学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

普九义务教材通用教案设计精编(中学卷)

中学数学通用教案设计精编之三

BOOK

内部资料 非卖品

中学数学通用教案设计精编之三

复数的模与辐角主值的复习深化教案设计

复数的模与辐角的主值，是复数的重要概念，对于理解复数的几何意义和进行运算都起着重要的作用。尽管学生有所认识，但是由于综合运用各科知识的能力较差，所以解题容易出错。本设计以一题多解的形式，探讨一下怎样深化复数的模与辐角主值的复习教学。

【题目】设复数 $z1=\cos\theta+i\sin\theta$，$(0\le\theta<\pi，\theta\ne\pi/2)$、$z_2=z_1i+1$，$z_1$，$z_2$ 分别对应复平面上的点 A、B，O 为坐标原点，$\angle AOB=\alpha$ $(0\le\alpha<\pi)$，求角 α 的大小。

一、应用三角公式化复数为三角式

解法一（分析：因为复数 z_1、z_2 分别对应复平面上的点 A，B 所以 $\angle AOB$ 可以用 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 的差来表示。关键是把 z_2 化为三角式并且判断 $\arg z_1$ 与 $\arg z_2$ 的大小。）

$\because z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，$\left(0\le\theta<\pi，\theta\ne\frac{\pi}{2}\right)$ ①

$\therefore z_2=z_1i+1=(\cos\theta+i\sin\theta)i+1$

$=1-\sin\theta+i\cos\theta=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]$ ②

1°，$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)>0$，这时，②式是 z_2 的三角形式，$\arg z_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$，并且 $\arg z_2>\arg z_1$，

$\therefore\alpha=\arg z_2-\arg z_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}-\theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

2°，当 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时，$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)<0$

0，

这种用复数的辐角主值的差来确定夹角 α 的方法，思路清晰，但是将 z_2 化为三角形式是解答本题的前提；合理地分 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 与 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 两个区间，判断 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$ 的值的符号则是关键。因此，只有熟练地应用三角变换公式，记住复数三角式的特点，并且善于讨论参数的范围，才能正确作出解答。

二、应用复数除法法则

解法二（分析：若 $\arg z_2>\arg z_1$，则由复数除法的几何意义可知：

$\alpha=\arg\frac{z_2}{z_1}$。)

由解法一中的①式与②式知道：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]}{\cos\theta+i\sin\theta}$$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad ③$$

1°，当$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)>0$

所以③式是$\frac{z_2}{z_1}$的三角形式，且$0<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4}$，

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}<\frac{3\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)<0$，

$$\therefore\frac{z_2}{z_1}=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad ④$$

所以④式是$\frac{z_2}{z_1}$的三角形式，且$\frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<\pi$，

$\therefore\alpha=\arg\frac{z_2}{z_1}=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$

这种由复数的商的辐角主值来确定夹角α的方法，是建立在对于复数相除的几何意义有着深刻理解的基础上的。与解法一相比较，思路要复杂些，因为两个复数的辐角主值的差是通过两个复数的商的辐角主值来体现的。这样，对于③式来说，不仅要判断cos（$\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$）的值的符号还要分析$\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$的范围，没有较强的分析能力与扎实的基础知识是容易弄错的。

另解：若从 z_1/z_2 入手，则由于

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

1°，当$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$时，同以前讨论⑤式是$\frac{z_1}{z_2}$的三角形式。

但是$-\frac{\pi}{4}\le\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}<0$，可知$\arg z_1<\arg z_2$，根据复数相除的几

何意义，可得$\alpha=-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，同以前讨论，$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

$$\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}\right)\right] \quad ⑥$$

虽然⑥式是$\frac{z_1}{z_2}$的三角形式，但是$\pi<\frac{\theta}{2}+\frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$，超出了$0\leq\alpha<\pi$的范围，于是可以把⑥式化为：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1}{-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

∵$-\pi<\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}<-\frac{3\pi}{4}$，同上分析有

$$\alpha=-\left(\frac{\theta}{2}-\frac{5\pi}{4}\right)=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$$

由以上的两种求商的不同解法可知，只要对复数相除的几何意义以及辐角主值范围有透彻的理解，都能够求出α的大小。同时，通过逆向思维，加深了对复数主值范围的理解，使感性知识上升为理性知识。

三、应用向量加法法则

解法三：（分析：∵$|z_1|=1$，$\arg z_1=\theta$，$0\leq\theta<\pi$，$\theta\neq\frac{\pi}{2}$，$|z_1 i|=|z_1|=1$，∴$z_2=z_1 i+1$可以运用向量加法的平行四边形法则作出菱形，易知z_2对应的向量OB相应于菱形的对角线OB，又因为arg（z1i）=θ+π/2，所以$\arg z_2$就可以求出来了。）

∵z1=cosθ+isinθ，0＜θ＜π，且θ≠π/2。

$z_2=z_1 i+1$，

∴$|z_1|=1$，$|z_1 i|=1$。

1°，当$0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$时，

∵$|z_1|=|z_1 i|1$，∴z_1与$z_1 i$分别对应的点A与C都在单位圆上，并且

$\angle xOA=\theta$，$\angle AOC=\frac{\pi}{2}$，$\angle xOC=\theta+\frac{\pi}{2}$，∴$\frac{\pi}{2}\leq\angle xOC<\pi$。

这种应用向量的有向性来确定夹角α的方法，要求学生对复数的几何意义理解清楚，对向量加法法则运用熟悉，作图准确，并且对θ的分区合理。这样，既加深了对数形结合的认识，又提高了解题的技巧。

四、应用余弦定理

解法四（分析：因为∠AOB 是△AOB 的内角，所以，只要求出各边的长度，即各相应向量所对应的复数的模，则能应用余弦定理求解。）

∵$z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，（$0\le\theta<\pi$，$\theta\ne\pi/2$），

∴$z_2=z_1i+1=1-\sin\theta+i\cos\theta$。

$z_2-z_1=1-\sin\theta-\cos\theta+i(\cos\theta-\sin\theta)$。

∴$|z_1|=1$。

1°，当$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$时，$\cos\theta>0$，α为锐，则⑦式为

此时$0<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4}$，∴$\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

2°，当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$\cos\theta<0$，则$\cos\alpha<0$，α为钝角，

所以$\alpha=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

这种应用余弦定理来确定夹角α的方法，学生容易接受，但是在求|AB|即$|z_2-z_1|$时，容易算错。此外，有的学生演算到⑦式再也不懂得如何做下去了。说明他们对于角θ，α的范围与关系认识不清，三角函数式的变换能力差，需要进一步落实双基与加强知识迁移能力的培养。

五、应用两条直线的夹角公式

解法五：（分析：因 OA，OB 的方向可以用直线 OA，OB 的斜率表示，所以∠AOB 就可以用两条直线的夹角公式求解。）

∵$z_1=\cos\theta+i\sin\theta$，（$0\le\theta<\pi$，$\theta\ne\pi/2$），与 $z_2=z_1i+1=1-\sin\theta+i\cos\theta$ 分别对应复平面上的点 A 与 B。

$$\therefore k_{OA}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\operatorname{tg}\theta;\ k_{OB}=\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

$$\therefore \operatorname{tg}\alpha=\frac{k_{OB}-k_{OA}}{1+k_{OB}\cdot k_{OA}}=\frac{\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}-\operatorname{tg}\theta}{1+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\cdot\operatorname{tg}\theta}$$

$$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

1°，当$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$时，$0<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\le\frac{\pi}{4}$，∴$\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}$。

当$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，$-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<0$，由$0\leq\alpha<\pi$，$\therefore\alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}+\pi=\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\left(\frac{3\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}-\frac{\theta}{2}<\pi\right)$.

这种解法，以平面解析几何中两条直线的夹角公式为基础，以三角变换为工具，脉络清楚，把复数、三角、解析几何的知识有机地结合起来，得到很好的效果。

从以上的五个方面，可以看出，对于复数的模与辐角的主值范围的复习教学，单凭定义上的理解是不够的。若将其与三角、解析几何等有关知识联系起来，综合运用其内涵与外延，那么，学生对于复数的模与辐角主值概念的理解与应用将达到了一个新的境界。这样对于拓宽学生的解题思路，提高其分析问题与解决问题的能力都将起到积极的作用。

复数的模与辐角内容分析及教案设计

一、内容分析

复数的模与辐角是复数三角形式表示的两个基本元素，它分别与复数代数形式表示的实虚部、向量形式表示的乘除运算以及复数本身表示的互为共轭复数的积等都是有机联系着的。要求学生能够“掌握复数的代数、几何、三角表示及其转换。”

复数没有大小，但复数的模与辐角主值有大小。所以复数的模与辐角主值常与函数的最值相结合，在求最值时，除了代数、三角的常规方法外，还需注意几何法及不等式$||z_1|-|z_2||\le|z_1\pm z_2|\le|z_1|+|z_2|$的运用。

复数与复平面上的点以及原点为始点的向量之间具有一一对应的关系，因此复数的向量表示及其几何意义与解析几何中点的坐标、距离等问题相互联系，有些复数模的方程的几何意义表示曲线，求满足某种条件的复数，实际上是求曲线交点所对应的复数，往往通过数形结合加以解决。

总之，复数内容具有综合性；解决复数问题的方法具有选择性，这两者往往与复数的模及辐角有机相联，既体现了综合运用基本知识及其基本技能，又有效地发展逻辑思维及综合分析问题的能力。

二、教学方案

课题：复数的模与辐角。

课型：复习课。

教学目的：使学生掌握复数的模与辐角及其在代数、几何、三角形式相互转换方面的运用。

教学方法：程序教学法。

（一）引入

1.师：前面我们复习了复数的三角形式，大家知道，模与辐角是复数三角形式表示的两个基本元素，那么请同学们考虑：它们与复数代数形式表示的实、虚部以及向量表示的乘除运算是否有联系，有什么联系？

生：有 $z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 中 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，$r=a^2+b^2$，乘除运算可以表示成复平面上向量的旋转与伸缩。

师：对，另外模与复数本身表示的互为共轭复数的积等都有一定的联系：$zz=|z|^2=|z|^2$，即“模方公式”。

2.师：下面请做练习：

(1) 若虚数 $z=a+bi\ (a,b\in R,b\neq0)$，则$|z^2|$、$|z|^2$、$z^2$的关系是（　　）。

A.互不相等　　　　B.$|z^2|\neq|z|^2=z^2$

C.$|z^2|=|z|^2\neq z^2$　　　　D.$|z^2|=|z|^2=z^2$

(2) 设复数 z 的辐角主值是 0，则 z2 的辐角主值是（　　）。

A.2θ　　　　B.$2\theta-2\pi$

C.$2\pi-\theta$　　　　D.2θ或$2\theta-2\pi$

检查学生答案后提问：那么“复数的模”与“实数的绝对值”以及“辐角”与“辐角主值”各有什么关系呢？

生：(教师帮助概括) 对于 $z=a+bi\ (a,b\in R)$ 来说，当 $b=0$ 时，则 $z=a+bi$ 是一个实数 a，它的模就是$|a|$，这与实数意义上的绝对值一致，与 $b\neq0$ 时的几何意义亦相同，都表示其对应的点到坐标原点的距离，因此，复数的模是实数绝对值概念的扩充，但实数中绝对值的性质对于复数模来讲未必都成

立，例如$|z|=\pm z$、$|z|2=z2$，在复数范围内不成立。

argz=argz+2kπ（k∈R），其中 argz∈[0，2π），被某一非零复数唯一确定，但并非一一对应。

下面来进一步探求解决有关复数模与辐角问题的基本思路与方法。

（二）授课

（三）练习（课内或课外）

已知复数 z 满足 zz-3iz=1+3i，求 z 的模和辐角的主值。

解：z=-1 或 z=-1+3i

当 z=-1 时，$|z|=1$，argz=π

当 z=-1+3i 时，$|z|=10$，argz=π-arctg3。

证明：本题除了可设 z=x+yi（x，y∈R）代入求解还可以将关系 f（z）=0，两边取共轭得到一个与之对应的关系式，f（z）=0，即“共轭配对”，然后通过两式的合成运算使问题得解。

（四）小结

回顾本课题的解题思路和方法，提倡“总结（解题）规律，形成（解题）模式，产生知识，解题就方便。”

（杨正勋王慧）

一元 n 次方程根与系数的关系教案设计

【教学目的】通过教学让学生明确一元 n 次方程的根与系数的关系是一元二次方程的根与系数关系的推广，通过证明让学生理解韦达定理的实质，并会正确应用定理来解题。

【教学重点和难点】重点是根与系数的关系，难点是根与系数关系的证明。

【教学过程】

一、复习提问

1.定理 1 及定理 2 的内容及作用。

定理 1　一元 n 次方程 f（x）=0 有一个根 x=b 的充要条件是多项式 f（x）有一个一次因式（x-b）。

定理 2　复系数一元 n 次方程 f（x）=0 在复数集中有且仅有 n 个根。

定理 1 指出寻求方程根的方法,而定理 2 只解决根的存在性及根的个数。

2.一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a≠0）的根与系数之间有什么关系？如何证明？

设二根为 x_1 和 x_2，则根与系数间关系为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$ 称韦达定理。`

证明：若 x_1 和 x_2 是 $ax^2+bx+c=0$（a≠0）的两个根，则根据定理 1 得到 $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$。∵a≠0

$\therefore x_2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - x(x_1 + x_2)x + x_1x_2$，对比系数得到：$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$，同理对一元n次方程的根与系数之间仍存在这个关系。

二、引入新课

三、小结

韦达定理中诸关系式是 n 个 n 元方程，仍无法解出各根，故与解一元 n 次方程是等价问题，只有给出了各根之间满足的某些条件时，应用根与系数的关系，才能求出方程的解集，在应用时注意符号的规律。这个定理的逆命题也成立，即对于任何一元 n 次方程 f（x）$=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 如果有 n 个数 x_1，x_2，…，x_n 满足诸关系式，那么 x_1，x_2，…，x_n 一定是方程 f（x）=0 的根。

四、作业

（王秋芳）

韦达定理的应用教案设计

【教学目的】让学生进一步理解韦达定理的实质是反映出由 n 个根与系数构成了 n 个 n 元方程组，与解一元 n 次方程是完全等价的问题。因而只利用根与系数之关系并不能解决一元 n 次方程求根的问题。只有当给出了各根之间满足的某些条件时才能应用韦选定理求方程的解集。

【教学重点和难点】重点是韦达定理的应用，难点是灵活应用韦达定理解综合性题。

【教学过程】

一、复习提问

1.韦达定理及其作用。

2.已知方程 $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$，的根为α、β、γ，则由韦达定理，得

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-p & (1)\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=p_2 & (2)\\ \alpha\beta\gamma=-p_3 & (3)\end{cases}$$

下面解含α、β、γ的方程组，结果说明什么问题？

解：（1）$\times\alpha^2$ 得 $\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma=-p_1\alpha^2$ （4）

（2）×（-α）得 $-\alpha^2\beta-\alpha\beta\gamma-\alpha^2\gamma=-\alpha p_2$ （5）

（3）+（4）+（5）得 $\alpha^3+p_1\alpha^2+p_2\alpha+p_3=0$ 这个结果与原方程完全相同，说明如果我们没有办法解出原方程时，同样从这三个根与系数的关系仍不能解出它的根来，只有当给出各根之间具有某种特殊关系时，应用根与系数之关系才能求出方程的根。

二、引入新课——韦达定理的应用

三、小结

1.已知方程的根与系数具有某种关系时应用韦达定理转化为解方程组的问题求解，当未知数的个数少于方程组中方程个数时，要适当选择方程组求解，之后必须通过检验该解满足余下的方程才是原方程的解。

2.应用韦达定理确定方程中的参数。

四、作业（略）

（王秋芳）

实系数方程虚根成对定理教案设计

【教学目的】掌握实系数方程虚根成对定理并会运用定理求实系数方程在复数集 C 中的解集。

【教学重点和难点】 重点是定理的正确应用：突出强调定理中的条件是实系数方程；难点是定理的证明过程。

【教学过程】

一、复习提问

二、引入新课

三、小结

注意定理中的条件“ 实系数方程 ” 必不可少，若为复系数方程则没有“ 虚根成对共轭出现 ” 的结论，应用此定理解方程时要特别注意。

四、作业

1. 复习实系数方程虚根成对定理。

2. 求证实系数一元 n 次方程在 n 为奇数时有奇数个实根；在 n 为偶数时有偶数个实根，或者没有实根。[提示：应用实系数一元 n 次方程有且仅有 n 个复数根，而且虚根是成对出现，说明虚根只能是偶数个（包括 0 个），所以当 n 为奇数时，由于奇数与偶数之差为奇数，从而有奇数个实根。当 n 为偶数时，由于偶数与偶数之差仍为偶数，从而有偶数个实根（包括没有实数根）]

3. 根据已知条件求下列方程在复数集 C 中解集。

（王秋芳）

实系数方程虚根成对定理的应用教案设计

【教学目的】应用实系数方程虚根成对定理求实系数方程在复数集 C 中的解集并会求次数最低的实系数方程。

【教学重点和难点】 重点是利用实系数方程虚根成对定理解实系数方程，难点是应用虚根成对定理进行论证。

【教学过程】

一、复习提问

1.叙述实系数方程虚根成对定理以及它的作用。

2.求证实系数一元 n 次方程在 n 为奇数时有奇数个实数根；在 n 为偶数时有偶数个实根，或者没有实根（即前节课后作业题）。

证明：因为实系数一元 n 次方程有且只有 n 个复数根，而且虚根又是成对出现的，说明虚根只能是偶数个（包括 0 个）所以当 n 为奇数时由于奇数与偶数之差为奇数，从而有奇数个实根，当 n 为偶数时由于偶数与偶数之差仍为偶数，从而有偶数个实根（包括没有实数根）。

二、引入新课——习题课

三、小结

（1）只有对实系数方程才能应用虚根成对定理。

（2）已知实系数方程在复数集 C 中有虚根时，可以应用虚根成对定理求次数最低的实系数方程。

(3)灵活应用根与系数的关系及实系数方程虚根成对定理求方和在复数集 C 中的解集。

四、作业

1.求次数最低的实系数方程 f（x）=0，已知它在复数集 C 中的解集含有下列数：

（1）3+2i（答：x^2-6x+13=0）

（2）-2，1-i（答：x3-2x+4=0）

（3）2+i，-1+i（答：x4-2x3-x2+2x+10=0）

（4）$\sqrt{2},\sqrt{2}\mathrm{I}$（答：$x^3-\sqrt{2}x^2+2x-2\sqrt{2}=0$）

（王秋芳）

加法原理和乘法原理教案设计

【教学目的】

1.使学生理解和掌握加法原理和乘法原理并能准确、熟练地运用两个基本原理。

2.加强对学生思维条理性的训练，培养学生分析问题、解决问题的能力。

【教学重点和难点】重点是两个基本原理的应用，难点是对两个基本原理的准确理解。

【教学过程】

一、讲授新课

加法原理和乘法原理是有关排列、组合问题所遵循的两条基本原理，深入理解和准确运用这两个原理是学好排列、组合这一单元的重要一环。

请同学们考虑下面两个问题：

问题 1　从甲地到乙地，旱路有 3 条，水路有 2 条，间从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

从图中很容易找到答案：从甲地到乙地共有 5 种不同的走法。

问题 2　由 A 村到 B 村的路有 3 条，由 B 村到 C 村的路有 2 条，问从 A 村经过 B 村到达 C 村共有多少种不同的走法？

从图中不难看出此题的答案是：共有 6 种不同的走法。

我们从上面两个问题中可以抽象出一般性的规律，得出以下的结论：

（一）完成一件工作的两种不同的方式。

问题 1 和问题 2 的共同之处在于：它们都是在研究做一件事（或工作）完成它共有多少种不同的方法？这两个问题的不同点是完成工作的方式不同。

问题 1 中的每条旱路或水路都可以从甲地直接到达乙地，其中旱路和水路只不过是完成从甲地到乙地这件工作的两类不同的办法。

问题 2 中的从 A 村到 B 村的 3 条路和从 B 村到 C 村的 2 条路的任意一条路都不能把从 A 村经过 B 村到达 C 村这件工作做完，只能完成这件工作的一部分。问题 2 中的工作是分两个步骤完成的：第一步从 A 村到达 B 村，第二步从 B 村到达 C 村。

我们不难总结出：完成一件工作有以下两种不同的方式：

第一种方式：用不同类的办法去完成一件工作，每类办法中的任意一种方法都可以从头至尾把这件工作做完。

第二种方式：分成几个步骤去完成一件工作，每个步骤中的任意一种方法只能完成这件工作的一部分，这几个步骤都完成了，这件工作才能做完。

（二）加法原理和乘法原理。

下面我们来研究：完成一件工作的不同方法的总数怎样计算：

问题 1 的答案是共有 5 种不同的走法，已知旱路 3 条，水路 2 条，显然 5=3+2。

问题 2 的答案是共有 6 种不同的走法，已知从 A 村到 B 村 3 条路，从 B 村到 C 村 2 条路，显然 6=3×2。

总结一般规律如下：

加法原理　做一件事，完成它有 n 类办法，其中第一类办法中有 m_1 种方法，第二类中有 m_2 种方法……，第 n 类办法中有 m_n 种方法，那么完成这件事

共有 $N=m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法。

如问题 1 从甲地到乙地的走法可以分为两类：

第一类办法是走旱路有 3 种不同的走法。

第二类办法是走水路有 2 种不同的走法。

由加法原理共有 3+2=5 种不同的走法。

乘法原理　做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，第一个步骤有 m_1 种不同的方法，第二个步骤有 m_2 种不同的方法……，第 n 个步骤有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N=m_1\cdot m_2\cdots\cdots m_n$ 种不同的方法。

如问题 2 从 A 村经过 B 村到达 C 村可分为两个步骤完成：

第一步 A 村→B 村，有 3 种不同的走法。

第二步 B 村→C 村，有 2 种不同的走法。

由乘法原理，共有 3×2=6 种不同的走法。

例 1　从甲地到乙地可以乘火车，也可以乘汽车或轮船。一天中火车有 4 班，汽车有 2 班，轮船有 3 班，那么一天中，乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法？

解：完成由甲地到乙地这件事有三类办法：

第一类办法坐火车，一天中有 4 种不同走法。

第二类办法坐汽车，一天中有 2 种不同走法。

第三类办法坐轮船，一天中有 3 种不同走法。

由加法原理得：4+2+3=9

答：有 9 种不同的走法。

例 2 由数字 1、2、3、4、5 可以组成多少个允许有重复数字的三位数？无重复数字的三位数？

解：（1）组成允许有重复数字的三位数这件事可分三个步骤完成：

第一步确定百位上的数字：有 5 种不同方法。

第二步确定十位上的数字：有 5 种不同方法。

第三步确定个位数字：有 5 种不同方法。

由乘法原理：5×5×5=125。

答：可组成允许有重复数字的三位数 125 个。

此题第（2）问由同学们自己完成，提醒大家注意：允许有重复数字和无重复数字这两个条件的区别。第（2）问答案是 60 个。

（三）运用两个基本原理时要注意以下几点：

1.抓住两个基本原理的区别不要用混，不同类的方法（其中每一个方法都能把事情从头至尾做完）数之间做加法，不同步的方法（其中每一个方法都只能完成这件事的一部分）数之间做乘法。

2.在研究完成一件工作的不同方法数时，要遵循“不重不漏”的原则。

如：从若干件产品中抽出几件产品来检验，把抽出的产品中至多有 2 件次品的抽法分为两类：第一类抽出的产品中有 2 件次品，第二类抽出的产品中有一件次品，这样的分类显然漏掉了抽出的产品中无次品的情况。

又如：把能被 2、被 3 或被 6 整除的数分为三类：第一类能被 2 整除的数，第二类能被 3 整除的数，第三类能被 6 整除的数，其中第一类、第二类都和第三类有重复，这样分类是不行的。

3.在运用乘法原理时，要注意每个步骤都做完这件事也必须完成，而且

前面一个步骤中的每一种方法，在下个步骤中都得有 m 种不同的方法。

二、巩固练习

1.书架上层放有 6 本不同的数学书，下层放有 5 本不同的语文书：

（1）从中任取一本书，有多少种不同的取法？

（2）从中任取数学、语文书各一本，有多少种不同的取法？（答案：(1) 11 种，（2）30 种。）

2.有三个袋子，其中一个袋子装有红色小球 20 个，每个球上标有 1 至 20 中的一个号码，一个袋子装有白色小球 15 个，每个小球上标有 1 至 15 中的一个号码。第三个袋子装有 8 个黄色小球，每个球上标有 1 至 8 中的一个号码。

（1）从袋子里任取一个小球，有多少种不同的取法？（2）从袋子里任取红、白、黄色小球各一个，有多少种不同的取法？（答案：（1）43 种，（2）2400 种）

三、布置作业

1.复习本节内容：读书和看笔记。

2.做教科书 2.1 基本原理后的练习 1 至 7 题。（答案：1.有 9 种选法；2.有 7 种选法；3.列出 200 个式子；4.共有 60 项；5.有 14 种走法；6.（1）9 种，（2）20 种；7.（1）有 6 种，（2）有 8 种）

3.预习 2.2 排列（要求看书）

（邵光砚）

排列数公式教案设计（一）

【教学目的】

1.使学生在正确理解排列概念的基础上能从乘法原理推导出排列数公式，能熟练地运用符号 P_{mn}，并能初步运用排列数公式解题。

2.培养学生分析问题、解决问题的能力。

【教学重点】排列数公式的初步运用。

【教学过程】

一、复习提问

从张、王、李、赵四位同学中选出 3 位同学分别担任团支书、组委和宣委，问有多少种不同的选法？并把所有的可能性不重漏地写出来（按支书、组委、宣委顺序写）

解：分三个步骤完成

第一步选团支书：有 4 种选法。

第二步选组委：有 3 种选法。

第三步选宣委：有 2 种选法。

4×3×2=24

答：有 24 种不同的选法。

（所有可能的选举结果略）

二、讲解新课

在上面问题的答案中，张王赵是一个排列，所有不同的排列总数是 24，我们把 24 这个数叫做从 4 个不同元素中任取 3 个元素的排列数，记做 P_{34} 即 P_{34}=24。

本节课，我们给出排列数的一般的定义，并推导出无重复元素的排列数公式。

（一）排列数公式

1.排列数定义：

从 n 个不同元素中任取 m（m≤n）个元素的所有排列的个数叫做从 n 个不同元素中任取 m 个元素的排列数，记做 P^m_n。

“排列”的第一个字母

m，n 所满足的条件是：①m∈N，n∈N；②m≤n。

如：对于 P^5_n 必有①n∈N；②n≥5。

2.无重复元素的排列数公式的推导。

在解决提问中的不同选法的计算时，我们所用的方法叫做占位法，这是解决排列问题的最基本的方法，但求解过程较繁，下面我们来推导 P_{mn} 的计算公式，以使今后的解题过程简化。

一般地，从 n 个不同元素中任取 m 个不同元素的排列数可用占位法计算如下：

解：分 m 个步骤完成：

第一步确定第一个位置上的元素：有 n 种方法。

第二步确定第二个位置上的元素：有（n-1）种方法。

第三步确定第三个位置上的元素：有（n-2）种方法。

……第 m 步确定第 m 个位置上的元素：有[n-（m-1）]=（n-m+1）种方法。

由乘法原理得出：

P^m_n=n（n-1）（n-2）…（n-m+1）

公式的特点：

1.m 个连续自然数的连乘积；

2.最大因数为 n，以下依次减 1，最小的因数是（n-m+1）。

由公式很容易计算出：P^3_4=4×3×2=24。

3.排列数公式的阶乘形式。

1）全排列：从 n 个不同元素中每次取出 n 个不同元素的排列称为 n 个元素的全排列，显然全排列

P^n_n=n（n-1）（n-2）…2·1

2）阶乘：自然数 1 到 n 的连乘积 1×2×3×…×n 称为 n 的阶乘，记做 n！规定 0！=1。

即：1×2×3×…×n=n！，显然 P^n_n=n！

3）无重复元素的排列数公式的阶乘形式。

∵P^m_n=[n（-1）（n-2）…（n-m+1）]

[（n-m）（n-m-1）…2·1]

/（n-m）（n-m-1）… 2·1

4.无重复元素的排列数公式两种不同形式的应用。

三、巩固练习

教科书 2.3 排列数公式后练习第 2（单数题）、4、5、6 题。

四、布置作业

（邵光砚）

排列数公式教案设计（二）

【教学目的】

1.使学生能熟练地运用排列数公式和基本原理解较简单的排列问题。

2.加深学生对排列概念的理解，提高学生动用基本知识解决实际问题的能力。

【教学难点】

1）正确理解“不同位置”的含义。

2）有条件限制的排列问题的解法。

【教学过程】

一、复习排列数公式，讲评作业。

二、讲解新课

上节课我们讲了排列数公式的第一个问题

（一）排列数公式，今天我们着重讲解有关排列的应用问题的解法。

（二）有关排列的应用题：

有关排列的应用题可以分为两大类：

1.无条件限制的排列问题：

解题关键：1）确定该题是否是排列问题。

2）正确地找出 m、n 的值。

3）准确地运用两个基本原理。

例 1　信号兵用红、黄、兰三面旗从上到下挂在竖直的旗杆上表示信号，每次可以挂一面、二面、或三面，并且不同的顺序表示不同的信号，一共可以表示多少种不同的信号？

分析：提出下列问题让学生回答：

1）要做一件什么事？怎样就叫把这件事做完了？

2）什么叫不同的信号？为什么是排列问题？

3）如何求解？

解：分为三类

第一类挂一面旗：有 P^1_3 种信号，

第二类挂二面旗：有 P^2_3 种信号，

第三类挂三面旗：有 P^3_3 种信号。

由加法原理：$P^1_3+P^2_3+P^3_3=15$

答：可以表示 15 种不同的信号。

例 2　10 个人走进只有 6 把椅子的屋子，若每把椅子必须且只能坐 1 个人，问有多少种不同的坐法？

分析：坐在椅子上的 6 个人是走进屋子的 10 个人中的任意 6 个人，若我们把人抽象地看做元素，把 6 把椅子当成 6 个不同的位置，则例 2 就抽象为：从 10 个不同元素中任取 6 个元素占据 6 个不同的位置，显然是从 10 个元素中任取 6 个元素的排列问题。

解：$P^6_{10}=10\times9\times8\times7\times6\times5=151200$

答：有 151200 种不同的坐法。

在这一类问题中有两种不同的对象。如：人和椅子，一般处理方法是：把其中一种对象（数量较多者）当做元素，另一种对象则当做位置。

如：在 7 本不同的书中任选 5 本借给 5 名同学，每人必须且只能借一本，问有多少种不同的借法？

把 7 本书当做 7 个元素，5 名同学当做 5 个位置，则此题答案是 $P^5_7=2520$ 种借法。

把例 2 改为：6 个人走进放有 10 把椅子的屋子，若每人必须且只能坐一把椅子，问有多少种不同的坐法？（请同学们自己分析和回答这个题，答案 $P^6_{10}=151200$）

2.有条件限制的排列问题：

这里所说的限制表现为：某位置上不能排某元素，或某元素只能排在某位置上。

这一类问题常用的不同解法有三种，下面我们就一个具体例题加以说明。

例 1　用 0 到 9 这十个数字可组成多少个无重复数字的四位数。

分析：做图示：千位　百位　十位　个位

不
能
排
0

条件限制：千位上不能排 0，或说千位上只能排 1 到 9 这九个数字中的一个。

解法一：分步完成：第一步选元素占据特殊位置，第二步选元素占据其余位置。

此解法着眼于有条件限制的特殊位置。

解：分两步完成。

第一步从 1 到 9 这九个数字中任选一个占据千位，有 P_{19} 种方法。

第二步从余下的九个数（包括数字 0）中任选 3 个占据百、十、个位，有 P_{39} 种方法。

由乘法定理：$P^1_9P^3_9=9\times9\times8\times7=4536$。

答：可组成 4536 个无重复数字的四位数。

解法二：对于某元素只能占据某位置的排列可分步完成：第一步让特殊元素先占位，第二步让其余元素占位。

此种解法着眼于有位置限制的特殊元素。

分析：在所给元素中 0 是有位置限制的特殊元素。在组成的四位数中，有一类根本无 0 元素，另一类含有 0 元素，而此时 0 元素只能占据百、十、个三个位置之上。

解：组成的四位数分为两类：

第一类不含 0 的四位数有 P_{49} 个。

第二类含 0 的四位数的组成分为两步：

第一步让 0 占位有 P_{13} 种占法。

第二步让其余 9 个数占位有 P_{39} 种占法。

∴含 0 的四位数有 $P_{13}P_{39}$ 个。

由加法原理：$P_{49}+P_{13}P_{39}=4536$ 答：（略）

解法三：从无条件限制的排列总数中减去不合要求的排列数（称为排除法）。

此题中不合要求的排列即为 0 占据千位的排列。

解：从 0 到 9 十个数中任取 4 个数的排列总数为 P_{410}，其中 0 在千位的有 P_{39} 个。

P_{410}-P_{39}=4536 答：（略）

用解法三时要特别注意不合要求的排列有哪几种？要做到不重漏。

三、巩固练习

教科书§3 排列数公式后的练习第 7 题。

7.从 4 种蔬菜品种中选出 3 种，分别种植在不同土质的 3 块土地上，有多少种种植方法？答案：P_{34}=24。

补充题。用 1、2、3、4、5 这五个数字，可组成多少个无重复数字的比 2000 大的四位数？（要求用三种方法求解）

答案：（法一）P14P34=96

（法二）P44+P13P34=96

（法三）P45-P34=96

四、布置作业

教科书习题三：5、8、9、10（1）。要求一题多解。

答案：5.P^3_5=60。8.（1）P^5_6=720，（2）$P^1_5P^4_5$=600 或 P^5_5+$P^1_4P^4_5$=600 或 P^5_6-P^4_5=600。9.（1）P^1_5+P^2_5+P^3_5+P^4_5+P^5_5=325，（2）$P^1_3P^3_3$+$P^1_4P^4_4$=114。10.（1）P^6_6=720

（邵光砚）

排列数公式教案设计（三）

【教学目的】

1.使学生掌握有条件限制的排列问题的解法，并能独立地解较复杂的排列问题。

2.培养学生分析问题、解决问题的能力。

【教学难点】较复杂的排列问题的分析和求解，不重不漏原则的贯彻。

【教学过程】

一、复习提问

用三种方法解下列习题：7 个人排成一排照像，甲不站在中间也不站在两端，问可照出多少张不同的像片？

（法一）$P_3^6P_4^4=2880$

（法二）$P_1^4P_6^6=2880$

（法三）$P_7^7-3P_{66}=2880$。

二、讲新课

（注：为节省时间，本节课中的各题都只列式不求值）

在解有条件限制的排列问题时，首先要把条件限制分析透，可用图示把特殊位置和特殊元素标明，还要时刻注意不重不漏，和由题目具体条件选择最佳解题方法。下面我们继续上节课讨论有条件限制的排列问题的解法。

三、巩固练习

1.7 个人排成一列，

（1）如果甲、乙不站在两端，有多少种不同的排法？（2）如果甲、乙、丙三人必须相邻，有多少种不同的排法？（3）如果 7 个人中有 4 男 3 女，要求男、女相间，有多少种不同的排法？

答案：（1）$P_2^5P_5^5=2400$，（2）$P_5^5P_3^3=720$，

（3）$P_3^3P_4^4=144$。

四、布置作业

1.做排列问题的总复习。

2.复习参考题二：4、19、21、23。

（邵光砚）

组合、组合数公式教案设计

【教学目的】

1.使学生正确理解并初步掌握组合的概念，排列和组合之间的区别。

2.使学生能初步掌握和运用组合数公式，组合数与排列数之间的关系。

3.教会学生掌握类比的学习方法。

【教学重点和难点】

重点是组合与排列的区别和相互联系以及组合数公式的运用。难点是不重不漏地写出所有组合数。

【教学过程】

一、组合部分内容简介：

有关排列的问题我们学习了以下几个内容：

1.概念和符号：一个排列定义、排列数定义及符号 P^m_n。

2.排列数公式：公式推导，公式两种形式的应用。

3.有关排列的应用题：无条件限制和有条件限制的排列问题。

在将要学习的组合这部分内容中仍然涉及到和上面类似的三个问题即：概念、公式、应用题，另外还有在排列中不曾研究过的组合数的性质。因此，同学们在学习有关组合的知识时，要注意到组合与排列这两部分内容的相近，尤其要注意到它们之间的概念上的本质区别，运用类比的学习方法，必会收到学会新知识又巩固了旧知识的效果。

二、组合

（一）让同学们自己看书学习，提出如下思考题：

1.举例说明（不要用书上的例题）一个组合的定义并回答：在从 n 个不同元素中任取 m（m≤n）个元素的组合中什么叫不同的组合？

2.一个组合和一个排列的定义有何不同？

3.怎样才能不重不漏地写出所有符合条件的组合？

（二）由同学回答 1 和 2 两个问题，并提出下列练习做为检查。

1.从 a，b，c，d 四个元素中任取出 3 个元素的一个组合，可以组成从 a，b，c，d 四个元素中任取 3 个元素的几个排列？（以任何一个组合为例均可）

2.下面的问题中，哪一问是排列问题？哪一问是组合问题？

1）一条铁路线上有 5 个火车站：

①需准备多少种不同的普通客车票？②有多少种票价不同的普通客车票？

2）平面上有 5 个点（无三点共线）

①过任意两点可连多少条线段？

②以其中任意一个点为端点过另外一点可做多少条射线？3）某班 45 个同学：

①选出 5 人来组成班委会，共有多少种选法？

②选出 5 人来分别担任正、副班长、学习委员、宣传委员、体育委员，有多少种不同的选法？

答：排列：1）①　2）②　3）②

组合：1）②　2）①　3）①。

（三）引导学生看书上的示意图，讨论如何把书中写出所有符合条件的组合的方法推广。

三、组合数公式：

（一）组合数定义及符号：

（定义由同学自己看书）

（m∈Z-，n∈N，M≤n）

（二）组合数与排列数之间的关系。

四、巩固练习

教科书 2.6 组合数的两个性质后的练习：1、2、4、5、（1）、（2）、（4）、（5）、（6）。

五、布置作业

（邵光砚）

复习总结二项式定理教案设计

【教学目的】
1.小结二项式定理，二项式系数的性质及它们的应用。
2.指导学生对本节的基本概念和基本公式进行总结和深化。
3.指导学生对本节的基本题型进行总结，提高解题能力。
【教学重点】有关重点概念和应用。
【教学过程】
一、复习总结有关概念
（可采取提问的方式）
（1）什么叫二项式定理，定理的实际含义是什么，公式的条件是什么。
（2）二项式的展开式的规律是什么？
（3）两个重要常见的二项式的展开式是什么？
（4）下列二项式的展开式相同吗？它们的通项相同吗？
二、有关二项式定理的题型总结
（可采取提问）
（1）二项式定理的应用：
答：结合本节习题和补充题：可总结为它能解决下类题型：
①求展开式，
②近似计算，
③证明有关的整除问题，
④证明恒等式，
⑤证明有关的不等式。
（2）通项公式的应用：
答：它能解决下类题型：
①求展开式的某项，
②求含 x^r 的项（当 $r=0$ 时为常数项），
③根据某种条件先求 n 或 r；再求符合条件的某种项。
（3）二项式系数的性质的应用：
答：它能解决下类题型：
①有关中间项，及二项式系数最大的项的问题，
②有关组合等式的证明。
复习结束后，布置下面一组题作为本节的检查题：

（王锡泽）

“随机事件的概率”教案设计

【教学目的】使学生了解一个随机事件的发生既有随机性，又在大量重复试验中存在着一种客观规律性——频率的稳定性，以引出随机事件概率的意义和计算方法。

【教学重点和难点】深刻理解随机事件在试验中发生的可能性大小的刻划方法，是用客观存在着的一个小于 1 的正数来表示。

（教学方法：讲授法。）

【教学过程】

一、前言

从这节开始，大约用 12 课时来学习一个新的数学分支——“概率论”初步。“概率论”是研究随机现象规律性的科学，随着现代科学技术的发展，“概率论”在自然科学、社会科学和工农业生产中得到了越来越广泛的应用。在现实世界中，随机现象是广泛存在的，而“概率论”正是一门从数量这一侧面研究随机现象规律性的数学学科。学习这一章之后对有些事件的发生或不发生或发生的可能性是百分之几有个估计和推算。这对是否能完成某一任务有一定的了解。从而增强在工作中的主动性，减少在工作中的盲目性，使工作能达到预想的最好结果。

二、新课引入

在实际生活中，往往在完全相同的综合条件下出现的结果是不相同的。为了叙述的方便，我们把条件每实现一次，叫做进行一次试验，试验的结果中所发生的现象叫做事件。由于在一定的条件下某些结果是一定发生或一定不发生或可发生也可不发生，所以事件被分为必然事件、不可能事件和随机事件三种。

这节课要通过几个实例说明现实生活中确实存在着以上三种事件；这节课还要通过实例说明一个随机事件的发生是存在着统计规律性的，一个随机事件发生的频率总是在某个常数附近摆。我们给这个常数取一个名字，叫做这个随机事件的概率。它从数量上反映了这个事件发生的可能性的大小。

三、进行新课

1.事件：在一定的条件下所出现的某种结果叫做事件。

事件共分三种：必然事件记作 U（在一定的条件下必然要发生的事件），不可能事件记作 V（在一定的条件下不可能发生的事件）、随机事件记作 A、B 等（在一定的条件下可能发生也可能不发生的事件）。

2.随机事件在一次试验中是否发生不能事先确定，但是在大量重复试验的情况下，它的发生具有一定的规律性，或称随机事件频率的稳定性，现在引出概率的统计定义：在 n 次重复进行同一试验时，事件 A 发生的次数为 m 次，则称事件 A 发生的频率 m/n 为事件 A 的概率，记作 P（A）。

由于随机事件 A 在各次试验中可能发生，也可能不发生，所以它在 n 次试验中发生的次数（称为频数）m 可能等于 0（n 次试验中 A 一次也不发生），可能等于 1（n 次试验中 A 只发生一次），……也可能等于 n（n 次试验中 A 每次都发生）。我们说，事件 A 在 n 次试验中发生的频数 m 是一个随机变量，它可能取得 0、1、2、…、n 这 n+1 个数中的任一个值。于是，随机事件 A 的频率 P（A）=m/n 也是一个随机变量，它可能取得的值介于 0 与 1 之间，即 0≤P（A）≤1。特别，必然事件的概率为 1，即 P（U）=1；不可能事件的概

率为 0，即 P（V）=0。这里说明随机事件的频率究竟取得什么值具有随机性。然而，经验表明，当试验重复多次时随机事件的频率又具有稳定性。除教材中抛掷钱币的实验结果外，这里我们再举一个例子。

例　进行这样的试验：从 0、1、2、…、9 这十个数字中随机取一个数字，重复进行这个试验 10000 次，将每次取得的数字依次记下来，我们就得到一个包括 10000 个数字的“随机数表”。在这个随机数表里，可以发现 0、1、2、…、9 这十个数字中各个数字出现的频率稳定在 0.1 附近。现在我们把一个随机数表等分为 10 段，每段包括 1000 个随机数，统计每 100 个随机数中数字“7”出现的频率，得到如下的结果：

3.利用概率的统计定义，在计算每一个随机事件概率时都要通过大量重复的试验，列出一个表格，从表格中找到某事件出现频率的近似值作为所求概率。这从某种意义上说是很繁琐的。在下一节中介绍第二种求随机事件概率的方法。

四、巩固新课

1.指导学生阅读课本，进一步了解随机事件 A 发生的频率 m/n 总是接近于某个常数，以加深对概率概念实质的理解。

2.提问：

（1）试举出两个必然事件和不可能事件的实例。

（2）不可能事件的概率为什么是 0？

（3）必然事件的概率为什么是 1？

（4）随机事件的概率为什么是小于 1 的正数？它是否可能为负数？

五、小结

随机事件在现实世界中是广泛存在的。在一次试验中，事件是否发生虽然带有偶然性，但在大量重复试验下，它的发生呈现出一定的规律性，即事件发生的频率总是接近于某个常数，在它附近摆动，这个常数就叫做这一事件的概率，记作 P（A）。

且 0≤P（A）≤1。

六、布置作业

1.指出下列事件是必然事件，不可能事件，还是随机事件：

（1）如果 a，b 都是实数，那么 a·b=b·a。

（2）八月的北京气温在摄氏零下 40℃。

（3）校对印刷厂送来的清样，每一万字中有错、漏字 10 个。

2.两位同学各自进行一次抛掷硬币的实验，在抛掷 1000 次的情况下，统计一下出现国徽面向上的次数 m，然后再计算 m/1000，以求得抛掷硬币事件的统计概率，再把两位同学做出的结果作一比较。

（应惜亚）

等可能事件的概率讲练结合教案设计

【教学目的】通过等可能事件概念的讲解，使学生得到一种较简单的、较现实的计算事件概率的方法。

【教学重点和难点】熟练、准确地掌握有关排列、组合的知识是顺利求出等可能事件概率的重要方面。

（教学方法：讲练结合）

【教学过程】

一、复习提问

1.上节课布置作业的第 2 题，每位同学得到的结果是否接近于同一个小于 1 的正数 0.5？你们是否已经感觉到计算事件概率的繁琐性？大量重复的试验是否可以避免？

2.上抛一个刻着 1、2、3、4、5、6 字样的正六面体方块出现字样为“3”的事件的概率是多少？出现字样为“0”的事件的概率是多少？上抛一个刻着六个面都是“P”字样的正方体方块出现字样为“P”的事件的概率是多少？

二、新课引入

随机事件的概率，一般可能通过大量重复试验求得其近似值。但对于某些随机事件，也可能不通过重复试验，而只通过对一次试验中可能出现的结果的分析来计算其概率。这种计算随机事件概率的方法，比经过大量试验得出来的概率，有更简便的运算过程；有更现实的计算方法。

这一节课程的学习，对有关的排列、组合的基本知识和基本思考问题的方法有较高的要求，因此对于排列、组合还不十分熟悉的同学应当先补上这一课。

三、进行新课

1.等可能事件的意义：对于有些随机试验来说，每次试验只可能出现有限个不同的试验结果，而出现所有这些不同结果的可能性是相等的（或叫机会均等原理）。

例如，从 52 张扑克牌中任意抽取一张（记作事件 A），那么不论抽到哪一张都是机会均等的，也就是等可能性的，不论抽到哪一张花色的红心的牌（记作事件 B）也都是等可能性的；又不论抽到哪一张印有“A”字样的牌（记作事件 C）也都是等可能性的。下面我们给出事件 A、B、C 发生的概率的概念和计算方法。

2.等可能性事件概率的计算方法（概率的古典定义）：如果一次试验中共有 n 种等可能出现的结果，其中事件 A 包含的结果有 m 种，那么事件 A 的概率 P（A）是 m/n（m≤n）。

在上例中：P（A）=52/52=1，

P（B）=13/52=1/4，

P（C）=4/52=1/13。

这里再介绍一种概率古典定义的叙述方法：若事件 A_1，A_2，A_3，…，An 发生的机会是相同的，则称它们为等可能性事件，其中 A_i（i=1，2，…，n）称为基本事件（n 为基本事件总数），如果事件 A 中包含的结果有其中的 m 种，那么事件 A 的概率 P（A）=m/n，即

$$P(A)=\frac{A\text{所包含的基本事件数}}{\text{基本事件的总数}}$$

四、小结

用这节中的观点求随机事件的概率时，首先对于在试验中出现的结果的可能性认为是相等的；其次是通过一个比值的计算来确定随机事件的概率，并不需要通过大量重复的试验。因此，从方法上来说这一节所提到的方法，要比上一节所提到的方法简便得多，并且更具有实用价值。

五、布置作业

1.把 100 张已编号的卡片（从 1 号到 100 号），从中任取 1 张，计算：

（1）卡片号是偶数的概率；

（2）卡片号是 5 的倍数的概率；

（3）卡片号是质数的概率；

（4）卡片号是 111 的概率；

（5）卡片号是 1 的概率；

（6）卡片号是从 1 号到 100 号中任意一号的数的概率。

2.一个均匀材料做的正方体玩具，各个面上分别标以数 1、2、3、4、5、6。

（1）将这玩具抛掷 1 次，朝上的一面出现偶数的概率是多少？

（2）将这玩具抛掷 2 次，朝上的一面的数之和为 7 的概率是多少？

（3）将这玩具抛掷 3 次，朝上的一面的数之和为 10 的概率是多少？

3.某城市的电话号码由六个数字组成，每个数字可以是从 0 到 9 这十个数字中的任一个，计算电话号码由六个不同数字组成的概率是多少？

（应惜亚）

概率的加法公式讲练结合教案设计

【教学目的】使学生了解概率加法公式的应用范围和具体运算法则。

【教学重点和难点】互斥（或称互不相容）事件的概念。

（教学方法：讲练结合）

【教学过程】

一、复习

1.在“集合论”中集合之间的交或并分别有哪些运算？

2.在“集合论”中集合间的交、并、余的对偶律是什么？

二、新课引入

对于一些较复杂的事件的概率，直接根据概率的定义来进行计算是很不方便的。为了将一些较复杂的概率的计算化成较简单的概率的计算，首先要学会将所考虑的事件作出相应的正确运算。这一节先讲事件的和的意义。然后再讲对于怎样的事件可应用哪一种概率加法公式计算事件的概率。

三、进行新课

1.事件的和的意义

对于事件 A 和事件 B 是可以进行加法运算的。A+B 表示这样一个事件：在同一试验下，A 或 B 中至少有一个发生就表示它发生。例如抛掷一个六面分别标有数字 1、2、3、4、5、6 的正方体玩具，如果掷出奇数点，记作事件 A；如果掷出的点数不大于 3，记作事件 B，那么事件 A+B 就是表示掷出的点数为 1、2、3、5 当中的一个。

事件“$A_1+A_2+\cdots+A_n$”表示这样一个事件，在同一试验中，A_1，A_2，…，A_n 中至少有一个发生即表示它发生。

2.互斥事件的意义

不可能同时发生的个事件叫做互斥事件。如从 52 张扑克牌中抽出一张牌。设事件 A 为抽到一张红心，事件 B 表示抽到一张红方块。则事件 A 与 B 是互斥的。

3.互斥事件的概率加法公式

如果事件 A，B 互斥，那么：

P（A+B）=P（A）+（B）　公式 1

四、巩固新课

五、小结

两个事件 A 和 B 是互斥的可应用概率加法公式：

P（A+B）=P（A）+P（B），

这个公式也可以推广到 n 个彼此互斥事件的情形：

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$。

如果两个事件 A 与 B 不互斥，那么存在着概率加法公式

P（A+B）=P（A）+P（B）-P（AB）。

六、布置作业

1.判别下列每对事件是不是互斥事件，如果是，再判别它们是不是对立事件。

从一堆产品（其中正品与次品都多于 2 个）中任取 2 件，其中：

（1）恰有 1 件次品和恰有 2 件次品；

（2）至少有 1 件次品和全是次品；

（3）至少有 1 件正品和至少有 1 件次品；

（4）至少有 1 件次品和全是正品。

2.一个均匀材料做的正方体玩具，各个面上分别标以数 1、2、3、4、5、6。设事件 A 表示出现奇数点（指向上一面的点数是奇数），事件 B 表示出现点数不超过 3。

（1）试判断 A 与 B 是互斥事件还是对立事件？

（2）试计算下列各式的值：

P（A），P（B），P（A+B）。

（3）试比较 P（A）+P（B）与 P（A+B）两式的大小。

（4）由（3）题的结论你能得出在什么样事件的情况下公式 P（A+B）=P（A）+P（B）成立？

（应惜亚）

概率的乘法公式讲练结合教案设计

【教学目的】使学生了解概率来法公式的应用范围和具体运算法则。

【教学重点和难点】相互独立事件的概念。

（教学方法：讲练结合）

【教学过程】

一、复习

1.一个坛里有 6 个白球，3 个黑球，1 个红球。设摸到一个球是白球的事件为 A,摸到一个球是黑球的事件为 B。问 A 与 B 是互斥事件呢还是对立事件？

2.甲坛子里有 6 个白球，4 个黑球，乙坛子里有 3 个白球，5 个黑球。设从甲坛子里摸出一个球，得到白球叫做事件 A，把从乙坛子里摸出一个球，得到白球叫做事件 B。问 A 与 B 是互斥事件呢？还是对立事件？还是什么事件关系？试找出事件 A 与 B 的内在联系。

二、新课引入

现在我们引进一个重要的概念，即随机事件的独立性的概念。

在上述复习提问 2 中提到的从甲坛子里摸出，得到白球和从乙坛子里摸出，得到白球，这两个事件的发生，可以是同时进行的。并且事件 A（或 B）是否发生对事件 B（或 A）发生的概率没有影响。因为事件 A·B 就表示事件 A 和事件 B 同时发生，所以其概率为 P（AB）。现在要问 P（AB）与 P（A）及 P（B）有什么关系呢？并且要进一步问当 A、 B 是怎样的关系的事件时才能很简单地求出 P（AB）的结果？

三、进行新课

1.事件的积的意义

对于事件 A 和事件 B 是可以进行乘法运算的。A·B 表示这样一个事件：在同一试验下，A、B 同时发生就表示它发生。例如抛掷一个六面分别标有数字 1，2，3，4，5，6 的正方体玩具，如果抛出奇数点，记作事件 A；如果掷出的点数不大于 3，记作事件 B，那么事件 A·B 就是表示掷出的点数为 1，3 当中的一个。事件“$A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$”表示这样一个事件，在同一试验中，A_1，A_2，…，A_n 同时发生即表示它发生。

2.相互独立事件的意义

如果事件 B 的发生不影响事件 A 的概率，则称事件 A 对事件 B 是独立的；否则，称为是不独立的。

如果事件 A 对事件 B 是独立的，则事件 B 对事件 A 也是独立的。

由于随机事件的独立性是一种相互对称的性质，所以可将事件的独立性定义为：“如果两事件中任一事件的发生不影响另一事件的概率，则称它们是独立的”；如果 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 中任一事件 A_i（i=1，2，…，n）与其它任意一个事件 A_j（j=1，2，…，n）是独立的，则称它们是两两独立的。

应该指出，两两独立的随机事件群（即其中任意两个事件是独立的），总起来不一定是独立的。

例袋中有四个球，其中一个红球，一个白球，一个黑球，还有一个是画着红、白、黑三种颜色的球。从袋中任取一个球，并且设：

A=取出的球上画有红色；

B=取出的球上画有白色；

C=取出的球上画有黑色。

问事件 A 与 B 是否独立？

事件 B 与 C 是否独立？

事件 C 与 A 是否独立？

事件 A，B 与 C 是否独立？

注（i）对于较复杂事件概率问题的计算，首先要搞清事件的真实含意。如上例中的（2）两粒种子同时能发芽是指事件 A 与事件 B 同时发生，也即为事件 A 与 B 的积：A·B。又如上例中的（3）两粒种子至少有一粒能发芽是指事件 A 与事件 B 中至少有一个能发生，也即为事件 A 与事件 B 的和：A+B。

注（ii）为了正确使用恰当的概率计算公式求出所给事件的概率，往往需要首先判定事件是互斥的，还是相互独立的；其次需对事件作适当的运算；然后才能对事件的概率进行运算。

注（iii）原题也可以这样提出：“有甲、乙两批种子，发芽率分别为 0.8 和 0.7，在两批种子中各选取一粒。问：两粒种子都能发芽的概率是多少？”在解答这问题之前你首先要对事件 A、事件 B 作如同例题中的假设，然后写出相应的事件运算 A·B，最后才能求出其概率：P（A·B）。

四、巩固新课

现利用下列两个例题熟悉对怎样的事件用概率的加法公式或概率的乘法公式。

五、小结

为了求出某事件的概率，先需判断这事件是由哪几个“简单事件”（如 A、B、C）组成的，可用 A，B，C 或 A，B，C 的函数式子将所求事件表达出来，然后在判定了“简单事件”是互斥的还是相互独立之后，恰当地选取概率的加法或乘法公式等，可求出所求事件的概率，为了简化运算，有时还要应用公式 P（A）=1-P（A）进行演算。

六、布置作业

1.甲、乙两个气象台同时作天象预报，如果它们预报准确的概率分别是 0.9 和 0.8，那么在一次预报中两个气象台

（1）都预报准确的概率是多少？

（2）至少有一个气象台预报准确的概率是多少？

（3）都预报不准确的概率是多少？

2.制造一种零件，甲机床的废品率是 0.04，乙机床的废品率是 0.06。从它们制造的产品中各任抽一件

（1）其中恰有一件废品的概率是多少？

（2）其中无废品的概率是多少？

3.某售货员负责在三个柜面上售货。如果在某一小时内柜面不需要售货员照顾的概率，第一柜面是 0.9，第二柜面是 0.8，第三柜面是 0.7。假定各个柜面是否需要照顾相互之间没有影响，计算在这个小时内

（1）至少有一个柜面需要售货员照顾的概率。

（2）恰有一个柜面需要售货员照顾的概率。

（3）至多有 2 个柜面需要售货员照顾的概率。

（应惜亚）

立体几何序言课教案设计

一、充分认识序言课的重要性，是上好立体几何序言课的前提。

立体几何序言课以课本中的“引言”为主要教学内容，让学生对立体几何这门功课有一个粗略的整体性了解，在学习具体内容之前有一个积极的思想准备。通过序言课的教学，学生明白了立体几何研究的内容及学习立体几何的目的，就能为以后的学习打下一个良好的基础。

然而有的老师对序言课却不够重视，把已经十分抽象概括的“引言”进一步抽象概括，开课后草草几句便开始了“平面”的教学。教师急急匆匆，学生稀里糊涂，极易给后继学习带来消极影响。

由此可见，教师在充分认识序言课重要性的前提下，认真组织教学，努力完成序言课的教学任务，对提高立体几何课的教学效益是至关重要的。

二、排除心理障碍，激发学习兴趣，是立体几何序言课的主要任务。

部分学生认为立体几何比平面几何难学，存在畏惧心理；多数学生对能不能学好这门功课信心不足，对怎样学习这门功课心中无数。这种消极心理状态必然会给学习造成消极影响。因此在序言课教学中，应把排除上述心理障碍，激发学生学习立体几何的兴趣作为首先任务。

1.尽量引用实例。

“引言”中指出，“建造厂房、制造机器、修筑堤坝等，都需要进一步研究空间图形的问题。”为了使学生真正认识到立体几何是一门应用广泛的基础学科，我们在序言课上展示学校教学楼的建筑图纸，学生争相观看，兴趣盎然，并能辨认出：“这就是我们的教学楼！”教者由此指出：“没有立体几何知识，这张图纸是画不出来的。”“同学们能从图纸上看出是我们的教学楼，这说明大家已具有一定的空间想象能力，这正是学习立体几何的基础。有这样好的基础，何愁学不好它？”听到这些鼓励，学生常露出自信的微笑。

2.巧用教具、模型。

要求学生自制简单几何体的模型这样在序言课上就可以让学生观看前届学生自制的各种模型。那些自制的模型，有纸质的，有木质的，有用铅丝做的，也有用粘土做的，看颜色，五彩缤纷，望形状，新颖别致。学生看了这些精美的并留有制作者姓名的模型后，赞叹不已，大有“跃跃欲试”之势。

借助模型还可以帮助学生克服学习平面图形时产生的思维定势的消极影响。

例如，在黑板上画出图 1，不少学生乍一看认为这是一个平面图形，当教师指出这是一个空间图形的直观图时，有的学生认为小平行四边形凹在后面，有的学生认为小平行四边形凸在前面，因而引起了激烈的争论，但很快意见趋于统一：两种情况都可能存在。接着教师出示用硬纸板做的模型，学生观物思图，看图想物，终于形成了强烈的立体感。然后教师在黑板上画出图 2 和图 3，并用模型示范，学生不仅分清了两种不同的情况，更重要的是感受到了学习立体几何新鲜有趣，就能变“要我学”为“我要学”。

3.加强知识联系。

立几知识与学生已掌握的平面几何知识有密切的联系。序言课中有目的地加强这种联系有助于消除学生怕学、厌学的心理障碍，增强学好立体几何的信心。

当教师把模型放上讲台时，学生认出模型中的正方体、圆柱体、圆锥体……教师指出：“这些几何体在小学大家就已经学过，现在学习立体几何，就是要进一步研究这些几何体的性质。”这样学生就会感到立体几何并不陌生。

教师还可以问学生：“两条直线相交有几个交点？两个平面相交有几条交线？”用教具演示后学生很快就能掌握。再问：“几个点可以确定一条直线？几个点可以确定一个平面？”学生会不加思索回答：“两个点可以确定一条直线，两个点也可以确定一个平面。”这时教师用两个指头试图将一块硬纸板顶住，但是无论怎样变化位置总不能成功，引得学生一阵哄笑，不少学生也拿出作业本做试验。教师抓住这一时机告诉学生：“立体几何与平面几何有密切的联系，它们研究的对象虽然不同，但研究的方法和研究的内容（性质、画法、计算和应用）基本相同。”这就能使学生认识到学习立几是学习平几的自然延续。

三、引导学生探讨如何学好立体几何是序言课教学的落脚点。

有些老师常在序言课上板着面孔提出要“认真听讲，认真做好作业，课前要预习，课后要复习”的要求，这些自学生跨进校门之日起就听惯了的老调，并没有多少效果。我们的做法是让学生自由讨论，各抒己见。因为通过以上活动，学生对立体几何的兴趣被点燃以后，便自然想到：“我们怎样才能学好立几知识呢？经过讨论以后，教师再归纳得出学好立几的主要方法：①加强与平几知识的联系，注意用对比的方法区别异同，掌握实质；②注意对实物、教具和模型的观察和分析，培养空间想象能力；③自己动手制作模型，以加深对立几知识的理解和应用。为了学好第一章，我们要求学生准备好硬纸板三块（代平面用），竹针或铅丝四根（代直线用），在学习中随时进行模型演示，以逐步建立起空间观念。

（陆海泉）

立体几何入门教案设计

高一学生经过初中两年的平几学习，逻辑思维能力和空间想象力得到了一定程度的发展，但一旦进入三维空间的学习，原来的知识结构和思维能力都不能很快适应新的研究对象，这就形成了学习立几入门难的两大因素。在生源较差的三类学校，立几入门难的问题更为突出。

一、发展空间想象力

平几学习中学生对图形直观作用的依赖性极强，立体图形虽有立体感，但失去了真实性，这样要认识图形的性质特征，对图形的直观依赖性就大大削弱。我们所画的空间图形实际上是具有抽象意义的平面图形，因此应要求学生能很好地读图、识图。

为了解决这个问题，在入门阶段要注意应用实物模型，然后由实物过渡到画图。充分应用实物模型对学生空间想象能力的培养确定能起到良好的作用，但是要防止造成学生对实物的依赖性。题题用实物，处处要模型，对空间想象力的提高反而无益。用实物是为了过渡到不用实物。在学生对图形有初步认识后必须引导学生进行自觉表象活动，完成直观思维向抽象思维的过渡。

我们以困形翻折问题为例，“ 已知一个直角三角形的两直角边长分别为 a、b，把三角形沿着斜边上的高折成直二面角，求两直角边夹角的余弦。 ”这类翻折问题通常的教法有两种：

第一种处理方法：

教师制作一个纸板的模型，利用模型在课堂上边演示边讲解。由于直观形象，学生很容易接受，但因为缺乏表象活动和抽象思维活动，过一段时间再遇翻折问题，学生又会束手无策。

第二种处理方法：

在课堂上出示模型，观察翻折前后点、线段及角的相对位置、大小、形状的变化，然后教师在黑板上画出图形进行分析，得出解题途径，再进行巩固性练习。这种方法较第一种要好，但学生的表象活动仍是由教师包办代替了。

从发展学生的空间想象力出发，我们主张第三种处理方法：出示模型让学生观察，留适当时间让学生有意识的识记翻折前后两个模型的形状。然后撤掉模型，要求学生回忆，并根据回忆画出图形，教师根据学生画的图进行分析。黑板上的图经学生观察后即应擦去，让学生再回忆翻折前后哪些点、线段的相对位置变了，哪些线段、角的大小变了，哪些元素未变化。在这个基础上找出解题思路，最后进行巩固性练习。

这种教学方法明显多了一个环节：自觉表象活动。在本例中，学生在教师引导下进行了三次自觉表象活动：拿掉模型前的有意识记，撤去模型后的回忆，擦掉图形后的再忆。坚持这样的教学过程，学生的空间想象力将有明显的提高。

二、分散难点，分步递进

由于空间图形的结构复杂，形成了很多学习难点，如解异面两直线问题、翻折问题、立几极、定值问题、截面问题等。处理难点宜采用分散的办法，随着教学进程有计划地将难点分成若干阶段递进式地学习，在不同教学阶段对难点提出不同的要求。

例如求异面直线距离问题是个难点，不能回避，也不能操之过急，宜将此问题分散在各个学习阶段。

1.定义阶段：学习异面直线的距离概念后，可求解一些易于知道公垂线位置的问题。

2.线面平行阶段：将异面直线距离化归为线面距离，但还只限于能作出线面距离的问题。

3.面面平行阶段：线线距离转化为平行平面的距离，但限于能作出面面距离的问题。

4.线面垂直阶段：①使异面直线在同一平面内的射影为一直线和一点，则这点到射影直线的距离就是异面直线距离。②使二异面直线在同一平面内的射影是两条平行线，则二平行线间的距离就是异面直线距离。

5.异面直线两点距离公式阶段：从 $EF^2=m^2+n^2+d^2-2mn\cos\theta$ 得到 $d^2=EF^2-m^2-n^2+2mn\cos\theta$，此公式由于条件太多，实用价值不大，但作为一种方法仍应向学生介绍。

6.体积阶段：构造四面体利用体积法求异面直线距离，方法 1、2、中的那些不能作出公垂线的问题到此也解决。

7.对于学有余力的学生，可用讲座形式补充各种不同条件下求异面直线距离的方法。

由于每个学习阶段都接触异面直线距离问题，这样学生就容易掌握，就避免了由于平时不重视，最后倾盆大雨式地介绍求法以致学生难以接受的状况。

对其他难点也可作同样处理，立几难点的小步子教学方法是入门阶段的好方法。

三、渗透思想方法

立几入门阶段，各种类型的习题相继出现，为了提高学生的解题水平，应当注重各类问题的具体解题思想和方法。但仅仅这样还不够，在学生掌握这些具体方法的同时，要注意提炼一般的教学思想，像化归思想、转化思想、参数思想等，从而在高层次上提高学生的解题水平。

（张家瑞）

点到直线距离公式整体教案设计

整体观念对数学思维过程起着重要的指导作用。在中学数学教学中，怎样才能卓有成效地培养学生的整体观点，增强整体意识，很值得探讨。所谓整体观念，就是从整体的效益来考虑问题，在解题中，把解题过程看作一个整体，认真分析每一个步骤对解题所起的作用，考虑这个步骤是否必不可少，能否为其他方法所取代，力求整体地解决问题，找到最优解法，最终实现解题目标。

点到直线距离公式是解析几何中的一个重要公式，这不仅是其有广泛的应用，而更重要的是公式推导过程中蕴含着重要的数学思想。因而，在设计这节课的教学方案时，要力求暴露公式推导中的思维过程，突出整体观念对思维过程的指导作用。下面谈谈点到直线距离公式推导这节课的教学设计。

问题：已知点 P（x_0，y_0）和直线 l：Ax+By+C=0（其中 A、B 不同时为零），求点 P 到直线 l 的距离 d，如图（1）。

先从以下几个问题出发：什么叫做点到直线的距离？如何作出点 P 到直线 l 的距离？从而作图步骤/公式推导步骤

1.过点 P 作直线 l＇⊥l/1.写出 l＇的方程

2.得 l＇与 l 的交点 Q/2.解出 l＇与 l 交点 Q 的坐标

3.线段 PQ 的长即为所求/3.用两点间距离公式求出|PQ|

即得推导方案 1：

已知→l＇的方程→点 Q 的坐标|PQ|即 d

课本介绍了上面的推导方法，并作出了“思路自然，但运算繁杂”的简短评价。这是因为在这种推导方法中，需先求出有关曲线（直线 PQ）的方程、点（Q 点）的坐标。为能找到一种切实可行而更巧妙和更简捷的推导方案，我们不妨先考虑特例，即当点 P 在 y 轴上时，求点 P 到直线 l 的距离，如图（2）。

引导学生易得推导方案 2：

本方案采用的方法是，找一个直角三角形，确定一个已知角和一条斜边，使所求距离的线段为三角形的一直角边。

特殊问题的解决，对解决一般性问题有所启示：找一条直线作为斜边，构造一个直角三角形。要构造一个直角三角形，只要找一条斜边即可，也就是只要求作过 P 点的一条直线 l_1 与 l 相交即可。这样，只要作一条平行于 y 轴（或 x 轴）的直线 l_1，如图（3），其方程简单，便于求它与 l 的交点坐标，而且构成直角三角形的内角容易求出，从而可求出直角边|PQ|，一般性问题得到解决。

这样设计教学使学生弄清了作辅助线的道理。若把分析深入一步还可以得到更简便的解法。

（管兴明）

两条直线所成的角

“感知——尝试——再认——巩固——深化”教学设计

准备：小黑板一块（写好本节课的例题、习题）

过程：

直线与抛物线的位置关系教案设计

【教学目的】培养学生从形及数两个角度研究分析问题习惯，学 会依形判数，就数论形，互相验证的数学方法，提高数形结合能力。

【重点】运用解析几何的基本方法建立数形联系。

【教学进程】

1.问题引入

（通过问题复习方程和曲线的关系）：

1）怎样判断直线 l 与抛物线 c 的位置关系？为确定起见，给出 l：y=1/2（x+1），c：y^2=4x，怎样判断它们是否有公共点？若有公共点，怎样求公共点？

估计学生都能回答：由方程组

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}(x+1) \\ y^2=4x \end{cases}$$

的解来判断 l 与 c 的关系，接着提出问题：

2）为什么说方程组$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}(x+1) \\ y^2=4x \end{cases}$有解，l与c就有公共点，为什么该方程组的解对应的点就是 l 与 c 的交点？

既然有了这样的一一对应关系，那么研究直线与抛物线的公共点，可以通过研究对应的方程组的解来解决；同样，讨论方程组是否有解，也可通过研究直线与抛物线是否有公共点来解决。这样就引出了解决这一类问题的两种方法：代数方法及几何方法。

2.分析讨论例题：

3.小结：

4.提出课堂练习题（由学生解答）：

5.总结：

1）再一次强调要养成从形及数两个角度研究分析问题的习惯，学会依形判数，就数论形，互相补充，互相验证的数学方法。

2）对比几何、代数两种方法的优劣。

在总结中要强调代数法能解决一般问题，不能让学生形成“ 代数法繁琐 ”这样的偏见，强调以代数法为主，以几何法为辅，说到底，解析几何就是用代数方法来研究几何问题的一门数学学科。

6.布置作业：

（王人伟）

[评：本设计指导思想明确，数学思想突出，教学效果很好，是一堂成功的设计。

为什么在数学教学中要重视数学思想呢？

1.数学思想是相应数学概念和数学方法的本质认识和精神实质。

我们知道，数学思想产生于数学问题，但光有数学思想并不能解决问题，

还需要根据数学思想产生出有利于解决问题的相应的数学方法，所以，数学方法是数学思想和数学问题的中介，数学思想和数学方法又常常以一定数学概念的形式表现出来。这样看来，数学概念、数学方法都体现出相应的数学思想。数学概念和数学方法都是外显的，而数学思想则是内隐的，是蕴含在数学概念和数学方法里的。所以，我们说数学概念和数学方法是数学思想的载体，我们在教学中就要善于透过数学概念和数学方法，去挖掘相应的数学思想，并以它来统帅全局。

虽然在解析几何课本里，呈现在大家眼前的都是些概念和方法，但整本书无不渗透数、形对应的思想、数形结合的思想和运动变化的思想。我们在每节课里都要努力去体现这些思想，这样才能更好地把握概念和方法。我们从这节课的整体构思与细节安排来看，王老师是有意识地去突出这些思想的，这就为这节课的成功奠定了基础。

2.数学思想内化就成了数学观念。

所谓数学观念，通俗一点讲，就是数学头脑和数学意识，或者说是数学的习惯，它是由数学思想内化来的。数学观念作为数学思维的高级层次，它对数学思维活动有着一种定向、控制和调节的监控功能。

在解析几何里，我们应该树立这样的观念：解析几何给数学提供了一个双向的工具：几何概念可以用代数表示；几何的目标可以通过代数来达到。反过来，给代数语言以几何的解释，可以直观地掌握这些语言的意义，又可以得到启发去提出新的结论。

王老师在介绍里提到的学生的一些情况：学生仅习惯于用解析法得出结论；相信用简捷、直观的几何法，而对代数法不太重视等，这些都是没有树立起解析几何的上述的观念所致。

这节课王老师比较注意针对学生情况树立上述观念的。例如，求直线与抛物线的位置关系可以用代数方法。再如，对于练习 4：“直线 $y=(a+1)x-1$ 与曲线 $y^2=ax$ 恰有一个公共点”通过代数法解出的 a 的三种情况，给予几何的解释，可以直观地掌握这些语言的意义。又如，可从几何图形上得出结论（如练习 2：“讨论直线 $x=a$ 与抛物线 $y^2=2x$ 的交点个数”）或提出新问题（如练习 3：“若直线 l：$y-1=a(x-2)$ 与抛物线 c：$y^2=2x$ 有两个公共点，则 a 在什么范围取值？”中，$a=0$ 的情况）。这些思想成了学生头脑中的东西后，就可起着对思维进行定向、调控的作用。

3.数学思想对数学方法起调控作用。

作为数学方法来说，都是与特定的情境联系在一起的。例如求一直线与二次曲线的交点，无非是联立方程——消元——讨论△，即所谓的△法。如果方法不以相应的数学思想作指导，那么这种方法就会变成一种机械的操作，一种固有的模式，而当情境稍作变化，往往会束手无策。例如抛物线对称轴，或与对称轴平行的直线与抛物线只有一个交点是无法用△来解释的。这一点王老师是注意到了，在设计的例题中要克服学生这种固有模式（如讲新课的例题：“直线 l：$y=a(x+1)$ 与抛物线 c：$y^2=4x$ 的公共点个数”中 $a=0$，练习 3 中 $a=0$；练习 4 中 $a=-1$ 等都是这种情况）。

相反，用数学思想指导的数学方法，往往可以超脱这个特定的情境，或者变化模式适应情景，或者变换情景以适应模式，这就表现出一种思维的灵活性，而在这里起调控作用的，正是数学思想。在当前的数学教学中，为什么题练得很多，但有时效果不佳，恐怕没有重视教学思想是其中的原因之一。

这节课的教学目的里，提出要提高学生的数形结合的能力。那么在这节课里，数形结合的含义到底是什么？我个人认为是：“数形取长补短，互相为用”。

笛卡儿在创立解析几何时，看到了“形”与“数”各自的优缺点。“形”具有直观性，它们的位置关系和变化趋势。容易呈现在人们的眼前，但欧氏几何中的每一证明，总是要求某种新的，往往是奇巧的想法。而代数具有一般性（即可以提供“通法”）；它的计算方法带有程序化的特点，并且可以把解题工作量减少。其缺点完全受法则和公式的控制，容易阻碍思想的发展。因此，他主张应当采取代数与几何中一切最好的东西，互相取长补短。

从这节课的具体实施来看，比较好地贯彻了这个含义下的数形结合思想。具体表现在：

从形的方面看：

1.图形画得正确与否，例如抛物线的开口大些、小一些将会影响“依形判数”的准确性。由于这节课所给的抛物线都是过原点的，这样，我们再取除原点外的两个对称点，由这三点大致可控制抛物线的形状。这一点王老师在教学中指出来了，这很好。

2.就以讲新课的例题来说，由图形来判断它们的位置关系，这里 a 是直线 l 的斜率，又是个参数，而 l 又过（-1，0）点。这样，a 变化意味着 l 绕（-1，0）点旋转，在旋转过程中看 l 与 c 的位置关系。这样讲是很好的，因为图形比较直观，在运动变化过程中容易把握，发挥了图形的特点。由于切线是一种极限状态，所以它可以起到界限的作用，若 l 按逆时针方向旋转，旋转过程中 l 没经过切线与经过切线，l 与 c 的交点情况就不同。但是，相切的情况很难从图形中观察出来，这就要借助于代数了，这一点王老师在讲课中指出来了。

如果这道题最后把代数的情况与几何的情况对照一下就更好了。

我们由代数知：-1＜a＜1，l 与 c 有两个交点；a=±1 时，l 与 c 相切；a＜-1 或 a＞1 时，l 与 c 无交点；a=0 时，l 为抛物线的对称轴，与抛物线只有一个交点，用上图表示。再用几何方法，使 l 绕（-1，0）按逆时针方向旋转，两者互相印证就更精彩了。

3.再以练习 4 来说，由于在直线与抛物线方程中都有参数 a，若按几何讨论，情况就比较复杂了，因对于 a 来说，要分情况讨论，然后分别画图观察，最后总结，相当繁琐。这样还不如借助于一般的代数，似乎问题更容易进展一些。王老师正是用这道题作为就数论形的典型。

由上看来，形方面的不足，由数的优点来弥补。

再从数方面来看：

1.有的题直接从图形就可观察出结果，如练习 2。由于 x=a 是平行于 y 轴的一条直线，a 变动，直线就平行于 y 轴移动，而抛物线是固定的（过原点开口向右），这样直线与抛的线物交点情况就会一目了然了。

又如练习 3，用△法相当繁琐（解题过程中要用两次三项和的平方公式），但从图形上可以看出一些眉目。由于 l 过（2，1）点，而此点是在抛物线内部，于是过（2，1）点所有直线中，除去与抛物线对称轴平行的直线以外，都与抛物线相交于两点。由观察知，当 a=0 时，直线 l 是过（2，1）且与抛物线对称轴平行的直线，它与抛物线有一个交点。除此之外，a 的其它情况都有两个交点，于是可以得到题目所要求的答案：a∈（-∞，0）∪（0，

+∞）。

2.△法确实是判断直线与抛物线交点情况的一般通法，但有些情况它不能包括。 如练习 3，仅从△法考虑，求出 a 为任意实数，并不能剔除 a=0 的情况。再如讲新课的那道题，只用△法是求不出 a=0 的情况，但这些情况都在几何图形中显现出来了。所以，几何有时可以弥补代数方法的不足，或者说可以提醒你某些特殊的情况。

3.有时用代数方法可以求出其解，但不知其几何意义是什么。为加深理解和检验，用代数方法解出后，再从几何的角度看一看是有好处的。如练习 4，求出 a=0，-1，后，虽然取这些值时，直线与抛物线恰有一个交点，但它们的位置情况是不同的。

当 a=0 时，抛物线 $y^2=ax$ 退化为 y=0，即 x 轴，而此时直线为 y=x-1，它们恰有一个交点，相交于（1，0）。

当 a=-1 时，抛物线为 $y^2=-x$，直线为 y=-1，这条直线与抛物线的对称轴平行，这时它们恰有一个交点，交点为（-1，-1）。

当$a=-\frac{4}{5}$时，抛物线为$y^2=-\frac{4}{5}X$，直线为$y=\frac{1}{5}X-1$，这时，

它们相切于（-5，-2）。

由此可见，尽管直线与抛物线恰有一个交点，但情况却是如此之不同。这不用几何来印证，恐怕学生是很难想到这些的。

由上看来，数的方面的不足可以由形的优点来弥补。

数形结合的具体含意是：“ 取长补短，互相为用。 ”王老师正是按这种情况安排课的，例题就选择得很有针对性，从课堂情况看，总的说教学设想贯彻得很好，教学目的是达到的，所以这堂课应该说是一堂成功的课。大家可以设想一下，如果忽视这些数学思想，干巴巴地给学生讲几道例题，学生固然也可以学会△法，但学生的得益肯定不会比这堂课多，这就是为什么我们要强调在数学教学中重视数学思想的道理。]

（曹才翰）

平面的基本性质教案设计

【教学目的】使学生正确理解和掌握平面的基本性质。

【教学重点】

掌握平面的基本性质。

【难点】证明空间点和直线的共面。

【教学过程】

一、新课引入

在开始学习平面几何时，着重研究了点、直线的基本性质，然后以此为基础，进行进一步的推理。在立体几何中，点、直线、平面是空间图形的基本元素，除了原有的点和直线的基本性质外，还要规定平面的基本性质，把它们当作公理，作为进一步推理的基础。

二、新课

1.在什么样的条件下，一条直线上所有的点都在一个平面内。

公理 1

如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（图 1—1）。

这时我们说直线在平面内，或者说平面经过直线。

例如，把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上，这就是应用公理 1 判定直线是否在平面内。

又如，木工用直尺边检查所刨的木板平不平及泥水工人用木条的直边刮平地面，这就是应用公理 1 检查一个面平不平。

关于公理 1 可以使用集合的符号把它简明准确地表达出来。只把点作基本元素，于是直线、平面都可看作“点的集合”。规定用大写拉丁字母 A，B，P 等表示点；用小写拉丁字母 a，b，l 等表示直线；用小写希腊字母 α β γ 等表示平面。如点 A 在直线 a 上，记作 $A\in a$；点 A 在直线 a 外，记作 $A\notin a$；点 A 在平面 α 内，记作 $A\in\alpha$；点 A 在平面 α 外，记作 $A\notin\alpha$；直线 a 在平面 α 内，即 a 是 α 的子集，记作 $a\subset\alpha$；直线 a 不在平面 α 内，记作 $a\not\subset\alpha$。

公理 1 的集合形式表示为：若 $A\in a$，$B\in a$，$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，则 aα。

公理 1 的图形表示如图 1—1 所示、图 1—2、图 1—3 是学生初学时常会画错的图形，应提醒学生注意其错误的原因。

2.两个平面在什么样条件下存在公共直线。

用一块木板（设它代表一个平面），使它与桌面（也代表一个平面）有一个公共点，请学生回答“这两个平面是否还有其他公共点？公共点有多少？”提醒学生注意平面有无限延展的特性。回答后，请学生观察教室内相邻的墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线。由此归纳出公理 2 内容。

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线（图 1—4）。

公理 2 中“有且只有一条”的含义是：“有”说明直线是存在的，“只有”说明直线是唯一的。

如果两个平面 α 和 β 有一条公共直线 a，就是说平面 α 和 β 相交，交线

是 a，则可记作 $\alpha \cap \beta = a$。因此公理 2 可表示成如下形式：

若 $A \in \alpha$，$A \in \beta$，则 $\alpha \cap \beta = a$，且 $A \in a$。

由公理 2 可见，两个平面如果有一个公共点，那么就有无穷多个公共点，所有公共点在公共直线上，即它们的交线上；交线上的每一个点都是两平面的公共点。

3.两点确定一直线，几个点确定一个平面？

一扇门用两个交链和一把锁就可以固定了；测量上用的平板仪用三脚架就可固定了。从实例可归纳出公理 3 的内容。

公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面（图 1—5）。

过 A，B，C 三点的平面又可记作“平面 ABC”。

下面我们来讨论一个问题：过空间一点、两点、三点、四点、可以有多少个平面？（请学生回答）

过一点、两点、在同一直线上的三点或四点都可以有无数个平面；过不在一直线上的三点有且只有一个平面；一般情况下，过四点不一定有平面，如图 1—6 所示的教具，不存在一个平面过 A，B，C，D 四点。

根据上述公理，可以得出下面的推论：

推论 1 经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面（图 1—7）。

要证空间的点、直线共面，由证法一可知，可以先由某些元素确定一个平面，然后证明其它元素也在此平面内。这种方法称为纳入平面法。由证法二可知，可以先由某些元素确定一个平面，为证其它元素也在此平面内，再作一个通过其它元素的辅助平面，推证辅助平面与前一平面重合，从而证得所有元素共面。这种方法称为辅助平面法。

三、小结

本节课我们主要讲了平面的基本性质，并应用它们证明空间点和直线共面。

（1）平面的基本性质和作用：

名称	作用
公理 1	判定直线在平面内的依据
公理 2	两个平面相交的依据
公理 3 及三个推论	确定一个平面的依据

（2）证明空间点和线共面的方法有：纳入平面法和辅助平面法。

让学生讨论下面几题：

1.为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚。

2.三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？

3.四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

四、作业

1.一条直线与两条平行直线都相交。证明：这三条直线在同一个平面内。

2.过直线 a 上的三点 A，B，C，引三条相互平行的直线 AA_1，BB_1，CC_1。求证：直线 AA_1，BB_1，CC_1 在同一平面内。

3.过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线。证明：这三条直线在同一个平面内。

（章淳立）

平行直线教案设计

【教学目的】

1.使学生掌握空间两条直线平行的判定及其应用。

2.使学生掌握平行线的性质及应用。

【教学重点和难点】教学重点是空间二直线平行的判定和性质。

难点是二直线平行的判定和性质的应用。

【教学过程】

一、新课引入

通过上一节课的学习，我们已经知道：在图 1—26 所示的正方体 $A_1B_1C_1D_1$ ABCD 中，AB∥C_1D_1， A_1C 和 BD_1 相交。

但对这些结论的正确性没有给出证明。这节课就来解决这个问题。

二、新课

请学生阅读课本上的平行线公理“平行于同一直线的两条直线互相平行。”的有关叙述，并思考思考题（Ⅰ）：

1.给出图 1—26 中 AB∥C_1D_1 和 A_1C 和 BD_1 相交的证明。

2.把一张长方形的纸对折两次，打开后如图 1—27 所示，那么折痕间是怎样的位置关系？为什么？

3.已知：四边形 ABCD 是空间四边形（四个顶点不共面的四边形，E、H 分别是边 AB、AD 的中点，F、G 分别是边 CB、CD 上的点，且。求证：四边形 EFGH 是梯形。

阅读思考后，请一位学生板演

第 3 题。其他学生在读议小组内议论思考题（Ⅰ）并对板演作评论。议论后全班进行交流。在这基础上教师作补充讲评：

1.平行线公理描述了平行线之间的传递性，即若 a∥b，b∥c，则有 a∥c。这种传递性不受线段数目的限制，可以进行多次传递。

2.判断两条直线平行的基本方法是寻找分别与这两条直线平行的第三条直线，再利用平行线的传递性就能证得这两直线平行。例如：

又如思考题（Ⅰ）的第 2 题，由于每个矩形对边是平行的，所以由平行线的传递性可得知各折痕是平行。

3.画空间四边形时，一般可先画一个三角形 BCD，再在△BCD 外取一点 A，然后连接 AB、AD 即得，如图 1—28 所示。事实上，空间四边形也可看成是由不在同一平面的两个三角形拼成的。

思考题（Ⅰ）的第 3 题的图可画成图 1—28，在△ABD 中由中位线定理得 EH∥BD；又在△CBD 中，由平行线截比例线段定理的逆定理得 FG∥BD。再由平行线的传递性得 EH∥FG，所以 EFGH 是梯形。

下面再来讨论平行线的性质。让学生阅读课本上等角定理（即如果一个角的两边和另一角的两边分边平行并且方向相同，那么这两个角相等）的论证和推论。

阅读要求是：

（1）理解定理条件、结论，学会定理证明方法。

（2）会应用该定理。为此，阅读时思考思考题（Ⅱ）：

1.已知：AA'、BB'、CC'不共面，且 BB'AA'，CC'AA'（如图 1—

29 所示），求证△ABC≌△A＇B＇C＇

2.在长方体 A1B1C1D1ABCD 中

（图 1—30），求证∠D1AC=∠BC1A1。

阅读思考后请两位学生上黑板板演，其他学生在读议小组中议论思考题并对板演的论证过程和书写进行评论。教师可根据学生的议论和板演进行纠正和补充讲解：

1.等角定理条件中所提及的方向是指以角顶为出发点而言的。

如图 1—31 中，AC 和 A＇C＇是方向相同的，它们的方向都是以角顶为出发点向右方。

而 A＇C＇和 AD 就是反方向了，因为 A＇C＇是由角顶出发向右，而 AD 是由角顶出发向左。

把等角定理中的条件改成："角的两边分别平行并且方向相反"，那么定理结论仍成立。

应用它能证明思考题（II）的第 2 题：

因为 AB∥A1B1∥=C1D1，所以，ABC1D1 是平行四边形，故 AD_1∥BC_1。

同理可证得 AC∥A_1C_1。

由等角定理得∠D_1AC=∠BC_1A_1。

如果把等角定理中的条件改为："角的两边分别平行并且一组边方向相同而另一组边方向相反"，则结论将为："两角相补"。这是由等角定理直接可推得的（见图 1—31）。

由于上述分析和角的两边可反向延长的特点可得到等角定理的推论：如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行,那么这两组直线所成的锐角(或直角）相等。

2.等角定理的证明是利用了全等三角形的性质。

在证明两三角形全等的过程中，我们把对应边放在一个平面内，然后利用平面几何知识来证得对应边相等的。这种证题思想（即把空间图形的问题转化为平面图形来处理）常被用来证明立体几何中线段相等问题，思考题（II）的第 1 题就是用这种想法来证的。

由条件和平行线传递性知：CC＇<<BB＇，因而 ABB＇A＇、ACC＇A＇、CBB＇C＇都是平行四边形，所以 AB=A＇B＇，BC=B＇C＇，AC=A＇C＇，故△ABC≌△A＇B＇C＇。

三、小结

本节课主要学习了平行线的传递性，也就是平行线的判定定理，由于它的证明比较复杂，这里我们就把它作为公理不给出证明，事实上它是一个定理，也是以后我们证明空间两直线平行的主要依据。由平行线的传递性还推出了平行线的一个性质定理——等角定理，这个定理除了本身有一些应用外，更重要的是为研究异面直线交角打基础的。因此，这节课学的是基础知识，一定要掌握好。

四、作业

（章淳立）

两条异面直线所成的角教案设计

【教学目的】

1.使学生掌握异面直线所成角的定义和求法。

2.使学生理解异面直线距离的定义，能根据定义来求两条异面直线间的距离。

【教学重点和难点】教学重点是异面直线所成角的定义和求法，异面直线的距离的定义。难点是异面直线所成角的定义和求法，异面直线的距离的定义和求法。

【教学过程】

一、新课引入

教师讲解：

在平面几何中我们知道，对于两条相交直线，可以用它们交角大小来确定其相互的位置关系；对于两条平行线，可以用它们之间的距离来确定它们之间位置关系。对于不在同一个平面内的两条异面直线，它们既不相交又不平行，那么如何来确定它们之间的位置关系呢？这是今天要学习的内容。

二、新课

让学生观察一个模型：在一张糊上白纸的马粪纸上，画一条直线 a，并插上三根竹针 b、c、d，如图 1—32 所示。然后思考：直线 a 与三根竹针是怎样的位置关系？而每根竹针与 a 的位置关系是一样吗？

让一个学生回答，其他学生可补充。

使学生明确。a 与 b、c、d 都是异面直线，但 a 与 b、c、d 的位置关系都不一样，其差别在两方面，一是倾斜程度不一样，如 a、b 间和 a、c 间倾斜程度是不一样的。二是远近程度不一样，如 a、d 间和 a、b 间的远近就不一样。

如何寻找出一个合适的几何量来刻划两条异面直线之间的倾斜程度和远近程度呢？让学生阅读课本“两条异面直线所成的角”一节课文。阅读要求：

1.正确理解异面直线所成的角的定义和求法。

2.理解异面直线间距离的定义和一些特殊图形中的异面直线距离的求法。

阅读时可思考下列各题：

1.如何过直线 a 外一点 O 作直线 a 的平行线。

2.如果直线 a 与两平行直线 b、c 都不相交，而 a 与 b 所成的角等于 θ，求 a 与 c 所成角的大小，并说出理由。

3.在边长为 a 的正方休 $A_1B_1C_1D_1$—ABCD（见图 1—33）中，（1）求 AA^1 与 B_1C_1、AA_1 与 B_1C1 所成的角。（2）AB、A_1B_1 分别是异面直线 AA_1 和 BC 的什么线。

4.在图 1—33 的正方体中，求（1）A1C1 和 BD、A_1C_1 和 AD_1 所成的角。（2）AB 和 DD_1 间的距离。

阅读思考后请二位学生上黑板板演思考题中的 2、4 两题。其他学生在读议小组中议论思考题并由第 4 题总结异面直线所成角和异面直线间距离的求法。

教师可根据学生议论和板演情况作补充讲解：

1.在理解异面直线所成角的定义时，要注意三点：

（1）过直线 a 外一点 O，可这样来作 a 的平行线：先作出由 O 和α决定的平面在α，然后在平面α内用平面几何中学过的方法就可过 O 作出 a 的平行线。这个作法为定义异面直线所成角作好了准备。

（2）异面直线 a、b 所成角的定义是：过空间任一点 O，分别引直线 a＇∥a，b＇∥b，则 a＇和 b＇所成的锐角（或直角）作为异面直线 a、b 所成的角。对这个定义不但要理解它的具体内容，还要懂得这种定义的合理性。由平行线等角定理知道，不论 O 点在哪里，a＇和 b＇所成锐角（或直角）总相等的。a＇和 b＇所成锐角（或直角）的大小，完全取决于两条异面直线 a 和 b 的相互位置，所以用 a＇和 b＇所成角的大小作为异面直线 a、b 所成角是合理的。又 a＇和 b＇所成的角有四个（两组对顶角），其中有二个锐角（或直角），另二个是钝角（或直角），到底取哪一个角作为两条异面直线 a、b 所成的角呢？我们规定把 a＇、b＇交成的锐角（或直角）作为异面直线 a、b 所成的角。

由异面直线所成角的定义，容易求出思考题 2 的解。

如图 1—34 所示，在直线 b 上任取一点 A，过 A 作 EA∥a，由异面直线所成角定义得∠EAF=θ。又在直线 c 上任取一点 B，作 BD∥a，则由平行线传递性得 AE∥BD，又由平行线等角定理得∠DBG=∠EAF=θ。由异面直线所成角定义知∠DBG=θ即为 a 与 c 所成角。

（3）因为两条异面直线不相交，所以两条异面直线没有交角，刻划它们倾斜程度的是“两条异面直线所成的角”，而不能叫“两条异面直线的交角”。

2.在思考题 4 中，根据异面直线所成角的定义，连接 B_1D_1 和 BC_1，B_1D_1 与 A_1C_1 交于 O，由 D_1D«B1B，得 D1DBB1 是平行四边形，推出 D_1B_1∥DB。

同法可证得 BC_1∥AD_1。所以 A1C1 与 BD 所成角为∠A_1OD_1=90°。A1C1 与 AD1 所成的角为∠A_1C_1B。因为△$A_1C_1B_1$ 的三边为各面正方形的对角线，所以都相等，于是得∠A_1C_1B=60°。

从上面计算中可归纳出来两条异面直线所成角的一般方法：第一步是根据异面直线所成角的定义，作出两条异面直线所成角：在两条异面直线的一条上选取具有某些特殊性质的点（如这题中的 O、C＇点就是），再过这点作出另一条异面直线的平行线，所成锐角便是所求的角（如这题中∠A_1OD_1，∠A_1C_1B）。第二步是使作出的两条异面直线所成角成为一个三角形的一个内角（本题中的△A_1C_1B 就是）。第三步解这个三角形。

3.在思考题 3 中，因为 A_1D_1∥B_1C_1，AD∥BC，所以∠D_1A_1A=90°，∠DAB=90°就是 A_1A 和 B_1C_1、A_1A 和 BC 所成的角。

如果两条异面直线所成角是 90°，那么我们就说这两条异面直线互相垂直。由此可知，在立体几何中两条直线互相垂直不一定是相交的。

从图 1—33 中可知 A_1B_1⊥A_1A，A_1B_1⊥BC，又 AB⊥A_1A，AB⊥BC。这里 AB 和 A_1B_1 分别与两异面直线 A_1A 和 BC 垂直，但 AB 与两异面直线 A_1A 和 BC 都相交，而 A_1B_1 与两异面直线不全相交。我们把象 AB 这样与两条异面直线都垂直而且都相交的直线叫这两条异面直线的公垂线，而象 A_1B_1 这样的直线不能作为两条异而直线 A_1A 和 BC 的公垂线。但象 A_1B_1 这样与两条异面直线都垂直的直线在作异面直线公垂线时常常是十分有用的，作两条异面直线公垂线

时，常常可先作出分别与两异面直线垂直的直线，然后再平移与两条异面直线相交来得到两条异面直线的公垂线。两条异面直线公垂线在这两条异面直线间的线段长，叫这两条异面直线间的距离，它刻划了两条异面直线间的远近程度。从图 1—33 中可看出，异面直线 A_1A 和 BC 的公垂线只有一条，即 AB 所在的直线，A_1A 和 BC 间的距离只有一个数值，即 AB 的长=a。所以，两异面直线的公垂线是唯一的，它们间的距离只有一个数值，这也是两条异面直线间的距离能刻划两条异面直线远近程度的原因所在。

从异面直线间距离的定义中可知，要求两条异面直线间的距离，只需找出这两条异面直线的公垂线，思考题 4 中，AD 是 AB 和 DD_1 的公垂线，AB 长=a 即为 AB 和 DD1 间的距离。随着线面关系和面面关系的学习，以后还可以有多种方法来求异面直线间的距离。

三、小结

这节课主要介绍了刻划两条异面直线倾斜程度和远近程度的两个几何量：异面直线所成的角和异面直线间的距离。对于这两个几何量要正确理解它们的意义和掌握它们的求法，这样就能确定两条异面直线间的位置关系，而确定两条异面直线间的位置关系，不论在立体图形研究和计算中还是在实际问题的研究中都会遇到。

四、作业

（章淳立）

三垂线定理的两中教案设计

A（一）

【教学目的】掌握三垂线定理并能运用。

【教学重点和难点】重点：弄清楚三条垂线的相互位置关系。难点：在非水平放置的平面上运用三垂线定理。

【教学过程】

一、新课引入

上节课我们讲了斜线在平面内的射影，今天我们复习一下。从平面外一点向这个平面引垂线段和斜线段，斜线段的射影是什么？（提问学生）就是垂线足和斜线足连结的线段。斜线在平面上的射影呢？（提问学生）过斜线上一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做斜线在这个平面上的射影。

现在，我们来研究一个问题，正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的对角线 BD_1 和底面对角线 AC 的关系。（老师可出示用铁丝做成的正方体教具，其中体的对角线和底面对角线，可用两种不同颜色的塑料丝表示。直观图 1—56 课前画在黑板上）对照图 1—56 提出：

（1）BD_1 在底面 ABCD 内的射影是什么？

（2）BD_1 与底面 ABCD 中 AC 处于何种位置关系？

（3）BD_1 与 AC 所成的角是多少？

（以上三个问题请学生回答）

求异面直线所成的角，一般通过平移，转化成共面直线所成的角，然后运用平面几何知识求得。如我们取 DD_1 中点 M 连 OM，则 $OM∥BD_1$。连 AM、CM，则 AM=CM，又 O 为 AC 的中点，所以 OM 为等腰△MAC 底边上的中线，从而 OM⊥AC。于是 BD_1 与 AC 所成的角是 90°，即 BD_1⊥AC。

第三个问题的解答过程，给我们提供了证明两条不共面直线互相垂直的方法；可以利用异面直线所成的角的定义，通过平移两异面直线中的一条或两条，转化为讨论两共面直线的垂直问题，这也是解决立几问题的一种重要方法。此外，我们还可建立直接获得空间两条直线互相垂直的定理——三垂线定理及其逆定理。下面我们学习三垂线定理。

二、新课

三垂线定理（板书）

在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

已知：PA、PO 分别是平面α的垂线、斜线，AO 是 PO 在平面α上的射影。a⊂α，a⊥AO（图 1—57）。

求证：a⊥P。

分析：∵a 和 PO 是异面直线。

∴要证 a⊥PO，只要证 a⊥平面 PAO 即可。

证明：请学生自己证并与课本上的证法对照。

说明：（1）三垂线定理的图形应有以下四种情况：如图 1—58（1）所示，直线 a 可以通过 O 点；如图 1—58（2）所示直线 a 可以与 OA 相交；如图 1—58（3），图 1—58（4）所示直线可以与 OA 的延长线与 AO 的延长线相交。

（2)三垂线定理实质上是平面的一条斜线和平面内的一条直线垂直的判定定理。这两条直线可以是相交直线。

也可以是异面直线。

（3）三垂线定理应有三条垂线，如图 1—57 中，直线 PA 是平面α的垂线，直线 AO 是直线 a 的垂线，直线 PO 也是直线α的垂线，因此这种三垂线定理的叙述是名符其实的，它反映了三条垂线之间的关系。

三、小结

（1）三垂线定理是平面的一条斜线和平面内一条直线垂直的判定定理，可简记为：若垂直射影，则垂直斜线。它把空间的两条直线的垂直问题转化为平面内两条直线的垂直问题。

（2）运用三垂线定理的关键是找射影，要找射影应先找线面垂直关系，有了线面垂直才有斜线的射影，再证垂直射影，得出垂直斜线。

让学生课内作下列练习题：

1.如图 1—60，已知：点 O 是△ABC 的垂心，OP⊥平面 ABC。求证：PA⊥BC。

2.如图 1—61，已知：ABCD 是正方形，PA⊥AB，PA⊥AD。求证：BC⊥平面 PAB，CD⊥平面 PAD。

四、作业

1.如图有一方木料，上底面上有一点 E，要经过点 E 在上底面一条直线和 CE 的连线垂直，应怎样画？

2.过△ABC 的垂心 H，引平面 ABC 的垂线 HP，使∠APB=90°。求证：

PA⊥PC，PC⊥PB。

3.经过一个角的顶点引这个角所在平面的斜线，如果斜线和这个角的两边成相等的角，求证：斜线在平面内的射影是这个角的平分线（或平分线的反向延长线）。

4.平面α内有正△ABC，点 O 是平面α外和 A，B，C 有等距离的点；P，Q，R，S 分别是线段 OB、AB、AC、OC 各边的中点。求让：四边形 PQRS 是矩形。

A（二）

【教学目的】掌握三垂线定理的逆定理，并能运用三垂线定理及逆定理证题、解题。

【教学重点和难点】 重点：运用三垂线定理及逆定理证题、解题。难点：求点到直线的距离。

【教学过程】

一、新课引入

我们上节课讲了三垂线定理。什么叫三垂线定理？它的道命题是什么？让学生思考后回答。

二、新课

三垂线定理的逆定理：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直。

已知：PA、PO 分别是平面α的垂线、斜线，AO 是 PO 在平面α上的射影。a⊂α，a⊥PO（图 1—62）。

求证：a⊥AO。

由老师写出已知、求证，证明请学生上黑板板演。最后老师讲评。

要注意三垂线定理及其逆定理的区别，三垂线定理是先有 a 垂直于射影

AO 的条件，然后得出 a 垂直子斜线 PO 的结论；而其逆定理则是已知 a 垂直于斜线 PO，再推出 a 垂于射影 AO，在运用时应注意不要混淆。简单地讲前者是“垂直射影垂直斜线”。后者是“垂直斜线垂直射影”。

现在，我们利用三垂线定理及其逆定理来证明有关两条直线垂直的问题。

例 1　已知：PA⊥PB，PB⊥PC，PA⊥PC，PO⊥平面 ABC，垂足为 O（图 1—63）。

求证：AO⊥BC，BO⊥AC，CO⊥AB。

分析：因为 PA 是平面 ABC 的斜线，AO 是 PA 在平面 ABC 内的射影，BC 是平面 ABC 内的一条直线。

所以要证 AO⊥BC，由三垂线定理的逆定理可知，只要证 PA⊥BC。

而让 PA⊥BC，不仿去证 PA⊥平面 PBC，由直线和平面垂直的判定定理可知，只要证 PA⊥PB，PA⊥PC 即可。

PA⊥PB，PA⊥PC 是已知条件。

下面用综合法写出证明。

下面我们研究利用三垂线定理及其逆定理求点到直线的距离。

什么是点到直线的距离呢？

过这一点向直线引垂线跟直线相交，点到垂足之间的距离，就是这点到直线的距离。

例 2　道旁有一条河，彼岸有电塔 AB，高 15m。只有测角器和皮尺作测量工具，能否求出电塔顶与道路的距离？

分析：如图 1—64，要求点 A 到 CD 的距离，就是在空间的一个平面 ACD 内，作一条垂线 AC 垂直于 CD，垂足为 C，这是比较困难的问题。为了解决这个问题，我们如能找出垂足 C 在 CD 上的位置，问题就迎刃而解了。

如果我们在道边取一点 C，使 BC 与道边所成的水平角等于 90°。由三垂线定理可知 AC⊥CD，AC 就是电塔顶与道路的距离。再使水平角 CDB 等子 45°。测得 C、D 的距离，然后解直角三角形 ABC 即可求得 AC 的长。

解：如图 1—64，在道边取一点 C，使 BC 与道边所成的水平角等于 90°。再在道边取一点 D，使水平角 CDB 等于 45°。测得 C、D 的距离等于 20m。

∵BC 是 AC 的射影，且 CD⊥BC，

∴CD⊥AC。

因此斜线 AC 的长度就是电塔顶与道路的距离。

∵∠CDB=45°，CD⊥BC，CD=20m，

∴BC=20m。

∵AB=15m，由直角三角形 ABC：

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{15^2+20^2}=25(m)$ （m）。

答：电塔顶与道路的距离是 25 米。

三、小结

由以上两个例题得到：

（1）三垂线定理及其逆定理都是二直线相互垂直的判定定理。三垂线定理是由共面二直线的垂直推得空间二直线的垂直。其逆定理是由空间二直线的垂直推得共面二直线的垂直。

（2）求平面外一点 P 到平面内一条直线 l 的距离，步骤分两步：第一步找出 P 点到直线 l 的垂足 Q 的位置，把求点到直线的距离转化为 P、Q 两点之

间的距离；第二步通过解以 PQ 为一边的某个三角形求出点到直线的距离。

四、作业

1.P 为△ABC 所在平面外一点，PA⊥BC，PB⊥AC。求证：PC⊥AB。

2.平面α内有一个正六边形，它的中心是 O，边长是 2cm，OH⊥α，OH=4cm。求点 H 到这个正六边形顶点和边的距离。

3.直角三角形 ABC 所在平面α内，∠ACB=90°，AC=18cm，BC=32cm，D 是 AB 的中点，DE⊥平面 ABC，DE=12cm。求点 E 到直角边 AC 和 BC 的距离。