=\frac{19}{81}\pi r^2h/\frac{1}{81}\pi r^2h=19$$

所以甲容器中的水多．甲容器中的水是乙容器中的水的 19 倍．

例 3 小明的母亲买了一条项链，你能用一只圆柱形水杯帮助小明的母亲测定一下项链是不是金的吗？（假如项链重 20 克），请说出测定方法．

答：能测定．

我们可以先将项链放入水杯中放满水，然后取出项链，测一下水杯中水下降的高度，就可以利用圆柱的体积公式计算出项链取出前后水杯中水的体积差值，从而也就可以知道这部分水的重量，用项链的重量去除以水的重量，看一看结果就可以知道金项链是真的还是假的了．

例 4 在一只底面半径为 30 厘米的圆柱形水桶里，有一半径为 10 厘米的圆锥形钢材浸没在水中．当钢材被取出之后，水面下降了 1 厘米．求此钢材的长度．

分析 由于知道圆锥形钢材的半径，故只要能知道其体积，即可求出钢材的长度．而钢材的体积与水桶中水减少的体积是相同的．

解 钢材的体积为：

$\pi\times30^2\times1=900\pi$（$cm^3$）

钢材的底面积为：

$\pi\times10^2=100\pi$（cm^2）

所以有：$\frac{1}{3}\times100\pi\times h=900\pi$

h＝27（cm）

即：圆锥形钢材的长度为 27 厘米．

说明：在本题计算的中间步骤中保留了π的原形．这样做既简单又准确：

例 5 一个瓶子里装了多半瓶水（如图 18—3（a））但没有达到上部变窄的部分．你能仅用一把带刻度的尺子测出瓶子的容积吗？怎样测？（规定不能打开瓶盖）

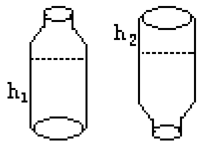


图18—3

解答 我们可以量出瓶子的底面直径，计算出底面积 S，量出水面高度 h_1，然后将瓶子倒过来，如图（b）测出 h_2．sh_1 是盛水部分的体积，sh_2 是没有盛水部分的体积，所以，瓶子的容积是前面的两部分体积和．即 $S(h_1+h_2)$．

例 6 一容器的上部是半径为 30 厘米，高为 20 厘米的柱体，下部为锥体，锥体高是柱体的一半（如图 18—4），求此容器的体积．

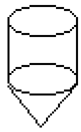


图18—4

解 此容器分成柱体、锥体两部分，其体积是两部分的和．

柱体部分的体积为：

$\pi\times30^2\times20=18000\pi$（立方厘米）

锥体部分的体积为：

$\frac{1}{3}\pi\times30^2\times10=3000\pi$（立方厘米）

所以容器的体积为：

$18000\pi+3000\pi=21000\pi\approx65973$（立方厘米）

答：此容器的体积为 65973 立方厘米．

例 7 用一块长 50 厘米，宽 30 厘米的长方形铁皮做圆柱形容器的侧面，再另用一块铁皮做底，怎样做才能使此容器的容积最大？

解答 我们要回答上述问题实际上只需考虑两个方面，即以长方形的长做为柱形容器的高，还是以长方形的宽做为柱形容器的高，比较这两种情况下柱形容器的体积，即可确定方案．

①若以宽为高，则长方形的长即为柱形容器的底面周长，所以底面半径为：

50÷2π=25／π（厘米）

此时容器的体积为：

$\pi\times\left(\frac{25}{\pi}\right)^2\times 30=18750/\pi$（立方厘米）

②若以长为高，则长方形的宽即为柱形容器的底面周长，所以底面半径为：

30÷2π=15／π（厘米）

此时容器的体积为：

$\pi\times\left(\frac{15}{\pi}\right)^2\times 50=11250/\pi$（立方厘米）通过计算，我们可以知道，用长方形较短的一边做高时容器的容积大．

例 8 如图（18—5）是一顶帽子．帽子的顶部是圆柱形，帽沿部分是一个圆环．若帽顶的半径、高与帽沿的宽尺寸相同，问是帽顶部分用料多还是帽沿部分用料多？

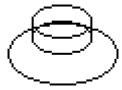


图18—5

解 由于帽顶的半径、高及帽沿的宽尺寸相同，我们不妨设为 a 厘米，比较两部分谁用料多也就是比较一下两部分的表面积．

帽顶部分的表面积为：

$\pi\cdot a^2+2\pi\cdot a\cdot a=3\pi a^2$

帽沿部分的面积为：

$\pi\cdot(2a)^2-\pi\cdot a^2=3\pi a^2$

可见两部分的面积相同

答：帽顶部分和帽沿部分的用料一样多．

例 9 用直径为 20 厘米的圆钢锻造长 300 厘米、宽 50 厘米、高 5 厘米的长方体钢块，应截取圆钢多长？

解答 所截取的圆钢的体积应等于长方体钢块的体积．设应截取圆钢的长度为 x 厘米，则圆钢的体积可表示为：$\pi\cdot 10^2\cdot x=100\pi x$（立方厘米）

长方体钢块的体积为：

300×50×5=75000（立方厘米）

所以圆钢的长度为：

x=75000／100π≈23.9（厘米）

答：应截取圆钢 23.9 厘米．

例 10 一个长方体容器内，放有一截圆钢（竖直放置）．现开启水龙头往容器内灌水．3 分钟时，恰好没过圆钢顶部．再过 18 分钟水已灌满容器．已知容器的高为 60 厘米，圆钢高度为 20 厘米，求容器底面积与圆钢底面积之比．

解答 由题意知：若往空容器内灌水，18 分钟水面升高 40 厘米，则水面升高 20 厘米需 9 分钟，而实际上水面升高 20 厘米只用了 3 分钟，说明容器底面积被圆钢底面盖住了三分之二，所以容器底面积与圆钢底面积之比为$\frac{3}{2}$．

例 11 如图 18—6 为一三角形，求以 AB 为轴旋转一周所得纺锤体的体积．

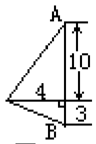


图18—6

解 图 18—6 的三角形以 AB 为轴旋转后所得到的纺锤体可分成两个锥体，两个锥体的底面半径均为 4，高分别为 10 和 3．所以此纺锤体的体积为：

$$\frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\times 10+\frac{1}{3}\pi\cdot 4^2\times 3=\frac{208\pi}{3}\approx 217.7$$

答：所得纺锤体的体积为 217.7．

练习题十八

1．在一底面半径为 30 厘米的圆柱形容器内，有一半径为 20 厘米的圆柱形钢材浸没在水中．当取出钢材之后，水面下降了 4 厘米．求此圆钢的长度．

2．有甲、乙两容器如图 18—7，先将甲容器中装满水，然后将水倒入乙容器中．求乙容器中水的深度。长度单位：厘米．

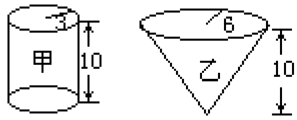


图18—7

3．在图 18—8 中的圆锥容器内盛有 1 千克水，水面在锥高的三分之一．此容器还能装多少千克水？


图18—8

4．有两个盛满水的底面半径分别为 10 厘米，20 厘米，高均为 30 厘米的圆锥，将它们盛的水全都倒入一个底面半径为 20 厘米的圆柱容器内，求水深．

5．图 18—9 的形体下部是棱长为 30 厘米的正方体，上部是圆柱体的一半，求此形体的全部表面积和体积．

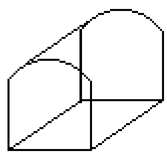


图18—9

第十九课 比和比例（一）

两个数的比实际上就是两个数的商．两个数 a 与 b（b≠0）的比可记为：

$a：b=\frac{a}{b}$ （b≠0）

因此，除法、分数、比例实质上是一回事．

由分数的性质可以知道：

a：b=na：nb（n≠0）

两个数的比叫做单比，两个以上的数的比叫做连比．如：a：b：c（b≠0，c≠0）

连比也满足比的基本性质，即：

a：b：c=na：nb：nc（n≠0）

有四个数 a，b，c，d，（b≠0，d≠0），满足 a：b=c：d，

即：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，称之为比例式，在此式两边同乘以bd，就得到$ad=bc$．（称之为等积式）

我们复习一下正比例和反比例．

一、如果两个变数y和x的比值（也就是商）一定，即$\frac{y}{x}=K$（定值），那么称 y 与 x 成正比例关系．

例如：（1）速度一定时，路程与时间成正比例关系：

$\frac{路程}{时间}=$速度（一定）；

（2）商品单价一定时，总价与商品数量成正比例关系：

$\frac{总价}{商品数量}=$单价（一定）；

（3）工作效率一定时，工作总量与工作时间成正比例关系：

$\frac{工作总量}{工作时间}=$工作效率（一定）．

二、如果两个变数 x 和 y 的乘积一定，即 xy=K（定值），那么称 x 与 y 成反比例关系．

例如：（1）路程一定时，速度与时间成反比例关系：速度×时间=路程（定值）；

（2）长方形面积一定时，长与宽成反比例关系：长×宽=长方形面积；

（3）两个互相咬合的齿轮，齿数与转数成反比例关系．

例 1 某生产队饲养猪、牛、羊共 230 头，其中猪与牛的头数比为 3：2，羊与牛的头数比为 4：3，求（1）猪与羊的头数比？

（2）猪、牛、羊各多少头？

分析 如果求出猪、牛、羊的头数之比，自然也就求出了猪与羊的头数之比．

由条件可知：猪：牛=3：2，

羊：牛=4：3，

这两个单比中，牛所占的份数分别为 2 和 3，这两个数的最小公倍数是 6，将这两个比变形为：猪：牛=9：6，

羊：牛=8：6，

所以：猪：牛：羊=9：6：8

其中，猪：羊=9：8 正是我们所要求的．

现在，由已知，共有 230 头，

可知：猪 $=\frac{9}{9+6+8}\times 230=\frac{9}{23}\times 230=92$头，

牛 $=\frac{6}{9+6+8}\times 230=\frac{6}{23}\times 230=60$头，

羊 $=\frac{8}{23}\times 230=80$头．

通过这道题，我们要掌握把两个单比转化成连比的方法，即将两个单比中的共同项利用比例性质变成相同的份额，从而把两个单比联系起来．

例 2 现有黑、白棋子若干，其个数之比为 3：2，后又放入白棋子 6 个，其个数之比变为 5：4，求原来有多少个黑棋子？

分析 原有黑、白棋子之比为 3：2，加入 6 个白棋子后变为 5：4．由于黑棋子个数不变，可将两个比的前项写成一样，就是：

3：2=15：10（同乘以 5）

5：4=15：12（同乘以 3）

从上式可看出白棋子个数增加了两份，由已知是 6 个棋子，故可求出每份 3 个棋子．

这样，黑棋个数为：15×3=45（个）

我们列一下综合算式：

15×[6÷（12-10）]=45（个）

这道例题与例 1 的思想是一样的，先找出两个比例（单比）之间的联系，在本题中，两个单比的前项都表示不变的黑棋个数，故利用比例的基本性质，将前项写成一样，从而分析出白棋子个数的差异与份数的差异．

例 3 某人买甲、乙两种油笔共 100 支，已知甲油笔每支 1.50 元，乙油笔每支 1.00 元，且甲、乙两种油笔所用的钱数一样多．

求甲、乙两种油笔各买了多少支？

分析 我们前面已经谈到，当某种商品单价一定时，所花的钱的总数与商品的数量成正比；反之，若花钱总数一定，则购物数量与单价成反比．

因为甲、乙两种油笔单价之比为 15：10=3：2

而它们所用的钱数一样多，由购物数量与单价成反比可知：甲、乙两种油笔的数量之比为 2：3．

所以甲油笔有 $100\times\frac{2}{2+3}=40$（支）

乙油笔有 $100\times\frac{3}{2+3}=60$（支）

这道例题重点在于抓住“甲、乙两种油笔所用钱数一样多”这句话，

从而分析出反比关系，正确解出本题．

例 4 如图 19—1，甲、乙、丙三个齿轮咬合．当甲轮转 4 圈时，乙轮恰好转 3 圈；当乙轮转 4 圈时，丙轮恰好转 5 圈．

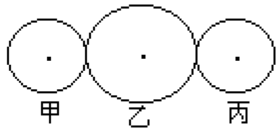


图19—1

求这三个齿轮的齿数最少应分别是多少？

分析 为书写简便，我们用甲来表示甲的齿轮齿数，余同．

由已知：甲：乙=3：4 乙：丙=5：4

注意：齿轮的齿数应与转数成反比．

利用例 1 的方法，我们把这两个单比化成连比的形式，有：

甲：乙：丙=15：20：16

由于 15，20，16 这 3 个数互质，且齿数需为自然数，所以甲、乙、两三个齿轮的齿数应最少分别为 15，20，16．

我们总结一下，“比和比例”的问题，首先要正确理解其概念，尤其是“正比例”、“反比例”概念，分清题目中所给的是哪种关系．其次，对于出现两个或两个以上的单比，我们要善于找出它们的联系，从而使问题明显化．

下面，我们看两个较复杂的例题．

例 5 商店中有四种不同的商品 A、B、C、D，A 的价钱与 C 的价钱的比为 1：6；

B 的价钱与 C 的价钱的比为 2：3；

D 的价钱与 B 的价钱的比为 17：12；

现各买一件，恰花人民币 100 元．求每种商品的单价．

分析 已知给了四种商品，给了三个价钱比（单比），我们的目的是化成连比，从而求出每个商品的单价．

由三个单比求连比，比之例 1 要复杂，但基本思想是一样的．

为书写简便，我们不妨记 A 的单价为 A，B 的单价为 B，余同．

由 A：C=1：6，B：C=2：3 这两个单比中，C 是共同项，因此计算 6 与 3 的最小公倍数为 6，所以：A：C =1：6

B：C=2：3=4：6

从而有 A：B：C=1：4：6

又由已知 D：B=17：12，B 是共同项，因此计算 4 与 12 的最小公倍数为 12，

所以：A：B：C=1：4：6=3：12：18

D：B=17：12

所以：A：B：C：D=3：12：18：17

所以：$A=\frac{3}{3+12+18+17}\times 100=6$（元）

同理，B=24 元，C=36 元，D=34 元．

例 6 一个容器内已注满水，有大、中、小三个球．第一次把小球沉入水中；第二次捞出小球，沉入中球；第三次捞出中球，沉入大球和小球．

现已知，第一次溢出水量是第二次的$\frac{1}{3}$，第三次是第一次的2.5倍．

求三个球的体积之比．

分析 我们简记“小”为小球体积（余同）．第一次溢出水量为小球体积；第二次先捞出小球后水面已然不满，再沉入中球，溢出水量不是中球体积，而是中球体积减去小球体积；第三次先捞出中球，再沉入大球和小球，那溢水量为大球体积加小球体积减去中球体积．

因此，我们把已知条件表示如下：

小：（中-小）=1∶3，

（大+小-中）：小=2.5∶1，

分析上面这两个比例式．“小”均占一份，故可写成连比的形式：

小：（中-小）：（大+小-中）=1∶3∶2.5，

“小”占一份，“（中-小）”占 3 份，故此，“中”占 4 份；“（大+小-中）”共占 2.5 份，故此，“大”占 5.5 份．

所以：小：中：大=1∶4∶5.5

=2∶8∶11

注：我们习惯上把比写成最简整数比．

练习题十九

1．某商店今年第一季度共售出洗衣机 760 台，其中一月份与二月份销售量比为 3∶4，一月份与三月份销售量比为 6∶5，问二月份和三月份销售量之比是多少？三个月每个月各销售了多少台？

2．甲、乙两堆火柴，从甲堆取 30 根火柴到乙堆，甲、乙两堆火柴根数之比为 1∶2；从乙堆取 50 根火柴到甲堆，甲、乙两堆火柴根数之比为 5∶2．求两堆火柴各有多少根？

3．兄弟两人，月收入的比为 4∶3，月支出比为 11∶6，月结余均为 180 元，问每人每月收入多少元？

4．有三堆棋子，每堆数量都相等，并且都只有黑、白两色棋子，第一堆里的黑子和第二堆里的白子一样多，第三堆里的黑子占全部黑子的$\frac{2}{5}$．把这三堆棋子合在一起，问白子占全部棋子的几分之几？

5．盆中已盛满清水。现有三个铁球甲、乙、丙，第一次将甲和乙放入盆中；第二次捞出乙，放入丙；第三次捞出甲，再放入乙．

观察三次的溢水量，发现：第一次与第二次的比为 5∶4，第一次与第三次的比为 5∶3，求甲、乙、丙三个铁球的体积比？

第二十课 比和比例（二）

上一课，我们复习了比和比例的概念和基本性质，并通过例题学习了用比和比例的有关知识去解题的基本方法．

这一讲，我们学习一下如何利用比和比例的知识解决某些特殊的应用题，例如浓度问题、行程问题．我们仍要注意的是寻找题目中的比例关系，如行程问题中，若时间一定，则路程与速度成正比；若路程一定，则速度与时间成反比．只有找好比例关系，才能正确列出比例式，从而利用比例的基本性质并抓住比例之间的联系通过细致的分析解决问题．

下面，我们具体的看一些例子．

例 1 如图 20—1，甲、乙二人绕一个长方形操场跑步锻炼．该操场长 160 米，宽 120 米．甲从 A，乙从 B 相向而跑，结果第一次在 E 处相见，E 离 A 处有 60 米，然后继续跑．问甲、乙二人能否在 E 处再次相遇？若相遇，这是甲、乙的第几次相遇？

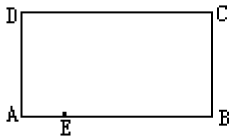


图20—1

分析 由图可知，BE=100 米，这意味着乙的速度比甲快，甲、乙速度之比为 3：5．

如果再次在 E 处相遇，此时甲、乙都跑了整数圈．由于时间相同，路程与速度成正比．于是甲跑 3 圈，乙跑 5 圈，甲、乙恰好在 E 点再次相遇．

因为甲、乙相遇一次，就是合起来跑了一圈，因为甲、乙共跑了 3+5=8 圈，所以从 E 点出发后甲、乙两人共遇见了 8 次．这说明最后在 E 点相遇是甲、乙的第九次相遇（包括第一次在 E 点相遇）．

这道题我们要抓住时间相同，确定路程与速度成正比关系．利用这个关系，本题迎刃可解．

例 2 两个相同的瓶子装满酒精溶液，一个瓶中酒精与水的体积之比为 3：1，而另一个瓶中酒精与水的体积之比是 4：1，若把两瓶酒精溶液倒入一个盆中混合，问混合液中酒精与水的体积之比为多少？

分析 已知两个瓶中酒精与水的体积比分别为：3：1，4：1，

而所求为混合后的酒精和水之比．

表面上看，已知两个比的前项所表示的酒精体积不同，后项所表示的水体积也不同，这两个比没有联系．

但是，我们看已知条件“两个相同的瓶子”，知酒精与水的体积和是一定的，这样，我们把已知酒精和水的比转化成酒精和酒精+水的比．

于是：第一个瓶中的酒精和酒精+水的比为 3：4，第二个瓶中的酒精和酒精+水的比为 4：5．

将这两个单比改写成 15：20，16：20．

将 1 个瓶子的容积看作 20 份，那么 2 个瓶子的容积为 40 份，两个瓶子中的酒精一共占了 15+16=31 份．两个瓶子中的水一共占了 40-31=9 份．所以混合液中酒精与水的体积比为 31：9．

这道题我们要抓住已知“两个相同的瓶子”，从而把两个单比一个

个联系起来．

例 3 如图 20—2，ABCD 是一个梯形，E 是 AD 的中点，直线 CE 把梯形分成甲、乙两部分，其面积比是 10∶7．

求上底 AB 与下底 CD 的长度之比．

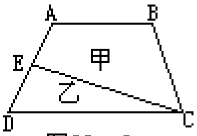


图20—2

分析 因为 E 是中点，三角形 CDE 与三角形 CEA 面积相等．三角形 ADC 与三角形 ABC 高相等，它们的底边 AB∶CD=三角形 ABC 的面积∶三角形 ADC 的面积

=（10-7）∶（7×2）

=3∶14

这道题我们利用了等高的三角形，面积与底边长成正比这样一个比例关系，有关这方面的内容我们将在下一讲详细论述．本题正是抓住这样一个比例关系很简捷地求出答案的．

例 4 3 个苹果的价钱与 4 个梨的价钱一样，5 个梨的价钱与 6 个柿子的价钱一样．现在买了 3 个苹果，4 个柿子，6 个梨，共花了 8 元．问苹果、梨、柿子的单价各是多少？

分析 我们把苹果的单价简记为苹果，其它类似．

由已知，苹果∶梨=4∶3 梨∶柿子=6∶5

由上一讲的例 1 所示方法，有：苹果∶梨∶柿子=8∶6∶5

那么：3 个苹果∶6 个梨∶4 个柿子

=（3×8）∶（6×6）∶（4×5）

=24∶36∶20

=6∶9∶5 又由已知共花去 8 元，

所以3个苹果花去 $\frac{6}{6+9+5}\times 8=2.4$元

6个梨花去 $\frac{9}{6+9+5}\times 8=3.6$元

4个柿子花去 $\frac{5}{6+9+5}\times 8=2.0$元

所以，苹果的单价=2.4÷3=0.8 元

梨的单价=3.6÷6=0.6 元

柿子的单价=2.0÷4=0.5 元

如上所述，我们用比例的方法求出了问题的解，下面我们用另一种比例的方法求解．

设每个梨的价格为 1，则每个苹果价格为

$\frac{4}{3}$，每个柿的价格为 $\frac{5}{6}$，

于是有：

$$\frac{4}{3}\times 3+1\times 6+\frac{5}{6}\times 4=\frac{40}{3}$$

也就是说，$\frac{40}{3}$个梨的价钱是8元，每个梨的价钱是：$8 \div \frac{40}{3} = 0.6$元

苹果与柿子的单价分别是：

$0.6 \times \frac{4}{3} = 0.8$元

$0.6 \times \frac{5}{6} = 0.5$元

无论是哪一种方法，我们都紧紧抓住苹果、梨、柿子之间的单价的比例关系，从而使问题获得解决．

例 5 甲齿轮有 60 齿，乙齿轮有 36 齿，为了使甲齿轮转动 15 圈带动乙齿轮转动 8 圈，需在甲、乙齿轮之间连接一个齿轮丙．齿轮丙是由固定在一起的大、小两个齿轮组成的复合齿轮（丙轮上大、小两个齿轮转动的圈数始终相同）.丙轮上大齿轮与甲轮咬合,小齿轮与乙轮咬合.求丙轮上大、小齿轮齿数比是多少？齿数最少应分别是多少齿（如图 20—3）？

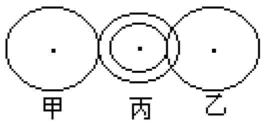


图20—3

分析 我们记丙轮上大齿轮的齿数为$丙_{大}$，丙轮上小齿轮的齿数为$丙_{小}$，甲轮转动 15 圈带动丙轮转动圈数为$丙_{圈}$．

根据齿数与转数成反比例的关系，有

$15：丙_{圈}=丙_{大}：60$

$丙_{圈}：8=36：丙_{小}$

这两个比例的联系在于$丙_{圈}$相同，即已知条件“丙轮上大、小两个齿轮转动的圈数始终相同”．故此利用比例的基本性质将上述比例式变形为：$15：丙_{圈}=丙_{大}：60=3丙_{大}：180$

$丙_{圈}：8=36：丙_{小}=180：5丙_{小}$

化成连比，有：

$15：丙_{圈}：8=3丙_{大}：180：5丙_{小}$

所以有：

$15：8=3丙_{大}：5丙_{小}$

即：$75丙_{小}=24丙_{大}$

$$\frac{丙_{大}}{丙_{小}} = \frac{75}{24} = \frac{25}{8}$$

所以丙轮上大、小齿轮的齿数比为 25：8，齿数最少分别是 25 和 8．

练习题二十

1．甲、乙、丙三人百米赛跑，当丙到达终点时，甲离终点还有 5 米，乙离终点还有 2 米，它们三人速度之比是多少？他们跑百米所用时间之

比是多少？

2．有两个容器，体积比为1∶2，均盛满了酒精和水的混合液，小容器中酒精和水的体积比为1∶2，大容器中酒精和水的体积比为1∶5，问把两个容器中的液体混合后，酒精与水的体积比是多少？

3．如图 20—4，AB、AC的长度是15，BC的长度是9，把BD折过去与AC重合，B点落在E点上，求三角形ADE与三角形ABC的面积比？

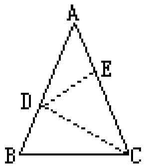


图20—4

4．5支钢笔与 8 支油笔的价钱是一样的；1支钢笔与 4 支铅笔的价钱是一样的.今买一支钢笔,4支油笔,6支铅笔共花去人民币40元整.问这三种笔的单价各是多少？

5．甲齿轮的齿数是乙齿轮齿数的2倍，若使甲轮转动一圈带动乙轮转动10圈，连结甲、乙两轮的复合齿轮丙（如图20—5）的大、小两个齿轮齿数比应是多少？

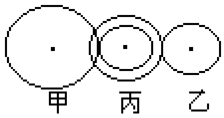


图20—5

第二十一课 利用面积比解题

前两讲我们复习了比和比例的有关知识，并学习了用比和比例解题的基本方法，这一讲我们来学习如何用面积比解题.

我们非常熟悉三角形的面积公式,并且知道这些面积公式很有用.但是，我们所知道的用途主要是计算面积，学了这一讲，我们会发现利用面积比解题会产生意想不到的效果．但要注意，利用面积比解题，仍需正确分析比例关系，准确利用比例的基本性质！

三角形的面积等于它的底与底边上的高的乘积的一半.设ha为△ABC的边 a 上的高，用 S△ABC 表示△ABC 的面积，有

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot ha$$

仔细观察此式不难发现：

（1）当三角形的底边不变，底边上的高发生变化时，三角形的面积与底边上的高成正比．如图 21—1，线段 BC 既是△ABC 的底边，也是△DBC 的底边，线段 AE 和 DE 分别是△ABC 中 BC 边上的高和△DBC 中 BC 边上的高，由三角形 面积公式，得：$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot AE}{\frac{1}{2}\cdot BC\cdot DE}=\frac{AE}{DE}$

由此可得：等底的两个三角形的面积比等于它们的高的比.

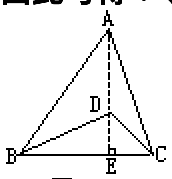


图21—1

（2）当三角形的高固定，底边发生变化时，三角形的面积比与它的底边成正比．如图 21—2 线段 PQ 既是△PAB 的高，也是△PCD 的高，由三角形面积公式，得

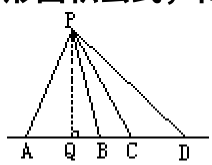


图21—2

$$\frac{|S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle DBC}}\frac{\frac{1}{2}\cdot AB\cdot PQ}{\frac{1}{2}\cdot CD\cdot PQ}=\frac{AB}{CD}$$

由此可得，等高的两个三角形的面积比等于它们的底的比.

下面我们通过例题介绍利用面积比解决问题的方法.

例 1 如图 21—3，某公园的外轮廓是四边形 ABCD，被对角线 AC、BD 分为四个部分，△AOB 的面积是 1 平方千米，△BOC 的面积是 2 平方千米，△COD 的面积是 3 平方千米，公园陆地的面积是 6.92 平方千米，求人工湖的面积是多少平方千米？

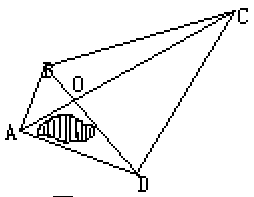


图21—3

分析 要求人工湖的面积只需用公园的总面积减去公园陆地的总面积即可，这时只需求△AOD 的面积，仔细分析图形发现：△AOB 与△BOC 是有公共高线的两个三角形，△AOD 与△COD 是有公共高线的两个三角形，根据"等高的两个三角形的面积比等于它们的底的比"，有

$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{AO}{CO}$，$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}=\frac{AO}{CO}$

所以，$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}$

根据已知 $S_{\triangle AOB}=1$，$S_{\triangle BOC}=2$，$S_{\triangle COD}=3$，便可求出△AOD 的面积．

解 根据"等高三角形的面积比等于它们的底的比"有

$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{AO}{CO}$，$\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}=\frac{AO}{CO}$

所以 $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle COD}}$

即 $S_{\triangle AOD}=\frac{S_{\triangle AOB}\cdot S_{\triangle COD}}{S_{\triangle BOC}}$

由已知

$S_{\triangle AOB}=1$，$S_{\triangle BOC}=2$，$S_{\triangle COD}=3$

得 $S_{\triangle AOD}=\frac{1\times 3}{2}=\frac{3}{2}$

所以 $S_{人工湖}=S_{总}-S_{陆地}$

$=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle AOD}-S_{\triangle 陆地}$

$=1+2+3+\frac{3}{2}-6.92$

$=0.58\ (\text{km})^2$

答：人工湖的面积是 0.58 平方千米．

例 2 如图 21—4，△ABC 的面积是 1（㎝）^{2}，DC=2BD，AE=3ED，求△ACE 的面积是多少平方厘米？

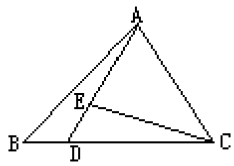


图21—4

分析 由图知△ABD 和△ADC 是共高三角形，△ACE 和△CED 也是共高三角形，根据"等高的两个三角形的面积比等于它们的底的比"知

$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$，$\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle CED}}=\frac{AE}{ED}=\frac{3}{1}$，

经计算，得

$\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{2}$ 问题得以解决．

解　根据“等高的两个三角形的面积比等于它们的底的比”有

$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{BD}{DC}=\frac{BD}{2BD}=\frac{1}{2}$，$\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle CED}}=\frac{AE}{ED}=\frac{3ED}{ED}=\frac{3}{1}$，

所以 $S_{\triangle ADC}=\frac{2}{3}$（$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}$）$=\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$

$S_{\triangle ACE}=\frac{3}{4}$（$S_{\triangle ACE}+S_{\triangle CED}$）$=\frac{3}{4}S_{\triangle ADC}$

所以 $S_{\triangle ACE}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$（$cm$）^{2}

由此可见，利用“等高（底）的两个三角形的面积比等于它们的底（高）的比”可以把线段比变成面积比，也可把面积比换成线段比．通过两种几何量的比的转换，来解决问题，它的应用十分广泛．但在应用时，要注意三角形的高可能在三角形之外，也有可能图中没画出来，另外三角形的底并不一定处于水平位置．

利用“等高（底）的两个三角形的面积比等于它们的底的比”可以解决很多问题．但是，当构成比例的两条线段满足下面的条件时：其一，有一公共端点；其二，两线段共线；我们有更好的解决问题的办法．下面把它介绍给大家——比例定理．

若线段 PQ 与线段 AB 相交于 M，则

$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}=\frac{PM}{QM}$

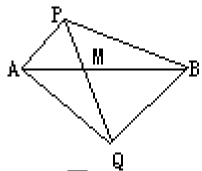


图21—5

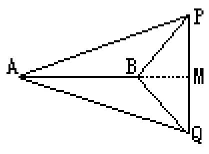


图21—6

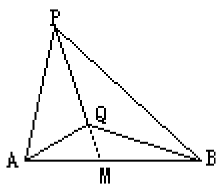


图21—7

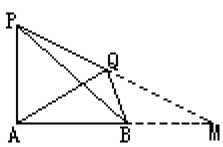


图21—8

其中，线段 AB 与线段 PQ 相交有如下四种情况：

（1）线段 PQ 与线段 AB 相交于 M，如图 21—5

（2）线段 PQ 与线段 AB 的延长线相交于 M，如图 21—6

（3）线段 PQ 的延长线与线段 AB 相交于 M，如图 21—7

（4）线段 PQ 的延长线与线段 AB 的延长线相交于 M，如图 21—8

这个定理看似十分容易，但并非一目了然的，需要经过细细体会其

中的奥妙，方可运用自如．下面举例说明这个定理的应用．

例 3 在△ABC 内，任取一点 P，直线 AP、BP、CP 分别与 BC、CA、AB 交于 D、E、F（图 21—9）

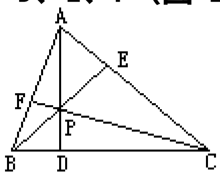


图21—9

计算 $\frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AD}}+\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{BE}}+\frac{\mathrm{PF}}{\mathrm{CF}}$ 的值

分析 需要计算三组线段比的和，其中每组比中的两条线段都满足比例定理的条件：有公共端点且两线段共线．由此我们考虑利用比例定理，把线段间的比用面积比代替．线段 BC 与线段 AP 的延长线交于 D，于是以DC为公共边的两个三角形的面积比，$\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{PD}{AD}$

同理可得

$\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle BAC}}=\frac{PE}{BE}$，$\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle CAB}}=\frac{PD}{CF}$

到此，我们已经把线段的比转化成了面积比．利用面积之间的关系，很容易计算出要求的值．

解 由比例定理得

$\frac{PD}{AD}=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$，$\frac{PE}{BE}=\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle BAC}}$，$\frac{PE}{CF}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle CAB}}$

三式相加得

$$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=\frac{S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABC}}=1$$

答：$\frac{PD}{AD}+\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}=1$

例4 在例3相同的条件下，求 $\frac{AF}{BF}\cdot\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}$ 的值

分析 求线段的比的乘积，由于构成每组比的两条线段均满足比例定理的条件：有公共端点且两线段共线．考虑利用比例定理，用面积比代替线段的比，再利用面积间的关系，解决问题．

解 由比例定理，有

$\frac{AE}{BF}=\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PBC}}$，$\frac{BD}{CD}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PAC}}$，$\frac{CE}{AE}=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle PAB}}$

三式相乘得

$$\frac{AE}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = \frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PBC}} \cdot \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PAC}} \cdot \frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle PAB}} = 1$$

所以$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} = 1$

通过上述的解题过程，我们得到：有一公共端点且在同一直线上的两条线段的比，等于以过公共端点的线段为公共边，另两端点为顶点的两个三角形的面积比．或者说：有公共边的两个三角形的面积比，等于连接两三角形公共边外第三顶点的线段被公共边所在直线分割而得的两线段比．（这里的分割，包括内分割和外分割）

利用面积比解题这一方法用途很广，它可以把面积比化为线段比，把线段比化为面积比，我们主要介绍了用它解题的三种技巧：

（1）把一块面积分成几块，利用“等高（底）的两三角形面积比等于它们的底（高）的比”，求解某条线段的长度或某个三角形的面积．见例 1，例 2．

（2）把一块面积分成几块，利用比例定理求几个线段比之和．见例 3．

（3）考虑两两共边的几个三角形的循环比，利用比例定理求几个线段比之积．见例 4．

所举例题充分体现了利用面积比解题的思想，所用的方法应很好领会．

练习题二十一

1．如图 21—10，已知四个小三角形面积分别为 2、5、9、X，求 X 的值．

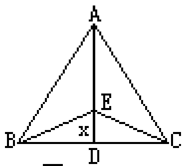


图21—10

2．如图 21—11，已知 $S_{\triangle AOM}=2$，$S_{\triangle AOB}=3$，$S_{\triangle BON}=1$，求△CMN 的面积是多少？

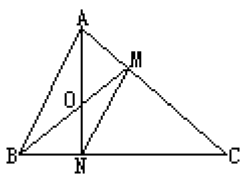


图21—11

3．如图 21—12，设 P 是等腰△ABC 底边 BC 上任意一点，由 P 向 AB，AC 引垂线 PQ、PR，垂足分别是 Q 和 R，试说明，PQ＋PR 为定值．

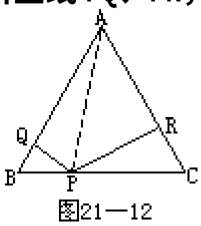


图21—12

4．如图21—13，在△ABC的两边AB，AC的延长线上分别取E、F；连线段BE、CF交于P，连线段AP交BC于D．

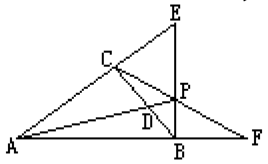


图21—13

求：$\frac{PE}{BE}+\frac{PF}{CF}-\frac{PD}{PA}$的值．

5．已知同第4题．

求：$\frac{AE}{CE}\cdot\frac{CD}{BD}\cdot\frac{BF}{AF}$的值

第二十二课 包含与排除

小明与小龙两家合住一套房子，门厅、厨房和厕所为公用．在登记住房面积时，两家登记表如下图

姓名	居室（m^2）	门厅（m^2）	厨房（m^2）	厕所（m^2）
小明	14	12	8	4
小龙	20	12	8	4

他们住的一套房子共有多少平方米？

分析与解 如图 22—1，小圆表示小明家面积，大圆表示小龙家面积，阴影部分则表示小明家与小龙家公共面积，如果我们把小明家面积38㎡ 与小龙家面积相加，阴影部分事实上是被加了两次，因此这套房子的面积为

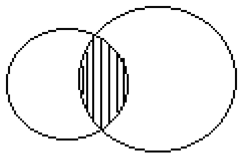


图22—1

38+44-24=58（m^2）

在图 22—1 中记 A 为小圆面积，B 为大圆面积，A∩B 为阴影面积，A∪B 为图形面积则有

A∪B=A+B-A∩B ※

容斥原理：当两个计数部分有重复时，为了不重复的计数，应从它们的和中减去重复部分．容斥原理常用“※”式表示．

例 2 赵红和她的父母一起买东西，中午吃饭共用 30 元，回家后列账单如下

	衣服（元）	玩具（元）	书（元）	午饭（元）
赵红	60	10	12	30
父	20	0	28	30
母	0	0	11	30

他们共花了多少钱？

分析 赵红花 112 元，父亲花 78 元，母亲花 71 元，但中午饭费被计 3 次，重复部分应减去．

解 112+78+71-2×30=201（元）

例 3 在小于 100 的自然数中既不是 3 的倍数，又不是 5 的倍数的数有多少个？

分析 只须求出被 3 整除与被 5 整除的数有多少个，问题就解决了．

被 3 整除的数有 3、6、9、12……3k…99 共 33 个

被 5 整除的数有 5、10、15、20…5m…95 共 19 个

既能被 3 整除，又能被 5 整除（即能被 15 整除的数有 15、30、45…15p…90 共 6 个）

解 由容斥原理,能被 3 整除或能被 5 整除的数共有 33+19-6=46(个)

故小于 100 的自然数中既不是 3 的倍数，也不是 5 的倍数的数共有

99-46=53（个）

例 4 小于 100 的自然数中非 3、4、5 倍数的数共有多少个？

分析 如图 22—2，I 为小于 100 的自然数集，A 中是被 3 整除的数有 33 个，B 中被 4 整除的数有 24 个，C 中是被 5 整除的数有 19 个，阴影部分为 A∩B∪C 即能被 3×4×5=60 整除的数只有一个．由容斥原理有：被 3 或 4 或 5 整除的自然数共有

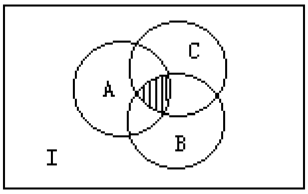


图22—2

A+B+C-A∩B-A∩B-B∩C+A∩B∩C

解 由容斥原理有

99-[33+24+19-8-6-4+1]=59

答：小于 100 的自然数中非 3、4、5 倍数的数共有 59 个．

例 5 六年级一班 45 名同学每人都报名参加暑假体育训练班，其中足球班报 25 个，篮球班报 20 人，游泳班报 30 人，足球、篮球都报有 10 人；足球、游泳都报有 10 人；足球、篮球都报有 12 人．问三项都参加的有多少人？

解 设三项都参加的有 x 人（如图 22—3）

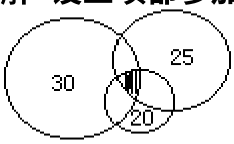


图22—3

由容斥原理有：

25+20+30-10-12-10+x=45

故 x=2

答：三项都参加的有 2 人．

例 6 如图 22—4 三个圆两两相交，它们覆盖的面积为 49cm^2．又知圆 A 面积（以下简称为 A）为 25cm^2，B=20cm^2，C=18cm^2，A∩B=6cm^2，A∩C=5cm^2，A∩B∩C=1cm^2，求 B∩C．

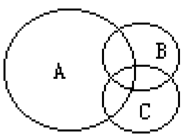


图22—4

分析 由容斥原理知三面覆盖面积 A∪B∪C=A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C．这事实上是一个方程，在这个方程的各项中如果只有一项未知，就可通过上述方程，求出未知数，这就是要具备方程思想．

解 由容斥原理有 A∪B∪C=A+B+C-A∩B-A∩C-B∩C+A∩B∩C

即 49=25+20+18-6-5-B∩C+1

故 B∩C=4（cm^2）

答：圆 B 与圆 C 的公共部分为 4cm^2．

例 7 某校六年级二班有 49 人参加了数学、英语和语文学习小组．其

中数学有 30 人参加，英语有 20 人参加，语文有 10 人参加，若既参加数学又参加英语和既参加英语又参加语文的人数均为质数，既参加数学又参加语文的有 3 人，而三种全参加的只有 1 人，求既参加英语又参加数学的人数．

解 设既参加数学又参加英语的人数为 x 人，既参加英语又参加语文的有 y 人．由容斥原理有

$49=30+20+10-x-y-3+1$

故 $x+y=9$

由于 x，y 都是质数，则 x，y 中有一个是 2，另一个是 7．

答：既参加数学，又参加英语补习的人有 2 个或 7 个．

例 7 某班参加升学考试，得满分人数如下：数学 20 人，语文 20 人，英语 20 人，数学、语文两科满分者 8 人，数学、英语两科满分者 7 人；语文、英语两科满分者 9 人；三科都没得满分者 3 人，问这个班最多多少人？最少多少人？

解 设三科都得满分的人数为 x，全班人数为 y．（如图 22—5）

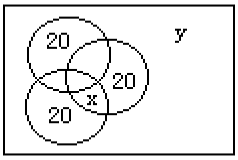


图22—5

由容斥原理有

$y=20+20+20-7-8-9+x+3$

$=39+x$

由于 $0\leq x\leq 7$

故全班最多有 46 人，最少有 29 人．

例 8 如图 22—6 正方形边长为 4㎝，求阴影部分的面积．

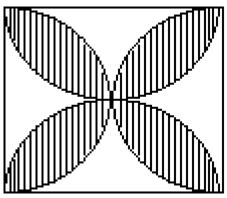


图22—6

分析 正方形面积有两种计算方法，用容斥原理，它等于四个直径为 4 的半圆面积之和减去阴影面积，同时又等于 4^2（方程思想）

解 由容斥原理有（设阴影面积为 x）

$4^2=4\pi\cdot 2^2-x$ 故 $x=16\pi-16=34.24$（cm^2）

例 9 如图 22—7 直角三角形三边长分别为 3㎝，4㎝，5㎝，以三边为直径分别作半圆．求阴影部分的面积．

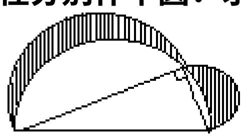


图22—7

解 由容斥原理有（设阴影面积为 x）

$$x=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2\pi+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{2}\right)^2\pi+\frac{1}{2}\times3\times4-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\pi$$

$$=6\ (cm^2)$$

答：阴影面积为 6㎝^{2}．

例 10 如图 22—8 长方形长为 4㎝ 宽为 3㎝，求阴影部分的面积．

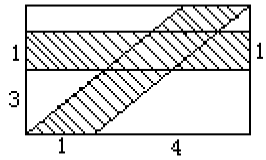


图22—8

解 由容斥原理有（设阴影部分面积为 x）

x=1×4+1×3-1×1=6（㎝^{2}）

例 11 如图 22—9，每个小正方形边长为 2㎝，求四边形 EFGH 的面积．

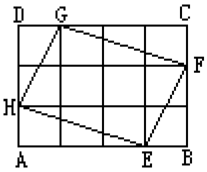


图22—9

解 由容斥原理有

$S_{ABCD}-S_{\triangle EBF}-S_{\triangle FCG}-S_{\triangle GDH}-S_{\triangle HAE}=S_{EFGH}$

即$S_{EFGH}=68-\frac{1}{2}\times1\times3\times2-\frac{1}{2}\times1\times2\times2$

$=43cm^2$

答：四边形 EFGH 面积为 43㎝^{2}．

练习题二十二

1．在不大于 100 的自然数中，既是 3 的倍数又是 7 的倍数的数有多少个？

2．某班 45 名同学参加了体育测试，其中百米得优者 28 人，跳远得优者 20 人，跳高得优者 20 人，又知百米、跳远均得优者 7 人，百米、跳高均得优者 9 人，跳高、跳远均得优者 8 人，求三项都得优的人数（注：每名同学都得过优）．

3．某班有四年级三好生 10 人，五年级三好生 10 人，六年级三好生 10 人，又知四、五两年级连续三好生 4 人，五、六年级连续三好生 3 人，四年级、六年级三好生 2 名，问得过三好生的人最多有多少人？最少多少人？

4．如图 22—10，直角三角形 ABC 中，AB=6㎝，AC=8㎝，BC=10㎝，求阴影部分面积．

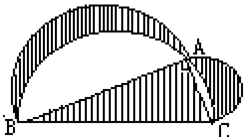


图22—10

5．如图 22—11，若小正方形边长为 2㎝，求三角形 ABC 的面积．

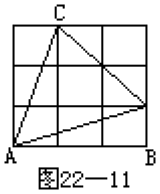


图22—11

第二十三课 钟表问题

钟表——日常生活不可缺少的计时工具．它提醒人们定时起床、休息、工作、学习……当你认识了钟表时，你已经离不开它了．然而钟表上的许多问题对你来说可能还是个奥秘，要揭开这些奥秘，就必须更深的了解钟表知识．

钟表表盘上刻有 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12 十二个自然数，这些数字依次绕圆心均匀地分布在一个圆周上，并配有时针、分针和秒针．相邻两数字之间的圆心角α为 30°．（如图 23—1，甲）时针每转 30°为一小时，旋转一周为十二小时．分针每转 6°为一分钟，旋转一周为六十分钟．秒针每转 6°为一秒钟，旋转一周为六十秒钟．也就是说表示时间有小时、分钟、秒钟三种单位，且三者之间的关系为：

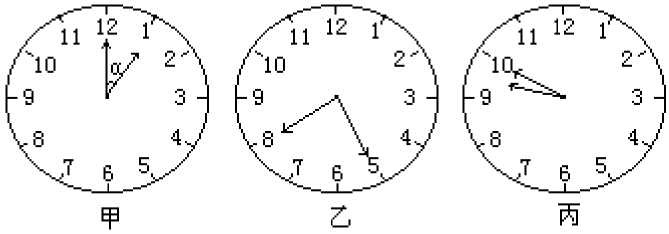


图23—1

1 小时=60 分钟 1 分钟=60 秒钟

或：1分钟 $=\dfrac{1}{60}$小时 1秒种 $=\dfrac{1}{60}$分钟

时针、分针、秒针各自匀速转动，用它们在表盘上转出的度数的多少来衡量时间的长与短，就是钟表的功能．

如图 23—1 乙、丙两钟面上的指针分别表示 8 时 25 分和 9 时 50 分.8 时 25 分与 9 时 50 分相差 1 小时 25 分．这其中包含了两个不同的概念：8 时 25 分、9 时 50 分表示两个不同的时刻，即两个特定的时候．而 1 小时 25 分钟则表示 8 时 25 分与 9 时 50 分`这两个时刻之间的间隔．时刻就好象直线上的一个点，而时间则好象是两点之间的距离．

我们熟悉的火车站候车室的列车时刻表即为每列火车发车、到达终点的时刻．而全程时间表则为列车从起点到达终点所经过的时间．

因为钟表上的指针具有极强的运动规律，所以，依照它们的规律可以读出指针所指的时刻，可以求出两时刻之间的时间差和解决一些相关的钟表问题．

例 1 下面是某火车站列车发车及到达终点的时刻表．你能按照规律，说出第五次列车起点站发车时刻和到达终点的时刻吗？并计算出这条线路从起点到终点全程时间．

车次 \ 时刻	起点站	终点站
第一次列车	8 点零 5 分	10 点 10 分
第二次列车	8 点 50 分	10 点 55 分
第三次列车	9 点 35 分	11 点 40 分
第四次列车	10 点 20 分	12 点 25 分
⋮	⋮	⋮

解 分析：

观察上面时刻表，起点站发车时刻依次为：8 点零 5 分、8 点 50 分、9 点 35 分、10 点 20 分．也就是第一次列车与第二次列车发车时刻相隔时间为：

8 小时 50 分—8 小时 5 分=45 分钟

第一次列车起点时刻与到达终点时刻相隔时间为：10 小时 10 分—8 小时 5 分=2 小时 5 分

第二次列车与第三次列车发车时刻相隔时间为：

9 小时 35 分—8 小时 50 分

因为 1 小时=60 分钟，所以发车时刻相隔时间为：8 小时 95 分—8 小时 50 分=45 分钟．第二次列车起点到终点经过的时间为：

10 小时 55 分—8 小时 50 分=2 小时 5 分钟

同样的方法可以计算出第三次列车与第四次列车发车时刻相隔时间为 45 分钟，第三次列车与第四次列车行驶全程均需时间 2 小时 5 分钟．

综上，找到规律：相邻两次列车间隔 45 分钟，每次列车行驶全程需 2 小时 5 分钟．

结论：第五次列车起点发车时刻为：

10 时 20 分+45 分=10 时 65 分=11 时 5 分

到达终点的时刻为：

11 时 5 分+2 时 5 分=13 时 10 分

这条线路从起点到终点全程行驶时间为 2 小时 5 分钟．

例 2 早晨 7 点 10 分，妈妈叫醒爱华，让他穿衣准备上学．可爱华看到镜中的表的指针还没有到起床的时刻，问：爱华认为当时是什么时刻？

解 分析：爱华与妈妈看到的钟面时刻不一样的原因就在于：爱华看到的是反射在镜面上的钟面，时针、分针经过镜面的反射位置改变了，反射前后钟面左右位置互换．也就是说表盘右边的刻度、指针反射后变到左边了．相反，表盘左边的刻度、指针经过镜面反射后变到右边了．因此，妈妈叫醒爱华时钟表的长短针分别指向 7 和 2 的位置，而经过镜面反射后的指针却为 5 和 10 的位置．所以，爱华认为当时是 4 点 50 分．

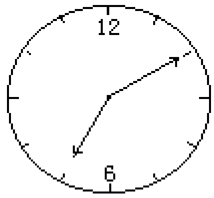


图23—2

由于钟表上的分针转动一周，时针转动 30°，所以，表盘上的分针

和时针总是分针追赶时针、两针重合、分针超过时针、分针追赶时针……周而复始的情形．因此，钟表问题有些可归结为行程中追及、相遇问题．

例 3 小明晚上 10 点整将手表对准，可早晨 8 点到校时却迟到了 20 分钟．那么，小明的手表每小时慢几分钟？

解 分析：当将这个问题看成行程问题而用行程问题的解题思想去考虑时，可设小明手表 1 小时转动的一格为路程的一个单位．而小明的手表从晚上 10 点到第二天早晨 8 点，总共转动了十个格，实际所走的时间为：

10小时 $+20$分钟 $=10\frac{1}{3}$小时

所以，小明的手表转动的速度应为每小时：

$10\div 10\frac{1}{3}=\frac{30}{31}$（格）

即每小时少转$\frac{1}{31}$格．所以，小明的手表每小时比实际慢：

$\frac{1}{31}\times 60=\frac{60}{31}=1\frac{29}{31}$（分钟）

例 4 钟面上 7 点整，再过多少分钟时针与分针首次重合？过多少分钟时针与分钟首次成直角？

解 这个问题实际上就是行程问题中的追及问题．当用时针一小时转动的1格设作路程的单位时，分针的速度为：每分钟$\frac{1}{5}$格，时针的速度为：每分钟$\frac{1}{60}$格．

由题意知，钟面上的时针、分针起始位置相距 7 格，首次重合时分钟比时针多走 7 格，则两针重合时的时间为：

$7\div$（$\frac{1}{5}-\frac{1}{60}$）$=38\frac{2}{11}$（分钟）

当时针与分针首次成直角时，两针相距 3 个格，而起始位置时的时针、分针相隔 7 个格，因此，只需分针比时针多走 4 个格时，两针成直角．则两针首次成直角时的时间为：

$4\div$（$\frac{1}{5}-\frac{1}{60}$）$=21\frac{9}{11}$（分钟）

即：7点$38\frac{2}{11}$分时分针与时针首次重合，7点$21\frac{9}{11}$分时分针与时针首次成直角．

另解 此问题还可以用设未知数列方程的方法去解．由题意可知：时针与分针首次重合实际上就是在相同的时间内，分针所走的路程比时针所走的路程多 7 格．若设时针从 7 时到两针相遇时走了 x 格，则分针走了（$7+x$）格，时针经过的时间为：（$x\div\frac{1}{60}$）分钟，分针经过的时间为[（$7+x$）$\div\frac{1}{5}$]分钟，因为时间相同，所以有方程：

$$x \div \frac{1}{60} = (7 + x) \div \frac{1}{5}$$

解此方程：$x = \frac{7}{11}$ （格）

因为时针每走1格的时间为60分钟，所以走$\frac{7}{11}$格的时间为：$60 \times \frac{7}{11} = 38\frac{2}{11}$ （分钟）

同理，设时针从七点到与分钟首次成直角时走了 y 格，则分针走了（$4 + y$）格，时针经过的时间为（$y \div \frac{1}{60}$）分钟，分针经过的时间为：[（$4 + y$）÷$\frac{1}{5}$]分钟，因为经过的时间相同，所以有方程：

$$y \div \frac{1}{60} = (4 + y) \div \frac{1}{5}$$

解此方程：$y = \frac{4}{11}$

因为时针每走1格的时间为60分钟，所以走$\frac{4}{11}$格的时间为：

$60 \times \frac{4}{11} = 21\frac{9}{11}$ （分钟）。

答：两针成直角时为 7 时 21 9/11 分，首次重合时为 7 时$38\frac{2}{11}$分.

例 5 如图 23—3．求某钟表盘上的指针指在 9 点多的哪一时刻时，时针和分针指的位置与 12 的距离相等？

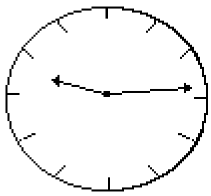


图23—3

解 这个问题仍然是行程问题．可设时针 1 小时转动的 1 格为路程的单位．此时，时针转动的速度为每分钟$\frac{1}{60}$格，分针转动的速度为每分钟$\frac{1}{5}$格．由题意及图形的观察不难分析出：这一时刻时针与分针的位置应分别在 9、10 之间和 2、3 之间．设这一时刻时针的位置在 9 过 x 格，则由于分针与时针和 12 等距离，所以从 9 点整计算，时针走过 x 格时分针应走了（3-x）格．时针经过的时间为：（$x \div \frac{1}{60}$）分钟，分针经过的时间为：[（$3 - x$）÷$\frac{1}{5}$]分钟．因为时间相等，则有方程：

$$x \div \frac{1}{60} = (3 - x) \div \frac{1}{5}$$

解此方程得：$x=\frac{3}{13}$（格）．因为时针转动一格所需时间为60分钟，所以转动$\frac{3}{13}$格的时间为：$\frac{3}{13}\times 60=13\frac{11}{13}$（分钟）

即：当时针与分针的位置与12的距离相等时，应为9点$13\frac{11}{13}$分．

练习题二十三

1．观察在镜面反射后的钟面的指针位置，说出这两个钟面所表示的时刻，并求出它们的时间差．（图 23—4（甲）、图 23—4（乙））

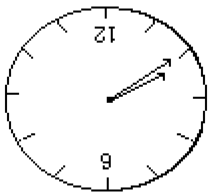


图23—4（甲）

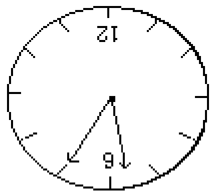


图23—4（乙）

2．一手表每小时快 4 分钟，下午 2 点整将表对准，当这只手表的指针指向晚 10 点整的时候，实际的时刻应是几点几分？

3．钟面上 9 点整，再过多少分钟两指针第一次重合？

4．钟面上的时刻为三点整，再过多少分钟时针与分针首次构成平角？

5．某钟面的指针指在 7 点的哪一刻时，时针和分针的位置与 6 的距离相等？

第二十四课 最大与最小（一）

在社会实践中，经常会遇到最大与最小的问题，它往往关系到最佳策略的制定．下面介绍几种用数学方法求最大、最小值问题．

例1 从 $\div\overline{1234567891011\cdots100}$中划去100个数字，其它数字顺序不变，求剩下数中最大数．

解 解决复杂问题，可以从简单问题入手，得出规律．从$\overline{12345678910}$中划去8个数字剩下的三位数中，百位数字越大则数越大，因而 910 是最大的数，也就是在高位上尽量剩下大数字．本题中从 12345678910 中划去 10 个数字剩下 9；从 111213…484950 中划去 76 个数剩下 4 个 9；从 51525354555657585960 中划去 14 个数剩下最大的数只能是785960．从而得到本题的解为$\overline{9999978596061\cdots99100}$．

例 2 试求和为 10，乘积最大的两个自然数

解（枚举法）

1+9=10→1×9=9

2+8=10→2×8=16

3+7=10→3×7=21

4+6=10→4×6=24

5+5=10→5×5=25

答：这两个数都是 5 时，积最大．一般地有以下结论 若$a+b=K$（定值），则$ab\le\frac{k^2}{4}$，当且仅当$a=b$时等号成立．

例 3 试求乘积为 64，和为最小的两个自然数．

解 （枚举法）

1×64=64→1+64=65

2×32=64→2+32=34

4×16=64→4+16=20

8×8=64→8+8=16

答：这两个数都是 8 时和最小．

一般地有以下结论 若 $ab=K^2$（定值）则 $a+b\ge 2K$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立．

例 4 把 19 分成若干个自然数的和，如何分才能使它们的积最大？

分析 （找规律）

2=1+1，最大积为 1×1=1

3=1+2，最大积为 2×1=2

4=2+2，最大积为 2×2=4

5=2+3，最大积为 2×3=6

6=3+3，最大积为 3×3=9

7=2+2+3，最大积为 2×2×3=12

8=3+3+2，最大积为 2×3×3=18

如此不难发现把自然数 n 分成若干个数的和．当 n=3m 时最大积为 3^m；当 n=3m+1 时，最大积为 $3^{m-1}\cdot 2^2$；当 n=3m+2 时，最大积为 $3^m\cdot 2$．

解 由于 17=3×5+2，将 17 分成：

$17=3+3+3+3+3+2$，积最大值为 $3^5\times 2=486$

例 5 如图 24—1 在公路 AE 两旁有五个村庄（假设村庄的人数近似相同），现要在公路上设一个公共汽车站，问设在哪点最合理？

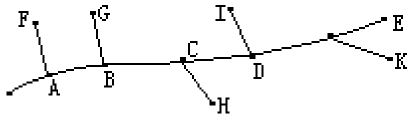


图24—1

分析与解 所谓合理是使所有乘车人到车站所走路程的总公里数最小．首先，无论车站设在公路哪一点，人们从村庄到公路的小路必然要走，于是问题就简化为人们从公路上 A、B、C、D、E 到车站所走路程总和最小．下面从简单问题找规律：假设只有一个村庄 F，显然车站应设在 A 点，人们在公路上走的距离总和为最小值 0；若只有 F、G 两村庄，车站应设在路线 AB 之间，人们在公路上走的路程最少，相当于一个村的人走完路线 AB；利用上述实验可知，若只有三个村庄 F、G、H，车站应设在中间村路口 B 点，若只有 F、G、H、D 四个村庄，车站应设在中间两村村口 BC 之间，也不难得出五个村庄时车站应设在中间村路口 C 点．

一般地有下列结论 当村庄数为奇数时，车站设在中间村路口，而当村庄数为偶数时，车站应设在中间两村公路口之间．

例 6 如图 24—2 用长为 30 米的篱笆围成一个长方形鸡厂，长和宽各是多少时鸡厂面积最大？最大面积是多少？

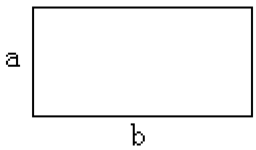


图24—2

分析与解 设长方形长宽分

别为 a，b．问题就转化为 $a+b=15$，求 $a\times b$ 的最大值，由 24—例2结论知当 $a=b=\frac{15}{2}=7.5$ 时，$a\times b$ 有最大值 $\frac{15^2}{2}=56.25$（米^2）

答：当长和宽都是 7.5 米时，鸡厂面积最大，最大面积为 56.25 平方米．

例 7 如图 24—3，用 30 米的篱笆围成一个一面靠墙的长方形鸡厂，长方形的长和宽各为多少时，鸡厂面积最大？最大面积是多少？

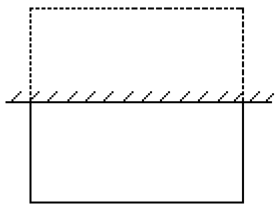


图24—3

分析与解 本题与例 6 相比是靠墙部分没有篱笆，不能直接用 24—例 2 结论．由于当这个长方形面积最大时，两个同样长方形面积之和也最大．将长方形鸡厂关于墙对称变到墙的另一侧，构成一个大长方形．于是问题就转化为用 60 米篱笆围成一个长方形，当长和宽分别为多少时，面积最大？最大面积是多少？同例 6 方法可知，当大长方形长宽都为 15 时面积最大，最大面积为 $15^2=225$．由大长方形的构造可知，本题解为当

长方形长为 15 宽为 7.5 时，面积最大，最大面积为 112.5 平方米．

例 8 （91 年初赛）

将 1，2，3，4，5，6，7，8，9 分别填入图 24—4 的九个圆圈中，使其中一条边上的四个数之和与另一条边上的四个数之和的比值最大，那么这个比值是____．

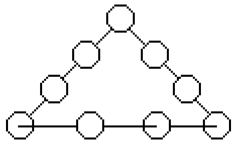


图24—4

分析与解 由于分子大且分母小才能使比值大,因而尽可能把较大数填在一边，较小数填入另一边．把 9、8、7 填入右边上，将 1，2，3 填入下面这条边上．以下问题是公共圆圈内填 4、5、6 中的哪一个使比值最大？用枚举法

比较：

$$\frac{9+8+7+6}{1+2+3+6}=\frac{30}{12}=2.5$$

$$\frac{9+8+7+5}{1+2+3+5}=\frac{29}{11}=2.64$$

$$\frac{9+8+7+4}{1+2+3+4}=\frac{28}{10}=2.8$$

可知，公共圆圈中填 4 时比值为 2.8 最大．

例 9 如图 24—5 在一条公路上每隔 1000 米设有一个仓库，其中一号库存货 1.0 吨，二号库存货 30 吨，三号库空着，四号库存货 20 吨，五号库存货 40 吨,现将货物集中在某一个仓库,若每吨货运 1 千米需 0.8 元，问运到哪个库存放最省钱？最少需多少钱？

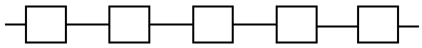


图24—5

解 （枚举法）比较

运往一号库须 0.8（30+20×3+40×4）=200（元）

运往二号库须 0.8（10+20×2+40×3）=136（元）

运往三号库须 0.8（10×2+30+20+40×2）=120（元）

运往四号库须 0.8（10×3+30×2+40）=104（元）

运往五号库须 0.8（10×4+30×3+20）=120（元）

可知运往四号库存放最省钱，最少需 120 元．

在解决有限问题而问题又较简单如例 2、例 3、例 5、例 8、例 9 可采用枚举比较大小的方法．虽然是有限问题，但枚举范围较大如例 1、例 4，可从最简单情况入手，观察，归纳，发现规律，以达到解决问题的目的．

练习题二十四

1．从$\overline{1234567891011\cdots4950}$中划去80个数剩下数字顺序不变，求所剩数中最大的数．

2．将 20 分成若干个数的和，使这些自然数的积取最大值．

3． 如图 24—6 在一条公路两旁有四个村庄．设各村乘车人数相同且 G 村乘车人中老年人较多．现要在公路上设一公共汽车站．问设在什么地方最合理？

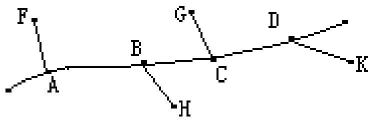


图24—6

4．有相同周长的正三角形、正方形和圆，哪一个面积最大？哪一个面积最小？

5．如图 24—7 在“□”中填入 1、2、3、4、5、6、7、8（式中的数字不能重复），使运算结果①最大，②最小．

$$\square\frac{\square}{\square}+\square\square\frac{\square}{\square}$$

图24—7

第二十五课 最大与最小（二）

在社会实践中，经常遇到较复杂或无限型求最大值与最小值问题，运用枚举比较法很困难或根本无法运用枚举法，而这些问题的解决常常是把题目条件与数学的公理、定理综合运用的结果．

例 1 一只蚂蚁要从正方体侧面 ABCD 上一点 M 经棱 AD 到上面一点 N（如图 25—1）问如何走能使蚂蚁走的路程最短？

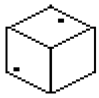


图25—1

分析 由于线段 AD 上有无穷多个点，如图 25—2 从 M 经 AD 到 N 有无穷多种走法，无法用枚举比较法．由于两点之间线段最短，直接连 MN 则不经过 AD 与已知条件不符．为了满足条件，将正方体展成平面图形，此时线段 MN 与线段 AD 必相交．

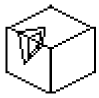


图25—2

解 将正方体在同一平面展开（如图 25—3），连结 MN 交 AD 于 P，由公理两点之间线段最短可知蚂蚁从 M 点沿直线爬到 AD 上 P 点再沿直线爬到 N 点时走过的路程最短．

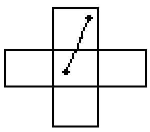


图25—3

例 2（将军饮马）在河的同侧有两点 A 和 B（如图 25—4）．从 A 点出发先到河边饮马，然后到 B 点．问在哪一点饮水能使走的路程最短？

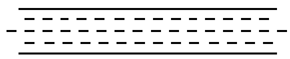


图25—5

分析 由图 25—5 可知行走的方法有无穷多种，无法找出哪一种是最短路线，但如果象例 1 那样，A、B 在河的两侧，问题就解决了，下面是如何把一点转化到另一侧．

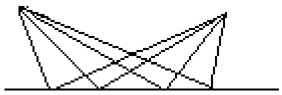


图25—5

解 如图 25—6，设 A 关于河岸的轴对称点为 A′，则 A′B 与河岸有交点 C，从 A′到 B 的最短路线为 A′C+CB．由于 AC=A′C 故从 A 经 C 到 B 所走路程最短．

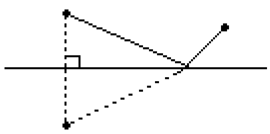
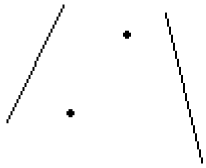


图25—6

例 3 某次划船比赛，规则是从 A 点出发先到左岸，然后到右岸，最后到达终点 B，以时间少者胜，问应如何选取航线？（如图 25—7）



分析与解 由于航线越短越省时间，因而去寻求最短路线．设 A 关于左岸的对称点为 A′，B 关于右岸的对称点为 B′，则线段 A′B′与左右两岸分别相交，设交点分别为 M 和 N，由于自 A′到 B′所有连线中，线段 A′B′最短，故由 AM+MN+NB 是最短航线距离（如图 25—8）．

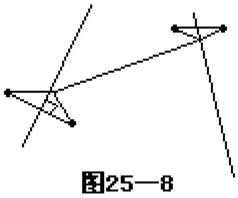


图25—8

将军饮马问题是谁发现的？我们都知道是古希腊的海伦．其实在太阳系建立的时候这个问题就被聪明的光线解决了．阳光遇到物质会发生反射，哪么射向哪里呢？如图 25—9 光线 l 入射到直线 a 上一点 P，怎样画出反射光线？在 l 上任取一点 A，设 A 关于直线 a 的对称点 A′．则反射光沿着 A′P 方向反射．这个图形也恰好就是将军饮马的图形．自然界中有许多规律还没被人们发现，只要善于观察，勤于思考，就可发现这些规律．

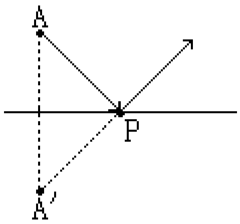


图25—9

例 4（台球中的将军饮马问题）台球运动员在打台球时是如何计算路线的？如图 25—10（A）把本球 A 经球案右侧哪一点反射后正中 B 球？图 25—10（B）本球 A 经球案右侧反射到左侧再反射若正中 B 球，应如何设计路线？

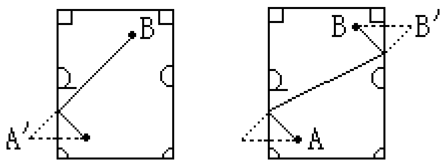


图25—10（A） 图25—10（B）

解 在图 25—10（A）中找到 A 关于球案右侧边的对称点 A′，则 A′B 与球案右边有交点 C 则 C 点为所求反射点．在图 25—10（B）中，先找出 A 关于球案右边的对称点 A′，再找到 B 关于球案左端的对称点 B′，连结 B′A′则交球案右边一点（设为 C），交球案左端一点（设为 D）．只要将本球打到 C 点本球自然反射到 D，再反射后正中球 B．若此时 DB 正对球底袋，则 B 球会进入球底袋．

例 5 在边长为 2 的等边三角形内最多放入几个点，满足每两个点的距离不小于 1？

分析与解 边长为 2 的三角形内有无限多个点，解题思路是把无限的问题转化到有限去考虑．如图 25—11（A）将△ABC 分为边长为 1 的四个

等边三角形，以等边三角形 ABC 中心为圆心，半径为 1 作圆（如图 25—11B）．若将△ABC 中心选为一点在顶点为 A、B、C 的小三角形中各可取一点满足每两点距离均不小于 1，共有四个点．以下证明四个点最多．将四个小等边三角形视为四个抽屉，由抽屉原则知，当多于四个的点放入这四个抽屉时至少有两点满入同一个抽屉，由抽屉构造可知这两点距离小于 1．因此最多可放入四个点．

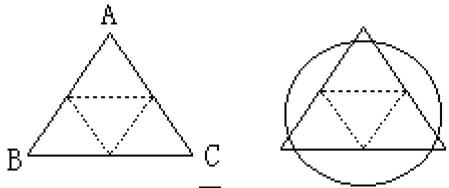


图25—11

例 6 求证在半径为 1 的圆内或圆上最多可放入 6 个点使它们每两点的距离不超过 1．

证明 将半径为 1 的圆六等分（如图 25—12），则圆被分成六个相同的小扇形，易知圆上分点 A、B、C、D、E、F 六点中每两点间距离不小于 1．将 6 个小扇形视为 6 个抽屉，把多于 6 个点的点放入这 6 个抽屉中，由抽屉原则知至少有两个点满入同一抽屉．而由抽屉构造法可知这两点距离必然小于 1．因而最多可放入 6 个点．

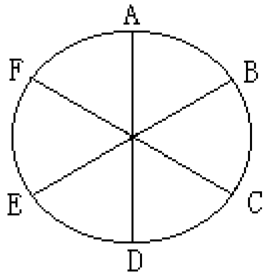


图25—12

例 7 士兵在做队列表演（500 以内）．3 人一排时余 1 人；五人一排时余 4 人；七人一排时余 3 人．问这些士兵最多多少人？最少多少人？

解 被 5 除余 4 的数有：

4、9、14、19、24、29、…，即个位数字是 4 或 9

被 7 除余 3 的数有：

3、10、17、24、31、38、45、52、59、66、73、80、87、94…

既能被 7 除余 3，又能被 5 除余 4 的有

24、59、94…第一个被 3 除余 1 的数为 94，故这些士兵最少为 94 人．

由于 5、7、3 的最小公倍数为 105，由已知有 $K \cdot 105+94<500$，故 K 最大值为 3．从而得到这些士兵最多有 407 人．

例 8 一把钥匙开一把锁，但不知哪把钥匙开哪把锁，问最多试开多少次能用 9 把钥匙把 9 把锁打开？最少多少次？

解 把锁全部打开可以分成九步，如下表

锁　　号	1 2 3 4 5 6 7 8 9
试开次数	9 8 7 6 5 4 3 2 1

此表表示最多试开次数需 9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 次，最少需 1+1+1+1+1+1+1+1+1=9 次．

例 9 现有 n（n 为自然数）个不同的天平砝码，①若砝码只能放在天平一侧可最多测出多少个不同的重量？②若砝码可放在天平两侧，最多可称出多少个不同的重量？（0 不算一个重量）

分析与解 n 是一个表示数的字母，使用起来很不方便，不知它是哪一个自然数．我们采取实验、观察、发现的方法．

①解 n=1 时，可称出 1 个重量

n=2 时，可称出 3 个重量

n=3 时，可称出 7 个重量

设三个砝码重量分别为 a、b、c（a≠b≠c）则可称出，a、b、c、a+b、a+c、b+c、a+b+c7 个不同重量．继续实验下去可得下表：

n 的取值	1　2　3　4　5　6　7…（n）
不同重量数	1　3　7　15　31　63　127…（2^n-1）

不同重量数为 2^n-1

②解 n=1 时，可称出 2 种不同重量

n=2 时，可称出 8 种不同重量

设二个不同砝码分别是 a 和 b 且 a≠b，将 a、b、a+b 分别放右端 3 种，放左端也是 3 种，左端放 a 且右端放 b 一种，反之又一种共 8 种不同重量．继续实验可得下表：

n 的取值	1 2 3 4 5 …（n）
不同重量数	2 8 26 80 242 …（3^n-1）

不同重量数为 3^n-1．

解法 2 对于①每个砝码有两种状态即放上天平或不放上．由乘法原理共有：

$$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{n个2}=2^n$$

但全不放上称出的重量是 0 不合题意，因而最多可称出 2^n-1 种不同重量．

对于②每个砝码有三种状态即放到左边，放到右边或不放上，由乘法原理知最多可称出

$$\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{n个3}=3^n$$

种不同重量，由于全都不放时称出重量为 0 不合题意，故最多可称出 3^n-1 种不同重量．

例 10 150 人要赶到 90 公里外的某地去执行任务．装备一辆可乘 50 人时速为 70 公里的卡车．若步行时速为 10 公里，请设计一种乘车及步行方案，使这 150 人全部到达目的地所用的时间最少．（上下车时间忽略不计）

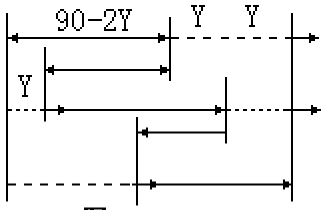


图25—13

分析 要想 150 人全部到达目的地所用时间最少，应是同时出发，同时到达．在这一时间里要最大限度的利用人力和物力．即车不停的开，人不停的走．由于车只能乘 50 人故分成三组，每组 50 人，为了保证同时到达每组步行和乘车路程分别相同．

解 将 150 人分成 3 组，每组 50 人，设每组均步行 2y 公里乘车 90-2y 公里，设计方案如图 25—13，汽车送第一组走完 90-2y 公里后，返回接第二组．与第二组相遇时，第二组刚好走了 y 公里，而汽车此时走了 90-2y+90-2y-y=180-5y 公里，由于它们所用时间相同，根据时间 $=\frac{\text{路程}}{\text{速度}}$，有 $\frac{180-5y}{70}=\frac{y}{10}$

解得 y=15，即步行 30 公里，乘车 60 公里，行军所用时间为

$\frac{60}{70}+\frac{30}{10}=3\frac{6}{7}$（小时）

练习题二十五

1．如图 25—14 自点 A 发出的光线，经 l_1 反射到 l_2 上一点，又经 l_2 反射后经过 B 点，试画出光的路线．

2．如图 25—15 在边长为 2 的正方形中，最多可放入几个点，使它们每两点间的距离不小于对角线的一半？

3．一个三位数，除以 3 余 2，除以 5 余 1，除以 7 余 4，求这个三位数的最大与最小数．

4.用一个天平和一个 5 克砝码，最少称多少次才能称出 155 克药品？

5．100 人要到 90 公里外的某地开会，只有一辆可乘 50 人，时速为 70 公里的汽车，若人步行的速度为每小时 10 公里，最少用多长时间可使他们全部到达？

第二十六课 简单染色问题

有很多同学喜欢画画，有的喜欢画人物，有的喜欢画花草，有的喜欢画水彩画，有的喜欢画油画．有一些画靠优美的线条取胜，也有一些画以绚丽的色彩夺目．然而很少有人知道在数学问题中也有一些与色彩有关．这就是所谓的“染色问题”．在这一课我们就介绍一些简单的染色问题．

例 1 如图 26—1 所示，用五种不同的颜色分别使 A、B、C、D、E 染色，要求相邻两区域所染的颜色不同，求共有多少种不同的染色方式？

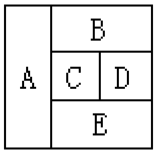


图26—1

分析 首先我们设定一种染色顺序，不妨假定按 A、B、C、D、E 的顺序．

由于 A 与 D 不相邻，则 A 与 D 的颜色可以相同，也可以不同．

（1）若 A 与 D 颜色相同，则此时，A 有 5 种染色方式，B 不能与 A 同色，故只有 4 种染色方式，而 C 不能与 AB 同色，故只有 3 种染色方式，E 不能与 A、C 同色，即也有 3 种染色方式，由乘法原理，共有 $5\times4\times3\times3=180$ 种不同的染色方式．

（2）若 A 与 D 颜色不同时，A 还是 5 种染色方式，B 还是 4 种染色方式，C 还是 3 种染色方式，而 D 此时与 A、B、C 的颜色都不同，所以只有 2 种染色方式，E 不能与 A、C、D 同色，即也有 2 种染色方式，由乘法原理，共有 $5\times4\times3\times2\times2=240$ 种不同的染色方式．

解 由以上分析，共有不同的染色方式

$5\times4\times3\times3+5\times4\times3\times2\times2$

$=180+240=420$（种）

例 2 有一个 5×5 的方格棋盘，如图 26—2 所示每一个小方格中有一只小甲虫，假定在同一时刻，所有小甲虫都爬到邻格中（横向与纵向的格，不能斜爬），问此时能否会出现空格？

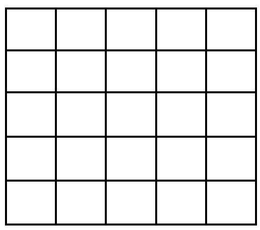


图26—2

分析 初看这个问题，似乎无从下手，但如果我们利用“染色”的手段，就会使问题简化，很轻松的得到正确答案．

解 将 5×5 棋盘用黑白两种颜色相间染色，如图 26—3 所示，此时共有黑色格 13 个，白色格 12 个．当每个小格中的甲虫同时爬向邻格时，即黑格中的甲虫爬到白格中，白格中的甲虫爬到黑格中．由于黑格比白格多一格，则原来白格中的甲虫爬到黑格后必空一格，所以该题的答案是肯定的．

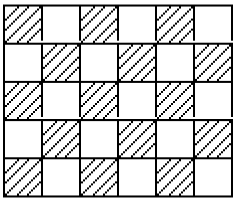


图26—3

例 3 至少需要几种颜色才能使图 26—4 中所有有公共端点的线段涂上不同的颜色？

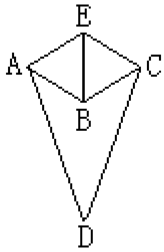


图26—4

分析 由于 AD、AB、AE 共点于 A，所以需要 3 种颜色对这三条线段染色．由于 BE 与 AD 不相邻，CD 与 AE 不相邻．CE 与 AB 不相邻，因此它们可以分别染上相同的颜色．这样 BC 不能再与 BE、CE、CD 中的任一条同色，它应染上另一种颜色．解由以上分析可知，至少需要 4 种颜色才能使图中所有相邻的线段涂上不同的颜色．

例 4 马能否从半个棋盘上的任一点出发，不重不漏地跳遍半个棋盘的所有点？

分析 由马走“日”的特点，我们将半个棋盘上的所有点进行红黑两种染色，即相邻的点染上不同的颜色（如图 26—5）．设 A 点一类为黑点，相邻点则为红点．不难看出，马每跳一步都是从一种色点到另一种色点．即马在连续跳动时，两种颜色的点交错出现．如果马能不重不漏地跳遍半个棋盘，则两种颜色点的个数应当相同或马的起跳点所在的一类色点多一个．

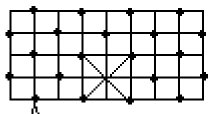


图26—5

解 如图 26—5，将半个棋盘进行红、黑两种染色，即可得 A 类点为 22 点，剩下一类为 23 点．由前面的分析，当马的起跳点为 A 类点时，是不可能不重不漏地跳遍半个棋盘的，即马不能从半个棋盘上的任意一点出发，不重不漏地跳遍半个棋盘．

例 4 到此就解完了．但留下一个问题：如果马的起跳点是红点，是否可以不重不漏地跳遍半个棋盘？

这里的回答是肯定的．我们利用构造法，画出马从红点出发，不重不漏地跳遍半个棋盘的路线（如图 26—6）．棋盘周围数字是马跳动时的序号，“1”为起跳点．由于棋盘的对称性及路线的中途可衔接性，故从任意红点出发都可不重不漏地跳遍半个棋盘．

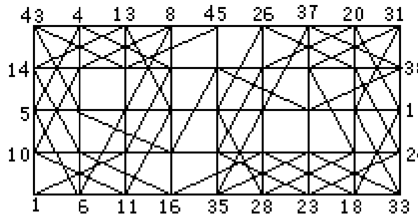


图26—6

例 5 有一个残缺棋盘，如图 26—7 所示，现有 1×2 的“日”形块覆盖棋盘，问能否恰好用 7 个“日”形块盖住棋盘．

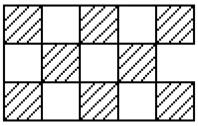


图26—7

分析 7 个日形块共 14 个方格，而残缺棋盘也是 14 个方格，似乎这种覆盖可以做到，然而我们利用黑白相间的染色去分析，就会发现这种覆盖是办不到的．

解 将棋盘黑白相间染色，由于“日”形块覆盖棋盘，盖住部分必是一个黑格一个白格，所以 7 个“日”形块能盖的部分必是 7 个黑格和 7 个白格，而残缺棋盘里黑白格的数目不同（8 个黑格和 6 个白格）故不存在“日”形块覆盖．

例 6 在 8×8 棋盘中（如图 26—8）剪去左上角与右下角的方格，剩下的 62 个方格是否存在日形块覆盖？

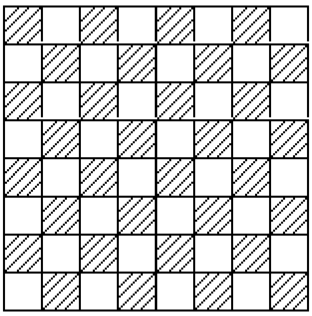


图26— 8

分析 由例 5 的经验，我们可将 8×8 棋盘进行黑白相间染色，此时黑格、白格个数相同，但剪去的左上角与右下角均是黑格，所以黑格个数比白格个数少两个，所以不存在日形块将这 62 个方格覆盖．

解 将方格黑、白相间染色，则黑格、白格各 32 个．因为剪去的是两个黑格，所以白色格数与黑色格数之差为 2 格．如果存在日形块覆盖，则必覆盖黑格、白格各 31 个，矛盾．

故残缺棋盘不存在日形块覆盖．

例 7 对世界上任何六个人来说，其中至少有三个人，他们要么互相都认识，要么互相都不认识．请说明这是为什么？

分析 把这个问题换一种叙述方式，在纸上画出六个点，表示六个人．如果两个人认识，就在代表这两个人的两点间联一条红色直线；如果两人不认识，就在代表这两人的两点间联一条蓝色的直线．这样，六个点中的任意两点之间总要联一条直线，不是红线就是蓝线．只要说明：在这些联线中，一定有一个三条边颜色相同的三角形．

解 六点中任取其中一点 A（如图 26—9），它与其它五点有五条联

线．根据抽屉原理，其中至少有三条线的颜色相同．不妨设 AC、AD 和 AE 是三条蓝色的联线．

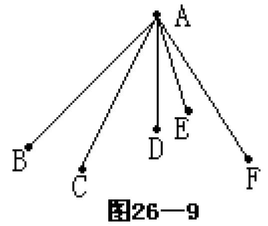


图26—9

CE、CD 和 ED 三条联线中，只要还有一条蓝色的，就有一个三边蓝色的三角形出现．如果 CE、CD 和 ED 都不是蓝色的，那么三角形 CDE 三边颜色相同，都是红色的．

例 8 你能否找到一种黑白相间的染色方法，用它来说明：用 15 个 1×4 的长方形和一个 2×2 的正方形不能覆盖 8×8 的正方形．

分析　解决此问题的关键是采用一种什么样的合理的染色方法．我们让每一行（列）中的任意一个 1×4 的长方形都覆盖二黑格与二白格；同时让任意一个 2×2 的正方形都覆盖三白格和一黑格，或者是覆盖三黑格和一白格．同时 8×8 正方形施行染色后应有：白格数=黑格数

解　如图 26—10 就是我们分析过的一种染色方法．不论采用什么样的覆盖方法，任意一个 1×4 长方形覆盖的黑格数=白格数，15 个 1×4 长方形共覆盖 30 个黑格与 30 个白格，一个 2×2 正方形覆盖三黑一白，或覆盖三白一黑．因此不管怎么盖法，都不能用 15 个 1×4 长方形和一个 2×2 的正方形恰好盖满 8×8 正方形．

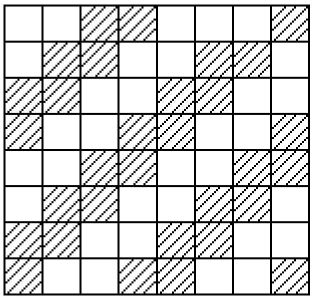


图26—10

练习题二十六

1．至少用几种颜色给图 26—11 中的线段染色才能使任何两条相邻的线段染不同的颜色？


图26—11

2．4×4 的正方形方格纸中的小方格涂有黑白两种颜色如图 26—12，将其任一行或任一列中的各格全部变色（黑、白互变），称为一个程序．能否经过若干程序将图 A 变为图 B，为什么？

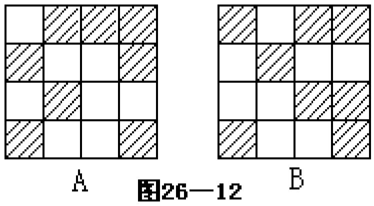


图26—12

3．在 7×7 格的棋盘的每一个格上放一个马，每个马能否同时按国际象棋的规则各走一步？

4．求证：用 15 个 4×4 的矩形块和 1 个 2×2 的矩形块不能完全覆盖 8×8 矩形．

5．3×3×3 的立方体由 27 个单位正方体组成，在其中心的小正方体内有一甲虫．甲虫能从每一个小正方体爬到与它相邻（有一个公共面）的任一个小正方体中．问：甲虫能否无重复地爬遍所有小正方体？

第二十七课 最佳方案

在我们的日常生活和劳动生产中，不论我们做什么事情总想做好，使之得到最满意的结果．要想得到最满意的结果，就要从整体的观点，全局考虑，统筹规划．这种问题大致分为两类：一类是确定一项任务，如何精打细算，使用最少的人力、物力去完成它；另一类是已有一定数量的人力、物力，如何合理安排，使它们发挥最大限度的作用，从而多、快、好、省地完成任务．

目前，已有很多学者从事这种问题的研究，并且取得了成绩，为我国的建设事业作出了贡献．同学们熟悉的华罗庚爷爷在这方面的成就是巨大的，开创了我国应用数学领域的新天地．华罗庚爷爷特别关心青少年的教育，他老人家生前有很多为青少年所写的普及数学丛书，其中就有“统筹规划”方面的内容．在我们这一课中，也将一些有关“统筹规划，最佳策略”的简单问题介绍给同学们，希望我们的小读者做事多动脑筋，成为聪明的小“行家”．

例 1 小蕾为家里做饭，她择菜需要 8 分钟，洗菜 5 分钟，控水 3 分钟，洗米 3 分钟，煮饭 10 分钟，切菜 4 分钟，炒菜 6 分钟．若小蕾家使用的是单火眼煤气灶，她怎样安排做饭顺序最省时合理？若小蕾家使用双火眼煤气灶又怎样安排才合理？

分析 择菜是洗菜的先决条件，洗菜是控水的先决条件，控水是切菜的先决条件，切菜是炒菜的先决条件．洗米是煮饭的先决条件．由此得到这样两条“主线”，它们可以互不干扰，但显然若先炒菜，再煮饭，或先煮饭再炒菜不会是最合理的方案．因做菜过程中，控水占 3 分钟，在做饭过程中，煮饭占 10 分钟，在这 13 分钟里，时间没有被合理使用．

解 设小蕾家使用单火眼灶具，即炒菜和煮饭不能同时进行．显然煮饭占火时间长，而这段时间内可以完成洗菜、控水、切菜等项工作．这样择菜用 8 分钟，洗米用 3 分钟，煮饭用 10 分钟（同时洗菜、控水、切菜），补切菜 2 分钟，炒菜用 6 分钟，共用时间 29 分钟．

若先炒菜，后煮饭．则择菜 8 分钟，洗菜 5 分钟，控水 3 分钟（同时可洗米），切菜 4 分钟，炒菜 6 分钟，煮饭 10 分钟，共用时间 36 分钟．所以，最合理的方案是：先择菜、洗米，在洗菜、控水、切菜的同时煮好米饭，最后炒菜．

设小蕾家使用双眼灶具，即炒菜、煮饭可以同时进行，这样马上可以得出，在煮饭的同时可以切菜，炒菜，不浪费一点时间，剩下来是洗米和控水可同时进行，再剩下来的就是择菜、洗菜，总共用时 26 分钟．这种方案中，控水 3 分钟，煮饭 10 分钟被充分利用，显然是最佳方案．

说明：这道例题是向同学们展示“筹划最佳策略”的妙用，学会了这种数学方法，会使你解决很多难题，收到实益．

例 2 某学校有试验田 25 亩，计划要种黄瓜和西红柿．这些土地根据土质、水利条件，可分为三类（表 27—1）：一类地 8 亩，二类地 12 亩，三类地 5 亩．计划要求产黄瓜 8000 斤，西红柿不限．应如何安排种植，可使西红柿的产量高？

分析 这个问题属于作物布局问题，其关键是要计算“亩产比”．

土地 亩产 作物	一	二	三
黄瓜	600 斤	500 斤	400 斤
西红柿	800 斤	700 斤	600 斤

表27—1

解　计算亩产比（黄瓜比西红柿）

一类地：$\frac{600}{800}=0.75$，**二类地：**$\frac{500}{700}=0.71$

三类地：$\frac{400}{600}=0.67$

即一类地种黄瓜最佳，其次是二类地，三类地种西红柿最佳．则选用一类地全部种黄瓜，可产：600×8=4800 斤，要求黄瓜产量是 8000 斤，还差 3200 斤由二类地种植，即需要用地 3200÷500=6.4 亩，余下的 5.6 亩二类地，以及三类地都种西红柿，可产西红柿：700×5.6＋600×5=6920 斤．这样就得到符合题意的最佳种植方法．

例 3 在一条公路线旁有四家工厂，工厂的职工数如图 27—2 所示．现要在这段路线上设立一个公共汽车站，问这个车站设在哪儿，可以使几家工厂的职工乘车方便？

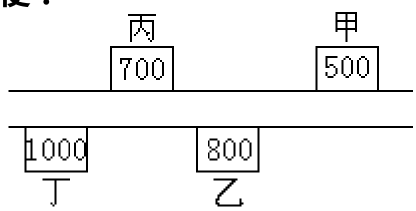


图27—2

分析　显然车站应设立在甲厂到丁厂的道路上，我们首先看看这段道路的端点甲厂和丁厂的附近是不是最佳位置．假如车站设在甲厂附近，那么其他工厂的职工都要经过乙厂到甲厂方向来乘车，可是，其他三家工厂的职工总和为 2500 人，甲厂只有 500 人，这种使大多数职工不方便的位置决不会是最佳位置．我们的原则是“小靠大”，即少数人向多数人靠拢．所以，车站设在丁厂附近也不是最佳位置，因为丁厂 1000 人，而甲、乙、丙三厂职工的总和是 2000 人，1000＜2000．这样车站应设在乙厂到丙厂的这段路上的某个位置．那么甲厂的职工至少要经过乙厂才能到车站，丁厂的职工至少要经过丙厂才能到车站，所以我们可以先将甲厂、丁厂的职工分别集中到乙厂和丙厂（如图 27—3），然后再确定车站的位置就方便多了．

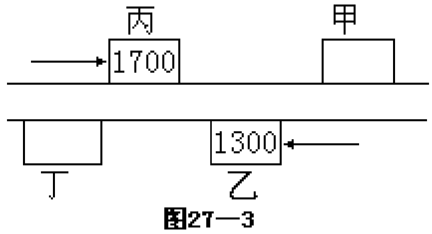


图27—3

解　四个工厂的职工人数总和为：

1000＋700＋800＋500=3000（人）

甲厂 500 人，丁厂 1000 人，它们都小于四厂总人数的一半．根据“小靠大”的原则，甲厂附近和丁厂附近都不是车站的最佳位置，甲厂与丁厂要分别向乙厂和丙厂靠（图 27—3），这样丙厂就相当于 1700 人，乙厂相当 1300 人，再由“小靠大”的原则，1700＞1300，所以乙厂应向丙厂靠，即车站应设在丙厂附近为最佳．

说明：上述甲厂的人数小于四厂总人数的一半，即甲厂的人数比其余三厂人数总和小，所以要向左靠，若甲厂的人数大于四厂总人数的一半，即甲厂的人数比其余三厂人数总和大，则其余三厂要向甲厂靠，那么车站就应设在甲厂附近．

例 4 图 27—4 是一张公路运输图，图中两条相交直线表示两条公路线，“□”与“○”分别表示运出货物与运进货物的地点，数字表示运量，（如⑳表示运出货物 20 吨，⑮表示运进货物 15 吨）试作出最佳运输方案．

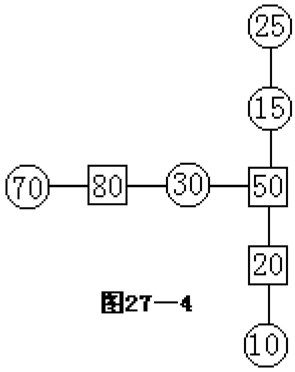


图27—4

分析 货物运输包含两个因素，一、运输路程，二、货物重量．如果路程以公里为单位，货重以吨为单位，那么运输量以吨公里为单位．比如，一吨的货物运送一公里，那么运输量就是一吨公里．所谓最佳运输方案，就是使运输的吨公里数尽可能的小．要做到这一点，就要防止对流（即往返重复运输），例如，若将⑳运往㉚，再将㊿中 10 吨货物运往⑩，就在⑳和㊿之间产生对流，如此的方案一定不是最佳的．下面我们就来寻找一个最佳方案．

解 制定最佳方案的原则是：在不产生对流的前提下就近运送货物．方案．

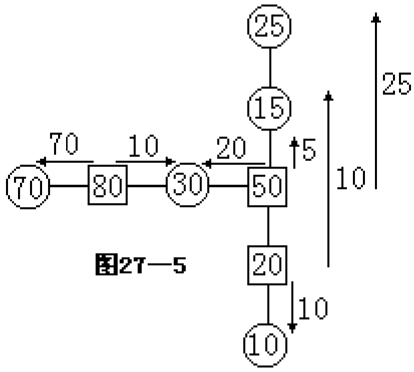


图27—5

说明：如果同学们有兴趣，可以验证这种方案的最佳性，先求出吨公里数（运程可由同学根据图中线段的长短量定），再与其余的方案比较．

例 5 2.8 米长的圆钢材，要截成 1.2 米、0.9 米两种长度的钢料段，以备制做零件，现在要求两种钢料各 60 段，至少需要 2.8 米的圆钢多少

件？

分析 初看起来，问题很简单，每件原料都可以截下 1.2 米和 0.9 米的钢料各一件，共需 60 件．但如此截取造成很大浪费，因为 2.8—1.2—0.9=0.7（米），剩下的残料比较多，用途不大，所以，这样的截取不是最佳的，应找出一种最省料的截取方法．

解 为了节约用料，我们找出以下两种截取方法：

（1）截成 1.2 米的钢件两段，余料 0.4 米．

（2）截成 0.9 米的钢件三段，余料 0.1 米．

设取 2.8 米长的原料 x 件．用截法（1）；取 y 件原料，用截法（2），则有：

$$\begin{cases}2x=60\\3y=60\end{cases}\qquad\begin{cases}x=30\\y=20\end{cases}$$

即取 30 件原料截成 1.2 米长的钢段，取 20 件原料截成 0.9 米长的钢段，总共使用 50 件原料，节约 10 件原料，并且残料仅为∶0.4×30+0.1×20=14 米．

例 6 某乡有八个行政村，如图 27—6 分布．点表示村庄，线表示道路，道路的长短如图 27—6．现在这个乡要建立广播网，沿道路架设电线，问沿怎样的路线架设电线最省？

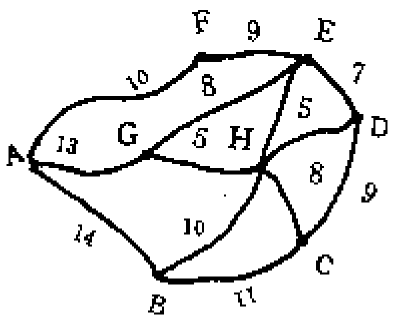


图27—6

分析 要在全乡架设广播线，显然整个线路应该是连通的，所以，架设的广播线形成一个脉络，而且应是树形脉络．因为要求的脉络总长度要尽可能短（即电线最省），有闭路就会造成浪费，由此得出这个脉络（电线的架设图）是由 8 个点（即 8 个村）和 7 条线组成，题目所给的乡村分布图是一个圈形脉络．由以上分析，需要把它转化为树形脉络．

解 要把圈形脉络转化成树形脉络，就是要把构成圈（即闭路）的某条线去掉．此方法叫做剪圈法．根据题目的要求，剪圈时，要去掉构成圈的最长一条线，这样的做法叫做取短法．

首先去掉 AF，即剪开圈 AGEFA，因为 AF 是最长的线．在圈 AGHBA 中，AB 是最长的线，把它去掉，以下顺次去掉：BCHB 中的最长线 BC，CDHC 中的最长线 CD；DEHD 中的最长线 HD；HEGH 中的最长线 EG；到此圈形脉络图 27—6 转化成了树形脉络图 27—7，且脉络的总长度是最短的，即为题目所求的最佳架线线路．

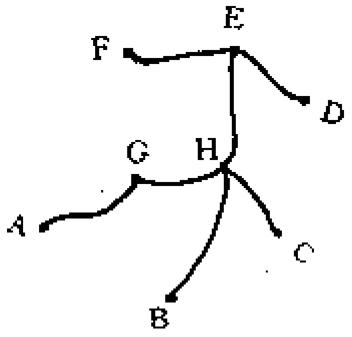


图 27－7

例 7 甲、乙两城之间有多条道路可通，如图 27-8，图中数字表示该段道路上的最大通过能力．求出甲、乙两城间的最大通过能力．

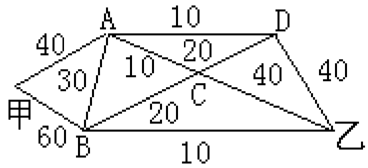


图27—8

解　解决这类问题的基本原则是：由外及内依次计算．即最外层道路是：①甲→A→D→乙，②甲→B→乙．它们的最大通过能力都是 10．其次有道路③甲→A→C→D→乙，④甲→B→C→乙，它们的最大通过能力分别是 10、20．则甲、乙两城总的通过能力为 50．

练习题二十七

1．某乡共有六块麦地，每块麦地的产量如图 27—9，问麦场设在何处最好？（运输总量千克千米数越小越好）

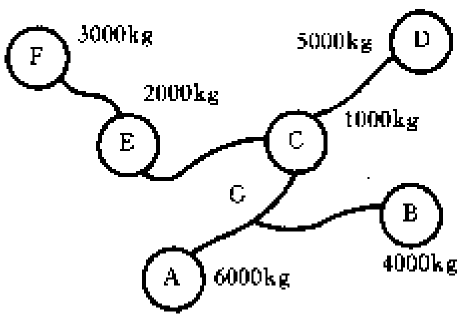


图 27—9

2．图 27—10 中所示为一个乡镇分布图，共有 7 个村庄，找出最短的联络路线．（连通各村的路线）

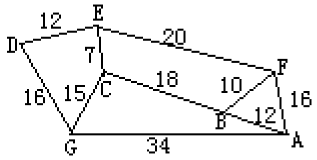


图27—10

3．某班 40 名师生星期天参加植树活动，师生按身体状况分成甲、乙、丙三种人员．他们的任务是挖树坑和运树苗两种活，要求挖树坑 30 个，运树苗则运得越多越好．甲、乙、丙三种劳动人员的效率如表 27—11 所示，试求最合理的人员分配方案．

任务 / 效率 / 人员	挖坑	运树	人数
甲	2	20	15
乙	1.2	10	15
丙	0.8	7	10

（注：图中“效率”是指某人员一天的劳动能力，如甲种人员若挖坑，一天可以挖 2 个坑；若运树，一天可以运 20 棵树．）

4．每天甲、乙两煤矿各产煤 200 吨、250 吨；A、B、C 三个城市每天各需要煤 100 吨、150 吨、200 吨，各煤矿与各城市之间的运输距离如表 27—12 所示，求使运费最省方案：（单位：千米）

5．某缝纫社有甲、乙、丙、丁四个小组，甲组每天能缝制 8 件上衣或 10 条裤子；乙组每天能缝制 9 件上衣或 12 条裤子；丙组每天能缝制 7 件上衣或 11 条裤子，丁组每天能缝制 6 件上衣或 7 条裤子．现在上衣和裤子要配套缝制（每套为一件上衣、一条裤子），问 7 天中这四个小组最多能缝制多少件衣服？

城市 / 距离 / 煤矿	A	B	C
甲	90	70	100
乙	80	65	80

第二十八课 最佳策略

我们经常看到许多带有竞赛或争斗性质的现象，小至下棋、游戏，大至军事较量等．显然人们在竞赛和争斗中总是希望自己一方最终取得胜利或获得尽可能好的结局，这就需要为此而作出努力．然而这必定遭到对手的干扰和阻挠，所以自己要想取得胜利，必须考虑对手可能采取的策略,从而制定出自己的对策来.这就是所谓‘知己知彼,百战不殆”.我们将这种现象称之为“对策现象”.

“对策现象”有三个最根本的要素：

一、局中人

在一场竞赛或战斗中都有参加者，他们为了在对策中取得好结果，必须制定对付对手的行动方案，我们把这种有决策权的参加者称为局中人．局中人的概念是广义的，是指参加竞争的各个阵营．并且称只有两个局中人的对策现象为“双人对策”，而多于两个局中人的对策称为“多人对策”.

二、策略

把一个局中人的一个可行的自始至终通盘筹划的行动方案，称为这个局中人的一个策略.

三、一局对策的得失

在一局对策中，必有胜利者和失败者，名次有前有后，我们称之为“得失”．每个局中人在一局对策中的得失与全体局中人所取定的策略有关.

下面我们来看几道例题.

例 1 甲、乙二人轮流地往一张圆桌面上放一枚五分硬币，唯一的规则是任何两个硬币不能重叠，谁放完一枚后而使得对方无法再往桌面上放硬币时，谁就是胜利者.

分析 问题中对于圆桌面的大小没有做任何规定，大小是无关紧要的，关键是桌面几何形状的对称性.

作为先放的人，设为甲，如果把第一枚硬币对准圆桌面的中心放下去，要是桌面太小，以致乙无法再放，乙就输了；要是乙还能放一枚硬币，其位置在点 A（见图 28—1），那么 A 点关于圆桌面中心 O 的“对称点”A'上，一定是空着的，并且足以再放一枚硬币．这时，甲就应当把一枚硬币对准 A'放下去.

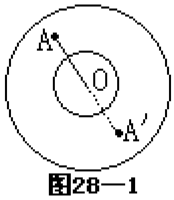


图28—1

解 设甲先放硬币．由于圆桌面的对称性质，也就是除中心 O 外，桌面上随便一点 A，总可以找到一个关于 O 的对称点 A'，使得 A 到 O 的距离等于 O 到 A'的距离．只要乙在一个位置上放一枚硬币，甲就可以在相应的对称位置放一枚硬币．圆桌的面积是有限的，总有放满的时刻，因而第一个无处可放的必然是乙，所以甲必然获胜.

例 2 有一堆火柴共 1996 根，甲、乙两人轮流从中拿取火柴，每人

每次最多可拿 3 根，最少拿 1 根，谁能拿到最后一根谁为胜．若甲先拿，问谁有必胜的策略？

分析　已知每人每次最多可拿 3 根，至少要拿 1 根，则拿取火柴的最多根数与最少根数之和为 4．而 1996 恰好是 4 的倍数．则不论甲一次拿几根，只要乙每次所拿火柴的根数与甲刚拿的火柴根数之和为 4，即能保证乙能拿到最后一根．

解　乙有必胜的策略．设甲每次拿 n 根，则乙就拿 4—n 根．其中 n 只能取 1、2、3 三个数．

例 3　甲、乙二人轮流从分别写有 1、2，…99 的 99 张卡片中任意取走一张，问先取卡片的人能否使最后剩下的两张卡片上的数字互质？

分析　要使两张卡片上的数字互质（即这两个数的最大公约数为 1），最简单易行的是使最后剩下的两张卡片上的数字为一个奇数和一个偶数．而 99 张卡片中有奇数卡片 45 张，偶数卡片为 44 张．故先取卡片的人有必胜的策略．

解　先取卡片的人首先取走一张奇数卡片，接下来，若后取者取奇数卡时，先取者就取偶数卡，若后取者取偶数卡，则先取者就取奇数卡，总之先取者每次取卡都能保证剩下的卡片上奇偶数一样多，最终必取得胜利．

例 4 两人轮流在图 28—2 的空格内画符号．甲画“√”，乙画“×”．规定每人每次至少画一格，至多画三格．空格画满后，分别清点一下，哪一方的总数是偶数，哪一方就获胜，问如何就能确保获胜？

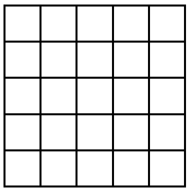


图28—2

分析　先来考虑简单情况．如果只

有一个格，当然先画者必败，如果只有九个格，设甲先画，乙后画，我们来讨论以下三种情况：

（1）甲先画一格，乙如果画三格，则给甲留下五个格，这时甲无论怎样画，乙都有办法获胜；

（2）甲先画二格，乙如果画三格，则给甲留下四个格，这时乙同样有办法获胜．

（3）甲先画三格，乙只要画一格，就转化为（1），还是乙胜．

有了以上特殊情况的启示，我们可以得到如下的解答．

解　先走的人必败．因为小方格的数是奇数，两人画格子数必定是一奇一偶．若甲先画，那么乙应采取的策略如下：

	最后一次应留给对方空格数	倒数第二次留给对方空格数	倒数第三次留给对方空格数	…
对方已取得偶数	1	4	9	…
对方已取得奇数	0	5	8	…

由表逆推上去，不难得出乙取胜的方法；

（1）甲在取得偶数的情况下，乙应该留给甲的空格数是：

20，17，12，9，4，1

（2）甲在取得奇数的情况下，乙应该留给甲的空格数是：

21，16，13，8，5，0

例如，甲先画 2 格，则乙应画三格；甲又画 3 格，乙应画 1 格等等．

说明：这道题是将从特殊到一般的分析方法与倒推法结合起来运用．象这样把多种方法结合起来运用，往往能使我们尽快地找到解题思路．

例 5 两人轮流在国际象棋盘的空格内放入“相”棋，一方为黑棋，一方为白棋．当任何一方放“相”棋时，要保证不被对方已放入的“相”吃掉，谁先无法放棋子谁为输者．问谁为输者？

（注：国际象棋盘为 8×8 格的方形盘，“相”棋的走法为斜飞，格数不限．）

分析 由“相棋”的走法，每一“相”棋在棋盘上可以控制两条斜路，如图 28-3 所示，凡落入这两条斜路上的棋都受到攻击．双方放“相”棋时，只需避开受控的斜路就会安然无恙．

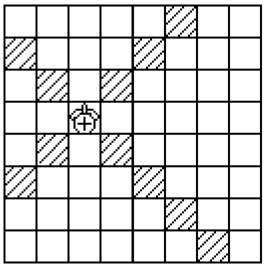


图28—3

解 先走棋者输．这是因为先走者无论把“相”放在什么位置，后者都可把“相”放在对方棋子的“对称”位置上（以棋盘中间的竖直平分线为对称轴），这样能够保证：（1）后走者必有放棋子的格子；（2）后走者放入的“相”不会被对方刚刚放入的“相”吃掉，因为“相”是斜飞，不能直走，所以双方的“相”在某一横行上可以“和平共处”；（3）后走者放入的“相”也不能被对方以前放入的“相”吃掉．因为先走者放入的“相”一定避开了对方已有的“相”，由对称性后走者的“相”也不会遭到攻击、如此下去，先走者终有不能再走的时候，从而失败．

例 6 有三堆棋子，分别为 7，8，9 枚，甲、乙两人轮流从其中任意一堆中取走若干枚棋子且至少取一枚，谁能拿到最后一枚谁就获胜．求获胜者的策略，

分析 由已知条件，很难一下确定谁能获胜（即先取者有必胜的策略还是后取者有必胜的策略）．下面我们先看简单的情形：

（1）出现只剩两堆的情况：

①若两堆棋子数相同，则谁遇到谁输．因为不论你选择哪一堆拿走多少枚，对方只需在另一堆拿走相同的棋子数就最终能拿到最后一枚．

②若两堆棋子数不相同，则谁遇到谁就胜．因为只须从较多的一堆中拿走一些棋子，使剩下的棋子与另一堆一样多，即为①的情形．

（2）出现三堆仅剩 1，2，3 的情况．

这种情形是“输形”，谁遇到谁就会输，因为不论你怎么拿，对方都可以给你制造出上面①的情形．这种“输形”的特点是：两堆为奇数，一堆为偶数，并且其中一堆奇数与一堆偶数之和等于另一堆奇数．

于是谁遇到具有上述输形特点的情形，谁就要输．反之，谁能给对方制造出具有上述输形特点的情形，谁就必胜．

解 先拿的一方有必胜的策略．

设甲先拿棋子，则应选择“7”的一堆拿走6枚棋子，剩下情形是1，8，9．不论乙如何拿必破坏输形特征，而轮到甲时，甲又可以为对方制造出输形，乙必败．

例7 在8×8的棋盘中，有三枚棋子（如图28-4）．两人轮流按顺时针螺旋方向移动棋子，移动的格数不限，但每人每次只能移动一枚．谁能使最后一枚棋子移到终点A谁为胜利者．问先移棋子的人能否取胜？

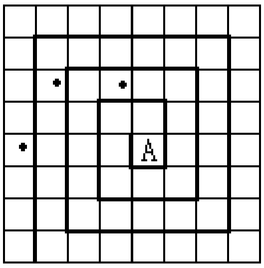


图28—4

分析 这个题实际上只是将例6改变了一种形式，其实质并没有改变．

三枚棋子分别距A为11，31，60格．这相当于有三堆棋子，分别有11，31，60枚．谁能将最后一枚移至A格，就相当于谁能拿到最后一枚棋子．

解 先移棋子的人必胜．

他只须将离A60格的棋子先前移动40格，那么剩下的情形是，三枚棋子距A分别为11，31，20，则这个“输形”留给了对方，对方必败．

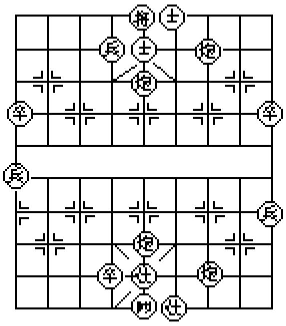
练习题二十八

1．1996个空格排成一排，第一格中放有一枚棋子．现有两个人做游戏，轮流移动棋子，每人每次可前移1格、2格或3格，谁将棋子移到最后一格，谁为胜者．问确保获胜的方法是什么？

2．有9张纸片，分别写着1、2、3、4、5、6、7、8、9．两个人轮流取一张，谁手上的三张纸的数字加起来等于15，谁就获胜．问保证不败的策略是什么？

3．两人轮流报数，但报出的数字不得超过8，至少是1，同时把所报得数一一累加起来，谁先报到88，谁就获胜．问先报必胜，还是后报必胜？

4．如图28-5所示，是一个中国象棋的残局，若黑方先走，则谁将取得胜利？



5．有三摞纸片，分别为 5，15，34 张，甲、乙两人轮流从三摞纸牌中拿牌，每人每次只能从一摞纸牌中任取若干张，至少取一张，谁有必胜的策略？

答案

练习题一

1．（1）7.5；（2）372；（3）0；（4）$\frac{11}{26}$；（5）1．

2．（1）54；（2）$\frac{3}{8}$；（3）1．

3．（1）x=144；（2）x=0.575．

4．依题意列算式如下：

$$[1248-(1248\times\frac{1}{3}+1248\times\frac{1}{3}\times70\%)]\div1248\times\frac{1}{3}\times100\%$$

$$=[1248\times(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{3}{4})]\div416\times100\%$$

$$=1248\times\frac{5}{12}\div416\times100\%$$

=520÷416×100%=125%．

答：杂志占购买科技书的 125%

5．分析 选出男生总人数的$\frac{1}{11}$可知剩下男生的$\frac{10}{11}$，根据剩下男生的人数是女生的二倍又可知剩下女生人数为男生的二倍$\frac{10}{11}\div2=\frac{5}{11}$，从156人中去掉12名女生的人数正好是男生人数的$1+\frac{5}{11}$，即可求出男生及女生的人数．解（$156-12$）÷〔$1+$（$1-\frac{1}{11}$）÷2〕$=99$（人）

$99\times$（$1-\frac{1}{11}$）$\div2+12=57$（人）

答：男生 99 人，女生 57 人．

练习题二

1．（1）$\frac{17}{9}$；（2）$1\frac{68}{157}$；（3）2．

2．（1）3；（2）$\frac{1}{9}$；（3）$1\frac{4}{11}$；（4）$9\frac{1}{13}$．

3．（1）$\frac{59}{39}$（2）$15\frac{3}{4}$（3）$\frac{1}{20}$

4．（1）$4\frac{1}{6}$（2）$\frac{63}{529}$

练习题三

1．当$x>\frac{15}{2}$时，$[\frac{15}{2x}]=0$，此时$y=0$．

当$x<\frac{15}{2}$时，$[\frac{2x}{15}]=0$，此时，$y=0$．

当$x=\frac{15}{2}$时，$[\frac{15}{2x}]=[\frac{2x}{15}]=1$，此时，$y=1$．

∴y 的值有两个：0 或 1．

2．$[\frac{n^2}{4}]$为质数，所以n不是4的倍数，设$n＝4k＋1$，$4k+2$和$4k+3$（k 为整数）

当 n=4k+1 时

$$[\frac{n^2}{4}]=[\frac{(4k+1)^2}{4}]=4k^2+2k=(2k+1)$$

显然 2k（2K+1）不是质数．

当 n=4k+2 时

$$[\frac{n^2}{4}]=[\frac{(4k+2)^2}{4}]=4k^2+4k+1=(2k+1)^2$$

显然（2k+1）^{2}不是质数

当 n=4k+3 时

$$[\frac{n^2}{4}]=[\frac{(4k+3)^2}{4}]=4k^2+6k+2=2(2k+1)(k+1)$$

显然，当 k=0 时，2（2k+1）（k+1）=2 是质数，所以当 n=3 时，$[\frac{n^2}{4}]$是质数．

3．∵x=［x］+｛x｝

∴原方程化为 3｛x｝+8｛x｝-50=0

∵8［x］，50 均为整数，所以 3｛x｝为整数，又因为 0≤｛x｝＜1，所以 0≤3｛x｝≤2，所以 0≤50-8［x］≤2，由此得［x］$=6$，所以3｛x｝$=2$，｛x｝$=\frac{2}{3}$．

∴方程解为$x=6\frac{2}{3}$．

4．因 10=2×5，所以 1996！中末尾 0 的个数相当于 1996！的质因数分解式中 2×5 的个数，而质因数分解式中 5 的个数较少，因此只需求出 1996！的质因数分解式中 5 的最高幂指数即可．

由性质（10）的推论 2，以及 1996＜5^5，可得 5 的最高幂指数为：

$$[\frac{1996}{5}]+[\frac{1996}{5^2}]+[\frac{1996}{5^3}]+[\frac{1996}{5^4}]$$

=399+79+15+3=496

∴1996！中末尾有 496 个零．

5．由［4.05x］=［4.05］x 解得 x＜20，故满足方程的最大自然数为 19，∵19＜2^5，所以 19！的质因数分解式中 2 的个数为：

$$[\frac{19}{2}]+[\frac{19}{2^2}]+[\frac{19}{2^3}]+[\frac{19}{2^4}]=9+4+2+1=16$$（个）．

练习题四

1． $0.02\dot{1}4285\dot{7}$， $0.\dot{0}6349\dot{2}$

2． $\frac{5188}{9999}$；$\frac{613}{9990}$

3．3；

4．6；

5．6∶10 或 18∶10．

练习题五

1．共有 280 个球．

2．甲原有 4 本，乙原有 7 本．

3． $1\frac{1}{9}$．

4．300 件．

5． 21000 米．

练习题六

1．设加入 x 千克水．10×15%=（10+x）×10%　x=5（千克）

2．设需 20%的盐水 x 千克．

10×10%+x·20%=（10+x）·15%x=10（千克）

3．设容器内原有农药 x 千克

x·30%=（x+20）·20%

x=40（千克）

4．设原有 40%的酒精 x 千克．

x·40%=（x+5）·30%　x=15

设再加入 y 千克酒精，浓度变为 50%．

15×40%+y=（15+y）·50%

y=3（千克）

即需再加入 3 千克酒精．

5．设需倒入 x 千克水

$$\frac{2003\times10\%}{200+x}=\frac{100\times15\%}{100+x}$$

x=200

即需倒入 200 千克水．

练习题七

1．$(1-\frac{1}{15}\times 5)\div(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})=4$（小时）

2．$1\div[(1-\frac{1}{15}\times 3)\div 16]=20$（小时）

3．$(4+11)\div(1-\frac{4}{24})=18$（小时）

4．$1\div(\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60})=10$（小时）

5．依题意：甲乙合作效率为$\frac{1}{48}$．

实际上甲、乙合作了 28 天，甲又单独做了 63-28=35 天，所以甲的工作效率为$(1-\frac{1}{48}\times 28)\div 35=\frac{1}{48}$，则乙的工作效率为$\frac{1}{48}-\frac{1}{84}=\frac{1}{112}$

∴乙还需$(1-\frac{1}{84}\times 42)\div\frac{1}{112}=56$（天）

练习题八

1．甲的速度为每小时 40 千米，乙的速度为每小时 60 千米．

2．经过 3 小时甲追上乙．

3．设自动扶梯的速度为每分钟 m 级，任何时间看到的扶梯级数（从底到顶）为 l，小刚在静止的扶梯上步行速度为每分钟 x 级，则有：

150/3x=l/3x-m 及 75/x=l/x+m

解得 l=120

4．设再过 x 分钟，船才能追上所掉的东西，设船速为 a 米／分，水速为 b 米／分，则有：

5（a-b）+（5+x）b=x（a+b）

x=5

即：再过 5 分钟，船追上所掉的东西．

5．设汽车将每人运送 x 千米，汽车往返 9 次，则有：

$\frac{1}{5}(\frac{91-x}{9})=\frac{1}{35}(2x-\frac{91-x}{9})$

x=28

所以所用最少时间为：$\frac{28}{35}+\frac{91-28}{5}=13\frac{2}{5}$（小时）

练习题九

1．求 134 与 312 之间的所有自然数中，有多少个数能被 19 整除？

解 ∵在 1 至 134 之间的自然数中，能被 19 整除的自然数的个数有：

$134\div 19=7\frac{1}{19}\approx 7$（个）（由题目的实际意义，去掉小数部分，取整数部分）

同理，在 1 至 312 之间的自然数中，能被 19 整除的自然数的个数有：

$312 \div 19 = 16\frac{8}{19} \approx 16$（个）

所以，在 134 与 312 之间的所有自然数中，有

16-7=9（个）

所以，有 9 个数能被 19 整除．

2．求积为 5760 的四个连续偶数之和．

解 因为，四个数的积为 5760 是四位数，所以，这四个数不能都是两位数，否则乘积大于 10000，即至少有一个是一位数．因为这四个数为连续偶数，所以只可能取 2、4、6、8、10、12、14 中的连续四个数．又因为 5760 的末位是 0，所以 10 必在其内，经检验：

8×10×12×14=13440＞5760

6×8×10×12=5760

所以，这四个连续偶数为：6、8、10、12，其和为：6+8+10+12=36．

3．求 $\dfrac{1}{\frac{1}{90}+\frac{1}{91}+\frac{1}{92}+\Lambda\Lambda+\frac{1}{99}}$ 的整数部分．

解设 $\dfrac{1}{\frac{1}{90}+\frac{1}{91}+\frac{1}{92}+\Lambda\Lambda+\frac{1}{99}}=S$

则由放大和缩小法有：

$\dfrac{1}{\frac{1}{90}+\frac{1}{90}+\Lambda\Lambda+\frac{1}{90}} < S < \dfrac{1}{\frac{1}{99}+\frac{1}{99}+\Lambda\Lambda\ \frac{1}{99}}$

即：9＜S＜9.9

所以，S 的整数部分为 9．

4．估计两个三位数乘积的位数范围．

解 因为是两个 3 位数，这两个数均在大于等于 100 且小于 1000 内，所以，两数的乘积的范围为大于等于 10000 且小于 1000000．所以，这两个三位数的乘积为 5 位数或 6 位数，即乘积的位数范围为：5 或 6．

5．某学生在计算偶数 2、4、6、8……的和时，不小心少加了一个偶数，结果为 1112，那么，这个结果与正确的结果差多少呢？

解 因为偶数 2、4、6、……的前 32 个数的和为 2+4+…… +64=1056．

前 33 个数的和为：2+4+6+……+66=1122．

所以少加的偶数应为：1122-1112=10，即少加了偶数 10，则错误结果与实际结果差 10．

练习题十

1．（1）2☆3=5，3☆2=10，所以不等．

（2）a=b

（3）无交换律

2．6

3．$\frac{271}{80}$

4．（1）3，0，2

（2）3，9，13

（3）12，26，33，45

5．提示：$a\&b=\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}$

$a\&b\&c=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}}+\dfrac{1}{c}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$，

可以想象，3＆4＆5＆6＆20

$=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{20}}$

$=\dfrac{1}{\dfrac{20+15+12+10+3}{60}}$

$=1$

练习题十一

1．一个月中最多 31 天，最少 28 天，将每一天看作一个抽屉，将 32 个孩子看作 32 个元素，根据抽屉原则，至少有两个元素落入同一抽屉，即至少有两人是同一天出生的．

2．根据抽屉原则一知，这个旅店最多有 24 间客房．

3．任意一个数被 12 除，其余数为 0，1，…，11 中的一种，将这 12 个余数看作 12 个“抽屉”，任意 13 个数被 12 除，根据抽屉原则知，必有两数除以 12 余数相同，这两数的差是 12 的倍数．

4．将前 10 个自然数分成五组如下，｛1，7｝，｛2，6｝，｛4，8｝，｛3，9｝，｛5，10｝．将这五组看作 5 个抽屉，在前 10 个自然数中任取 6 个数，必有两个数出自同一抽屉，即一定存在两个数，其中一个是另一个的倍数．

5．从最不利的情况考虑，当摸出 12 个球时，可能是 10 个红的，白，黑各一个，没有不同颜色的两对，当摸出 13 个球时，至多有 10 个属于同一颜色，那么另外两种颜色的球至少有 3 个，根据抽屉原则一，这三个球中可以得到第二对同色球，即至少要掏出 13 个球，才能保证达到要求．

练习题十二

1．将 5 个人看作 5 个元素，将男、女两种性别看成两个抽屉，根据原则（二）知，必有三个元素落入同一抽屉．即至少有三个人性别相同．

2．一副扑克牌去掉大王、小王后共有 4 种花色，将四种花色看作四个抽屉，根据抽屉原则，9 个元素放入四个抽屉中，必有三个元素落入同一抽屉，即必有 3 张牌是同一花色．

3．将 1997 年的每一天看作一个抽屉，1000 个孩子看作元素，由于 1000＞2×365，所以至少有 3 个孩子的生日相同．

又因为 1000-（365-1）=636．所以至少有 636 个孩子将来不单独过生日．

4．如图 12-5 所示，将圆四等分，将这四个扇形看作四个抽屉，在圆中任意点 9 个点，必有三个点落在同一扇形内，由这三点构成的三角形面积小于扇形面积，而每一扇形面积是圆面积的 $\frac{1}{4}$．问题得证．

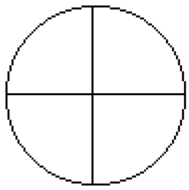


图12—5

5．第一行有 7 个方格，因为只涂两种颜色，根据抽屉原则，必有一种颜色涂了 4 个或 4 个以上的方格，不妨设第一行有四个红方格．

第二行：在第一行的 4 个红方格下面的 4 个方格中，如果有两个红色的，结论已经成立，否则必有 3 个黑方格．

第三行：在第二行三个黑方格下面的 3 个方格中，至少有两个方格颜色相同．若是红色就与第一行组成符合条件的长方形，若是黑色则与第二行组成符合条件的长方形．

练习题十三

1．解：四人比赛乒乓球，且每两人都要赛一场，则一共要赛六场．而赵、钱、孙胜的场数相同，且赵胜了李．所以只能有两种可能性，即赵、钱、孙各胜一场或各胜两场．若他们各胜一场，则剩下的三场均为李胜，这与李曾败给赵矛盾、所以赵、钱、孙各胜两场．故李一场没胜．

2．解：设这位学者逝世时年龄为 x 岁，则他的出生年份应为 29x．依题意：$29x<1955$（x为整数）所以：$x<\frac{1995}{29}$即 $x\leq 67$．当$x=67$时，则出生年份为 290×67=1943，那么 1955 年时，仅为 12 岁．这与题意不符．取 x=66，则出生年份为 29×66=1914，那么 1955 年时，应为 41 岁．这与题意不矛盾．

3．解：由题述条件（二）可知 A 是女性，再由（四）和（三）可知，A、B、E、F 四人均为女性．则其余四人为男性．由条件（五），H 不是 B、E 的爱人．再由（二），H 也不是 A 的爱人，所以 H 与 F 是一对夫妻．又由条件（五）可知，C 与 B、E 不是夫妻关系，所以只能是 A 的丈夫．最后由条件（一）知道 E 与 D 不是夫妻关系，则 D 的妻子只能是 B．那么 G 与 E 是一对夫妻．

4．解：因为所有罐子上的标签都与罐中实物不符，所以在贴有“红白”标签的罐子中只能是两红或两白．那么只需在“红白”罐子中取出

一个彩球．若是红色球，则可知罐中是两红．那么标有“两白”的罐子中就是“一红一白”，标有两红的罐子中就是“两白”．若是白色球，则可知罐中是“两白”，那么标有“两白”的罐子中就是“两红”，而标有“两红”的罐子中就是“一红一白”

5．见表 13-6：

表13—6

	甲	乙	丙	丁	戊
英语	5	4	3	2	1
数学	5	4	3	2	1
历史	5	2	3	4	1
物理	4	1	3	2	5
语文	5	4	1	2	3

练习题十四

1．丙判断全对，乙判断全错．

2．3 号是伽利略，5 号是瓦特，2 号是爱因斯坦，4 号是哥白尼，1 号是牛顿．

3．如图 14-5

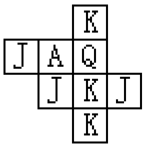


图14—5

4．见表 14-6

表14—6

	帮军属	植树	拾金不昧	修桌椅	补课	扫街道
小新		✓			✓	
小梅	×	×	✓	×	×	✓
小红	✓			✓	×	

5．见表 14-7

表14—7

	英语	德语	法语	西语	俄语
英籍教师	／		×	✓	✓
德籍教师	✓	／		×	✓
法籍教师	✓	✓	／	×	×
西班牙教师	×	✓	✓	／	
俄籍教师		×	✓	✓	／

练习题十五

1．设 1 份为 x，由已知有 5x×8x÷4x=10x

$$\therefore \frac{S_{小}}{S_{大}} = \frac{10x}{5x+8x+4x+10x} = \frac{10}{27}$$

2．表面积增加了 24 平方分米．
3．表面积是 88 平方厘米．
4．至少水池的深度为 4.5 米；需要蓄水 57 分钟．
5．2100 立方厘米．
6．棱长为 0.8 米．

练习题十六

1．x≈15.9 厘米．
2．123.78 厘米．
3．12 平方厘米．
4．16.56 平方厘米．
5．435 平方毫米．

练习题十七

1．AB= AO=4.5（厘米）．
2．225（平方厘米）．
3．周长为 3aπ，比值为 1．
4．弓形面积为$95\frac{37}{75}$平方厘米．

5．我们先考虑：若有一个点不被任何一个圆所覆盖，会产生什么结果．

如果点 M 不在任何圆的内部，那么这个点对每一个边的视角都是锐角（它若在某一个圆上或圆内部，这个点对直径两端点所张的视角，即圆内角，就应为直角或钝角）．因为所有视角和为 360°，所以这些角的数目不能小于 5．因此，若能覆盖，边数为三边形或四边形才成．

练习题十八

1．圆柱形钢材的体积等于水减少的体积，因此有：

圆钢的体积为：$\pi\times30^2\times4=1200\pi$（立方厘米）

圆钢的底面积为：$\pi\times20^2=400\pi$（立方厘米）

故：圆钢长度为：$1200\pi\div400\pi=3$（厘米）

2．甲容器中水的体积为：$\pi\times3^2\times10=90\pi$（立方厘米）

甲容器中的水倒入乙容器中，体积没有改变，因此乙容器中水的体积为 90π立方厘米．

将甲容器中的水倒入乙容器中，等于在乙容器中截得一个小圆锥，而小锥体底面半径与大圆锥底面半径的比等于两个高的比．设这个比值为 K，则小圆锥的体积为：

$\frac{1}{3}\pi\cdot(6K)^2\cdot10K=120\pi K^3$

所以有：$K^3=90\pi\div120\pi=\frac{3}{4}$　$K\approx0.91$

所以乙容器中水的深度为 9.1 厘米.

3．有水部分圆锥的底面半径和高分别是容器底面半径和高的$\frac{1}{3}$，所以有水部分的体积是容器容积的$\frac{1}{27}$，所以，此容器还能装26千克水.

4．两个圆锥容器内所盛水的体积总和为：$\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 10^2\times 30+\frac{1}{3}\pi\cdot 20^2\times 30=5000\pi$（立方厘米）

将两容器内的水倒入圆柱形容器内，水的体积不变，所以圆柱形容器的水深为：

$5000\pi\div(\pi\cdot 20^2)=12.5$（厘米）

5．表面积为：

$2\times(\frac{1}{2}\pi\times 15^2+30^2)+3\times 30^2+\pi\times 15\times 30=6620$（平方厘米）

体积为：

$\frac{1}{2}\pi\times 15^2\times 30+30^3\approx 34458$（立方厘米）

练习题十九

1．8∶5；240，320，200

2．提示：甲、乙两堆火柴的总根数没有变化，第一次，甲：乙=1：2，则甲：总数=1：3；第二次，甲：乙=5：2，则甲：总数=5：7；将两个单比分别化成 7：21 和 15：21．这样火柴一共有 21 份，甲前后两次的差为 15-7=8 份．由题意，差为 80 根，所以每份 10 根，所以总数为 210 根．答案为：100 根，110 根.

3．提示：兄弟两人月结余相同，也就是收入与支出的差相同，抓住这个关系，把已知两个单比联系起来．答案为 400 元，300 元.

4．4∶9.

5．1∶4∶8.

练习题二十

1．95∶98∶100；980∶950∶931.

2．2∶7.

3．1∶4.

提示：三角形 ADE 与三角形 DEC 面积之比是：（15-9）：9.

4．8 元，5 元，2 元.

5．5∶1.

练习题二十一

1．18／5．

2．40／21（提示：先求△OMN的面积，然后根据等高的两三角形面积比等于它们的底的比，有$\frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle BCM}}=\frac{AM}{CM},\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle CMN}}=\frac{AM}{CM}$）

3．提示：$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ABC}$

4．1（提示：仿例3）

5．1（提示：仿例4）

练习题二十二

1．解　由容斥原理有

33+14-4=43

2．解　由容斥原理有（设三项全优为x人）

45=28+20+20-7-9-8+x

故x=1

3．最多23人，最少21人．

4．48cm^2

5．16cm^2

练习题二十三

1．解答　观察两图，由镜面反射原理知：第一个钟面（如图23—4甲））表示的时刻为9时50分，第二个钟面（如图23—4乙）所表示的时刻为6时25分．它们的时间差为：3小时25分．

2．一手表每小时快4分钟，下午2点整将表对准，当这只手表的指针指向晚10点整的时候，实际的时刻应是几点几分？

解答　设时针1小时转出的1格为路程的单位，手表的转速为每小时：$\frac{64}{60}=\frac{16}{15}$格，手表从2点到10点共转过8个格，实际经过时间为$8\div\frac{16}{15}=7\frac{1}{2}$（小时）．所以实际时刻应为：9时30分．

3．钟面上9点整，再过多少分钟两指针第一次重合？

解答　设时针1小时转动的1格为路程的单位，则时针转速为每分钟$\frac{1}{60}$格，分针转动的速度为每分钟$\frac{1}{5}$格．9点整时，分针与时针相距9格，所以两针重合时经过的时间应为：

$9\div（\frac{1}{5}-\frac{1}{60}）=49\frac{1}{11}$（分钟）

4．钟面上的时刻为3点整，再过多少分钟时针与分针成平角？

解　设时针1小时转动的1格为路程的单位，分针的转速为：每分钟$\frac{1}{5}$格，时针的速度为每分钟$\frac{1}{60}$格，当时针与分针成平角时，分针比时

针多走 9 个格．所以两针经过的时间为：

$9\div\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{60}\right)=49\frac{1}{11}$（分钟）

5．某钟面的指针指在 7 点的哪一刻时，时针和分针的位置与 6 的距离相等？

解答　设时针 1 小时转动的 1 格为路程的单位，则时针的速度为每分钟 $\frac{1}{60}$ 格，分针转速为每分钟 $\frac{1}{5}$ 格．设这一时刻时针的位置在 7 过 x 格，$\frac{1}{5}$]分钟．因为时间相等，则列方程：

$$x\div\frac{1}{60}=(5-x)\div\frac{1}{5}$$

解此方程得：$x=\frac{5}{13}$（格）．因时针转动一格为 60 分，所以所需时间为 $\frac{5}{13}\times 60=23\frac{1}{13}$（分钟），即当指针指在 7 点 $23\frac{1}{13}$ 分时时针与分针的位置与 6 的距离相等．

练习题二十四

1．解　从 1—10 中划去 10 个数字剩下 9，分别从 11—20，21—30，31—40 中划去 19 个数字剩下数为 99994142434445464748 4950，还须划去 80-67=13 个数字．实验可知 99997484950 最大．

2．解 20=3×6＋2

故乘积最大值为 $3^6\times 2=1458$

3.解　由于4个村子为偶数故修在BC之间最合理(包括B、C两点).由于照顾乘车老人，将车站设在 C 点是更合理的．

4．解 设周长为 a，可知三角形高 $h<\frac{a}{3}$，圆半径 $=\frac{a}{2\pi}$，

进而可知

$$S_{三角形}=\frac{1}{2}\times\frac{a}{3}h<\frac{a^2}{18}\quad S_{正方形}=\frac{a^2}{16}$$

$$S_{圆}=\pi\cdot\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2=\frac{a^2}{4\pi}>\frac{a^2}{16}$$

故圆面积最大，三角形面积最小

5．解 最大 $7\frac{2}{3}+86\frac{4}{5}$（填法不唯一）

最小 $3\frac{5}{8}+12\frac{4}{7}$（填法不唯一）

练习题二十五

1．如图 25—14．

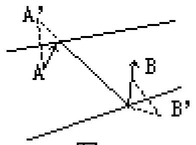


图25—14

2．如图 25—15 先证有四点，再用抽屉原则证明不可能有超过 4 点满足条件．

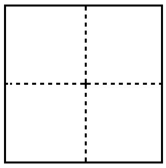


图25—15

3．最小为 116，最大为 991．
4．最少称 5 次．
5．最少为$2\frac{29}{35}$小时．

练习题二十六

1．四种颜色．
2．解：不能将图 A 变为图 B．由于在一个程序中是将一行或一列中的各格全部变色，因此在一个程序中不会改变这一行或一列中黑白格的奇偶性．考虑图 A 与图 B 中左下角 2×2 方格．由于图 A 中左下角的 2×2 方格中黑、白格的数目都是偶数，因此无论经过多少个程序，变化后图形的左下角 2×2 方格中黑、白格的数目仍都是偶数．但图 B 中的左下角中是三个白格一个黑格，与要求矛盾．所以不能将图 A 变为图 B．
3．对 7×7 格棋盘进行黑白相间染色（同国际象棋盘的着色法）．由于共 49 格，不妨设有白格 24 个，黑格 25 个．由国际象棋中马跳的规则，马每跳一步必变更一种色格．那么位于黑格上的 25 个马应同时跳入 25 个白格中，而白格只有 24 个，所以不可能 49 个马同时各走一步．
4．如图 26—13 那样染色．

1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3

图 26—13

1 个 4×1 矩形块恰盖住四种颜色的方格各一个,而 1 个 2×2 矩形块总不能盖住四种颜色的方格各一个．因此，这 16 个矩形块盖住的 4 种颜

色的方格数目不同．而图中四种颜色的方格数各 16 个，矛盾．故不存在这种覆盖．

5．提示：将每个小正方体分别染成黑色或白色，且使相邻的两个小正方体染成不同的颜色．不妨设中心为白色，则白色小正方体有 13 个，黑色小正方体有 14 个．考虑到甲虫每次要爬到不同色的小正方体中，从而可得出它不能无重复地爬遍所有小正方体．

练习题二十七

1．以“小往大靠”的原则，在 C 点设麦场最好．

2．见图 27—13．

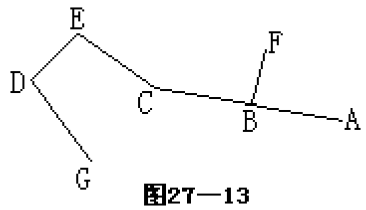


图27—13

3．先求出各种劳动人员的挖坑与运树的相对效率，甲 $=\frac{2}{20}=0.1$，乙 $=\frac{1.2}{10}=0.12$，丙 $=\frac{0.8}{7}=0.114$，然后根据任务的需要最合理的分配方案是：由 13 个甲种人员去运树苗，其余人员全部挖坑．

4．最佳方案为，甲煤矿运往 A 城市 50 吨，B 城市 150 吨；乙煤矿运往 A 城市 50 吨，C 城市 200 吨．

5．四个小组的安排为：甲、丁两组 7 天全部生产上衣；乙组 3 天生产上衣，4 天生产裤子；丙组 7 天全部生产裤子，这样四个组最多可以缝制 125 套衣服．

练习题二十八

1．先移者胜．

2．设甲先取，乙后取．甲若先取 5，这时给乙留下的可能性为：(2，4，9)，(2，6，7)，(3，4，8)，(1，6，8)，乙为使自己取胜的可能性较多，应取 2（或 4，6，8），这时甲为破坏对方较多的可能性，可以取 4，乙既要破坏甲先达到 15，又要使自己尽快达到 15，只有取 6，那么甲只有取 7 来应付，乙又必须取 3，此时，乙只剩下一种可能性了，甲只要取 1（或 8），就确保不会失败．其它情况可以类似地讨论．

3．要取胜，就要想办法先凑出以下数：

88，79，70，61，52，43，34，25，16，7，所以取胜的方法是：

(1) 先报 7，(2) 对方报 a（$1\leq a\leq 8$），你就报 9-a；

4．通过观察，我们知道这个残局上可以动作的棋子只有边路上的一个兵卒能走一步，以及中路和七路上炮可以在这两条路线上移动．黑方输棋．因为：黑方若走卒，则红方炮七进 2，此后不论黑方怎样走，红方只需仿黑棋走法必胜．黑方若先走炮，红方只需将两组相对炮的距离保持不同则必胜．

5．先取者有必胜的策略，即从 34 张中取走 24 张．