普九义务教材通用教案设计精编(中学卷)

中学数学通用教案设计精编之一

中学数学通用教案设计精编之一

教学课堂教学模式设计的三个原理

关于数学课堂教学（以上简称课堂教学）的原理，可以说是仁者见仁，智者见智。李聪睿老师从结构、组织和弹性的角度来论述三个教学原理：

1.结构优化原理

所谓结构是一种状态向另一种状态的转化，或者说是状态之间的联系。

在这里，我们提出数学结构教学的概念。所谓数学结构教学是指课堂教学系统由知（识）、（方）法、情（感）、意（志）、行（活动）所构成的一种环状信息流体，见下图。

数学结构教学中的五要素：“知、法、情、意、行”构成。一个“生”、“克”、“乘”、“悔”的矛盾统一体，是一个闭合系统。上图中，实线是“生”，意为促进或助长；虚线是“克”，意为阻滞或消减。“生”之过度则为“乘”，是一种不正常的表现，是逆变的前奏。例如，有的数学教师搞形式主义，为追求课堂气氛的活跃，使学生的情绪兴奋过度，反而削弱了知识的掌握和思想方法的形成，正所谓“只闻雷声不见雨点”。“克”之过度则为“悔”，是一种逆常的反“克”。例如，有的数学教师上课忽视与学生进行感情交流，唱“独角戏”，造成学生象蔫了的禾苗，无精打彩，既不想动脑，也不想动口动手，这样，显然也不利于知识的掌握和方法的形成。

从整个系统看，各个要素之间的相“生”相“克”，可以说是控制与“反馈”的关系。情生意，意生知，反过来知克意，意克情，等等。这种相互依存、相互作用、相互制约的关系构成了辩证统一体。

结构优化原理，就是我们在课堂教学中，掌握这种辩证关系，力求增大相“生”值，减小相“克”值，以达到最佳的课堂教学效果。

2.组织同构原理

课堂教学是充满智慧式活力的对抗的“人—人”系统。如果该系统在教师的作用下获得其结构的优化，便说系统是有组织的，否则是非组织的。课堂教学的组织同构是指课堂上师生在时间或空间或功能等方面的最佳配合。

课堂教学的组织同构原理从宏观方面来说，可用整体性、等级秩序、分流、调控、合作竞争等因素来刻划。

所谓整体性是指课堂教学不是针对某几个尖子学生，而是面向全体学生，使得人人都参与课堂。

等级秩序是指课堂教学不是一棍子桶到底，而是具有时间或空间或功能的等级，起伏跌宕，既有“低潮”，也有“高潮”，而且线路清楚，整然有序，既不“冒进”，也不“溃退”。

一个班级学生的水平是参差不齐的。分流就是把不同水平的学生按角色进行归类，因材施教，使他们都学有所得。

调控是调节和控制，它是课堂教学的灵魂。

重视课堂合作已成共识。但对于通过倡导课堂竞争，甚至学生向教师挑战，而达到课堂有组织，教师们则不予重视。其实，合作和竞争既是对抗体，又是统一体。没有竞争的合作是一种平淡无奇的合作，课堂将沉闷、压抑；没有合作的竞争，则“互相残杀”，课堂将失去控制。因此，有组织的合作竞争对于搞活课堂很重要。

课堂教学的组织同构原理从微观方面来说，可用目的性、适应性、合目的行为等因素来刻划。

目的是行动的指南。课题的引入，结论的探索，作业的布置等每个教学环节要达到什么样的目的，甚至教师的每个眼神、手势等外部动作对课堂的有组织能起多大作用，教师上课前都要胸有成竹，上课时才能挥洒自如。

教师对课堂的设计要充分考虑学生的适应性，既不能为紧跟“形势”搞“高、大、空”，也不能忘自菲薄，借口学生基础差而放弃追求。

课堂教学的有组织是师生之间的信息交流，不但能言传，而且能意会，即说是合目的行为。“心有灵犀一点能”，意会比之于言传是更高的境界。

教师在课堂教学上的有组织作用是有限的，聪明的教师都是通过对教学系统的培育，建立起自组织系统。教学系统在获得结构优化的过程中，没有教师的干预，则称教学系统是自组织的。

自组织是教学系统的一种内部过程。对单一个体——每个学生而言，是内驱力起着作用。学习抽象的数学需要付出艰辛的脑力劳动，因此，学习目的明确，意志坚强的学生，他的学习便是自觉的。对个体之间——整个班集体而言，是学生之间互为因果、相互影响、相互合作的结果。

3.弹性原理

弹性是物理学中的一个基本概念。通常是指事物在发生形变、质变等情况时所呈现出的一种特殊的现象。课堂教学要富有“弹性”。那么，如何在教学中体现这种“弹性”呢？弹性原理从以下四个方面揭示这个问题。

（1）系统弹性。系统弹性，取决于课堂教学系统的结构优化，而关于这点，我们在结构优化原理中已论述，以此恕不赘述。

（2）精神弹性。课堂教学中的精神因素是一个不定值。它随着教学环境、师生情绪等变化而发生涨落。教学中精神弹性在于如何调动师生各个层次的主观能动性。

首先，教师要树立自信心。克劳塞维茨说：“如果我们在犹豫的情况下能相信并坚持当初的信念，那么我们的行动就具备了人们称为性格的那种坚定性和一贯性”。课堂教学艺术从某种意义上说是随机应变之术。这是充满坚定信心的“变”，而不是那种犹豫不决的自我否定的“变”。

其次，教师对所上的枯燥的数学课题若饱含兴趣，津津乐道，那么学生就会被教师的这种情绪所感染，学习的积极性就大大提高。但要注意浓淡相宜。

再次，教师要设计合适的问题情境启迪学生的心智，通过积极思维调动学习情绪的提高。精神弹性最重要的是思维的自由度，或者叫弹性思考。在课堂教学中，要通过发扬民主，思维发散，引导学生弹性思考。

遵循模糊性和简单性原则，是保持精神弹性的重要前提。科学的发展是从不精确到精确，从具体到抽象。数学科学当然也如此，数学教学更如此。如果教师一味追求准确、精确，学生就会失掉许多想象力，失掉广阔的思维场。

（3）过程弹性。教学是一个过程，是一个发生、发展、结束的过程。而过程本身就包含有弹性。

在一个较长的过程中，处于“瓶颈口”的部位决定着过程的“总流量”。一节教学课 45 分钟，教师每分钟都要打起十二分精神，认认真真地上好课。否则，根据“瓶颈理论”，就会功亏一篑。常见有的教师十分重视一节课的开头，但对于课的结尾则马虎对待，实是一种失策。

看待课堂教学的过程弹性，最忌简单地看待平均值，即在教学中面面俱

到，什么都想讲清楚，结果什么都讲不清楚，事倍功半。

过程弹性还要求我们，在环环相扣，紧密联系的整个教学过程中，要注意根据未来的教学需要，安排过程。既要考虑这节课的教法，还要顾及到这节课对下节课的影响，甚至要注意到在整个中学数学中的地位和作用。或者进行逆式思考，先考察后节课的教法，尔后再确定这节课的教法。过程弹性更注意重逆式思考，然而，我们不少教师忽视了这点。

与过程弹性联系最紧密的是时间弹性。从一定意义上说，过程也可以说是时间的安排和利用。不少新数学教学法，都在时间弹性上“做手脚”。课堂教学灵活安排时间，往往会收到良好的教学效果。如有位教师讲授“圆”的概念，当时正值夏日下午第一节课，学生精神不佳，有意注意时间极短，教者根据这种情况，立刻重新设计开场白，由“你们知道我昨天晚上想什么吗？”的提问入手，谈到“我”的自行车轮扭扁了，不能骑了，“我”正苦脑着呀！怎么办呢？请同学们帮助“我”好吗？娓娓道来，如话家常，逐步引入课题。这别开生面的开局，激起了学生浓厚的兴趣，学习的积极性被充分调动起来。虽然在节奏的调控上，前面略为宽松，后面略为紧凑，但这样的处理却为顺利进入第二阶段，赢得较长的有意注意的时间创造了条件，从而取得了较好的教学效果。

（4）内容弹性和教法弹性。一节数学课究竟教多少内容才合适，要视课题和学生而定，因而具有弹性。内容决定着形式。针对不同的教学内容采取不同的教法，内容的弹性在这个意义上可说是教法的弹性。在这里，我们从系统学的角度，对数学教法作一个分类。

①发散性教法。

如果认为课堂教学系统是一个离散系统，各种因素都是不确定的，有待师生共同去挖掘、探索，则说这种教法是发散性教法。采取这种教法的教师要知识面广，经验丰富，能临场发挥，变通性强。因此，这种课自由度大，富有弹性，学生思维活跃，课堂似“茶馆”。但这种教法对教师和学生要求都高，课堂不易控制。

②聚敛性教法。

如果认为课堂教学系统是一个连续系统，教师人为地消除因素的不确定性，强化确定性，对问题每每要追寻其前因后果，则认为这种教法是聚敛性教法。这种教法具有稳定性，对教师和学生要求相对不高，因此易操作。但教学的数学毕竟不是科学的数学，刻意追求严谨，反而掩盖了课堂教学的生动性，扼制学生思维创造性，因而弹性少。

数学教案设计的操作原则和要求

根据山东潍坊市教研室潘永庆老师的概括，主要有如下几种：

1.教学目标的科学性

目标应有以下科学性要求：

（1）目标应当是具体而不是抽象笼统的。比如把“掌握余弦定理”作为目标是抽象的，应具体化为：

①会画图或用符号说明这一定理的条件、结论及应用背景；

②会借助平面直角坐标系推出这一定理；

③会在较复杂的背景条件下解决已知两边与夹角或已知三边解三角形问题。

（2）目标应当是可测和便于操作的。比如对“理解二次根式定义”可作如下测量：会说明$\sqrt{a}(a\geq 0)$表示的意义；会求出a所代表的被开方数中字母的取值范围；会根据定义和$\sqrt{a}(a\geq 0)$的非负性推出公式$\sqrt{a^2}=|a|$及$(\sqrt{a})^2=a$。

（3）目标应当是有层次和递进的。应具有识记、理解、应用到综合，从低到高逐次递进的不同水平。这反映了知识转化为能力和逐步内化的要求。

（4）目标应当有阶段性。要从学生的年龄心理特点和认知水平分阶段地提出学习目标。比如绝对值概念，初学有理数要求会求具体数的绝对值；到“整式”一章结束初步认识式子式子$|a|=\begin{cases}a(a\geq 0)\\-a(a<0)\end{cases}$的意义；到“二次根式”一章要求结合根式性质理解和灵活应用公式$\sqrt{a^2}=|a|$；到“复数”发展到向量的模。

（5）目标应当是全面的。既有直接目标也应有间接目标。直接目标包括数学事实、数学概念、命题、方法、知识结构，以及数学技能和数学活动经验。间接目标是学习数学间接获得的观念、经验和行为，比如数学态度、数学思想和意识、数学能力、自学和创造能力、思想品质和个性品质。

2.知识结构的有序性

成逻辑序列的知识系统既便于记忆又便于联想和应用。数学设计应努力构建知识结构以促成新的认知结构的产生。要做到两点：

一是搞清所学知识点及其本质联系，构成知识结构的有机框架。比如同底数幂乘法法则的建立实质上是乘方意义和乘法运算律的应用；学习开平方运算实质上改变已有的求平方幂的研究方向为已知幂求底数。

二是搞清知识的呈现方式，即明确教材是用什么方式把知识及其联系呈现出来的。教材的呈现方式有的“简约”，有的抽象，有的偏离了学生已有的知识经验。

3.认知结构的适应性

“认知”是学习者对于他（她）的客观世界和主观世界的一种认识活动。数学学习是新知识与学生已有认知结构相互作用而形成新的认知结构的过程。

（1）预测学生认知基础

①设计好诊断性检测题，从新旧知识的联系处设计问题检测学生是否具

备必要的知识和经验。

②平日教学中注意了解不同类型的学生，并考虑在满足大多数学生需要的同时使优生进一步优化，使后进生得到补救和相应发展。

（2）遵循认知规律。首先要遵循从感性到理性，从具体（感性具体）到抽象，再由抽象上升到具体（理性具体）的认识程序。感性材料既是形成表象的基础又是引导学生抽象概括和理性分析的起点，教学设计必需为学生提供丰富的感性材料，比如鲜明生动的事例、图片、图形、幻灯、录像、教具等。在感性材料基础上要考虑如何引导学生进行比较、分析、综合、归纳、演绎、抽象概括等，并进一步引导认识数学对象的复杂多样性和多方面联系，从而丰富数学概念的内涵，把初步抽象上升到理性具体。

其次，要遵循从理解到运用的认识规律，将有序训练引入课堂。传统的课上大块讲课后集中练的教学方式是不可取的，课后的时空是不可控的，练习中的缺陷得不到及时补救。将有序训练引入课堂就要设计从低到高，从简单到复杂，从单调到变式，从模拟到创新的训练题，这既适合不同层次的学生又能引导学生的思维不断发展深化。

4.能力培养的能动性

数学教学培养的能力是多方面的，如抽象概括、思维转换、逻辑思维、空间想象、数学操作、自学创造等。归根结底就是培养分析和解决问题的能力。

教学设计应做到：

①相信大多数学生都具有发展能力的生理和心理基础，对不同类型学生设计不同能力要求和培养策略。

②发现知识产生过程尽可能充分丰富的背景材料，创设问题情景，激发求知和思维积极性。

③设计较为详尽的知识产生过程，适度再现最初发现知识的思维进程，并从教学需要出发进行必要加工。

④设计学生认知过程中的思维矛盾，揭示并引导学生解决矛盾开拓前进。

⑤设计学法。就是设计指导学生如何阅读、如何思考、如何观察、如何记忆、如何整理、如何探索等。

5.学生的自主参与性

（1）科学地设计问题，数学活动是从问题开始的，没有问题便没有数学活动。问题的设计既考虑学生的认知基础又要给学生思考的余地。要从以下几方面考虑：

①从新旧知识衔接上提问题；

②从指导学生观察、比较、分析、综合、归纳、演绎、抽象、概括上提问题；

③通过举例（包括反例）提问题；

④从指导数学思想方法和思考方向上提问题。

（2）设计适当的变式训练。多角度多侧面多层次地揭示概念的实质，并用似是而非的题考查学生理解的深度和对易混易错内容的辨析。

（3）设计较为详细的课堂学生活动。比如观察、思考、听讲、议论、演算、读书、答题等。从内容到进程和注意事项都要具体考虑。以观察两圆的位置关系为例，要设计如下事项：

①观察中的比较思维，既比较两圆的五种位置关系本身，又把两圆位置关系同其他图形间的位置关系比较。

②观察中的回顾与联想，如联想直线与圆、点与圆、两直线间的位置关系的刻划方式。

③观察中的科学概括，比如先指导概括两圆的位置关系再指导借鉴利用距离刻划直线与圆位置的经验，概括出圆心距与半径的关系。

6.情意“共振”性

所谓情意“共振”是指师生情意上的共鸣。

教学设计创设条件促使情意“共振”产生，应做到：

①通过阐述所学知识的意义激发学习热情；

②通过引导学生归纳猜想结论，产生论证结论的内在动机；

③通过揭示数学对象的本质联系及运动变化，激发学生深入学习的感情冲动；

④通过引导学生参与思维的形成与制作过程，品尝智力劳动成果，强化继续学习的心理需要；

⑤通过设制恰如其分的台阶引导学生不断获得学习成功，从而领略成功的喜悦，增强兴趣持久性；

⑥通过适当表扬鼓励促使学生追求战胜困难的愉快，体会解决困难的满足感。

7.反馈矫正的及时性

及时反馈矫正是解决统一教学与学生个体差异矛盾的主要措施之一。教学设计要对课堂和单元反馈矫正组织形式、方法、内容、时间安排、效果及注意事项作出考虑。比如课堂的察颜观色、投石问路、议论、作业布置与讲评、目标的展示与检查、单元形成性测试与评价等。

8.讲授内容的“精要”性

所谓“精要”性指讲授抓住关键、突出重点、体现“少、精、活”。一堂课尽管内容较多，但真正新的东西并不多，而且一些所谓新内容不过是已有知识经验的应用、扩充、推广、演绎、变形、重新组合、一般化或特殊化而已。比如解一元二次方程的开平方法不过是平方根概念的应用；配方法的关键是配方，而配方不过是完全平方式在新情景下的应用而已。因此，少而精是完全能做到的。设制的讲授内容应是新知识新环节，以及重要思想方法和思维模式。后者可能是学生多次接触过的，但贯串于新知识的产生过程之中，对发展学生才智至关重要。

数学常用课型设计

数学常用的课型有新授课、练习课、复习课、实践课和评讲课等。

新授课的设计

1.设计依据

学生年龄特点、学生原有的认知结构，新知识的结构和小学生一般认知规律。

2.设计内容

（1）教学目标的设计。

（2）准备题的设计。

（3）引导新课的设计。

（4）教法设计。

常用的有讲授法、谈话法、讨论法、读书指导法、演示法、参观法、练习法、实践法和陶冶法。还有发现法、程序教学法、自学辅导法、“读读议议讲讲练练”八字法、以及六单元教学法等。教学无定法，但教学要得法。不管选择何种教学方法，都要体现启发式这一指导思想。

（5）学法的设计（主要是设计教师指导的程度和学生独立的程度，详见下表）。

类别	内容		
新知识的结构	完全新的知识	新知识= 旧知识+一点新知识	新知识=旧知识+旧知识
学习方式	依靠教师	半独立	基本独立
教师的指导	学生靠教师一点一点地教，学习教师教给的东西。	教师通过提问、演示讲解相结合，逐步启发学生自己探求未知，学生有“知新”能力。	学生学习后能按提纲进行学习，阅读课本，自己能解决问题。
举例	第十二册的“统计图”	第八册的“相遇问题”	第四册的“连乘”

（6）教具的设计。

（7）学具的设计。

（8）反馈练习的设计。

（9）质疑问题的设计。

（10）小结语和总结语的设计。

（11）作业。

3.设计建议

（1）准备题的设计要抓住新旧知识的联系点，促进知识的正迁移。

（2）要以整体观点设计教法和学法。

（3）要重视思维过程的训练，教学生想什么和怎样想，启迪思维，锤炼良好思维品质。

（4）设问可在造成学生悬念时，在知识难处，在开拓思路时，在知识异

同处，在问题转折中，在算理运用上，在规律探讨中……等。

（5）要强化学生的参与意识，培养学生爱动脑、乐动口、勤动手参与教学全过程。

（6）要根据学生的反馈信息，灵活调控教学的各环节。

（7）教师的心理活动要与学生的心理因素同步。

练习题的设计

1.练习题的种类

巩固新知识的练习课和新旧知识综合的练习课。

2.设计的内容

分基本练习、深化练习和综合练习三层次。

第一层次是基本练习，帮助学生回忆，巩固所学的新知识。

第二层次是深化练习，加深学生对所学知识的理解，提高应用水平。

第三层次是综合练习，加强知识之间的联系，培养综合运用知识的能力。

3.设计建议

（1）练习课是以巩固知识，训练技能技巧，发展思维为主要任务的课，是新授课的补充和继续，不是旧知识的重复。

（2）练习题的设计要按照整体、有序和适度原则，做到有目的，有实效，有层次，逐步提高。

（3）练习要防简单的机械重复和单一模式化，要把新旧内容交错进行练习。

（4）练习时，不但要满足学生正确计算结果，更要重视讨算过程，要注重思维训练。

（5）练习时要面向全体学生，要重点辅导中差生，树立正确的学生观，使各类学生都能主动学习。

复习课的设计

1.复习课的类型

日常的章节复习、单元复习、阶段复习、学期开始和结束时的复习，以及毕业前的总复习。

2.复习课设计的内容

（1）设计好复习提纲（可按知识的纵或横的结构编写）。

（2）设计复习题：基本题、灵活题和综合题。

（3）给学生质疑问难的机会。

（4）设计教师的讲解。

复习题的讲解不同于新授课，它有时是提纲要领的讲解，帮助学生理清知识；有时解答疑难，帮助学生解惑；有时评讲作业，提高学生解题能力；有时可对学生所学知识作适当的概括提高。

3.设计建议

（1）复习课是完整、系统地整理深化知识的过程。它重在归纳、系统分析比较，巩固提高。

我们要把复习课组织成引导学生重新发现的过程。引导学生理清知识的

整体结构（线索），沟通知识之间的联系，使之系统化，培养学生初步的辩证唯物主义观点。

（2）复习前要全面分析全班学生情况，明确复习目的，并作好计划安排。

（3）复习提纲要注意解题思路的培养和复习方法的指导（指导学生善于联系已学过的知识，善于对比和善于把知识整理分类）。

（4）复习题的设计要有针对性、典型性、启发性、层次性和系统性。最好以题组形式出现，抓一题多变，一题多解或多题一解等训练。特别要在综合训练上下功夫。

（5）复习题要突出重点，揭示知识规律。加强对教材中易混淆的知识的复习，提高分析能力，培养触类旁通，举一反三的能力。

（6）复习课要重视思维过程的训练，锤炼思维品质。（思维的敏捷性、思维的灵活性、思维的深刻性和思维的创造性等。）

（7）教师在教态、语言、板书等尽量使学生有新鲜感，以引起学生新的思维方式，有知识虽“旧”也觉“新”之感。

（8）教师的讲解要有针对性，重在设疑、答疑和启迪思路。

实验课的设计

1.实验目的

让学生通过亲自的操作演示来发现、证实数学运算定律、法则及公式。

2.设计内容

（1）实验活动：操作或观察。

（2）思考题。

（3）概括知识的语言。

（4）知识的应用。

3.设计建议

（1）注意引导学生边动手、边观察、边思考、边口述、让学生眼、耳、口多种感官参与活动，促学生的操作、思维和语言整体发展。

（2）通过实践活动，培养学生初步的辩证唯物主义观点。

（3）要注重知识的应用，对知识的理解和记忆只有在应用中才能形成和发展。

评讲课的设计

1.设计内容

（1）试卷分析：定量分析和定性分析。

（2）答疑：强化正确信息，排除错误信息。

（3）辅导差生。

（4）补充课外练习。

2.设计建议

（1）及时进行信息反馈，有利于调整自己的教学，防止恶性循环。

（2）面向中下生，减少掉队生。

数学新课导入设计八式

万事开头难。良好的开端，等于成功的一半。

课堂教学也是如此。如果你一上讲台，就能唤起学生的注意力，启动学生思维的机器，激起学生浓厚的学习兴趣，那么这堂课的成功就有了希望。反之，新课伊始，教者心中无数，漫无边际，学者必然精力分散，索然寡味，其课堂效果可想而知。因此，凡有经验的教师都非常重视导入新课的设计，把它作为提高课堂教学效果的重要一环。

李泊水老师结合初中数学教学介绍了几种常用导入新课的方法：

1.复习式引入

数学是一门系统性很强，前后知识联系紧密的学科，从复习与新授内容有关的旧知识导入新课，不仅为学习新知识做好铺垫，同时，对培养学生的自学能力，也会有所裨益。

例如，讲授“平行线分线段成比例”时，教师可首先引导学生复习（1）什么叫做两条线段之比？它们的比与量时所取的长度单位是否有关？ （2）请叙述平行线等分线段定理，能否将定理的结论，改为 AB：BC=DE：EF（如图）？

这里，第（1）题为线段成比例和量不尽时变换长度单位埋下伏笔。第（2）题，把 AB=BC，DE=EF，转变为 AB：BC=DE：EF，自然地过渡到成比例线段。然后，教师可稍加点拨，巧妙入题：若 AB≠BC，上面的比例式是否成立？

复习式引入新课，必须注意精心选择复习内容，使已学的知识为学的新知识开辟道路。

2.总题式引入

某些课是无须“引”的过程，就不必绕弯子。开宗明义，和盘托出本节课要学习的主要内容，直接了当地推出思考的客体。这样做，教学重点突出，能使学生较快地把注意力集中在教学内容最本质、最重要的问题研究上。

例如，讲授“反比例函数”时，可这样设计导言：“在学习了正比例函数的基础上，我们今天学习另一种重要的函数——反比例函数。什么是反比例函数，如何确定反比例函数，反比例函数的图象及性质如何，这就是我们要研究的主要问题。”

总题式引入新课，适于教学内容与前授内容联系紧密，或研究方法相似的课；如果新授内容份量较重，有关旧知识学生比较熟悉，也可开门见山进行新课。

3.提问式引入

问题是思维的起点。心理学指出，思维过程通常是从需要应付某种困难、解决某个问题开始的。教师以提问适当的问题开始讲课，能起到以石激浪的作用，刺激学生的好奇心，引起学生的积极思考。

例如，有位教师讲“负数”时，他没有象一般教师那样去讲“零上”与“零下”，“前进”与“后退”等“具有相反意义的量”，而是先向学生提出：“5-3=？”、“3-5=？”。这样的问题，对初一学生来说，既自然又很有吸引力。对被减数小于减数的问题，学生会说：“不够减”。教师接着问：“欠多少才够减？‘欠 2’”。这时可引进记号“-2”表示“欠 2”，并指出：除零以外的算术数前写上“-”（称为负号）所得的数叫负数。这样引入，学生既了解了负数的意义，又弄清引进负数的目的。

再如，讲“对数换底公式”。可先提问：“（1）你会查表计算 lg6、

lg47 的值吗？（2）怎样计算 $\log_6 47$ 的值？”当学生对第（2）题面露难色时，可趁势指出：“要计算 $\log_6 47$ 的值，只要能够找出它与常用对数的关系，问题就解决了，这就是我们这节课要研究的问题。”

提问式引入新课，能有效地把教师的主导作用和学生学习的自觉性有机地结合起来，是导入新课的重要方法。所提问题要难易适当，恰到好处。第一，让学生面对适度的困难，以期引起探索的兴趣；第二，不能太难，使大多数学生能够入手，否则，也达不到引入新课题的目的。

4.实例式引入

此法是在开课时用与新授内容有关的，学生熟知的生产、生活中的实际例子引入新课。这不但能使学生感知数学与现实生活的密切联系，提高学习的目的性，而且能激发学生学习的兴趣，提高学习的自觉性。

例如，讲授“解任意三角形”时，教师可先举出一系列实际问题老山前线战场上，我炮兵侦察员，虽不能进入敌阵地，却可测出敌我阵地之间的距离，他们是怎样计算的？不过河，怎样测出河对岸烟筒的高？怎样测出河面的宽？然后指出：这些问题都可运用“解三角形”的知识得到解决。

再如，讲授“直角坐标系”时，教师可首先让学生打开课本，翻到某一页：“谁能告诉我，这页第三行，第四个字是什么字？”再出示一张电影票：“给你这张电影票，你是怎样找到自己的座位的？”当学生从这些实例中领悟到“两个有序实数可以确定平面内点的位置”时，教师再讲解“直角坐标系”，已是水到渠成了。

实例式引入新课，能够达到直观易懂的效果。应注意实例与课题内容的一致性。

5.类比式引入

类比法是探求新知识的有力工具。物理学家开普勒说：“我珍视类比胜于任何东西，它是我最可信任的老师。”类比法用于导入新课，有利于学生搞清新旧知识的区别和联系，有利于知识的迁移，有利于培养学生的探索发现能力。

例如，讲授“三角形相似的判定”，全等三角形实质上就是相似比为 1 的相似三角形，二者是特殊与一般的关系。因此，在导入新课时，教师可先让学生提出三角形全等的判定定理，引导学生类比推出三角形相似的条件。

其他，如学习“分式”时，可从“分数”引入；学习“根式的基本性质”，可从“分式的基本性质”引入；学习“一元一次不等式”可从“一元一次方程”引入等等。

必须注意，类比虽然是一种主要的推理方法，但由此得出的结论不一定可靠。对于类比推出的教学概念、公式、定理，注意给出严格的定义和论证，求同存异，防止混淆。

6.探究式引入

发现式的学习，不但使学生获得的知识意义丰富，印象深刻，而且能有效地发展学生的智力，教师可设计一些实验，创设问题情境，引导学生自己去观察、归纳、发现规律，掌握知识。

这是青浦县的一堂教改实验课。课题：用拆添项法分解因式。教师先在黑板上出示一题：x^6-1。要求全班学生笔练，并请两名学生板演。学生很快发现，用“平方差公式”和“立方差公式”分解，竟得出两种不同的答案：

解法一：$x^6-1=(x^3)^2-1=(x^3+1)(x^3-1)$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$；

解法二：$X^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$

$=(x+1)(x-1)(x^4+x^2+1)$

“一定是谁做错了。”老师笑而不答。学生复查、验算——两种答案都没有错！

惊奇、议论、思考。一些学生提出猜想：“也许那个四次式还能分解，得到两个二次式的积，答案不就统一了？”要验证这一猜想的关键恰恰是折项分解因式。

又如，讲“三角形的内角和定理”时，可先让学生剪拼三角形纸片，发现“任意三角形的内角和等于 180°”的规律。

探究式引入新课，要求教师有较高的教学艺术，其要点是精心创设问题情境，形成教育心理学上所谓“认识冲突”，使学生在注意最集中、思维最积极的状态下学习。

7.趣味式引入

从与新课有关的名人轶事、历史典故、趣味数学题、数学游戏等趣味事例出发，引入新课，能拨动初中生的好奇心，使他们一开课就精神饱满，在迫切要求下学习。

例如，有位教师讲“对数计算”，先拿出一张白纸：“同学们，它的厚度约为 0.083 毫米，对折三次，厚度还不到 1 毫米，要是对折 30 次，它的高度大约有多少？”学生纷纷估计，老师说：“我计算的结果，那厚度将超过十座珠穆朗玛峰的高度。”学生什 1 很惊讶，感到新鲜有趣。有的开始试算：0.083×230。可是，这 2 的 30 次方要算多久呀！“如果我们学会了对数计算，很快就能得到正确结果。”老师因势利导，随机讲起对数表的构造、查表方法……

再如，有位老师采用数学游戏“猜你心中的数”导入新课：一元一次方程。他要求学生先想好一个数，不论怎样的加减乘除一系列运算，只要把运算的结果告诉老师，老师都能猜中学生心中是什么数。当学生被老师的“神机妙算”迷住时，老师不失时机地泄露“天机”：“奥妙就在我们将要学习的一元一次方程里”。

趣味式引入新课，必须符合数学本身的科学性，违背科学性的引入，尽管非常生动、非常有趣也不足取。

8.纠错式引入

针对学生学习中出现的错误，精心设计有针对性的练习题，上课开始，让学生先练习，再分析，使大家明了错在何处，为什么错，这样，既加深了学生对旧知识的理解，又为学习新知识扫清了障碍。

例如，在一次“对字母的取值要注意讨论”为内容的练习课上，老师先出一题，让大家计算：

解不等式：$-x(x+5)^2>3(x+5)^2$

结果大部分学生由于忽视 $x\neq-5$，而得出错误答案 $x<-3$。教师指出：“象这样，由于忽视对字母取值范围的讨论而使解题不严密，是大家常犯的错误，它的表现是…”

纠错式引入新课，适合于许多数学练习课或例题讲授课，但要注意避免造成“先入为主”的不良后果。

导入新课的方法，当然不止这些。怎样导入新课，必须根据教学目的，教学内容和学生的具体情况而定。要注意课堂教学的整体设计，把导入新课视为一环，不论何种形式，都要简明、紧扣课题，切忌拖泥带水，喧宾夺主，影响正课进行。

数学课堂结尾七法

一篇优秀的艺术作品，有引人入胜、情趣盎然的开头，跛宕起伏，扣人心弦的中局，耐人深思、余味无穷的结尾。我们的数学课堂教学也和艺术作品一样，一节课的教学效果与本节课的开头、中局结尾有密切的联系。而在实际教学中，许多教师较为重视一节课的开头和中局，忽视课堂教学的结尾环节，形成一个良好的开端、粗劣的结尾，没有达到有始有终的目的效果。

浙江云和县教研室叶朝晖老师总结七种课堂结尾法。

1. 自然结尾法

有的教师讲完课后说一句：“今天的课就教到这里”。布置作业后就下课了。这是结尾方法中最平庸低劣的一种方法。这种方法好似风过树静成为自然，没有充分利用课堂结尾来升华、深化课堂教学内容，使学生形成新的认知结构和能力结构，反而会使学生产生一种失落的、松懈的情绪，久而久之，会淡化课堂气氛，学生对教师的信任感会降低，不利于对学生的智力开发和思维能力的培养。

2. 归结结尾法

一课堂结束前，留几分钟时间对本节的重点、难点、关键等，引导学生进行简明扼要的有条理的小结归纳，不但能引起学生的注意、还可以促进学生的记忆，使他们在课后能有思绪地去琢磨、消化吸收。把本节知识纳入原有知识结构、形成更高层次的认知结构，从而发展了能力。

如在讲授“证明三角式”时，课尾应小结归纳一下证明方法思路：观察待证三角式的左右两边，方法是由繁的一边向简的一边化（证）去，即左→右或右→左。若是两边都繁，那么两边都化简成某一结果，即左右夹攻：左→右 f（a）。

学生在学习“三垂线定理”时，常把“三垂线定理”与“三垂线定理的逆定理”弄混了。为了避免这一错误，我在教学“三垂线定理”后，结合模型，小结归纳为“线影垂直→线斜垂直”。（这里的“线”是指平面内的一条直线，“影”是指斜线在平面内的射影，“斜”是指一条斜线）这样既形象又简单、学生反映好理解、易记忆。这样不需教师讲解，学生也会很易得出“三垂线定理的逆定理”是“线斜垂直→线影垂直”。

归纳结尾法是一种常用的重要方法。

3. 首尾呼应法

一堂好的课，一般都能注意到首尾连接，前后呼应。有因有果，浑为一体，形成一种整体感，使学生对知识形成系统结构。

如教学“函数奇偶性”时，教师讲述了奇偶性的定义后，举了几个例子进行奇偶性判断，教师应因势利导，留一定时间进行课尾小结深化，达到首尾呼应：

1. 符合什么条件的函数是奇（偶）函数？（让学生回答小结，形成首尾连接）

2. 由 f（-x）=-f（x）或 f（-x）=f（x）可以看出奇偶函数的定义域在数轴上的特征？（启发学生由（-x）→（x）得出关于原点对称，形成前后呼应、深化理解）。

3. 判断下列函数的奇偶性：

（1）f（x）$=x^2$，x∈〔0，2〕，

（2）f（x）= 2x-1，x∈R，

（3）f（x）=x^3，x∈〔-1，2〕，

（4）f（x）$=x^{\frac{1}{2}}$

（5）f（x）=0，x∈R，

（6）f（x）=a（a/≠0，x∈R）。

4.按奇偶性定义，函数可分为奇、偶、既奇又偶，非奇非偶四种。（首尾呼应，有因有果、浑为一体，形成一个整体）。

4.讨论结尾法

当教师讲完一节内容后，根据本节内容及以前所学知识，提出一个能深化理解、掌握概念和技能的问题，让学生去讨论，老师不要给以判断，让学生的思维自由展开，这样的结尾有益于发展学生的思维，而且能增强其求知欲，使课堂教学在活泼的气氛中结束。

例如讲完求函数的定义域后，为了加深对函数概念的理解，课尾可布置“已知 y=f（x）的定义域是 0＜x＜1，求 f（x-2）的定义域”。让学生讨论思考。

又如对复数的三角形式 r（cosθ＋isinθ）的本质属性的认识，需一个逐步深入的过程。在教学复数三角式后，教师可提出以下几个字母讨论题让学生讨论，对加深理解复数三角式的本质属性是有好处的。

（1）把 1-cosθ＋isinθ（θ∈R）化成三角形式

（2）把复数$a+\sqrt{2}ai$（a∈R）化成三角形式。

（3）把复数 a＋bi（a， b∈R）化成三角形式。

（提示：分 a=b=0；a=0，b＞0；a=0，b＜0；a＞0， b=0； a＜0，b=0；a＞0， b≠0； a＜0， b≠0 等七种情况讨论。）

5.引优结尾法

一堂课好的结尾，可以使学生急于求知下面的知识，如同章回小说或电视连续剧，当情节发展到千钧一发之际，嘎然来个“且听下面分解”，把观众的胃口牢牢引住，且隐伏着故事发展的各种情况，可使观众的想象自由展开。

数学课应用此法，也能收到好效果，如在教学不等式的证明，讲解利用公式 a＋b≥2ab 求最小值后，教师可举下例：“已知 x∈（0，π），求 $\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}$的最小值”。许多学生由于受“a＋b≥2 ab”的思维迁移，很快得出最小值是 2。适时的引发能激发思维火花，鼓起学

习兴趣。教师启发学生分析解题过程，达到最小值的充要条件是$\frac{\sin x}{2}=\frac{2}{\sin x}$，

即$\sin^2 x=4$，但这是不可能的，也就是最小值不会在此取得。又有一些学生

应用判别式法求之：令$y=\frac{\sin x}{2}+\frac{2}{\sin x}$，整理得$\sin 2x-2y\sin x+4=0$，∵sinx ∈（0，1）。∴△=$4y^2$-16≥0，y≥2，殊知，y=1 时，$\sin^2 x-2y\sin x+4=0\to \sin x-2=0$，即 sinx=2，也不可能。所以上述两种解法均是错误的。正确的解法留给同学去思考。下节课再讨论。

6.竞赛结尾法

老师在课堂将结束时，安排一定时间，根据课本内容进行一些小型竞赛，

这种方法可以将学生的情绪推向一个新的高潮，使其振奋鼓舞。但需要注意两点：一是教师命题要着重基础、有启发性的问题，要使大多数学生可望可及，才能激起兴趣。二是要及时反馈、回授、矫正、使学生在竞赛中得到提高、启发和巩固。

7.预告结尾法

一般地，在教完一个单元后，除给以总结复习、测试之外，我们还可以在复习课后，把下一单元要学习的内容给以预告，使学生对上、下单元知识联系、知识要点有一个初步的了解、好象看电影之前，先了解一下电影介绍，这对学生形成知识结构和整体思想是颇有帮助的。

展示教学目标的七种设计方法

在目标教学中，展示目标是课堂教学的重要环节，教与学的活动自始至终都应围绕着教学目标展开，以目标为师生双边活动的结合点，调控教学。目标展示的恰当与否直接影响着学生达到目标的程度和教学质量。因此，在教学中，教师要合理选用展示目标的方法，对不同的教学内容采取或直接、或间接等不同的展示目标的方法，以激发学生的主动参与意识。银川唐徕回中武斌老师总结介绍了课堂教学中展示教学目标的几种方法如下：

1.开门见山法

根据具体的教学内容，有时采取直截了当的展示目标方法。例如，在方差的简化计算的教学中，就简化计算公式的推导，直接展示教学目标：了解方差的两个简化计算公式的推导过程。

2.温故知新法

在展示新的教学目标之前，先引导学生温习已经学过的旧知识，从而获得新的发现或体会。例如，在讲用换元法解无理方程时，先复习用一般方法（移项，两边平方）解较简单的无理方程。

如：解$\sqrt{x-3}+3=x$，紧接着可提问：这一方程是否还有其他解法？引导学生移项并依据根式的有关概念及性质，将此方程化成$\sqrt{x-3}-\sqrt{(x-3)}^2=0$的形式，再设$\sqrt{x-3}=y$，则原方程变为：$y-y^2=0$。接着，展示新目标：会用换元法解无理方程。这种展示目标的方法，可“温故而知新”，激发学生探求数学规律的强烈欲望。

3.归纳揭示法

一般多用于由问题而引入的新课教学。教师在学生对问题的分析与理解的基础上，归纳揭示题目的要点，展示教学目标。

例如，在讲正比例函数的定义时，从例题“一个物体作匀速运动，如果它的速度是 1.5 米/秒，那么所用时间和所走距离是什么关系？为什么”开始。在学生积极思考的基础上，列出下表：

时间	1	2	3	4	5	…	t
距离	1.5	3	4.5	6	7.5	…	s

并指出：如果一个量的任意两个数值的比，等于另一个量所对应的两个数值的比：1：t=1.5：s 即 s=1.5t，那么就说 s 与 t 成正比例关系。再将上例中的速度改为-1.5 米\秒，使正比例定义得到推广，之后，强调指出：表达式中 s 与 t 成正比例；比例系数可为正数，也可为负数。接着展示目标：正确理解和识记正比例函数的定义。

4.设问法

为了突出教学重点，突破难点，抓住教学关键，为了更深入地认识教学内容的重要性，教师有时需要采用无疑而问的方式巧妙地展示目标。

例如，在讲直线和平面平行的性质时，如图所示：

$a /\!/ \alpha$，$a \subset \beta$，$\alpha \cap \beta=b$，围绕目标，提出以下问题，启发学生深入思考，从而增强目标意识：a 与α相交吗？也就是有没有公共点？a 与 b 有没有公共点？a 与 b 是异面直线吗？通过上述几个问题，引发学生对问题深刻认识，从而得出结论。接着展示目标：识记、理解直线与平面平行的性质，

并会应用它解决有关问题。

5.悬念情境法

指让学生明确学习新知识的目的在于要利用它解决问题。例如，在讲等分圆周时，课前事先准备一幅美丽的五角星图案。教师出示五角星图案后问学生：如何画出一个五角星呢？这节课就研究这一画法。接着展示目标：了解用量角器等分圆周，并会用近似法画五边形；能画出五边形，就可以画出五角星。

6.承前启后法

指在承接以前学过的旧知识的同时，开创学习新知识或解决新问题的途径的方法。

例如，在讲授解较复杂的无理方程的解法时，先运用直接平方或移项后再平方的方法解简单的无理方程$\sqrt{2-x}=x$或$x+\sqrt{x-2}=2$，再作如下引申："如果含有未知数的根式有两个或三个的无理方程，能否直接平方或移项后再平方解呢？"给出方程：(1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}=2$；(2) $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2x-3}$。启发学生尝试这两个方程的解法：

方程(1)可用移项后再平方转化为简单的无理方程方法来解，而方程(2)既可用直接平方法又可用方程(1)的解法解。接着，展示教学目标：会解较复杂的无理方程。

7.讨论法

在指导学生对某些教学内容进行讨论后，在即将得出结论时，展示目标。

例如，圆内接四边形判定：已知四边形ABCD中∠B＋∠D=180°，那么四边形ABCD是否内接于圆？指导学生讨论：A、B、C三点确定一圆，则第四点D是否在此圆上？通过讨论，使学生认识到点D若不在此圆上，不论在圆内或圆外，均不符合圆内按四边形的性质或已知条件，接着，展示教学目标：掌握圆内接四边形的判定或判定四点共圆。

展示目标的方法还有课前预习目标展示，课后总结、归纳目标展示等方法。总之，目标展示要服从教学目的和任务，使教与学融为一体。

数学思维情境设计六法

国家教委颁发的九年制义务教育全日制初中数学教学大纲（初审稿）在教学目的中提出：初中数学教学中发展学生思维能力主要是逐步培养学生会观察、分析、综合、比较、抽象和概括，能够运用归纳、演绎和类比的方法进行推理，逐步做到简明地阐述自己的思想和观点，注意培养良好的思维品质。在教学中，如何去实现这个目的呢？这里仅就概念、定理、公式等教学中如何发挥教师的主导作用，为学生创造良好的思维情境来谈一些看法。

学生获取新的知识，必须通过自己的思维。良好的情境设计，能为学生铺设思维通道，加速了思维的进展，从而提高教学效率。

湖南省冷水江市教研室张宝菁老师总结了常用的下列情境设计方法：

1.变静止为运动

有些概念，包含了所属的多个名词，同时还与位置形状有关。如学习“圆周角”这一概念，教科书上的定义是：顶点在圆上，其它两边与圆相交的角叫圆周角。这里有角的顶点位置的规定，还有两边位置的规定，符合这几个条件的角才是圆周角。为了引起学生兴趣启发学生全面考虑问题，可以设计这样一个情境：用两条硬纸片与一个图钉做成一个“活动的角”，分别作下列演示：顶点在圆周内（外），是否为圆周角？顶点在圆周上，当角的两边变化时，什么时候所成的角才是圆周角？

有时，变静为动能够深刻认识定理的内在的变化规律

如在指导学生认识“同位角相等，两直线平行”这条公理时，可以设计如下的教学程序：l_1，l_2，l_3分别交于 A、 B、C 三点，此时，∠2＞∠1，当 l_3绕 A 点转动时，观察∠2 与∠1 的大小变化规律，同时观察 l_3与 l_1的交点 B 的位置变化规律，如下图所示：

①∠2 逐渐减小，B 点向左逐渐远离 C 点；②∠2 减小到等于∠1，B 点在 l_1上消失；③∠ 2 减小到小于∠1，l2 与 l_1在 C 的右方相交于 B 点。变静为动还能揭示相关定理之间的联系，这里就不举例了

2.集部分为整体

在求线段、角的和时，常常进行集部分为整体的设计。如证三内角和定理时，就可用硬纸板作成三角形模型，用拼凑法集三个角为一个平角。下面是较成功的教学设计：

先启发学生用图 3 的方法作出三个角之和，依次提出以下问题：

和角的顶点：①可以是三角形的另两个顶点吗？（图 4）②可在三角形的边上吗？（图 5）

③可以在三角形内吗？（图 6）

④可以在三角形外吗？（图 7）

所有这些不同的方法，有什么共同规律？

a.方法：集部分为整体。

b.手段：平移。

c.根据：平行线的同位角或内错角相等。

d.和角顶点位置：可以不定，但以三角形的顶点位置最好。

3.从特殊到一般

从特殊到一般，普遍运用数学的思想和方法。

例如在推导坐标平面内两点间的距离公式时，下面的情境设计是可取的：

先观察图形，由于 P_1 与 P_2 之间的距离一下难以解决，我们从特殊的位置关系开始分析。①如果 P_1、P_2 同在 x 轴或 y 轴上，能求出 P_1P_2？②如果 P_1 在 y 轴上，P_2 在 x 轴上，能求出 P_1P_2？（容易想到勾股定理）。③如果 P_1 在第一象限，P_2 在 x 轴，能求出 P_1P_2？

通过以上三种特殊情况的分析，学生就容易求出坐标平面内任意两点间的距离了。

从特殊到一般的认识过程符合人的认识规律，遵循了循序渐进的教学原则。

4.用图表形式编制学习程序

<table>
<tr><th>过点数</th><th>圆心位置</th><th>圆心个数</th><th>半径个数</th><th colspan="2">作圆个数结论</th></tr>
<tr><td>一点 A</td><td>整个平面</td><td>无穷多个</td><td>无穷多个</td><td>无穷多个</td><td rowspan="3">不在同一
直线上的三点确定
一个圆</td></tr>
<tr><td>两点
A、B</td><td>AB 的
中垂线</td><td>无穷多个</td><td>无穷多个</td><td>无穷多个</td></tr>
<tr><td>三点 A、B
C</td><td>AB、BC（或
AC）中垂
线的交点</td><td>可能有一
个（三点不
在同一直
线上）
可能没有
（三点在同
一直线上）</td><td>一个

无</td><td>一个

无</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>过点数</th><th>圆心位置</th><th>圆心个数</th><th>半径个数</th><th colspan="2">作圆个数结论</th></tr>
<tr><td>四点 A、B
C、D</td><td>AB、BC
CD 的交点</td><td>可能有一
个（当 D 在
A、B、C 三
点确定的
圆上时）
可能没有
（当 D 不在
A、B、C 三
点确定的
圆上时）</td><td>一个

无</td><td>一个

无</td><td>四边形的
对角互补
时内接于
圆</td></tr>
</table>

在研究不在同一直线上的三点确定一个圆时，可以用上列图表揭示规律：

5.制作思维模式

在平面几何的论证题中，现在选用的例题与习题最多只有三步推理，因此，在引导学生思维时，就可利用一些思维的模式，有些可以整理成歌诀。比如

遇等积，变等比，

横找、竖找定相似；
不相似，忍住气，
等积等比来代替。
遇等比，改等积，
使用射影与圆幂；
平行线，换比例，
两端各自找联系。

例如，由平行四边形 ABCD 的顶点 B 任引一直线与对角线 AC 交于 F，与 CD 交于 G，与 AD 的延长线交于 E，求证：BF2=EF · FG。

分析　要证乘积式，转化为证比例式：

$$\frac{BF}{EF}=\frac{FG}{BF}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB /\!/ CD \Rightarrow \dfrac{FG}{BF}=\dfrac{FC}{AF} \\ BC /\!/ AD \Rightarrow \dfrac{BF}{EF}=\dfrac{FC}{AF} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{FG}{BF}=\frac{BF}{EF}$$

启示（制作思维模式）

要证 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，可先证 $\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$， $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$。

在其它的命题中，可以得到另一个思维模式；要证 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，可是证：

$\frac{a}{b}=\frac{c}{f}$，再证 $d=f$。

6.不要只给学生创设忧解的情境，还要学生了解问题解答的“难处”

例如对下列几何题的教学，可作如下教学设计：

题目如图 9，GE 与 HF 将矩形 ABCD 分成三个边长都是 a 的正方形，求证△AEF∽△CEA。（初中《几何》第二册 P67）

（1）一个简捷的证明

只要同学们有一定的观察能力，能找出△AEF 与△CEA 的对应边与对应角，就很容易想到先求出夹公共角两边的长度。用“对应角成比例且夹角相等”的定理来证明。

证明 由 $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}$ ＝2a。

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \dfrac{EC}{AE}=\dfrac{2a}{\sqrt{2}a}=\sqrt{2} \\ \Rightarrow \dfrac{EA}{EF}=\dfrac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{EC}{AE}=\dfrac{EA}{EF} \\ \angle AEF=\angle CEA \\ \Rightarrow \triangle AEF \backsim \triangle CEA \end{array}\right\}$$

（2）避免谬误的证法

有同学给出这样证明：

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=10a$，

$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=5a$，

$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=2a$，

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AC}{AF}=\dfrac{CE}{AE}=\sqrt{2}\\ \angle AEF=\angle CEA\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \triangle AEF \backsim \triangle CEA$。

这个证法的错误在哪里？与上面的证法比较，错就错在相等的角不是两组成比例的对应边夹角。

如果一定要用此法证，有什么方法来补救吗？有的，加上一个说明：“∠AEF 与∠CEA 相等且都为钝角”就行了。也就是说：如果两个三角形都是钝角三角形或者都是锐角三角形，相等的角不一定是夹角，两个三角形也相似。

（3）其它一些好的证法

如果要证明（除公共角外）第二组角相等，还是有办法的。就是考虑图中线段之间的长度关系，用正弦定理或余弦定理证另一组角相等。若用正弦定理：

$\triangle AEF$中，$AE=\sqrt{2}a$，$AF=\sqrt{5}a$，由$\dfrac{AE}{\sin\angle EFA}=\dfrac{AF}{\sin\angle AEF}$，得

$\sin\angle EFA=\dfrac{AE}{AF}\sin\angle AEF$

$=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\sin\angle AEF$。

在$\triangle CEA$中，$AC=\sqrt{10}a$，$CE=2a$，又

$\dfrac{CE}{\sin\angle EAC}=\dfrac{AC}{\sin\angle AEF}$

$=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\sin\angle AEF$

∵∠EAF 与＜ECA 都是锐角，

∵∠EAF=∠ECA。

（4）小结

要完成此题的证明。无论用哪种证法，都必须用到三个边长为 a 的正方形组合成矩形图形这一特点，都必须运用图形中一些线段的长度求出相应的另一些线段的长度。否则要想证明此题是不可能的。

还有一些方法如数形结合，设未知为已知，一题多解，一题多变等，都是老师们常用的情境设计技巧。

以上所述各种情境设计方法，都是从某一个角度提出来的。其实它们之间互相联系，都遵循着教育学与心理学的基本原理。提法不妥之处敬请老师指正。

“有理数乘法法则”教案设计

【课题】有理数的乘法法则

【教学目的】

1.使学生理解有理数乘法的意义，掌握有理数乘法的运算法则，会进行有理数的乘法运算。

2.渗透数形结合的数学思想。

【教具】两块小黑板（预先画好）。

【教学过程】

一、设置问题，引入新课

问题：一辆玩具汽车每次运动 a 米，运动了 b 次，一共运动了几米？

如果 a、 b 都是算术数（正有理数和 0），我们很容易计算出运动的结果。引入负有理数之后，又怎样进行乘法运算呢？今天我们就来学习有理数的乘法法则。（板书课题）

二、探求规律，归纳结论

1.铺路：

提问：一个有理数由哪两部分组成？

因此，有理数的乘法也与加减法一样，既含有绝对值的计算，又包括符号运算。现在规定：

（1）向东运动，a 为正；向西运动，a 为负。

（2）沿与 a 相同的方向运动，b 为正；沿与 a 相反的方向运动，b 为负。

2.探求规律：

（1）提问：根据这种规定和上面的题意，下面算式中的 a、b 各表示什么意义？其结果应是什么？

（＋2）×（＋3）　　　　　　　　(-2）×（+ 3)

根据学生的回答情况，适时拿出小黑板一，加以启发引导或验证。注意强调：+3 与 a 同向运动 3 次。

然后再引导学生共同归纳出：

①有理数乘法的意义仍是求几个相同加数的和。

②当乘数为正数时，积与被乘数同号。

（2）当乘数为负数时，积的符号与被乘数又有什么关系呢？请看：

（＋2）×（3）（2）×（3）

提问：-3 表示什么意义？这两个算式的积各是什么？

根据回答情况，适时拿出小黑板二，进行启发引导或验证。注意强调：-3 表示与 a 反向运动 3 次。

然后师生共同归纳出：当乘数为负数时，积与被乘数异号。

现在我们归纳一下上面的两种情况。请看：（＋2）×（＋3）=+6，（-2）×（-3）=+6，而（-2）×（+3)

=-6。从这两组算式中，你能总结出什么结论？想好以后，再和教科书 92 页上的黑体字对照，并记住这一法则。（稍停片刻，将有理数乘法法则板书在黑板上。）

最后，还有一个问题需要解决。那就是：法则中为什么说任何数同 0 相乘都得 0？要解决这个问题，我们先想一想，a 等于 0 或 b 等于 0 各表示什么意义？

a 为 0，表示原地不动；b 为 0，表示设有运动。因此，不论 a 等于 0 还是 b 等于 0，结果小汽车仍是在原处。

4.例题示范：

例计算：

（1）（-3）×（-9）；

（2）（$-\frac{1}{2}$）×$\frac{1}{3}$。

解：有理数乘法按照法则应分两步完成。第一步是确定符号，第二步是计算绝对值。

解：（1）（-3）×（-9）=+27；

（同号得正，3×9）

（2）（$-\frac{1}{2}$）×$\frac{1}{3}$ = $-\frac{1}{6}$

↑↑

（异号得负，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$）

三、巩固练习

教科书第 93 页练习：

1.第 1 题口答。

2.第 2 题让 4 名学生板演。

根据学生解答中出现的问题与巡视中发现的问题，让学生相互纠正，并强调要说明理由。必要时由教师讲解。

四、总结

1.有理数乘法的意义。

2.有理数乘法的法则。

3.讲数学历史知识和小故事。

关于“同号得正，异号得负”还有一种解释。我国是世界上最早使用负数的国家。在我国使用负数之后，阿拉伯人也发明了“+”、“-”号。阿拉伯人在发明“+”、“-”号时，是把正号当作朋友，负号当作敌人来考虑的。当时对“同号得正，异号得负”的解释分别是：朋友的朋友还是朋友，敌人的敌人也是朋友；而朋友的敌人和敌人的朋友则都是敌人。

五、布置作业

1.阅读课文，熟记有理数乘法法则。

2.书面作业：教科书第 98 页习题 2.8 的 A 组第 1、2、3
题。

（张元凯）

“去括号”目标教案设计

【学习目标与习题分类】

（一）学习目标

A（了解）能说出去括号的法则。

B（理解）①知道去括号在整式运算中的作用；

②能根据去括号法则正确地去括号；

③能根据去括号的法则，判断去括号是否正确。

C（掌握）①能运用去括号法则去掉多层的括号；

②能正确地运用分配律去括号和合并同类项，化简代数式，并求出相应的值。

（二）习题分类

B 练习［P.158］1，2，3（1）（2）；习题　［P.161］3.3A 组 1（1）（2）。

C 练习［P.158］3（3）（4）；习题［p.161］1（3）（4）（5）（6），2，3，4.

（注：对于学习内容包括练习内容的目标，不单教师要求明确，学生更应明确，一方面可以按程度选做不同层次的题目，而且还明确指出努力的方向，看到自己的进步，这是产生兴趣、调动积极性的第一步。）

【学习活动】

1.用“=　”号或“≠”号连结下列各组中两个式子：

（1）　13＋（7-5）与 13＋7-5。

解： 13＋（7-5）=13＋2=15，

13＋7-5=20-5=15。

∴13＋（7-5）=13＋7- 5。

（2）9a＋（6a-a）与 9a＋6a-a。

（3）13-（7- 5）与 13- 7＋5。

（4）　9a-（6a-a）与 9a-6a＋a。

2.观察上面运算的结果，我们有：

13＋（7-5）=13＋7-5；

9a＋（6a-a）＝9a＋6a-a；

13-（7-5）=13-7＋5；

9a-（6a-a）=9a-6a＋a。

根据这些事实填空：

（1）　4 个等式从左边到右边是从____括号到____括号的运算；

（2）括号前面是“+”号时去括号法则是：把括号和它前面的“＋”号去掉，括号里各项的符号____；

（3）括号前面是“-”号时的去括号法则是：把括号和它前面的“-”去掉，括号里各项的符号____；

3.听教师讲解或自己阅读课本 P.156～157 例 1 前的课文,核对你上面的结论，记住去括号的法则，然后做练习：

（1）　a＋（b-c）=

（2）　a（-b＋c）＝

（3）　a＋（-b＋c-d）=

（4）$a-(-b+c-d)=$

4.听教师讲解或自己阅读课本 P.157～158 例 1～例 3，核对上面的结论，并注意书写格式，然后做下面的练习：

（1）$(a+b)+(c+d)$。

（2）$(a+b)\ (-c-d)$。

（3）$(a-b)-(-c+d)=$

（4）$-(a-b)+(-c-d)$。

5.下面的去括号有没有错误？如果有错，请你改正：

（1）$a^2-(2a-b+c)=a^2-2a-b+c$。

（2）$-(x-y)+(xy-1)=-x-y+xy-1$。

6.化简：

（1）$5a+(3x-3y-4a)=\qquad=$____。

（2）$3x-(4y-2x+1)=\qquad=$_____。

（3）$7a+3(a+3b)=\qquad=$____。

（4）$(x^2-y^2)-4(2x^2-3y$。

（5）$a-(2a+b)+2(a-2b)$。

（6）$-5x^2+(5x-8x^2)-(-12x^2-4x)+\frac{1}{5}$。

（7）$2a-3b+[4a+(3a-b)]$。

（注：去多层括号时，就像解有括号的式题一样，先去小括号，再去中括号，最后去大括号。）

（8）$3b-2c-[-4a+(c+3b)]+c$。

7．小结：

①按本课教学目标进行检查；

②去括号的法则是把括号连同括号前的符号一齐去掉，但要注意根据括号前的符号决定去括号后括号内各项的符号，特别是括号前是“-”号的情况；

③要注意多项式的运算与有理数的运算不同之处，首先是化简时必需去括号。

（注：在学习活动的过程中，必需突出知识发生过程和知识发生过程的探索化，突出学生参与教学全过程和参与（尤其是思维参与、操作参与）的信息反馈，突出加强一节课内学生思维和操作的频率，以求达到知识内化的充分储备。）

【达标训练备选题】

1.选择题：

（1）把$-(a-b)-c$去括号后得（　　）。

（A）$-a-b-c$　　（B）$a+b-c$

（C）$-a-b+c$　　（D）$-a+b+c$

（2）下面的式子中，哪一个去括号后得 $a-b+c$？（　　）

（A）$a-(b+c)$　　（B）$-(a-b)+c$

（C）$a-(b-c)$　　（D）$-(a+b)=c$

2.填空：

（1）$(2a-3b)+(5x+4y)=$____；

（2）$(8a-7b)\ (4x-5y)=$____；

（3）$3(5x+4)-(3x-2y)=$____。

3.化简：

(1) $(8x-3y)-(4x+3y-z)+2z$；

(2) $2-(1+x)+(1+x+x^2-x^3)$；

(3) $3a^2+a^2-(2a^2-2a)=(3a-a^2)$。

4.求下列各式的值：

(1) $5x^2-(3y^2+7xy)+(2y^2-5x^2)$，其中 $x=0.1$，$y=-0.2$；

(2) $(5.2a^2-3.4ab+8a^3)+2(2.2ab-4a^3-2.6a^2b)$，其中 $a=-2$，$b=5$。

5.三个植树队，第一队种树 x 棵，第二队种的树比第一队种的树的 2 倍少 25 棵，第三队种的树比第一队种的树的一半多 42 棵，三个队共种树多少棵。

6.化简：

(1) $(8x-3y)\ [7x-(6y-2z)]+2z$；

(2) $5a^2-[a^2+(5a^2-2a)\ 2(a^2-3a)]$。

［注：课外练习，一是使不达标的学生重新达标，二是使学生进一步巩固所学知识，初步形成技能。教师的主导作用不单体现在课堂上，更要体现在课外，在课外求得巩固所学知识，形成技能的最高频率。本课时安排的题目不是每个学生都必须完成的，要给不同层次的学生订出不同的达标层次；要体现努力的方向，以使不同程度的学生都能在原基础上学有所得；要采取不同的形式（包括变式，突出关键部分等方法），努力处理好教科书上的练习和 A、B 组习题。这节课时还有 A 组的 5、6 两题留待练习课编入。］

（郭鸿 吴占华 吕体泉）

“去括号”变式教案设计

在整式的加减计算中，“去括号”是学生必须认真学好的一项基本技能，是今后学习代数式变形及混合计算的重要基础，但是怎样熟练而又灵活地掌握它呢？除了要牢固地学好课本要求的去括号法则外，宜在以下三个方面对学生进行训练，使其对去括号这一基本技能获得完整的认识，进一步提高运算能力。

一、举例说明在整式的加减计算中，去括号的顺序与代数式的值无关。

例 1 化简：

5a-｛5a＋〔4b＋（2a-b）〕-4b｝

解法一：原式=5a-｛5a＋〔4b＋2a- b〕-4b｝

=5a-｛5a＋2a＋3b-4b｝

=5a-7a＋b=-2a＋b

解法二：原式=5a-5a-〔5b＋（2a-b）〕+4b

=-4b-（2a-b）+4b

＝2a＋b

解法一是先从去小括号开始，从内层到外层逐步去掉所有括号的。解法二是先从去大括号开始，由外层到内层逐步去掉所有括号。相比之下，解法二显得简便。由于例 1 中代数式本身的特点，先去掉大括号后，有些项相互抵消，重复运算的环节减少，因而运算层次减少。因此，我们在遇到这一类化简题时，应先观察题目本身的特点，决定去掉多层括号的顺序，以求得简便。

二、括号外有数与之相乘，去括号时，应将括号前的正数（或负数）乘以括号内各项，一次去掉括号。

例 2 去括号：-2（a-b）

解法一：-2（a-b）=-（2a-2b）

=2a＋2b

解法二：-2（a-b）=-2a＋2b

解法二比解法一少一个运算层次。

例3 化简 $-2（x^2+1）-\frac{5}{2}（x-5）+\frac{1}{4}（4x^2-2x）〕$

用解法二：原式 $=-2（x^2+1）+5（x-5）-\frac{1}{2}（4x^2-2x）$

$=-2x^2-2+5x-25-2x^2+x$

$=-4x^2+6x-27$

类似例 3 的化简题，如果让性质符号与数字符号分离开分两次作用于括号，那么运算过程就必定冗繁累赘。不明白这一点，也是一些学生运算能力提不高的原因之一。

三、加减计算中所有的多层括号（指大中小括号）是可以一次去掉的。

既然各层括号前的+、-可以理解成数的性质符号，且去括号的顺序与代数式的值无关；进一步，由去括号法则知，只有括号前的负号对去掉括号后项的符号改变起作用，因而可用文〔1〕中的“奇变偶不变”口诀一次去掉所

有的括号，这就彻底简化了运算程序，减少了运算层次。

例4：$3x^2y+\{xy-〔3x^2y-（4xy^2+\frac{1}{2}xy）〕-4x^2y\}$（初中代数第一册 P113 1 (12)。）

分析：$+\frac{1}{2}xy$这一项在上式中单独写出来就是$+\left\{-[-(+\frac{1}{2}xy)]\right\}$，各层括号前总共出现的负号的个数为 2，根据“奇变偶不变”的口诀，这一项去掉所有的括号后应不变号，即$+\{-〔-（+\frac{1}{2}xy）〕\}=+\frac{1}{2}xy$，从而对这一项一次去掉了所有的括号，其余各项的处理方法完全一样。

解：原式$=3x^2y+xy-4x^2y-3x^2y+4xy^2+\frac{1}{2}xy$

$=-4x^2y+\frac{3}{2}xy+4xy^2$

解题时，从左到右对每一项用“口决”进行符号运算（完全用心算判定，不需写出来），第二步合并同类项，由例 4 可见，运算过程只有两步，简便易行，容易掌握。

在经过上述三个方面的训练后，学生对去括号的技能掌握得更加全面，能活而不乱，从而提高了数和式的变形、运算能力，这样的变式教学宜安排在复习和期末总复习中进行。

“先化简再来值目标递进式”教案设计

目标递进式教学设计，就是在备课时，根据大纲和教材确定一节课的教学目的，把这个目的分解成有一定逻辑关系的亚级目标，再按递进实现各亚级目标的需要设计有效的教学过程，这里“一定的逻辑关系”由学生的认知规律所确定，而对每一目标在要求上，对不同层次则不尽相同。

下例是利用谈话法实施目标递进式教学的一节例题课的设计，本设计共分五个亚级目标，其中第二个亚级目标是主体目标，它又分解为四个递进的子目标。

【教学内容】先化简、再求值（人教版九年制义务教育教材代数第一册P165—166）

【教学过程】

一、复习铺垫、创设情景

我们已经学习过求代数式的值和整式的加减，其中整式的加减也称化简，请同学们做下面两道题，看哪些同学做得既对又快。

1.计算：$\frac{1}{3}a-\left(\frac{1}{2}a-4b-6c\right)+3(-2c+2b)$．（P165例4）

2.当$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}$时，求代数式

$5(3a^2b-ab^2)-(ab^2+3a^2b)$的值．（P166 练习 2（2））

教师可有意导引几个学生对第 2 题先化简，并记录一些学生所用时间与错误答案；评讲时注意“-（　　）”与“+3（　　）”型错误。

【亚级目标 1，复习，使求代数式的值与整式加减的知识回复到应有的熟练与准确程度；形成产生“先化简、再求值”方法的土壤。】

二、体验琢磨、形成方法

做第 2 题时，有的同学直接把 a、b 的值代入代数式，结果计算时间长且容易出错，而有的同学，不急于求值，先化简代数式，这样既对又快，真是好方法，值得向全班推广。

明确方法、出示课题。

［亚级目标 2—1，体验新方法优越，有吸取不先化简的教初 I 的感受，我怎么就没有想到呢；并使独立发现方法的同学品尝到创造性思维甘甜】

下面我们一起完成第 2 题的解题过程：

解　……（原式）
　＝……（去括号）
　＝……（合并同类项）

一、化简（一般）

当$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}$时一（转化条件）

原式＝……（代值）
　＝……（计算）
　＝……（结果）

(特殊)
二、求值

【亚级目标 2—2，明确“先化简、再求值”解题方法，会实施方法】

学生练习，先化简、再求值：（P165 例 5）

$\frac{1}{2}x-2\left(x-\frac{1}{3}y^2\right)+\left(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2\right)$，其中$x=-2$，$y=\frac{2}{3}$。

要求做完后自己与例题对照矫正。

【亚级目标 2—3，熟悉方法，顺防 y 用方代替，.‘不给予加括号等错误再生】

独立练习：P166 练习 2（1）。

教学目的

A 层：了解先化简、再求值的形成过程及其优越性，能熟练运用，计算基本准确。

B 层：理解先化简、再求值的形成过程，深刻领会它的优越性，形成先化简意识，进行准确熟练的运算；并品尝创造性思维的甘甜。

快速练习：再用P165例4代数式，加上$a=1$，$b=-2$，$c=\frac{9999}{10000}$。

【亚级目标 2—4，自如、熟练运用方法解题，并通过例 4 与 C 无关进一步深化对先化简的认识】

三、理清脉络、同化上升

化简求值以前面学过的求代数式的值为基础，所不同的是这些代数式可以先化简，求值前应该先化简。

填空（每两空教师给一组答案供选）：

化简求值是对整式加减和求代数式值知识的综合运用，解题过程体现了由一般到特殊的转化，格式可分为两段，第一段是化简，第二段是求值，两段之间用一般到特殊的转化条件（如“当$a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{3}$时”）连结。

【亚级目标 3，明确新课就是旧知的综合运用，从而同化新知；并站在辨证唯物主义的高度来认识方法】

四、巩固练习、准确熟练

作业： P167A（9、 10、 11、 12）

【亚级目标 4，形成先化简意识，暴露还有可能出现的各种错误】

五、课外选做、深化发展

1.已知 $A=m^3-5m^2$，$B=m^2-8m+3$，$C=3m^2-2m-4$，

求当$m=-\frac{13}{22}$时，$A-[3B-(A-C)]$ 的值。

2.若 $m-n=4$，$mn=-1$，求$(-2mn+2m+3n)-(3mn+2n-2m)-(m+4n+mn)$的值。

3.若$x-\frac{1}{2}=0$，求$4x^3-(-6x^3)+(-9x^3)$的值。

【亚级目标 5，初步接触连续化简、化简换元和条件与代数式双双化简问题，深化先化简意识，获得发展。】

以上的教学设计模式是在目标教学的一系列理论基础上建立的，是克服教学目的性不强、不符合学生认知规律的有力措施，它能使教师主导作用和学生主体地位得到充分的体现。

在执教过程中，教师可以经常地自我评价，如亚级目标系列是否合理，包括它们的设置与顺序；实现每一亚级目标的措施是否得力；反馈调控是否恰当，包括信息交流的渠道是否畅通、教师对症结的判断是否准确、补救措

施是否得力等，在评价之中调控，在调控之中评价，能使教学过程趋于最优化。

把“目标递进”当做一种教学意识，适用于谈话以外的其它教法和例题课之外的其它课型。

“平方差公式（一）”教案设计

【教学目的】

1.使学生知道平方差公式是两个特殊多项式乘法的结果。

2.能运用平方差公式进行计算。

【重点和难点】重点是公式的应用，难点是符号的变换。

【教学过程】

一、新课引入

1.提问多项式的乘法法则。

2.用多项式乘法法则计算：

（1）（2x+y）（2x+y）；

（2）（2a-b）（3a＋b）；

（3）（1＋2x）（1-2x）；

（4） （a+b）（a-b）

二、新课

启发学生观察比较第（1）、（2）和（3）、（4）小题的乘式和结果有什么特点和规律，然后指出以后经常要遇到（3）、

（4）小题这种乘法，所以把这个结果

（a+b）（a-b）=（a2-b2）

作为公式，叫做乘法的平方差公式，（板书课题）

引导学生进一步分析这一公式的结构特征：

（1）公式的左边是两个二项式的乘积，在这两个二项式中，有一项是完全相同的，另一项是两个互为相反的数；右边是这两个数的平方差，注意这两个数的前后次序，在此基础上，引导学生用语言叙述出来：两个数的和与这两个数差的积等于这两个数的平方差。

（2）公式中的字母含义广泛，可以表示任意的一个数或单项式、多项式等。

让学生判断刚才计算的前 3 小题能否运用平方差公式，只有（3）小题符合公式条件。

（a＋b）（a-b）＝a^2-b^2

（1+2x）（1-2x）=（1）^{2}-（2x）^{2}=1-4x^2

为了避免错误，在熟练之前，应将结果用两“括号”的平方差表示，再往括号内填上这两个数，可以看出运用平方差公式可使计算快速、简便。

阅读课本第 111 页，划出重点。

讲例 1（1）时，着重让学生分析题目条件并如何用公式计算。

对（2）（b^2＋2a^3）（2a^3-b^2），着重引导学生发现：只需将（b2＋2a3）中的两项交换位置，就可运用平方差公式进行计算。在计算中注意结果字母的系数和指数。

接着做课本（人教版）第113页练习1（1）-（4）和（$\frac{1}{2}x+2y$）（$\frac{1}{2}$x-2y）。做完订正后，再板书课本第 112 页例 2，让学生观察乘式特点，能否运用平方差公式计算？需要进行怎样变换就能用公式计算？

解完例（1）、（2）后，再让学生做第 113 页练习 1（5）-（8）。

如有时间，可选做如下练习：

1.判断正误

（1）（a-5b）（a-5b）=a^2-25b^2；

（2）（-a-4b）（-a＋4b）=a^2-4b^2；

（3）（-3m＋1）（3m＋1）=9m^2-1；

（4）（3a-bc）（-bc-3a）=bc^2-9a^2。

2.下列各式中哪些能应用平方差公式？

（1）（x-2y）（2y＋x）；

（2）（x－2y）（x+y）

（3）（x^3+2y）（x^2-2y）；

（4）（-2y-x）（-x＋2y）

三、小结

1.平方差公式。

2.运用公式的条件，通过观察识别两个数，这是运用公式的关键。

3.注意点：

（1）必须符合公式条件。

（2）有些式子表面不能应用公式，但实质能应用公式，要注意变形。

（3）要注意符号的变化。

【作业】课本第 114 页习题 7、6A 组 1，3。

思考题（为下一课作准备）：

计算：

（1）$69\frac{3}{4}\times70\frac{1}{4}$；

（2）（a-b＋c）（a＋b-c）

（杨华）

“因式分解”发展学生数学观念的教案设计

一、突出逆变换思想

因式分解是安排在整式的乘法之后讲解的。无论从因式

分解定义的引入、三个基本方法的讲解（提取公因式法、公式法、十字相乘法），还是揭示分组分解法的规律以及综合训练，我们都应该深刻认识到：因式分解是整式乘法的逆变换。因而，在教学中必须突出逆变换思想。

1.从逆变换引入因式分解定义。

因式分解定义的引入，可作如下设计。

我们已会做如下整式的乘法运算：

①$2ab^2(a^2x+cy^2)=2a^3b^2x+2ab^2cy^2$

②$(5x+y)(3x-2y)=15x^2+10xy-10xy-2y^2$

$=15x^2-7xy-2y^2$

现在要问：对于①、②，右边是什么形式？左边是什么形式？你能从右边推出左边吗？

为了深刻理解因式分解的定义及逆变换过程，我们利用框图表示为：

$$\boxed{\text{整式的积}}\ \underset{\text{因式分解}}{\overset{\text{整式乘法}}{\rightleftarrows}}\ \boxed{\text{多项式}}$$

接着教师引导学生

注意如下事实：

对于②，在逆推时，要把-7xy 写成和它恒等的两个单项式的代数和。可以选择的代数式有任意多个，但为什么不用其它的表达式而只选用-7xy=3xy-10xy 呢？如何巧妙地找到这一式子呢？其中有许多学问，有待今后深入地研究。这就为以后的教学埋下伏笔。

由于我从顺、逆两个方面启发学生展开思维，有效地激发了他们的学习兴趣，同时，也有效地提高了他们的辩证思维能力。教师还可举一些反例，让学生鉴别下列各式从左到右是不是因式分解。

$x(x-3)=x^2-3x$，

$x^2-x-5=(x+2)(x-3)+1$.

$-20a^5bx^8=4a^3x^5(-5a^2bx^3)$，

$a^2b+ab^2c+abc^2=abc\left(\frac{a}{c}+b+c\right)$。

2.从逆变换的角度揭示因式分解基本方法的实质。

讲清因式分解方法的由来，例如“提取公因式法”是乘法分配律的逆运用，“公式法”是乘法公式的逆应用，这样有助于学生领会因式分解基本方法的实质。

二、抓住时机，渗透化归观念

本章中，存在着许多可以渗透化归观念的具体材料。教学时应深入挖掘，及时点拨。

例如，讲述分组分解法时可指明，它并不是一种独立的因式分解的方法，它的实质是应用化归观念，恰当地分组，把一个个综合问题转化成能用提公因式法、公式法、十字相乘法去解决的问题。

又如讲授把（$3x^2$＋5x-3）（$3x^2$+5x＋4）-8 分解因式时，可启发学生将（$3x^2$＋5x-3），（$3x^2$＋5x＋4）或（$3x^2$＋5x）视为一个整体，（例如令 $3x^2$＋5x-3=t，原式就变成 t（t＋7）-8=t^2＋7t-8，这就把复杂问题化归为简单问题的因式分解了。

三、充分暴露数学思维过程，变“灌输法”为“探索法”，引导学生逐步学会用“发现——假设——验证”的探索方法分析问题。

现代教学理论指出：“检索——选择”是构成“发现——假设——验证”这一结构的基本单位。下面举例说明。

例：把 zx（z-x）-xy（x＋y）+yz（y＋z）分解因式。

分析：要分解因式，有四种方法（检索），观察题目的结构，尝试用分组分解法（选择），这是第一层思考。

为了打开思路，可先展开括号，于是

原式=$xz^2-x^2z-x^2y-xy^2+y^2z+yz^2$，显然只要合理分组，就能达到目标（提出假设）。

下面是又一轮检索——选择：

怎样分组？可以二项二项分组、三项三项分组……对分组后的各式检索，发现

（y^2z-x^2z）+（yz^2+xz^2）+（$-x^2y-xy^2$）可化为（x+y）z^2-（x^2-y^2）z-xy（x+y），每组之间都有公因式（x+y），故选此式。

原式=（x＋y）（z^2-xz+yz-xy）。

为了继续分解下去，又引出新的“检索—选择”单元。

（祝善生）

“分数的乘除法”约分类比发现教案设计

【课题】代数第二册 9.3 节分式的乘除法

约分教学要求：能说出的分的意义，会将一个分式约分。

【教学方法】类比发现法。

【教学过程】

一、引导设计

根据分数的约分，在“□”内填上一个适当的数，使“=”成立。

$\frac{6}{18}=\frac{\square}{3}$，$\frac{14\times11}{42\times22}=\frac{1}{\square}$。

分式的约分与分数的约分类似，“把一个分式的分子与分母的所有公园式约去叫分式的约分”。试填写下列各式中的“□”：

1.分子与分母都为单项式。

$\frac{cb}{ab}=\frac{\square}{a}$，　$\frac{6ab^2}{8b^3}=\frac{\square 3a}{\square 4b}=\frac{\square}{\square}$；

2.分子与分母都为多项式：

$\frac{x^3-2x^2y}{x^2y-2xy^2}=\frac{(x-2y)\square}{(x-2y)\square}=\frac{\square}{\square}$。

你能概括出分式的约分方法吗？

二、设问提高

1.分式约分的理论根据是什么？

[分式的基本性质]

2.分式的约分与分数的约分的区别是什么？

[分数的约分只对数而言，它是约去分子与分母的公因数，如果分数的分子与分母没有除 1 以外的公约数，这样的分数叫既约分数。分式的约分是对式而言，它是约去分子与分母的公因式，如果一个分式的分子与分母没有公因式，这样的分式叫最简分式，也叫既约分式。分式的约分中包含有分数的约分。]

3.指出下列各式的分子与分母的公因式。

$\frac{27a^2b^2c}{36ab^3c^2}$；$\frac{3a+3b}{a^2+2ab+b^2}$；$\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$

三、指导阅读

阅读课本 P69 例 1，然后回答下列问题：

1.分式的约分可做怎样的分类？

[大致可分为两类：（1）分子或分母为单项式；（2）分子分母都为多项式。]

2.分式约分的步骤是什么？

[（1）把分式的分子与分母分解因式；

（2）约去分子与分母的公因式。]

四、巩固

补充 1：判断下列各分式的约分是否正确

$\frac{13ab}{26a^2bc}=\frac{13}{26c}$（　　），$\frac{b+c}{a+c}=\frac{b}{a}$（　　），

$\frac{-2R^2d}{4R^2r}=\frac{d}{-2r}=-\frac{d}{2r}$（　　），$\frac{am}{2^2m}=\frac{1}{2}$（　　），

$\frac{m+n}{m^2+n^2}=\frac{1}{m+n}$(　　)。

补充 2：先化简下列（1）、（2）两式，然后比较它们的不同点。

（1）（x^2+1）（2x＋1）=（x^2+1）（x+3），

（2）$\frac{(x^2+1)\qquad(2x+1)}{(x^2+1)\qquad(x+3)}$。

［（1）是等式的化简，它的依据是等式的基本性质，等式两边同时除以（x^2＋1），

（2）是分式的约分，它的依据是公式的基本性质，分子与分母同时除以（x2＋1）。］

3.口答教材 P70 第 1 题，练习第 2 题。

五、作业（略）

“幂的乘方”教案设计

【课题】代数第一册（下）7、 2节幂的乘方

【教学目标】使学生理解幂的乘方的运算法则，会运用幂的乘方的运算法则进行计算。

【教学重点】幂的乘方运算法则

【教学过程】

讲　授

我们曾学习过乘方运算，乘方运算是什么运算？乘方是 n 个相同因数 a 的连乘积的运算。其中，a—底数，n—指数，a^n—幂。

上节课，我们又学习了同底数幂相乘的运算，同底数幂相乘，底数不变，指数相加。

对于 $a^4 \cdot a^4 \cdot a^4$ 可记为什么？由乘方的定义，把 a^4 看作底，$a^4 \cdot a^4 \cdot a^4=(a^4)^3$，$a^4$ 是 a 的 4 次幂，$(a^4)^3$ 是什么？可以说是 a 的幂的乘方，读作：a 的 4 次幂的乘方，读作：a 的 4 次幂的 3 次方。/

讲　授

在代数中，像 $a^3 \cdot a^7$ 和 $(a^4)^3$ 要进行计算，或者说要化它们为 a^n 这种最简的形式。对于 $(a^m)^n$ 这种形式的式子如何计算，这就是我们今天要研究的问题（书写课题）。

我们先研究 $(a^4)^3$ 如何化为最简的形式？由乘方的定义，把 $(a^4)^3$ 中 a^4 看作底，$(a^4)^3$ 是 3 个 a^4 的连乘积，再由同底数幂乘法法则，得 $(a^4)^3=a^{4\times3}$，即计算 $(a^4)^3$ 的结果是“底数不变，指数相乘”。

在刚才计算 $(a^4)^3$ 的过程中，首先根据乘方的定义把它化为 a^4 的连来积的形式，再利用我们已学过的同底数幂的运算法则，把 $(a^4)^3$ 化成 a^{12} 这种最简的形式，这种把未知化为已知，运用已学过的知识来处理它的方法，是数学中时时处处都运用的方法，这里的关键在于转化的方法，转化后要有利于运用已学过的知识继续进行运算，如果这样 $(a^4)^3=(a \cdot a \cdot a \cdot a)^3$，则不利于继续运算，达不到把 $(a^4)^3$ 化为 a^r 的形式。

讲　授

同学们用这种方法计算下面两个题目。

在这里，我们得到幂的乘方的运算法则，请一位同学用语言表述这个运算法则。

现在，我们直接运用法则做下面一个例题。

课堂练习 P94，1。学生口述答案。

在计算中，要分清运算种类，区分同底数幂的乘方运算。

（例 2 的解答过程由学生口答，要求每一步运算所依据的运算法则内容的表述要准确）。

讲　授

对于例 3，有幂的乘方，幂的乘法和同底数幂相加的运算，运算的先后顺序如何？第一步先进行哪一步运算？运算中要注意同底数幂的乘法与加法的区别。

例 3（2）的最后结果是 $x^{10}+x^{16}$，是否需要继续运算？如何计算？
这个问题随着我们继续学习，将会得到解决。
课堂练习 P91， 12。
布置作业：P94.2，3。

（徐子华　吴之季）

“立方和与立方差公式”教案设计及评析

【教学目的】使学生理解和掌握立方和与立方差公式，并能运用公式进行有关计算。

【教学重点】公式的推导。

【教学难点】公式的正确运用。

【教学内容】

一、复习提问

前面我们学习了哪些乘法公式？并用语言叙述。公式中的字母可表示什么？

公式Ⅰ（a＋b）（a-b）〉$=a^2-b^2$，公式Ⅱ（$a\pm b^2$）$=a^2\pm 2ab+b^2$，公式中的字母可表示数、单项式，也可表示多项式。

二、新授

1.由计算（a＋b）（a^2-ab+b^2）与（a-b）（a^2+ab+b^2）引入新课。

启发提问：对于这两个算式，能否运用学过的公式进行计算呢？（不能）那么用什么方法进行计算呢？（多项式乘以多项式的法则）

请两学生板演计算过程，其他同学在练习本上计算。

学生板演格式：

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3$

$=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=a^3-a^2b+a^2b-ab^2+ab^2-b^3$

$=a^3-b^3$

根据学生的板演，启发提问：

（1）这两道多项式乘法计算的算式有什么特点？

（都是两个因式相乘，一个二项式，一个二次三项式，结果都是二项式，而且是立方的形式。）

（2）二项式乘以三项式，一般说它们的积应该有几项？（6 项）为什么这里的结果只有 2 项？（同类项合并）

（3）比较等号左边的二次三项式与完全平方公式有何不同？〈乘积项不一样。完全平方公式的乘积项有一个 2 倍，这里仅相乘。〉

（4）等号左边的三项式中的三项与二项式中的两项有什么关系？（左边三项式中有两项是二项式中两项的平方，还有一项是二项式中两项的积。）

（5）比较这两个等式的异同。

（两等式中对应的项只有符号不完全相同，字母和指数都相同，左边的两个因式中只有一个负号，右边两项的符号同左边二项式的符号相同。）

根据这两个等式具有简洁、对称、便于记忆的特点，我们可以把它们作为公式用于今后的运算，并让学生给这两个公式起个名字。点出课题并板书“立方和与立方差公式”。

让学生看书 P50，并让学生用语言叙述公式。

2.给出三道计算题，其中题（1）和题（2）能运用公式进行计算，题（3）不能运用公式进行计算。

处理方法：第（1）道题由师生共同解答，教师板演；

第（2）（3）两题由学生板演。

对于第（3）道题，根据学生板演情况，教师正确引导：①如果学生根据多项式乘法法则进行计算，那么教者给予肯定，并指出解题时一定要仔细观察算式是否符合公式特点。若不符合公式特点，则可用多项式乘法法则进行计算。

②如果板演学生直接用公式进行计算了，那么请全体同学一起研究其错误的原因，并指出该题不能运用公式进行计算的道理。

③如果板演学生犹豫不决时，教者适当进行引导，通过同学们互相帮助，使其顺利地完成计算。

计算完成后，教者针对第（3）小题提出一个让学生思考的间题：我们能不能对题目作些小的改动，使其变成一道新的能够运用公式进行计算的题呢？

例 1 计算

（1）$(3+2y)(9-6y+4y^2)$；

（2）$(5a-\frac{1}{2}b^2)(25a^2+\frac{1}{4}b^4+\frac{5}{2}ab^2)$

(3)　$(2x+1)(4x^2+2x+1)$

板演计算格式：$(3+2y)(9-6y+4y^2)$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)$

（1）解：原式$=3^3+(2y)^3$

$=27+8y^3$；

（2）解：原式 $=(5a)^3-(\frac{1}{2}b^2)^3$

$=125a^3-\frac{1}{8}b^6$；

（3）解：原式$=8x^3+4x^2+4x^2+2x+2x+1$

$=8x^3+8x^2+4x+1$

（改题方法：①第二个因式中“$+2x$”改成“$-2x$”；

②第一个因式中“$+1$”改成“-1”；

③第二个因式中“$+2x$”改成“$+4x$”送用完全平方公式，然后再用完全立方公式）

3.由学生自编题目，要求能运用立方和与立方差公式进行计算，要求编得新颖巧妙、与众不同。想好的同学到黑板上写出来。

（估计大多数学生能够模仿例题，变换一些数字、字母和负号编出一些题目来。如果学生已经编出具有三个因式相乘、二次运用公式计算的题目，那么下面例 2 中的第（1）题就不必再作例题，而把学生编的题作为例题，然后直接用第（2）题作例 2 中的第（1）题。）

针对学生编出的题目，师生共同检查。

4.例 2 计算：

（1）$(x^3-1)(x^6+x^3+1)(x^9+1)$；

（2）$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$；

（3）$(x+2y)^2(x^2-2xy+4y^2)^2$。

先由学生观察、讨论解题的方法，然后由教者根据学生的回答板书，并要求说出运算中每一步的依据。

解：（1）原式=（x^9-1）（x^9+1）

=x^{18}-1；

（2）原式=（x＋1）（x-1）〔（x^2+1）+x〕（x^2+1）-x〕

＝（x^2-1）〔（x^2+1）^{2}-x^2〕

=（x^2-1）（x^4+x^2+1）

=x^6-1；

或原式=〔（x+1）（x^2-x+1）〕〔（x-1）（x^2+x+1）〕

（交换律、结合律）

=（x^3+1）（x^3-1）

（立方和与立方差公式）

＝x^6-1；

（平方差公式）

（3）原式=〔（x+2y）（x^2-2xy+4y^2）〕^{2}

指数运算律（二）

=（x^3＋8y^3）^{2}

（立方和公式）

=x^8＋16x^3y^3+64y^6

（完全平方公式）

5.小结：

（1）立方和与立方差公式的推导，是由同学们自己完成的，必须掌握；

（2）立方和与立方差公式的特征要牢牢记住，解题时，一定要仔细观察有关因式的特征，不可粗心大意。

6.作业：

（1）看书 P59—P52；

（2）P57，21（1）—（3）

（3）练习册 P49，1、2、3、4、5、6、7。

说明：该班采用的教本，系由国家教委《中学数学实验教材》实验研究组编写的《中学数学实验教材》的普及本。

（孙伟倩）

评：孙伟倩老师这堂课上得很好，学生的主体作用发挥得很好，达到了教学目的。

为什么在数学教学中要发挥学生的主体作用？这是由数学教学的特点决定的。在数学教学中，学生学习的知识大多是前人总结的间接知识，并且在学习过程中，学生不断地发展他的认识能力，增强他们的才干。这样，不管是学习知识，还是增强才干，都要学生亲自去实践、去体会，通过学生的动脑、动手，把对学生来说是未知的知识转变为已知的知识，并在这个转变的过程中提高认识能力。所以学生的学习过程是一个再发现、再创造的过程，这个过程只能由学生自己来完成，别人是无法取代的，而且没有学生主动、积极地活动，这个过程也是无法完成的。

由于教学过程要用最少的时间达到最大的认知效益，所以学生的这种再

发现、再创造的过程，就不能自发地重复前人走过的漫长的道路，要讲经济、讲效益，这就是教师的主导作用是少不了的。由此我们得出几点看法：

1.学生的学习是个再创造、再发现的过程，必须要主体积极参与才能实现这个过程。

2.不是只要学生活动就是主体作用，其真正的主体作用，是花最少的时间达到最大的认知效益。

3.教师的主导作用就在于发挥学生的主体作用去达到教学目的。

我认为这三点孙老师都做得很好。

首先，这节课的主题——立方和与立方差公式及其特点，都是由学生发现的，自己得出结论的，而运用公式改题、编题，给学生的思维的自由创造提供了条件。

其次，学生的活动不是停留在一种简单的、机械的操作活动上，而是立足于复杂的思维活动上。就以改题、编题来说，它要比单纯的套公式所付出的思维劳动更多些。后者的对象是在主体的眼前的，只要把对象与公式逐项比较就可完成，它可以说是看得见、摸得着的。而前者，思维对象不在主体眼前，要主体根据公式特点，自己去寻找对象，发散性大，给学生创造的自由度大。同时，在这过程中，一方面学生要动用他全部的知识经验；另一方面，在这过程中，要运用许多思维操作，如比较、类比、观察、想象、分析、综合等等。

在当前的数学教学中，对处理教学有两种路子。一种是以量取胜。象这节公式教学的课，也可以这样处理，简单导出公式、讲清公式特点以后，接着第一套练习题，第二套练习题，第三套练习题压上来。另一种外理方法，就象今天课这样，以质取胜，题量不多，但较注意质量，比较注意接触一些深层的东西。后者指导思想明确，始终贯彻公式特点，字母特点，以及按判断、变形、构造三个层次递进，避免过多的重复性、机械性的操作，学生在思想上得益较多，而前者只有做了大量题后才能悟出一些道理（有时甚至还悟不出来）。重复的多、机械的多、表层的多。尽管有时题目很难、很繁，但仍然没有触及到思维深层的东西。

总之，这节课认知效益是高的。

第三，本节课教师的主导作用，至少体现在下面三个方面：①规划、设计这堂课，使这堂课围绕教学目的，沿着学生思维发展的方向前进；②设置问题情境，使学生始终处于一种愤悱状态；③因势利导。教师随着学生的思路，及时地加以引导，而不是把学生的思路、想法，主导立足于学生，立足于发挥学生的主体作用。

由上面的三点，说明孙老师发挥学生主体作用的教学思想很明确，所以取得了预期的效果。

在数学教学中，发挥学生的主体作用是有条件的。这些条件是：

1.为学新的知识，旧知识的准备状态如何？作为本节课的旧知识是：掌握了多项式的乘法以及平方差公式，两数和（或差）的平方公式；会用语言叙述这些公式；知道公式中的字母可表示数、单项式、多项式；知道从字母、指数、符号、系数几个方面去掌握公式的特点；会判断两个多项式相乘能不能直接用公式，如不能直接用，能否适当（恒等）变形使之能适用公式。这里以前学过的公式本身，不能直接用到本节课上，本节课主要用到研究乘法公式的经验。如由多项式乘法得出公式；从四个方面研究公式的特点；字母

所代表的意义；如何运用公式等。这些对学生来说，都是已经具备的，关键在于教师是不是意识到这种“经验的迁移”，并充分唤起学生的注意。

2.能否激发学生学习的心向？既然学习过程是学生的再发现与再创造的过程，只有主体积极参与才能实现。所以学生愿意学、想学是个非常重要的问题，否则发挥主体作用也只是一句空话。为此，激疑、设疑，使学生在思维上产生矛盾，是个非常重要的教学策略问题。

3.教师能否恰当地设置问题情境。也就是要设置一种浓厚的学习数学的气氛、环境，使学生处在一种愤悱状态，即处在一种想做又不知怎么做，想说又不知怎么说的状态。象本节课运用公式的三个层次：判断、改题、编题，就是三种不同的情境，而且一步步深入。

4.是否让学生意识到自己的进步与不足。学生自己意识到进步，就会产生一种愉悦的情绪，并产生进一步学习的愿望。对于学习有困难的学生，要具体分析，有的知识基础差，有的可能某种心理品质差，教师要针对不同情况不同处理，以积极因素克服消极因素，这样全班就会处在一种和谐发展的状态。

由此可见，在数学教学中发挥学生的主体作用是有要求和条件的，而不只是只要学生活动就是主体作用。从孙老师这堂课看，这些方面都做得很好，从而保证了教学目的的达到。

要说这堂课的缺点，就是不要把变形与改题混为一谈。有的题表面看来，不能直接用公式，但作适当变形后（这种变形是恒等变形）才能用公式。改题是把题目改掉了，改成能运用公式，而改题不是恒等变形。如果这个问题不交待清楚，就可能会留下后患，以后把不能用公式，只能用多项式乘法求解的题，也去改题，这样就不是题目本身的要求了。尽管孙老师注意到了这个问题，在课堂上也指出了这两者的区别，但由于没有结合当时的具体题目情境，这种说明就显得苍白无力，学生不会留下深刻印象的。

尽管有上述的缺点，但这节课仍不失为一堂好课。

（曹才翰）

“一元一次方程的解法”立体化教案设计

“立体化”的教学方法是指在活动中能使学生的认识过程、情感过程、意志过程等得到协调发展的一种教学方法。在教学活动中，学习者的心理过程可分为认识过程、情感过程和意志过程。其中认识过程（包括感知、思维、想象、记忆等心理活动）起着接受信息、处理信息、加工信息、储存信息等作用；情感过程起着优化信息、加强信息、调节认识过程、强化学习行为等作用；意志过程起着调节、控制认识过程和情感过程，确定调控方向，排除学习中的干扰，克服学习中的困难，实现预定的目标等作用。一般说来，在学习活动中，积极的情感能激起学生的认识兴趣，刺激智能的增长，推动学生积极地、主动地投入学习活动。反之，消极的情感会使学生注意分散，兴趣降低，并抑制智能的充分发挥而影响认识活动的进行。意志则是学生学习成功的重要心理因素，良好的意志品质能使学习者在学习过程中保持旺盛的精力，勇于克服学习中的困难，自觉地为实现预定的目标而努力学习。反之，意志薄弱的人，在学习中则缺乏坚持性，容易受到来自内部或外部的干扰而分散精力，遇到困难和挫折容易退缩和失去信心。

就目前我国数学教学的现状来看，大多数教师在选用教学方法时，只注意了认识过程，基本上排除或者忽视了有利于激发与培养学生的积极情感和意志品质的有关方法。这种只从“认识”一个“维度”去选择的教学方法，一方面不能激起学生的学习热情，引起学生对学习的追求，学生在学习活动中缺少成功感、愉快感、兴奋感和欢乐感；另一方面，学生的学习兴趣、学习信心不能持续增长，坚持性、自制力、果断性等良好的意志品质得不到很好的锻炼。目前不少学生学习数学的兴趣不浓，认为学习数学很苦、很枯燥，甚至不少学生有厌学情绪，这与我们在教学过程中忽视情感、意志的激发与培养有着很大的关系。在数学教学中，要能切实地提高数学教学质量，变苦学为乐学，就必须对原有的从“认识”一个“维度”来建立的教学方法体系加以改革，变“一维”为“多维”，建立有利于认识、情感、意志等心理过程协调发展，发挥其共同效应的教学方法体系。

在数学教学中，以下的一些方法常有利于认识、情感、意志的协调发展。

1.注意教学情绪场的构建

教学情绪场是能激起学生的积极情感，进而产生对知识的热烈追求、积极思考、主动探索的课堂教学环境。人的情感总是在一定的情境下产生的。和谐的气氛会产生轻松感，成功的气氛会产生愉快感，失败的气氛会产生苦恼感，在学习中碰到障碍会产生焦虑感。在教学中，要能激起学生的积极情感，就需要构建有利于激发学生的积极情感的教学环境。在数学教学中，常采用以下一些方法来构建教学情绪场。

（1）在教学的开始阶段采取障碍性引入、冲突性引入、问题性引入、趣味性引入来促进情绪场的建立。

（2）在教学的进程中，不断地设计出具有启示性的情境，使学生在学习过程中时而出现疑问，时而遇到障碍，时而遇到困难，时而得到启迪，时而得到顿悟，使学习过程中有困惑、有惊讶、有焦虑、有争议、有欢乐，而以愉快为基调。

（3）最大限度地给予学生表现的机会，使学生看到自己的力量，获得成功的满足，只有在必须的时候，教师才进行讲解、示范和指导。

（4）教师以饱满的精神、丰富的情感投入自身的教学活动，通过自己的积极的情感来感染学生，以激起他们的相应的情感，形成和谐的、活泼的、融洽的课堂教学氛围。

2.在教学中，保留具有一定难度的内容让学生去思考和探索

具有一定难度的内容是指在教师的帮助下，经过学生自己一番努力才能完成的学习任务。心理学的研究认为，当学生在学习中遇到困难时，如果我们热情地鼓励他们，耐心地引导他们依靠自身的努力克服困难，这样反而会大大地增强他们的学习兴趣，提高他们的学习信心，使他们形成一个信念：“困难是可以克服的。”在学习过程中，如果被克服的困难越多，这种信念就树立得越牢固，他们的意志品质在克服困难的过程中就会得到锻炼。同时，在克服困难的过程中，需要调动其各种智力因素，他们的能力会随之而得到发展。因此，在数学教学中，不必排除学习中的一切困难，应该有意识的保留具有一定难度的内容让学生去研究、去解决。

在数学教学中，只有改变那种法则、步骤加模仿的教学方法，采用在“问题情境”的基础上启发、引导学生自己去寻求解决问题的思想和方法，探索解决问题的途径和手段的教学方法，才有利于学生的情感和意志的激发与培养。在教学中将问题分得过细、嚼得过碎和和盘托出对情感、意志的激发与培养都是不利的。

应该注意的是，留给学生的智力任务，必须是学生在教师的帮助下经过自己的努力可以完成的任务。如果不考虑学生的发展水平，不注意难度的分寸，那就会走向它的反面，变积极因素为消极因素。

3.在教学效果的达成方面要使学生获得成功的满足，切忌给予反复失败的刺激

在学习过程中，如果学生获得成功，就会产生愉快的情绪，这种情况反复多次，学习就会和愉快建立联系，从而提高学习的兴趣和学生的信心；反之，如果不能获得成功，就会产生苦恼的情绪，这种情况反复多次，学习就会和苦恼建立联系，从而降低学习的兴趣和学习信心。因此，在教学过程中，必须使全班学生都能看到自己的进步，得到成功的满足。教师要对不同的学生提出不同的要求，给予不同的材料，采取不同的教学，使基础好的学生能够得到智力的挑战，使基础差的学生也能看到自己的进步，看到自己的力量。

目前，不少中学在数学教学中要求偏高，常常把超出大纲的一些内容放到课堂中来讲授，期中、期末考试时，常常选用重点中学或者带有选拔性质的试卷来考自己的学生，致使每次考试都有一大批学生成绩不及格。这种反复失败的刺激，大大地挫伤了学生学习的积极性。产生这种现象的原因与一些学校领导和老师忽视学生的情感基础和意志基础有关。应该强调的是，知识基础（包括知识水平和认知水平）、情感基础、意志基础都是学习的基础。如果一个学生虽具有良好的知识基础，但是缺乏良好的情感基础和意志基础，仍然是不能取得好的学习效果的。在教学中，提高学生的情感基础与意志基础的重要方法之一，就是让学生在学习中获得成功。如果我们给予学生反复失败的刺激，只会使他们失去学习的热情和信心，由此产生厌学情绪。

下面通过一个例子来比较一下传统的教学方法与“立体化”的教学方法之间的一些区别。

课题 一元一次方程的解法 （含未知数的项与常数项分离的情形）

（一）传统的方法：强调方法步骤，采用模仿、练习的教学方法。

1.复习旧知：

复习一元一次方程和方程的解的知识。

2.介绍含未知数的项与常数项分离的一元一次方程的解法。

例 1.解方程 8x=6x-4。

解：移项，得 8x-6x=-4，（移项的目的是使方程的一边只含有含未知数的项，另一边只含有常数项）

合并同类项，得 2x=-4，（将方程化为最简方程）

两边都除以 2，得 x=-2。（将方程化为解是明显的方程）

检验：左边=8×（-2）=-16，

右边= 6×（- 2）-4=-16。

左边=右边

所以 x=-2 是原方程的解。

例 2.解方程 4x+2=7x-8。

解：移项，得 2+8=7x-4x，

合并同类项，得 10=3x，即 3x=10，

两边都除以3，得$x=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$。

（自己用口算检验。）

教师讲完例 1、例 2 后总结解题步骤：对于含未知数的项与常数项分离的一元一次方程的解题步骤是：

①移项；

②合并同类项，化简为最简方程；

③方程两边都除以未知数的系数，得出方程的解。

例 3.解方程：2x-4=5x+17。

（指定一位同学叙述解法，教师板书解题过程，必要时说明应该注意的地方。）

例 4.4-8x=20x＋3。

（采用例 3 的方法。）

3.课堂练习

（通过课堂练习帮助学生巩固所学的知识和形成技能）：

解方程：（1）2x+6=7；（2）4x=3x-2

（3）2x＋5=25-8x；（4）4x-2=7x＋7。

（指定四位同学到黑板上练习，其他同学在座位上练习，四位同学解毕后，要求全体同学共同订正。）

4.本课小结。（略）

5.布置作业。

心理分析

采用以上的教学方法，学生能够掌握解一元一次方程的方法，并能形成一定的技能。如果仅就传授知识的角度来看还是可取的。不过，从心理活动的过程来看，这种教学方法存在如下的一些缺点：

（1）未能引起学生的求知欲望，产生对知识的热烈追求；

（2）学生在学习过程中主要是接受、模仿，缺少主动的研究和探索，缺少高级的心理活动的卷入；

（3）在学习过程中学生缺少积极的情感体验；

（4）在学习过程中缺少意志锻炼的机会。

（二）选用有利于认识、情感、意志过程协调发展的教学方法。

1.让学生在操作过程中陷入困境，以激起他们的急切和焦虑情绪。

课堂教学一开始就让每一位同学根据方程解的定义，用观察、尝试的方法解下列方程：

（1）2x=8；（2）2x+3=13；（3）4x-2=10x+20；

（4）2（6x-3）＋3（4x-2）=2（x＋3）-2。

心理分析：学生容易解（1）、（2）两题，但对（3）、（4）两题却一下子求不出它们的解，这时就会使他们产生焦虑情绪。

2.指出原有方法的局限性，提出应寻求新的解法途径。

教师：我察看了一下，大部分同学（3）、（4）两题都没有解出来（即使有个别同学解对，教师也不要他说出解题过程和结果，以免影响情绪场的建立），这并不是我们前面的知识没有学好，而是根据方程的解的定义，用观察、尝试法来求一元一次方程的解的方法有局限性，因此有必要去寻求新的解法途径。

（此时学生焦虑情绪得到解除，并产生寻求新的解法的求知欲望。）

教师：寻求新的解法途径要以原有的知识为基础，前面我们学过的以下的一些知识为我们提供了条件：

（1）解是明显的方程：如 x=2，x=-4。

（2）方程同解原理 1，即移项的知识。

（3）方程同解原理 2。

（4）合并同类项的知识。

应用上述知识，我们就可以得到解一元一次方程的新的方法。

（这样就为学生寻求新的解法做好知识和心理上的准备。）

3.引导学生根据所要达到的目标

（将方程转化为与它同解的解是明显的方程）和可利用的工具（方程同解原理（1）、（2）和合并同类项的知识）探索转化的方法。

教师：有一类方程它的解是明显的。如 x=a（a 是常数），如果我们能应用已学过的知识将方程 4x-2=10x+20 转化为 x=a 的形式，因为 x= a（a 是常数）的解是明显的（它的解为 a），这样也就求出原方程的解了。

目标：将原方程化为解是明显的方程

原方程：4x-2=10x+20

目标↓

转化为解是明显的方程：x=a

可利用的知识（工具）是：

（1）移项的知识；

（1）合并同类项的知识；

（3）方程同解原理 2。

教师在指出目标和可以利用的工具之后，要求学生自己去探索转化的方法。在不少同学已经找到转化的方法而还有部分同学有困难，虽经认真思考仍不得其门而入时，教师将事先写好该题的解题过程的小黑板挂上，这些同学受到小黑板上的解题过程的启发，也就能找到转化的方法了。

心理分析：

教师只指出要达到的目标和可利用的工具，要求学生自己去寻求转化的

方法，这就比教师直接讲解解法有一定的难度。学生为了寻找转化的方法，就必须有高级的心理活动卷入，当学生自己找到转化的方法之后，就会获得成功的满足，产生兴奋、愉快的情感。

在大部分同学都能解第（3）题之后，教师再利用情绪诱因，来增强刺激以增强他们的学习动机。

教师：小黑板上有该题的标准答案，请大家对照检查一下，做错的请加以改正。为了了解同学们的学习情况，请做对的同学举手。

教师：大部分同学都做对了，足见同学们学得不错（赞赏），但是同学们有没有真正掌握这种方法呢？我想再请大家做一个题目，如果再做对了，说明你们真的掌握了。解方程：$7x-6=4x+2$。

（这样就可激起学生进一步的学习热情，同时也有利于对新知识的巩固。）

4.总结解一元一次方程的思想和方法。（略）

心理分析：

在学生实践的基础上加以概括，更有利于学生对思想、方法的掌握。由于这种思想和方法是在碰到困难之后，经过自
己的努力而得到的。这就使他们看到自己的力量，并获得积
极的情感体验。

5.课堂练习。（略）

6.提出尚待解决的问题。

教师：今天我们已经对第（3）题这一类型的一元一次方程（含未知数的项与常数项分离的情形）的解法进行了研究，那末对开始提出的课堂练习中的第四题：$2(6x-3)+3(4x-2)=2(x+3)-2$ 又怎么解决呢？请大家课后想一想应该怎样来解决？

心理分析：

在学生学会较简单的一元一次方程的解法而高兴的时候，教师又提出新的问题，引起学生的悬念，为下一课学习作好心理准备。

（毛鸿利）

“一元二次方程”结构式教案设计

一、结构式教学的实施步骤

以单元知识作为一个整体，设计教学过程一般可按如下三个步骤：

（1）让学生在老师的辅导下，根据实践的需要或分析数学内部矛盾的运动规律结果逐步了解其整体结构、知识体系。

（2）对结构中的每一个知识点进行具体的探索、研究，使学生能熟练掌握其概念、原理、思想方法，技能能力，做到一步一个脚印。

（3）借助小结，复习详细地把知识间的来龙去脉、逻辑关系、思维过程介绍清楚，做到全局把握，使认识升华。

二、设计知识结构示意图

如一元二次方程的结构示意图如下：

在设计结构示意图时应注意如下几点：

（1）要能体现知识间的内在联系；

（2）体现知识间的联系点、生长点；

（3）尽量刻划知识间的化归过程；

（4）简明、直观：

三、确定具体教学质量指标

结构示意图绘出了宏观上控制知识的指标。使学生明白了在该单元的学习任务、方向、顺序，但还不够，还应制定好每一节的学习任务，使每一概念、原理、思想方法、技能得到充分的训练，做到一步一个脚印。如一元二次方程教学的指标控制：分知识指标、思想方法指标、技能与能力指标、练习题指标四种。

1.知识指标：

（1）一元二次方程定义、基本形式：

一般式：$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）

简化式：$\begin{cases} x^2+bx+c=0\ (a\neq 0) & \\ x^2+bx=0 & (a=1) \\ ax^2=0 & (b=0) \\ & (c=0) \end{cases}$

（2）解一元二次方程的三种方法。

（3）根的判断式，韦达定理（及逆定理）。

（4）二次三项式因式分解与二次三项式变为方程得到的根的关系。

2.数学思想方法指标的控制

（1）化归思想：非一般式化为一般式，一般式方程通过配方化为能利用开平方法求解的方程，简单高次方程，分式方程、无理方程的求解化为一元二次方程的求解；二元二次方程组化为一元二次方程的求解。

（2）用根的判别式研究有关问题的思想。

（3）用韦达定理（及逆定理）研究有关问题的思想。

（4）根据问题中的数量关系，确定未知数和布列方程。

（5）用“换元”的方法，解决有关问题的思想。

（6）增、减根讨论的思想。

3.技能与能力指标的控制：

（1）建立一元二次方程，非一般式化为一般式。

（2）灵活选用直接开平方法、公式法、因式分解法求解一元二次方程。

（3）不解方程判别根的情况，根据方程根的情况确定系数的取值范围。

（4）布列（1）有关数字问题（2）面积问题（3）增长率问题的方程应用题。

（5）利用韦达定理求两根对称式的值，知一根求另一根（或系数），确定方程式。

（6）二次三项式的分解。

（7）用因式分解法，换元法求解简单高次方程。

（8）用去分母化归成整式方程法，换元法求解分式方程。

（9）用双边平方去根号法，换元法求解无理方程。

（10）用消元（代入，加减法），降次（因式分解法）求解二元二次方程组等。

4.一定练习题的指标控制（略）。

四、结构式教学应立足于学生的实际

系统论告诉我们：十个人分散搬砖跟十个人排成一排搬砖效果是完全不一样的，结构式教学就是根据系统论的这种整体原理而实施的。由于数学的逻辑性、系统性强，这就为结构式教学提供了物质基础，因此，只要运用得当，其优越性是显而易见的。但是，从初中学生的心理特点来看，他（她）们的逻辑思维能力，整体观察问题的能力还很弱，再加上教材长期影响——一道例题、一种题型，他们比较习惯由借助模仿解答单道习题，而对知识的整体结构缺乏兴趣，这就给初中结构式教学带来不利，因此，在实施结构教学时，应根据学生实际，稳妥地、循序渐进地进行，分阶段性，层次性渗透，使结构式教学显示强大的生命力。

“二次根式”教材分析和教案设计

一、教材分析

新教材打破了旧教材从定义出发，由理论到理论，按部就班的旧格局，创造出从实践到理论再回到实践，由浅入深，符合认知结构的新模式。其主要的特点和优点有：

（一）以四则运算贯穿全章的始末，使教学有明确的主攻方向。

新教材一改旧教材中概念性质与运算脱节的陈规，以运算为主线进行编排。对于概念性质则根据它们在运算中所起的作用，穿插介绍，有机地与运算结合。这样，在教学过程中学生能清楚地认识到，为了解决实际问题必须学习根式运算；为了探求根式运算法则就必须研究根式的概念和性质。由于学生的学习目的性明确，一开始就带着问题以极大的热情投入学习。从上章算术平方根的概念出发，很快地掌握了二次根式的意义和基本性质。紧接着把这些基本性质用到二次根式乘除中去，并且解决了实际问题。接着教师又提出新的问题，引导学生研究二次根式的化简和加减运算。这样，一环扣一环，研究一个个运算，解决一个个实际问题，突破一个个难点，最后成功地完成全章的教学任务。

（二）先乘除后加减，由易到难，由简到繁编排教材，符合学生的认识心理。

旧教材先讲二次根式的加减法，后讲二次根式的乘除法。因为要掌握加减法，就得先研究根式的化简，而根式的化简实际上可以通过根式的乘除来实现，可是乘除法未学，不能超前使用这个工具，只好一个个地从定义出发来化简，这样增加了运算的难度。新教材克服了旧教材的弊端，先介绍乘除法后介绍加减法，而乘除法比加减法容易学，这样由浅入深，循序渐进地学习，困难不大。在化简根式时，除了从定义出发外，还可以运用除法。知识是一种越用越多的财富。运用乘除法来化简根式，不仅可以复习巩固乘除法则，而且增加了化简根式的工具。乘除的基础打好了，又增添了化简根式的工具，因而根式加减的困难也就迎刃而解了。

二、教学方法

如果把教材比做一张蓝图，那么编者就是这幅蓝图的总设计师，而教师便是忠实的施工员。首先，施工员要领会设计师的匠心和设计意图，忠实地按图施工。其次，施工员在施工过程中，要发挥自己的聪明才智，创造性地完成任务。再次，要不断地发现新问题，在不影响总体设计的情况下，及时地进行局部调整。同样的道理，教师在实施教学过程也应注意以下三个问题。

（一）吃透教材。

深入钻研教材，切实领会编者的巧妙构思，挖掘教材的优点和特点以及新旧教材的差别，并且在教学中加以实施。

（二）精心设计教案，发挥自己的主观能动性。

根据学生的实际情况，精心设计，精心安排。在教学中以问题为中心，不断地提出问题，激发学生的学习动机；深刻地分析问题，带领学生寻找解决问题的办法；及时地总结规律，把所获得的新知识并入原有的知识系统；加强变式训练，纠正学生概念和运算中的错误。

（三）及时地发现问题，不断地调整自己的教学方案。

本章的主线是运算，为了突出这条主线，故在章头图长方形的基础上适

当地增加根式的运算的实例，作为新课的引入和研究问题的中心。具体的教学方案叙述如下：

（一）根式的乘法

1.提出问题。

学校决定在每一间教室前面的长方形空地上都种植草皮。按国家教委和国家基建委规定的标准，中学每间教室的使用面积为 54 平方米。假定教室是正方形的，那么教室的每边长则为$\sqrt{54}$米，也就是说长方形空地长为$\sqrt{54}$米。如果空地的宽为$\sqrt{6}$米，问铺满一块长方形空地，需要购买多少平方米的草皮？（注：前一章已经学习了无理数，后一章将学习二次根式。因此以$\sqrt{54}$和$\sqrt{6}$作为边长进行计算既能起到承上起下的作用，又能联系生活实际）

因为长方形的面积等于长×宽，所以草坪的面积为$\sqrt{54}\times\sqrt{6}$。

我们查表计算$\sqrt{54}$和$\sqrt{6}$的值，然后再相乘，虽然可以得到草场的面积，但是计算繁琐，又不能得到准确值。如果手边没有数学用表和计算器，就无法进行计算。因此，必须另想其他计算办法。要想不查表又能算出草坪面积的准确值，就必须研究二次根式 54 和 6 的乘法法则。

2.分析问题。

（1）有意义的式子才能进行运算，所以在研究二次根式的运算之前先得研究，当a为何实数时二次根式$\sqrt{a}$与$\sqrt{a-3}$有意义。

我们知道，在实数范围内，负数没有平方根，要使上式有意义，被开方数只能是正数或 0，也就是说被开方数是非负数的。故得：

性质1：非负数的算术平方根是非负数。即当$a\geq0$时，$\sqrt{a}\geq0$；当$a\geq3$时，$\sqrt{a-3}\geq0$。

（2）$\sqrt{6}$与有理数6的差别就在于多一个根号，如果能找到一种打开根号的运算，那么就有可能借助于有理数的运算法则来进行二次根式的运算。

因为$\sqrt{6}$是表示平方等于6的正数，把这句话用式子表示为$(\sqrt{6})^2=6$。

可见我们可以用平方的办法去掉括号。

一般地，$\sqrt{a}$（$a\geq0$）表示一个平方等于 a的非负数，即$(\sqrt{a})^2=a$，（$a\geq0$）。

由上式得：

性质 2：一个非负数平方根的平方等于它的本身。

在本章中，如果没有特别说明，所有的字母都表示正数，因而平方和开方都互为逆运算。

由性质2得$(\sqrt{54\times6})^2=54\times6$，①

由乘方法则得$(\sqrt{54}\times\sqrt{6})^2=(\sqrt{54})^2\times(\sqrt{6})^2=54\times6$。（2）

由①、②得$(\sqrt{54\times6})^2=(\sqrt{54}\times\sqrt{6})^2$

$\because\sqrt{54\times6}>0$，$\sqrt{54}\times\sqrt{6}>0.$

$\therefore\sqrt{54\times6}=\sqrt{54}\times\sqrt{6}.$

一般地有$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$，（$a\geq0$，$b\geq0$）

由上式得：

3.解决问题。

乘法法则：

算术平方根的积，等于各个被开方数积的算术平方根。

由乘法法则得：

$\sqrt{54}\times\sqrt{6}=\sqrt{54\times6}=\sqrt{18^2}=18.$

答：购买 18 平方米的草苗恰好能铺满一块空地。

全校各间教室前面的空地都种上草皮，就使得往日尘土飞扬的黄土地换上绿色的新装，那无数支嫩绿和新芽，不断地吐出氧气，让同学们在美丽的校园里，呼吸着新鲜的空气更加精力充沛地为祖国而学习。

注：当问题解决之后，同学们都沉浸在成功的喜悦之中，此时此刻，教师借题发挥作简短有力的议论，既能体现数学的美，激发学生的学习积极性，又能给学生以生动的思想教育。

4.并入知识系统。

只要把性质 3 中的“算术平方根”五个字换成“平方”二个字，便是乘方法则；同时，把二次根式乘法法则中的“算术平方根”换成“平方”，把“被开方数”换成“底数”，就是乘方法则的逆用。可见二次根式的性质和乘法法则都可以纳入乘方的知识系统。

5.变式训练。

通过正反面典型实例来加深巩固二次根式的概念和运算法则的理解和掌握。

例1 化简$\sqrt{2000}=\sqrt{10^2\times2^2\times5}=\sqrt{10^2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{5}=20\sqrt{5}$

注：利用性质 3 化简根式时，应把被开方数中能开得尽方的因式（或因数）都开出来。

例2 化简$\sqrt{x^4+x^2y^2}=\sqrt{x^2(x^2+y^2)}=\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=x\sqrt{x^2+y^2}$。

注：因为性质 3 只适用于被开方数是乘积的情形，不适用于加减的情形。必须注意原式$\neq\sqrt{x^4}+\sqrt{x^2\cdot y^2}$。

例3 计算$3\sqrt{5}\times2\sqrt{10}=(3\times2)\times(\sqrt{5}\times\sqrt{10})=6\times5\sqrt{2}=30\sqrt{2}$

注：这里实际上是将有理数乘法的交换律和结合律推广到实数范围。因而二次根式相乘时可以在根号外把因式相乘，同时在根号内把被开方数相乘，二次根式不变。

（二）根式的除法

1.提出问题。

草坪的长是宽的多少倍呢？要解决这个问题就必须研究二次根式的除法。

即$\sqrt{54}\div\sqrt{6}$

2.分析问题。

仿照乘法法则的推导办法，由乘方法则和性质得

$[\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}]^2=\frac{(\sqrt{54})^2}{(\sqrt{6})^2}=\frac{54}{6}$；④

$[\sqrt{\frac{54}{6}}]^2=\frac{54}{6}$⑤

由④、⑤得$[\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}]^2=[\sqrt{\frac{54}{6}}]^2$

其中$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}>0$，$\sqrt{\frac{54}{6}}>0$，

$\therefore\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{54}{6}}$，

一般地有$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}(a\geq 0，b>0)$⑥

由⑥得：

除法法则：两个算术平方根的商，等于它们的被开方数商的算术平方根。

把长除以宽得：

$\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{54}{6}}=\sqrt{9}=3$。

答：草坪的长恰好是宽的 3 倍。

4.并入系统。

把⑥式反过来得：

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$，$(a\geq 0，b>0)$

也就是说，两个非负数商（其中分母不为零）的算术平方根，等于他们算术平方根的商。只要把“算术平方根”五个字改成“平方”二个字便是乘方法则，可见二次根式的乘除法则都可以并入乘方的知识系统。

5.变式训练。

两个根式相除时先写成分式，并化去分母中的根号。把分母的根号化去，称做分母有理化。

例 1 计算

$$\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

注：分子分母都乘以$\sqrt{2}$，就能有理化分母。

例 2 计算

$$\frac{\sqrt{5a}}{\sqrt{10a}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{a})^2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2a}}{2}$$

注：①在计算过程中，先把分子分母同除以二次根式$\sqrt{5a}$（即约分化简），然后再把分母有理化。

②有理化时只化去分母中的根号，并不能化去分母，必须注意原式$\neq\sqrt{2a}$。

（三）根式的加减法

1.提出问题。

为了保护草坪，就得用篱笆把四周围起来。要做到合理用料，就得计算每块长方形空地的周长是多少米？长比宽大多少米？依题意得

草坪的周长为（$2\sqrt{54}+2\sqrt{6}$）米，⑦

草坪的长比宽大（$\sqrt{54}-\sqrt{6}$）米。⑧

要解决这两个问题，就必须研究二次根式的加减法。

2.分析问题。

回顾整式加减的实质就是“合并同类项”。同类项是字母相同，并且字母的指数也相同的项。同样的道理，我们也把被开方数相同的二次根式称为同类二次根式，与同类项一样同类二次根式也可以进行合并。但是，在整式中同类项一目了然，而同类根式却不容易认别。例如：

$\sqrt{\frac{1}{3}}$和$\sqrt{27}$，$\sqrt{\frac{b}{a}}$和$\sqrt{a^3b}$

乍看起来被开方数不同，但它们却是同类二次根式，因为化简后被开方数都相同。

即$\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1\times3}{3\times3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sqrt{27}=\sqrt{3^2\times3}=3\sqrt{3}$；

$\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}$，$\sqrt{a^3\cdot b}=a\sqrt{ab}$

上式化简后都具有两个特点：

（1）被开方数的因数是整数，因式是整式（即被开方数不含分母）；

（2）被开方数中不含能开得尽方的因数和因式。

凡具有以上两个特点的根式称为最简二次根式。

3.解决问题。

答：每块草坪周长为 86 米，长比宽大 26 米。

从上面可以得出二次根式的加减法则：

（1）最简二次根式的加减，只要合并同类二次根式；

（2）如果所给的二次根式不是最简二次根式，应先化简，而后合并同类二次根式。

4.并入知识系统。

当二次根式化成最简二次根式后，加减运算与整式中同

类项合并相同。只要把它们的系数相加减，同类项（或同类二次根式）不变。

5.变式训练。（略）

（林昌贵）

“一元二次方程的根的判别式”

教案设计（一）

【教学目的】

1.使学生理解一元二次方程根的判别式的概念，并能用判别式判定根的情况。

2.培养学生从具体到抽象的观察、分析、归纳的能力。

【教学重点】判别式的推导。

【教学过程】

一、复习练习

1.解下列一元二次方程：

（1）$x^2-2x+5=0$，（没有实数根）。

2.提问：一元二次方程的求根公式。

二、引入新课

1.观察复习中的三道一元二次方程，一元二次方程的根有几种情况，分别是怎样的？

2.思考从公式的结构来看，公式中的哪个部分是研究一元二次方程何时有两个不相等的实数根，何时有两个相等的实数根，何时无实数根这个问题的关键所在？

三、新课教学

引导学生讨论

（1）必须且只需满足怎样的条件，方程一定有实数根？

（2）必须且只需满足怎样的条件，方程一定有不相等的实数根？

（3）必须且只需满足怎样的条件，方程一定有相等的实数根？

（4）在什么条件下，方程没有实数根？

讨论后填下表：

2.讲解根的判别式的定义、记号、读法。

我们把 b2-4ac 叫做一元二次方程 ax2＋bx＋c=0 的根

的判别式，用符号“△”来表示，读作“delta”，即△=b2-4ac，ax2＋bx+c=0（a≠0）的根的情况是：

当△＞0 时，有两个不相等的实数根；

当△=0 时，有两个相等的实数根；

当△＜0 时，没有实数根。

3.判别式的应用。

例 1 不解方程，判别下列方程的根的情况：

（1）$2x^2+3x-4=0$；（2）$16y^2+9=24y$；（3）$5(x^2+1)-7x=0$.

解：（1）∵$\triangle=b^2-4ac=3^2-4\times2\times(-4)=9+32>0$.

∴原方程有两个不相等的实数根。

（2）移项，得 $16y^2-24y+9=0$

∴$\triangle=b^2-4ac=(-24)^2-4\times16\times9$

$=576-576=0$.

∴原方程有两个相等的实数根。

（3）原方程化为标准形为 $5x^2-7x+5=0$.

∵△=b^2-4ac＝（-7）^{2}-4×5×5＝49-100＜0.

∴原方程没有实数根。

强调指出：

（1）首先将所给方程化成一元二次方程的标准形式，正确找出 a、b、c；

（2）只要能判断△值的符号就行，具体数值不必计算；

（3）判别根的情况，不必求出方程的根。

四、巩固新课

1.体会为什么把 b^2-4ac 叫做一元二次方程根的判别式，熟记△的值的符号与根的关系。

2.不解方程，判断下列方程根的情况。（写在练习木上，每一题叫一个同学到黑板上做，以检查书写格式是否规范）。

（1）$2y^2+5=6y$；

（2）4p（p-1）-3=0；

（3） $3t^2-26t+2=0$；

（4） （x-2）^{2}+2（x-2）-8=0

*3.不解方程，判断下列方程根的情况：

（1） $a^2x^2-ax-1=0$；（a≠0）；（△=5a2＞0）

（2）$x^2+22kx+2k^2=0$；（△=$8k^2-8k^2$=0）

（3） （$2m^2+1$）$x^2-2mx+1=0$.（△=-4m2-4＜0）

五、小结

1.由学生总结判别式的意义，作用及在使用判别式时应注意的问题。

2.其逆命题也是成立的。

六、布置作业

1.阅读本节教材

2.不解方程，判别下列方程根的情况：

（1） $2x^2+4x+35=0$；（2） 4ma（m-1）+1=0；

（3）$0.2x^2-5=\frac{3}{2}x$；（4）$4(y^2+0.09)=2.4y$；

（5）$\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}=\sqrt{3}x$；（6）$2t=\sqrt{5}(t^2+\frac{1}{5})$

*3．m 为何值时，多项式 $x^2-(2m+2)x+m^2+5$ 是一个完全平方式。

（袁为民）

“一元二次方程的根的判别式”

教案设计（二）

【教学目的】

1.使学生学会运用一元二次方程根的判别式求符合题意的 k 的取值范围和进行有关的证明。

2.培养学生思维的严密性、灵活性和逻辑论证的能力。

【教学重点】运用判别式求出符合题意的 k 的取值范围。

【教学过程】

一、复习提问

1.请说出一元二次方程的一般形式和它的求根公式。

2.一元二次方程的根的判别式是什么？如何判断？

二、引入新课

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）根据△的值的符号可判定方程的根的情况，反之，逆命题也成立，即根据方程的根的情况，可以决定△的值的符号。

三、新课教学

例 1 已知关于 x 的方程 $2x^2-(4k+1)x+2k^2-1=0$.k 取什么值时？

（1）方程有两个不相等的实数根；

（2）方程有两个相等的实数根；

（3）方程没有实数根。

分析：启发学生思考（1）解决这三个问题都需要计算谁？（2）若方程有两个不相等的实数根，则△怎么样？另外两问呢？也就是说首先计算△，继而解△＞0，△＜0，求出 k 值。（请同学解，老师板书）

解：$\triangle=b^2-4ac=[-(4k+1)]^2-4\times2(2k^2-1)=8k+9$.

（1）当 $8k+9>0$，$k>-\frac{9}{8}$时，方程有两个不相等的实数根。

（2）当 $8k+9=0$，$k=-\frac{9}{8}$时，方程有两个相等的实数根。

（3）当$8k+9<0$，$k<-\frac{9}{8}$时，方程没有实数根。

* 假设二次项系数不是 2，而是 k，还需要考虑什么呢？如何作答？

例 2 求证方程 $(m^2+1)x^2-2mx+(m^2+4)=0$ 没有实数根。

分析：启发学生思考（1）谁决定方程有没有根？（2）若证明方程没有实数根，只要证明根的判别式△怎么样就行了？（3）怎样来证明△永远小于零呢？让我们一同解题寻找方法。

证明：$\triangle=b^2-4ac$

$=(-2m)^2-4(m^2+1)(m^2+4)$

$=4m^2-4m^4-20m^2-16$

$=-4m^4-16m^2-16$

$=-4(m^4+4m^2+4)$

$=-4(m^2+2)^2$

∵不论 m 为任何实数，（m^2＋2）2＞0.

∴-4（m^2＋2）2＜0，即△＜0

∴ （m^2＋1） x^2-2mx＋（m^2＋4）=0 没有实数根。由上面的证明认清证明的格式归纳出证明的步骤：

（1）计算△；

（2）用配方法将△恒等变形；

（3）判断△的符号；

（4）结论。

其中的难点是△的恒等变形，一般情况下配方后变形为 a^2，a^2+2，$(a^2+2)^2$，$-a^2$，-（a^2＋2）^{2}，-（a＋2）^{2} 从而判定正、负、非负等情况。

四、巩固新课

1.已知关于 x 的一元二次方程：

kx^2＋（2k＋1）x+k=0.

有两个不相等的实数根，求 k 的取值范围。

（$k > -\frac{1}{4}$ 且 $k \neq 0$，注意 $k \neq 0$ 这一条件）

2.证明（x-1）（x-2）=k^2 有两个不相等的实数根。

（将方程化为一般式：$x^2-3x+2-k^2=0$，计算

△=$4k^2+1$）

五、小结

1.使用判别式时，特别注意二次项系数不为零这一条件。

2.认真审题，严格区分条件和结论，譬如是已知△＞0 还是要证明△＞0。

3.正确分析题意，灵活运用根的判别式进行计算或证明。

六、布置作业

1.已知关于 x 的方程 x^2＋（2m＋1）x＋（m-2）^{2}=0.

当 m 取什么值时，（1）方程有两个不相等的实数根？

（2）方程有两个相等的实数根？（3）方程没有实数根？

2.k 取什么值时，方程 $4x^2$＋（k+2）x+k-1=0

有两个相等的实数根，并求出这时方程的根。

3.求证关于 x 的方程：x^2＋（2k+1）x＋k-1=0 有两个

不相等的实数根。

* 4.求使方程 x^2＋2（a＋1） x＋a^2＋4a-5=0 有实数根时 a 的正整数值。

* 5.证明方程（2m-1）$x^2+2\sqrt{2}mx+2=0$ 恒有实数根。

（袁为民）

“一元二次方程的根与系数的关系”

教案设计（一）

【教学目的】

1.使学生掌握反映一元二次方程的根与系数关系的定理——韦达定理，并能初步应用。

2.培养学生分析、观察、归纳的能力和进行推理论证的能力。

【教学重点】根与系数关系的推导。

【教学过程】

一、引进新课

一元二次方程的求根公式$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，根据系数a、b、c的值求出方程的根，换句话讲方程的根是由系数 a、b、c 决定的，那么我们再来研究根与系数还有什么关系呢。（板书课题）

二、新课教学

1.观察与归纳

解下列方程并观察根与系数的关系

观察发现，两根之和恰是一次项系数的相反数，两根之积恰是常数项，而两根之差，两根之商的结果没有共同规律，那么两根之和，两根之积这一规律是否是这几个方程的根与系数的巧合呢？不妨再观察，只对两根之和与两根之积进行观察。

结论依然如此，这个规律是否对二次项系数不为 1 的一元二次方程也成立呢？

可以发现，当二次项系数不为 1 时，x1+x2 恰为一次项系数除以二次项系数的相反数 x1·x2 恰为常数项除以二次项系数。

前面列举了 12 个题得出的这一结论对第 13 个题是否成立,即使列举 100 道题成立，对第 101 题是否成立，如何才能说明这一结论对每一个一元二次方程都能成立呢？

2.定理的证明

设 x_1，x_2 是 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两个根，

到此，完成了对这一问题的分析、观察、归纳、证明，得出定理：

如果 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）的两个根是 x_1，x_2，那么 $x_1+x_2=-p$，$x_1\cdot x_2=q$

3.对定理的分析

（1）运用这一定理可以不解方程而直接求出方程的两根和与两根积以及可以化为两根和与两根积的代数式的值。

（2）这一定理，揭示了一元二次方程的根与系数的关系，为了纪念在研究和推广这一定理中作出贡献的法国数学家韦达（1540 年—1603 年），人们又把这一定理叫韦达定理。

三、巩固新课

1.（口答）下列各方程中，两根的和与两根的积各是多少？

（1）$x^2-2x+1=0$；（2）$x^2-9x+10=0$；
（3） $2x^2-9x+5=0$；（4） $4x^2-7x+1=0$
（5）$2x^2-5=0$；（6）$x^2-1=0$
2.（口答）判定下列各方程后面的两个数是不是它的两个根：
（1）$x^2-6x-7=0$，（-1，7）；
（2）$3x^2+5x-2=0$，；
（3）$2x^2-3x+1=0$，（3，1）；
（4）$x^2-8x+11=0$，；
（5）$x^2-4x+1=0$，
注意：使用定理时，要先把一元二次方程化成标准型，且不要漏除二次项系数，还要注意负号。
四、小结
1.韦达定理刻划出一元二次方程的两根的和与两根的积和系数间的关系，是我们今后继续研究一元二次方程根的情况的主要工具，必须准确熟记，为进一步使用打好基础。
2.通过这一规律的猜想、归纳、证明，使我们体会到在新知识的学习中，要大胆猜想，善于归纳，严格证明，这正是我们数学课要培养的能力之一。
五、布置作业
1.不解方程，求下列方程的两根之和与两根之积：
（1）$x^2-3x+1=0$；（2）$3x^2-2x=2$；
（3）$2x^2+3x=0$；（4）$3x^2=1$；
（5）$x^2+4x=1$；（6） $x(x-2)=3$；
（7）$2x^2+46x=0$；
（8）$2x^2-43x-22=0$
2.不解方程，求下列关于 x 的方程的两根之和与两根之积。
（1）$x^2-2ax+a^2=b$；
（2）$abx^2(a^4+b^4)x+a^3b^3=0$（$ab\neq0$）
* 3.m 取何值时，方程 $x^2+mx+m-1=0$
（1）两根之和等于 1；
（2）两根之积等于-1；
（3）两根互为倒数；
（4）两根互为相反数。

（袁为民）

“一元二次方程的根与系数的关系”

教案设计（二）

【教学目的】

1.巩固上一节学习的韦达定理，并在此基础上学习它的应用。

2.提高学生综合运用基础知识分析解决较复杂的数学问题的能力。

【教学重点】综合运用所学知识以及把两根的对称式用两根的和与积的代数式来表示。

【教学过程】

一、引入新课

上节课我们学习了韦达定理，利用韦达定理不仅可以解决有关根与系数的关系中的一些比较简单的问题，同时还能解决一些比较复杂的问题，这节课我们就来研究利用韦达定理可以解决的几个问题（板书课题：韦达定理的应用）。

二、新课教学

1.已知一根求另一根。

例 1 已知方程 $5x^2+kx-6=0$ 的一个根是 2，求它的另一个根及 k 的值。

请同学们分析解题方法，同学们可能首先想到的是根据方程的根的概念解题。

解：把 $x=2$ 代入方程得 $5\times2^2+2k-6=0$

解得 $k=-7$

把 $k=-7$ 代入方程得 $5x^2-7x-6=0$，

解得$x_1=2$，$x_2=-\frac{3}{5}$

答：方程的另一个根是$-\frac{3}{5}$，k的值是-7。

肯定同学这一解法的正确性，进一步启发同学还有别的更简单的解法吗？由同学叙述老师板书另一解法，注意格式的书写。

方法小结：

（1）两种方法对比分析，第二种方法更为简单。

（2）正确选择并运用两根之和或两根之积建立仅含一个未知数的方程。

2.不解方程，求某些代数式的值。

例 2 不解方程，求方程 $2x^2+3x-1=0$ 的两个根的

（1）平方和；（2）倒数和。

分析：若首先求出方程的两根，再求两根的平方和，倒数和，问题很容易解决，但此题要求不解方程，那么我们只知道两根之和得多少，两根之积得多少，而要求的是两根的平方和、倒数和，如何向着我们知道的方向转化呢（启发同学思考，回答）

方法小结：

（1）运用韦达定理求某些代数式的值，关键是将所求的代数式恒等变形为用 x_1+x_2 和 x_1x_2 的代数式来表示。

（2）格式、步骤要求规范。

第一步：求出 x_1+x_2，$x_1 \cdot x_2$ 的值；

第二步：将所求代数式用 x_1+x_2，$x_1 \cdot x_2$ 的代数式表示；

第三步：将 x_1+x_2，$x_1 \cdot x_2$ 的值代入并求值。

三、巩固新课

1.已知方程 $3x^2-19x+m=0$ 的一个根是 1，求它的另一个根及 m 的值。

2.设 x_1，x_2 是方程 $2x^2+4x-3=0$ 的两个根，利用根与系数的关系，求下列各式的值：

*3.已知方程 $x^2-3x+m=0$ 的两根差的平方是 17，求 m 的值。

*4.已知方程 $x^2-3x+m=0$ 的两根之差是 5，求 m 的值。

四、全课小结

（1）不解方程，根据一元二次方程根与系数的关系和已知条件结合，并适当加以恒等变形，可求得一些代数式的值，求得方程的另一根，求得方程的系数中的字母的值。

（2）上述问题解决的关键是严格审题，利用韦达定理列等式，并能灵活变形。

（3）以不变应万变，解题中紧紧围绕韦达定理，本着韦达定理列式，朝着能用韦达定理变形。

布置作业

1.如果-5 是方程 $5x^2+bx-10=0$ 的一个根，求方程的另一个根及 b 的值；

2.如果 $2+\sqrt{3}$ 是方程 $x^2-4x+c=0$ 的一个根，求方程的另一个根及 c 的值；

3.设 x_1、x_2 是方程 $2x^2-6x+3=0$ 两个根，利用根与系数的关系，求下列各式的值：

（1）$x_1^2x_2+x_1x_2^2$；（2）$(x_1-x_2)^2$；

（3）$(x_1-2)(x_2-2)$；

（4）$\left(x_1+\dfrac{1}{x_2}\right)\left(x_2+\dfrac{1}{x_1}\right)$；

（5）$\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_2^2}$；（6）$x_1^3+x_2^3$

* 4.已知方程 $2x^2+4+m=0$ 的两个根的平方和是 34，求 m 的值。

*5.已知方程 $x^2-3x+m=0$ 的一个根是另一个根的 2 倍，求 m 的值。

*6.设 $x_1 \cdot x_2$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，求证：

$$(1)x_1^2+x_2^2=\frac{b^2-2ac}{a^2}；$$

$$(2)\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{b}{c}=0$$

（袁为民）

“二次三项式的因式分解”教案设计

【教学目的】

1.使学生理解二次三项式的意义，了解二次三项式的因式分解与解方程的关系。

2.使学生会利用一元二次方程的求根公式在实数范围内将二次三项式分解因式。

3.结合教学对学生进行辩证唯物主义观点的教育。

【教学重点】用求根公式法将二次三项式因式分解。

【教学难点】方程的同解变形与多项式的恒等变形的区别。

【教学过程】

一、复习

1.形如 ax^2+bx+c（$a\neq 0$）的多项式叫做 x 的二次三项式，形如 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）的方程叫做 x 的一元二次方程，回忆二次三项式因式分解的方法，回忆一元二次方程的解法。

2.将下列列各式分解因式：

（1）x^2-3x+2；（2）$6x^2-x-15$；

（3）$4x^2+3x-1$.

3.解下列方程：

（1）$2x^2-6x+4=0$；

（2）$4x^2+8x-1=0$.

老师指出：

有些多项式在有理数范围内可以分解因式，有些多项式在实数范围内才能分解因式，因此只会初一学过的十字相乘法分解二次三项式是不够的。

二次三项式的因式分解结果与一元二次方程的根有密切联系。如分解因式：

$$\begin{aligned}4x^2+8x-1&=4(x2+2x-\frac{1}{4})\\&=4[(x^2+2x+1)-\frac{5}{4}]\\&=4[(x+1)^2-\frac{5}{4}]\\&=4(x+\frac{2-\sqrt{5}}{2})(x+\frac{2-\sqrt{5}}{2})\\&=(2x+2+\sqrt{5})(2x+2-\sqrt{5})\end{aligned}$$

而方程 $4x^2+8x-1=0$ 的两根分别是：

$$x_1=-\frac{2+\sqrt{5}}{2} \qquad x_2=-\frac{2-\sqrt{5}}{2}$$

同学们可以发现，两个一次因式中 x 减去的分别是相应一元二次方程的二个根，我们能不能利用一元二次方程的根去分解相应的二次三项式呢？

二、新课

1.利用根与系数关系证明：

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$（$a\neq 0$）

我们可以利用一元二次方程的两根分解相应的二次三项式。

如果我们用求根公式求得一元二次方程：

$ax^2+bx+c=0$（$a\neq 0$）

的两根 x_1 和 x_2，那么由根与系数关系可知：

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1=\frac{c}{a}$，

$$\therefore ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$$

$$=a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2]$$

$$=a(x-x_1)(x-x_2)$$

这就是说，在分解二次三项式 ax^2+bx+c 的因式时可先用公式求出方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根 x_1，x_2，然后写成

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$．

这种方法叫求根法。

2.例题

例 1 把 $4x^2-5$ 分解因式。

解：∵方程 4x2-5=0 的两根是：

$x_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$x_2=-\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$$\therefore 4x^2-5=4(x-\frac{\sqrt{5}}{2})(x+\frac{\sqrt{5}}{2})$$

$$=(2x-\sqrt{5})(2x+\sqrt{5})$$

提醒学生此题用平方差公式分解更好。

解：∵方程 $4x^2+8x-1=0$ 的根是

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times 4\times(-1)}}{2\times 4}$$

$$=\frac{-8\pm 4\sqrt{5}}{2\times 4}$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore 4x^2+8x-1$$

$$=4(x-\frac{-2+\sqrt{5}}{2})(x-\frac{-2-\sqrt{5}}{2})$$

$$=(2x+2-\sqrt{5})(2x+2+\sqrt{5})$$

注意：

（1）因为分解因式是恒等变形，所以结果不要丢掉二次项系数 a．

（2）分解结果是否把二次项系数乘进括号内，取决于能否把括号内的分母化去。

例 3 把 $2x^2-8xy+5y^2$ 分解因式

解：∵关于 x 的方程 $2x^2-8xy+5y^2=0$ 的根是

$$x=\frac{8y\pm\sqrt{(-8y)^2-4\times2\times5y^2}}{8\times2}$$

$$=\frac{8y\pm2\sqrt{6}y}{2\times2}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{6}}{2}y$$

$$\therefore 2x^2-8xy+5y^2$$

$$=2(x-\frac{4+\sqrt{6}}{2}y)(x-\frac{4-\sqrt{6}}{2}y)$$

注意：结果不要丢掉两个一次因式里的 y。

三、练习

1.分解因式：

（1）$x^2+20x+96$；（2）$6x^2-11xy-7y^2$.

2.在实数范围内分解因式：

（1） x^2-5x+3；（2）$-2x^2-3x+6$；

（3）$3x^2+4xy-y^2$；（4）$3x^2-5xy-y^2$

四、小结

1.二次三项式 ax^2+bx+c（$a\neq0$）分解因式的方法有：

（1）利用公式法；（2）十字相乘法；（3）求根公式法。在实际操作时要灵活选择使用。

2.二次三项式 ax^2+bx+c 能否在实数范围内分解国式，取决于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 是否有实根。

当 $b^2-4ac\geq0$ 时，ax^2+bx+c 在实数范围内可以分解；

当 $b^2-4ac<0$ 时，ax^2+bx+c 在实数范围内不能分解。

五、作业

1.把下列各式分解因式：

（1） $5x^2+11x+6$；（2） $6y^2-13y+6$；

（3）$-4x^2-4x+15$；（4）$10p^2-p-3$；

（5）$3x^2y^2-10xy+7$；（6）$15x^2+16xy-15y^2$

2.在实数范围内分解因式：

（1）x^2-x-1；（2）x^2-2x-4；

（3）$3x^2+2x-3$；（4）$-3m^2-2m+4$；

（5）$x^2-2\sqrt{2}x-3$；（6）$3x^2-5xy-y^2$

* 3.把下列各式分解因式：

（1）$12x^2-7\sqrt{2}xy+2y^2$；

（2）$14x^2-67xy+18y^2$；

（3） $(m^2-m)x^2(2m^2-1)x+m(m+1)$；

（4） $(x^2+x)^2-2x(x+1)-3$

（邓少军）

“简单的高次方程”的解法教案设计

【教学目的】

1.使学生了解一元高次方程的概念，掌握用因式分解法和换元法解一元高次方程。

2.使学生了解高次方程求解的基本思路是降次，即把一元高次方程化为一元一次或一元二次方程。

3.通过教学培养学生分析问题和解决问题的能力。

【教学重点】高次方程向会解的一次或二次方程的转化。

一、复习

1.将下列各式在实数范围内分解因式：

（1）x^2-4x+3；（2）x^4-4；

（3）x^3-2x^2-15x；（4）x^4-6x^2+5；

（5）$(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12$.

教师指出：

在分解（4）、（5）题时，应利用换元的思想，分别把 x^2 和 x^2-x 看成 y，于是就有 y^2-6y+5 和 $y^2-4y-12$.从而把四次多项式转化为二次三项式，使问题易于解决。

2.我们学习过哪些方程？如何求它们的解？

教师指出：我们除学习了一元一次方程和一元二次方程的有关概念和解法外，还学习了分式方程，无理方程。解分式方程的基本思路是化分式方程为整式方程，方法是去分母或换元，解无理方程的基本思路是化无理方程为有理方程，方法是去根号或换元，今天我们学习简单的高次方程，请同学们研究它的解法。

二、新课

1.一元高次方程的定义：一个整式方程经过整理后，如果只含有一个未知数，并且未知数的最高次数大于 2，这样的方程叫一元高次方程。如：$x^4-4=0$，$x^3-2x^2-15x=0$，$x^4-6x+5=0$，$(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$，

等都是一元高次方程，但方程 $\frac{x^3+1}{x}=2$ 不是一元高次方程，它是一个分式方程。

2.一元高次方程的解法：

（1）一元高次方程突出的特点是什么？

（2）利用学过的哪部分知识可以解决这个突出的矛盾？

教师指出：

解一元高次方程的关键就是把高次方程化成一元一次方程或一元二次方程，从而达到解一元高次方程的目的，一元高次方程的解法有因式分解法和换元法。

例 1 解方程 $x^3-2x^2-15x=0$.

解：将方程左边分解因式，

$x(x^2-2x-15)=0$，

$x(x-5)(x+3)=0$.

由此可得：$x=0$ 或 $x-5=0$ 或 $x+3=0$.

所以原方程有三个根：$x_1=0$，$x_2=5$，$x_3=-3$.

注意：只有方程整理成一边为零时，才能用因式分解法解此方程。

例 2 解方程 $x^4-6x^2+5=0$.

这个高次方程是只含有未知数的偶次项的一元四次方程，叫做双二次方程。这类方程，通常利用换元法来解，即把 x^2 换成未知数 y，则这个双二次方程变为关于 y 的一元二次方程，$y^2-6y+5=0$，求出 y 值后，就可以进一步求出原方程的根。

解：设 $x^2=y$，那么 $x^4=y^2$.于是原方程变为：

$y^2-6y+5=0$.

解这个方程得　$y_1=1$，$y_2=5$.

当 y=1 时，$x^2=1$，$x=\pm1$，

当$y=5$时，$x^2=5$，$x=\pm\sqrt{5}$.

所以原方程有四个根：

$x_1=-1$，$x_2=-1$，$x_3=5$，$x_4=-\sqrt{5}$.

注意：用换元法解方程时，求出辅助未知数 y 的值后，应代入所设关系式，进而求出原方程的根。

例 3 解方程 $(x^2-x)^2-4(x^2-x)-12=0$.

若把方程左边展开，整理后得到一个不好解的一元四次方程，因此根据此题的特点，可用辅助未知数 y 代替方程里的 x2＋x，使方程变为关于 y 的一元二次方程，求出 y 的值后就可以进一步求出原方程的根。

解：设 $x^2-x=y$，原方程变为 $y^2-4y-12=0$.

解这个方程得　$y_1=6$，$y_2=-2$.

当 y=6 时，$x^2-x=6$，即　$x^2-x-6=0$

解得 $x_1=3$，$x_2=-2$.

当 y=-2 时，$x^2-x=-2$，即 $x^2-x+2=0$，

因为，$\triangle=-7<0$，所以这个方程没有实数根。

因此，原方程有两个实数根：$x_1=3$，$x_2=-2$.

教师指出：

在具体操作过程中，把 x^2-x 当作一个“整体”，可直接利用十字相乘法分解，即

$(x^2-x-6)(x^2-x+2)=0$，

$(x-3)(x+2)(x^2-x+2)=0$.这样省略了许多代换程序。

三、练习

1.解下列方程：

(1) $x^3+7x^2-60x=0$；

(2) $x^4-14x^2+45=0$；

(3) $(x^2+x)^2+(x^2+x)=2$.

2.用换元法解方程：

$(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8=0$.

四、小结

1.一元高次方程的定义。

2.简单的一元高次方程的解法有：因式分解法和换元法，两种方法的共

同之处是把高次方程转化为一元一次方程或一元二次方程。

五、作业

1.解下列方程：

（1）$(x+1)(x^2+x-6)=0$；

（2）$x^3-8x^2+15x=0$；

（3）$3x^4-2x^2-1=0$；

（4）$(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)=3$.

2*.解下列方程：

（1）$(x^2+2)(x+3)=6$；

（2）$x^3-2x^2-5x+10=0$；

（3）$(x+1)^4-10(x+1)^2+9=0$；

（4）$(3x^2-2x+1)(3x^2-2x-7)+12=0$.

（邓少军）

“分式方程组”教案设计

【教学目的】

1.认识分式方程组的形式，掌握用去分母解可化为二元一次方程组的公式方程组的方法。

2.能设辅助未知数，把适合用换元法解的分式方程组化为整式方程组；初步了解换元法在解方程中的意义和作用。

3.记住解分式方程组也必须验根，并会进行检验。

4.通过分式方程组转化为整式方程组的转化过程，教育学生认识事物的矛盾是可以在一定条件下转化的，要努力创造条件，把“未知”转化为“已知”、用“已知”来解决“未知”，促进矛盾转化，达到解决问题的目的，这种转化也正是数学的重要思想方法，进行辩证唯物主义的观点教育。

【教学过程】

一、复习

1.解方程：$\frac{2}{2x-3}-\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{2x-7}$ $\quad (x=\frac{5}{2})$

（通过此题复习解分式方程的基本思想，解分式方程有可能产生增根必须进行检验及先分别计算两边的解题方法）

2.解二元一次方程组有几种方法？解方程组

程组$\begin{cases}2x-y=10, & ① \\ x+y=-1 & ②\end{cases}$

二、新课

1.给出例1（课本P171例4）解方程组

$$\begin{cases}\frac{y+6}{x-2}-2=0, & ① \\ \frac{x}{x+4}=\frac{y+1}{y-3} & ②\end{cases}$$

指出：这个方程组是由两个分式方程组成的方程组，称分式方程组，实际组成方程组的方程里含有分式方程时，这个方程组就是分式方程组。

解分式方程的基本思想为“化分式方程为整式方程”，同样，解分式方程组的基本思想为“化分式方程组为整式方程组”，也就是把方程组中的每一个分式方程都转化为整式方程，如何转化呢？有的题目仍然可以去分母。比如本例，①式两边都乘以 x-2，化简，得 2x-y=10；②式两边都乘以（x+4）（y-3），化简，得 x+y=-1，解方程组

$$\begin{cases}2x-6=10 \\ x+y=-1\end{cases}$$

由复习2得$\begin{cases}x=3 \\ y=-4\end{cases}$

解分式方程组时，由于变形过程中，曾用含未知数的整式去乘方程的两边，并约去分母，因此可能产生增根，所以验根这个步骤对解分式方程组来说，也是必不可少的。例1经检验，$\begin{cases}x=3 \\ y=-4\end{cases}$是原方程组的解。

2.给出例 2（课本 P172 例 5）解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{6}{x}+\dfrac{6}{y}=\dfrac{1}{2} & ①\\[2mm] \dfrac{8}{x}-\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{10} & ②\end{cases}$$

先请学生试着做一做，此题因易受上例负迁移的影响，学生容易考虑到用约去分母、变为整式方程的方法，于是得到

$$\begin{cases}12y+12x=xy,\\ 80y-30x=3xy.\end{cases}$$

这里含有二次项 xy，是二元二次方程组，目前是无法解的。在学生感到困惑时抛出过渡题：解方程组

$$\begin{cases}4M+6N=\dfrac{1}{2}\\[2mm] 8M-3N=\dfrac{3}{10}\end{cases}$$

（$M=\dfrac{1}{20}$，$N=\dfrac{1}{30}$）

求出解后，引导学生观察、比较例 2 与过渡题之间的关系，得出“可把 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{1}{y}$ 分别当成一个整体，用新的未知数 M、N 来代替，使分式方程组变形为一个二元一次方程组”的结论，这种“把一个式子看作一个整体，用一个新的未知数来代替的方法叫换无法。”它是一种很重要的数学思想方法，“换元”的优越性是把复杂的问题简单化，在原有的解法的基础上拓宽了解题的思路，解决了问题。

解该例时同时指出：“换元”只是把分式方程组转化为整式方程组以求出原方程组的解的手段，目的是求出原方程组的解，所以求出新的未知数的值后必须进一步求出原未知数的值，不可忘记。

解完例 2 后，进一步问：“换元时的设法是否只限制刚才这种互为倒数的情况呢？”从而得出：

设 $M=\dfrac{2}{x}$，$N=\dfrac{3}{y}$ 也可以，使系数更小，更容易求解。

三、巩固

A 练习

1.解下列方程组：

(1) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{4},\\[2mm] \dfrac{x-1}{y+2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$；　　(2) $\begin{cases}\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{y}=0,\\[2mm] \dfrac{x}{x+4}-\dfrac{y+3}{y-3}=0\end{cases}$；

2.指出下列方程组如何换元？换元后的方程组是什么？

(1) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1, \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=-1\end{cases}$；@

(2) $\begin{cases}\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{5}{2y+3}=-4, \\ \dfrac{6}{x-3}-\dfrac{2}{2y+3}=5\end{cases}$；

(3) $\begin{cases}2(x+\dfrac{1}{5})+\dfrac{3}{y-1}=-1, \\ 4(x+\dfrac{1}{5})+\dfrac{3}{y-1}=8\end{cases}$；

(4) $\begin{cases}\dfrac{y+3}{x-1}+\dfrac{4-y}{2x+1}=5, \\ \dfrac{y+3}{x-1}-\dfrac{4-y}{2x+1}=1\end{cases}$；

(5) $\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{10}, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}=-\dfrac{6}{5}.\end{cases}$

3.解上题（2）。

四、小结

本节课我们主要学习了分式方程组的解法，解分式方程组的基本思想为“化分式方程组为整式方程组”，“分式”与“整式”是一对矛盾，在方程或方程组中这一对矛盾可以互相转化。一般，任何事物的矛盾都是可以在一定条件下转化的，人们在解决实际问题时，总是努力创造条件，把“未知”转比为“已知”、用“已知”来解决“未知”，促进矛盾转化，达到解决问题的目的，这种转化也正是数学的重要思想方法，本节课我们介绍了两种化分式方程组为整式方程组的方法：①约去分母，变形为整式方程组；②换元，变形为整式方程组，用换无法解答时要回代求出原未知数的值，最后两种方法都要进行检验。

五、作业

1.课本 P177 习题十一：2。

2.补充：练习 2（3）、（4）、（5）。

（谢雪江）

“简单的二元二次方程组”教案设计

【教学目的】

1.使学生掌握由一个二元二次方程和一个可以分解为两个二元一次方程的方程组成的方程组的解法。

2.通过学习分解降次解二元二次方程组的方法，使学生领会数学中普遍存在的转化思想。

【教学重点和难点】

重点是：用分解降次的方法解二元二次方程组。

难点是：正确地将一个二元二次方程转化为两个二元一次方程。

【教学过程】

一、复习提问

1.二元二次方程组有哪几种类型？

2.解方程组：$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x^2+4y^2=8. \end{cases}$

3.上述方程组属于哪种类型？有什么特点？用什么方法来解？答案是什么？

二、引入新课

前面我们学习了用代入法解由一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组，那么对于第二种类型的方程组，即由两个二元二次方程组成的方程组应如何去解呢？由于这类方程组较为复杂，解法变化也多，我们只学习其中较为特殊的一类方程组的解法。

三、讲解新课

例1　解方程组：$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=1 & ① \\ x^2+4y^2=8 & ② \end{cases}$

分析：

（1）我们看到这是两个二元二次方程组成的方程组，而我们已经会用代入法解一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组，那么，我们提出这样的设想，能不能将上述方程组作一个转化，使之成为我们会解的形式呢？

(2)转化的关键当然是如何把二次降次为一次或者把两个未知数减少为一个未知数。

（3）认真观察方程①的特点，其左边是完全平方式，若将右边的 1 移到左边就可以将方程①变形为左边是两个一次因式乘积的形式而右边是零，通过分解可以把它化为两个二元一次方程 x＋y+1=0 和 x＋y-1=0，分别与方程②组成方程组$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x^2+4y^2=8; \end{cases}$和$\begin{cases} x+y-1=0, \\ x^2+4y^2=8; \end{cases}$解这两个方程组就可求得原方程组的解。

解：由①得 x＋y+1=0，x＋y-1=0.

∴原方程组化为：

$$\begin{cases} x+y+1=0, \\ x^2+4y^2=8; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-1=0, \\ x^2+4y^2=8; \end{cases}$$

分别解这两个方程组得原方程组的解为：

$$\begin{cases} x_1=-2, \\ y_1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=\frac{2}{5}, \\ y_2=-\frac{7}{5}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=2, \\ y_3=-1;@ \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-\frac{2}{5}, \\ x_4=\frac{7}{5}. \end{cases}$$

例2　**解方程组** $\begin{cases} x^2+y^2=20 & ① \\ x^2-5xy+6y^2=0 & ② \end{cases}$

分析：观察这个方程组中方程②的右边为零，左边又可以分解为两个一次因式的乘积：（x-2x）（x-3y）.因此方程②可化为两个二元一次方程，它们与方程①分别组成方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x-2y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=20, \\ x-3y=0. \end{cases}$$

解这两个方程组，就得到原方程组的所有的解，求解过程由同学们自己完成。

从以上两个例题的学习中同学们可以总结点什么体会吗？

(1)由两个二元二次方程组成的方程组在一定的条件下可以转化为一个二元二次方程和一个二元一次方程组成的方程组。

(2)转化的条件是方程组中有一个方程可通过因式分解将二元二次方程降次为两个二元一次方程。

例 3 解方程组

$$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=4 & ① \\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0 & ② \end{cases}$$

分析：观察方程组中是否存在可化为两个二元一次方程的方程。经过例 1、例 2 的学习不难发现，这个方程组不仅有方程可以分解，而且两个方程都可以分解为两个二元一次方程，那么，它可以转化为几个新的方程组？

先把方程①分解为两个二元一次方程与方程②组成两个方程组：

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=2, \\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0; \end{cases}$$

由于方程②也可以分解，故上面的方程又可以分别化为下面四个方程组：

$\begin{cases}x+y=-2,\\x-y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-2,\\x-y=1;\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=2,\\x-y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=2,\\x-y=1.\end{cases}$

解这四个方程组，就可得到原方程组的解。

解由①得（x+y）^{2}=4.

∴x＋y=-2 或 x+y=2.

由②得 x-y-2=0，x-y-1=0，

因此，原方程组可化为四个方程组：

$\begin{cases}x+y=-2,\\x-y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=-2,\\x-y=1;\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=2,\\x-y=2;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y=2,\\x-y=1.\end{cases}$

解这四个方程组，得原方程组的解为：

$\begin{cases}x_1=0,\\y_1=-2;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-\dfrac{1}{2},\\y_2=-\dfrac{3}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=2,\\y_3=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x_4=\dfrac{3}{2},\\y_4=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

注意：在解例3时应注意不能只得到两个方程组，如$\begin{cases}x+y=-2,\\x-y=2;\end{cases}$

$\begin{cases}x+y=2,\\x-y=1;\end{cases}$ 也不能把同一个方程得到的两个二元一次方程组成一组，

把四个二元一次方程构成新方程组的方法是：

x＋y=-2 x＋y=2

x+y=2 x-y=-1

四、巩固练习

1.把下列二元二次方程化为两个二元一次方程：

（1）x^2-3xy＋2y^2=0（x-y=0，x-2y=0）

（2）2x^2-5xy-3y^2=0（2x+y=0，x-3y=0）

（3）x^2-6xy+9y^2=16（x-3y=4-3y=-4）

（4）x^2-4xy＋4y^2-2x+4y-3=0

（x-3y=3，x-2y=-1）

2.解下列方程组：

$(1)\begin{cases}x^2-3xy+2y^2=0,\\3x^2+2xy=20;\end{cases}$

$(2)\begin{cases}x^2+y^2=5,\\2x^2-3xy-2y^2=0.\end{cases}$

五、小结

以上例题的解法告诉我们，对于第二类型的方程组，如果其中至少有一

个方程能分解为两个二元一次方程，那么这个方程组就能转化为两个第一类型的方程组或四个二元一次方程组，从而求出解来，我们把这种方法叫分解降次法。解题时要先认真观察方程组的特点，选择恰当的解法。

六、作业

解下列方程组：

1．(1) $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 0, \\ y = \dfrac{1}{2}x_2 \end{cases}$；

（2）$\begin{cases} x^2 - 4xy + 3y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

2. （1）$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ 9x^2 - 12xy + 4y^2 = 9 \end{cases}$；

(2) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9, \\ (x-y)^2 - 3(x-y) - 10 = 0. \end{cases}$

（单志惠）