学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

历 届 高 考 试 题

数 学

BOOK

内部资料 非卖品

1952 年试题

数学试题分两部分

第一部分

注意:第一部分共二十题,均答在题纸上,每题的中间印着一道横线,将正确的答案就填写在横线上.

例题:若 $2x-1=x+3$,则 $x=$__4__.

本题的正确答案是 4,所以在横线上填写 4.

1.分解因式:$x^4-y^4=$____________.

2.若 $\log_{10}2x=2\log_{10}x$,问 $x=$____________.

3.若方程式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根为 $1,-1,\frac{1}{2}$,则 $c=$______.

4.若 $\sqrt{x^2+7}-4=0$,则 $x=$__________.

5.$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=$__________.

6.两个圆的半径都是 4 寸,并且一个圆通过另一圆的圆心,则这两个圆的公共弦之长是__________寸.

7.三角形△ABC 的面积是 60 平方寸,M 是 AB 的中点,N 是 AC 的中点,则△AMN 的面积是__________平方寸.

8.正十边形的一内角是__________度.

9.祖冲之的圆周率 $\pi=$__________.

10.球的面积等于大圆面积的__________倍.

11.直圆锥之底之半径为 3 尺,斜高为 5 尺,则其体积为_______立方尺.

12.正多面体有__________种,其名称为____________.

13.已知 $\sin\theta=\frac{1}{3}$,求 $\cos2\theta=$__________.

14.方程式 $\tan2x=1$ 的通解为 $x=$__________.

15.太阳仰角为 30°时塔影长 5 丈,求塔高=__________.

16.三角形△ABC 之 b 边为 3 寸,c 边为 4 寸,A 角为 30°,则△ABC 的面积为__________平方寸.

17.已知一直线经过点(2,-3),其斜率为-1,则此直线之方程式为________________.

18.若原点在一圆上,而此圆的圆心为点(3,4),则此圆的方程式为______________.

19.原点至 $3x+4y+1=0$ 之距离=__________.

20.抛物线 $y^2-8x+6y+17=0$ 之顶点之坐标为________.

第二部分

注意:第二部分共四题,均答在后面白纸上.

1.解方程式 $x^4+5x^3-7x^2-8x-12=0$.

2.△ABC 中,∠A 的外分角线与此三角形的外接圆相交于 D,求证:BD=CD.

3.设三角形的边长为 a=4,b=5,c=6,其对角依次为 A,B,C.(1)求 cosC.(2)求 sinC,sinB,sinA.(3)问 A,B,C 三个角各为锐角或钝角?

4.一椭圆通过(2,3)及(-1,4)两点,中心为原点,长短轴重合于坐标轴,试求其长短轴及焦点.

1952 年试题答案

第一部分

1. $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$.
2. 2.
3. -1.
4. ±3.
5. -24
6. $4\sqrt{3}$
7. 15.
8. 144°
9. $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$, 3.14159265.
10. 4.
11. 12π.
12. 5,正四面体,正六面体,正八面体,正十二面体,正二十面体.
13. $\frac{7}{9}$
14. $\frac{1}{2}(n\pi+\frac{\pi}{4})$.
15. $\frac{5}{3}\sqrt{3}$
16. 3.
17. $x+y+1=0$.
18. $x^2+y^2-6x-8y=0$
19. $\frac{1}{5}$
20. (1,-3)

第二部分

1. 2,-6,ω,ω^2.

3. $\cos C=\frac{1}{8}$, $\sin C=\frac{3}{8}\sqrt{7}$, $\sin B=\frac{5}{16}\sqrt{7}$, $\sin A=\frac{1}{4}\sqrt{7}$.

A,B,C 皆为锐角。

4. 长轴: $\frac{2}{3}\sqrt{165}$, 短轴: $\frac{2}{7}\sqrt{385}$　焦点: $(0,\pm\frac{2}{21}\sqrt{1155})$.

1953 年试题

一、下列十题顺次解答，不必抄题（但须写明题号：甲，乙，丙……），结果务须明确，过程可以简单。

甲、解 $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-1}{x+1}=\frac{10}{3}$

乙、若 $3x^2+kx+12=0$ 之二根相等，求 k.

丙、求 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 之值.

丁、求 $\log_{10}\frac{300}{7}+\log_{10}\frac{700}{3}+\log_{10}1$ 之值 .

戊、求 tan(870°)

己、若 $\cos 2x=\frac{1}{2}$，求 x 之通值.

庚、两三角形相似之条件为何？（把你所知道的都写出来）

辛、长方体之长、宽、高为 12 寸，3 寸，4 寸，求对角线之长.

壬、垂直三棱柱之高为 6 寸，底面三边之长为 3 寸，4 寸，5 寸，求体积.

癸、球之表面积为 36π 方寸，求体积.

二、解 $\begin{cases} x^2-2xy+3y^2=9, \\ 4x^2-5xy+6y^2=30. \end{cases}$

三、(1)化简 $\sqrt{\frac{12}{25}}+\sqrt[4]{90000}+\sqrt[6]{\frac{64}{27}}$.

(2)求 $(2x^3+\frac{1}{x})^{12}$ 之展开式中之常数项.

四、锐角三角形 ABC 之三高线为 AD，BE，CF，垂心为 H；求证 HD 平分∠EDF.

五、已知三角形的两个角为 45°及 60°，而其夹边长 1 尺；求最小边之长及面积.

1953 年试题答案

一、下列十题顺次解答，不必抄题（但须写明题号：甲，乙，丙……），结果务须明确，过程可以简单。

甲、将原方程整化得 $6(x^2+1)=10(x^2-1)$，故 $4x^2=16$，$x=\pm 2$.

乙、原方程二根相等之条件为 $k^2-4\times 3\times 12=0$,

即 $k^2=12^2$，$k=\pm 12$.

丙、原行列式 $=3\times 4\times 5-6\times 7-4\times 7+2\times 5$

$=60-42-28+10=0$.

丁、原式 $=\log_{10}(\frac{300}{7}\times\frac{700}{3}\times 1)=\log_{10}10000=4$.

戊、$\tan 870° = \tan(900° - 30°)$

$= \tan(-30°) = -\tan 30°$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

己、因 $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$，故 $2x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$，$x = n\pi \pm \dfrac{\pi}{6}$.

庚、(i) ∠A=∠A′,∠B=∠B′;

(ii) ∠A=∠A′,AB∶A′B′=AC∶A′C′;

(iii) AB∶A′B′=AC∶A′C′=BC∶B′C′;

三者各为△ABC∽△A′B′C′之条件.

辛、对角线 $= \sqrt{12^2 + 3^2 + 4^2}$ 寸 $= \sqrt{169}$ 寸 $= 13$ 寸.

壬、因 $3^2+4^2=5^2$，故底面为直角三角形，

其面积为 $\dfrac{1}{2} \times 3 \times 4$ 方寸 $= 6$ 方寸.

(或用"底面积 $= \dfrac{1}{4}\sqrt{(3+4+5)(3+4-5)(3-4+5)(-3+4+5)}$

方寸 $= 6$ 方寸"亦可)

棱柱体积=6×6 立方寸=36 立方寸.

癸、设球的半径为 R 寸，则 $4\pi R^2 = 36\pi$，∴ $R=3$.

球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi$（立方寸）.

二、解：原方程组消去常数项，得

$$2x^2+5xy-12y^2=0$$

将此方程左边分解因式，得

$$(x+4y)(2x-3y)=0,$$

即 $x+4y=0$，$2x-3y=0$.

由此有

(I) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9, \\ x + 4y = 0; \end{cases}$ (II) $\begin{cases} x^2 - 2xy + 3y^2 = 9, \\ 2x - 3y = 0. \end{cases}$

解方程组(Ⅰ)，得

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}\sqrt{3}, \\ y_1 = -\dfrac{1}{3}\sqrt{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2 = -\dfrac{4}{3}\sqrt{3}, \\ y_2 = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}; \end{cases}$

解方程组(Ⅱ)，得

$\begin{cases} x_3 = 3, \\ y_3 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4 = -3, \\ y_4 = -2. \end{cases}$

三、解：(1)原式 $=\sqrt{\dfrac{3\times 2^{2}}{5^{2}}}+\sqrt[4]{3^{2}\times 10^{4}}+\sqrt[6]{\dfrac{2^{6}}{3^{3}}}$

$$=\frac{2}{5}\sqrt{3}+10\sqrt{3}+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$=\frac{166}{15}\sqrt{3}$$

(2)由二项展开式的通项公式:

$$T_{r+1}=C_{12}^{r}(2x^{3})^{12-r}(\frac{1}{x})^{r}$$

$$=C_{12}^{r}\cdot 2^{12-r}\cdot x^{36-4r}$$

令 36-4r=0,

∴ r=9.

故常数项为

$$C_{12}^{9}\cdot 2^{12-9}=C_{12}^{3}\cdot 2^{3}=1760.$$

四、证明:由于 AD⊥BC,BE⊥CA,

∴ 点 A,B,D,E 共圆.

故 ∠ADE=∠ABE.

又因点 F,B,C,E 共圆,

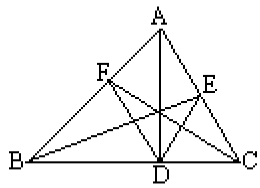
∴ ∠FBE=∠FCE.

又因点 C,A,F,D 共圆,

∴ ∠FCA=∠FDA.

综上可得∠ADE=∠FDA,

即 AD 平分∠EDF.



五、解:已知∠B=45°,∠C=60°,于是∠A=75°.

由正弦定理得

$$\frac{AC}{\sin 45^\circ}=\frac{1}{\sin 75^\circ},$$

∴ $AC=\dfrac{\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})}=\sqrt{3}-1$(尺).

△ABC的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times 1\times(\sqrt{3}-1)\cdot\sin 60^\circ$

$$=\frac{1}{4}(3-\sqrt{3})\text{(平方尺)}.$$

1954 年试题

一、下列六题顺次解答,不必抄题(但须写明题号:甲,乙,丙,……).结果务须明确,过程可以简单.

甲、化简 $[(a^{-\frac{3}{2}}\cdot b^{2})^{-1}\cdot(a\cdot b^{-3})^{\frac{1}{2}}\cdot(b^{\frac{1}{2}})^{7}]^{\frac{1}{3}}$

乙、解 $\frac{1}{6}\log x=\frac{1}{3}\log a+2\log b+\log c$.

丙、用二项式定理计算$(3\cdot 02)^4$,使误差小于$\frac{1}{1000}$.

丁、直角三角形弦上半圆的面积等于勾上半圆与股上半圆面积之和,试证明之.

戊、已知球的半径为 r,求内接正方体的体积.

己、已知三角形的一边之长为 a ,两邻角为β 及γ ,求计算边长 b 的计算公式.

二、描绘 $y=3x^2-7x-1$ 之图象,并按下列条件分别求 x 的值的范围:

(i)$y>0$; (ii)$y<0$.

三、假设两圆互相外切,求证用连心线段为直径所作的圆必与前两圆的外公切线相切.

四、解$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=1+\sin 2x$,求x之通值.

五、有一直圆锥,全面积为 a;与之同底同高之直圆柱全面积为 a′.求该圆锥高与母线之比.

1954 年试题答案

一、下列六题顺次解答,不必抄题,结果务须明确,过程可以简单.

甲、解:原式 $=(a^{\frac{3}{2}}b^{-2}a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{3}{2}}b^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}$

$$=(a^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}b^{-2-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}$$

$$=(a^{2}\cdot b^{0})^{\frac{1}{3}}$$

$$=a^{\frac{2}{3}}$$

乙、解:原式可化为

$$\log x^{\frac{1}{6}}=\log a^{\frac{1}{3}}b^{2}c.$$

于是有

$$x^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}}b^{2}c$$

$$\therefore\quad x=(a^{\frac{1}{3}}b^{2}c)^{6}=a^{2}b^{12}c^{6}.$$

丙、解:由 $(3.02)^4=(3+0.02)^4$

$$=3^4+4\times3^3\times0.02+6\times3^2\times(0.02)^2$$

$+4\times3\times(0.02)^3+(0.02)^4$,

可知第 4 项的值已小于 0.01,所以,计算可到第 3 项为止,其误差必小于千分之一.

$$\begin{aligned}(3.02)^4 &= 3^4+4\times3^3\times0.02+6\times3^2\times(0.02)^2\\ &=81+2.16+0.0216\\ &=83.182\end{aligned}$$

丁、证:设直角三角形的勾为 a,股为 b,弦为 c,则有

$$c^2=a^2+b^2$$

所以弦上半圆的面积 $=\frac{1}{2}\pi(\frac{c}{2})^2=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{c^2}{4}$

$$=\frac{1}{2}\pi\cdot\frac{a^2+b^2}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\pi(\frac{a}{2})^2+\frac{1}{2}\pi(\frac{b}{2})^2.$$

即弦上半圆面积=勾上半圆面积+股上半圆的面积.

戊、解:内接正方体的中心即该球的球心.正方体过中心的对角线为该球的直径,故其长为 2r.若设正方体的边长为 a,则有

$$3a^2=4r^2,$$

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{3}r.$$

所以内接正方体的体积

$$V=a^3=(\frac{2}{3}\sqrt{3}r)^3$$

$$=\frac{8}{9}\sqrt{3}r^3$$

己、解:由正弦定理可知

$$\frac{a}{\sin[180°-(\beta+r)]}=\frac{b}{\sin\beta},$$

$$\therefore\quad b=\frac{a\sin\beta}{\sin[180°-(\beta+r)]}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+r)}$$

二、解:将原方程变形,可得

$$(x-\frac{7}{6})^2=\frac{1}{3}(y+\frac{61}{12}).$$

于是,抛物线顶点为$(\frac{7}{6},-\frac{61}{12})$(如图).

抛物线与 x 轴的交点为:

$$M(\frac{7}{6}-\frac{\sqrt{61}}{6},0),$$

$$N(\frac{7}{6}+\frac{\sqrt{61}}{6},0),$$

即 $M(\frac{7-\sqrt{61}}{6},0),$

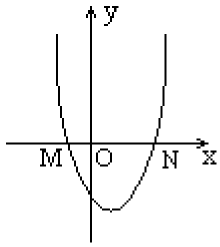
$N(\frac{7+\sqrt{61}}{6},0)$.

当 y>0 时,x 的取值范围为:

$$(-\infty,\frac{7-\sqrt{61}}{6}),(\frac{7+\sqrt{61}}{6},+\infty).$$

当 y<0 时,x 的取值范围为:

$$(\frac{7-\sqrt{61}}{6},\frac{7+\sqrt{61}}{6}).$$

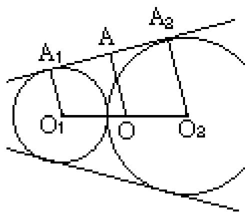


三、证明:设⊙O_1 及⊙O_2 为互相外切的二圆,其中一外公切线为 A_1A_2,切点 A_1 及 A_2(如图),令点 O 为连心线 O_1O_2 的中点,过 O 作 $OA\perp A_1A_2$.

∵ $OA=\frac{1}{2}(O_1A_1+O_2A_2)=\frac{1}{2}O_1O_2$

∴ 以 O_1O_2 为直径,即以 O 为圆心,OA 为半径的圆必与直线 A_1A_2 相切.

同理可证,此圆必切于⊙O_1 及⊙O_2 的另外一条外公切线.



四、解:$\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=(\cos x+\sin x)^2$,

$\cos x+\sin x=(\cos x+\sin x)^2(\cos x-\sin x)$,

$(\cos x+\sin x)(1-\cos^2x+\sin x^2)=0$,

$2(\cos x+\sin x)\cdot\sin^2x=0$,

∴ $\cos x+\sin x=0,\sin^2x=0$.

由方程 $\cos x+\sin x=0$ 得,$tgx=-1$.

∴ $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$ (k为整数).

由方程 $\sin^2x=0$,得

$x=k\pi$ (k 为整数).

由检验可知

$x=k\pi-\frac{\pi}{4},x=k\pi$ (k为整数)均为方程的通解.

五、解:设直圆锥的高为 h,底面半径为 R,母线长为 l,则

$$\frac{a}{a'}=\frac{\pi R(R+l)}{2\pi R(R+h)}=\frac{R+l}{2(R+h)},$$

∴　　$2a(R+h)=a'(R+l)$.

由$R=\sqrt{l^2-h^2}$,代入可得

$$2a(\sqrt{l^2-h^2}+h)=a'(\sqrt{l^2-h^2}+l),$$

$$(2a-a')\sqrt{l^2-h^2}=a'l-2ah.$$

两边同乘以 l ,可得

$$(2a-a')\sqrt{l-(\frac{h}{l})^2}=a'l-2a\cdot\frac{h}{l}$$

等式两边平方,

$$(4a^2-4aa'+a'^2)\left[l-(\frac{h}{l})^2\right]=a'^2-4aa'\cdot\frac{h}{l}+4a^2(\frac{h}{l})^2,$$

$$(8a^2-4aa'+a'^2)(\frac{h}{l})^2-4aa'\cdot\frac{h}{l}+(4aa'-4a^2)=0.$$

这个关于$\frac{h}{l}$的一元二次方程的判别式

$$\Delta=(-4aa')^2-4(8a^2-4aa'+a^2)(4aa'-4a^2)$$

$$=16a(2a-a')^3>0,$$

∴该一元二次方程有两个实根,解得

$$\frac{h}{l}=\frac{4aa'\pm\sqrt{16a(2a-a')^3}}{2(8a^2-4aa'+a'^2)}$$

$$=\frac{2aa'\pm2(2a-a')\sqrt{a(2a-a')}}{4a^2+(2a-a')^2}.$$

即为圆锥的高与母线的比.

1955 年试题

一、下列四题顺次解答,不必抄题(但须写明题号:甲,乙,丙,丁).结果务须明确,过程可以简单.

甲、以二次方程 $x^2-3x-1=0$ 的两根的平方为两根作一二次方程.

乙、等腰三角形一腰的长是底边的 4 倍,求这三角形各角的余弦.

丙、已知正四棱锥底边的长为 a,侧棱与底面的交角为 45°,求这棱锥的高.

丁、写出:二面角的平面角的定义.

二、求 b,c,d 的值,使多项式 x^3+bx^2+cx+d 适合下列三条件:

(1)被 x-1 整除;

(2)被 x-3 除时余 2;

(3)被 x+2 除与被 x-2 除时余数相等.

三、由直角三角形勾上一点 D 作弦 AB 的垂线交弦于 E、股的延长线于 F、外接圆周于 Q,求证:EQ 为 EA 与 EB 的比例中项又为 ED 与 EF 的比例中项.

四、解方程 cos2x=cosx+sinx,求 x 的通值.

五、一三角形三边的长成等差级数,其周长为 12 尺,面积为 6 平方尺,求证这三角形为一直角三角形.

1955 年试题答案

一、甲、设方程 $x^2-3x-1=0$ 的二根为 α,β,

则 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-1$.

∴ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2(-1)=11$

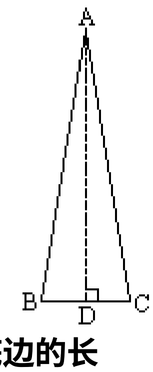
$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1$

∴ 所求的二次方程为 $y^2-11y+1=0$.

乙、设△ABC 中 AB=AC=4BC,AD 为 BC 边上的高,则各角的余弦为:

$$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{16BC^2+16BC^2-BC^2}{2\cdot 4BC\cdot 4BC}=\frac{31}{32},$$

$$\cos B=\cos C=\frac{CD}{CA}=\frac{\frac{1}{2}BC}{4BC}=\frac{1}{8}.$$



丙、设 S-ABCD 为一正四棱锥,SH 为其高,底边的长为 a,∠SAH=45°,

则 △SHA 为一等腰直角三角形,

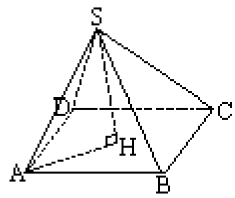
即　SH=AH.

但　AH 为其底的对角线的一半,且其底边的长为 a,

$\therefore\ AH=\frac{a}{2}\sqrt{2},$

$\therefore\ SH=\frac{a}{2}\sqrt{2}.$

丁、自二面角的棱上一点在其各面上作棱的垂线,此二垂线所夹的角叫做该二面角的平面角.



二、解:∵x^3+bx^2+cx+d 可被 x-1 整除.

∴　1+b+c+d=0;　　　　　　①

∵　x^3+bx^2+cx+d 被 x-3 除余 2,

∴　27+9b+3c+d=2;　　　　　②

∵　x^3+bx^2+cx+d 被 x+2 除与被 x-2 除时余数相等,

∴　-8+4b-2c+d=8+4b+2c+d,　　③

由③:　c=-4.

代入①和②:

b+d=3,　　　　　　④

9b+d=-13.　　　　　⑤

由④和⑤:

8b=-16,

b=-2,

d=5.

三、证:连结 QA,QB,则∠AQB 为一直角,而 EQ 为直角三角形 AQB 弦上的高,

∴　EQ 为 EA,EB 的比例中项,

又　∵　∠1=∠2.(均与∠ABF 互余)

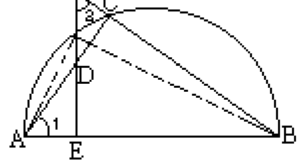
∴　△AED∽△FEB,

∴　EA∶EF=ED∶EB,

∴　EA·EB=EF·ED,

∴　EQ^2=EF·ED,

即　EQ 为 ED 与 EF 的比例中项.



四、解:cos2x=cosx+sinx.

$\cos^2x-\sin^2x=\cos x+\sin x.$

(cosx+sinx)(cosx-sinx-1)=0,

cosx+sinx=0,　①

cosx-sinx-1=0,②

由①： $\tan x = -1$.　$\therefore x = n\pi - \frac{\pi}{4}$.

由②： $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{4}$,

$x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$,

$\therefore x = 2n\pi$ 或 $2n\pi - \frac{\pi}{2}$.

五、证明:设△ABC 即此三角形,CA、AB、BC 各边的长为 x 尺,(x-y)尺,(x+y)尺.

则　$x+y+x+x-y=12$　①

$\sqrt{6[6-(x+y)](6-x)[6-(x-y)]} = 6$　②

由①得 $x=4$.　③

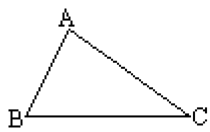
由②及③得 $6(6-4-y)(6-4)(6-4+y)=36$,

$12(2-y)(2+y)=36, 4-y^2=3, y^2=1, \therefore y=\pm 1$,

故此三角形各边的长为 3 尺,4 尺,5 尺.

∵　$3^2+4^2=5^2$

∴　△BAC 为一直角三角形.



1956 年试题

下列各题顺次解答,不必抄题（但须写明题号,例如：I 甲、 I 乙、 II 、 III等）.

一、甲、利用对数性质,计算 $\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 50$.

（log 是以 10 为底的对数 $\log_{10}$ 的记号）

乙、设 m 是实数,求证方程 $2x^2-(4m-1)x-m^2-m=0$ 的两个根必定都是实数.

丙、设 M 是△ABC 的边 AC 的中点,过 M 作直线交 AB 直线于 E,过 B 作直线平行于 ME 交 AC 直线于 F.求证△AEF 的面积等于△ABC 的面积的一半.

丁、一个三角形三边的长分别是3尺,4尺及$\sqrt{37}$尺,求这个三角形的最大角的度数.

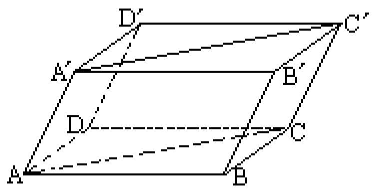
戊、设$\tan\alpha$与$\tan\beta$是方程$x^2+6x+7=0$的两个根,求证 $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

二、解联立方程

$$\begin{cases}7\sqrt{x+y}-x-y=12,\\ x^2+y^2=136.\end{cases}$$

三、设P是等边三角形ABC外接圆$\overset{\frown}{BC}$上的一点,求证 $PA^2=AB^2+PB\cdot PC$.

四、有一四棱柱体,底面 ABCD 为菱形,∠A’AB=∠A’AD（如右图）,求证平面 A’ACC’垂直于底面 ABCD.



五、若三角形的三个角成等差级数,则其中一定有一个角是 60°;若这样的三角形的三边又成等比级数,则三个角都是 60°,试证明之.

1956 年试题答案

一 、甲、解： ∵$\lg 2=1-\lg 5$,$\lg 50=1+\lg 5$,

原式$=\lg^2 5+\lg 2\cdot\lg 50=\lg^2 5+(1-\lg 5)(1+\lg 5)=\lg^2 5+1-\lg^2 5=1$.

乙、解:方程的判别式$\Delta=(4m-1)^2+8(m^2+m)=24m^2+1$,

∵ $m^2\geq 0$,∴$\Delta>0$,

所以二个根全是实数.

丙、解:连 BM.

△AEF 的面积=△ABF 的面积+△BEF 的面积,

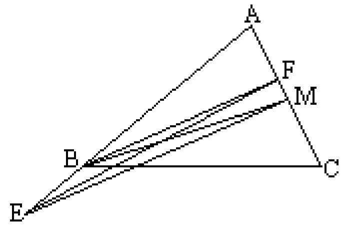
∵ BF∥MF,

∴ △BEF 的面积=△BFM 的面积,

∴ △AEF 的面积=△BAM 的面积.

$\because$ △BAM的面积 $=\frac{1}{2}$△ABC的面积,

$\therefore$ △AEF的面积 $=\frac{1}{2}$△ABC的面积.

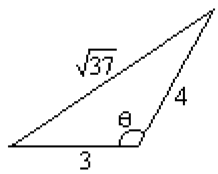


丁、解:最大角对最大边,由余弦定律得

$37=3^2+4^2-2\cdot 3\cdot 4\cos\theta$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{9+16-37}{24}=-\frac{1}{2}$,

$\therefore\ \theta=120°$.



戊、解:$\tan\alpha+\tan\beta=-6$,$\tan\alpha\cdot\tan\beta=7$;

$\therefore\ \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-6}{-6}=1$,

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$.

二、解: $\begin{cases}7\sqrt{x+y}-x-y=12 & (1)\\ x^2+y^2=136 & (2)\end{cases}$

由(1)移项得 $(x+y)-7\sqrt{x+y}+12=0$,

即 $(\sqrt{x+y}-3)(\sqrt{x+y}-4)=0$,

$\therefore\ \sqrt{x+y}=3$,或$\sqrt{x+y})=4$.

两边分别平方,x+y=9,或 x+y=16.

分别与(2)联立:

(Ⅰ)$\begin{cases}x+y=9,\\ x^2+y^2=136;\end{cases}$ (Ⅱ)$\begin{cases}x+y=16,\\ x^2+y^2=136.\end{cases}$

解方程组(Ⅰ),得

(Ⅰ)$\begin{cases}x+y=9,\\ x-y=\sqrt{191};\end{cases}$ (Ⅱ)$\begin{cases}x+y=9,\\ x-y=-\sqrt{191};\end{cases}$

$\begin{cases}x_1=\frac{9+\sqrt{191}}{2},\\ y_1=\frac{9-\sqrt{191}}{2};\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{9-\sqrt{191}}{2},\\ y_2=\frac{9+\sqrt{191}}{2};\end{cases}$

解方程组(Ⅱ)得

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x+y=16,\\x-y=4;\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})\begin{cases}x+y=16,\\x-y=-4;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_3=10,\\y_3=6;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_4=6,\\y_4=10;\end{cases}$$

综上述,共得四组解:

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{9+\sqrt{191}}{2},\\y_1=\dfrac{9-\sqrt{191}}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\dfrac{9-\sqrt{191}}{2},\\y_2=\dfrac{9+\sqrt{191}}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}x_3=10,\\y_2=6;\end{cases}\quad\begin{cases}x_4=6,\\y_4=10.\end{cases}$$

经检验,以上四组解均为原方程的解.

三、解:令 AP 与 BC 的交点是 M,

∵ ∠APB=∠ABM.

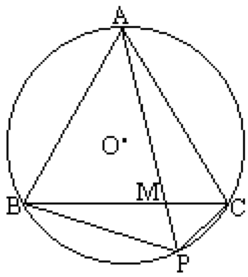
∴ △ABP∽△AMB,∴ $AP\cdot AM=AB^2$,(1)

∵ ∠APC=∠BPM,∠PAC=∠PBM,

∴ △ACP∽△BMP,∴$AP\cdot MP=PB\cdot PC$, (2)

(1)+(2),得 $AP\cdot AM+AP\cdot MP=AB^2+PB\cdot PC$,

即 $AP^2=AB^2+PB\cdot PC$.



四、

解:∵AB = AD ∴AO⊥BD.

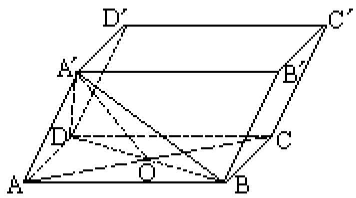
∵ ∠A'AB = ∠A'AD,

∴ △AAB≌△A'AD.

∴ A'B = A'D, ∴ A'O⊥BD,

∴ 平面A'OA⊥BD,

故 平面 A'ACC'⊥ABCD.



五、解:令三角形的三个角是 A,B,C,

由 A-B=B-C,A+B+C=180°,

得 B=60°

设三边的长为 a,aq,aq^2,则长边 aq 的边所对的角即为 60°,

根据余弦定理,

$(aq)^2=a^2+(aq^2)^2-2a\cdot aq^2\cos 60°$,

$a^2q^2=a^2+a^2q^4-a^2q^2$.

∴ $q=\pm 1$.但 $q=-1$ 不合题意,

于是此三角形边长各为 a 因而三个角都是 60°.

1957 年试题

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如:Ⅰ甲、Ⅰ乙、Ⅱ、Ⅲ等.

一、甲、化简 $(2\frac{7}{9})^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+(2\frac{10}{27})^{-\frac{2}{3}}$.

乙、求适合不等式 $x^2+x<2$ 的实数 x 的范围.

丙、求证:$\cot 22°30' = 1+\sqrt{2}$.(注)cot 是余切的符号.

丁、在四面体 ABCD 中,AC=BD,P、Q、R、S 依次为棱 AB、BC、CD、DA 的中点.求证 PQRS 为一菱形.

戊、设 a、b 为异面二直线,EF 为 a、b 的公垂线,α为过 EF 中点且与 a、b 平行的平面,M 为 a 上任一点,N 为 b 上任一点.求证:线段 MN 被平面α二等分.

(注)“异面二直线”也叫“不共面二直线”.

二、解方程组 $\begin{cases}\lg(2x+1)+\lg(y-2)=1\\ 10^{xy}=10^{x}\cdot 10^{y}\end{cases}$

(注)lg 是以 10 为底的对数 $\log_{10}$ 的符号.

三、若△ABC的内切圆半径为r,求证BC边上的高$AD=\dfrac{2r\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$.

四、若△ABC 为锐角三角形,以 BC 边为直径作圆,并从 A 作此圆的切线 AD,与圆切于 D,又在 AB 边上取 AE 等于 AD,并过 E 作 AB 的垂线与 AC 边的延长线交于 F,求证:

(i)AE∶AB=AC∶AF;

(ii)△ABC 的面积=△AEF 的面积.

五、求证:∶方程$x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+(\sqrt{2}-q)x+q=0$的一个根是1.设这个方程的三个根是一个△ABC的三个内角的正弦sinA、sinB、sinC,求A、B、C的度数及q的数值.

1957 年试题答案

一、甲、$(2\frac{7}{9})^{\frac{1}{2}}+0.1^{-2}+(2\frac{10}{27})^{-\frac{2}{3}}$

$$=(\frac{25}{9})^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{0.1^2}+\frac{1}{(\frac{64}{27})^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{5}{3}+100+\frac{9}{16}$$

$$=102\frac{11}{48}$$

乙、解:$x^2+x<2$

即　(x+2)(x-1)<0

∴　-2<x<1.

丙、证: ∵ $\cot 22°30' = \cot \frac{45°}{2}$

$$= \frac{1+\cos 45°}{\sin 45°} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 1+\sqrt{2}$$

丁、证:(如图)

∵　P、Q 依次为 AB、BC 的中点,

∴ PQ平行于AC且等于AC的$\frac{1}{2}$.

同理RS也平行于AC且等于AC的$\frac{1}{2}$.

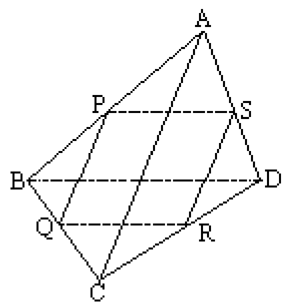
∴　PQ 与 RS 平行且相等.

∴　PQRS 为一平行四边形.

又因AC = BD,$PQ = \frac{1}{2}AC$, $QR = \frac{1}{2}BD$,

∴　PQ=QR.

∴　PQRS 为一棱形.



戊、证:(如图)

过 a 作平面β与α平行,过 b 作平面γ与α平行,

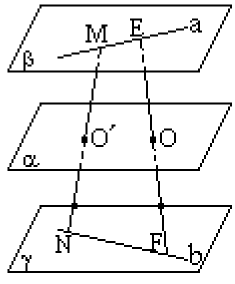
则　α‖β‖γ.

设 EF 中点为 O,MN 与α的交点为 O',

则　MO':O'N= EO:OF.

∵　EO=OF,

∴　MO'= O'N,即线段 MN 被平面α二等分.



二、解:

$$\begin{cases} \lg(2x+1)+\lg(y-2)=1, & ① \\ 10^{xy}=10^{x}\cdot 10^{y}. & ② \end{cases}$$

由①得：(2x+1)(y-2)=10.　　　　③

由②得：xy=x+y.　　　　④

由③得：2xy-4x+y-12=0.　　　　⑤

⑤—④×2 得：-4x+y-12=-2x-2y,

整理得：2x-3y+12=0,

$\therefore y=\frac{2}{3}x+4$.　　　　⑥

代入④得：$x(\frac{2}{3}x+4)=x+\frac{2}{3}x+4$,

即　$\frac{2}{3}x^{2}+\frac{7}{3}x-4=0$,

即　$2x^{2}+7x-12=0$,

∴　$x=\frac{-7\pm\sqrt{49+96}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{145}}{4}$.

代入⑥得：$y=\frac{17\pm\sqrt{145}}{4}$.

∵　$\sqrt{145}>12$,

∴　当 $y=\frac{17-\sqrt{145}}{4}$ 时,$y-2<0$不合原题.

∴　原方程组的解为：$\begin{cases} x=\frac{-7+\sqrt{145}}{4}, \\ y=\frac{17+\sqrt{145}}{4}. \end{cases}$

三、证明:（如图）

设 O 为△ABC 的内切圆心,E 为 AB 边上的切点,连结 OB、OA 与 OE,则 OB、OA 分别平分∠B、∠A,而 OE⊥AB.

在直角三角形OEB中,$BE=OE\cot\angle EBO=r\cot\frac{B}{2}$,

同理可得 $EA=r\cot\frac{A}{2}$.

$\therefore AB=AE+EB=r(\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2})$.

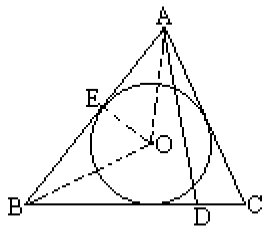
在直角三角形 ADB 中,AD=ABsinB,

$$\therefore AD = r(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2})\sin B$$

$$= r \cdot \frac{\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}} \cdot 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$= 2r \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{A}{2}} \cdot \cos\frac{B}{2}$$

$$= \frac{2r\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}.$$



四、证明：（如图）

(ⅰ)设 AB 与圆交于 G,则 AG∶AD=AD∶AB.

∵AE=AD, ∴AG∶AE=AE∶AB.

连结 GC,则 GC‖EF,∴　AG∶AE=AC∶AF.

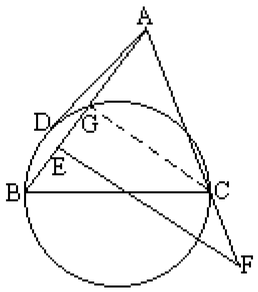
∴AE∶AB= AC∶AF.

(ⅱ)　∵AE∶AB= AC∶AF,∴AB·AC=AE·AF.

∵△ABC 与△AEF 有公共角∠A,

$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle AEF} = \frac{AB \cdot AC}{AE \cdot AF} = 1,$$

∴△ABC 的面积=△AEF 的面积.



五、解：将1**代入原方程得**$1-(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-q)+q=0$,**故**$1$**适合原方程**,

故知原方程有一个根是1.

原方程现有一根是1,**所以它的左端可以析出**$x-1$**的因式**,**而得**

$$(x-1)(x^2-\sqrt{2}x-q)=0$$

又因这个方程的三个根是 sinA、sinB、sinC,所以这三个之中必定有一个是1,设 sinC=1,则 C=90°.

并且$\sin A$、$\sin B$是方程$x^2-\sqrt{2}x-q=0$的两个根.

由根与系数的关系知$\sin A+\sin B=\sqrt{2}$. ①

由于$A+B=90°$, ∴$\sin^2 A+\sin^2 B=1$. ②

①^2—②得 $2\sin A\sin B=1$. ③

②—③得 $(\sin A-\sin B)^2=0$.

∴ $\sin A=\sin B$.

∴ $A=B=45°$.

由根与系数的关系及③知 $-q=\mathrm{Sin}A\sin B=\frac{1}{2}$,

∴ $q=-\frac{1}{2}$.

1957 年副题

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如:Ⅰ甲、Ⅰ乙、Ⅱ、Ⅲ等.

一、甲、方程 $3x^2-5x+(k+1)=0$ 若有实数根,k 的值应当怎样?

乙、设 a、b、c 为△ABC 的三边,已知 $a^2=b^2+bc+c^2$,求 a 边的对角 A.

丙、已知线段 a、b、c,求作一线段 $x=c\sqrt{\frac{b}{a}}$.

(只要求画出图形,写出作法,不必证明.)

丁、设 P 为一个 60°的二面角的平分面上任意一点,求证从 P 到二面角的棱的距离等于从 P 到二面角的一个面的距离的两倍.

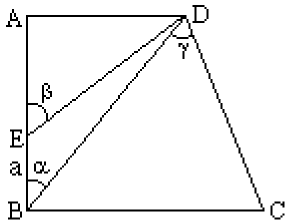
戊、已知一个直圆锥的高为 1.2 尺,其侧面积为底面积的 2 倍,问此底面积为若干平方尺.

(答案要一位小数)

二、解方程组 $\begin{cases} x^2-2xy+y^2-2x+2y=15, \\ 4x^2+3y^2=48. \end{cases}$

三、如图,已知 AD,BC 为梯形 ABCD 的一底,∠ABC=90°,∠ABD=α,∠AED=β,∠BDC=γ, BE=a.求证:

$AD=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$, $BC=\dfrac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)\cos(\gamma-\alpha)}$



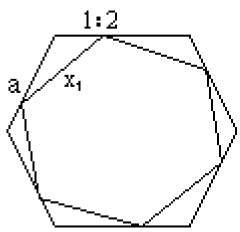
四、一圆周被 AB 弦分为优劣两弧,C 为优弧的中点,D 为劣弧上任一点.又 E 为劣弧 AD 的中点,F 为劣弧 DB 的中点.若于 CD 弦上任取一点 P,PA 与 CE 交于 Q,PB 与 CF 交于 R,则 QR 与 AB 平行,试证明之.

五、在已知边长为 a 的正六边形的每边上依次取 1∶2 的内分点,并顺序连结分点作成内接正六边形.又对这个新的正六边形,用同样方法再作内接正六边形.这样继续作了 n 次之后,则得 n 个新的正六边形,其边长依次设为 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$.

(1)求边长 $x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$;

(2)求边长的平方和 $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2$;

(3)求这 n 个新正六边形面积的和.



1957 年副题答案

一、甲、由题意知 $\Delta=25-12(k+1)\geq 0$,

$\therefore\ 13\geq 12k$,

$\therefore\ k\leq\frac{13}{12}$.

乙、由余弦定理知 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,

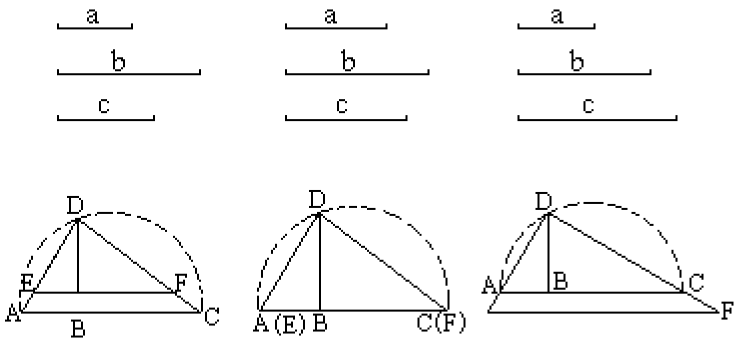
又由题设知 $a^2=b^2+c^2+bc$,

$\therefore\ -2bc\cos A=bc$,

$\cos A=-\frac{1}{2}$,

$\therefore\ A=120°$.

丙、



作法:作线段 AB=a,延长 AB 至 C,令 BC=b.

以 AC 为直径作半圆.

作 BD⊥AC,与半圆交于 D.

在 DA 连线上取 DE=c.

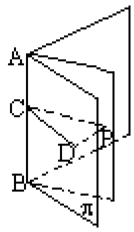
过 E 作 EF⊥BD,与 DC 连线交于 F,则 DF 为求作的 x.

注意:考生仅作出一图即可.

丁、证:如图,设π是二面角的一个面,P 是平分面上一点.过 P 作棱 AB 的垂直平面与 AB 交于 C 点,与平面π交于一条直线 CD.过 P 作 PD⊥CD 于 D.则线段 PC 是 P 至 AB 的距离,PD 是 P 至π的距离.

$\because\ \angle DCP=\frac{1}{2}\cdot 60°=30°$,$\triangle PCD$是直角三角形,

$\therefore\ PC=2PD$.



戊、解:设底半径=r,

则直圆锥侧面积 $=\pi r\sqrt{(1.2)^2+r^2}$

直圆锥底面积$=\pi r^2$.

由题设知 $\pi r\sqrt{(1.2)^2+r^2} = 2\pi r^2$,

∴ $\sqrt{(1.2)^2+r^2} = 2r$,

∴ $(1.2)^2 = 3r^2$.

∴ 底面积 $= \pi r^2 = \dfrac{(1.2)^2}{3}\pi = 1.5$ 平方尺.

二、解：原方程变形为 $\begin{cases}(x-y)^2-2(x-y)-15=0 & ① \\ 4x^2+3y^2-48=0 & ②\end{cases}$

由①分解因式得 x=y+5,x=y-3.

于是原方程组分为下列两个方程组:

$(i)\begin{cases}x=y+5, \\ 4x^2+3y^2-48=0\end{cases}$； $(ii)\begin{cases}x=y-3, \\ 4x^2+3y^2-48=0\end{cases}$.

解方程组(i),得两组解:

$\begin{cases}x_1=3, \\ y_1=-2\end{cases}$； $\begin{cases}x_2=\dfrac{9}{7}, \\ y_2=-\dfrac{26}{7}\end{cases}$.

解方程组(ii),得另两组解:

$\begin{cases}x_3=\dfrac{-9+2\sqrt{57}}{7}, \\ y_3=\dfrac{12+2\sqrt{57}}{7}\end{cases}$； $\begin{cases}x_4=\dfrac{-9-2\sqrt{57}}{7}, \\ y_4=\dfrac{12-2\sqrt{57}}{7}\end{cases}$.

三、证明:在△BDE 中,由正弦定理知

$$\frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{BD}{\sin(\pi-\beta)}$$

$$\therefore BD=\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\therefore AD=BD\sin\alpha$$

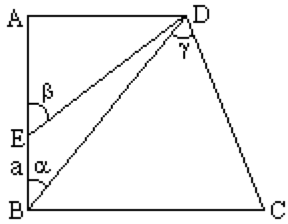
$$=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$$

在 △BCD中,$\angle C=\pi-(\gamma+\dfrac{\pi}{2}-a)$

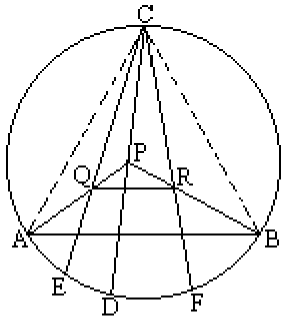
$$=\frac{\pi}{2}-(\gamma-\alpha)$$

由正弦定理知 $\dfrac{BC}{\sin\gamma}=\dfrac{BD}{\sin[\frac{\pi}{2}-(\gamma-\alpha)]}$.

∴ $BC=\dfrac{BD\sin\gamma}{\cos(\gamma-\alpha)}=\dfrac{a\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta-\alpha)\cos(\gamma-\alpha)}$.



四、证明:连结 CA、CB,则 CA=CB.
∵　　E 为 AD 弧的中点,F 为 DB 弧的中点,
∴　　∠ACE=∠ECD,∠BCF=∠FCB.
在△CAP 与△CPB 中,
PQ：QA=CP：CA,PR：RB=CP：CB,
∴PQ：QA=PR：RB,
∴QR∥AB



五、解：(1)**∵正六边形的一个内角为** $\frac{2\pi}{3}$**，**

由余弦定理及题设得:

$$x_1^2=(\frac{a}{3})^2+(\frac{2a}{3})^2-2(\frac{a}{3})(\frac{2a}{3})\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{7}{9}a^2.$$

∴　$x_1=\frac{\sqrt{7}}{3}a$.

用同样方法可求得:

$x_2^2=\frac{7}{9}x_1^2=(\frac{7}{9})^2a^2$，$x_2=\frac{7}{9}a$.

$x_3^2=\frac{7}{9}x_2^2=(\frac{7}{9})^3a^2$，$x_3=\frac{7\sqrt{7}}{27}a$.

……

$x_n^2=\frac{7}{9}x_{n-1}^2=(\frac{7}{9})^na^2$，$x_n=\frac{\sqrt{7^n}}{3^n}a$.

(2) $x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=\frac{7}{9}a^2+(\frac{7}{9})^2a^2+(\frac{7}{9})^3a^2+\cdots\cdots+(\frac{7}{9})^na^2$.

根据等比级数求前 n 项的公式得:

$$x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2=\frac{\frac{7}{9}[1-(\frac{7}{9})^n]}{1-\frac{7}{9}}a^2$$

$$=\frac{7}{2}[1-(\frac{7}{9})^n]a^2.$$

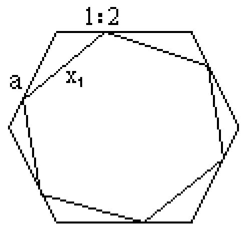
(3) **∵边长为**x_1**的正六边形的面积为** $\frac{3\sqrt{3}}{2}x_1^2$**，**

∴这 n 个新正六边形面积的和为：

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}x_1^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}x_2^2+\cdots\cdots\frac{3\sqrt{3}}{2}x_n^2$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2)$$

$$=\frac{21\sqrt{3}}{4}[1-(\frac{7}{9})^n]a^2.$$



1959 年试题

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如 Ⅰ(1)、Ⅰ(2)、Ⅱ、Ⅲ等.

一、(1)已知 lg2=0.3010,lg7=0.8451,求 lg35.

(注)lg 是以 10 为底的对数的符号.

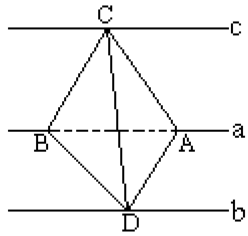
(2)化简 $\frac{(1-\mathrm{i})^3}{1+\mathrm{i}}$.

(3)解不等式:$2x^2+5x<3$.

(4 求 cos165°的值.

(5)一直圆台上底的面积为 25π平方厘米,下底的直径为 20 厘米,母线长为 10 厘米.求这直圆台的侧面积.

(6)有三条不在同一平面内的平行线 a、b 和 c.在线 a 上取一固定线段 AB,在线 c、b 上各任取一点 C 和 D.求证:不论 C 和 D 取在 c、b 的什么位置上,四面体 ABCD 的体积总是不变的.

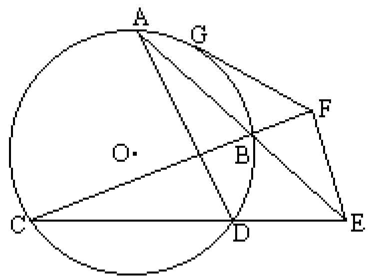


二、三个数成等差数列,前两个数的和的三倍等于第三个数的二倍;如果第二个数减去 2(仍当作第二项),三个数就成等比数列.求原来的三个数.

三、设有△ABC,已知$\angle B=60°$,AC边长为4,面积为$\sqrt{3}$.求AB及BC两边之长.

四、A、B、C 是直线 *L* 上三点,P 是这直线外一点.已知 AB=BC=a,∠APB=90°,∠BPC=45°.试求:(1)∠PBA 的正弦、余弦、正切;(2)线段 PB 的长;(3)P 点到直线 *L* 的距离.

五、延长圆 O 的两弦 AB、CD 交于圆外一点 E,过 E 点作 DA 的平行线交 CB 的延长线于点 F,自 F 点作圆 O 的切线 FG.求证 FG=FE.



1959 年试题答案

一、(1)$\lg 35=\lg\frac{10\times 7}{2}$

$=\lg 10+\lg 7-\lg 2$

$=1+0.8451-0.3010$

$=1.5441$.

(2)解法一：

$$\frac{(1-i)^3}{1+i}=\frac{(1-i)^4}{2}$$

$$=\frac{1-4i+6i^2-4i^3+i^4}{2}$$

$$=\frac{1-4i-6+4i+1}{2}=-2.$$

解法二：

$$\frac{(1-i)^3}{1+i}=\frac{1-3i+3i^2-i^3}{1+i}$$

$$=\frac{1-3i-3+i}{1+i}=\frac{-2-2i}{1+i}=-2$$

(3)解法一：

$2x^2+5x<3$,

移项,得

$2x^2+5x-3<0$,

$(2x-1)(x+3)<0$.

因为两个数的积是负数,必须并且只须这两个数中一个是正数,一个是负数,所以从这个不等式可以得出下面两个不等式组：

$$\begin{cases}2x-1>0,\\ x+3<0;\end{cases}\qquad \begin{cases}2x-1<0,\\ x+3>0.\end{cases}$$

第一个不等式组没有解,第二个不等式组的解是 $-3<x<\frac{1}{2}$,

所以原不等式的解是 $-3<x<\frac{1}{2}$.

解法二：

$2x^2+5x<3$,

移项,得

$2x^2+5x-3<0$,

不等式两边都乘以-1,得

$-2x^2-5x+3>0$

$\triangle=(-5)^2-4\cdot(-2)\cdot 3>0$,

二次三项式 $-2x^2-5x+3$ 的根是 -3 和 $\frac{1}{2}$.

当 $-3<x<\frac{1}{2}$ 的时候，$-2x^2-5x+3$ 和 -2 异号.

因此，原不等式的解是 $-3<x<\frac{1}{2}$。

(4)解法一：

$$\begin{aligned}\cos165°&=\cos(180°-15°)\\&=-\cos15°\\&=-\cos(45°-30°)\\&=-(\cos45°\cos30°+\sin45°\sin30°)\\&=-(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2})\\&=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

解法二：

$$\begin{aligned}\cos165°&=\cos(180°-15°)\\&=-\cos15°=-\cos\frac{30°}{2}\\&=-\sqrt{\frac{1+\cos30°}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

(5)圆台侧面积 $S=\pi L(R+r)$,其中 L 为母线,r、R 分别为上,下底的半径.

上底面积 $=\pi r^2=25\pi$　　∴r=5(厘米)

下底半径 R=20/2(厘米)=10(厘米)

母线 l=10(厘米)

∴　这圆台侧面积

$S=\pi L(R+r)$

$=\pi\cdot10\cdot(10+5)$

$=150\pi$(厘米^2)

(6)△ABD 当四面体 ABCD 的底(如图)作底上的高 CO.

∵　a∥b

∴　无论 D 在 b 上什么位置,

△ABD 的面积总不变.

∵　a∥b∴a,b 决定一平面.

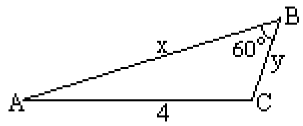
∵　c∥a,c∥b.

∴　c 平行于 a,b 所决定的平面.

∴　无论 C 点在 c 的什么位置,高 CO 的高度总不变.

四面体的体积等于 $\frac{1}{3}$×高×底面积,

因之,无论 C,D 在 c,b 上什么位置,其体积总不变.



二、设成等差数列的三个数是 x-y、x、x+y,依据题中条件,

列出方程组：$\begin{cases}3[(x-y)+x]=2(x+y), & (1)\\(x-2)^2=(x-y)(x+y). & (2)\end{cases}$

化简(1)和(2),得:

$$\begin{cases}4x=5x, & (3)\\y^2-4x+4=0. & (4)\end{cases}$$

将(3)代入(4),得:

$$y^2-5y+4=0,$$

$$(y-1)(y-4)=0$$

故 $y_1=1, y_2=4$

将y_1与y_2的值代入(3),得：$x_1=\frac{5}{4}$，$x_2=5$

故 $\begin{cases}x_1=\frac{5}{4},\\y_1=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=5,\\y_2=4.\end{cases}$

又 $x_1-y_1=\frac{1}{4}, x_1+y_1=\frac{9}{4}$；$x_2-y_2=1, x_2+y_2=9$.

答：所求的三个数是$\frac{1}{4}$，$\frac{5}{4}$，$\frac{9}{4}$或1，5，9.

三、设 AB 及 BC 两边之长为 x 及 y,则有

$$x^2+y^2-2xy\cos 60°=4^2$$

$$\frac{1}{2}xy\sin 60°=\sqrt{3}.$$

代入 cos60°及 sin60°的值,得到:

$$x^2+y^2-xy=16$$

$$xy=4$$

化简,得到: $x^2+y^2=20$ (1)

$2xy=8$ (2)

(1)+(2),得: $(x+y)^2=28,$ (3)

(1)-(2),得: $(x-y)^2=12$ (4)

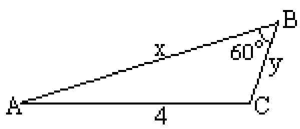
由(3)得 $x+y=2\sqrt{7},$ (5)

由(4)得 $x-y=\pm 2\sqrt{3}.$ (6)

(5)+(6),得：$x=\sqrt{7}\pm\sqrt{3},$

(5)-(6),得：$y=\sqrt{7}\mp\sqrt{3},$

答：AB之长为$\sqrt{7}\pm\sqrt{3}$,BC之长为$\sqrt{7}\mp\sqrt{3}$.



四、解法一:令∠PBA=θ

$\overline{PB}=x$, P点到直线L的距离为h.

由△APB知　　$x=a\cos\theta$，　　　(1)

由△BPC知　$\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{x}{\sin(\theta-45^\circ)}$　　(2)

从(1)，(2)消去x，得：　$\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{a\cos\theta}{\sin(\theta-45^\circ)}$　，

$$\sqrt{2}\,(\sin\theta\cos 45^\circ-\cos\theta\sin 45^\circ)=\cos\theta,$$

$$\sin\theta-\cos\theta=\cos\theta$$

$$\sin\theta=2\cos\theta$$

故　$\operatorname{tg}\theta=2$

θ是锐角,所以　$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

于是　$x=a\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$，　$h=x\sin\theta=\dfrac{2}{5}a$.

答：(1) ∠PBA的正弦,余弦及正切分别是$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，2.

(2) PB的长是$\dfrac{a}{\sqrt{5}}$；

(3) P到 L的距离为$\dfrac{2}{5}a$.

解法二：由(2)得

$$\begin{aligned} x&=\frac{a\sin(\theta-45^\circ)}{\sin 45^\circ}\\ &=a\sqrt{2}(\sin\theta\cos 45^\circ-\cos\theta\sin 45^\circ)\\ &=a\sin\theta-a\cos\theta. \end{aligned} \qquad (3)$$

由(1),并因θ是锐角,得

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} \qquad (4)$$

代(1),(4)入(3),得

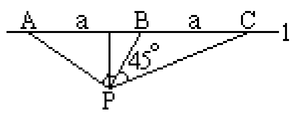
$$x=\sqrt{a^2-x^2}-x$$

由此得　$5x^2=a^2$,

$$x=\frac{a}{\sqrt{5}}$$

于是　$\cos\theta=\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，

$\operatorname{tg}\theta=2$，$h=x\sin\theta=\dfrac{2}{5}a$.



五、证明:∵EF∥DA,

∴∠FEB=∠BAD，而∠BAD=∠BCD,

∴∠FEB=∠BCD，又∠EFB=∠EFC

∴△EFB∽△CFE

因此,FE:FC=FB:FE,

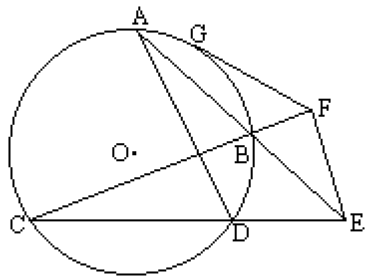
即 FE^2=FB·FC.

∵FG 是圆 O 的切线,FBC 的圆 O 的割线,

∴FG^2=FB·FC

∴FG^2=FE^2

即 FG=FE.



1960 年试题

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如 I (1)、 I (2)、 II、III等.

一、

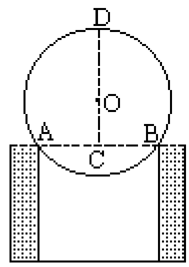
(1)解方程$\sqrt{2x^2-5}-\sqrt{5x-7}=0$.(限定在实数范围内)

(2)有 5 组篮球队,每组 6 队.首先每组中各队进行单循环比赛(即每两队比赛一次),
然后各组的冠军再进行单循环比赛.问先后共比赛多少次?

(3)求证等比数列的各项的对数组成等差数列.(这里所说的等比数列的各项都是正数)

(4)求使等式$\sqrt{1-\sin^2\frac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}$成立的x值的范围.(x是0°到720°的角)

(5)如图,用钢珠测量机件上一小孔的直径.所用钢珠的中心是 0,直径是 12 毫米.将钢珠放在这小孔上,测得钢珠上端 D 到机件平面的距离 CD 是 9 毫米.求这小孔的直径 AB 的长.



(6)四棱锥 P—ABCD 的底面是一正方形.PA 与底面垂直.已知 PA 是 3 厘米,P 点到 BC 的距离是 5 厘米.求 PC 的长.

二、有一直圆柱,高是 20 厘米,底面半径是 5 厘米.它的一个内接长方体的体积是 800 立方厘米.求这长方体的底面的长和宽.

三、从一船上看到在它的南 30°东的海面上有一灯塔.船以 30浬/小时的速度向正东南方向航行半小时后,看到这个灯塔在船的正西方.问这时船与灯塔的距离是多少浬?(精确到 0.1浬)

四、要在墙上开一矩形的大玻璃窗,周长限定为 6 米.

(i)求以矩形的一条边长(x)表示窗户的面积(y)的函数式;

(ii)求这函数图象的顶点的坐标、对称轴的方程;

(iii)画出这函数的图象,并求出的 x 的允许值的范围.

五、下列(1)、(2)两题选作一题.

(1)已知方程 $2x^2-x\cdot4\sin\theta+3\cos\theta=0$ 的两个根相等,且θ为锐角,求θ和这个方程的两个根.

(2)a 是什么实数的时候,下列方程组的解是正数:

$$\begin{cases}2x+ay=4, \\ x+4y=8.\end{cases}$$

1960 年试题答案

一、

解:(1) $\sqrt{2x^2-5}-\sqrt{5x-7}=0$,

$\sqrt{2x^2-5}=\sqrt{5x-7}$,

$2x^2-5=5x-7$,

$2x^2-5x+2=0$,

$(2x-1)(x-2)=0$,

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 或 2

$\because \frac{1}{2}$ 使原方程无意义,舍去.

$\therefore x=2$

(2)解: $5c_6^2+c_5^2=5\times\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}+\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}$

$=75+10=85$

答:共比赛 85 次.

(3)证明:设等比数列为

$a, aq, aq^2, \cdots, aq^{n-1}$

则各项的对数依次为

$\log a, \log aq, \log aq^2, \cdots, \log aq^{n-1}$,

即 $\log a, \log a+\log q, \log a+2\log q, \cdots, \log a+(n-1)\log q$,

∴上面的数列是以 $\log a$ 为首项,$\log q$ 为公差的等差数列.

(4)解:根据算术根的定义, $\cos\frac{x}{2}\geq 0$,

$\therefore 0°\leq\frac{x}{2}\leq 90°$ 和 $270°\leq\frac{x}{2}\leq 360°$,

即 $0°\leq x\leq 180°$ 和 $540°\leq x\leq 720°$

(5)解法一:

设 AB 为 x 毫米,

则 $AC=\frac{x}{2}$ 毫米.

又直径 DE=12 毫米

CD=9 毫米

∴CE=12-9=3 毫米

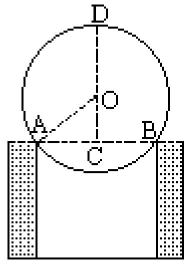
$\because AC^2=DC\cdot CE$,

$\therefore (\frac{x}{2})^2=9\times 3$,

$\therefore x^2=9\times 3\times 4$

$\therefore x=6\sqrt{3}$ (取正值)

答:小孔的直径是 $6\sqrt{3}$ 毫米.



解法二:

设 AB 为 x 毫米,

则$AC=\frac{x}{2}$毫米.

又 CD=9 毫米,半径 OD=6 毫米,

∴OC=9-6=3(毫米)

连结 OA,则 OA=6 毫米

在直角三角形 OAC 中,$OA^2=OC^2+AC^2$

即$6^2=3^2+(\frac{x}{2})^2$

$\frac{x^2}{4}=27,\qquad \therefore x=6\sqrt{3}$(取正值)

答:小孔的直径是$6\sqrt{3}$毫米.

(6)解:∵PA⊥平面 ABCD,

又 AB⊥BC,

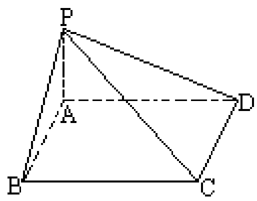
∴PB⊥BC,即 PB=5 厘米

又 PA=3 厘米,

因此 AB=BC=4 厘米

$$\therefore PC=\sqrt{PB^2+BC^2}$$
$$=\sqrt{5^2+4^2}$$
$$=\sqrt{41}(\text{厘米})$$

答:PC是$\sqrt{41}$厘米.



二、

解:设底面的长和宽分别是 x 厘米和 y 厘米,则

$$\begin{cases} x^2+y^2=10^2, \\ 20xy=800. \end{cases}$$

上方程组可变形为

$$\begin{cases} x^2+y^2=100, \\ 2xy=80. \end{cases}$$

解这个方程组,得

$(x+y)^2=180,\quad \therefore x+y=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$;(只取正值)

$(x-y)^2=20,\quad \therefore x-y=\pm\sqrt{20}=\pm 2\sqrt{5}$.

分别解下面的两个方程组:

$$\begin{cases}x+y=6\sqrt{5},\\ x-y=2\sqrt{5},\end{cases}\qquad \begin{cases}x+y=6\sqrt{5},\\ ,x-y=-2\sqrt{5}\end{cases}$$

就得出:

$$\begin{cases}x_1=4\sqrt{5},\\ y_1=2\sqrt{5};\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=2\sqrt{5}\\ y_2=4\sqrt{5}.\end{cases}$$

答:底面的长和宽分别是$4\sqrt{5}$厘米和$2\sqrt{5}$厘米.

三、

解法一:如图,A 是原来船的位置,B 是灯塔,C 是航行半小时后船的位置.

$AC=30\times\frac{1}{2}=15$(浬),

$\angle BAC=45°-30°=15°$,

$\angle ABC=120°$

$$\therefore BC=\frac{AC\cdot\sin 15°}{\sin 120°}$$

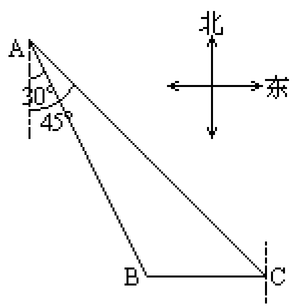
$$=\frac{15(\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°)}{\sin 60°}$$

$$=\frac{15\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}{2}$$

=4.5(浬)

答:船与灯塔的距离是 4.5浬.



解法二:如图,过 A 引 CB 的垂线与 CB 的延长线交于 D 点.

$AC=30\times\frac{1}{2}=15$(浬)

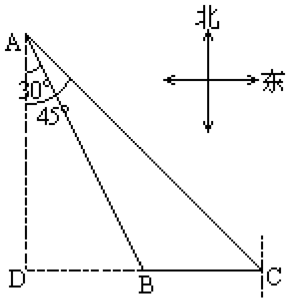
$\triangle ADC$中,$DA=DC=AC\sin 45°=\frac{15\sqrt{2}}{2}$,

$\triangle ADB$中, $DB = DA\text{tg}30° = \frac{15\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$,

$$\therefore BC = DC - DB = \frac{15\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{6}}{2} = \frac{5(3\sqrt{2} - \sqrt{6})}{2}$$

=4.5(浬)

答:船与灯塔的距离是 4.5浬.



四、

解:(i)$y=(3-x)x=-x^2+3x$.

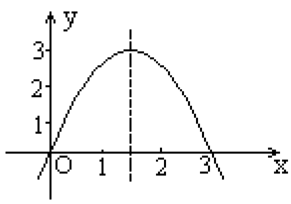
$$(ii)y = -(x^2 - 3x + \frac{9}{4}) + \frac{9}{4} = -(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}.$$

顶点的坐标: $(\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

对称轴的方程: $x = \frac{3}{2}$

(iiii) $-x^2 + 3x = 0$, $x_1 = 0, x_2 = 3$.

x 的允许值的范围:$0<x<3$



五、

(1)解:$\triangle=16\sin^2\theta-24\cos\theta=0$,

即 $2\sin^2\theta-3\cos\theta=0$.

由 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$,上方程可变形为

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2=0$,

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$,

$\cos\theta+2=0$,无解.

由 $2\cos\theta-1=0$,得

$\cos\theta = \frac{1}{2}$.

∵θ为锐角,∴θ=60°

$$\therefore x=\frac{4\sin 60°}{4}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

答:θ是60°,方程的两个根都是$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2)解:$\begin{cases}2x+ay=4 & ① \\ x+4y=8 & ②\end{cases}$

②×2-①:(8-a)y=12,

当 a≠8 时,

$$y=\frac{12}{8-a} \qquad ③$$

把③代入②中,得

$$x=\frac{16-8a}{8-a}=\frac{8(2-a)}{8-a}.$$

要使 y 是正数,必须并且只须 8-a>0,由此要使 x 是正数,必须并且只须 2-a>0.解不等式组

$$\begin{cases}8-a>0, \\ 2-a>0,\end{cases}$$

得 a<2

因此,当 a<2 的时候,原方程组的解是正数.

1961 年试题

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如 Ⅰ(1)、Ⅰ(2)、Ⅱ、Ⅲ等.

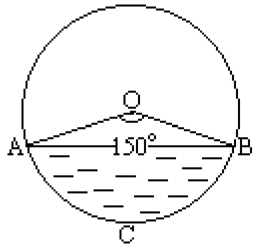
一、(1)求$(2-x)^{10}$展开式里x^7的系数.

(2)解方程:$2\lg x=\lg(x+12)$.(注:lg 是以 10 为底的对数的符号.)

(3)求函数$y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-5}$的自变量x的允许值的范围.

(4)求$\sin\dfrac{p}{12}\sin\dfrac{5p}{12}$的值.

(5)一个水平放着的圆柱形排水管,内半径是 12 厘米.排水管的圆截面上被水淹没部分的弧含有 150°(如图).求这个截面上有水部分的面积.(取π=3.14.)

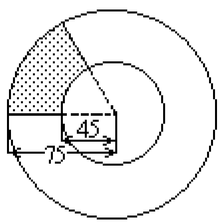


(6)已知△ABC 的一边 BC 在平面 N 内,△ABC 所在的平面与平面 N 组成二面角 a(a<90°).从 A 点作平面 N 的垂线 AA',A'是垂足.设△ABC 的面积是 S,求证△A'BC 的面积是 Scosa.

二、一个机器制造厂的三年生产计划,每年比上一年增产机器的台数相同.如果第三年比原计划多生产 1 千台,那末每年比上一年增长的百分数就相同,而且第三年生产的台数恰等于原计划三年生产总台数的一半,原计划每年各生产机器多少台?

三、有一块圆环形的铁皮,它的内半径是 45 厘米,外半径是 75 厘米.用它的五分之一(如图中的阴影部分),作圆台形水桶的侧面,这个水桶的容积是多少立方厘米?

四、在平地上有 A、B 两点.A 在山的正东.B 在山的东南,且在 A 的西 65°南 300 米的地方.在 A 测得山顶的仰角是 30°,求山高.(sin70°=0.940.精确到 10 米.)



五、下面甲、乙两题,选作一题.

甲、k 是什么实数的时候,方程$x^2-2(k+3)x+3k^2+1=0$有实数根?

乙、设方程$8x^2-(8\sin a)x+2+\cos 2a=0$的两个根相等,求 a.

1961 年试题答案

一、(1)解:在这个展开式里含有 x^7 的项是第八项.它的系数是

$$C_{10}^{7}(-1)^{7}\cdot 2^{3}$$

$$=-C_{10}^{3}\cdot 8$$

$$=-\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 8$$

$=-960.$

(2)解:$2\lg x=\lg(x+12)$,

$\lg x^2=\lg(x+12)$,

$\therefore x^2=x+12, x^2-x-12=0$,

$(x-4)(x+3)=0$,

$\therefore x_1=4, x_2=-3.$

当 $x=-3$ 时,$\lg x$ 没有意义,舍去;$x=4$ 为原方程的解.

(3)解:根据根式的定义,$x-1\geq 0$,$\therefore x\geq 1$;

又根据分母不能为零,$x-5\neq 0$,$\therefore x\neq 5$.

所以自变量 x 的允许值的范围是 $x\geq 1$,但 $x\neq 5$.

(4)解法一:$\sin\frac{p}{12}\sin\frac{5p}{12}$

$$=\sin\frac{p}{12}\cos\frac{p}{12}$$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{p}{6}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{4}.$$

解法二:$\sin\frac{p}{12}\sin\frac{5p}{12}$

$$=\frac{1}{2}(\cos\frac{p}{3}-\cos\frac{p}{2})$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-0)$$

$$=\frac{1}{4}.$$

解法三:$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{4}.$$

(5)解法一:

弧ACB的长是$12\times\frac{5\pi}{6}=10\pi$(**厘米**),

扇形$O-ACB$**的面积**$=\frac{1}{2}\times12\times10\pi$

$=60\pi$(**平方厘米**),

$\triangle OAB$**的面积**$=\frac{1}{2}\times12^2\times\sin150°$

$=36$(**平方厘米**).

∴截面上有水部分的面积=60π-36

=60×3.14-36=152.4(平方厘米).

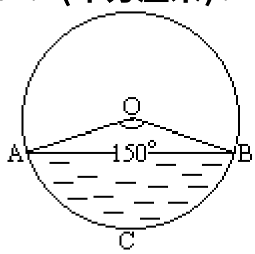
解法二:

扇形$O-ACB$**的面积**$=\frac{150}{360}\times\pi\times12^2=60\pi$(**平方厘米**),

$\triangle OAB$**的面积**$=\frac{1}{2}\times12^2\times\sin150°=36$(**平方厘米**).

∴ 截面上有水部分的面积=60π-36

=60×3.14-36=152.4(平方厘米).



(6)证明:

作 AD ⊥ BC 于 D,连 A'D,A'D 是 AD 在平面 N 上的射影,

∴ A'D ⊥ BC.

∠ ADA'是二面角 A-BC-A'的平面角,等于 a.

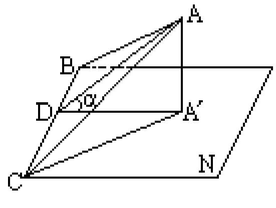
∵△ AA'D 是直角三角形,

∴ A'D=ADcosa.

$\therefore\triangle A'BC$**的面积**$=\frac{1}{2}BC\cdot A'D$

$=\frac{1}{2}BC\cdot AD\cos\alpha$

$=S\cos\alpha.$



二、

解法一:

设原计划第一、二、三年生产机器的千台数分别为 x,x+y,x+2y.依题意,

得方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{(x+y)-x}{x}=\dfrac{(x+2y+1)-(x+y)}{x+y},\\ x+2y+1=\dfrac{1}{2}[x+(x+y)+(x+2y)].\end{cases}$$

这个方程组经过变形后,得方程组:

$$\begin{cases}y^2-x=0,\\ x-y-2=0.\end{cases}$$

解这个方程组,得

$$\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=1,\\ y_2=-1.\end{cases}$$

由第一组解,得 x=4,x+y=6,x+2y=8.

第二组解不合题意,舍去.

答:原计划第一、二、三年各生产机器 4 千台、6 千台、8 千台.

解法二:

设原计划第一、二、三年生产机器的千台数为别为 x-y,x,x+y.依题意,得方程组:

$$\begin{cases}x^2=(x-y)(x+y+1),\\ x+y+1=\dfrac{1}{2}[(x-y)+x+(x+y)].\end{cases}$$

这个方程组经过变形后,得方程组:

$$\begin{cases}y^2+y-x=0,\\ x-2y-2=0.\end{cases}$$

解这个方程组,得

$$\begin{cases}x_1=6,\\ y_1=2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=0,\\ y_2=-1.\end{cases}$$

由第一组解,得 x-y=4,x=6,x+y=8.

第二组解不合题意,舍去.

答:原计划第一、二、三年各生产机器 4 千台、6 千台、8 千台.

三、

解:

水桶上口的半径 $=\dfrac{1}{5}\times 75=15$(厘米),

水桶下底的半径 $=\dfrac{1}{5}\times 45=9$(厘米),

水桶的斜高 $=75-45=30$(厘米),

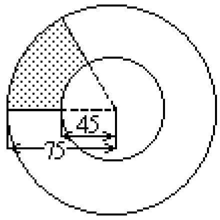
水桶的高 $=\sqrt{30^2-(15-9)^2}$

$=12\sqrt{6}$(厘米),

$\therefore$ 水桶的容积 $=\frac{1}{3}\cdot 12\sqrt{6}p(15^2+9^2+15\times 9)$

$=1764\sqrt{6}p$(立方厘米).

答:水桶的容积是$1764\sqrt{6}p$立方厘米.



四、

解:如图,CD 为山的高.

在△ABC 中,∠ACB=45°,∠CAB=65°,

∴∠ABC=180°-(45°+65°)=70°;

又 AB=300(米)

$$\therefore AC=\frac{AB\sin 70°}{\sin 45°}$$

$$=\frac{300\sin 70°}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=300\sqrt{2}\sin 70°\ (米).$$

在直角三角形 ACD 中,∠CAD=30°,

$$CD=AC\operatorname{tg}30°$$

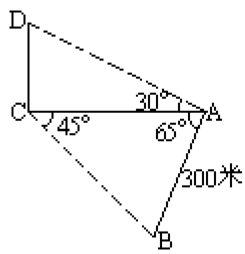
$$=300\sqrt{2}\sin 70°\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$=100\sqrt{6}\ \sin 70°$$

$=100\times 2.45\times 0.940$

$=230$(米)

答:山高是 230 米



五、

甲、解法一:当这个方程的判别式Δ=0 或者Δ>0 的时候,原方程有实数根.

$(k+3)^2-(3k^2+1)$

$=-2k^2+6k+8.$

解 $-2k^2+6k+8=0$,

即 $k^2-3k-4=0$,

得 $k=-1$ 或者 $k=4$.

解 $-2k^2+6k+8>0$,

即 $-k^2+3k+4>0$,

得 $-1<k<4$.

所以在 $-1\leq k\leq 4$ 的时候,原方程有实数根.

解法二:

这个方程有实数根的条件是:

$$(k+3)^2-(3k^2+1)\geq 0$$

化简得:

$$-k^2+3k+4\geq 0,$$

$$k^2-3k-4\leq 0,$$

$$(k+1)(k-4)\leq 0,$$

$\therefore -1\leq k\leq 4$ 的时候,方程有实数根.

乙、解:因为方程的两个根相等,所以

$$(8\sin a)^2-4\cdot 8(2+\cos 2a)=0.$$

化简:

$$2\sin^2 a-(2+\cos 2a)=0,$$

$$2\sin^2 a-(3-2\sin^2 a)=0,$$

$$4\sin^2 a-3=0.$$

$\therefore \quad \sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$

由 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $\alpha=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$;(n为整数)

由 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $\alpha=n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{3}$.(n为整数)

$\therefore \quad \alpha=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.(n为整数)

1962 年试题

试卷上不必抄题,但须写明题号,例如 1,5(1)等

1.某工厂第三年的产量比第一年的产量增长 21%.问平均每年比上一年增长百分之几?又第一年的产量是第三年的产量的百分之几?(精确到 1%)

2.求$(1-2i)^5$的实部.

3.解方程:$\log(x-5)+\log(x+3)-2\log 2=\log(2x-9)$.

4.求 $\sin(2\arcsin\frac{4}{5})$的值.

5.求证:(1)圆内接平行四边形是矩形;

(2)圆外切平行四边形是菱形.

6.解方程组:

$$\begin{cases} y^2-4x-2y+1=0, \\ y=x+a. \end{cases}$$

并讨论:a 取哪些实数值时,这个方程组

(1) 有不同的两组实数解;

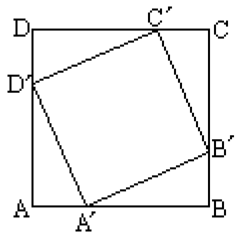
(2) 有相同的两组实数解;

(3) 没有实数解.

7.如图,ABCD 和 A′B′C′D′都是正方形,而 A′、B′、C′、D′顺次分 AB、BC、CD、DA 成 m:n,并设 AB=1.

(1) 求正方形 A′B′C′D′的面积;

(2) 证明:正方形A′B′C′D′的面积不小于$\frac{1}{2}$.



8.D 是△ABC 内的一点,已知

AB=AC=1, ∠CAB=63°,

∠DAB=33°, ∠DBA=27°,

求 CD.(sin27°=0.4540.最后结果计算到小数点后两位.)

9.由正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 作这个正方体的对角线 A_1C 的垂线,垂足为 E.证明:

$$A_1E:EC=1:2.$$

(要求画图)

10.求证:两两相交而不通过同一点的四条直线必在同一平面内.

1962 年试题答案

1.解(1)设每年平均增长 x%,则

$$(1+\frac{x}{100})^2=\frac{121}{100},$$

故 $1+\frac{x}{100}=\frac{11}{10},$

∴ x=10.

答:每年平均增长 10%.

(2) $1\div\frac{121}{100}=\frac{100}{121}\approx 0.83.$

答:第一年产量是第三年的 83%.

2.解∵$(1-2i)^5=1-C_5^1 2i+C_5^2(2i)^2-C_5^3(2i)^3+C_5^4(2i)^4-(2i)^5,$

∴$(1-2i)^5$的实部是

$1+10(2i)^2+5(2i)^4=1-40+80=41.$

3.解原方程可以写成

$$\log\frac{(x-5)(x+3)}{4}=\log(2x-9),$$

或者 $(x-5)(x+3)=4(2x-9).$

化简,得 $x^2-10x+21=0,$

或 $(x-3)(x-7)=0.$

∴ $x_1=3,x_2=7.$

当 x=3 时,x-5<0,而 log(x-5)无意义,所以 3 不是原方程的解,经检验,x=7 是原方程的解.

4.解设$\arcsin\frac{4}{5}=a(0<a<\frac{p}{2}),$

则 $\sin a=\frac{4}{5},$

$$\cos a=\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}=\frac{3}{5}.$$

$$\therefore \sin(2\arcsin\frac{4}{5})=\sin 2a$$

$$=2\sin a\cos a$$

$$=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{25}.$$

5.证明(1)设 ABCD 为圆内接平行四边形,因为平行四边形的对角相等,所以

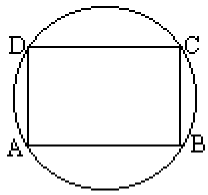
∠A=∠C.

又因圆内接四边形的对角互补,得

∠A+∠C=180°,

∴ ∠A=∠C=90°,

∴ ABCD 是矩形.



(2)设平行四边形 ABCD 切圆于 E、F、G、H(如图),则因从圆外一点所作的两条切线等长,得

$$\begin{cases} AE = AH, \\ BE = BF, \\ CG = CF, \\ DG = DH. \end{cases}$$

四式相加,得

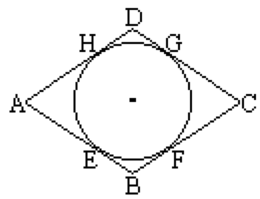
AB+CD=AD+BC.

又因平行四边形的对边相等,得

AB=CD,　AD=BC.

∴　AB=BC

∴　ABCD 是菱形.



6.解:

$$\begin{cases} y^2 - 4x - 2y + 1 = 0, & (1) \\ y = x + a. & (2) \end{cases}$$

由(2),　x=y-a,　(3)

代入(1),得

$$y^2-4(y-a)-2y+1=0,$$

即

$$y^2-6y+4a+1=0.$$

∴　$y = 3 \pm \sqrt{9-(4a+1)}$

$= 3 \pm 2\sqrt{2-a}$

代入(3),得

$$x = 3 - a \pm 2\sqrt{2-a}$$

方程组的解为:

$$\begin{cases} x_1 = 3 - a + 2\sqrt{2-a}, \\ y_1 = 3 + 2\sqrt{2-a}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 3 - a - 2\sqrt{2-a}, \\ y_2 = 3 - 2\sqrt{2-a}. \end{cases}$$

讨论:

(1)当 a<2 时,方程组有不同的两组实数解;

(2)当 a=2 时,方程组有相同的两组实数解;

(3)当 a>2 时,方程组没有实数解.

7.解:(1)由于 AB=1,AA′:A′B=m:n,得知

$$AA' = \frac{m}{m+n}, \qquad A'B = \frac{n}{m+n}.$$

又知 BA′B′为直角三角形，

$$\therefore A'B' = \sqrt{A'B^2 + B'B^2} = \sqrt{A'B^2 + A'A^2}$$

$$= \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{(m+n)^2}}$$

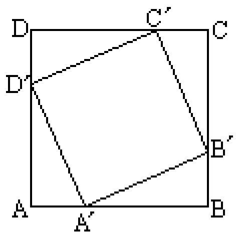
故正方形 A′B′C′D′的面积为

$$A'B'^2 = \frac{m^2 + n^2}{(m+n)^2}.$$

(2)证明 $\quad \dfrac{m^2 + n^2}{(m+n)^n} \geq \dfrac{1}{2}.$

$$\because \frac{m^2 + n^2}{(m+n)^2} - \frac{1}{2} = \frac{2(m^2 + n^2) - (m+n)^2}{2(m+n)^2} = \frac{(m-n)^2}{2(m+n)^2} \geq 0,$$

$$\therefore \quad \frac{m^2 + n^2}{(m+n)^2} \geq \frac{1}{2}.$$



8.解:在△ABD 内,

$$\angle BDA = 180° - 33° - 27° = 120°,$$

故根据正弦定理,

$$\frac{AD}{\sin 27°} = \frac{1}{\sin 120°},$$

$$AD = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 27°.$$

又 $\quad \angle DAC = 63° - 33° = 30°$,

故根据余弦定理,在△ADC 内,

$CD^2 = 1 + AD^2 - 2AD\cos 30°$

$$= 1 + \frac{4}{3}\sin^2 27° - 2\sin 27°$$

$$= 1 + 2\sin 27° (\frac{2}{3}\sin 27° - 1)$$

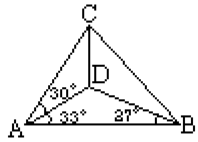
$=1+0.9080\times(0.3027-1)$

$=1-0.9080\times0.6973$

$=1-0.6331$

$=0.3669.$

$\therefore \quad CD=0.60.$



9.证明;

作 AC,则 $A_1A \perp AC$.

故 $\triangle A_1AC$ 为直角三角形.

设正方体的棱长为 1,则

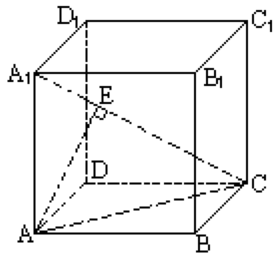
$AC = \sqrt{2}.$

在直角三角形 A_1AC 中,$AE \perp A_1C$,

$\therefore A_1A^2 = A_1E \cdot A_1C$,　　即 $1 = AE \cdot A_1C$.

同理,$AC^2 = EC \cdot A_1C$,　即 $2 = EC \cdot A_1C$.

由此得　　　$A_1E : EC = 1:2$.



10.证明:在这四条直线中,任取两条直线 a、b,设其交点为 P.因为四条直线不通过同一点,所以在另外两条直线中,至少有一条直线 c 不通过P,直线 c 必与 a、b 分别交于不同的两点.因此,c 必在 a、b 所决定的平面内.

第四条直线 d 与 a、b、c 至少交于两个不同的点,所以 d 也在 a、b 所决定的平面内.

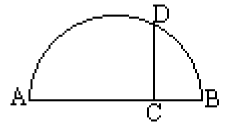
1963 年试题

1. 已知 $\operatorname{tg}\theta=\sqrt{2}$,求 $\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$ 的值.

2.(1) 求出复数 $1+\sqrt{3}i$ 的模数和辐角.

(2) 在直角坐标系 XOY 所在的平面内,以 A 点表示复数 $1+\sqrt{3}i$,把 OA 绕着 O 点按反时针方向旋转 150°,设 A 点到达的位置为 B,写出 B 点所表示的复数的代数式.

3. 如图,AB 为半圆的直径,CD⊥AB.已知 AB=1,AC:CB=4:1,求 CD.



4. 从二面角内任意一点向二面角的两个面作垂线,求证这两条垂线所决定的平面垂直于二面角的棱.(要求画图)

5. 利用下列常用对数表,计算 $23.28^{-1.1}$

对数表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15

反对数表

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7

6. 解方程:sin3x-sinx+cos2x=0.

7. 用 1,2,3,4,7,9 组成没有重复数字的五位数,问;

(1)这样的五位数一共有多少个?

(2)在这些五位数中,有多少个是偶数?

(3)在这些五位数中,有多少个是 3 的倍数?

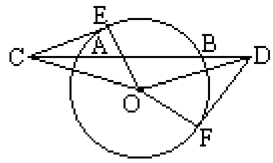
8. 解方程组: $\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1, \\ \sqrt{xy+3}=x \end{cases}$

(限定在实数范围内)

9. 如图,线段 CD 与⊙O 相交于 A、B 两点,且 AC=BD,

又 CE、DF 分别与⊙O 相切于 E、F.

求证:△OEC≌△OFD.



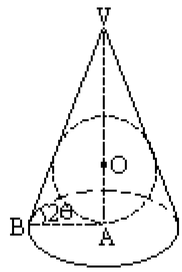
10.如图,半径为 1 的球,内切于圆锥(即直圆锥),已知圆锥的母线与底面的夹角是 2θ.

(1)求证圆锥的母线与底面半径的和是 $\frac{2}{\mathrm{tg}\theta(1-\mathrm{tg}^2\theta)}$;

(2)求证圆锥的全面积是 $\frac{2\pi}{\mathrm{tg}^2\theta(1-\mathrm{tg}^2\theta)}$;

(3)当 θ 是什么值的时候,圆锥的全面积最小?(θ 用反三角函数表示)

(图中 V 是圆锥的顶点,VB 是母线,O 是球心,A 是球和圆锥底面的切点.)



1963 年试题答案

1.解法一:$\because \mathrm{tg}\theta=\sqrt{2}$, $\therefore \cos\theta\neq 0$.

以 $\cos\theta$ 除分式的分子和分母,得

$$\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{1+\mathrm{tg}\theta}{1-\mathrm{tg}\theta}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{1-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=\frac{1+2\sqrt{2}+2}{-1}=-3-2\sqrt{2}.$$

解法二:$\because \mathrm{tg}\theta=\sqrt{2}$, $\therefore \theta$ 在第Ⅰ象限或第Ⅲ象限.

$$\therefore \sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad \cos\theta=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

当 θ 在第Ⅰ象限时,$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\qquad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\therefore \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$=-3-2\sqrt{2};$$

当θ在第III象限时, $\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$\therefore \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - (-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})} = \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

$$= -3 - 2\sqrt{2}.$$

2.解:

(1) $1+\sqrt{3}i$ 的模数 $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2;$,

$1+\sqrt{3}i$ 的辐角θ的主值是 $60°$

∴辐角是 k·360°+60°.

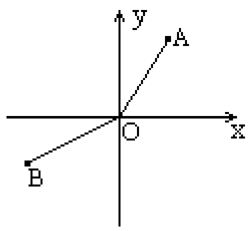
(其中 k 为任何整数)

(2)B 点所表示的复数的模数是 2,而辐角的主值是 60°+150°=210°,

∴B 点所表示的复数是:

2(cos210°+isin210°)

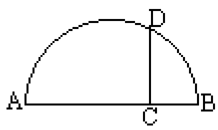
$= -\sqrt{3} - i.$



3.解:∵AB=1,AC:CB=4:1,

$\therefore AC = \frac{4}{5}, \quad CB = \frac{1}{5}.$

$\therefore CD = \sqrt{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}} = \frac{2}{5}.$



4.证法一:

已知:二面角 M-AB-N,P 是 M-AB-N 内任意一点,PC 垂直平面 M 于 C,PD 垂直平面 N 于 D.

求证:平面 PCD⊥AB.

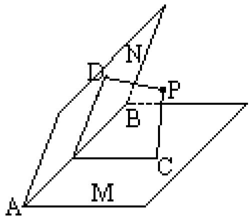
证明:∵PC⊥平面 M,

∴PC 和 AB 垂直,

∵PD⊥平面 N,

∴PD 和 AB 垂直.

∴平面 PCD⊥AB.



证法二:

　已知:同证法一.

　求证:同证法一.

证明:∵PC⊥平面 M,

　　∴过 PC 的平面 PCD⊥平面 M.

　　∵PD⊥平面 N,

　　∴过 PD 的平面 PCD⊥平面 N.

　　∴平面 PCD 垂直平面 M 和 N 的交线.

　　而 AB 即是平面 M 和 N 的交线,

　　∴平面 PCD⊥AB.

对数表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15

反对数表

m	0	1	2	3	4	5　6	7	8	9　1	2	3	4	5	6	7　8	9
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055　3062	3069	3076	3083　1	1	2	3	4	4	5　6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126　3133	3141	3148	3155　1	1	2	3	4	4	5　6	6
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199　3206	3214	3221	3228　1	1	2	3	4	4	5　6	7

5.解:$\lg 23.28^{-1.1}=-1.1\times\lg 23.28$

$=-1.1\times 1.3670$

$=-1.5037$

$=\overline{2}.4963.$

∴$23.28^{-1.1}=0.03135.$

6.解法一:

$\sin 3x-\sin x+\cos 2x=0,$

$2\cos 2x\sin x+\cos 2x=0,$

$\cos 2x(2\sin x+1)=0$

由　$\cos 2x=0$,得 $2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2},$

∴　$x=np\pm\frac{\pi}{4}.$

(n 是整数)

由$2\sin x+1=0$,得$\sin x=-\frac{1}{2}$,

$$\therefore x=2n\pi-\frac{\pi}{6};$$

$$x=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}.$$

(n 是整数)

$\therefore x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}, x=2n\pi-\frac{\pi}{6}, x=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}$.(n是整数)

解法二:

sin3x-sinx+cos2x=0,

$(3\sin x-4\sin^3 x)-\sin x+(1-2\sin^2 x)=0$,

整理,得　$4\sin^3 x+2\sin^2 x-2\sin x-1=0$.

分解,得　$(2\sin x+1)(2\sin^2 x-1)=0$.

由　$2\sin x+1=0$, 得 $\sin x=-\frac{1}{2}$,

$$\therefore\ x=2n\pi-\frac{\pi}{6};$$

$$x=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}.$$

(n是整数)

由 $2\sin^2 x-1=0$, 得 $\sin x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore\ x=2n\pi+\frac{\pi}{4}, x=(2n+1)\pi-\frac{\pi}{4};$$

$$x=2n\pi-\frac{\pi}{4}, x=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}.$$

(n 是整数)

$\therefore x=2n\pi-\frac{\pi}{6}, x=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}, x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.(n是整数)

7.解:

(1)从这六个数字中,取出五个数字,共能排成

$$A_6^5=6\times5\times4\times3\times2=720$$

个五位数.

(2)在所求的偶数中,末位必须取 2、4 这两个数字中的一个,这有两种方法,取定末位后,再从其余五个数字中任取四个,排成其他四位,这有

$$A_5^4=5\times4\times3\times2=120$$

种方法.因此,共有

$$2A_5^4=2\times120=240$$

个五位数是偶数.

(3)一个整数是不是 3 的倍数,要看它的各位数字之和是不是 3 的倍数,这六个数字 1,2,3,4,7,9 之和是 26,因此只有除去 2,余下的五个数字之和才是 3 的倍数.由此可知,所取的五个数字必须是1,3,4,7,9.因此,共

有

$$P_5=5!=120$$

个五位数是 3 的倍数.

8.解法一:

$$\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1, & (1) \\ \sqrt{xy+3}=x. & (2) \end{cases}$$

(2)的两边平方,得

$$xy+3=x^2,$$

即 $$x^2-xy=3. \quad (3)$$

将(1)的两边乘以 3,得

$$3x^2-6xy-3y^2=3. \quad (4)$$

从(4)的两边分别减去(3)的两边,得

$$2x^2-5xy-3y^2=0.$$

分解,得

$$(2x+y)(x-3y)=0,$$

$$2x+y=0, x-3y=0.$$

由此得 $\begin{cases} x^2-xy=3 \\ 2x+y=0; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-xy=3, \\ x-3y=0 \end{cases}.$

解得 $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=2; \end{cases}$

$\begin{cases} x_3=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x_4=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y_4=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

检验后,x_1,y_1 与 x_3,y_3 是原方程组的两组解;x_2,y_2 与 x_4,y_4 不适合方程(2).

∴方程组的解是:

$\begin{cases} x=1, \\ y=-2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

解法二:

$$\begin{cases} x^2-2xy-y^2=1, & (1) \\ \sqrt{xy+3}=x. & (2) \end{cases}$$

(2)的两边平方,得

$$xy+3=x^2,$$

$$\therefore y=\frac{x^2-3}{x}. \quad (3)$$

代入(1),得

$$x^2-2x\frac{(x^2-3)}{x})-(\frac{x^2-3}{x})^2=1.$$

整理,得

$2x^4-11x^2+9=0$.

分解,得

$(x^2-1)(2x^2-9)=0$.

$x^2-1=0$,∴$x_1=1,x_2=-1$;

$$2x^2-9=0,\qquad \therefore x_3=\frac{3\sqrt{2}}{2},\quad x_4=-\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

将 x 的值代入(3),得

$$y_1=-2,y_2=2,y_3=\frac{\sqrt{2}}{2},y_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

检验后,x_1,y_1 与 x_3,y_3 是原方程组的两组解

;x_2,y_2 与 x_4,y_4 不适合方程(2).

∴方程组的解是:

$$\begin{cases}x=1,\\ y=-2;\end{cases}\qquad \begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

9.证法一:

连结 OA,OB.

∵OA=OB,∴∠OAB=∠OBA;

∴∠OAC=∠OBD.

又 AC=BD,∴△OAC≌△OBD,∴OC=OD.

∵CE、DF 分别切⊙O 于 E、F,∴∠OEC、OFD 都是直角.

在△OEC 与△OFD 中:

∵∠OEC=∠OFD=90°,OE=OF,OC=OD,

∴△OEC≌△OFD.

证法二:

∵CE、CB 分别是⊙O 的切线与割线,

∴CE^2=CA·CB=CA(CA+AB).

同理,DF^2=DB·DA=DB(DB+AB).

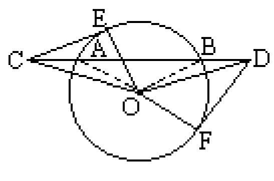
∵CA=DB,∴$CE^2=DF^2$,∴CE=DF

∵CE、DF 分别切⊙O 于 E、F,∴∠OEC、∠OFD 都是直角.

在△OEC 与△OFD 中:

∵∠OEC=∠OFD=90°,OE=OF,CE=DF,

∴△OEC≌△OFD.



10.解:(1)设 C 为母线 VB 与球相切的切点.

连 OA、OB、OC,则 OA=OC=1,OB=OB,

∠OAB=∠OCB=90°，

故　△OAB≌△OCB.

由此可知，

∠OBA=∠OBC=θ.

设　圆锥的底面半径为 r，母线为 l，则

$$r=\mathrm{ctg}\theta,\ l=\frac{r}{\cos2\theta}=\frac{\mathrm{ctg}\theta}{\cos2\theta}$$

于是

$$1+r=\mathrm{ctg}\theta\left(\frac{1}{\cos2\theta}+1\right)=\frac{1}{\mathrm{tg}\theta}\cdot\frac{1+\cos2\theta}{\cos2\theta}=\frac{1}{\mathrm{tg}\theta}\cdot\frac{2\cos^2\theta}{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{tg}\theta}\cdot\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2\theta}=\frac{2}{\mathrm{tg}\theta(1-\mathrm{tg}^2\theta)}.$$

(2)设圆锥的全面积为 T，则

$$T=\pi rl+\pi r^2=\pi r(l+r)=\pi\mathrm{ctg}\theta\frac{2}{\mathrm{tg}\theta(1-\mathrm{tg}^2\theta)}=\frac{2\pi}{\mathrm{tg}^2\theta(1-\mathrm{tg}^2\theta)}$$

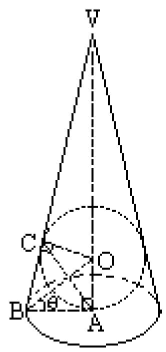
(3)欲使 T 最小，只要使 $\mathrm{tg}^2\theta(1-\mathrm{tg}^2\theta)$ 最大即可.

由于

$$\mathrm{tg}^2q(1-\mathrm{tg}^2q)=-\mathrm{tg}^4q+\mathrm{tg}^2q=-(\mathrm{tg}^2q-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4},$$

因此当 $\mathrm{tg}^2q=\frac{1}{2}$ 时，$\mathrm{tg}^2q(1-\mathrm{tg}^2q)$ 最大.

∴　当 $q=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，T 最小.



1964年试题

1.化简:$\dfrac{\sqrt[3]{3^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{3})^{-3}}}{(\sqrt{3}-1)^2}$.

2.甲乙二人在河的南岸 O 处,隔河在正北方向有一建筑物 P.甲向正东、乙向正西沿河岸而行,甲每分钟比乙多走 a 米.10 分钟后,甲望建筑物 P 在北 a 度西(即北偏西 a 度),乙望建筑物 P 在北 β 度东(即北偏东 β 度),求 O 与 P 之间的距离.

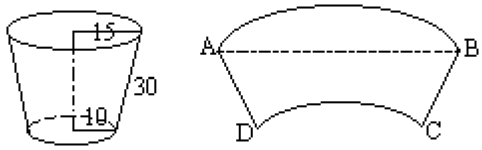
3.解方程 $x^4+1=0$;并且证明:平面内表示这个方程的根的四个点是一个正方形的顶点.

4.已知 A、B、C 是三角形的三个内角,求证:

$$\cos A=\frac{\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A}{2\sin B\sin C}$$

5.已知方程 $x^3+mx^2-3x+n=0$ 的三个根的平方和为 6,且知这个方程有两相等的正根,求 m、n 的值.

6.圆台形铁桶的上口半径是 15 厘米,下底半径是 10 厘米,母线长是 30 厘米,将铁桶的侧面沿一条母线剪开铺平,得图中扇面形状的铁片 ABCD.求 A、B 两点间的距离.

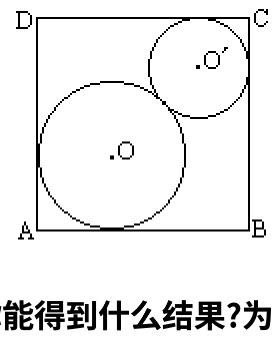


7.A、B、C、D 四个点在平面 M 和平面 N 之外,A、B、C、D 在平面 M 内的射影是 A_1、B_1、C_1、D_1,在平面 N 内的射影是 A_2、B_2、C_2、D_2.已知 A_1、B_1、C_1、D_1 在一条直线上,$A_2B_2C_2D_2$ 是一个平行四边形,求证 ABCD 也是一个平行四边形.

8.下图中 ABCD 是正方形,其每边长为 1;在正方形内,⊙O 与⊙O'互相外切,并且⊙O 与 AB、AD 两边相切,⊙O' 与 CB、CD 两边相切.

(1)求这两圆半径之和.

(2)当两圆半径各多么长时,两圆面积之和最小?当半径各多么长时,面积之和最大?证明你的结论.



附加题

(1)如果把第 8 题中的正方形改成矩形,你能得到什么结果?为什么?

(2)如果把第 8 题中的正方形改成棱长为 1 的正方体,把圆改成球,你能得到什么结果?为什么?

1964年试题答案

1.解法一:

$$\text{原式}=\frac{[3^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{3})^{-3}]^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{3^{-\frac{1}{2}}\cdot 3}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2(2-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3}{2}.$$

解法二:

$$\text{原式}=\frac{[3^{-\frac{3}{2}}(\frac{1}{3})^{-3}]^{\frac{1}{3}}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{3^{-\frac{1}{2}}\cdot 3}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-1)^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)^{2}}{[(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)]^{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(4+2\sqrt{3})}{4}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}+3}{2}.$$

2.解:如图,设 OB=x,则 OA=x+10a.

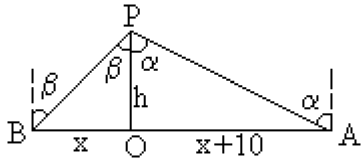
再设 OP=h,则

$h\,\mathrm{tg}\,\alpha=x+10a,$

$h\,\mathrm{tg}\,\beta=x.$

$h(\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta)=10a,$

$$\therefore\quad h=\frac{10a}{\mathrm{tg}\,a-\mathrm{tg}\,b}.$$



3.解法一:原方程即 $x^4=-1$,也就是

$$x^4=\cos(2k+1)\pi+i\sin(2k+1)\pi$$

$$\therefore x=\cos\frac{2k+1}{4}\pi+i\sin\frac{2k+1}{4}\pi.$$

令 k=0、1、2、3,就得到原方程的四个根:

$$x_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$x_2=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$x_3=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

$$x_4=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),$$

显然,$|x_1|=|x_2|=|x_3|=|x_4|=1$,故平面内表示这四个根的点$M_1$、$M_2$、$M_3$、$M_4$都在单位圆上

如图,$\angle M_1OM_2$ 等于 x_2 的辐角减去 x_1 的辐角,故

$$\angle M_1OM_2=\frac{\pi}{2}$$

同理,$\angle M_2OM_3=\angle M_3OM_4=\frac{\pi}{2}.$

又显然有 $\angle M_4OM_1=\frac{\pi}{2}.$

$\therefore M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4=M_4M_1.$

$\therefore M_1M_2M_3M_4$ 是一个正方形.

解法二:$x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2$

$$=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$$

$$=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

∴原方程即

$$(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)=0.$$

它的根是

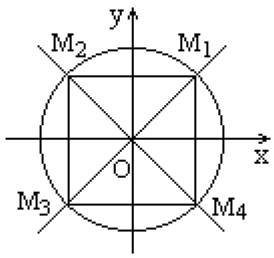
$$x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

如图,线段 M_2M_1 与 M_3M_4 显然都平行于 OX 轴,线段 M_4M_1 与 M_3M_2 都平行于 OY 轴.

又$M_1M_2=M_2M_3=M_3M_4=M_4M_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}.$

所以 $M_1M_2M_3M_4$ 是一个正方形.



4.解法一:利用正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,$$

得到 $\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}.$

代入所要证明的等式的右边,并化简得

$$\frac{\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A}{2\sin B\sin C}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

由余弦定理,上式右边就是 cosA.

解法二:利用 A=π-(B+C),

$\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin^2B+\sin^2c-\sin^2(B+C)$

$=\sin^2B+\sin^2C-(\sin B\cos C+\cos B\sin C)^2$

$=\sin^2B+\sin^2C-\sin^2B\cos^2C-\cos^2B\sin^2C-2\sin B\sin C\cos B\cos C$

$=\sin^2B(1-\cos^2C)+\sin^2C(1-\cos^2B)-2\sin B\sin C\cos B\cos C$

$=2\sin^2B\sin^2C-2\sin B\sin C\cos B\cos C$

$=2\sin B\sin C(\sin B\sin C-\cos B\cos C)$

$=2\sin B\sin C[-\cos(B+C)]$

$=2\sin B\sin C\cdot\cos[\pi-(B+C)]$

$=2\sin B\sin C\cos A.$

两边除以 2sinBsinC,得到

$$\frac{\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A}{2\sin B\sin C}=\cos A.$$

5.解法一:设这个方程的三个根为α、α、β.根据已知条件和根与系数的关系,得

$$\begin{cases}2a^2+b^2=6, & (1)\\ a^2+2ab=-3. & (2)\end{cases}$$

(2)的两边乘以 2,得

$2\alpha^2+4\alpha\beta=-6$,(3)

(1)与(3)的两边分别相加,得

$4\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=0$,

即$(2\alpha+\beta)^2=0$,

$\therefore \beta=-2\alpha$.

代入(1),$2\alpha^2+(-2\alpha)^2=6$,

$6\alpha^2=6,\therefore \alpha=\pm1$.

$\alpha=-1$ 不符合题意,舍去.

故 $\alpha=1,\beta=-2$.

$\therefore m=-(2\alpha+\beta)=0$,

$n=-\alpha^2\beta=2$.

解法二:仿解法一得

$$\begin{cases}2a^2+b^2=6, & (1)\\ a^2+2ab=-3. & (2)\end{cases}$$

由$(2), b=\dfrac{-3-a^2}{2a}$,

代入$(1), 2\alpha^2+(\dfrac{-3-\alpha^2}{2\alpha})^2=6$,

代简,得 $\alpha^4-2\alpha^2+1=0$,

即 $(\alpha^2-1)^2=0$,

$\therefore \alpha=\pm1$.

$\alpha=-1$ 不合题意,舍去.

故 $\alpha=1$,代入(2)得,$\beta=-2$.

$\therefore m=-(2\alpha+\beta)=0$,

$n=-\alpha^2\beta=2$.

6.解法一:

$$\overset{\frown}{AB}=2\pi\cdot15=30\pi,\ \overset{\frown}{CD}=2\pi\cdot10=20\pi.\quad AD=30.$$

延长 AD、BC 相交于 O,设∠COD=θ,OD=x,则

$(x+30)\theta=30\pi$,

$x\theta=20\pi$,

相减,得 $30\theta=10\pi$,

$$q=\frac{p}{3},$$

$$x=\frac{20p}{q}=60.$$

因为△OAB 是一个等边三角形,所以

AB=OA=90(厘米).

解法二:

$$\overset{\frown}{AB}=2p\cdot15=30p,\overset{\frown}{CD}=2p\cdot10=20p.AD=30,$$

延长 AD、BC 相交于 O,设 OD=x,则

$$\frac{x+30}{x}=\frac{30p}{20p}.$$

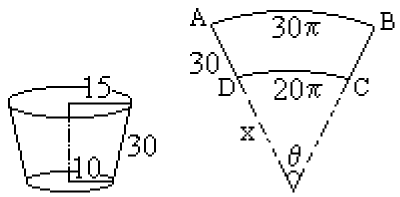
解出 x,得

x=60,

$$q=\frac{20p}{60}=\frac{p}{3}.$$

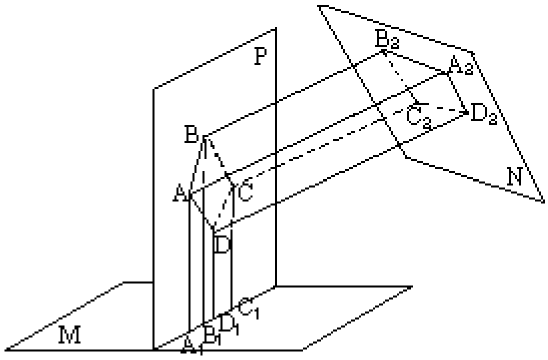
因为△OAB 是一个等边三角形,所以

AB=OA=90(厘米).



7.解:如图,设 A_1、B_1、C_1、D_1 所在的直线为 l,过直线 l 与直线作 AA_1 作一平面 P,则 P 必垂直于 M.显然 A 在平面 P 内.又因 B_1 在平面 P 内,且直线 BB_1 垂直于平面 M,故 BB_1 必在平面 P 内.因而 B 也在平面 P 内.同理,C、D 也在平面 P 内.

因 AA_2∥DD_2,且 A_2B_2∥D_2C_2,故由 AA_2 与 A_2B_2 所决定的平面平行于由 DD_2 与 D_2C_2 所决定的平面.又 P 与这两个平面的交线分别为 AB 与 CD,故 AB∥CD.同理 BC∥AD.故 ABCD 是平行四边形.



8.解法一:

(1)设⊙ O与 AB 相切于 P,⊙ O'与 BC 相切于 Q.连 OP,O'Q.作 O'R⊥AB ,OS⊥ O'R.令 r 与 r'分别表示⊙ O与⊙ O'的半径,又令 s=r+r'.容易看出:O 、O'在对角线 AC 上,△ OAP 是等腰直角三角形,而 O'RBQ 和 OPRS 是矩形.因此,

AP=OP=r,RB=O'Q=r',

∴ OS=PR=1-(r+r')=1-s.

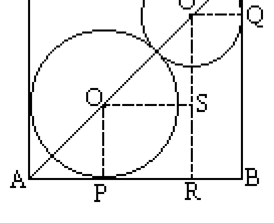
又△ O'OS 也是等腰直角三角形,所以

$$OO' = \sqrt{2}OS = \sqrt{2}(1-s),$$

但 OO'是两圆连心线,所以 OO'=r+r'=s.故由上式得

$$s = \sqrt{2}(1-s),$$

$$\therefore \quad s = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = 2-\sqrt{2}. \qquad (\text{I})$$



(2)两圆面积之和是

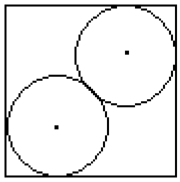
$\pi(r^2+r'^2)=\pi[r^2+(s-r)^2]$

$= \pi[r^2+(2-\sqrt{2}-r)^2]$ [由(Ⅰ)]

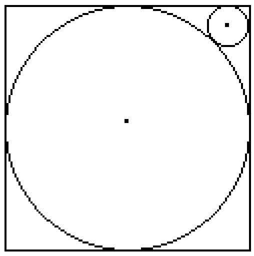
$= 2\pi[r^2-(2-\sqrt{2})r+3-2\sqrt{2}]$

$= 2p[(r-\frac{2-\sqrt{2}}{2})^2+\frac{3-2\sqrt{2}}{2}].$ (Ⅱ)

因此,当$r=\frac{2-\sqrt{2}}{2}, r'=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$时,面积之和最小.



现在讨论当半径各多么长时,面积之和最大.不妨先设 $r\geq r'$,即不妨设$r\geq\frac{2-\sqrt{2}}{2}$[由(Ⅰ)].但显然$r\leq\frac{1}{2}$,故由(Ⅱ),当$r=\frac{1}{2}, r'=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$时,面积之和最大.同理,当$r'=\frac{1}{2}, r=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$时,面积之和也是最大.



解法二:

$(1) AO=AP\sqrt{2}=r\sqrt{2}, OO'=r+r', O\quad C=O'Q\sqrt{2}=r'\sqrt{2},$

$\because\quad AC=\sqrt{2}, \therefore r\sqrt{2}+r+r'+r'\sqrt{2}=\sqrt{2},$

即 $(1+\sqrt{2})(r+r')=\sqrt{2},$

$(1+\sqrt{2})s=\sqrt{2},$

$\therefore\quad s=\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=2-\sqrt{2}.$

(2)两圆面积之和是

$\pi(r^2+r'^2)=\frac{1}{2}\pi[(r+r')^2+(r-r')^2].$ (Ⅲ)

因$r+r'=2-\sqrt{2}$为定值,故当$r-r'=0$即$r=r'=\frac{s}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$时,

两圆面积之和最小.

现在讨论当半径多么长时面积之和最大.不妨先设$r\geq rv$,即$r\geq\frac{s}{2}$.

由(Ⅲ),得

$\pi(r^2+r'^2)=\frac{\pi}{2}[s^2+(2r-s)^2]$

$$= \frac{p}{2}[s^2 + 4(r - \frac{s}{2})^2].$$

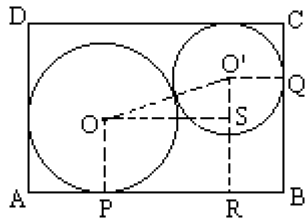
但显然$r \leq \frac{1}{2}$,**故当**$r = \frac{1}{2}, r' = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$**时,面积之和最大.**

同理,当$r' = \frac{1}{2}, r = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$**时,面积之和也是最大.**

附加题

(1)如果把第 8 题中的正方形改成矩形,你能得什么结果?为什么?

解:设 ABCD 为矩形,AB=a.BC=b.设⊙O与⊙O′互相外切,并且⊙O与 AB、AD 相切,⊙O'与 CB、CD 相切.令⊙O与⊙O'的半径分别为 r 与r',其和为 s.设⊙O切 AB 于 P,⊙O′切 BC 于 Q.连 OO'.作 O'R⊥AB,OS⊥O'R.



容易看出:AP=r,RB=O′Q=r′.

因此, $OS=PR=a-s$.

仿此, $O'S=b-s$.

但△OSO′是直角三角形,而 OO′=r+r′=s,

故得 $(a-s)^2+(b-s)^2=s^2$.

即 $s^2-2(a+b)s+a^2+b^2=0$.

解得 $s = a + b \pm \sqrt{2ab}.$

显然 s<a+b,故应取"-"号.因此

$$s = a + b - \sqrt{2ab}. \qquad (\text{I})$$

另一方面,两圆面积之和为

$$\pi(r^2 + r'^2) = \frac{\pi}{2}[(r + r')^2 + (r - r')^2]$$

$$= \frac{\pi}{2}[s^2 + (r - r')^2]. \qquad (\text{II})$$

显然当$r = r' = \frac{1}{2}(a + b - \sqrt{2ab})$**时,面积之和最小.**

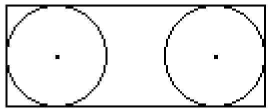
又由(II)有

$$\pi(r^2 + r'^2) = \frac{\pi}{2}[s^2 + (2r - s)^2]. \qquad (\text{III})$$

现在讨论当半径多么长时面积之和最大.不妨先设$r \geq r'$,**即**$r \geq \frac{s}{2}$

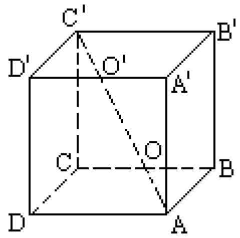
但r**不能超过**$\frac{a}{2}$**与**$\frac{b}{2}$**中的较小者,设为**$\frac{b}{2}$,**则由(III),当**$r = \frac{b}{2}, r' = a + \frac{b}{2} - \sqrt{2ab}$

时,积之和最大.同理,当$r' = \frac{b}{2}, r = a + \frac{b}{2} - \sqrt{2ab}$**时,面积之和也是最大.**



(2)如果把第 8 题中的正方形改成棱长为 1 的正方体,把圆改成球,你能得到什么结果?为什么?

解:设球 O 与球 O′ 互相外切,并且都在正方体 ABCD—B′A′C′D′内部.设球 O 与过 A 的三个面相切,球 O′与 C′的三个面相切.设球 O 与球的半径分别为 r 与 r′,r+r′=s.



和正方形的情况相仿,以 O、 O′为相对的两个顶点作正方体,使它的各面平行于原正方体的相应各面,可得

$$s=\sqrt{3}(1-s),$$

$$\therefore s=\frac{3-\sqrt{3}}{2}.$$

两球表面积之和是

$$4\pi(r^2+r'^2)=2\pi[(r+r')^2+(r-r')^2]$$
$$=2\pi[s^2+(r-r')^2]$$
$$=2\pi[s^2+(2r-s)^2].$$

故当$r=r'=\frac{s}{2}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$**时,表面积之和最小.同样,当**$r=\frac{1}{2},r'=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$;

或$r'=\frac{1}{2},r=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$**时,表面积之和最大**.

两球体积之和是

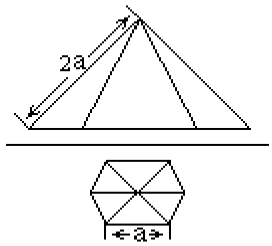
$$\frac{4}{3}\pi(r^3+r'^3)=\frac{4\pi}{3}s(r^2-rr'+r'^2)$$
$$=\frac{\pi}{3}s[s^2+3(r-r')^2]$$
$$=\frac{\pi}{3}s[s^2+3(2r-s)^2].$$

故当$r=r'=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$**时,体积之和最小.同样,当**$r=\frac{1}{2},r'=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$;

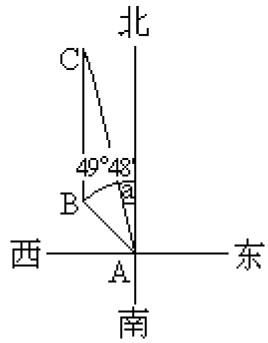
或$r'=\frac{1}{2},r=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$**时,体积之和最大**.

1965 年试题

1． 右面的二视图所表示的立体是什么?求出它的体积．



2．在 A 处的甲船测得乙船在北偏西 49°48′的 B 处以速度 22浬/小时向正北方向行驶．甲船立即从 A 处出发，以速度 26浬/小时向北偏西 a 度的方向沿直线驶去，追赶乙船．问 a 是多大角度时，经过一段时间，甲船能够在某处 C 恰好与乙船相遇?(lg2.2=0.3424，lg2.6=0.4150;lg 是以 10 为底的对数符号.)



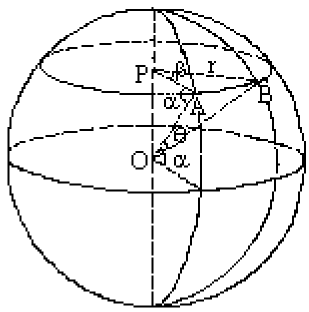
正弦对数表

A	0’	6’	12’	18’	24’	30’	36’	42’	48’	54’	60’		1’	2’	3’
40°	1.8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	8169	49	1	3	4
41°	8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	8255	48	1	3	4
42°	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	8338	47	1	3	4
43°	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46	1	3	4
44°	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	1.8495	45	1	3	4
45°	1.8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	8569	44	1	3	4
46°	8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	8641	43	1	3	4
47°	8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	8711	42	1	3	4
48°	8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	8778	41	1	3	4
49°	8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1.8843	40	1	3	4

余弦对数表

3.把地球看作半径为 R 的球.设 A、B 两地的纬度相同，都是 a 度，它们的经度相差β度(0°<β≤180°).求 A、B 两地之间的球面距离（即大圆

弧长）．



4．(1)证明｜sin2x｜≤2｜sinx｜．(x 为任意值)

(2)已知 n 为任意正整数，用数学归纳法证明

｜sinnx｜≤n｜sinx｜．(x 为任意值)

5．已知一点 P 的坐标是(4，-2)，直线 l 的方程是 y-x+5=0，曲线 C 的方程是 $\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$ 求经过P点而与l垂直的直线和曲线C的交点的坐标．并画出此题的略图．

6．当 p 是什么实数时，方程 $x^2+px-3=0$ 与方程 $x^2-4x-(p-1)=0$ 有一个公共根?并求出这个公共根．

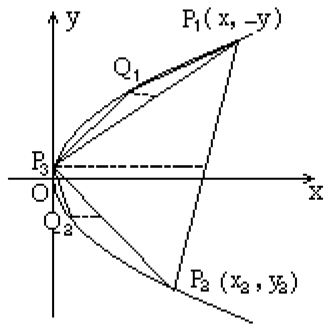
7．已给抛物线 $y^2=2x$．

(1)在抛物线上任取两点 $P_1(x_1，y_1)$、$P_2(x_2，y_2)$．经过线段 P_1P_2 的中点作直线平行于抛物线的轴，和抛物线交于点 P_3．证明

$\triangle P_1P_2P_3$的面积为 $\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3$.

(2)经过线段 P_1P_3 和 P_2P_3 的中点，分别作直线平行于抛物线的轴，和抛物线依次交于 Q_1、Q_2．试将$\triangle P_1P_3Q_1$ 与$\triangle P_2P_3Q_2$ 的面积的和用 y_1、y_2 表示出来．

(3)仿照(2)，又可以作出四个更小的三角形．照这样继续下去，可以作出一系列的三角形．由此设法求出线段 P_1P_2 与抛物线所围成的图形的面积．



8．附加题：

(1)已知 a、b、c 为实数，证明 a、b、c 都为正数的充要条件是：

a+b+c>0，ab+bc+ca>0，abc>0．

(2)已知方程

$x^3+px^2+qx+r=0$

的三个根 a、β、γ都是实数，证明 a、β、γ是一个三角形的三个边长的充要条件是：

$$\begin{cases} p < 0, q > 0, r < 0, \\ p^3 > 4pq - 8r \end{cases}$$

1965 年试题答案

1.解：右面的二视图所表示的立体是正六棱锥.

设这个六个棱锥的高是 h，底面积是 A，体积是 V，则有

$$h = \sqrt{3}a,$$

$$A = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}hA = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}a \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3}{2}a^3.$$

注：本题考二视图和计算棱锥的体积.

正弦对数表

A	0’	6’	12’	18’	24’	30’	36’	42’	48’	54’	60’		1’	2’	3’
40°	1.8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	8169	49	1	3	4
41°	8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	8255	48	1	3	4
42°	8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	8338	47	1	3	4
43°	8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	8418	46	1	3	4
44°	8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	1.8495	45	1	3	4
45°	1.8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	8569	44	1	3	4
46°	8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	8641	43	1	3	4
47°	8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	8711	42	1	3	4
48°	8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	8778	41	1	3	4
49°	8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1.8843	40	1	3	4

余弦对数表

2.解：设甲船与乙船相遇所需要的时间为 t，则有

BC=22t，AC=26t.

由正弦定理，得

$$\frac{26t}{\sin(180° - 49°48')} = \frac{22t}{\sin(49°48' - \alpha)},$$

$$\therefore \sin(49°48' - \alpha) = \frac{22}{26}\sin 49°48'.$$

对上式两边取对数，得

$\lg\sin(49°48' - a)$

$=\lg 22-\lg 26+\lg\sin 49°48'$

$=1.3424-1.4150+\bar{1}.8830$

$=\bar{1}.8104$

查表得到

$49°48'-a=40°15'$.

$\therefore a=49°48'-40°15'=9°33'$.

注：本题考解任意三角形的基本方法，并考查学生查表和运用对数计算的能力.

3.解法一：

设A、B两地之间的球面距离为x，大圆弧$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角为θ度，则

$$x=\frac{\pi\theta}{180}R. \qquad (1)$$

设纬度为a的纬度圈的圆心为P，半径为r，则∠APB=β.因为△PAB是等腰三角形，所以A、B之间的直线距离

$$AB=2r\sin\frac{\beta}{2}.$$

又在直角三角形*OAP*中，∠OAP=a，可知

r=Rcosa.

所以 $AB=2R\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}$

又在等腰三角形OAB中，可以求得

$$AB=2R\sin\frac{\theta}{2}$$

所以 $2R\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}=2R\sin\frac{\theta}{2}$,

$$\sin\frac{\theta}{2}=\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2},$$

即 $\theta=2\arcsin(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2})$.

代入(1)，得

$$x=\frac{\pi R}{180}\cdot 2\arcsin(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2})$$

$$=\frac{\pi R}{90}\arcsin(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}).$$

答：A、B两地之间的球面距离为

$$\frac{\pi R}{90}\arcsin(\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}).$$

解法二：

设A、B两地之间的球面距离为x，大圆弧$\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角为θ度，则

$$x=\frac{\pi\theta}{180}R. \qquad (1)$$

设纬度为a的纬度圈的圆心为P，半径为r，则∠APB=β.在△PAB中，

根据余弦定理得 A、B 之间的直线距离的平方

$$AB^2=2r^2-2r^2\cos\beta=2r^2(1-\cos\beta)\cdot$$

又在直角三角形 OAP 中，∠OAP=a 可知

$$r=R\cos a\cdot$$

所以 $$AB^2=2R^2\cos^2 a(1-\cos\beta).$$

又在△OAB 中，根据余弦定理，得

$AB^2=2R^2(1-\cos\theta).$

所以 $2R^2\cos^2 a(1-\cos\beta)=2R^2(1-\cos\theta).$

由此，$\cos\theta=1-\cos^2 a(1-\cos\beta)$，

即 $\theta=\arccos[1-\cos^2 a(1-\cos\beta)].$

代入(1)，得

$$x=\frac{\pi R}{180}\arccos[1-\cos^2\alpha(1-\cos\beta)].$$

答：A、B 两地之间的球面距离为

$$\frac{\pi R}{180}\arccos[1-\cos^2\alpha(1-\cos\beta)].$$

注：本题考运用几何与三角的基本知识，计算球面距离.

4.解：(1) $|\sin 2x|=|2\sin x\cos x|$

$$=2|\sin x|\cdot|\cos x|$$

$$\leq 2|\sin x|.(\because |\cos x|\leq 1)$$

(2)当 n=1 时，$|\sin x|=|\sin x|$，不等式成立.

设当 n=k 时不等式成立，今证明当 n=k＋1 时，不等式也成立.因为

$$\sin(k+1)x=\sin kx\cos x+\cos kx\sin x,$$

所以根据绝对值不等式的性质，得到

$$|\sin(k+1)x|\leq|\sin kx|\cdot|\cos x|+|\cos kx|\cdot|\sin x|.$$

又根据归纳法的假设和 $|\cos x|\leq 1$ 及 $|\cos kx|\leq 1$，得到

$$|\sin(k+1)x|\leq k|\sin x|+|\sin x|=(k+1)|\sin x|.$$

因此，不等式对一切正整数 n 都成立.

注：本题主要考数学归纳法和绝对值不等式.第一小题的目的是启发学生应用 $|\cos x|\leq 1$ 来证明不等式.

5.解：直线 l 的方程也可以写成

$$y = x-5,$$

所以 l 的斜率是 1，与 l 垂直的直线的斜率应为-1.

因此，经过 P 点而与直线 l 垂直的直线 l' 的方程是

$$y+2=-(x-4),$$

即

$$x+y-2=0.$$

要求 l' 与 C 的交点坐标，只须解下列方程组

$$\begin{cases} x+y-2=0, & (1)\\ \dfrac{(x+1)^2}{2}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1. & (2)\end{cases}$$

由(1)式解得

$y=-x+2$，(3)

代入(2)式并化简，得到

$$3x^2+2x-1=0,$$

或　$(3x-1)(x+1)=0.$

$$\therefore x=\frac{1}{3},\ x_2=-1.$$

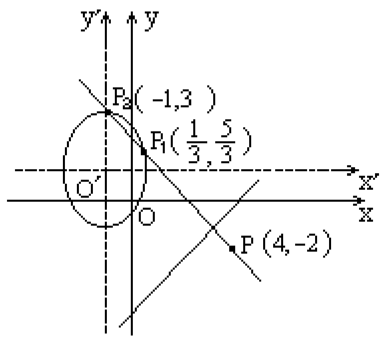
代入(3)式，得到

$$y_1=\frac{5}{3},\ y_2=3.$$

因此，直线l'与曲线C有两个交点，它们的坐标是$(\frac{1}{3},\frac{5}{3}),(-1,3)$.

曲线C是椭圆，它的中心在$(-1,1)$，长轴和短轴都平行于坐标轴，长度为4和$2\sqrt{2}$

略图如下：



注1：本题主要考直线的斜率、直线的方程以及直线与二次曲线的交点等最基本的解析几何知识.

注2：画出的略图应包括所给的以及所求出的点、直线和曲线的图形.

6.解法一：

设这两个方程的公共根是a，则有

$$\begin{cases}a^2+pa-3=0, & (1)\\ a^2-4a-(p-1)=0. & (2)\end{cases}$$

现在的问题是求p和a的值.为此，我们先从(1)、(2)两式消去p.

由(2)式得

$$p=a^2-4a+1.$$

代入(1)式并化简，就得到

$$a^3-3a^2+a-3=0.$$

分解因式得

$$(a-3)(a^2+1)=0. \qquad (3)$$

因为p是实数，±i不可能是方程$x^2+px-3=0$的根，所以a=3.

将a=3代入(1)，得到

$$9+3p-3=0,$$

$$\therefore p=-2.$$

解法二：

设这两个方程的公共根是a，则有

$$\begin{cases}a^2+pa-3=0, & (1)\\ a^2-4a-(p-1)=0. & (2)\end{cases}$$

现在的问题是求 p 与 a 的值.为此，我们先从(1)、(2)两式消去 a.

(1)式减(2)式，得

$$(p+4)a+p-4=0,$$

显然，$p\neq -4$，所以有

$$a=\frac{-(p-4)}{P+4}$$

代入(1)式并化简，得到

$$p^3+2p^2+16p+32=0.$$

分解因式，得

$$(p+2)(p^2+16)=0.$$

因 p 是实数，$p^2+16\neq 0$，

所以 $p=-2$.

将 $p=-2$ 代入(3)式，就得到 $a=3$.

解法三：

解已知的两个方程，得知它们的根分别是：

$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12},\quad x=2\pm\sqrt{p+3}.$$

要使两个方程有一个公共根，有下面四种可能的情况

$$-\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}=2+\sqrt{p+3}$$

$$-\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}=2-\sqrt{p+3}$$

$$-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}=2+\sqrt{p+3}$$

$$-\frac{p}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}=2-\sqrt{p+3}$$

移项，得到

$$2+\frac{p}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}-\sqrt{p+3} \qquad (1)$$

$$2+\frac{p}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}+\sqrt{p+3} \qquad (2)$$

$$2+\frac{p}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}-\sqrt{p+3} \qquad (3)$$

$$2+\frac{p}{2}=-\frac{1}{2}\sqrt{p^2+12}+\sqrt{p-3} \qquad (4)$$

将(1)式两边平方，得到

$$4+2p+\frac{p^2}{4}=\frac{1}{4}p^2+3+p+3-\sqrt{p^2+12}\sqrt{p+3},$$

化简，得

$$p-2=-\sqrt{p^2+12}\cdot\sqrt{p+3}.$$

再平方并化简，得

$$p^3+2p^2+16p+32=0.$$

不难看出，有理化(2)或(3)或(4)都得到同样的结果.

将上面得到的方程的左边分解因式，得

$$(p+2)(p^2+16)=0.$$

因 p 是实数，所以 p=--2.

将 p=-2 代入原方程，得到

$$x^2-2x-3=0，x^2-4x+3=0.$$

解这两个方程，得到一个公共根 x=3.

注：本题考查学生根据已知条件建立方程及解方程的能力.

7.解：(1)设 P_3 的坐标是$(x_3，y_3)$，则$\triangle P_1P_2P_3$ 的面积是行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$$

的绝对值的一半.

现在来计算△的值：

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2}y_1^2 & y_1\\ 1 & \frac{1}{2}y_2^2 & y_2\\ 1 & \frac{1}{2}y_3^2 & y_3\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[y_3^2(y_1-y_2)+y_3(y_2^2-y_1^2)+y_1y_2(y_1-y_2)].$$

因为P_3在经过P_1P_2的中点而平行于x轴的直线上，所以$y_3=\frac{y_1+y_2}{2}$,

代入上式并化简，就是到

$$\Delta=-\frac{1}{8}(y_1-y_2)^3.$$

因此，$\triangle P_1P_2P_3$ 的面积是：

$$A_1=\frac{1}{2}|\Delta|=\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3.$$

(2)仿照(1)可求得$\triangle P_1P_3Q_1$ 与$\triangle P_2P_3Q_2$ 的面积分别为

$$A'=\frac{1}{16}|y_1-y_3|^3，A''=\frac{1}{16}|y_3-y_2|^3.$$

由题意知

$$|y_1-y_3|=|y_3-y_2|=\frac{1}{12}|y_1-y_2|,$$

$$\therefore A'=A''=\frac{1}{16}\times\frac{1}{2^3}|y_1-y_2|^3=\frac{1}{8}A_1.$$

因此，$\triangle P_1P_3Q_1$ 与$\triangle P_2P_3Q_2$ 的面积的和是

$$A_2=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}|y_1-y_2|^3=\frac{1}{4}A_1.$$

(3)经过线段 P_1Q_1、Q_1P_3、P_3Q_2、Q_2P_2 的中点分别作直线平行于抛物线的轴，和抛物线依次交于 R_1、R_2、R_3、R_4.

与(1)、(2)同理，可以知道$\triangle P_1R_1Q_1$、$\triangle Q_1R_2P_3$、$\triangle P_3R_3Q_2$、$\triangle Q_2R_4P_2$ 的面积

都等于$\frac{1}{8}A' = \frac{1}{8}A'' = \frac{1}{64}A_1$.

因此，这四个三角形的面积的和是

$$A_3 = 4 \cdot \frac{1}{64}A_1 = \frac{1}{16}A_1 = \frac{1}{4^2}A_1.$$

第一步、第二步、第三步所得到的三角形的面积的总和是

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + \frac{1}{4}A_1 + \frac{1}{4^2}A_1.$$

照这样继续下去,每一步所得到的三角形的面积的和都等于前一步所得到的

三角形面积和的$\frac{1}{4}$.这一系列三角形面积的总和无限接近于线段P_1P_2与抛物线所

围成的图形的面积，由此可知，这个图形的面积是

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots = (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots)A_1$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{4}}A_1 = \frac{4}{3}A_1 = \frac{1}{12}|y_1 - y_2|^3.$$

注 1：本题是解析几何与代数的综合题，第一小题主要考三角形面积的计算.第二小题和第三小题主要是考查学生从具体结果总结出较普遍的公式的能力，以及代数计算能力.

注 2：(1)也可以用下面的方法来作.令 P_4 表 P_1P_2 的中点，则 P_4 的坐标是

$$(\frac{y_1^2 + y_2^2}{4}, \frac{y_1 + y_2}{2}).$$

$$\therefore P_3P_4 = \frac{y_1^2 + y_2^2}{4} - \frac{(y_1 + y_2)^2}{8} = \frac{1}{8}(y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2) = \frac{1}{8}(y_1 - y_2)^2.$$

$\triangle P_1P_3P_4$ 的面积是

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}(y_1 - y_2)^2 \left|y_1 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right| = \frac{1}{32}|y_1 - y_2|^3.$$

同理 $\triangle P_2P_3P_4$的面积也是$\frac{1}{32}|y_1 - y_2|^3$.

$\therefore P_1P_2P_3$ 的面积是

$$A_1 = 2 \cdot \frac{1}{32}|y_1 - y_2|^3 = \frac{1}{16}|y_1 - y_2|^3.$$

8.附加题：

解法一：

(1)条件的必要性是显然的，所以只须证明充分性.

利用方程的根与系数的关系，我们知道 a、b、c 是方程

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = 0$$

的三个根.因为常数项不为 0,所以 x=0 不可能是方程的根.又以任何负数代入方程左端，各项都为负数，所以任何负数都不是方程的根.因此 a、b、c 都是正数.

(2)α、β、γ 为一个三角形的三个边长的充要条件应该是：

$$\begin{cases}\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0,\\ \alpha+\beta>\gamma,\ \beta+\gamma>\alpha,\ \gamma+\alpha>\beta.\end{cases}$$

由(1)可知 $a>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ 的充要条件是：

$$a+\beta+\gamma>0,\ a\beta+\beta\gamma+\gamma a>0,\ a\beta\gamma>0.$$

即 $-p>0$，$q>0$，$-r>0$.

现在来求

$$a+\beta>\gamma,\ \beta+\gamma>a,\ \gamma+a>\beta$$

的充要条件，也就是求

$$a+\beta-\gamma>0,\ \beta+\gamma-a>0,\ \gamma+a-\beta>0$$

的充要条件，利用根与系数的关系，$a+\beta+\gamma=-p$.

于是

$$a+\beta-\gamma=-p-2\gamma,$$
$$\beta+\gamma-a=-p-2a,$$
$$\gamma+a-\beta=-p-2\beta.$$

因此，问题化为求

$$-p-2a>0,\ -p-2\beta>0,\ -p-2\gamma>0$$

的充要条件，由(1)的结论，它的充要条件应为

$$\begin{cases}(-p-2\alpha)+(-p-2\beta)+(-p-2\gamma)>0, & (1)\\ (p+2\alpha)(p+2\beta)+(p+2\beta)(p+2\gamma)+(p+2\gamma)(p+2\alpha)>0, & (2)\\ -(p+2\alpha)(p+2\beta)(p+2\gamma)>0. & (3)\end{cases}$$

化简不等式(1)，得

$$-p>0.$$

不等式(2)可化为：

$$3p^2+4(\alpha+\beta+\gamma)p+4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)>0,$$

即 $3p^2-4p^2+4q>0$,

即 $4q>p^2$.

不等式(3)可化为：

$$-p^3-2(\alpha+\beta+\gamma)p^2-4(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)p-8\alpha\beta\gamma>0,$$

即 $-p^3+2p^3-4pq+8r>0$.

化简，得

$$p^3>4pq-8r.$$

综合以上的讨论，我们得到α、β、γ为一个三角形的三个边长的充要条件是

$$\begin{cases}p<0,\ q>0,\ r<0,\\ p^2<4q,\ p^3>4pq-8r.\end{cases}$$

但是，第四个不等式可以由第一、三、五这三个不等式推出.由第三、第五两个不等式得到

$$p^3>4pq,$$

又由第一个不等式，两端除以 p，即可得到

$$p^2<4q.$$

因此，为α、β、γ为一个三角形的三个边长的充要条件是

$$\begin{cases} p < 0，q > 0，r < 0， \\ p^3 > 4pq - 8r. \end{cases}$$

解法二：

(1)条件的必要性是显然的，所以只须证明充分性.

因为 abc>0，所以 a、b、c 三数或者都是正数，或者有两个是负数、一个是正数.前一种情况就是我们要证明的结论，所以只需证明后一种情况不可能成立即可.

用反证法来证明，不妨假设 a<0，b<0，c>0.

由 a＋b＋c>0， ab＋bc＋ca>0，得到

$$\begin{cases} c > -(a+b)， & (1) \\ ab > -(a+b)c. & (2) \end{cases}$$

因为-(a＋b)>0，，把(1)式两端都乘以-(a＋b)，得

$$-(a+b)c>[-(a+b)]^2. \quad (3)$$

由(2)、(3)得到

$$ab>[-(a+b)]^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

移项，得

$$a^2+ab+b^2<0.$$

因为左端各项都是正数，所以这是不可能的.因此，a、b、c 只能都是正数.

(2)同解法一.

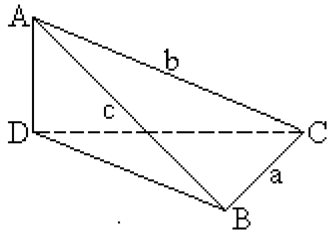
1965 年副题

1. 证明: $\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$, 当分母不为零时恒成立.

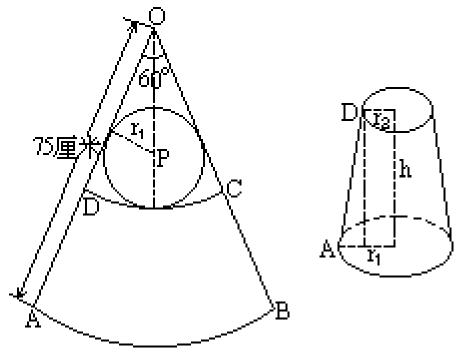
2．利用二项式定理求出$(0.989)^5$的近似值（精确到 0.001）．

3．制造一种产品,需要经过三道工序.第一道工序需要 4 人,第二道工序需要 3 人,第三道工序需要 2 人.现在有 9 个工人,其中有 2 人不能做第一道工序.如果把这项生产任务交给这 9 个工人去做,问共有多少种分配方法?

4．在四面体 ABCD 中,已知∠ADB、∠BDC、∠CDA 都是直角,△ABC 三边的长为 a、b、c（如下图）．求四面体 ABCD 的体积.



5．有一块扇形铁皮 OAB（如图）,∠AOB=60°,OA=72 厘米.现在想要剪下一个扇面形 ABCD 作为圆台形容器（下底比上底大）的侧面,并且由剩下的扇形铁皮 ODC 内,剪下一块与 OC、OD 和 $\overset{\frown}{DC}$ 相切的圆形铁皮,使它恰能作为圆台形容器的下底.(1)问 AD 应该取多么长?(2)算出这个容器的容积.



6．设 p、q、r 为实数.已知方程

$$x^4+px^2+qx+r=0$$

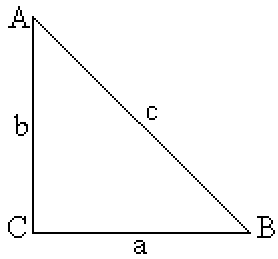
的一个根为$-1+i$,又知用$x-1$除x^4+px^2+qx+r所得的余数为-10.求 p、q、r 的值及方程其余的三个根.

7．已知P_1、P_2是抛物线$y^2=2px$上的任意两点,并且经过这两点的切线的交点在准线上.证明P_1、P_2两点的联线必经过焦点.

8．已知△ABC 三边的长 a、b、c 成等差数列,并且

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{7}{5}.$$

求 a、b、c 的比.



9．附加题:已知四面体三个面上的三角形是全等的,证明第四个面上的三角形或者和它们全等,或者是一个等边三角形.

1965 年副题答案

1．解法一:

去分母,只要证明

(1+cosx)(1+sinx-cosx)=sinx(1+sinx+cosx).

左端=(1+cosx)(1-cosx)+(1+cosx)sinx

$=\sin^2x+\sin x(1+\cos x)$

=sinx(1+sinx+cosx)=右端.

解法二:

$$左端=\frac{(1+\sin x-\cos x)(1+\sin x+\cos x)}{(1+\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\frac{2\sin x(1+\sin x)}{2(1+\sin x)(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=右端.$$

解法三:

$$左端=\frac{\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=右端.$$

解法四:

$$\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}\frac{1+\frac{1-\cos x}{\sin x}}{1+\frac{\sin x}{1+\cos x}},$$

因为

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\sin^2x}{\sin x(1+\cos x)}$$

$$=\frac{\sin x}{1+\cos x},$$

所以 $\dfrac{1+\dfrac{1-\cos x}{\sin x}}{1+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}}=1,$

因此

$$\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

上面的证明是在 $\sin x\neq 0$ 的假定下证明的.如果 $\sin x=0$,那么 $\cos x=\pm 1$.但是已经假定了 $1+\cos x\neq 0$,所以 $1-\cos x=0$,这时原式两端的值都为 0,等式也成立.

解法五:

与解法四相同,假定 $\sin x\neq 0$.

因为

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x},$$

根据比例的性质,把式子两边的分子和分母分别相加,作为新的分子和分母,得

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\cos x+\sin x},$$

注:本题考三角函数的一些简单性质,与证明简单三角恒等式的方法.

2．解: $(0.989)^5=(1-0.011)^5$.

利用二项式定理展开得到

$(1-0.011)^5$

$=1-5\times 0.011+10\times(0.011)^2-10\times(0.011)^3+5\times(0.011)^4-(0.011)^5$.

因为上式右端的后三项代数和的绝对值小于 0.0001,所以

$(0.989)^5\approx 1-5\times 0.011+10\times(0.011)^2$

$=1-0.055+0.00121$

≈ 0.946.

注:本题考二项式定理和计算近似值的方法.

3．解法一:

因为 9 个工人中有 2 人不能分配做第一道工序,所以分配方法的种数为

$C_7^4\cdot C_5^3\cdot C_2^2$

$=350.$

解法二:

先假定 9 个工人都可做第一道工序,算出所有的分配方法,然后减去不能做第一道工序的2人被分配去做第一道工序的情况下的分配方法.因此分配方法的种数为

$C_9^4\cdot C_5^3\cdot C_2^2-C_2^1\cdot C_7^3\cdot C_5^3\cdot C_2^2-C_2^2\cdot C_7^2\cdot C_5^2\cdot C_2^2$

$=1260-910=350.$

4．解: 如图,设

$DA=x,DB=y,DC=z.$

由勾股定理,

$y^2+z^2=a^2,(1)$

$z^2+x^2=b^2,(2)$

$x^2+y^2=c^2$.(3)

三式相加后用 2 除,得

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2} \qquad (4)$$

由(4)分别减去(1)、(2)、(3),得

$$x^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}, y^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2}, z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

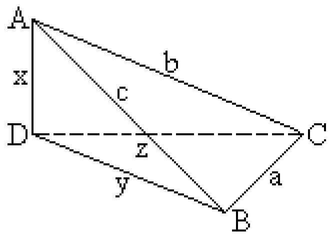
因为 D—ABC 是直三面角,所以四面体的体积

$$V=\frac{xyz}{6}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{(\frac{b^2+c^2-a^2}{2})(\frac{c^2+a^2-b^2}{2})(\frac{a^2+b^2-c^2}{2})}$$

$$=\frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

注:本题考:(1)建立和解方程组.(2)求棱锥的体积.



5.解:(1)设剪下的圆形铁皮的圆心是 P,半径是 r_1 厘米,因为这个圆形铁皮的周长要等于 $\overset{\frown}{AB}$ 的长,所以有

$$2\pi r_1=\frac{\pi}{180}\times 60\times 72$$

由此得

$r_1=12$

联结 OP,并延长与圆 P 相交于 E,则 E 必为圆 P 与 $\overset{\frown}{DC}$ 的切点,

∴ OD=OE=OP+PE

$=\frac{12}{\sin 30°}+12=36$

AD=OA-OD=72-36=36

即 AD 应该取 36 厘米.

(2)设这个圆台形容器的上底半径为 r_2,高为 h,则

$$2\pi r_2=\frac{\pi}{180}\times 60\times 36.$$

由此得 $r_2=6$

$$\therefore h=\sqrt{AD^2-(r_1-r_2)^2}=\sqrt{36^2-6^2}=6\sqrt{35}.$$

因此,圆台形容器的容积

$$V=\frac{\pi h}{3}(r_1^2+r_2^2+r_1r_2)$$
$$=\frac{\pi\times 6\sqrt{35}}{3}(12^2+6^2+12\times 6)$$
$$=504\sqrt{35}\pi$$
即这个圆台形容器的容积是$504\sqrt{35}\pi$立方厘米.
注:本题考运用几何基本知识计算长度与体积的能力.
6. 解: 因为-1+i 是方程的一个根,把它代入方程,得到
$(-1+i)^4+p(-1+i)^2+q(-1+i)+r=0$,
$-4-2pi-q+qi+r=0$,
即$(-4-q+r)+(-2p+q)i=0$.
因为一个复数等于 0,它的实部与虚部必须都等于 0,所以从上式得到
$$\begin{cases}-4-q+r=0, & (1)\\ -2p+q=0. & (2)\end{cases}$$
又因为用 x-1 除 x^4+px^2+qx+r 所得的余数为-10,所以根据余数定理得
$1+p+q+r=-10$,
即 $p+q+r=-11$. (3)
解方程组(1)、(2)、(3),得
$P=-3,q=-6,r=-2$.
所以方程为
$x^4-3x^2-6x-2=0$.
已知-1+i 是方程的一个根,所以-1-i 也必是方程的一个根.因此,方程可分解为
$(x^2+2x+2)(x^2-2x-1)=0$,
由此得到方程的四个根为
$$-1\pm i,\ 1\pm\sqrt{2}.$$
注:本题考比较熟练地运用以下代数知识与方法的能力:(1)复数的性质与运算,(2)实系数方程根的性质,(3)余数定理,(4)解方程组与高次方程.
7.解法一:
设 P_1、P_2 的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2).
那么,过 P_1、P_2 的切线方程分别为
$y_1y=p(x+x_1)$,
$y_2y=p(x+x_2)$.
由此,两切线的交点的坐标为
$$x=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1-y_2}$$
$$y=p\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$$
因为这两条切线的交点在准线
$$x=-\frac{p}{2}$$
上,所以,由(1)、(3)得

$$-\frac{p}{2}=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1-y_2}$$

即 $x_1y_2-x_2y_1=\frac{p}{2}(y_2-y_1)$ (4)

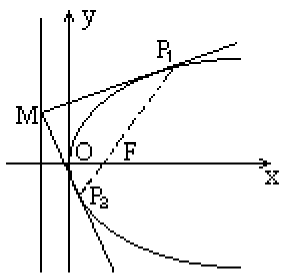
又过 p_1、p_2 两点的直线方程为

$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-(x_1y_2-x_2y_1)=0.$$

把焦点 F 的坐标($\frac{p}{2}$,0)代入上式的左端,得到

$$(y_2-y_1)\frac{p}{2}-(x_1y_2-x_2y_1).$$

根据(4),此式为 0.所以焦点 F 必在 p_1、P_2 的联线上.



解法二:

设 p_1、p_2 的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2).那么,过 p_1、p_2 的切线方程分别为

$$y_1y=p(x+x_1),\qquad (1)$$

$$y_2y=p(x+x_2).\qquad (2)$$

因为这两条切线的交点在准线

$$x=-\frac{p}{2}\qquad (3)$$

上,即(1)、(2)、(3)三线共点,所以有

$$\begin{vmatrix} p & -y_1 & px_1 \\ p & -y_2 & px_2 \\ 1 & 0 & \frac{p}{2} \end{vmatrix}=0.$$

展开行列式,可得

$$x_1y_2-x_2y_1-\frac{p}{2}(y_2-y_1)=0.\qquad (4)$$

根据三点共线的条件,要证 p_1、p_2 及焦点 F 共线,只须证明

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

展开上面行列式得

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \frac{p}{2} & 0 & 1 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1 - \frac{p}{2}(y_2 - y_1).$$

根据(4),上式为 0,因此焦点 F 必在 p_1、p_2 的联线上.

注:本题考以下解析几何知识的理解程度与运用能力:

(1)切线方程;

(2)抛物线的准线与焦点;

(3)三线共点与三点共线的条件.

8． 解法一:

不妨设

$b=1, a=1-x, c=1+x$. (1)

由余弦定理,得到

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1+4x}{2(1+x)},$$

$$\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{1+2x^2}{2(1-x^2)},$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{1-4x}{2(1-x)}.$$

由题设,得

$$\frac{1+4x}{2(1+x)} + \frac{1+2x^2}{2(1-x)^2} + \frac{1-4x}{2(1-x)} = \frac{7}{5},$$

化简,得

$16x^2-1=0$,

$\therefore \quad x = \pm\frac{1}{4}.$

代入(1),得到

$$a = \frac{3}{4}, b = 1, c = \frac{5}{4}, \text{或} a = \frac{5}{4}, b = 1, c = \frac{3}{4}.$$

因此 a:b:c=3:4:5,

或 a:b:c=5:4:3.

解法二:

因为 a、b、c 成等差数列,所以有

$$b = \frac{a+c}{2} \qquad (1)$$

由余弦定理,得到

$$\begin{aligned}&\cos A+\cos B+\cos C\\&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\\&=\frac{ab^2+c^2a-a^3+bc^2+a^2b-b^3+ca^2+b^2c-c^3}{2abc}\\&=\frac{-b^3+(a+c)b^2+(a^2+c^2)b+ac(a+c)-(a^3+c^3)}{2abc}\end{aligned}$$

把(1)代入上式,整理得

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{-3a^2-3c^2+18ac}{8ac}$$

由题设,

$$\frac{-3a^2-3c^2+18ac}{8ac}=\frac{7}{5},$$

化简,得

$15a^2-34ac+15c^2=0$,

即 $(3a-5c)(5a-3c)=0$.

所以 $a:c=5:3$ 或 $a:c=3:5$.

由题设得 $a:b:c=5:4:3$ 或 $a:b:c=3:4:5$.

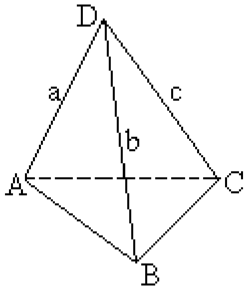
注:本题考比较灵活地综合运用代数与三角的知识,进行较为复杂的计算能力.

9.解: 设所给四面体为 OABC(如右图),它的三个侧面上的三角形是全等的.令 OA=a,OB=b,OC=c.

先设 a、b、c 各不相等,由于侧面上的三个三角形是全等的,所以 a、b、c 必定是侧面上每一个三角形的三个边长.因此,在△OAB 中,AB=c.仿此,BC=a,CA=b.即△ABC 的三个边也是 a、b、c,所以它和其它面上的三角形全等.

其次,设 a、b、c 有两个彼此相等,但另一个和它们不等.不妨设 a=b≠c.由此,△OAB 是等腰三角形,因而侧面上每一个三角形都是等腰三角形.因此,AB=c,BC=b=a,CA=a,这表明△ABC 和其它三个三角形全等.

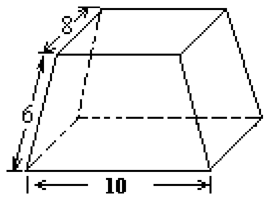
最后设 a=b=c.如果侧面上的三角形(注意三个侧面上的三角形是全等的)都是等边三角形,那么 AB=BC=CA=a,即△ABC 是一个等边三角形.如果侧面上的三角形不是等边三角形,则 AB、BC、CA 是三个侧面上彼此全等的三角形的对应边,即 AB=BC=CA,所以△ABC 也是一个等边三角形.



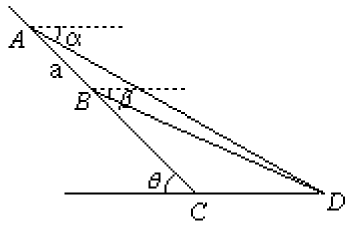
1966 年试题

1.有红灯泡 7 只,绿灯泡 5 只.从这 12 只灯泡中,要选出 5 只.如果这 5 只中,至少有 1 只、至多有 2 只是绿灯泡,一共有多少种选法?

2.一个正四棱台的上底面每边长 8 尺,下底面每边长 10 尺,侧棱长 6 尺.求正四棱台的体积.(棱台的体积 $V=\frac{1}{3}h(A+A_1+\sqrt{AA_1})$,其中 h、A 和 A_1 分别表示棱台的高和上、下底面的面积.)



3.如图,AC 是一个山坡,它的倾斜角为 θ.B 是山坡 AC 上的一点,它和 A 点的距离是 a 米.从 A 和 B 测得山下平地上 D 点的俯角分别是 α 和 β.求 C、D 两点间的距离.



4.已知双曲线的方程为

$$16x^2-9y^2+64x+18y-89=0.$$

(1)求它的两个焦点的坐标.

(2)一个圆通过这两个焦点并且与 x 轴交于两点,这两点的距离是 8.求这个圆的方程.

5.解方程组:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3\\ xy-x-y+15=0\end{cases}$$

6.在△ABC 中,BC=a,CA=b,AB=c.

(1)求证用 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 为边长可以作成一个三角形.

(2)如果把(1)中所作的三角形记为△A'B'C',其中 $B'C'=\sqrt{a}$,$C'A'=\sqrt{b}$,$A'B'=\sqrt{c}$,求证△A'B'C'是锐角三角形.

(3)如果△ABC 不是等边三角形,求证:△ABC 与△A′B′C′这两个三角形不论它们的边怎样对应都不相似.

1966 年试题答案

1.解:从 12 只灯泡中,选 5 只,如果其中有 1 只绿灯泡,4 只红灯泡,那么,选法的种数为

$C_5^1 \cdot C_7^4 = 175;$

如果其中有 2 只绿灯泡,3 只红灯泡,那么,选法的种数为

$C_5^2 \cdot C_7^3 = 350.$

所以一共有 175+350=525 种选法.

2.解法一:

如图,已知 AD=8,BC=10,CD=6.

用 O、O_1 表示上、下底面的中心,E、F 表示 AD、BC 的中点.连结 OO_1、EF、OE 和 O_1F,则 OO_1FE 为直角梯形.

从 E 点作 O_1F 的垂线,垂足为 G,EG 就是正四棱台的高.

$\because EF^2 = CD^2 - [\frac{1}{2}(BC - AD)]^2 = 6^2 - [\frac{1}{2}(10-8)]^2 = 35.$

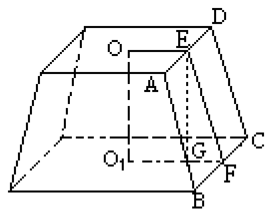
$\therefore EG = \sqrt{EF^2 - (O_1F - OE)^2}$

$= \sqrt{35 - (\frac{10}{2} - \frac{8}{2})^2} = \sqrt{34}.$

$\therefore V = \frac{1}{3} \times \sqrt{34} \times (8^2 + 10^2 + \sqrt{8^2 \times 10^2}) = \frac{1}{3} \times \sqrt{34} \times 244$

$= \frac{244}{3}\sqrt{34}.$

$\therefore$ 正四棱台的体积为 $\frac{244}{3}\sqrt{34}$ 立方尺.



解法二:

如图，已知 AD=8,BC=10,AB=6.

用 O、O_1 表示上、下底面的中心.连结 OO_1、OA 和 O_1B，则 OO_1BA 为直角梯形.

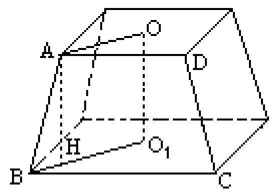
从 A 点作 O_1B 的垂线，垂足为 H,AH 就是正四棱台的高.

$\because HB = O_1B - OA = 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = \sqrt{2},$

$\therefore AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{6^2 - 2} = \sqrt{34}.$

$\therefore V = \frac{1}{3} \times \sqrt{34} \times (8^2 + 10^2 + \sqrt{8^2 \times 10^2}) = \frac{1}{3} \times \sqrt{34} \times 244 = \frac{244}{3}\sqrt{34}.$

$\therefore$ 正四棱台的体积为 $\frac{244}{3}\sqrt{34}$ 立方尺.



3.解法一:如图,

在△ABD 中,AB=a,∠BAD=θ-α,∠BDA=α-β,由正弦定理,得

$$\frac{BD}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

所以

$$BD=\frac{a\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\alpha-\beta)}. \qquad (1)$$

在△BCD中,∠CBD = θ - β,∠BCD = π - θ,由正弦定理,得

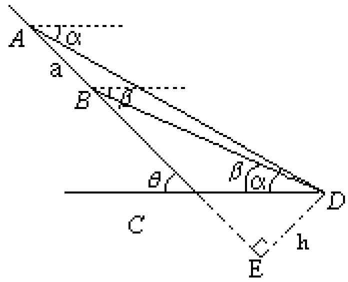
$$\frac{CD}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{BD}{\sin(\pi-\theta)}.$$

所以

$$CD=\frac{BD\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}. \qquad (2)$$

由(1)、(2)可得

$$CD=\frac{a\sin(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta\sin(\alpha-\beta)}.$$



解法二:如图,
从 D 点作 AC 的垂线与 AC 的延长线交于 E 点.设 DE=h.
在直角三角形 AED 中,

$$\frac{h}{a+BE}=\mathrm{tg}(\theta-\alpha). \qquad (1)$$

在直角三角形 BED 中,

$$\frac{h}{BE}=\mathrm{tg}(\theta-\beta). \qquad (2)$$

由(1)、(2)可得

$$h=\frac{a\,\mathrm{tg}(\theta-\alpha)\mathrm{tg}(\theta-\beta)}{\mathrm{tg}(\theta-\beta)-\mathrm{tg}(\theta-\alpha)}. \qquad (3)$$

在直角三角形 CED 中,

$$\frac{h}{CD}=\sin\theta. \qquad (4)$$

由(3)、(4)可得

$$CD=\frac{a\,\mathrm{tg}(\theta-\alpha)\mathrm{tg}(\theta-\beta)}{\sin\theta[\mathrm{tg}(\theta-\beta)-\mathrm{tg}(\theta-\alpha)]}.$$

4.解法一:

(1)把所给方程按 x、y 配方,得

$$16(x+2)^2-9(y-1)^2=144.$$

令 $x+2=x',y-1=y',$ (1)

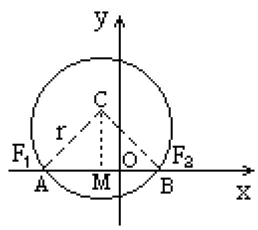
得 $16x'^2-9y'^2=144,$

就是
$$\frac{x'^2}{9}-\frac{y'^2}{16}=1.$$

所以这个双曲线的两个焦点在新坐标系中的坐标,分别为

$(-\sqrt{9+16},0)$和$(\sqrt{9+16},0)$,就是$(-5,0),(5,0)$.

由(1)可以求出这个双曲线的两个焦点在旧坐标系中的坐标,分别为
$$(-7,1),(3,1)$$
(2)设所求的圆的方程是
$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$
因为 $F_1(-7,1)$、$F_2(3,1)$在圆上,所以
$$(7+a)^2+(1-b)^2=r^2, \qquad (1)$$
$$(3-a)^2+(1-b)^2=r^2. \qquad (2)$$
又由图不难看出
$$b^2+|AM|^2=r^2,$$
就是
$$b^2+16=r^2. \qquad (3)$$
由(1)式减去(2)式,得
$$(7+a)^2-(3-a)^2=0,$$
就是
$$10(2a+4)=0$$
$$\therefore \quad a=-2.$$
代入(2)式,得
$$(1-b)^2+25=r^2. \qquad (4)$$
由(4)式减去(3)式,得
$$(1-b)^2-b^2+9=0,$$
就是
$$10-2b=0.$$
$$\therefore \quad b=5.$$
代入(4)式,得
$$r^2=41.$$
因此,所求的圆的方程是
$$(x+2)^2+(y-5)^2=41,$$
或
$$x^2+y^2+4x-10y-12=0.$$



解法二:

(1)同解法一.

(2)如图,F_1、F_2 为双曲线的两个焦点,A、B 为圆与 x 轴的两个交点,C 为圆心.因为过 C 点与 x 轴垂直的直线必平分线段 F_1F_2,且平分线段

AB,所以

C点的横坐标为 $\frac{-7+3}{2}=-2$,且 $|AM|=|MB|=4$.设 $C=(-2,b)$,b为待定的

常数.利用商高定理,由直角三角形 ACM 得到

$$|AC|^2=|AM|^2+|MC|^2=16+b^2.$$

又

$$|AC|^2=|F_1C|^2=25+(b-1)^2=26+b^2-2b,$$

由以上二式,得 b=5,$|AC|^2=41$.所以圆心 C 的坐标为(-2,5),圆的方程为

$$(x+2)^2+(y-5)^2=41,$$

或

$$x^2+y^2+4x-10y-12=0.$$

解法三:

(1)同解法一.

(2)由解法二的分析,可知 M=(-2,0).又因 $|AM|=|MB|=4$,所以 A=(-6,0),B=(2,0).

设所求的圆的方程为

$$x^2y^2+Dx+Ey+F=0.$$

因为(-6,0),(2,0),(3,1)在圆上,所以得到

$$\begin{cases}-6D+F=-36. & (1)\\ 2D+F=-4. & (2)\\ 3D+E+F=-10. & (3)\end{cases}$$

由(1),(2)消去 F 得到 D=4.由此得 F=-12,E=-10.因此,所求圆的方程为

$$x^2+y^2+4x-10y-12=0.$$

解法四:

(1)同解法一.

(2)设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0. \qquad (1)$$

因为(-7,1),(3,1)两点都在圆上,所以把它们的坐标代入(1)得

$$-7D+E+F+50=0, \qquad (2)$$

$$3D+E+F+10=0. \qquad (3)$$

在(1)内令 y=0 得

$$x^2+Dx+F=0. \qquad (4)$$

设所求圆与 x 轴的交点为$(\alpha,0)$,$(\beta,0)$,则α与β是(4)的两个根.因为两个点的距离是 8,所以

$$(\alpha-\beta)^2=64.$$

又

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta,$$

所以

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=64$$

利用根与系数的关系,可以知道$\alpha+\beta=-D$,$\alpha\beta=F$.

代入上式得

$$D^2-4F=64. \qquad (5)$$

解方程组(2)、(3)、(5)得

$$D=4,F=-12,E=-10.$$

因此,所求圆的方程为

$$x^2+y^2+4x-10y-12=0.$$

5.解法一:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3, & (1)\\ xy-x-y+15=0. & (2)\end{cases}$$

(1)式两边平方并化简,得

$$x+y-7=-2\sqrt{x+1}\sqrt{y+1}.$$

两边再平方,得

$$(x+y)^2-14(x+y)+49=4(x+1)(y+1).$$

整理后得

$$(x+y)^2-18(x+y)-4xy+45=0. \qquad (3)$$

把(2)和(3)组成方程组,并设 $u=x+y,v=xy$,得

$$\begin{cases}u^2-18u-4v+45=0, & (4)\\ v-u+15=0. & (5)\end{cases}$$

从(5)式得

$$v=u-15.$$

代入(4)式并化简,得

$$u^2-22u+105=0.$$

所以

$$u=7,u=15.$$

代入(5)式,得

$$v=-8,v=0.$$

所以

$$\begin{cases}u=7,\\ v=-8;\end{cases} \qquad \begin{cases}u=15,\\ v=0.\end{cases}$$

就是

$$\begin{cases}x+y=7,\\ xy=-8;\end{cases} \qquad \begin{cases}x+y=15,\\ xy=0.\end{cases}$$

解这两个方程组,得

$$\begin{cases}x=-1,\\ y=8;\end{cases} \qquad \begin{cases}x=8,\\ y=-1;\end{cases} \qquad \begin{cases}x=0,\\ y=15;\end{cases} \qquad \begin{cases}x=15,\\ y=0.\end{cases}$$

检验后可以知道,只有前两组数是原方程组的解.

解法二:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3, & (1)\\ xy-x-y+15=0. & (2)\end{cases}$$

(1)式两边平方并化简,得

$$x+y-7=-2\sqrt{x+1}\sqrt{y+1}.$$

两边再平方,得

$$(x+y)^2-14(x+y)+49=4(x+1)(y+1).$$

整理后得

$$x^2+y^2-2xy-18x-18y+45=0. \qquad (3)$$

由(2)式得

$$y=\frac{x-15}{x-1}. \qquad (4)$$

代入(3)式并化简,得

$$x^4-22x^3+97x^2+120x=0.$$

利用综合除法分解因式,得

$$x(x+1)(x-15)(x-8)=0.$$

因此 $x=0,-1,15,8.$

代入(4)式,得

$$y=15,8,0,-1.$$

就是

$$\begin{cases}x=0,\\y=15;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\y=8;\end{cases}\quad\begin{cases}x=15,\\y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x=8,\\y=-1.\end{cases}$$

检验后可以知道,原方程组的解是

$$\begin{cases}x=-1,\\y=8;\end{cases}\quad\begin{cases}x=8,\\y=-1.\end{cases}$$

解法三:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3,\\xy-x-y+15=0.\end{cases}$$

设$\sqrt{x+1}=u,\sqrt{y+1}=v,$原方程组可以化为

$$\begin{cases}u+v=3,\\u^2v^2-2(u^2+v^2)+18=0.\end{cases}$$

就是

$$\begin{cases}u+v=3, & (1)\\u^2v^2-2(u+v)^2+4uv+18=0. & (2)\end{cases}$$

把(1)代入(2)并化简,得

$$u^2v^2+4uv=0.$$

所以

$$uv=0,uv=-4.$$

把上式分别与(1)式组成下列两个方程组:

$$\begin{cases}u+v=3,\\uv=0;\end{cases}\quad\begin{cases}u+v=3,\\uv=-4.\end{cases}$$

解这两个方程组,得

$$\begin{cases}u=3,\\v=0;\end{cases}\quad\begin{cases}u=0,\\v=3;\end{cases}\quad\begin{cases}u=4,\\v=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}u=-1,\\v=4.\end{cases}$$

就是

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}=3,\\\sqrt{y+1}=0;\end{cases}\quad\begin{cases}\sqrt{x+1}=0,\\\sqrt{y+1}=3;\end{cases}\quad\begin{cases}\sqrt{x+1}=4,\\\sqrt{y+1}=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}\sqrt{x+1}=-1;\\\sqrt{y+1}=4\end{cases}.$$

所以

$$\begin{cases}x=8,\\y=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}x=-1,\\y=8;\end{cases}\quad\begin{cases}x=15,\\y=0;\end{cases}\quad\begin{cases}x=0,\\y=15.\end{cases}$$

检验后可以知道,只有前两组数是原方程组的解.

解法四:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=3, & (1)\\ xy-x-y+15=0. & (2)\end{cases}$$

(1)式两边平方并化简,得

$$x+y=7-2\sqrt{xy+x+y+1}. \qquad (3)$$

由(2)式得

$$2(x+y)=xy+x+y+15. \qquad (4)$$

比较(3)与(4)得,

$$xy+x+y+1+4\sqrt{xy+x+y+1}=0.$$

∴ $\sqrt{xy+x+y+1}=0$ **或** $\sqrt{xy+x+y+1}=-4.$

上面第二个式子不可能成立.因此,

$$\begin{cases}xy+x+y+1=0\\ xy-x-y+15=0.\end{cases}$$

由此得

$$\begin{cases}xy=-8\\ x+y=7.\end{cases}$$

解之,得

$$\begin{cases}x=-1,\\ y=8,\end{cases}\qquad \begin{cases}x=8\\ y=-1.\end{cases}$$

经检验,这都是原方程组的解.

6.解:

(1)**要证明**$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$**为边长可以作成一个三角形,只要证明**$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$**这三个数中,任意两个数的和大于第三个数.现在来证明**$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}$**,因为 a、b、c 是△ABC 的三边,所以 b+c>a,而**

$$(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=b+c+2\sqrt{b}\sqrt{c}>b+c>a=(\sqrt{a})^2.$$

两边开方,得

$$\sqrt{b}+\sqrt{c}>\sqrt{a}.$$

同样可证明$\sqrt{c}+\sqrt{a}>\sqrt{b}$,$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$.**因此,用**$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$**为边长可以作成一个三角形.**

(2)**因为**$\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$**是**△A'B'C'**的三边,由余弦定理,得**

$$\cos A'=\frac{b+c-a}{2\sqrt{b}\sqrt{c}}.$$

这个分式的分子和分母都是正数,所以 cosA′>0.由此可知 A′是一个锐角.同理可证明 B′、C′都是锐角.因此△A′B′C′是一个锐角三角形.

(3)不失一般性可以认为 a≥b≥c,并且至少有一个不等号成立.由于较大的数的算术平方根也较大,所以$\sqrt{a}\geq\sqrt{b}\geq\sqrt{c}$.**如果**△ABC**和**△A'B'C'**相似,那么,**△ABC**中的大边与**△A′B′C′**中的大边必为对应边,小边与小边必为对应边.根据相似三角形对应边成比例这个性质,得到**

$$\frac{a}{\sqrt{a}}=\frac{b}{\sqrt{b}}=\frac{c}{\sqrt{c}},$$

就是$\sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}$,也就是$a=b=c$.这与△ABC不是等边三角形的假设相矛盾.因此△ABC与△$A'B'C'$不相似.

1978 年试题

注意事项:

1.理工科考生要求除作(一)——(四)题和(七)题外,再由(五)、(六)两题中选作一题.文科考生要求作(一)——(四)题,再由(五)、(六)两题中选作一题;不要求作第(七)题.

2.考生解题作答时,不必抄题.但须准确地写明题号,例如(一)2、(五)等.

(一)1.分解因式:$x^2-4xy+4y^2-4z^2$.

2.已知正方形的边长为 a.求侧面积等于这个正方形的面积、高等于这个正方形边长的直圆柱体的体积.

3.求函数$y=\sqrt{\lg(2+x)}$的定义域.

4.不查表求$\cos80^\circ\cos35^\circ+\cos10^\circ\cos55^\circ$的值.

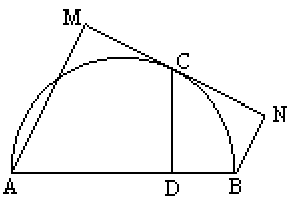
5.化简:$(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}\cdot\dfrac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{(0.1)^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$.

(二)已知方程 $kx^2+y^2=4$,其中 k 为实数.对于不同范围的 k 值,分别指出方程所代表图形的类型,并画出显示其数量特征的草图.

(三)(如图)AB 是半圆的直径,C 是半圆上一点,直线 MN 切半圆于 C 点,AM⊥MN 于 M 点,BN⊥MN 于 N 点,CD⊥AB 于 D 点.

求证:1)CD=CM=CN;

2)$CD^2=AM\cdot BN$.



(四)已知 $\log_{18}9=a(a\neq2)$,$18^b=5$.求 $\log_{36}45$.

(五)(本题和第(六)题选作一题)已知△ABC 的三内角的大小成等差数列,$\mathrm{tg}A\cdot\mathrm{tg}C=2+\sqrt{3}$.求角A、B、C的大小.又知顶点C的对边c上的高等于$4\sqrt{3}$.求三角形各边a、b、c的长.(提示:必要时可验证$(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$.)

(六)已知α、β为锐角,且

$$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1,$$
$$3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0.$$

求证:$\alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}$

(七)(文科考生不要求作此题)

已知函数 $y=x^2+(2m+1)x+m^2-1$(m 为实数).

(1)m 是什么数值时,y 的极值是 0?

(2)求证:不论 m 是什么数值,函数图象(即抛物线)的顶点都在同一条直线 l_1 上.画出 m=-1、0、1 时抛物线的草图,来检验这个结论.

(3)平行于 l_1 的直线中,哪些与抛物线相交,哪些不相交?求证:任一条平行于 l_1 而与抛物线相交的直线,被各抛物线截出的线段都相等.

1978 年试题答案

（一）1.解:原式$=(x^2-4xy+4y^2)-4z^2$

$$=(x-2y)^2-(2z)^2$$

$$=(x-2y-2z)(x-2y+2z).$$

2.解:设直圆柱体的底面半径为 r.则底面周长 $2\pi r=a$.

$$\therefore r=\frac{a}{2\pi},$$

$$\therefore \text{体积}=\pi r^2 a=\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 a=\frac{a^3}{4\pi}.$$

3.解:$\because \lg(2+x)\geq 0,\therefore 2+x\geq 1.$

$x\geq -1$ 为所求的定义域.

4.解法一:原式 $=\sin 10°\cos 35°+\cos 10°\sin 35°$

$$=\sin(10°+35°)$$

$$=\sin 45°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解法二:原式 $=\cos 80°\cos 35°+\sin 80°\sin 35°$

$$=\cos(80°-35°)$$

$$=\cos 45°$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

5.解:原式 $=(2^{-2})^{-\frac{1}{2}}\dfrac{(4ab^{-1})^{\frac{3}{2}}}{(10^{-1})^{-2}(a^3b^{-4})^{\frac{1}{2}}}$

$$=\frac{2\cdot 2^3}{10^2}\cdot a^{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\cdot b^{-\frac{3}{2}+2}$$

$$=\frac{4}{25}b^{\frac{1}{2}}.$$

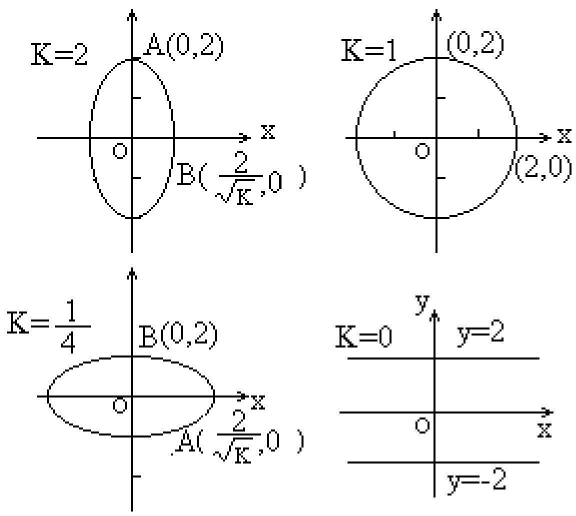
（二）解:（注意:只要求考生作出全面而正确的分析,不要求写法和本题解完全一致.）

(1)$k>0$时,方程的图形是椭圆,中心在坐标原点:

(i)$k>1$时,长轴在y轴上,半长轴 $=2$,半短轴 $=\dfrac{2}{\sqrt{k}}$;

(ii)$k=1$时,椭圆的特殊情况——圆,半径$r=2$;

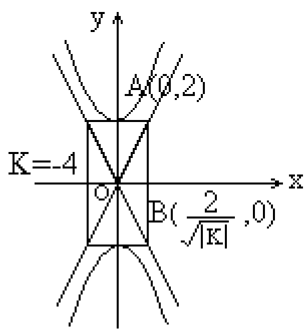
(iii)$k<1$时,长轴在x轴上,半长轴 $=\dfrac{2}{\sqrt{k}}$,半短轴 $=2$.

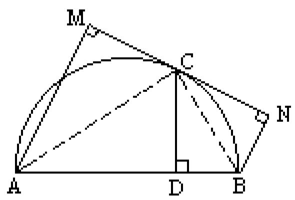


$(2)k=0$**时,方程为**$y^2=4$,
图形是两条平行于x**轴的直线**$y=\pm 2$;

$(3)k<0$**时,方程为** $-\dfrac{x^2}{\frac{4}{|k|}}+\dfrac{y^2}{4}=1$,

图形是双曲线,中心在坐标原点,实轴在y**轴上**.





（三）证明:
1)连 CA、CB,则∠ACB=90°.
∠ACM=∠ABC（弦切角等于同弧上的圆周角）,
∠ACD=∠ABC（同角的余角相等）,
∴ ∠ACM=∠ACD.
∴ △ACM≌△ADC.
∴ CM=CD.
同理 CN=CD.∴ CD=CM=CN.
2)∵ CD⊥AB,∠ACB=90°,
∴ $CD^2=AD\cdot DB$（比例中项定理）.
由 1),可知 AM=AD,BN=BD,
∴ $CD^2=AM\cdot BN$.
（四）解法一:∵$\log_{18}9=a$,∴$18^a=9$.
又 $18^b=5$,
∴ $45=9\times 5=18^a\cdot 18^b=18^{a+b}$,
设 $\log_{36}45=x$,则 $36^x=45=18^{a+b}$,

∴ $\log_{18}36^x=\log_{18}18^{a+b}$

$$x=\frac{a+b}{\log_{18}36}=\frac{a+b}{1+\log_{18}2}.$$

但 $36=2\times18=4\times9$,

∴ $\log_{18}(2\times18)=\log_{18}(2^2\times9)$.

即 $1+\log_{18}2=2\log_{18}2+\log_{18}9=2\log_{18}2+a$.

∴ $\log_{18}2=1-a$.

∴ $$x=\frac{a+b}{1+(1-a)}=\frac{a+b}{2-a}.$$

解法二:$\log_{36}45=\dfrac{\log_{18}45}{\log_{18}36}$

$$=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{\log_{18}18+\log_{18}2}$$

$$=\frac{a+b}{1+\log_{18}2}.$$

以下解法同解法一.

(五)解:$A+B+C=180°$,

又 $2B=A+C$.

∴ $3B=180°, B=60°, A+C=120°$.

∵ $\mathrm{tgAtgC}=2+\sqrt{3}$ (1)

而 $\mathrm{tg}(A+C)=\dfrac{\mathrm{tgA}+\mathrm{tgC}}{1-\mathrm{tgAtgC}}$,

∴ $\mathrm{tgA}+\mathrm{tgC}=(1-\mathrm{tgAtgC})\mathrm{tg}(A+C)$

$=[1-(2+\sqrt{3})]\mathrm{tg}120°$

$=(-1-\sqrt{3})(\sqrt{-3})$

$=3+\sqrt{3}.$ (2)

由(1),(2)知tgA、tgC是$x^2-(3+\sqrt{3})x+2+\sqrt{3}=0$的二根.

解这方程得$(x-1)[x-(2+\sqrt{3})=0$.

∴ $x_1=1, x_2=2+\sqrt{3}$.

设$A<C$,则得$\mathrm{tgA}=1, \mathrm{tgC}=2+\sqrt{3}$.

∴ $A=45°, c=120°-45°=75°$.

又知c边上的高等于$4\sqrt{3}$,

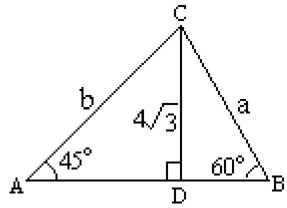
∴ $$a=\frac{4\sqrt{3}}{\sin60°}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8;$$

$$b=\frac{4\sqrt{3}}{\sin45°}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4\sqrt{6};$$

$c=AD+DB$

$=b\cos45°+a\cos60°$

$=4\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+8\cdot\dfrac{1}{2}=4\sqrt{3}+4.$



（六）证法一: 由$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$,得$3\sin^2\alpha=\cos2\beta$

由$3\sin2\alpha-2\sin2\beta=0$,得

$$\sin2\beta=\frac{3}{2}\sin2\alpha=3\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\therefore\ \sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta=9\sin^2 a\cos^2 a+9\sin^4 a,$$

$$1=9\sin^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha),$$

$$1=9\sin^2\alpha.$$

$\therefore\ \sin^2\alpha=\dfrac{1}{9},\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ （α为锐角）.

$$\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha\cos2\beta+\cos\alpha\sin2\beta$$

$$=\sin\alpha(3\sin^2\alpha)+\cos\alpha(3\sin\alpha\cos\alpha)$$

$$=3\sin\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

$$=3\sin\alpha=1.$$

$$\therefore\ \alpha+2\beta=\frac{\pi}{2}.$$

证法二: 由$3\sin2\alpha=2\sin2\beta$得

$$3\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\beta\cos\beta.$$

$$\therefore\ 9\sin^2\alpha\cos^2\alpha=4\sin^2\beta\cos^2\beta.$$

$$9\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=4\sin^2\beta(1-\sin^2\beta).$$

$$\because\ \sin^2\beta=\frac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha),$$

$$\therefore\ 9\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)=4\cdot\frac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha)[1-\frac{1}{2}(1-3\sin^2\alpha)]$$

$$=2(1-3\sin^2\alpha)\cdot\frac{1}{2}(1+3\sin^2\alpha)$$

$$=1-9\sin^4\alpha.$$

$$\therefore\ 9\sin^2\alpha=1,$$

$\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ （α为锐角）

以下同证法一.

（七）解: (1)用配方法得

$$y=\left(x+\frac{2m+1}{2}\right)^2-\frac{4m+5}{4}$$

$\therefore$ y**的极小值为** $-\dfrac{4m+5}{4}$.

所以当极值为0**时**,$4m+5=0,m=-\dfrac{5}{4}$.

(2)函数图象抛物线的顶点坐标为$\left(-\frac{2m+1}{2},-\frac{4m+5}{4}\right)$,

即 $$x=-\frac{2m+1}{2}=-m-\frac{1}{2},$$
$$y=-\frac{4m+5}{4}=-m-\frac{5}{4}.$$

二式相减得 $$x-y=\frac{3}{4}$$

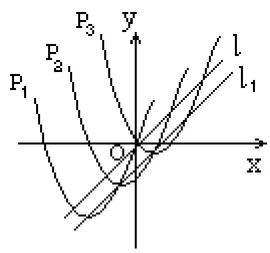
此即各抛物线顶点坐标所满足的方程.它的图形是一条直线,方程中不含m.因此,不论m是什么数值,抛物线的顶点都在这条直线$l_1: x-y=\frac{3}{4}$上.

当 m=-1、0、1 时,x,y 之间的函数关系为

$$y+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$
$$y+\frac{5}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2,$$
$$y+\frac{9}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2,$$

分别作出它们的图象 P_1、P_2、P_3.

它们的顶点都在直线 l_1 上.



(3)设 l:x-y=a 为任一条平行于 l_1 的直线.

与抛物线 $y=x^2+(2m-1)x+m^2-1$ 方程联立求解.

消去 y,得 $x^2+2mx+m^2-1+a=0$.

∴ $$(x+m)^2=1-a.$$

因而当 1-a≥0 即 a≤1 时,直线 l 与抛物线相交,而 1-a<0 即 a>1 时,直线 l 与抛物线不相交.

当$a\le 1$时,$x=-m\pm\sqrt{1-a}$.

即直线 l 与抛物线两交点横坐标为

$$-m-\sqrt{1-a},-m+\sqrt{1-a}.$$

因直线 l 的斜率为 1,它的倾斜角为 45°.

∵ 直线 l 被抛物线截出的线段等于

$$[(-m+\sqrt{1-a})-(-m-\sqrt{1-a})]\sqrt{2}=2\sqrt{2(1-a)}.$$

而这与 m 无关.

因此直线 l 被各抛物线截出的线段都相等.

1979年试题

理工农医类

1.若$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=0$,求证:x,y,z成等差数列.

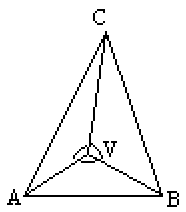
2.化简:$\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\csc^4 x}}}$.

3.甲、乙二容器内都盛有酒精.甲有公斤u_1公斤，乙有u_2公斤.甲中纯酒精与水(重量)之比为$m_1:n_1$,乙中纯酒精与水之比为$m_2:n_2$.问将二者混合后所得液体中纯酒精与水之比是多少?

4.叙述并且证明勾股定理.

5.外国船只,除特许者外,不得进入离我海岸线D浬以内的区城.设A及B是我们的观测站,A及B间的距离为S浬,海岸线是过A,B的直线.一外国船在P点.在A站测得$\angle BAP=\alpha$,同时在B站测得$\angle ABP=\beta$.问α及β满足什么简单的三角函数值不等式,就应当向此未经特许的外国船发出警告,命令退出我海城?

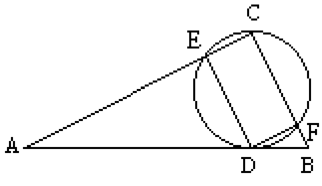
6.设三棱锥V-*ABC*中,$\angle AVB=\angle BVC=\angle CVA=$直角.
求证:$\triangle ABC$是锐角三角形.



7.美国的物价从1939年的100增加到四十年后1979年的500.如果每年物价增长率相同,问每年增长百分之几?(注意:自然对数1nx是以e=2.718…为底的对数.本题中增长率x<0.1,可用自然对数的近似公式:$\ln(1+x)\approx x$.取$\lg 2=0.3$,$\ln 10=2.3$来计算).

8.设CEDF是一个已知圆的内接矩形,过D作该圆的切线与CE的延长线相交于点A,与CF的延长线相交于点B.

求证：$\dfrac{BF}{AE}=\dfrac{BC^3}{AC^3}$.



9.试问数列

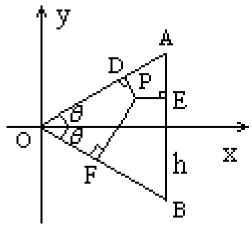
$$\lg 100，\lg\left(100\sin\frac{\pi}{4}\right),\lg\left(100\sin^2\frac{\pi}{4}\right)，\cdots，\lg\left(100\sin^{n-1}\frac{\pi}{4}\right),$$

前多少项的和的值是最大?并求出这最大值.(这里取$\lg 2=0.301$)

10.设等腰△OAB的顶角为2θ,高为h.

(1)在△OAB内有一动点P,到三边OA,OB,AB的距离分别为|PD|,|PF|,|PE|并且满足关系|PD|·|PF|=|PE|^2.求P点的轨迹.

(2)在上述轨迹中定出点 P 的坐标,使得|PD|+|PE|=|PF|.



1979年试题(理工农医类)答案

1.证法一:$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)$

$=z^2-2zx+x^2+4zx-4xy-4yz+4y^2$

$=(x+z)^2-2\cdot 2y(z+x)+4y^2$

$=(z+x-2y)^2$

$=0$,

∴ $z+x-2y=0$

即 $z-y=y-x$,

所以,x,y,z成等差数列,

证法二:令$x-y=a$,$y-z=b$,则

$x-z=x-y+y-z=a+b$.

$(z-x)^2-4(x-y)(y-z)=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2=0$.

∴ $a=b$.

即$x-y=y-z$,即$y-x=z-y$.所以,x,y,z成等差数列.

2.解:
$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{\csc^2 x}}}=\frac{1}{1-\frac{1}{\frac{1}{-\mathrm{ctg}^2 x}}}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}}$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{\sec^2 x}}$$

$$=\frac{1}{1-\cos^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}=\csc^2 x.$$

3.解:

甲中含纯酒精 $\frac{m_1v_1}{m_1+n_1}$ 公斤，含水 $\frac{n_1v_1}{n_1+n_1}$ 公斤;

乙中含纯酒精$\frac{m_2v_2}{m_2+n_2}$公斤，含水$\frac{n_2v_2}{m_2+n_2}$公斤.

甲乙共含纯酒精

$$\frac{m_1v_1}{m_1+n_1}+\frac{m_2v_2}{m_2+n_2}$$
$$=\frac{m_1v_1(m_2+n_2)+m_2v_2(m_1+m_2)}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)}\text{公斤，}$$

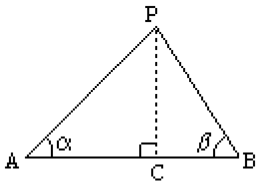
甲乙共含水

$$\frac{n_1v_1}{m_1+n_1}+\frac{n_2v_2}{m_2+n_2}$$
$$=\frac{n_1v_1(m_2+n_2)+n_2v_2(m_1+n_1)}{(m_2+n_2)(m_1+n_1)}\text{公斤，}$$

混合后,纯酒精与水之比为
〔$m_1v_1(m_2+n_2)+m_2v_2(m_1+n_1)$〕:〔$n_1v_1(m_2+n_2)+n_2v_2(m_1+n_1)$〕.
4.解:略.(参考一般教科书)
5.解:
自 P 向直线 AB 作垂线 PC,垂足为 C.设 PC=d.
在直角三角形 PAC 中,AC=d·ctgα.
在直角三角形 PBC 中,BC=d·ctgβ.
∴ S=AC+BC=d(ctgα+ctgβ).
当 d≤D,即

$$\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta\geq\frac{S}{D}$$

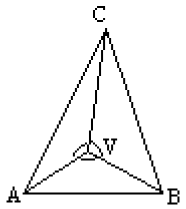
时,应向外国船发出警告.



6.证法一:设 VA=a,VB=b,VC=c,
AB=p,BC=q,CA=r.
于是 $p^2=a^2+b^2$,$q^2=b^2+c^2$,$r^2=c^2+a^2$.
由余弦定理,

$$\cos\angle CAB=\frac{a^2+b^2+c^2+a^2-(b^2+c^2)}{2\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+a^2}}$$
$$=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+a^2}}>0.$$

所以∠CAB 为锐角.
同理,∠ABC,∠BCA 也是锐角.



证法二:作 VD⊥BC,D 为垂足,因 VA 垂直于平面 VBC,所以

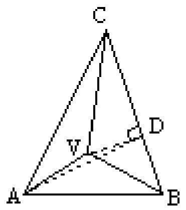
VA⊥BC

又　BC⊥VD,所以 BC 垂直于平面 VAD,从而

BC⊥AD

即在△ABC 中,A 在 BC 边上的垂足 D 介于 B 和 C 之间,
因此,∠B 和∠C 都是锐角.

同理可证∠A 也是锐角.



7.解:年增长率 x 应满足

$$100(1+x)^{40}=500,\quad 即\quad (1+x)^{40}=5,$$

取自然对数有　　$40\ln(1+x)=\ln 5.$

已知　$\lg 2=0.3$,所以　$\lg 5=\lg\frac{10}{2}=1-0.3=o.7,$

$$\ln 5=\ln 10\lg 5=2.3\times 0.7=1.61.$$

利用　$\ln(1+x)\approx x$,则有

$$x=\frac{\ln 5}{40}=\frac{1.61}{40}=0.04025\approx 4\%.$$

答：每年约增长百分之四.

8.证法一:连结 CD.因∠CFD=90°,
所以 CD 为圆 O 的直径.
由于 AB 切圆 O 于 D,
∴　CD⊥AB.
又在直角三角形 ABC 中,∠ACB=90°,
∴　$AC^2=AD\cdot AB, BC^2=BD\cdot BA.$

$$\therefore \quad \frac{BD}{AD}=\frac{BC^2}{AC^2}. \qquad (1)$$

又因 $BD^2=BC\cdot BF, AD^2=AC\cdot AE.$

$$\therefore \frac{BD^2}{AD^2}=\frac{BC\cdot BF}{AC\cdot AE}. \qquad (2)$$

由(1)与(2)得

$$\frac{BC\cdot BF}{AC\cdot AE}=\frac{BC^4}{AC^4}.$$

$$\therefore \quad \frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}.$$

证法二:由△BDF∽△ABC,得

$$\frac{BF}{DF}=\frac{BC}{AC}. \qquad (1)$$

由△BDF∽△DFC,得 $\frac{DF}{CF}=\frac{BF}{DF}$, 因而 $\frac{DF}{CF}=\frac{BC}{AC}.$ (2)

又由△ADE∽△ABC,得

$$\frac{DE}{AE}=\frac{BC}{AC}. \qquad (3)$$

由(1),(2),(3)得

$$\frac{BF}{DF}\cdot\frac{DF}{CF}\cdot\frac{DE}{AF}=\frac{BC^3}{AC^3}$$

但因为 $CF=DE$,

$$\therefore \quad \frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}.$$

证毕.

9.解法一:这个数列的第 k 项(任意项)为

$$a_k=\lg\left(100\sin^{k-1}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2-\frac{1}{2}(k-1)\lg 2.$$

所以这个数列是递减等差列,且其首项为 2.要前 k 项的和最大,必须前 k 项都是正数或 0,而从第 k+1 项起以后都是负数.因此,k 应适合下列条件:

$$\begin{cases} 2-\frac{1}{2}(k-1)\lg 2\geq 0, & (1) \\ 2-\frac{1}{2}[(k+1)-1]\lg 2<0. & (2) \end{cases}$$

解此不等式组:

由(1)得 $k\leq 14.2$

由(2)得 $k>13.2$

因 k 是自然数,所以 k=14,即数列前 14 项的和最大.

取 k=14. 前 14 项的和

$$S=\frac{a_1+a_{14}}{2}\times 14=\frac{2+2-\frac{1}{2}\times 13\times \lg 2}{2}\times 14$$
$$=28-\frac{91}{2}\times 0.3010$$
$$\approx 14.30$$

解法二:这数列的第 k 项(任意项)为
$$a_k=\lg(100\sin^{k-1}\frac{\pi}{4})$$
$$=2-\frac{1}{2}(k-1)\lg 2$$

所以这数列是递减的等差数列,首项为2,公差是 $-\frac{1}{2}\lg 2$.

设前k项的和为S,则
$$S=\frac{[2+2-\frac{1}{2}(k-1)\lg 2]k}{2}$$
$$=(-\frac{1}{4}\lg 2)k^2+(2+\frac{1}{4}\lg 2)k.$$

因 k^2 的系数为 $-\frac{1}{4}\lg 2<0$,所以S(把k看成自变量)有最大值,所以,当
$$k=\frac{2+\frac{1}{4}\lg 2}{2(-\frac{1}{4}\lg 2)}\approx 13.78$$
时,S 有最大值.

因 k 表示项数,是自然数,在此,

当 $k=14$ 时,有 $a_{14}=2-\frac{1}{2}(14-1)\lg 2$

=2-1.9565>0,

而 $a_{15}=2-\frac{1}{2}(15-1)\lg 2$
$$=2-7\times 0.3010<0.$$

由此可知这数列的前 14 项都是正数,从第 15 项起以后各项都是负数.
所以应取 k=14,即数列前 14 项的和为最大,其值为
$$S=\frac{(2+2+\frac{1}{2}\times 13\times \lg 2)\times 14}{2}\approx 14.30.$$

10.解法一:(1)设坐标系如图，点 P 的坐标为(x,y).由题设 x>0.
直线 OA 的方程为

y=xtgθ,

直线 OB 的方程为

y=-xtgθ,

直线 AB 的方程为　　$x=h$.
又因为 P 点在∠AOB 内,于是

$$|PD|=\frac{x\operatorname{tg}\theta-y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}=x\sin\theta-y\cos\theta.$$

$$|PE|=h-x,$$

$$|PF|=\frac{x\operatorname{tg}\theta-y}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}=x\sin\theta+y\cos\theta.$$

由条件｜PD｜·｜PF｜=｜PE｜²得

$$x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=(h-x)^2,\qquad (1)$$

即　　$x^2\cos^2\theta-2hx+y^2\cos^2\theta+h^2=0.$

除以　$\cos^2\theta$ (0≠)得

$$x^2-\frac{2h}{\cos^2\theta}x+y^2+\frac{h^2}{\cos^2\theta}=0.$$

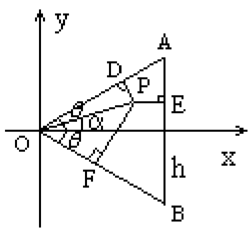
即

$$(x-\frac{h}{\cos^2\theta})^2+y^2=h^2\cdot\frac{1-\cos^2\theta}{\cos^4\theta},$$

$$(x-\frac{h}{\cos^2\theta})^2+y^2=(h\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta})^2.$$

这是以$(\frac{h}{\cos^2\theta},o)$为中心,以$h\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$为半径的圆,所求轨迹是此圆在所给等腰三角内的那一部分.

注意:在A作直线AE′⊥OA,则$OE'=\frac{h}{\cos^2\theta}$.E′是圆的中心,$AE'=\frac{h\sin\theta}{\cos^2\theta}$是圆的半径.A是圆上一个点,而且圆在A的切线是OA.



(2)由条件｜PD｜+｜PE｜=｜PF｜得

$x\sin\theta-y\cos\theta+h-x=x\sin\theta+y\cos\theta$,

即　$x+2y\cos\theta=h.$　　　　(II)

此直线通过(h,o)即C点及$(0,\frac{h}{2\cos\theta})$点.

由(1),(II)得

$x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=4y^2\cos^2\theta$

∴　$5y^2\cos^2\theta=x^2\sin^2\theta$,

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{tg}\,\theta\cdot x.$$

由｜PD｜+｜PE｜ ｜PF｜可知 y>0,所以这里右端取正号.代入(Ⅱ)得

$$x\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta\right)=h.$$

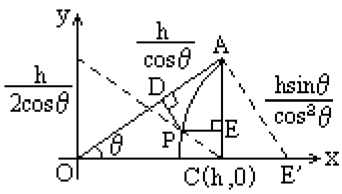
$$\therefore\quad x=\frac{h}{1+\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\theta}=\frac{\sqrt{5}h}{\sqrt{5}+2\sin\theta}.$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}h}{\sqrt{5}+\sin\theta}\cdot\mathrm{tg}\,\theta$$

$$=\frac{h\mathrm{tg}\theta}{\sqrt{5}+2\sin\theta}.$$

所求点P的坐标为

$$\left(\frac{\sqrt{5}h}{\sqrt{5}+2\sin\theta},\frac{h\mathrm{tg}\,\theta}{\sqrt{5}+2\sin\theta}\right).$$



解法二:设 OP 与正 x 轴的夹角为α,则

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{y}{x},$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$|OP|=\sqrt{x^2+y^2},$$

$$|PD|=|OP|\sin(\theta-\alpha)=|OP|(\sin\theta\cos\alpha\ \theta-\cos\theta\sin\alpha)$$

$$=x\sin\theta-y\cos\theta,$$

$$|PF|=|OP|\sin(\theta+\alpha)=|OP|\sin\theta\cos\alpha\ \theta+\cos\theta\sin\alpha$$

$$=x\sin\theta+y\cos\theta.$$

以下与上面的解法一相同。

1979 年试题
（文史类）

1.求函数 $y=2x^2-2x+1$ 的极小值.

2.化简 $[(1+\sin^2\theta)^2-\cos^4\theta][(1+\cos^2\theta)^2-\sin^4\theta]$.

3.甲、乙二容器内都盛有酒精.甲有 v_1 公斤,乙有 v_2 公斤.甲中纯酒精与水（重量）之比为 $m_1:n_1$,乙中纯酒精与水之比为 $m_2:n_2$.问将二者混合后所得液体中纯酒精与水之比是多少?

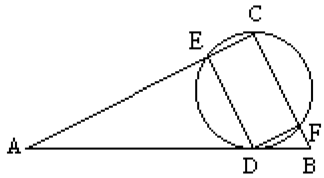
4.叙述并且证明勾股定理.

5.外国船只,除特许者外,不得进入离我海岸线 D浬以内的区域.设 A 及 B 是我们的观测站,A 及 B 间的距离为 S浬,海岸线是过 A、B 的直线.一外国船在 P 点.在 A 站测得∠BAP=α,同时在 B 站测得∠ABP=β.问α及β满足什么简单的三角函数值不等式,就应当向此未经特许的外国船发出警告,命令退出我海域?

6.美国的物价从 1939 年的 100 增加到四十年后 1979 年的 500.如果每年物价增长率相同,问每年增长百分之几?（注意:自然对数 $\ln x$ 是以 $e=2.718\cdots$ 为底的对数.本题中增长率 $x<0.1$,可用自然对数的近似公式:$\ln(1+x)\approx x$.取 $\lg2=0.3$,$\ln10=2.3$ 来计算.）

7.设 CEDF 是已知圆的一个内接矩形,过 D 作该圆的切线与 CE 的延长线相交于点 A,与 CF 的延长线相交于点 B.求证

$$\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}.$$



8.过原点 O 作圆 $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ 的任意割线交圆于 P_1,P_2 两点.求 P_1P_2 的中点 P 的轨迹.

1979 年试题（文史类）答案

1.解:

因为
$$y=2x^2-2x+1=2\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right)$$
$$=2\left[\left(X-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]$$
$$=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.$$

当 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0$,即 $x=\frac{1}{2}$ 时,上式之值最小,所以,

当 $x=\frac{1}{2}$ 时,y 取极小值 $\frac{1}{2}$.

2.解:

$[(1+\sin^2\theta)^2-\cos^4\theta][(1+\cos^2\theta)^2-\sin^4\theta]$

$=(1+\sin^2\theta+\cos^2\theta)(1+\sin^2\theta-\cos^2\theta)\cdot(1+\cos^2\theta+\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=4(1-\cos 2\theta)(1+\cos 2\theta)$

$=4(1-\cos^2 2\theta.)=4\sin^2 2\theta$

3.解:

甲中含纯酒精 $\frac{m_1v_1}{m_1+n_1}$ (公斤), 含水 $\frac{n_1v_1}{m_1+n_1}$ (公斤)

乙中含纯酒精 $\frac{m_2v_2}{m_2+n_2}$ (公斤), 含水 $\frac{n_2v_2}{m_2+n_2}$ (公斤)

甲、乙共含纯酒精

$$\frac{m_1v_1}{m_1+n_1}+\frac{m_2v_2}{m_2+n_2}=\frac{m_1v(m_2+n_2)+m_2v_2(m_1+n_1)}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)}(\text{公斤}).$$

甲、乙共含水

$$\frac{n_1v_1}{n_1+n_1}+\frac{n_2v_2}{n_2+n_2}=\frac{n_1v(m_2+n_2)+n_2v_2(m_1+n_1)}{(m_1+n_1)(m_2+n_2)}(\text{公斤}).$$

混合后,纯酒精与水之比为

$[m_1v_1(m_2+n_2)+m_2v_2(m_1+n_1)]:[n_1v_1(m_2+n_2)+n_2v_2(m_1+n_1)]$.

4.解: 略.(参考一般考科书).

5.解:

自 P 向直线 AB 作垂线 PC,垂足为 C.设 PC=d.

在直角三角形 PAC 中, $AC=d\cdot\mathrm{ctg}\alpha$.

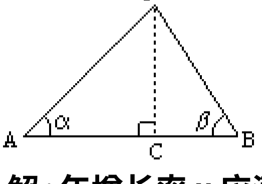
在直角三角形 PAC 中, $BC=d\cdot\mathrm{ctg}\beta$.

∴ $S=AC+BC=d(\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta)$.

当 $d\le D$,即

$$\mathrm{ctg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\beta\ge\frac{S}{D}.$$

时,应向外国船发出警告.



6.解:年增长率 x 应满足方程

$$100(1+x)^{40}=500.$$

即 $(1+x)^{40}=5$.

取自然对数,得

$40\ln(1+x)=\ln 5$. (1)

已知 $\lg 2=0.3$,所以

$$\lg 5=\lg\frac{10}{2}=\lg 10-\lg 2=1-0.3=0.7,$$

$$\ln 5=\ln 10\cdot\lg 5=2.3\times 0.7=1.61.$$

利用 $\ln(1+x)\approx x$,则由(1)有

$$x\approx\ln(1+x)=\frac{\ln5}{40}=\frac{1.61}{40}$$

$$=0.04025\approx4\%.$$

答:每年约增长百分之四.

7.证明:

联接 C,D.

∵∠CFD=90°,

∵ CD 为⊙O 的直径.

∵ AB 切⊙O 于 D,

∴ CD⊥AB.

又在直角三角形 ABC 中,∠ACB=90°,

∴ $AC^2=AD\cdot AB,BC^2=BD\cdot BA$,

∴ $$\frac{BD}{AD}=\frac{BC^2}{AC^2}. \quad (1)$$

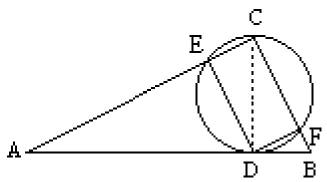
又 $BD^2=BC\cdot BF,AD^2=AC\cdot AE$,

∴ $$\frac{BD^2}{AD^2}=\frac{BC\cdot BF}{AC\cdot AE}. \quad (2)$$

由(1)与(2)得

$$\frac{BC\cdot BF}{AC\cdot AE}=\frac{BC^4}{AC^4},$$

∴ $$\frac{BF}{AE}=\frac{BC^3}{AC^3}.$$



8.解法一:

设割线 OP_1P_2 的参数方程为

$$\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha.\end{cases}$$

(t 为参数).代入圆方程,得

$t^2\cos^2\alpha+t^2\sin^2\alpha-2t\cos\alpha-4t\sin\alpha+4=0.$

即 $t^2-2t(\cos\alpha+2\sin\alpha)+4=0.$

这方程的两个根,就是 OP_1 及 OP_2,

∴ $OP_1+OP_2=2(\cos\alpha+2\sin\alpha).$

P 是 P_1P_2 的中点.

∴ $$OP=F\frac{OP_1+OP_2}{2}$$

$$=\cos\alpha+2\sin\alpha,$$

$$OP^2=OP(\cos\alpha+2\sin\alpha)$$

$=OP\cos\alpha+2\cdot OP\sin\alpha.$

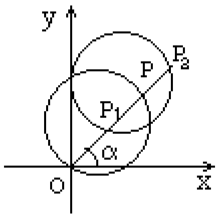
设 P 的直角坐标为(x,y),于是

$$x=OP\cos\alpha,y=OP\sin\alpha,x^2+y^2=OP^2.$$

∴ $$x^2+y^2=x+2y.$$

或 $$(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}.$$

这是以$(\frac{1}{2},1)$为中心,$\frac{\sqrt{5}}{2}$为半径的圆.所求轨迹是这个圆在所给圆内的一段弧.



解法二:

设割线 OP_1P_2 的直线方程为

$$y=kx.$$

代入圆的方程,得

$$x^2+k^2x^2-2x-4kx+4=0$$

即 $$(1+k^2)x^2-2(1+2k)x+4=0$$

设这个方程的两个根是 x_1 及 x_2 ·x_1,x_2 就是直线与圆的两个交点的横坐标;由根与系数的关系,得

$$x_1+x_2=\frac{2(1+2k)}{1+k^2}.$$

又设 P 点的坐标是（x,y）.因 P 是 P_1P_2 的中点,所以

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+2k}{1+k^2}$$

又P点在直线$y=kx$上，$\therefore k=\frac{y}{x}$.代入上式得

$$x=\frac{1+2\frac{y}{x}}{1+(\frac{y}{x})^2},$$

两端乘以$1+(\frac{y}{x})^2$,得

$$x+\frac{y^2}{x}=1+2\frac{y}{x}.$$

乘以x,得

$$x^2+y^2=x+2y.$$

或

$$(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$$

这是一个以点$(\frac{1}{2},1)$为中心，以$\frac{\sqrt{5}}{2}$为半径的圆.所求轨迹是这个圆在所给圆内的一段弧.

1980 年试题

(理工农医类)

一、将多项式 x^5y-9xy^5 分别在下列范围内分解因式:

(1)有理数范围; (2)实数范围 (3)复数范围.

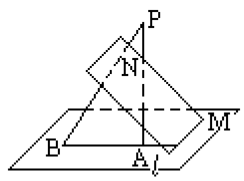
二、半径为 1、2、3 的三个圆两两外切.证明:以这三个圆的圆心为顶点的三角形是直角三角形.

三、用解析几何方法证明三角形的三条高线交于一点.

四、证明对数换底公式:$\log_b N=\dfrac{\log_a N}{\log_a b}$.

(a、b、N 都是正数,a≠1,b≠1)

五、直升飞机上一点 P 在地平面 M 上的正射影是 A.从 P 看地平面上一物体 B(不同于 A),直线 PB 垂直于飞机窗玻璃所在的平面 N(如图).证明:平面 N 必与平面 M 相交,且交线 *l* 垂直于 AB.



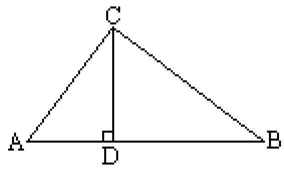
六、设三角函数 $f(x)=\sin(\dfrac{kx}{5}+\dfrac{\pi}{3})$,其中 $k\neq 0$.

(1)写出 f(x)的极大值 M、极小值 m 与最小正周期 T;

(2)试求最小的正整数 k,使得当自变量 x 在任意两个整数间(包括整数本身)变化时,函数 f(x)至少有一个值是 M 与一个值是 m.

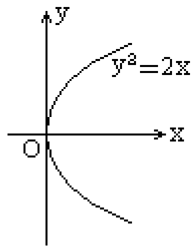
七、CD 为直角三角形 ABC 中斜边 AB 上的高,已知△ACD、△CBD、△ABC 的面积成等比数列,求∠B(用反三角函数表示).

八、已知 $0<\alpha<\pi$.证明:$2\sin 2\alpha\leq \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$;并讨论a为何值时等号成立.



九、抛物线的方程是 $y^2=2x$,有一个半径为 1 的圆,圆心在 x 轴上运动.问这个圆运动到什么位置时,圆与抛物线在交点处的切线互相垂直.

(注:设 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=2px$ 上一点,则抛物线在 P 点处的切线斜率是 $\dfrac{P}{y_0}$.)



附加题

设直线(L)的参数方程是$\begin{cases} x = t, \\ y = b + mt; \end{cases}$(t是参数)

椭圆(E)的参数方程是$\begin{cases} x = 1 + a\cos\theta, (a \neq 0) \\ y = \sin\theta \end{cases}$($\theta$是参数)

问a、b应满足什么条件,使得对于任意m值来说,直线(L)与椭圆(E)总有公共点.

1980年试题(理工农医类)答案

一、解:(1)$x^5y - 9xy^5 = xy(x^4 - 9y^4) = xy(x^2 + 3y^2)(x^2 - 3y^2)$;

(2)$x^5y - 9xy^5 = xy(x^2 + 3y^2)(x + \sqrt{3}y)(x - \sqrt{3}y)$;

(3)$x^5y - 9xy^5 = xy(x + \sqrt{3}yi)(x - \sqrt{3}yi)(x + \sqrt{3}y)(x - \sqrt{3}y)$;

二、证明:设⊙O_1、⊙O_2、⊙O_3的半径分别为1、2、3.

因这三个圆两两外切,故有

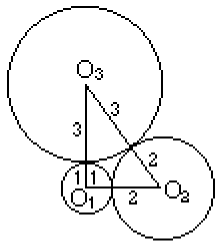
O_1O_2=1+2=3,

O_2O_3=2+3=5,

O_1O_3=1+3=4,

则有 $O_1O_2^2 + O_1O_3^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = O_2O_3^2$.

根据勾股弦定理的逆定理,或余弦定理,△$O_1O_2O_3$为直角三角形.



三、证明:取△ABC最长的一边BC所在的直线为x轴,经过A的高线为y轴,设A、B、C的坐标分别为A(0,a)、B(b,0)、C(c,0),

根据所选坐标系,如图,有a>0,b<0,c>0.

AB的方程为$\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$,其斜率为$-\frac{a}{b}$;

AC的方程为$\frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$,其斜率为$-\frac{a}{c}$.

高线CE的方程为$y=\frac{b}{a}(x-c)$;(1)

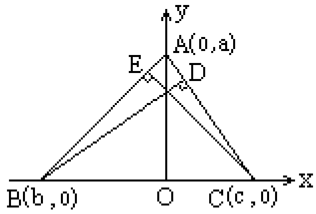
高线BD的方程为$y=\frac{c}{a}(x-b)$.(2)

解(1)、(2),得:$(b-c)x=0$.

∵$b-c\neq0$,∴$x=0$.

这就是说,高线 CE、BD 的交点的横坐标为 0,即交点在高线 AO 上.

因此,三条高线交于一点.



四、证法一:令 $\log_b N=x$,根据对数定义,

$b^x=N$.

两端取以 a 为底的对数,

$\log_a b^x=\log_a N$,

$x\log_a b=\log_a N$.

∵ $b\neq1$,∴$\log_a b\neq0$,

∴ $x=\frac{\log_a N}{\log_a b}$,

即 $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$.

证法二:令 $\log_b N=x$,根据对数定义,

$N=b^x$

$=(a^{\log_a b})^x=a^{x\log_a b}$,

∴ $x\log_a b=\log_a N$.

∵ $b\neq1$,$\log_a b\neq0$,

∴ $x=\frac{\log_a N}{\log_a b}$,

即 $\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b}$.

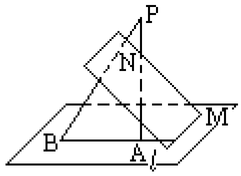
五、证明:用反证法.假如平面 N 与平面 M 平行,则 PA 也垂直于 N,因此 PA 与 PB 重合,B 点与 A 点重合,但这与题设矛盾,所以平面 N 与平面 M 相交.

设平面 N 与平面 M 的交线为 l.

∵PA⊥平面 M,∴PA⊥l.

又∵PB⊥平面 N,∴PB⊥l.

∴ l⊥平面 PAB,∴ l⊥AB.



六、解:(1)M=1,m=-1,

$$T=\frac{5\times 2\pi}{|k|}=\frac{10\pi}{|k|}.$$

(2)f(x)在它的每一个周期中都恰好有一个值是 M 与一个值是 m.

而任意两个整数间的距离都≥1.因此要使任意两个整数间函数 f(x)至少有一个值是 M 与一个值是 m,必须且只须使 f(x)的周期≤1.

即 $\frac{10\pi}{|k|}\le 1$, $|k|\ge 10\pi=31.4\cdots$.

可见,k=32 就是这样的最小正整数.

七、解法一:设 CD=h,AB=c,BD=x,

则　　AD=c-x.

因此,△ACD的面积为 $\frac{1}{2}h(c-x)$,

△CBD的面积为 $\frac{1}{2}hx$,

△ABC的面积为 $\frac{1}{2}hc$.

依题意,$(\frac{1}{2}hx)^2=\frac{1}{2}h(c-x)\cdot\frac{1}{2}hc$,

即 $x^2=c(c-x)$,

即 $x^2+cx-c^2=0$,

$$x=\frac{-c\pm\sqrt{c^2+4c^2}}{2}.$$

∵取负号不合题意,

∴取正号,得　$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}c$.

又依直角三角形的性质,有

$AC^2=AD\cdot AB=c(c-x)$.

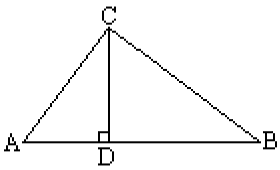
但 $x^2=c(c-x)$,∴$AC^2=x^2$,

∴$AC=x=DB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}c$.

在直角三角形ABC中,

$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}c}{c}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

故$\angle B=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$



解法二：由题设有$(CD\cdot BD)^2=(CD\cdot AD)\cdot(CD\cdot AB)$，

$\therefore BD^2=AD\cdot AB$.

但　$AC^2=AD\cdot AB$，

$\therefore BD=AC$.

由$\mathrm{tg}B=\frac{CD}{BD}$, $\cos B=\sin A=\frac{CD}{AC}=\frac{CD}{BD}$,

$\therefore \mathrm{tg}B=\frac{CD}{BD}=\cos B$,

因而$\sin B=\cos^2 B$, 或$\sin^2 B+\sin B-1=0$,

解得$\sin B=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$\because B$为锐角, $\sin B>0$, $\therefore \sin B\neq\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$,

$\therefore B=\arcsin\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

八、证法一: 原不等式$2\sin2\alpha\leq\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$,

可写成　　$2\sin2\alpha\leq\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

两端乘以正数 $\sin\alpha$，问题化为证明

$2\sin\alpha\sin2\alpha\leq1+\cos\alpha$.

而 $2\sin\alpha\sin2\alpha=4\sin^2\alpha\cos\alpha=4(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$=4(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)\cos\alpha$.

所以问题又化为证明不等式

$(1+\cos\alpha)[4(1-\cos\alpha)\cos\alpha-1]\leq0$.

即$(1+\cos\alpha)[-4(\cos\alpha-\frac{1}{2})]^2\leq0$.

$\therefore$不等式得证.

$\because 0<\alpha<\pi$, $\therefore$等号成立当且仅当$\cos\alpha-\frac{1}{2}=0$,

即　$\alpha=60°$.

证法二: 令$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=t>0$, $(\because 0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2})$

原不等式变为

$2\cdot2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}\leq\frac{1}{t}$.

以$t(1+t^2)^2>0$乘不等式两端, 问题变为证明

$8t^2(1-t^2) \le (1+t^2)^2$,

即 $\quad -9t^4+6t^2-1 \le 0$,

$-(3t^2-1)^2 \le 0$.

∴不等式成立.

当且仅当$t^2=\frac{1}{3}$或$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$时,即$\alpha=60°$时,原不等式变为等式.

证法三:将原不等式两端同乘以$\sin < \frac{\alpha}{2} > 0$,则问题化为证明不等式

$$2\sin 2\alpha \sin < \frac{\alpha}{2} \le \cos < \frac{\alpha}{2}.$$

而 $2\sin 2\alpha \sin\frac{\alpha}{2} = 2\cdot(2\sin\alpha\cos\alpha)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

$=4\cdot(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos < \frac{\alpha}{2})(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2})\sin\frac{\alpha}{2}$

$=8\cos\frac{\alpha}{2}(\sin^2\frac{\alpha}{2}-2\sin^4\frac{\alpha}{2})$

$=8\cos\frac{\alpha}{2}[\frac{1}{8}-2(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4})^2]$

$=\cos\frac{\alpha}{2}-16\cos\frac{\alpha}{2}(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4})^2 \le \cos\frac{\alpha}{2}.$

其中"≤"符号是由于$\cos\frac{\alpha}{2}>0, (\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4})^2 \ge 0.$

上式中的等号当且仅当$\sin^2\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}=0$时成立,即$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}$舍去$)$, $\therefore \alpha=\frac{\pi}{3}.$

九、解:设圆的方程为

$(x-k)^2+y^2=1$.

再设圆与抛物线的一个交点为 $P(x_0y_0)$.

在P点圆半径的斜率$=\frac{y_0}{x_0-k}$.

在P点抛物线的切线斜率$=\frac{1}{y_0}$.

在 P 点抛物线的切线与圆的切线垂直,必须且只须圆的半径与抛物线在 P 点相切.

$\therefore \frac{1}{y_0}=\frac{y_0}{x_0-k}$. (1)

因$P(x_0, y_0)$是圆与抛物线的交点,

$\therefore y_0^2=2x_0$, (2)

$(x_0-k)^2+y_0^2=1$. (3)

由(1)、(2)式消去 y_0,得 $x_0=-k$,

将(2)代入(3),得$(x_0-k)^2+2x_0-1=0$,

将 $x_0=-k$ 代入,得 $4k^2-2k-1=0$,

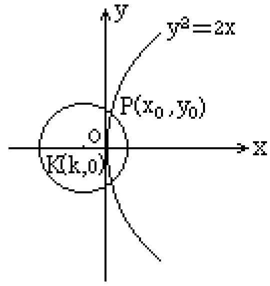
$$\therefore k=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

由于抛物线在y轴的右方,所以$k=-x_0\leq 0$.故根号前所应取负号,即

$$k=\frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

故所求圆的方程为$(x-\frac{1-\sqrt{5}}{4})^2+y^2=1$.

由于对称性,圆与抛物线的另一交点 $(x_0,-y_0)$处的切线也互相垂直.



附加题

解法一:消去参数,得

$$(L): y=mx+b;\quad (E): \frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1.$$

消去 y,整理得

$(1+a^2m^2)x^2+2(a^2mb-1)x+a^2b^2-a^2+1=0$.

(L)、(E)有交点的条件是上式的判别式≥ 0,即

$(a^2mb-1)^2-(1+a^2m^2)(a^2b^2-a^2+1)\geq 0$.

化简并约去 a^2 得

$(a^2-1)m^2-2bm+(1-b^2)\geq 0$.

对任何 m 的值,要使这个式子永远成立,条件是

$$(\text{I})\begin{cases}a^2-1>0,\\ b^2-(a^2-1)(1-b^2)\leq 0;\end{cases}\text{或}\quad(\text{II})\begin{cases}a^2-1=0,\\ b=0.\end{cases}$$

解得

$$(\text{I})\begin{cases}|a|>1,\\ -\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leq b\leq\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\end{cases}\text{或}\quad(\text{II})\begin{cases}|a|=1,\\ b=0.\end{cases}$$

或(Ⅰ)、(Ⅱ)合写成:

$$\begin{cases}|a|\geq 1,\\ -\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leq b\leq\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|},\end{cases}$$

即为所求的条件.

解法二:

椭圆(E)即$\frac{(x-1)^2}{a^2}+y^2=1$,它的中心为(1,0),它在x轴方向的半轴长为$|a|$.

直线(L)即 $y=mx+b$;它通过 P(0,b)点,斜率为 m.

如果 P(0,b)落在(E)内或(E)上,如 P_1,则过 P_1 点作任意直线(L)显然与椭圆(E)总有公共点.

如果 P(0,b)落在(E)外,如 P_2,那么由 P_2 向椭圆作两切线,则(E)上所有的点都在两切线的一个夹角内,所以可以选择斜率m的值,使直线(L)落在这个夹角的补角内,(L)与(E)就没有公共点了.

因此,(L)与(E)总有公共点的充要条件是 p(0,b)点落在(E)内或(E)上.要使(E)与 y 轴有公共点,其充要条件是$|a|\geq 1$;这时,(E)与 y 轴的交点的纵坐标为$y_0=\pm\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}$,要使P落在(E)内或(E)上,其充要条件是$-\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leq b\leq\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}$.由此可见,直线(L)与椭圆(E)总有公共点的条件为:

$$\begin{cases}|a|\geq 1,\\ -\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}\leq b\leq\frac{\sqrt{a^2-1}}{|a|}.\end{cases}$$

1980 年试题
（文史类）

一、化简 $\dfrac{1-3i}{3-2i}$.

二、解方程组: $\begin{cases} 2x-3y-z=5, \\ 4x+2y+3z=9, \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$

三、用解析几何方法证明直径所对的圆周角是直角.

四、某地区 1979 年的轻工业产值占工业总产值的 20%,要使 1980 年的工业总产值比上一年增长 10%,且使 1980 年的轻工业产值占工业总产值的 24%,问 1980 年的轻工业产值应比上一年增长百分之几.

五、设 $\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi$,化简

$$\frac{\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}\sin(\frac{3}{4}\pi-\theta)[\sin(\pi-\theta)-\sin(\theta-\frac{\pi}{2})]}}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}.$$

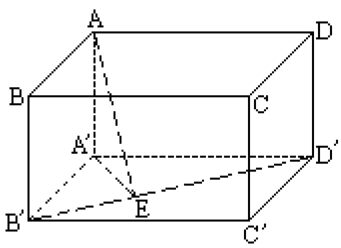
六、(1)若四边形 ABCD 的对角线 AC 将四边形分成面积相等的两个三形，证明直线 AC 必平分对角线 BD.

(2)写出(1)的逆命题,这个逆命题是否正确?为什么?

七、如图，长方形框架 ABCD—A′B′C′D′.三边 AB、AD、A′A′的长分别为 6、8、3.6,AE 与底面的对角线 B′D′垂直于 E.

(1)证明 $A'E \perp B'D'$;

(2)求 AE 的长.

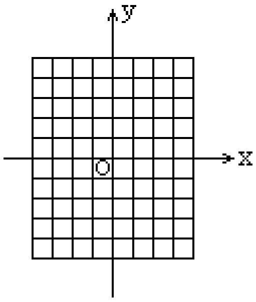


八、(1)把参数方程(t 为参数)

$$\begin{cases} x = \sec t, \\ y = 2\mathrm{tg}t \end{cases}$$

化为直角坐标方程,并画出方程的曲线的略图.

(2)当 $0 \le t < \frac{\pi}{2}$ 及 $\pi \le t < \frac{3\pi}{2}$ 时,各得到曲线的 哪一部分?



1980 年试题（文史类）答案

一、解：

$$\begin{aligned}\frac{1-3i}{3-2i}&=\frac{(1-3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}\\&=\frac{3+6+(2-9)i}{9+4}\\&=\frac{9-7i}{13}\\&=\frac{9}{13}-\frac{7}{13}i.\end{aligned}$$

二、解：

$$\begin{cases}2x-3y-z=5, & (1)\\4x+2y+3z=9, & (2)\\3x+2y=-1. & (3)\end{cases}$$

(1)×3+(2),

$$10x-7y=24. \qquad (4)$$

(3)×7+(4)×2,

$$41x=41,$$

$$x=1.$$

将 x=1 代入(3)式,得

$$y=-2$$

将 x=1,y=-2 代入(1),得

$$z=3.$$

∴ 方程组的解为 $\begin{cases}x=1,\\y=-2,\\z=3.\end{cases}$

三、证法一:将圆的直径 AB 所在的直线取为 x 轴,圆心作为原点,不妨假定圆的半径是 1.于是圆的方程是

$$x^2+y^2=1.$$

A、B 的坐标是 A(-1,0),B(1,0).

设 P(x,y)是圆上任意一点,则有

$$x^2+y^2=1, 即 \quad y^2=1-x^2.$$

∵ PA的斜率为$k_1=\dfrac{y}{x+1}$,

PB的斜率为$k_2=\dfrac{y}{x-1}$,

∴ $k_1k_2=\dfrac{y^2}{x^2-1}=\dfrac{1-x^2}{x^2-1}=-1$,

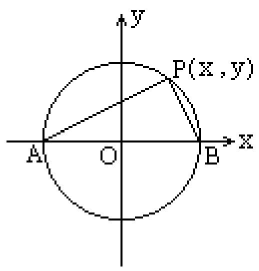
∴ PA⊥PB, ∠APB为直角..

证法二:**取坐标并得圆的方程**$x^2+y^2=1$，**如上**.

$$PA=\sqrt{(x+1)^2+y^2},\quad PB=\sqrt{(x-1)^2+y^2},$$

∴
$$\begin{aligned}PA^2+PB^2&=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2\\&=2(x^2+y^2)+2=2\times1+2\\&=4=AB^2.\end{aligned}$$

由勾股定理的逆定理,得 PA⊥PB,∠APB 为直角.



四、解:

设 1979 的的工业总产值为 a,又设 1980 年的轻工业产值比上一年增长 x%,则按题意,1980 年的轻工业产值为

$$a\cdot\left(\frac{20}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{100}\right)=a\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)\cdot\left(\frac{24}{100}\right).$$

解得 x=32

答:1980 年的轻工业产值应比上一年增长 32%.

五、解法一:

$$\text{原式}=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)(\sin\theta+\cos\theta)}}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{\sqrt{\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{\sqrt{\sin^2(\theta+\frac{\pi}{4})}}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{|\sin(\theta+\frac{\pi}{4})|}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

$\because$ $\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi$, $\therefore$ $\pi<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$,

$\therefore$ $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})<0$,

$$\therefore\quad \text{原式}=\frac{|\sin(\theta+\frac{\pi}{4})|}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

$$=\frac{-\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}=-1.$$

解法二：

$$\text{由于}\quad \sin(\frac{\pi}{4}+\theta)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta+\cos\theta),$$

$$\text{原式}=\frac{|\sin\theta+\cos\theta|}{\sin\theta+\cos\theta}$$

Θ $\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{5}{4}\pi$, $\therefore$ $\pi<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{2}\pi$.

$\therefore$ $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})<0$.(**或直接讨论得到**$\sin\theta+\cos\theta<0$.)

$$\therefore\quad \text{原式}=\frac{-(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=-1$$

六、证明：

(1)$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}$,并且△ABC与△ADC有同底AC,

∴ 两高线相等:BE=DF

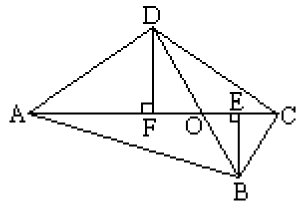
设AC与BD交于点O,则

Rt△BOE≌Rt△DOF.

∴ OB=OD.

即 AC平分BD.

(以上假定了E、O、F不重合,如果E、O、F重合,则已有BO=BE=DF=DO)



(2)逆命题:若四边形ABCD的对角线AC平分对角线BD,则AC必将四边形分成两个面积相等的三角形.

这个逆命题是正确的.

证明如下:

在上图中,由于OB=OD,∠BOE=∠DOF(对顶角),

$\angle BEO=\angle DFO=\frac{\pi}{2}$, ∴△BOE≌△DOF

∴ $BE=DF$,即两高线相等.

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BE=\frac{1}{2}AC\cdot DF=S_{\triangle ADC}$.

七、解:

(1)AA′⊥平面A′B′C′D′,∴AA′⊥B′D′

又 AE⊥B′D′, ∴B′D′⊥平面AA′E,

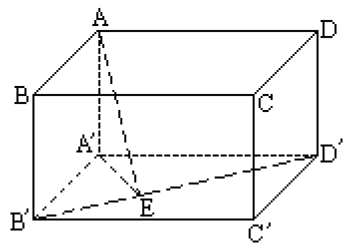
因此B′D′⊥A′E,(也可由三垂线定理得到B′D′⊥A′E),

(2)A′B′·A′D′=A′E·B′D′(都是△A′B′D′面积的2倍).

∴ $6\times 8=A'E\times\sqrt{6^2+8^2}$,

∴ $A'E=\frac{48}{10}=4.8$

$AE=\sqrt{3.6^2+4.8^2}=6$.



八、解:

(1) $\sec t=x$, $\tg t=\frac{y}{2}$,

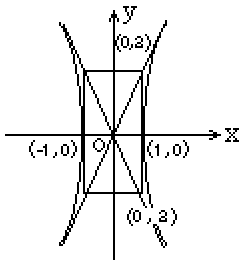
利用公式 $\sec^2 t=1+\mathrm{tg}^2 t$，

得 $$x^2=1+\frac{y^2}{4}.$$

∴ **曲线的直角坐标普通方程为**

$$x^2-\frac{y^2}{4}=1.$$

略图如下.



1981 年试题
(理工农医类)

一、设 A 表示有理数的集合,B 表示无理数的集合,即设 A={有理数},B={无理数},试写出:(1)$A\cup B$,(2)$A\cap B$.

二、在 A、B、C、D 四位候选人中,(1)如果选举正、副班长各一人,共有几种选法?写出所有可能的选举结果;(2)如果选举班委三人,共有几种选法?写出所有可能的选举结果.

三、下表所列各小题中,指出 A 是 B 的充分条件,还是必要条件,还是充要条件,或者都不是.

	A	B	是 B 的什么条件?
(1)	四边形 ABCD 为平行四边形	四边形 ABCD 为矩形	
(2)	$a=3$	$\|a\|=3$	
(3)	$\theta=150^{\circ}$	$\sin\theta=\frac{1}{2}$	
(4)	点(a,b)在圆 $x^2+y^2=r^2$ 上	$a^2+b^2=R^2$	

四、写出余弦定理(只写一个公式即可),并加以证明.

五、解不等式(x 为未知数):

$$\begin{vmatrix} x-a & b & -c \\ a & x-b & c \\ -a & b & x-c \end{vmatrix}>0.$$

六、用数学归纳法证明等式

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

对一切自然数 n 都成立.

七、设 1980 年底我国人口以 10 亿计算.

(1)如果我国人口每年比上年平均递增 2%,那么到 2000 年底将达到多少?

(2)要使2000年底我国人口不超过12亿,那么每年比上年平均递增率最高是多少?

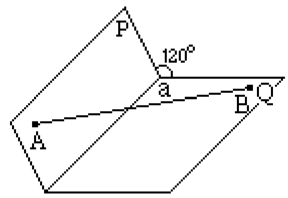
下列对数值可供选用:

lg1.0087=0.00377	lg1.0092=0.00396	lg1.0096=0.00417
lg1.0200=0.00860	lg1.2000=0.07918	lg1.3098=0.11720
lg1.4568=0.16340	lg1.4859=0.17200	lg1.5157=0.18060

八、在 120°的二面角 P-a-Q 的两个面 P 和 Q 内,分别有点 A 和点 B.已知点 A 和点 B 到棱 a 的距离分别为 2 和 4,且线段 AB=10.

(1)求直线 AB 和棱 a 所成的角;

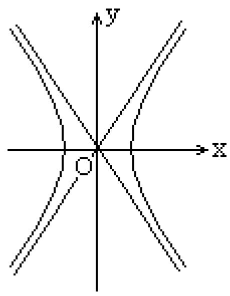
(2)求直线 AB 和平面 Q 所成的角.



九、给定双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$.

(1)过点 A(2,1)的直线 l 与所给双曲线交于两点 P_1 及 P_2,求线段 P_1P_2 的中点 P 的轨迹方程.

(2)过点 B(1,1)能否作直线 m,使 m 与所给双曲线交于两点 Q_1 及 Q_2,且点 B 是线段 Q_1Q_2 的中点?这样的直线 m 如果存在,求出它的方程;如果不存在,说明理由.



十、附加题:计入总分.

已知以 AB 为直径的半圆有一个内接正方形 CDEF,其边长为 1(如图).

设 AC=a,BC=b,作数列

$u_1=a-b$,

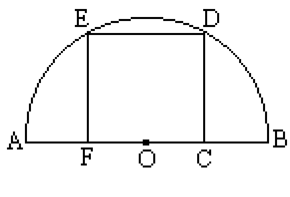
$u_2=a^2-ab+b^2$,

$u_3=a^3-a^2b+ab^2-b^3$,

……,

$u_k=a^k-a^{k-1}b+a^{k-2}b^2-\cdots\cdots+(-1)^kb^k$;

求证:$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}(n\geq3)$.



1981 年试题(理工农医类)答案

一、解:(1)A∪B={实数}.(或 A∪B=R,或 A∪B=实数集合.)

(2)A∩B=　.(或 A∩B={ },或 A∩B=空集.)

二、解:

(1)选法种数 $P_4^2=4\times3=12$(种).

所有可能的选举结果:(把正班长、副班长按次序来写)

AB,AC,AD,BC,BD,CD,
BA,CA,DA,CB,DB,DC.

(2)选法种数$C_4^3=C_4^1=4$(种).

所有可能的选举结果:

ABC,ABD,ACD,BCD.

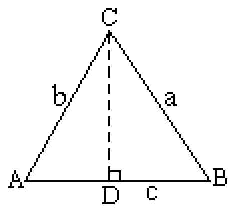
三、解:(1)必要条件
(2)充分条件
(3)充分条件
(4)充要条件

四、公式:设△ABC 的三个内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,则有余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

证法一:平面几何证法.

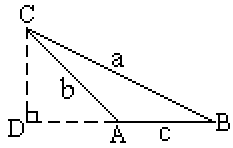
如果∠A 是锐角,从 C 作 AB 的垂线交 AB 于 D,于是由勾股定理得

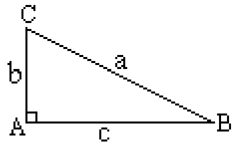
$$a^2=CD^2+DB^2$$
$$=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A.$$



如果∠A 是钝角,从 C 作 AB 的垂线交 BA 的延长线于 D,于是由勾股定理得

$$a^2=CD^2+BD^2$$
$$=[b\sin(180°-A)]^2+[c+b\cos(180°-A)]^2$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A.$$





如果∠A 是直角,$\cos A=0$,

∴ $a^2=b^2+c^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

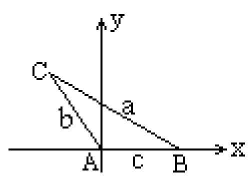
证法二:解析几何证法

以 A 为原点,射线 AB 为 x 轴正向,建立直角坐标系,则得

$$A(0,0),B(c,0),C(b\cos A,b\sin A).$$

由两点间的距离公式得

$$a^2=|BC|^2=(c-b\cos A)^2+(-b\sin A)^2$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A.$$



五、解:原行列式可逐步简化如下:

$$\Delta \xlongequal[\text{第三行加到第二行}]{\text{第二行加到第一行}} \begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 0 & x & x \\ -a & b & x-c \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -a & b & x-c \end{vmatrix}$$

$$= x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -a & b+a & x-c \end{vmatrix} = x^2(x-a-b-c)$$

故原不等式为

$$x^2(x-a-b-c)>0.$$

原不等式的解是

$$x\neq 0, x>a+b+c.$$

六、证明：(i)当 $n=1$ 时，左边 $=\cos\frac{x}{2}$，而

$$\text{右边} = \frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} = \cos\frac{x}{2},$$

所以当 $n=1$ 时等式成立.

(ii)假设当 $n=k$ 时等式成立,即

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^k\sin\frac{x}{2^k}},$$

两边同乘以 $\cos\frac{x}{2^{k+1}}$，得

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^k}\cdot\cos\frac{x}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{\sin x\cdot\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}$$

$$= \frac{\sin x\cdot\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^k\cdot 2\sin\frac{x}{2^{k+1}}\cdot\cos\frac{x}{2^{k+1}}} = \frac{\sin x}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}},$$

所以当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(i)和(ii),就证明了对于一切自然数 n 等式都成立.

七、解:(1)所求人口数 x(亿)是等比数列 10, 10×1.02, $10\times(1.02)^2$,……的第 21 项,即

$$x=10\times(1.02)^{20},$$

两边取对数,得

$$\lg x=1+20\lg 1.02=1.17200,$$

$$\therefore \quad x=14.859(\text{亿}).$$

答:到 2000 年底我国人口将达到 14.859 亿.

(2)设人口每年比上年平均递增率最高是 $y\%$,按题意得

$$10\times(1+y\%)^{20}\le 12,$$

即 $$(1+y\%)^{20}\le 1.2.$$

根据对数函数的单调上升性,对上列不等式两边取对数得

$$20\lg(1+y\%)\le\lg 1.2.$$

即 $$\lg(1+y\%)\le 0.00396.$$

∴ $$1+y\%\le 1.0092,\ y\%\le 0.0092.$$

答:每年比上年人口平均递增率最高是 0.92%.

八、解:(1)在平面 P 内作直线 AD⊥a 于点 D;在平面 Q 内,作直线 BE⊥a 于点 E,从点 D 作 a 的垂线与从点 B 作 a 的平行线相交于点 C.∴∠ABC 等于 AB 和 a 所成的角.

∠ADC 为二面角 P-a-Q 的平面角,

∴ ∠ADC=120°.又 AD=2,BCDE 为矩形,

∴ CD=BE=4.

连结 AC,由余弦定理得

$$\begin{aligned}AC^2&=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cdot\cos 120^\circ\\&=4+16-2\times2\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)\\&=28,\end{aligned}$$

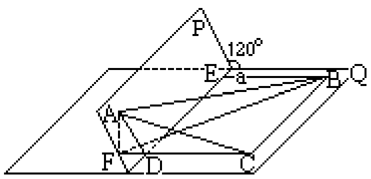
∴ $$AC=2\sqrt{7}.$$

又因 AD⊥a,CD⊥a,所以 a 垂直于△ACD 所在的平面.再由 BC∥a 得知 BC 垂直于△ACD 所在的平面,∴BC⊥AC.

在直角△ABC中,$\sin\angle ABC=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{2\sqrt{7}}{10}=\dfrac{\sqrt{7}}{5}$,∴$\angle ABC=\arcsin\dfrac{\sqrt{7}}{5}$

答:直线 AB 和棱 a 所成的角等于

$$\arcsin\frac{7}{5}.$$



(2)在△ACD 所在的平面内,作 AF⊥CD 交 CD 的延长线于 F 点.因为△ACD 所在的平面⊥平面 Q,∴AF⊥平面 Q.在△ADF 中,∠ADF=60°,AD=2,

∴ $$AF=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}.$$

连结 BF,于是∠ABF 是 AB 和平面 Q 所成的角,而△ABF 为直角三角形,所以

$$\sin\angle ABF=\frac{AF}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{10},\ \angle ABF=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

答:直线 AB 和平面 Q 所成的角为

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{10}.$$

九、解法一:(1)设直线 l 的方程为

$$y=k(x-2)+1,\qquad\text{(i)}$$

将(i)式代入双曲线方程,得

$$(2-k^2)x^2+(4k^2-2k)x-4k^2+4k-3=0, \qquad (ii)$$

又设$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2，y_2)$，$P(\bar{x}，\bar{y})$，则x_1，x_2必须是(ii)的两实根，所以有

$$x_1+x_2=\frac{4k^2-2k}{k^2-2} \qquad (k^2-2\neq 0).$$

按题意，$\bar{x}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，$\therefore \bar{x}=\frac{2k^2-k}{k^2-2}$.

因为$(\bar{x}，\bar{y})$在直线(i)上，所以

$$\bar{y}=k(\bar{x}-2)+1=k(\frac{2k^2-k}{k^2-2}-2)+1=\frac{2(2k-1)}{k^2-2}.$$

到此,若指出所求轨迹的参数方程是

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{2k^2-k}{k^2-2},\\ \bar{y}=\dfrac{4k-2}{k^2-2},\end{cases} \qquad (\text{其中}k\text{是参数})$$

再由$\bar{x}$，$\bar{y}$的表达式相除后消去k而得所求轨迹的普通方程为

$$\overline{y^2}-\bar{y}+2\bar{x}(2-\bar{x})=0\text{，或}\frac{8(\bar{x}-1)^2}{7}-\frac{4(\bar{y}-\frac{1}{2})^2}{7}=1,$$

这就是所要求的轨迹方程.

(2)设所求直线方程为 $y=k(x-1)+1$,代入双曲线方程,整理得

$$(2-k^2)x^2+(2k^2-2k)x-k^2+2k-3=0, \qquad (iii)$$

设$Q_1(\overline{x_1},\overline{y_2})$,$Q_2(\overline{x_2},\overline{y_2})$,则$\bar{x}_1$,$\bar{x}_2$必须是(iii)的两个实根,

即 $$\bar{x}_1+\bar{x}_2=\frac{2k^2-2k}{k^2-2}.$$

如果B是Q_1Q_2的中点,就有$\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{2}=1$,

即 $$\bar{x}_1+\bar{x}_2=2,$$

所以有$\frac{2k^2-2k}{k^2-2}=2$.综合起来,k应满足

$$(I)\quad \begin{cases}(2k^2-2k)^2-4(2-k^2)(-k^2+2k-3)\geq 0,\\ \dfrac{2k^2-2k}{k^2-2}=2.\end{cases}$$

由第二式解出 $k=2$,但 $k=2$ 不满足第一式,所以(Ⅰ)无解.

答:满足题中条件的直线 m 不存在.

解法二:(1)设 l 的参数方程为

$$\begin{cases}x=2+t\cos\theta,\\ y=1+t\sin\theta,\end{cases} \qquad 0\leq\theta<2\pi, \qquad (iv)$$

其中 t 是参数,θ为 AP 的倾斜角.代入所给双曲线方程,整理得:

$$(2\cos^2\theta-\sin^2\theta)t^2+2(4\cos\theta-\sin\theta)t+5=0.\ (v)$$

设$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)P(\bar{x},\bar{y})$,它们对应的参数值分别为$t_1,t_2,\bar{t}$,

则t_1,t_2必须是(v)的，两个实根，所以有

$$t_1+t_2=\frac{2(\sin\theta-4\cos\theta)}{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}\qquad(2\cos^2\theta-\sin^2\theta\neq 0).$$

按题意,$\bar{t}=\frac{1}{2}(t_1+t_2)$, 所以$\bar{t}=\dfrac{\sin\theta-4\cos\theta}{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}$.

将$\bar{t}$代入(iv),即得所求轨迹的参数(θ)方程

$$\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta}{2\cos^2\theta-\sin^2\theta},\\ \bar{y}=\dfrac{2\cos^2\theta-4\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta-\sin^2\theta}.\end{cases}$$

(2)也可用设m的参数方程的方法讨论此问,得出满足条件的直线m不存在的结论.

十、证法一:通项公式可写为

$$u_k=a^k-a^{k-1}b+a^{k-2}b^2-\cdots+(-1)^kb^k$$
$$=\frac{a^{k+1}-(-1)^{k+1}b^{k+1}}{a+b}.$$

因 $a-b=AC-BC=AC-AF=FC=1$,

$ab=AC\cdot BC=CD^2=1$.

故得 $$u_{n-2}=\frac{a^{n-1}-(-1)^{n-1}b^{n-1}}{a+b}=ab\cdot\frac{a^{n-1}-(-1)^{n-1}b^{n-1}}{a+b}$$
$$=\frac{a^nb-(-1)^{n-1}ab^n}{a+b},$$
$$u_{n-1}=\frac{a^n-(-1)^nb^n}{a+b}=(a-b)\cdot\frac{a^n-(-1)^nb^n}{a+b}$$
$$=\frac{a^{n+1}-a^nb-(-1)^nab^n-(-1)^{n+1}b^{n+1}}{a+b},$$

于是有

$$u_{n-1}+u_{n-2}=\frac{a^{n+1}-(-1)^{n+1}b^{n+1}}{a+b}=u_n.$$

证法二:由平面几何知识算出

$$a=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\qquad b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

通项公式可写为

$$u_k=a^k-a^{k-1}b+a^{k-2}b^2-\cdots+(-1)^kb^k=\frac{a^{k+1}-(-1)^{k+1}b^{k+1}}{a+b}.$$

要证 $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ 成立,只要证明

$$a^{n+1}-(-1)^{n+1}b^{n+1}=a^n-(-1)^nb^n+a^{n-1}-(-1)^{n-1}b^{n-1},$$

即

$$a^{n-1}\cdot a^2-(-1)^{n-1}b^{n-1}\cdot b^2=a^{n-1}\cdot a+(-1)^{n-1}b^{n-1}\cdot b+a^{n-1}-(-1)^{n-1}b^{n-1},$$

或

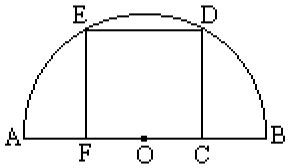
$$a^{n-1}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2-(-1)^{n-1}b^{n-1}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$$
$$=a^{n-1}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})+(-1)^{n-1}b^{n-1}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})+a^{n-1}-(-1)^{n-1}b^{n-1},$$

或

$$a^{n-1}(\frac{\sqrt{3}+5}{2})-(-1)^{n-1}b^{n-1}(\frac{3-\sqrt{5}}{2})$$
$$=a^{n-1}(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1)-(-1)^{n-1}b^{n-1}(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2}).$$

上式确是等式,故证得

$$u_n=u_{n-1}+u_{n-2}.$$



1981年试题
(文史类)

一、设 A 表示有理数的集合,B 表示无理数的集合,即设 A={有理数},B={无理数},试写出:(1)A∪B,(2)A∩B.

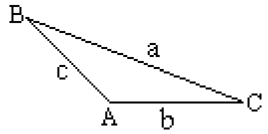
二、化简:

$$[-\frac{a^7b^2}{\sqrt{3}(a+b)^2}]^2\times[\frac{a^2-b^2}{a^2\sqrt{b}}]^4\div[\frac{a^2(b-a)}{2}]^3.$$

三、在 A、B、C、D 四位候选人中,(1)如果选举正、副班长各一人,共有几种选法?写出所有可能的选举结果;(2)如果选举班委三人,共有几种选法?写出所有可能的选举结果.

四、求函数 f(x)=sinx+cosx 在区间[-π,π)上的最大值.

五、写出正弦定理,并对钝角三角形的情况加以证明.



六、已知正方形 ABCD 的相对顶点 A(0,-1)和 C(2,5),求顶点 B 和 D 的坐标.

七、设 1980 年底我国人口以 10 亿计算.

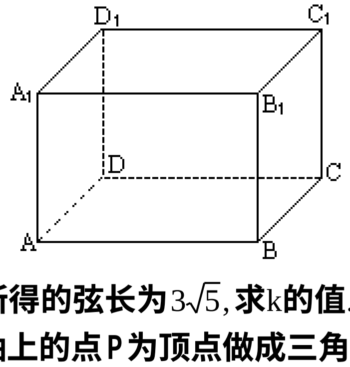
(1)如果我国人口每年比上年平均递增 2%,那么到 2000 年底将达到多少?

(2)要使 2000 年底我国人口不超过 12 亿,那么每年比上年平均递增率最高是多少?

下列对数值提供选用:

lg1.0087=0.00377	lg1.0092=0.00396	lg1.0096=0.00417
lg1.0200=0.00860	lg1.2000=0.07918	lg1.3098=0.11720
lg1.4568=0.16340	lg1.4859=0.17200	lg1.5157=0.18060

八、ABCD-$A_1B_1C_1D_1$ 为一正四棱柱,过 A、C、B_1 三点作一截面,求证:截面 ACB_1⊥对角面 DBB_1D_1.



九、(1)设抛物线$y^2=4x$截直线$y=2x+k$所得的弦长为$3\sqrt{5}$,求k的值.

(2)以本题(1)得到的弦为底边,以x轴上的点P为顶点做成三角形.当这三角形的面积为9时,求P的坐标.

1981年试题(文史类)答案

一、解:

(1)A∪B={实数}.(或 A∪B=R,或 A∪B=实数集合.)

(2)A∩B=Φ.(或 A∩B={ },或 A∩B=空集.)

二、解:

$$[-\frac{a^7b^2}{\sqrt{3}(a+b)^2}]^2 \times [\frac{a^2-b^2}{a^2\sqrt{b}}]^4 \div [\frac{a^2(b-a)}{2}]^3$$

$$=\frac{a^{14}b^4}{3(a+b)^4}\cdot\frac{(a+b)^4(a-b)^4}{a^8b^2}\cdot\frac{8}{a^6(b-a)^3}$$

$$=\frac{8}{3}(b-a)b^2\cdot(\text{或}-\frac{8}{3}(a-b)b^2.)$$

三、解:

(1)选法种数:$P_4^2=4\times3=12$(种).

所有可能的选举结果:(把正班长、副班长按次序来写)

AB,AC,AD,BC,BD,CD,

BA,CA,DA,CB,DB,DC.

(2)选法种数:$C_4^3=C_4^1=4$(种).

所有可能的选举结果:

ABC,ABD,ACD,BCD.

四、解:

$$f(x)=\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x)$$

$$=\sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x)$$

$$=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}),$$

所以$f(x)$以$\sqrt{2}$为振幅,以2π为周期.区间$[-\pi,\pi]$恰好是$f(x)$的一个周期的定义区间,故$f(x)$在这区间上取得最大值$\sqrt{2}$.

五、正弦定理:

在一个任意三角形中,各边和它所对角的正弦的比相等.

(或 $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$,

或 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.)

证明:

引 AD 垂直 BC 于 D;引 BE 垂直 CA 的延长线于 E.

设△ABC 的面积为 S,则有

$$S=\frac{1}{2}AC\cdot BE=\frac{1}{2}bc\sin(180°-A)=\frac{1}{2}bc\sin A;$$

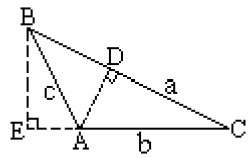
又$S=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}ac\sin B;$

$$S=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

将上式除以$\frac{1}{2}abc$,**得**:

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$



六、解法一:

设AC**的中点为**M(x, y),**则有**

$$x=\frac{0+2}{2}=1,\ y=\frac{-1+5}{2}=2.$$

∴M(x,y)=M(1,2).

又设AC**的斜率为**k,**则有**$k=\frac{5-(-1)}{2}=3.$**因此得**BD**的斜率为** $-\frac{1}{k}=-\frac{1}{3}.$

故有直线BD**的方程**:

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-1). \qquad \text{(i)}$$

又以 M 点为圆心,|MA|为半径的圆的方程为

$$(x-1)^2+(y-2)^2=|MA|^2=(\sqrt{1+9})^2,$$

即 $(x-1)^2+(y-2)^2=10. \qquad \text{(ii)}$

B 点及 D 点就是(i)与(ii)的交点,解由(i)、(ii)组成的方程组,得

$$\begin{cases} x=4, \\ y=1, \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x=-2, \\ y=3, \end{cases}$$

故得 B 及 D 的坐标分别为(4,1)及(-2,3).

解法二:

将坐标平面改作复平面.得向量的复数表示

$$\overrightarrow{OM}=1+2i,$$

$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}=(2-1)+(5-2)i=1+3i.$$

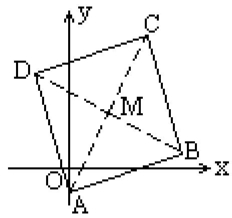
于是得 $\overrightarrow{MB}=-i\,\overrightarrow{MC}=3-i,$

$\therefore$ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}=4+i,$

即 B 点的坐标为 B(4,1).

又 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{iMD}=-2+3i,$

即 D 点的坐标为 D(-2,3).



七、解:

(1)所求人口数x(亿)是等比数列

$$10,10\times1.02,10\times(1.02)^2,\cdots\cdots$$

的第21项,

∴ $x=10\times(1.02)^{20}$.

取对数

$$\lg x=1+20\lg1.02=1.17200,$$

∴ $x=14.859$(亿).

答:到2000年底我国人口将达到14.859亿.

(2)设人口每年比上年平均递增率最高是y%,则有

$$10\times(1+y\%)^{20}\leq12,$$

即 $(1+y\%)^{20}\leq1.2$.

根据对数函数的单调上升性质,应得

$$\lg(1+y\%)^{20}\leq\lg1.2,$$

$$\lg(1+y\%)\leq0.00396.$$

∴ $1+y\%\leq1.0092$,

$$y\%\leq0.0092.$$

答:每年比上年平均递增率最高是0.92%.

八、证法一:

设AC、BD交于O点.

作截面ACB_1、对角面BB_1D_1D以及它们交线OB_1的图形.

由于AC_1是正四棱柱,所以ABCD是正方形,故

$$AC\perp BD;$$

又$BB_1\perp$底面ABCD,故

$$BB_1\perp AC.$$

∴ $AC\perp$对角面BB_1D_1D.

已知AC在截面ACB_1内,故有

截面$ACB_1\perp$对角面BB_1D_1D.

证法二:

已知ABCD是正方形,它的对角线互相垂直,故

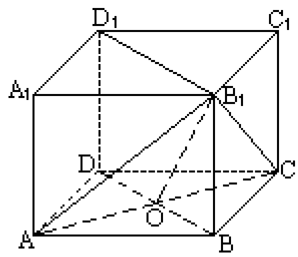
$$AC\perp BD;$$

又等腰三角形ACB_1的中线OB_1与底边AC互相垂直,故

$$AC\perp OB_1.$$

∴ $AC\perp$对角面BB_1D_1D.

已知AC在截面ACB_1内,故有截面$ACB_1\perp$对角面BB_1D_1D.



九、解:

(1)设直线与抛物线的交点为 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$.解方程组:

$$\begin{cases} y^2=4x, \\ y=2x+k, \end{cases}$$

得　　$(2x+k)^2=4x$,

即　　$4x^2+4(k-1)x+k^2=0$.

因 x_1、x_2 为此方程的两根,故

$$x_1+x_2=1-k, x_1x_2=\frac{k^2}{4}.$$

所以

$$(x_1?x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=(1-k)^2-4\cdot\frac{k^2}{4}=1-2k.$$

又因 P_1、P_2 在直线 $y=2x+k$ 上,故

$y_1=2x_1+k, y_2=2x_2+k$,

$y_1-y_2=2(x_1-x_2)$,

$(y_1-y_2)^2=4(x_1-x_2)^2=4(1-2k)$.

根据题设条件,$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=3\sqrt{5}$,

即　$(1-2k)+4(1-2k)=45$,

由此解得(经过检验):　　　$k=-4$.

答:k 的值为-4.

(2)设 x 轴上一点 P 的坐标为(a,0),又点 P 到直线 P_1P_2 的距离为 h,则有

$$h=\frac{|2a-4|}{\sqrt{5}}.$$

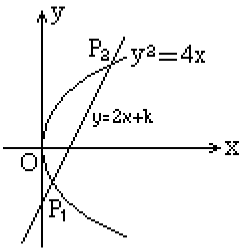
依题意得△PP_1P_2 的面积关系:

$$9=\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot\frac{|2a-4|}{\sqrt{5}},$$

即　　$9=|2a-4|$.

∴　　$a=5, a=-1$.

答:P 点的坐标为(5,0),或(-1,0).



y
P2
y²=4x
y=2x+k
x
O
P1

1982 年试题
(理工农医类)

一、填表:

	函　　数	使函数有意义的 x 的实数范围
(1)	$y=\sqrt{-x^2}$	
(2)	$y=\sqrt{(-x)^2}$	
(3)	y=arcsin(sinx)	
(4)	y=sin(arcsinx)	
(5)	$y=10^{\lg x}$	
(6)	$y=\lg 10^x$	

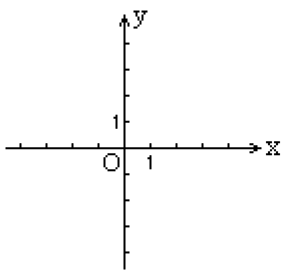
二、(1)求$(-1+i)^{20}$展开式中第 15 项的数值;

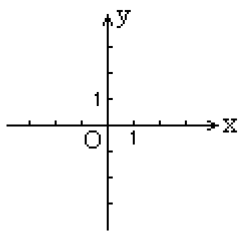
(2)求 $y=\cos^2\dfrac{x}{3}$ 的导数.

三、在平面直角坐标系内,下列方程表示什么曲线?画出它们的图形.

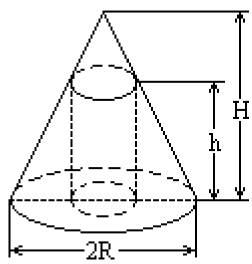
(1) $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 1 \\ -3x & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$;

(2) $\begin{cases} x=1+\cos j, \\ y=2\sin j. \end{cases}$



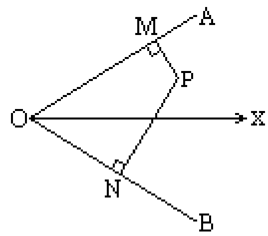


四、已知圆锥体的底面半径为 R,高为 H.求内接于这个圆锥体并且体积最大的圆柱体的高 h(如图).

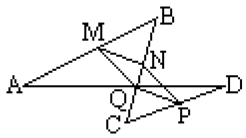


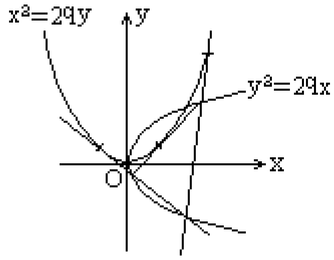
五、设 $0<x<1,a>0,a\neq 1$,比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小(要写出比较过程).

六、如图:已知锐角∠AOB=2α内有动点 P,PM⊥OA,PN⊥OB,且四边形 PMON 的面积等于常数 c^2.今以 O 为极点,∠AOB 的角平分线 OX 为极轴,求动点 P 的轨迹的极坐标方程,并说明它表示什么曲线.



七、已知空间四边形,ABCD 中 AB=BC,CD=DA,M,N,P,Q 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点(如图).求证 MNPQ 是一个矩形.





八、抛物线 $y^2=2px$ 的内接三角形有两边与抛物线 $x^2=2qy$ 相切,证明这个三角形的第三边也与 $x^2=2qy$ 相切.

九、附加题:计入总分.

已知数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 和数列 $b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$,其中 $a_1=p,b_1=q,a_n=pa_{n-1},b_n=qa_{n-1}+rb_{n-1}(n\geq 2)$,(p,q,r 是已知常数,且 $q\neq 0,p>r>0$).

(1)用 p,q,r,n 表示 bn,并用数学归纳法加以证明;

(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{bn}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}$.

1982 年试题(理工农医类)答案

一、本题考查对函数定义域的理解和表示实数范围的方法.

解:(1)x=0(或{0}等)

(2)x 为任意实数(或 R;或(-∞,+∞);或-∞<x<+∞等)

(3)x 为任意实数(或 R;或(-∞,+∞);或-∞<x<+∞等)

(4)|x|≤1(或[-1,1];或-1≤x≤1;或 x 的绝对值不超过 1;或{x|-1≤x≤1};或{x|-1≤x≤1}等);

(5)x>0(或(0,+∞);或 0<x<+∞;或 x>0 的一切实数;或 x 是正实数;或{x|x>0;或{x|x>0}等)

(6)x 为任意实数(或 R;或(-∞,+∞);或-∞<x<+∞等)

二、本题考查二项式定理,i 的方幂的性质,组合数的计算及求函数的导数.

解:(1)第15项(或T_{15}) $= C_{20}^{14}(-1)^6(i)^{14}$

$$= -C_{20}^{14} = -C_{20}^{6}$$

$$= -38760.$$

$$(2) y' = 2(\cos\frac{x}{3})(\cos\frac{x}{3})'$$
$$= -2\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}(\frac{x}{3})'$$
$$= -\frac{2}{3}\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$$
$$= -\frac{1}{3}\sin\frac{2x}{3}.$$

三、本题考查行列式的计算,化参数方程为普通方程,判断方程所表示的曲线及作图能力.

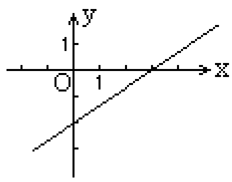
解: $(1)\begin{vmatrix} 2x & 1 & 1 \\ -3y & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

直接展开行列式得 2x-3y-6=0;或利用行列式性质,将第一行元素加上第二行元素减去第三行元素做为第一行元素,行列式值不变,得

$$(1)\begin{vmatrix} 2x-3y-6 & 0 & 0 \\ -3y & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

得 2x-3y-6=0.

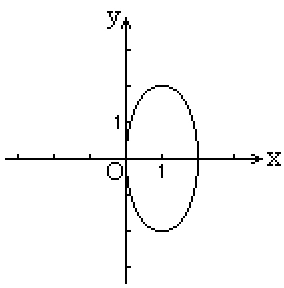
图形是直线,作图如下:



$$(2)\begin{cases} x = 1 + \cos j, \\ y = 2\sin j, \end{cases}$$

化为 $(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$.

图形是椭圆,作图如下:



四、本题考查将实际问题化为数学问题的能力及利用导数或不等式求函数最大值的方法.

解法一:设圆柱体半径为 r,高为 h.由

△ACD∽△AOB

得 $\dfrac{H-h}{H}=\dfrac{r}{R}$.

由此得 $r=\dfrac{R}{H}(H-h)$,

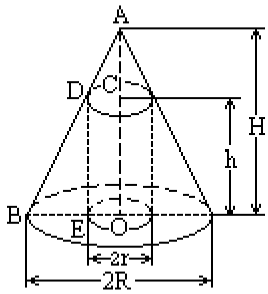
圆柱体体积$V(h)=\pi r^2 h=\dfrac{\pi R^2}{H^2}(H-h)^2 h$,

两边对h求导$V'(h)=\dfrac{pR^2}{H^2}(H-h)(H-3h)$,

令V'(h)=0,得 h=H(不合题意,舍去)

和 $h=\dfrac{1}{3}H$.

因而函数V(h)在定义域(0,H),内只有一个驻点,同时根据实际问题必有体积最大的圆柱体,所以$h=\dfrac{1}{3}H$时圆柱体体积最大.



解法二:同上得$V(h)=\dfrac{\pi R^2}{H^2}(H-h)^2 h$,

根据题意,H>h>0,

利用不等式$\sqrt[3]{abc}\le\dfrac{a+b+c}{3}$,

设$a=b=\dfrac{H-h}{2}$, $c=h$有$(H-h)^2 h\le\dfrac{4}{27}H^3$.

当$\dfrac{H-h}{2}=h$时上式取等号.

因此当$h=\dfrac{H}{3}$时$(H-h)^2 h$最大,即圆柱体体积最大.

五、本题考查绝对值概念,对数函数的性质及两个实数比较大小的方法.

解法一:当 a>1 时,

$$|\log_a(1-x)|=-\log_a(1-x),$$

$$|\log_a(1+x)|=\log_a(1+x),$$

$$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=-\log_a(1-x)-\log_a(1+x)$$

$$=-[\log_a(1-x)+\log_a(1+x)]=-\log_a(1-x^2).$$

∵ $a>1, 0<1-x^2<1$, ∴ $-\log_a(1-x^2)>0$,

∴ $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

当 0<a<1 时,

$|\log_a(1-x)|=\log_a(1-x)$,

$|\log_a(1+x)|=-\log_a(1+x)$,

$|\log_a(1-x)|-|\log_a(1+x)|=\log_a(1-x)+\log_a(1+x)=\log_a(1-x^2)$.

∵ $0<a<1,0<1-x^2<1$, ∴ $\log_a(1-x^2)>0$,

∴ $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

因此当 $0<x<1,a>0,a\neq1$ 时总有

$$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$$

解法二:

$$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=\left|\frac{\log_a(1-x)}{\log_a(1+x)}\right|=|\log_{1+x}(1-x)|.$$

∵ $1+x>1,0<1-x<1$,

原式 $=-\log_{1+x}(1-x)$

$$=\log_{1+x}\frac{1}{1-x}$$

$$=\log_{1+x}\frac{1+x}{1-x^2}$$

$=\log_{1+x}(1+x)-\log_{1+x}(1-x^2)$.

∵ $1+x>1,0<1-x_2<1,\log_{1+x}(1-x^2)<0$,

$\log_{1+x}(1+x)=1$,

∴ $\log_{1+x}(1+x)-\log_{1+x}(1-x^2)>1$,

即 $\dfrac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}>1$, ∴ $|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$

六、本题考查用极坐标求轨迹方程,三角恒等式的运用,由极坐标方程化为直角坐标方程及判断二次曲线的类型等能力.

解:设 P 点的极坐标为(ρ,θ),

∴ $\angle POM=\alpha-\theta$,

$\angle NOP=\alpha+\theta$,

$OM=\rho\cos(\alpha-\theta),PM=\rho\sin(\alpha-\theta)$,

$ON=\rho\cos(\alpha+\theta),PN=\rho\sin(\alpha+\theta)$,

四边形 PMON 的面积

$$S=\frac{1}{2}OM\cdot PM+\frac{1}{2}ON\cdot PN$$

$$=\frac{\rho^2}{2}[\cos(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta)+\cos(\alpha+\theta)\sin(\alpha+\theta)].$$

依题意,动点 P 的轨迹的极坐标方程是:

$$\frac{\rho^2}{2}[\cos(\alpha-\theta)\sin(\alpha-\theta)+\cos(\alpha+\theta)\sin(\alpha+\theta)]=c^2。$$

用倍角公式化简得 $\dfrac{\rho^2}{4}[\sin2(\alpha-\theta)+\sin2(\alpha+\theta)]=c^2$,

用和、差角公式或和差化积公式化简得

$$\frac{\rho^2}{2}\sin2\alpha\cos2\theta=c^2,$$

即
$$\rho^2\cos2\theta=\frac{2c^2}{\sin2\alpha}.$$

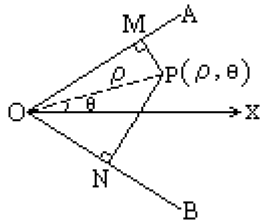
用 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 化为直角坐标方程:上式化为

$$\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\frac{2c^2}{\sin2a},$$

再化为
$$x^2-y^2=\frac{2c^2}{\sin2\alpha}$$

这个方程表示双曲线.

根据题意,动点 P 的轨迹是双曲线右面一支在∠AOB 内的一部分.



七、本题考查立体几何的一些基本概念,空间图形的想象能力和平面几何的一些基本知识.

解:连结 AC.在△ABC 中,∵AM=MB,CN=NB,

∴MN∥AC.在△ADC 中,

∵AQ=QD,CP=PD,∴QP∥AC

∴MN∥QP.

同理,连结 BD 可证 MQ∥NP.

∴ MNPQ 是平行四边形.

取 AC 中点 K,连 BK,DK.

∵ AB=BC,∴BK⊥AC,

又∵ AD=DC,∴DK⊥AC.

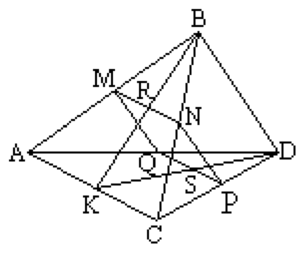
因此平面 BKD 与 AC 垂直.

∵ BD 在平面 BKD 内,∴BD⊥AC.

∵ MQ∥BD,QP∥AC,∴MQ⊥QP,

即∠MQP 为直角.

前面已证 MNPQ 是平行四边形,今又有一内角为直角,因此 MNPQ 是矩形.



八、本题考查有关抛物线切线的知识,运算能力及逻辑思维的能力.

解:不失一般性,设 $p>0,q>0$.设 $y^2=2px$ 的内接三角形顶点为 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),A_3(x_3,y_3)$.因此

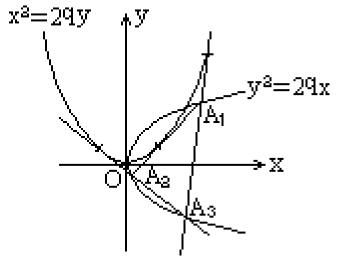
$$y_1^2=2px_1, y_2^2=2px_2, y_3^2=2px_3.$$

其中 $y_1\neq y_2, y_2\neq y_3, y_3\neq y_1.$

依题意,设 A_1A_2,A_2A_3 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切,要证 A_3A_1 也与抛物线 $x^2=2qy$ 相切.

因为 $x^2=2qy$ 在原点 O 处的切线是 $y^2=2px$ 的对称轴,所以原点 O 不能是所设内接三角形的顶点.即 (x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3) 都不能是 $(0,0)$;又因 A_1A_2 与 $x^2=2qy$ 相切,所以 A_1A_2 不能与 y 轴平行,即 $x_1\neq x_2$,$y_1\neq -y_2$,直线 A_1A_2 的方程是

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1),$$



$\because$ $$y_2^2-y_1^2=(y_2-y_1)(y_2+y_1)=2p(x_2-x_1).$$

$\therefore$ A_1A_2 方程是 $$y=\frac{2p}{y_1+y_2}x+\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}.$$

A_1A_2 与抛物线 $x^2=2qy$ 交点的横坐标满足

$$x^2-\frac{4pq}{y_1+y_2}x-\frac{2qy_1y_2}{y_1+y_2}=0,$$

由于 A_1A_2 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切,上面二次方程的判别式

$$\triangle=(-\frac{4pq}{y_1+y_2})^2+4(\frac{2qy_1y_2}{y_1+y_2}=0$$

化简得 $$2p^2q+y_1y_2(y_1+y_2)=0. \qquad (\text{I})$$

同理由于 A_2A_3 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切,A_2A_3 也不能与 y 轴平行,

即 $x_2\neq x_3$,$y_2\neq -y_3$,同样得到

$$2p^2q+y_2y_3(y_2+y_3)=0 \qquad (\text{II})$$

由(I)(II)两方程及 $y_2\neq 0$,$y_1\neq y_3$,得 $y_1+y_2+y_3=0$.

由上式及 $y_2\neq 0$,得 $y_3\neq -y_1$,也就是 A_3A_1 也不能与 y 轴平行.

今将 $y_2=-y_1-y_3$ 代入(I)式得:

$$2p^2q+y_3y_1(y_3+y_1)=0 \qquad (\text{III})$$

(III)式说明 A_3A_1 与抛物线 $x^2=2qy$ 的两个交点重合,即 A_3A_1 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切.所以只要 A_1A_2,A_2A_3 与抛物线 $x^2=2qy$ 相切,则 A_3A_1 必与抛物线 $x^2=2qy$ 相切.

九、本题考查逻辑思维能力,利用数学归纳法证明问题的能力及极限的计算方法.

解法一:(1)$\because a_1=p$,$a_n=pa_{n-1}$,

$\therefore a_n=p^n$.

又 $b_1=q$,

$b_2=qa_1+rb_1=q(p+r)$,

$b_3=qa_2+rb_2=q(p^2+pr+r^2)$,…

设想 $b_n=q(p^{n-1}+p^{n-2}r+\cdots+r^{n-1})$

$$=\frac{q(p^n-r^n)}{p-r}.$$

用数学归纳法证明:

当$n=2$时, $b_2=q(p+r)=\frac{q(p^2-r^2)}{p-r}$, 等式成立；

设当$n=k$时, 等式成立, 即$b_k=\frac{q(p^k-r^k)}{p-r}$

则
$$b_{k+1}=qa_k+rb_k$$
$$=qp^k+\frac{rq(p^k-r^k)}{p-r},$$
$$=\frac{q(p^{k+1}-r^{k+1})}{p-r},$$

即 $n=k+1$ 时等式也成立.

所以对于一切自然数 $n\geq 2$,
$$b_n=\frac{q(p^n-r^n)}{p-r}$$
都成立.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{q(p^n-r^n)}{p-r}}{\sqrt{p^{2n}+\frac{q^2(p^n-r^n)^2}{(p-r)^2}}},$$

$\because p>r>0$, 原式 $=\lim_{n\to\infty}\frac{q(p^n-r^n)}{\sqrt{p^{2n}(p-r)^2+q^2(p^n-r^n)^2}}$,

分子分母同除以 p^n,

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{q[1-(\frac{r}{p})^n]}{\sqrt{(p-r)^2+q^2[1-(\frac{r}{p})^n]^2}},$$

$\because$ $0<\frac{r}{p}<1$, 故当$n\to\infty$时, $(\frac{r}{p})^n\to 0$,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}=\frac{q}{\sqrt{(p-r)^2+q^2}}.$$

解法二: (1)同解法一.

(2)**先求** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p^n}{\dfrac{q(p^n-r^n)}{p-r}}$.

分子分母同除以p^n,**原式** $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p-r}{q[1-(\frac{r}{p})^n]}$,

$\because\quad 0<\dfrac{r}{p}<1$,**故当**$n\to\infty$**时**,$(\dfrac{r}{p})^n\to 0$,

$\therefore\qquad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{p-r}{q}$.

当$q>0$**时**,$b_n=\dfrac{q(p^n-r^n)}{p-r}>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{a_n}{b_n})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{p-r}{q})^2}}=\frac{q}{\sqrt{(p-r)^2+q^2}}.$$

当$q<0$**时**,$b_n=\dfrac{q(p^n-r^n)}{p-r}<0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{a_n}{b_n})^2}}=-\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{p-r}{q})^2}}=\frac{q}{(p-r)^2+q^2}.$$

$$\therefore\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}=\frac{q}{\sqrt{(p-r)^2+q^2}}.$$

1982 年试题

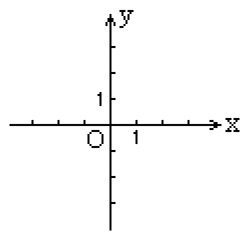
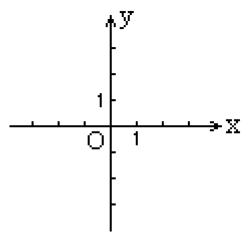
（文史类）

一、填表：

	函数	使函数有意义的 x 的实数范围
(1)	$y=\sqrt{-x^2}$	
(2)	$y=\sqrt{(-x)^2}$	
(3)	$y=10^{\lg x}$	
(4)	$y=\lg 10^x$	

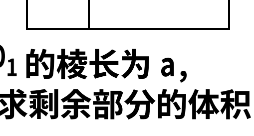
二、求$(-1+i)^{20}$展开式中第 15 项的数值.

三、在平面直角坐标系内,表中的方程表示什么曲线?并画出它们的图形：

	方程	曲线名称	图形
(1)	$4x^2+y^2=4$		
(2)	$x-3=0$		

四、已知$x-y=\frac{1}{2},x^2+y^2=1$,**求**$x^2-y^2$**的值.**

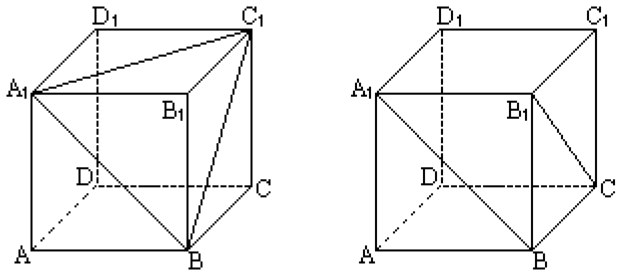
五、以墙为一边,用篱笆围成长方形的场地,并用平行于一边的篱笆隔开(如图).已知篱笆的总长为定值 L,这块场地的长和宽各为多少时场地的面积最大?最大面积是多少?



六、已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 a,

(1)用平面 A_1BC_1 截去一角后,求剩余部分的体积;

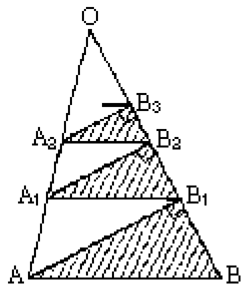
(2)求 A_1B 和 B_1C 所成的角.



七、已知定点A,B,且AB=2a,如果动点P到点A的距离和到点B的距离之比为2:1,求点P的轨迹方程,并说明它表示什么曲线.

八、求tg9°+ctg117°-tg243°-ctg351°的值.

九、如图,已知△AOB中,OA=b,OB=a,∠AOB=θ(a≥b,θ是锐角).作AB_1⊥OB,B_1A_1∥BA;再作 A_1B_2⊥OB,B_2A_2∥BA;如此无限继续作下去.设△ABB_1,△$A_1B_1B_2$,…的面积为S_1,S_2,…,求无穷数列S_1,S_2,…的和.



1982年试题(文史类)答案

一、本题考查对函数定义域的理解和表示实数范围的方法.

解:(1)x=0(或{0}等)

(2)x为任意实数(或R;或(-∞,+∞);或-∞<x<+∞等)

(3)x>0(或x>0的一切实数;或(0,+∞);或 0<x<+∞;或{x:x>0};或{x|x>0};或x是正实数等)

(4)x为任意实数(或R;或(-∞,+∞);或-∞<x<+∞等)

二、本题考查二项式定理,i的方幂的性质及组合数的计算.

解:第15项(或T_{15}) $= C_{20}^{14}(-1)^6(i)^{14}$

$= -C_{20}^{14} = -C_{20}^{6}$

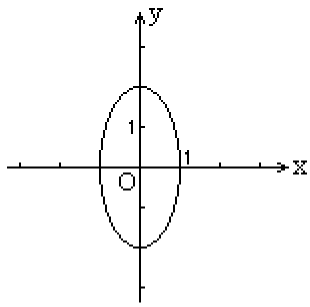
$= -38760.$

三、本题考查识别方程是什么图形和作出图形的能力.

解:(1)曲线名称:椭圆.

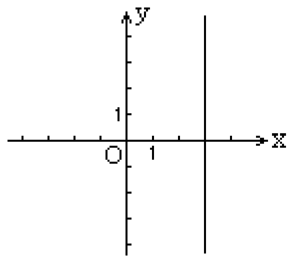
图形

或



(2)曲线名称:直线.

图形



四、本题考查二次式的运算.

解法一： $(x-y)^2=\frac{1}{4}$,即$x^2-2xy+y^2+y^2=\frac{1}{4}$,

得 $2xy=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$,

∴ $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

$x+y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$,

∴ $x^2-y^2=(x+y)(x-y)=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{1}{2}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}$.

解法二：如上得 $x+y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2}$,

从 $\begin{cases}x+y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2},\\ x-y=\frac{1}{2},\end{cases}$

可得 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{7}+1}{4},\\ y=\frac{\sqrt{7}-1}{4}\end{cases}$； 或$\begin{cases}x=\frac{-\sqrt{7}+1}{4},\\ y=\frac{-\sqrt{7}-1}{4}.\end{cases}$

∴ $x^2-y^2=(\frac{\sqrt{7}+1}{4})^2-(\frac{\sqrt{7}-1}{4})^2=\frac{\sqrt{7}}{4}$,

或 $x^2-y^2=(\frac{-7+1}{4})^2-(\frac{-7-1}{4})^2=-\frac{\sqrt{7}}{4}$.

解法三：把$y=x-\frac{1}{2}$代入$x^2+y^2=1$,得

$$x^2+x^2-x+\frac{1}{4}=1,$$

即 $$8x^2-4x-3=0.$$

∴ $$x=\frac{1+\sqrt{7}}{4},\text{或}x=\frac{1-\sqrt{7}}{4};$$

$$y=\frac{-1+\sqrt{7}}{4},\quad \text{或}\quad y=\frac{-1-\sqrt{7}}{4}.$$

∴ $$x^2-y^2=\frac{\sqrt{7}}{4},\quad \text{或}\quad x^2-y^2=-\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

解法四：设 x=cosθ,y=sinθ(θ为税角),

则 $$\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}, \qquad (1)$$

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1.$$

由(1) $$\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=\frac{1}{4},$$

∴ $$2\cos\theta\sin\theta=\frac{3}{4},$$

即 $$\sin 2\theta=\frac{3}{4}$$

∴ $$x^2-y^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

$$=\cos 2\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2 2\theta}$$

$$=\pm\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\pm\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

五、本题考查从实际问题列函数式、配方、求极值的知识和能力.

解法一：设长方形场地的宽为 x,则长为 L-3x,它的面积

$$y=x(L-3x)=-3x^2+Lx$$

$$=-3\left(x-\frac{L}{6}\right)^2+\frac{L^2}{12}.$$

当宽$x=\frac{L}{6}$时,这块长方形场地的面积最大.

这时的长为$L-3x=L-3\times\frac{L}{6}=\frac{L}{2}$,

最大面积为$\frac{L^2}{12}$.

答:这块长方形场地的宽为$\frac{L}{6}$,长为$\frac{L}{2}$时,最大面积是$\frac{L^2}{12}$.

解法二：设长方形场地的长为x,则宽为$\frac{L-x}{3}$,

它的面积

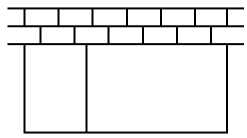
$$y=x(\frac{L-x}{3})$$
$$=-\frac{1}{3}x^2+\frac{L}{3}x$$
$$=-\frac{1}{3}(x-\frac{L}{2})^2+\frac{L^2}{12}.$$

当长$x=\frac{L}{2}$时,这块长方形场地的面积最大.

这时的宽为$\frac{L-x}{3}=\frac{L}{6}$,

最大面积为$\frac{L^2}{12}$.

答：这块长方形场地的长为$\frac{L}{2}$,宽为$\frac{L}{6}$时,最大面积是$\frac{L^2}{12}$.



六、本题考查立体几何的线面关系的知识和体积的计算.

解法一:(1)∵BB_1⊥平面$A_1B_1C_1D_1$,

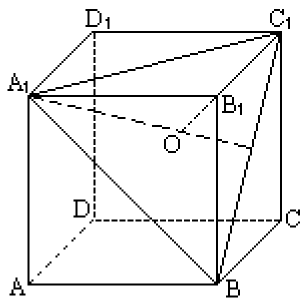
∴△$A_1B_1C_1$是棱锥$B\text{-}A_1B_1C_1$的底,BB_1是棱锥的高,

△$A_1B_1C_1$的面积$=\frac{1}{2}a^2$,

截下部分体积$=\frac{1}{3}BB_1\times$△$A_1B_1C_1$的面积$=\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{2}a^2=\frac{a^3}{6}$,

正方体体积=a^3,

剩余部分体积$=a^3-\frac{1}{6}a^3=\frac{5}{6}a^3$.



(2)连D_1C和D_1B_1,

∵ $A_1D_1 \underline{\parallel} BC$,

∴四边形A_1BCD_1是平行四边形,

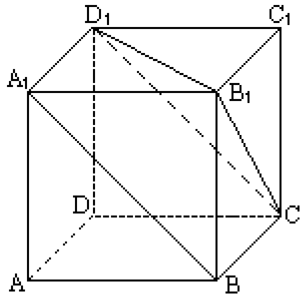
∴$A_1B\parallel D_1C$,

$\therefore \angle B_1CD_1$ 即 A_1B 与 B_1C 所成的角,

$\because$ 正方体各面上对角线的长度相等,即 $D_1B_1=B_1C=D_1C$,$\therefore \triangle D_1CB_1$ 是等边三角形.

$\therefore \angle D_1CB_1=60°$,

$\therefore A_1B$ 与 B_1C 成 $60°$ 的角.



解法二:(1)截下部分是正三棱锥 B_1-A_1BC,它的底面边长为 $\sqrt{2}a$,侧棱长为 a.

作 B_1O 垂直底面 A_1BC_1,垂足 O 是 $\triangle A_1BC_1$ 的中心.

$$A_1O=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{2}a=\frac{\sqrt{6}}{3}a,$$

$\because B_1O\perp A_1O$, $\quad\therefore B_1O=\sqrt{A_1B_1^2-A_1O^2}$

$$=\sqrt{a^2-\frac{6}{9}a^2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$\triangle A_1BC_1$ 的面积 $=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2}a)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$,

$B_1-A_1BC_1$ 的体积 $=\frac{1}{3}B_1o\times\triangle A_1\ BC_1$ 的面积

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{1}{6}a^3,$$

正方体体积 $=a^3$,

剩余部分的体积 $=a^2-\frac{a^2}{6}=\frac{5}{6}a^3$

(2)同[解一](2).

七、本题考查解析几何中求轨迹方程的基本知识、运算能力和从方程判断轨迹图形的能力.

解:选取 AB 所在直线为横轴,从 A 到 B 为正方向,以 AB 中点 O 为原点,过 O 作 AB 的垂线为纵轴,则 A 为 $(-a,0)$,B 为 $(a,0)$,设 P 为 (x,y).

$\because \quad \frac{PA}{PB}=\frac{2}{1},$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{(x+a)^2+y^2}}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=2.$

$\therefore \quad (x+a)^2+y^2=4[(x-a)^2+y^2],$

即 $\quad x^2+2ax+a^2+y^2=4x^2-8ax+4a^2+4y^2,$

$\therefore \quad 3x^2-10ax+3y^2+3a^2=0.$

因为 x^2,y^2 两项的系数相等,且缺 xy 项,所以轨迹的图形是圆.

八、本题考查利用同角三角函数的基本关系式、三角函数的诱导公式、三角函数的两角和差公式、倍角公式、和差化积公式等来进行计算和化简三角式子.

解法一:$\mathrm{tg}9°+\mathrm{ctg}117°-\mathrm{tg}243°-\mathrm{ctg}351°$

$=\mathrm{tg}9°-\mathrm{tg}27°-\mathrm{tg}63°+\mathrm{tg}81°$

$=(\mathrm{tg}9°+\mathrm{tg}81°)-(\mathrm{tg}27°+\mathrm{tg}63°)$

$$=(\frac{\sin9°}{\cos9°}+\frac{\sin81°}{\cos81°})-(\frac{\sin27°}{\cos27°}+\frac{\sin63°}{\cos63°})$$

$$=\frac{\sin9°\cos81°+\cos9°\sin81°}{\cos9°\cos81°}-\frac{\sin27°\cos63°+\cos27°\sin63°}{\cos27°\cos63°}$$

$$=\frac{\sin(9°+81°)}{\cos9°\cos81°}-\frac{\sin(27°+63°)}{\cos27°\cos63°}$$

$$=\frac{\sin90°}{\cos9°\sin9°}-\frac{\sin90°}{\cos27°\sin27°}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\sin18°}-\frac{1}{\frac{1}{2}\sin54°}$$

$$=2\times\frac{\sin54°-\sin18°}{\sin18°\sin54°}$$

$$=2\times\frac{2\cos36°\sin18°}{\sin18°\sin54°}$$

$$=4\times\frac{\sin54°}{\sin54°}=4.$$

解法二:$\mathrm{tg}9°+\mathrm{ctg}117°-\mathrm{tg}243°-\mathrm{ctg}351°$

$=\mathrm{tg}9°-\mathrm{tg}27°-\mathrm{ctg}27°+\mathrm{ctg}9°$

$=(\mathrm{tg}9°+\mathrm{ctg}9°)-(\mathrm{tg}27°+\mathrm{ctg}27°)$

$$=\frac{tg^2 9^\circ+1}{tg9^\circ}-\frac{tg^2 27^\circ+1}{tg27^\circ}$$

$$=\frac{\sec^2 9^\circ}{tg9^\circ}-\frac{\sec^2 27^\circ}{tg27^\circ}$$

$$=\frac{1}{\sin9^\circ\cos9^\circ}-\frac{1}{\sin27^\circ\cos27^\circ}$$

$$=\frac{2}{\sin18^\circ}-\frac{2}{\sin54^\circ}$$

$$=2\times\frac{\sin54^\circ-\sin18^\circ}{\sin18^\circ\sin54^\circ}$$

$$=2\times\frac{2\cos36^\circ\sin18^\circ}{\sin18^\circ\sin54^\circ}$$

$$=4\times\frac{\sin54^\circ}{\sin54^\circ}=4.$$

九、本题考查综合分析的能力,其中包括对相似三角形的概念及其性质的掌握,三角形面积的计算和无穷递缩等比数列的求和.

解:$AB_1=b\sin\theta$,

$BB_1=a-b\cos\theta$.

$$S_1=\frac{1}{2}AB_1\times BB_1=\frac{1}{2}b\sin\theta(a-b\cos\theta),$$

∵$\triangle OAB\backsim\triangle OA_1B_1\backsim\triangle OA_2B_2\backsim\cdots$,

$$\therefore\frac{A_nB_n}{A_{n-1}B_{n-1}}=\frac{OB_n}{OB_{n-1}}=\frac{OA_{n-1}COS\theta}{OB_{n-1}}$$

$$=\frac{OA}{OB}COS\theta=\frac{b}{a}\cos\theta$$

(对一切 $n\geq1$ 成立,此时视 A_0B_0 为 AB).

∵$\triangle ABB_1\backsim\triangle A_1B_1B_2\backsim\triangle A_2B_2B_3\backsim\cdots$,

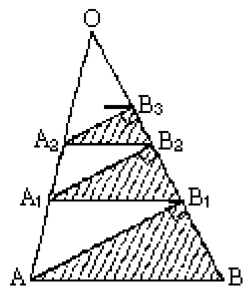
$$\therefore\frac{s_{n+1}}{sn}=(\frac{A_nB_n}{A_{n-1}B_{n-1}})^2=(\frac{b}{a}\cos\theta)^2,\text{即公比}q=(\frac{b}{a}\cos\theta)^2.$$

∵ **θ 是锐角**,$a\geq b$, $\therefore 0<(\frac{b}{a}\cos\theta)^2<1$,

∴数列 $S_1,S_2,S_3,\cdots$是无穷递缩等比数列,

$$\lim_{n\to\infty}(S_1+S_2+\cdots+S_n)=\frac{S_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}b\sin\theta(a-b\cos\theta)}{1-(bacos\theta)^2}$$

$$=\frac{a^2b\sin\theta}{2(a+b\cos\theta)}$$


O
B3
A2
B2
A1
B1
A
B

1983年试题
(理工农医类)

一、本题共5个小题,每一个小题都给出代号为A,B,C,D的四个结论,其中只有一个结论是正确的.把正确结论的代号写在题后的括号内.

(1)两条异面直线,指的是

(A)在空间内不相交的两条直线.

(B)分别位于两个不同平面内的两条直线.

(C)某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线.

(D)不在同一平面内的两条直线.

【　　】

(2)方程$x^2-y^2=0$表示的图形是

(A)两条相交直线.　　(B)两条平行直线.

(C)两条重合直线.　　(D)一个点.

【　　】

(3)三个数a,b,c不完全为零的充要条件是

(A)a,b,c都不是零.　　(B)a,b,c中最多有一个是零.

(C)a,b,c中只有一个是零.　　(D)a,b,c中至少有一个不是零.

【　　】

(4)设$\alpha=\frac{4\pi}{3}$,则$\arccos(\cos\alpha)$的值是

(A)$\frac{4\pi}{3}$.　　(B)$-\frac{2\pi}{3}$.

(C)$\frac{2\pi}{3}$.　　(D)$\frac{\pi}{3}$.

【　　】

(5)$0.3^2,\log_2 0.3,2^{0.3}$这三个数之间的大小顺序是

(A)$0.3^2<2^{0.3}<\log_2 0.3$.

(B)$0.3^2<\log_2 0.3<2^{0.3}$.

(C)$\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$.

(D)$\log_2 0.3<2^{0.3}<0.3^2$.

【　　】

二、(1)在同一平面直角坐标系内,分别画出两个方程$y=-\sqrt{x}$,$x=\sqrt{-y}$的图形,并写出它们交点的坐标.

(2)在极坐标系内,方程$\rho=5\cos\theta$表示什么曲线?画出它的图形.

三、(1)已知$y=e^{-x}\sin 2x$,求微分dy.

(2)一个小组共有10名同学,其中4名是女同学,6名是男同学.要从小组内选出3名代表,其中至少有1名女同学,求一共有多少种选法.

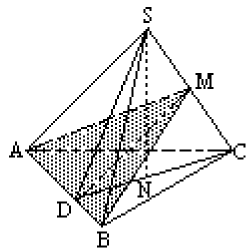
四、计算行列式(要求结果最简):

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos(\alpha+\varphi) & \cos\alpha \\ \cos\beta & \sin(\beta-\varphi) & \sin\beta \\ \sin\varphi & \cos 2\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$$

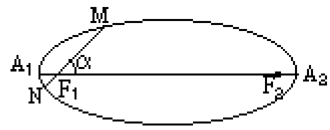
五、 (1)证明:对于任意实数t,复数$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}i$的模$r=|z|$适合$r\le\sqrt[4]{2}$.

(2)当实数t取什么值时,复数$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}i$的辐角主值$\theta$适合$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$?

六、如图,在三棱锥$S-ABC$中,S在底面上的射影N位于底面的高CD上;M是侧棱SC上的一点,使截面MAB与底面所成的角等于$\angle NSC$.求证SC垂直于截面MAB.



七、 如图,已知椭圆长轴$|A_1A_2|=6$,焦距$|F_1F_2|=4\sqrt{2}$,过椭圆焦点F_1作一直线,交椭圆于两点M,N.设$\angle F_2F_1M=\alpha(0\le\alpha<\pi)$.当$\alpha$取什么值时,$|MN|$等于椭圆短轴的长?



八、已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=b(b\ne0)$,它的前n项的和$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n(n\ge1)$,并且$S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$是一个等比数列,其公比为$p(p\ne0$且$|p|<1)$.

(1)证明$a_2,a_3,\cdots,a_n\cdots$,(即$\{a_n\}$从第2项起)是一个等比数列.

(2)设$W_n=a_1S_1+a_2S_2+a_3S_3+\cdots+a_nS_n(n\ge1)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}W_n$(用$b,p$表示).

九、(1)已知a,b为实数,并且$e<a<b$,其中e是自然对数的底,证明$a^b>b^a$.

(2)如果正实数a,b满足$a^b=b^a$,且$a<1$,证明$a=b$.

1983年试题(理工农医类)答案

一、本题考查对一些基本概念和常用的词语的理解.

(1)D; (2)A; (3)D; (4)C; (5)C.

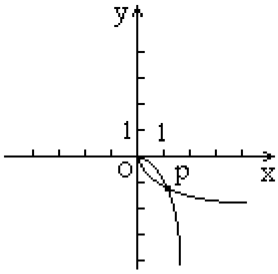
二、本题考查在直角坐标系内和极坐标系内画出图形的能力.

解:(1)图形如右所示.

交点坐标是:

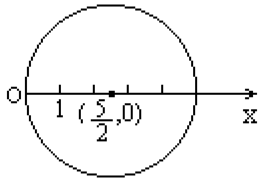
O(0,0),

P(1,-1).



(2)曲线名称是:圆.

图形如下所示.



三、本题考查求初等函数微分的方法和解决简单的排列组合应用题的能力.

(1)解:$dy=(e^{-x}\sin 2x)'dx$

$=[e^{-x}(\sin 2x)'+(e^{-x})'\sin 2x]dx$

$=[e^{-x}\cos 2x(2x)'+e^{-x}(-x)'\sin 2x]dx$

$=(2e^{-x}\cos 2x-e^{-x}\sin 2x)dx$

$=e^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)dx$

(2)解法一:3名代表中有1名女同学、2名男同学的选法的种数是

$C_4^1\cdot C_6^2=60$;3名代表中有2名女同学、1名男同学的选法的种数是

$C_4^2\cdot C_6^1=36$;3名代表都是女同学的选法的种数是$C_4^3=4$.

所以3名代表中至少有1名女同学的选法有

$C_4^1\cdot C_6^2+C_4^2\cdot C_6^1+C_4^3=60+36+4=100$(种).

解法二:10名代表中任选3名代表的选法的种数是$C_{10}^3=120$;

3名代表都是男同学的选法的种数是$C_6^3=20$.

所以3名代表中至少有1名女同学的选法有

$C_{10}^3-C_6^3=120-20=100$(种).

四、本题考查行列式的性质(或定义,或按一列展开)和三角公式的运用.

解法一:把第1列乘以sin? 加到第2列上,再把第3列乘以(-cos?)加到第2列上,得

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos(\alpha+\varphi)+\sin\alpha\sin\varphi-\cos\alpha\cos\varphi & \cos\alpha\\ \cos\beta & \sin(\beta-\varphi)+\cos\beta\sin\varphi-\sin\beta\cos\varphi & \sin\beta\\ \sin\varphi & \cos2\varphi+\sin^2\varphi-\cos^2\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos(\alpha+\varphi)-\cos(\alpha+\varphi) & \cos\alpha\\ \cos\beta & \sin(\beta-\varphi)-\sin(\beta-\varphi) & \sin\beta\\ \sin\varphi & \cos2\varphi-\cos2\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\\ \cos\beta & 0 & \sin\beta\\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{vmatrix}=0$$

解法二：把行列式的第2列用三角公式展开，然后运用行列式的性质，得

$$\text{原式}=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi & \cos\alpha\\ \cos\beta & \sin\beta\cos\varphi-\cos\beta\sin\varphi & \sin\beta\\ \sin\varphi & \cos^2\varphi-\sin^2\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\cos\varphi & \cos\alpha\\ \cos\beta & \sin\beta\cos\varphi & \sin\beta\\ \sin\varphi & \cos\varphi\cos\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\sin\alpha & -\sin\alpha\sin\varphi & \cos\alpha\\ \cos\beta & -\cos\beta\sin\varphi & \sin\beta\\ \sin\varphi & -\sin\varphi\sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}$$

$$=0+0=0$$

解法三：把行列式按第 2 列展开，得

$$\text{原式}=-\cos(\alpha+\varphi)\begin{vmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}+\sin(\beta-\varphi)\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{vmatrix}-\cos2\varphi\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha\\ \cos\beta & \sin\beta\end{vmatrix}$$

$$=-\cos(\alpha+\varphi)(\cos\beta\cos\varphi-\sin\beta\sin\varphi)+\sin(\beta-\varphi)(\sin\alpha\cos\varphi-\cos\alpha\sin\varphi)$$
$$-\cos2\varphi(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=-\cos(\alpha+\varphi)\cos(\beta+\varphi)+\sin(\beta-\varphi)\sin(\alpha-\varphi)+\cos2\varphi\cos(\alpha+\beta)$$
$$=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta+2\varphi)+\cos(\alpha-\beta)]-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta-2\varphi)-\cos(\beta-\alpha)]$$
$$+\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta+2\varphi)+\cos(2\varphi-\alpha-\beta)]=0$$

解法四：把行列式按定义展开，并运用三角公式，得

原式 $=\sin\alpha\sin(\beta-\varphi)\cos\varphi+\cos(\alpha+\varphi)\sin\beta\sin\varphi+\cos\alpha\cos\beta\cos2\varphi$
$-\cos\alpha\sin(\beta-\varphi)\sin\varphi-\cos(\alpha+\varphi)\cos\beta\cos\varphi-\sin\alpha\sin\beta\cos2\varphi$
$=\sin\alpha\cos\varphi(\sin\beta\cos\varphi-\cos\beta\sin\varphi)+(\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\cos\varphi)$
$\sin\beta\sin\varphi+\cos\alpha\cos\beta(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-\cos\alpha\sin\varphi(\sin\beta\cos\varphi$
$-\cos\beta\sin\varphi)-(\cos\alpha\cos\varphi-\sin\alpha\sin\varphi)\cos\beta\cos\varphi-\sin\alpha\sin\beta$
$(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$
$=\sin\alpha\sin\beta\cos^2\varphi-\sin\alpha\,\mathrm{co}\varphi\cos\beta\sin\varphi+\cos\alpha\cos\varphi\sin\beta\sin\varphi$
$-\sin\alpha\sin^2\varphi\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\cos^2\varphi-\cos\alpha\cos\beta\sin^2\varphi-\cos\alpha$
$\sin\varphi\sin\beta\cos\varphi+\cos\alpha\sin^2\varphi\cos\beta-\cos\alpha\cos^2\varphi\cos\beta+\sin\alpha\sin\varphi$
$\cos\beta\cos\varphi-\sin\alpha\sin\beta\cos^2\varphi+\sin\alpha\sin\beta\sin^2\varphi=0.$

五、本题考查复数、不等式和三角函数的基础知识以及运用它们解

题的能力.

(1)证法一:复数$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}\,i$(其中t为实数)的模$r=|z|$为

$$r=\sqrt{(\sqrt{|\cos t|})^2+(\sqrt{|\sin t|})^2}$$
$$=\sqrt{|\cos t|+|\sin t|}$$

要证对任意实数t,有$r\le\sqrt[4]{2}$,只要证对任意实数t,$|\cos t|+|\sin t|\le\sqrt{2}$成立.

对任意实数t,因为$|\cos t|^2+|\sin t|^2=1$,所以可令$\cos\varphi=|\cos t|$,$\sin\varphi=|\sin t|$,于是

$$|\cos t|+|\sin t|=\cos\psi+\sin\psi=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)\le\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}.$$

证法二:同证法一,只要证对任意实数t,$|\cos t|+|\sin t|\le\sqrt{2}$成立.

假定对任意实数t,有 $|\cos t|+|\sin t|\le\sqrt{2}$.

两边平方得 $|\cos t|^2+|\sin t|^2+2|\cos t||\sin t|\le 2$.

用三角公式得 $1+|\sin 2t|\le 2$.

两边减去1得 $|\sin 2t|\le 1$.

因为对任意实数t,$|\sin 2t|\le 1$成立,并且上述推理的每一步都可逆,所以对任意实数t,都有$|\cos t|+|\sin t|\le\sqrt{2}$成立.

证法三:同证法一,只要证对任意实数t,$|\cos t|+|\sin t|\le\sqrt{2}$成立.

当$0\le t\le\frac{\pi}{2}$时,$|\cos t|+|\sin t|=\cos t+\sin t=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\le\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$;

当$\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$时,$|\cos t+|\sin t|=-\cos t+\sin t=\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{4}+t\right)\le\sqrt{2}$;

当$\pi\le t\le\frac{3\pi}{2}$时,$|\cos t|+|\sin t|=-\cos t-\sin t=\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{4}+t\right)\le\sqrt{2}$;

当$\frac{3\pi}{2}\le t\le 2\pi$时,$|\cos t|+|\sin t|=\cos t-\sin t=\sqrt{2}\sin t\left(\frac{3\pi}{4}+t\right)\le\sqrt{2}$.

对任意实数t,可设$t=2k\pi+t_0$,其中k为整数,$0\le t_0<2\pi$,于是

$$|\cos t|+|\sin t|=|\cos(2k\pi+t_0)|+|\sin(2k\pi+t_0|)$$
$$=\cos t_0|+|\sin t_0|\le\sqrt{2}.$$

注:在证法三中,也可以先只讨论$0\le t\le \frac{\pi}{2}$和$\frac{\pi}{2}\le t\le \pi$两种情况,然后对于任意实数t,可设$t=k\pi+t_0$,其中k为整数,$0\le t_0<\pi$,于是

$$\begin{aligned}|\cos t|+|\sin t| &= |\cos(k\pi+t_0)|+|\sin(k\pi+t_0)|\\ &= |\pm\cos t_0|+|\pm\sin t_0|\\ &= |\cos t_0|+|\sin t_0|\le\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(本题附加说明:关于本题中复数z的模r的取值范围,用与上面同样的方法还可以证明:对于任意实数t,复数$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}i$的模$r\ge 1$.因此r的取值范围是$1\le r\le\sqrt[4]{2}$.)

(2)解法一:因为复数$z=\sqrt{|\cos t|}+\sqrt{|\sin t|}i$的实部与虚部都是非负数,所以z的辐角主值θ一定适合$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.从而$0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$ $0\le \mathrm{tg}\,\theta\le 1$.

显然 $r=|z|\ne 0$.因为

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{|\sin t|}}{r}}{\frac{\sqrt{|\cos t|}}{r}}=\frac{\sqrt{|\sin t|}}{\sqrt{|\cos t|}}=\sqrt{|\mathrm{tg}\,t|},$$

所以$0\le \mathrm{tg}\,\theta\le 1\Leftrightarrow 0\le\sqrt{|\mathrm{tg}\,t|}\le 1\Leftrightarrow 0\le|\mathrm{tg}\,t|\le 1\Leftrightarrow -1\le \mathrm{tg}\,t\le 1$.

由于$y=\mathrm{tg}\,t$在$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$内是增函数,并且它的周期是π,因此$-1\le \mathrm{tg}\,t\le 1$的解是

$$k\pi-\frac{\pi}{4}\le t\le k\pi+\frac{\pi}{4}\text{(k为任意整数)}.$$

这就是所求的实数 t 的取值范围.

解法二:同解法一知z的辐角主值θ适合$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

从而 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 1\ge\cos\theta\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$,

即 $0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow\cos\theta\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$.

显然$r=|z|\neq 0$.由于$\cos\theta=\frac{\sqrt{|\cos t|}}{r}$,所以

$$\cos\theta\geq\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{|\cos t|}}{r}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow |\cos t|\geq\frac{1}{2}r^2=\frac{1}{2}(|\cos t|+|\sin t|)$$

$$\Leftrightarrow |\cos t|\geq|\sin t|$$

$$\Leftrightarrow |\mathrm{tg}t|\leq 1$$

(由于$0\leq\theta\ \frac{\pi}{4}$,故$\cos\theta\neq 0$,从而$|\cos t|\neq 0$,所以$|\cos t|\geq|\sin t|\Rightarrow|\mathrm{tg}t|\leq 1$).

以下同解法一的后半部分.

六、本题考查直线、平面之间的位置关系,空间想象能力和逻辑推理能力.

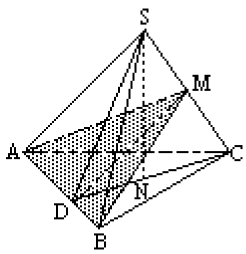
证法一:因为 SN 是底面的垂线,NC 是斜线 SC 在底面上的射影,AB⊥NC,所以 AB⊥SC(据三垂线定理).

连结 DM.因为 AB⊥DC,AB⊥SC,所以 AB 垂直于 DC 和 SC 所决定的平面.又因 DM 在这平面内,所以 AB⊥DM.

∴∠MDC 是截面与底面所成二面角的平面角,∠MDC=∠NSC.

在△MDC 和△NSC 中,因为∠MDC=∠NSC,∠DCS 是公共角,所以∠DMC=∠SNC=90°从而 DM⊥SC.

从 AB⊥SC,DM⊥SC,可知 SC⊥截面 MAB.



证法二:连结 DS,DM(参见证法一中的图).

因为 SN 是底面的垂线,AB⊥DN,所以 AB⊥DS(据三垂线定理).从而 AB⊥平面 SDC.

因 SC,DM 都在平面 SDC 内,故 AB⊥SC,AB⊥DM.

由 AB⊥DM,AB⊥DC,可知∠MDC 是截面与底面所成二面角的平面角,∠MDC=∠NSC.

以下同证法一,故 SC⊥截面 MAB.

证法三:连结 DM,DS.

因为 M,N 分别在△SDC 的两边上,所以 SN 和 DM 都在平面内,且相交于一点 P.

又因 PN 是底面的垂线,AB⊥DN,所以 AB⊥DM(据三垂线定理).

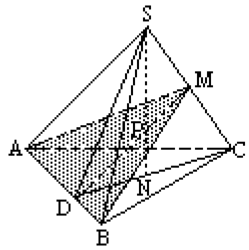
∴∠MDC 是截面与底面所成二面角的平面角,∠MDC=∠NSC.

又∠MDC=∠NSC,∠DCS 是△DCM 和△SCN 的公共角,故∠DMC=∠SNC=90°.

从而 DM⊥SC.

从 AB⊥DM,AB⊥DC,可知 AB⊥平面 MDC.因为 SC 是平面 MDC 内的直线,所以 AB⊥SC.

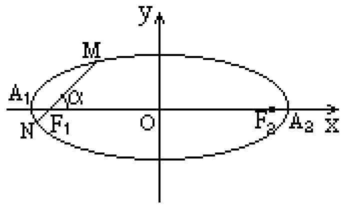
从 AB⊥SC,DM⊥SC,可知 SC⊥截面 MAB.



七、本题考查合理选择坐标系和灵活运用直线、椭圆性质解决问题的能力以及简单三角方程的解法.

解法一:以椭圆焦点 F_1 为极点,以 F_1 为起点并过 F_2 的射线为极轴建立极坐标系.

由已知条件可知椭圆长半轴$a=3$,半焦距$c=2\sqrt{2}$,短半轴$b=1$,离心率$e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,中心到准线距离$=\frac{9\sqrt{2}}{4}$,焦点到准线距离$p=\frac{\sqrt{2}}{4}$.



椭圆的极坐标方程为$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}=\frac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\theta}$.

$$\therefore |F_1M|=\rho_1=\frac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\alpha},\quad |F_1N|=\rho_2=\frac{1}{3+2\sqrt{2}\cos\alpha},$$

$$|MN|=\rho_1+\rho_2=\frac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}+\frac{1}{3+2\sqrt{2}\cos\alpha}=\frac{6}{9-8\cos^2\alpha}.$$

令 $$\frac{6}{9-8\cos^2\alpha}=2,$$

解得 $$\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{\pi}{6}\text{ 或 }\alpha=\frac{5\pi}{6}.$$

以上解方程过程中的每一步都是可逆的,所以当$\alpha=\frac{\pi}{6}$或$\alpha=\frac{5\pi}{6}$时,$|MN|$等于短轴的长.

解法二:以椭圆中心为原点,F_1F_2 所在直线为 x 轴建立直角坐标系(如图).

由已知条件可知椭圆的长半轴$a=3$，半焦距$c=2\sqrt{2}$，短半轴$b=1$，椭圆方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

MN所在直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=-2\sqrt{2}+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\end{cases}(t是参数).$$

解方程组

$$\begin{cases}x=-2\sqrt{2}+t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1,\end{cases}$$

消去x,y,得

$$(\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha)t^2-(4\sqrt{2}\cos\alpha)t-1=0.$$

设t_1,t_2是方程两根,则由韦达定理,$t_1+t_2=\frac{4\sqrt{2}\cos\alpha}{\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha}$,

$t_1\cdot t_2=\frac{-1}{\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha}$.

$$|MN|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$$

$$=\sqrt{(\frac{4\sqrt{2}\cos\alpha}{\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha})^2+\frac{4}{\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha}}=\frac{6}{\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha}$$

以下同解法一.

解法三:以椭圆中心为原点,F_1F_2 所在直线为 x 轴建立直角坐标系(如图).

由已知条件可知,椭圆长半轴$a=3$,半焦距$c=2\sqrt{2}$,短半轴$b=1$,椭圆方程为

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$.

MN所在直线方程为$y=k(x+2\sqrt{2})$(其中$k=\operatorname{tg}\alpha$).

解方程组

$$\begin{cases}\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1,\\ y=k(x+2\sqrt{2}),\end{cases}$$

消去y得

$$(1+9k^2)x^2+36\sqrt{2}k^2x+9(8k^2-1)=0.$$

解得

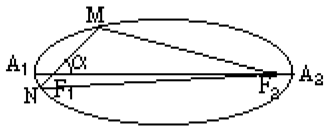
$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-18\sqrt{2}k^2+3\sqrt{1+k^2}}{1+9k^2}, \\ y_1=\dfrac{2\sqrt{2}k+3k\sqrt{1+k^2}}{1+9k^2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-18\sqrt{2}k^2-3\sqrt{1+k^2}}{1+9k^2}, \\ y_1=\dfrac{2\sqrt{2}k-3k\sqrt{1+k^2}}{1+9k^2}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} |MN| &= (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \\ &= \sqrt{\frac{36(1+k^2)+36k^2(1+k^2)}{(1+9K^2)^2}} \\ &= \frac{6+6k^2}{1+9k^2} \\ &= \frac{6+6tg^2\alpha}{1+9tg^2\alpha}. \end{aligned}$$

以下同解法一.

解法四:



设 $|F_1M|=x$,则 $|F_2M|=6-x$.

$|F_1F_2|=4\sqrt{2}, \angle F_2F_1M=\alpha$.

在$\triangle MF_1F_2$中,由余弦定理得$(6-x)^2=x^2+(4\sqrt{2})^2-8\sqrt{2}x\cos\alpha$,

$2\sqrt{2}x\cos\alpha-3x+1=0, x=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}$.

同理,设$|F_1N|=y$,则$|F_2N|=6-y$.

在$\triangle F_1F_2N$中,由余弦定理得$(6-y)^2=y^2+(4\sqrt{2})^2-8\sqrt{2}y\cos(\pi-\alpha)$.

$3y+2\sqrt{2}y\cos\alpha=1, y=\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}\cos\alpha}$,

$|MN|=\dfrac{1}{3-2\sqrt{2}\cos\alpha}+\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}\cos\alpha}=\dfrac{6}{9-8\cos^2\alpha}$.

以下同解法一.

八、本题考查数列的基础知识和极限的计算方法.

(1)证明:由已知条件得 $S_1=a_1=b$.

$$S_n=S_1p^{n-1}=bp^{n-1}>(n\geq 1).$$

因为当 $n\geq 2$ 时,$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n$,所以 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $=bp^{n-1}-bp^{n-2}=bP^{n-2}(p-1)(n\geq 2)$.

从而 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{bp^{n-1}(p-1)}{bp^{n-2}(p-1)}=p(n\geq 2)$,

因此 $a_2,a_3\cdots,a_n,\cdots$是一个公比为 p 的等比数列.

(2)解法一:当 $n\geq 2$ 时,

$$\frac{a_{n+1}S_{n+1}}{a_nS_n}=\frac{bp^{n-1}(p-1)bp^n}{bp^{n-2}(p-1)bp^{n-1}}=p^2,$$

且由已知条件可知 $P^2<1$,因此数列

$$a_2S_2,a_3S_3,\cdots,a_nS_n,\cdots$$

是公比为$P^2<1$的无穷等比数列.于是

$$\lim_{n\to\infty}(a_2S_2+a_3S_3+\cdots+a_nS_n)=\frac{a_2S_2}{1-p^2}=\frac{b^2(p-1)p}{1-p^2}=-\frac{b^2p}{1+p}.$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}W_n&=\lim_{n\to\infty}(a_1S_1+a_2S_2+a_3S_3+\cdots+a_nS_n)\\&=\lim_{n\to\infty}a_1S_1+\lim_{n\to\infty}(a_2S_2+a_3S_3+\cdots+a_nS_n)\\&=b^2-\frac{b^2p}{1+p}=\frac{b^2}{1+p}.\end{aligned}$$

解法二:先同解法一,确定数列$a_2S_2,alS_3,\cdots,a_nS_n,\cdots$,是公比为$P^2<1$的无穷等比数列.

于是

$$\begin{aligned}W_n&=a_1S_1+a_2S_2+a_3S_3+\cdots+a_nS_n\\&=b^2+\frac{a_2S_2[1-(p^2)^{n-1}]}{1-p^2}\\&=b^2+\frac{b^2(p-1)p(1-p^{2n-2})}{1-p^2}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}W_n&=b^2+\frac{b^2(p-1)p}{1-p^2}(1-\lim_{n\to\infty}p^{2n-2})\\&=b^2-\frac{b^2p}{1+p}(1-0)\\&=\frac{b^2}{1+p}.\end{aligned}$$

解法三:$W_n=a_1S_1+a_2S_2+a_3S_3+a_4S_4+\cdots+a_nS_n$

$=b^2+b(p-1)bp+bp(p-1)bP^2+bP^2(p-1)bP^3+\cdots+bP^{n-2}(p-1)bP^{n-1}$

$=b^2+b^2(p-1)p[1+P^2+P^4+\cdots+P^{2(n-2)}]$.

由于$a_nS_n=bP^{n-2/}(p-1)bP^{n-1}=b^2(p-1)pp^{2(n-2)}(n\geq 2)$,所以$\{a_nS_n\}(n\geq 2)$的每一项除以$b^2(p-1)p$后所得的数列$1,P^2,P^4,\cdots,P^{2(n-2)},\cdots$是公比为$P^2<1$的无穷等比数列.于是

$$\lim_{n\to\infty}[1+P^2+P^4+\cdots+P^{2(2n-2)}]=\frac{1}{1-p^2}$$

从而 $\lim_{n\to\infty}W_n=b^2+b^2(p-1)p\lim_{n\to\infty}[1+P^2+P^4+\cdots+P^{2(n-2)}]$

$$=b^2+b^2(p-1)\cdot p\cdot\frac{1}{1-p^2}=\frac{b^2}{1+p}.$$

九、本题考查对函数概念的理解,对幂函数、指数函数和对数函数性质的运用及利用导数判断函数增减性从而比较函数值大小的方法.

(1) **证法一:当**$e<a<b$**时,要证**$a^b>b^a$,**只要证**$b\ln a>a\ln b$,**即只要证**

$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$.

考虑函数$y=\frac{\ln x}{x}(0<x<+\infty)$.**因为当**$x>e$**时,**

$$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}<0,$$

所以函数$y=\frac{\ln x}{x}$**在**$(e,+\infty)$**内是减函数.**

因为$e<a<b$,**所以**$\frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$,**即得**$a^b>b^a$.

证法二:同证法一,考虑函数$y=f(x)=\frac{\ln x}{x}$,**它的导数是**

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(0<x<+\infty).$$

在[a,b]上对 f(x)运用中值定理,得

$$\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}=f'(\xi)(b-a)=\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}(b-a),$$

其中$\xi\in(a,b)$.**因为**$e<a<b$,**所以**$\xi>e$,**从而**

$$\frac{1-\ln\xi}{\xi^2}<0.$$

于是$\frac{\ln b}{b}-\frac{\ln a}{a}<0$,**由此得**$a^b>b^a$.

(2) **证法一:由**$a^b=b^a$,**得**$b\ln a=\ln b b$,**从而**

$$\frac{\ln a}{a}=\frac{\ln b}{b}.$$

考虑函数$f(x)=\frac{\ln x}{x}>(0<x<+\infty)$,**它的导数是**

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

因为在(0,1)内 f'(x)>0,所以 f(x)在(0,1)内是增函数.

由于$0 < a < 1, b > 0$,所以$a^b < 1$,从而$b^a = a^b < 1$.由$b^a < 1$及$a > 0$,可推出$b < 1$.

由$0 < a < 1, 0 < b < 1$,假如$a \neq b$,则根据$f(x)$在$(0,1)$内是增函数,得$f(a) \neq f(b)$,即$\frac{\ln a}{a} \neq \frac{\ln b}{b}$,从而$a^b \neq b^a$,这与$a^b = b^a$矛盾.所以$a = b$.

证法二:同证法一,证得函数$y = f(x) = \frac{\ln x}{x}$在$(0,1)$内是增函数.

因此在$0 < x < 1$内,$y = f(x)$存在反函数$x = f^{-1}(y)$.

同证法一,证得 b<1.

因为a,b在$(0,1)$内,且$f(a) = \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} = f(b)$,设$y_0 = f(a) = f(b)$,则$a = f^{-1}(y_0) = b$

证法三:因为$0 < a < 1, a^b = b^a$,所以$b\log_a a = a\log_a b$,即$\frac{b}{a} = \log_a b$.

假如$a < b$,则$\frac{b}{a} > 1$,但因$a < 1$,根据对数函数的性质,得$\log_a b < \log_a a = 1$,从而$\frac{b}{a} > \log_a b$,这与$\frac{b}{a} = \log_a b$矛盾.所以a不能小于b.

假如$a > b$,则$\frac{b}{a} < 1$,而$\log_a b > 1$,这也与$\frac{b}{a} = \log_a b$矛盾.所以a不能大于b.

因此 a=b.

证法四:假如$a < b$,则可设$b = a + \varepsilon$,其中$\varepsilon > 0$.由于$0 < a < 1$, $\varepsilon > 0$,根据幂函数或指数函数的性质,得$a^{\varepsilon} < 1$和$(1 + \frac{\varepsilon}{a})^a > 1$,所以

$$a^{\varepsilon} < (1 + \frac{\varepsilon}{a})^a,$$

$$a^a a^{\varepsilon} < a^a (1 + \frac{\varepsilon}{a})^a,$$

$$a^{a+\varepsilon} < (a + \varepsilon)^a,$$

即$a^b < b^a$.这与$a^b = b^a$矛盾.所以a不能小于b.

假如$b < a$,则$b < a < 1$,可设$a = b + \varepsilon$,其中$\varepsilon > 0$,同上可证得$b^a < a^b$.这与$a^b = b^a$矛盾.所以a不能大于b.

因此 a=b.

(本题附加说明:第(2)小题中,如果不限制a的取值范围,情况就比较复杂一般地说,满足$a^b = b^a$的正实数a, b可能不相等.例如$a = 2, b = 4$,或$a = (1 + \frac{1}{n})^n, b = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$等.)

1983年试题 (文史类)

一、本题共有5个小题,每一个小题都给出代号为A,B,C,D的四个结论,其中只有一个结论是正确的.把正确结论的代号写在题后的括号内.

(1)在直角坐标系内,函数 $y=|x|$ 的图象

(A)关于坐标轴、原点都不对称. (B)关于原点对称.

(C)关于x轴对称. (D)关于y轴对称.

【 】

(2)抛物线 $x^2+y=0$ 的焦点位于

(A)y轴的负半轴上. (B)y轴的正半轴上.

(D)x轴的负半轴上. (D)x轴的正半轴上.

【 】

(3)两条异面直线,就是指

(A)在空间内不相交的两条直线.

(B)分别位于两个不同平面内的两条直线.

(C)某一平面内的一条直线和这个平面外的一条直线.

(D)不在同一平面内的两条直线.

【 】

(4)对任何 $180° < \alpha < 360°$, $\cos\frac{a}{2}$ 的值等于

(A) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$. (B) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

(C) $-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$. (D) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.

【 】

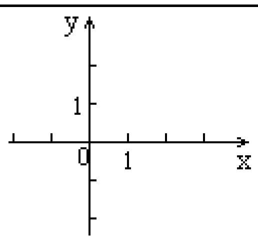
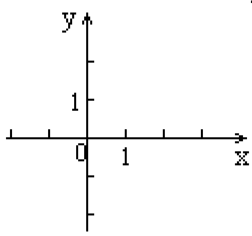
(5) 0.3^2, $\log_2 0.3$, $2^{0.3}$ 这三个数之间的大小顺序是

(A) $0.3^2<2^{0.3}<\log_2 0.3$. (B) $0.3^2<\log_2 0.3<2^{0.3}$.

(C) $\log_2 0.3<0.3^2<2^{0.3}$. (D) $\log_2 0.3<2^{0.3}<0.3^2$.

【 】

二、在平面直角坐标系内,表中的方程表示什么图形?画出这些图形.

方 程	$x^2+y^2=2x$	$x^2-y^2=0$
图形名称		
图 形		

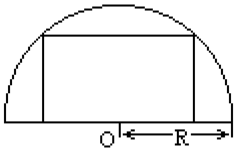
三、(1)求函数 $y=\sqrt{x+5}\ \log_2(36-x^2)$ 的定义域.

(2)一个小组共有10名同学,其中4名是女同学,6名是男同学.要从小

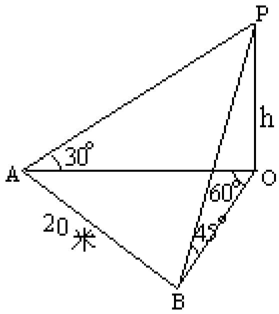
组内选出 3 名代表,其中至少有 1 名女同学,求一共有多少种选法.

四、已知复数$z=\cos a+i\sin a$,求证$z^3+\frac{1}{z^3}=2\cos 3a$.

五、在圆心为 O、半径为常数 R 的半圆板内画内接矩形(如图).当矩形的长和宽各取多少时,矩形的面积最大?求出这个最大面积.

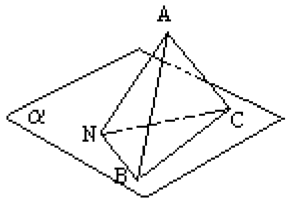


六、如图,地平面上有一旗杆 OP,为了测得它的高度 h,在地面上选一基线 AB,AB=20 米,在 A 点处测得 P 点的仰角∠OAP=30°,在 B 点处测得 P 点的仰角∠OBP=45°,又测得∠AOB=60°,求旗杆的高度 h(结果可以保留根号).



七、如图,已知一块直角三角形板 ABC 的 BC 边在平面α内,∠ABC=60°,∠ACB=30°,BC=24cm,A 点在平面α内的射影为 N,AN=9cm.求以 A 为顶点的三棱锥 A－NBC 的体积(结果可以保留根号).

八、一个等比数列有三项.如果把第二项加上 4,那么所得的三项就成为等差数列;如果再把这等差数列的第三项加上 32,那么所得的三项又成为等比数列.求原来的等比数列.

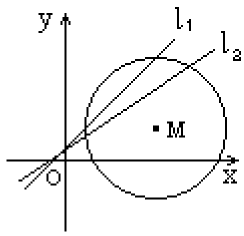


九、如图,已知两条直线

l_1:2x-3y+2=0,

l_2:3x-2y+3=0.

有一动圆(圆心和半径都在变动)与 l_1,l_2 都相交,并且 l_1,l_2 被截在圆内的两条线段的长度分别是定值 26,24.求圆心 M 的轨迹方程,并说出轨迹的名称.



y
l_1
l_2
M
O
x

1983年试题(文史类)答案

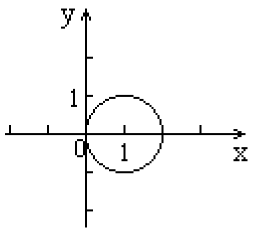
一、本题考查对一些基本概念的理解.

(1)D;　　(2)A;　　(3)D;　　(4)C;　　(5)C.

本题考查识别方程表示什么图形和画出图形的能力.

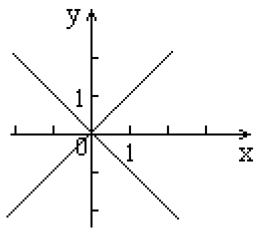
解:(1)图形名称:圆.

图形:如下所示.



(2)图形名称:两条相交直线.

图形:如下图所示.



三、本题考查函数定义域的求法和排列组合应用题的解题能力.

解:(1)根据题意,得

$$\begin{cases} x+5\geq 0, \\ 36-x2>0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x\geq -5, \\ -6<x<6 \end{cases}$$

解得

$$-5\leq x<6.$$

∴函数的定义域是[-5,6).

(2)解法一:3名代表中有1名女同学、2名男同学的选法的种数是

$C_4^1\cdot C_6^2=60$;

3名代表中有2名女同学、1名男同学的选法的种数是

$C_4^2\cdot C_6^1=36$;

3名代表都是女同学的选法的种数是 $C_4^3=4$.

所以3名代表中至少有1名女同学的选法有

$$C_4^1\cdot C_6^2+C_4^2\cdot C_6^1+C_4^3=60+36+4=100 \text{ (种)}.$$

解法二:10名同学中任选3名代表的选法的种数是$C_{10}^3=120$;

3名代表都是男同学的选法的种数是 $C_6^3=20$.

所以3名代表中至少有1名女同学的选法有

$$C_{10}^3-C_6^3=120-20=100 \text{ (种)}.$$

四、本题考查复数的运算及棣莫佛定理的运用.

证法一:$z3+\dfrac{1}{z^3}=z3+z-3$

$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3+(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{-3}$
$=\cos3\alpha+i\sin3\alpha+\cos(-3\alpha)+i\sin(-3\alpha)$
$=2\cos3\alpha$

证法二: $z3+\frac{1}{z^3}=(\cos a+i\sin a)+\frac{1}{(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3}$

$=\cos3a+i\sin3a+\frac{1}{\cos3\alpha+i\sin3\alpha}$

$=\cos3\alpha+i\sin3\alpha+\frac{\cos3\alpha-i\sin3\alpha}{(\cos3\alpha+i\sin3\alpha)(\cos3\alpha-i\sin3\alpha)}$

$=\cos3\alpha+i\sin3a+\frac{\cos3\alpha-i\sin3\alpha}{\cos^2 3\alpha+\sin^2 3\alpha}$

证法三: $z^3+\frac{1}{z^3}=(z+\ )3-3(z+\frac{1}{z})$

$=2\cos3\alpha$.
$=8\cos^3\alpha-6\cos\alpha$
$=2(4\cos^3\alpha-3\cos\alpha)$
$=2\cos3\alpha$.

五、本题考查利用已知条件列函数式、用配方法或利用三角函数求极值的能力.

解法一:如图,设矩形在半圆板直径上的一边的长为$2x$,矩形的另一边的长为$\sqrt{R^2-x^2}$.矩形面积S为

$$S=2x\sqrt{R^2-x^2}.$$

配方得

$$S=2\sqrt{R^2x^2-x^4}=2\sqrt{\frac{R^4}{4}-(R44-R^2x^2+x^4)}$$

$$=2\sqrt{\frac{R^4}{4}-(x^2-\frac{R^2}{2})^2}.$$

当$x^2=\frac{R^2}{2}$ 或

$$X=\frac{R}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}R,\sqrt{R^3-X^2}=\frac{R}{\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2}R$$

时,矩形面积S为最大,即长为 $\sqrt2R$,宽为$\frac{\sqrt2}{2}R$时,矩形面积S为最大.

最大面积是 $\sqrt2R\cdot\frac{\sqrt2}{2}R=R^2$.

解法二:如图,设矩形在半圆板直径上的一边的长为2x,α角如图所示,则$x=R\cos\alpha$,另一边的长为$R\sin\alpha$.矩形面积S为
$S=2R^2\sin\alpha\cos\alpha$.
用三角公式得$S=R^2\sin2\alpha$.

当$2a=\frac{\pi}{2}$ 或$a=\frac{\pi}{4}$,即长为$2R\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$,宽为$R\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}R$时,

矩形面积 S 为最大.

最大面积是 R^2.

六、本题考查利用三角函数直角三角形和斜三角形的方法.

解:在直角三角形 AOP 中,得

$$OA=OP\operatorname{ctg}30°=\sqrt{3}h.$$

在直角三角形 BOP 中,得

$$OB=OP\operatorname{ctg}45°=h.$$

在三角形 AOB 中,由余弦定理

AB2=OA2+OB2UP>-2OA·OBcos∠AOB,

得

$$20^2=(\sqrt{3}h)^2+h^2-2(\sqrt{3}h)\cdot h\cdot\cos60°,$$

$$400=3h^2+h^2-2\sqrt{3}h^2\cdot\frac{1}{2},$$

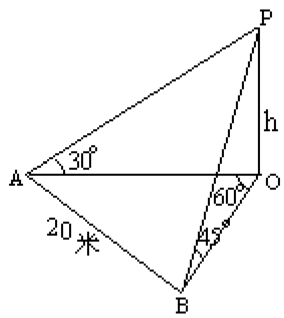
$$400=(4-\sqrt{3})h^2,$$

$$h^2=\frac{400}{4-\sqrt{3}},$$

即

$$h=\frac{20}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}(米).$$

答:旗杆的高度h是 $\frac{20}{\sqrt{4-\sqrt{3}}}$米 (或$\frac{20}{13}\sqrt{13(4+\sqrt{3})}$米)



七、本题考查立体几何的基础知识和空间想象能力.

解:自 N 作 NE⊥BC,E 为垂足.连 AE.由三垂线定理可知 AE⊥BC.

在直角三角形 ABC 中,

$$AE=BC\cdot\sin30°\cdot\sin60°=6\sqrt{3}.$$

在直角三角形 ANE 中,

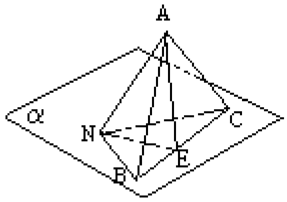
$$NE=\sqrt{AE^2-AN^2}=3\sqrt{3}$$

△NBC的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot NE=36\sqrt{3}.$

三棱锥 A-NBC 的体积

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot AN = 108\sqrt{3}\,(cm3).$$

答:三棱锥$A-NBC$的体积是$108\sqrt{3}cm^3$.



八、本题考查等差、等比数列的基础知识和解方程组的能力.

解法一:设所求等比数列为 a,aq,aq^2,由已知条件得

$$\begin{cases}(aq+4)=a+aq^2,\\(aq+4)^2=a(aq^2+32).\end{cases}$$

化简方程组得

$$\begin{cases}a(q^2-2q+1)=8,\\a(q-4)=-2.\end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases}a=2,\\q=3\end{cases}; \quad 或 \quad \begin{cases}a=\frac{2}{9},\\q=-5.\end{cases}$$

由 a=2,q=3,得所求等比数列是 2,6,18;

由$a=\frac{2}{9}$,$q=-5$,得所求等比数列是$\frac{2}{9}$, $-\frac{10}{9}$,$\frac{50}{9}$.

经检验均正确,故所求等比数列是2,6,18或$\frac{2}{9}$,$-\frac{10}{9}$,$\frac{50}{9}$.

解法二:设所求等比数列第二项加上 4 以后所成的等差数列为 a-d,a,a+d,由已知条件得

$$\begin{cases}(a-4)^2=(a-d)(a+d),\\a2=(a-d)(a+d+32).\end{cases}$$

化简方程组得

$$\begin{cases}d^2-8a+16=0,\\d^2+32d-32a=0.\end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases}d=8,\\d=10\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}d=\frac{8}{3}\\a=\frac{26}{9}\end{cases}$$

由 d=8,a=10,得所求等比数列为 2,6,18;

由$d=\frac{8}{3}, a=\frac{26}{9}$,得所求等比数列为$\frac{2}{9}$,$-\frac{10}{9}$,$\frac{50}{9}$.

经检验均正确,故所求等比数列是2,6,18或$\frac{2}{9},-\frac{10}{9},\frac{50}{9}$.

解法三：设所求等比数列为 a,b,c,由已知条件得

$$\begin{cases} b^2 = ac, \\ 2(b+4) = a+c, \\ (b+4)^2 = a(32+c). \end{cases}$$

由第一个方程得$c = \dfrac{b^2}{a}$,代入第二、第三个方程并化简得

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab - 8a = 0, \\ 4a - b - 2 = 0. \end{cases}$$

解方程得

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = 6, \\ c = 18; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a = \dfrac{2}{9}, \\ b = -\dfrac{10}{9}, \\ c = \dfrac{50}{9}. \end{cases}$$

经检验均正确,故所求等比数列是2,6,18或 $\frac{2}{9}$，- $\frac{10}{9}$，$\frac{50}{9}$.

解法四: 设所求等比数列为 $\frac{a}{q}$,a,aq, 由已知条件得

$$\begin{cases} 2(a+4) = \dfrac{a}{q} + aq, \\ \dfrac{a}{q}(32 + aq) = (a+4)^2. \end{cases}$$

化简方程组得

$$\begin{cases} aq^2 - 2aq + a - 89 = 0, \\ 4a - aq - 2q = 0. \end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases} q = 3, \\ a = 6; \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} q = -5, \\ a = -\dfrac{10}{9} \end{cases}$$

由 q=3,a=6,得所求等比数列为 2,6,18.

由$q = -5, a =- \frac{10}{9}$，得所求等比数列为 $\frac{2}{9}$，- $\frac{10}{9}$，$\frac{50}{9}$.

经检验均正确,故所求等比数列是2,6,18或 $\frac{2}{9}$，- $\frac{10}{9}$，$\frac{50}{9}$.

九、本题考查根据已知条件求轨迹方程和识别方程所表示的图形的能力.

解: 设圆心M的坐标为(x, y),圆的半径为r,点M到l_1, l_2的距离分别为$d_1 d_2$.

根据弦、弦心距、半径三者间的关系,有

$$d_1^2 + (\frac{26}{2})^2 = r^2$$

$$d_2^2+(\frac{26}{2})^2=r^2$$

可得 $d_1^2+13^2=d_2^2+12^2,$

即 $d_2^2-d_1^2=5^2.$

根据点到直线的距离公式,得

$$d_1\frac{d_1=|2x-3y+2|}{\sqrt{13}},\frac{d_2=|3x-2y+3|}{\sqrt{13}}$$

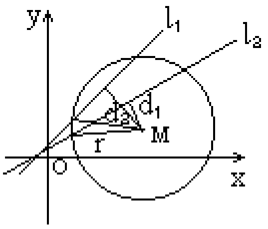
代入上式,得方程

$$\left(\frac{3x-2y+3}{\sqrt{13}}\right)^2-\left(\frac{-2x-3y+2}{\sqrt{13}}\right)^2=5^2$$

化简,**得** $x^2+2x+1-y^2=65,$

或 $$\frac{(x+1)^2}{65}-\frac{y^2}{65}=1.$$

轨迹是双曲线.



1984年试题

(理工农医类)

一、本题每一个小题都给出代号为A,B,C,D的四个结论,其中只有一个结论是正确的,把正确结论的代号写在题后的括号内.

(1)数集X={(2n+1)π,n是整数}与数集Y={(4k±1)π,k是整数}之间的关系是

(A)$X\subset Y$　　(B)$X\supset Y$

(C)X=Y　　(D)X≠Y

【　　】

(2)如果圆$x^2+y^2+Gx+Ey+F=0$与x轴相切于原点,那么

(A)F=0,G≠0,E≠0　　(B)E=0,F=0,G≠0

(C)G=0,F=0,E≠0　　(D)G=0,E=0,F≠0

【　　】

(3)如果n是正整数,那么$\frac{1}{8}[1-(-1)^n](n^2-1)$的值

(A)一定是零　　(B)一定是偶数

(C)是整数但不一定是偶数　(D)不一定是整数

【　　】

(4)arccos(-x)大于arccosx的充要条件是

(A)x∈(0,1]　　(B)x∈(-1,0)

(C)x∈[0,1]　　(D)$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$

【　　】

(5)如果θ是第二象限角,且满足$\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin\theta}$,那么$\frac{\theta}{2}$

(A)是第一象限角

(B)是第三象限角

(C)可能是第一象限角,也可能是第三象限角

(D)是第二象限角

【　　】

二、只要求直接写出结果.

(1)已知圆柱的侧面展开图是边长为2与4的矩形,求圆柱的体积.

(2)函数$\log_{0.5}(x^2+4x+4)$在什么区间上是增函数?

(3)求方程$(\sin x+\cos x)^2=\frac{1}{2}$的解集.

(4)求$(|x|+\frac{1}{|x|}-2)^3$的展开式中的常数项.

(5)求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-2^n}{3^n+1}$的值.

(6)要排一张有6个歌唱节目和4个舞蹈节目的演出节目单,任何两个舞蹈节目不得相邻,问有多少种不同的排法(只要求写出式子,不必计算).

三、本题只要求画出图形.

(1)设$H(x)=\begin{cases}0, 当x\le 0,\\ 1, 当x>0,\end{cases}$画出函数$y=H(x-1)$的图象.

(2)画出极坐标方程$(\rho-2)(\theta-\frac{\pi}{4})=0(\rho>0)$的曲线.

四、已知三个平面两两相交,有三条交线.求证这三条交线交于一点或互相平行.

五、设c,d,x为实数,$c\ne 0$,x为未知数.讨论方程$\log_{(cx+\frac{d}{x})}x=-1$在什么情形下有解.有解时求出它的解.

六、(1)设$p\ne 0$,实系数一元二次方程$z^2-2pz+q=0$有两个虚数根z_1,z_2.再设z_1,z_2在复平面内的对应点是z_1,z_2.求以z_1,z_2为焦点且经过原点的椭圆的长轴的长.

(2)求经过定点$M(1,2)$,以y轴为准线,离心率为$\frac{1}{2}$的椭圆的左顶点的轨迹方程.

七、在△ABC中,$\angle A,\angle B,\angle C$所对的边分别为$a,b,c$,且$c=10$,$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$,P为△ABC的内切圆上的动点.求点P到顶点A,B,C的距离的平方和的最大值与最小值.

八、设$a>2$,给定数列$\{x_n\}$,其中$x_1=\alpha$,$x_{n+1}=\frac{x_n^2}{2(x_n-1)}(n=1,2,\cdots)$.求证:

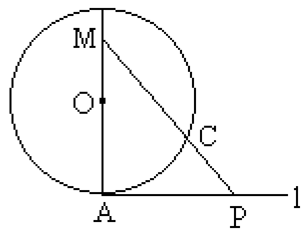
(1)$x_n>2$,且$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1(n=1,2,\cdots)$;

(2)如果$\alpha\le 3$,那么$x_n\le 2+\frac{1}{2^{n-1}}(n=1,2,\cdots)$;

(3)如果$\alpha>3$,那么当$n\ge\frac{\lg\frac{a}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$时,必有$x_{n+1}<3$.

九、附加题,不计入总分.

如图,已知圆心为O、半径为1的圆与直线l相切于点A,一动点P自切点A沿直线l向右移动时,取弧$\overset{\frown}{AC}$的长为$\frac{2}{3}AP$,直线PC与直线AO交于点M.又知当$AP=\frac{3}{4}\pi$时,点P的速度为v.求这时点M的速度.



1984年试题(理工农医类)答案

一、本题考查基本概念和基本运算.

(1)C;　(2)C;　(3)B;　(4)A;　(5)B.

二、本题考查基础知识和基本运算,只需直接写出结果.

(1) $\frac{4}{\pi}$ 或 $\frac{8}{\pi}$;

(2)$x<-2$;

(3)$\{x: x=\frac{7\pi}{12}+n\pi, n\in J\}\cup\{x: x=-\frac{\pi}{12}+n\pi, n\in J\}$;

(4)-20;

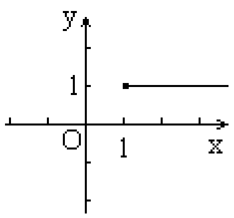
(5)0;

(6)$P_7^4\cdot 6!$.

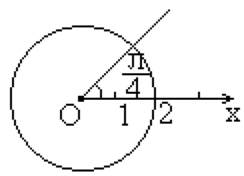
三、本题考查在直角坐标系和极坐标系内画出图形的能力.

解:

(1)



(2)



四、本题考查直线、平面之间的位置关系,空间想象能力和逻辑推理能力.

证明:设三个平面为α,β,γ,且$\alpha\cap\beta=c$,$\alpha\cap\gamma=b$,$\beta\cap\gamma=a$.

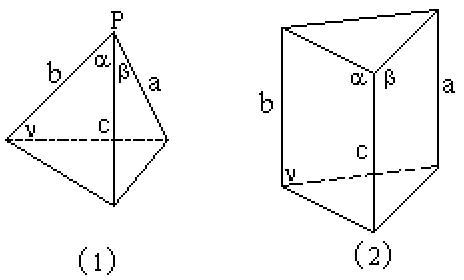
∵　$\alpha\cap\beta=c$,　$\alpha\cap\gamma=b$,

∴　$c\subset\alpha$,　$b\subset\alpha$.

从而c与b或交于一点或互相平行.

(1)若c与b交于一点,设$c\cap b=P$.由$P\in c$,且$c\subset\beta$,有$P\in\beta$;又由$P\in b$,且$b\subset\gamma$,有$P\in\gamma$.于是$P\in\beta\cap\gamma=a$.

所以a,b,c交于一点(即P点).



(1)　(2)

(2)若$c/\!/b$,则由$b\subset\gamma$,有$c/\!/\gamma$.又由$c\subset\beta$,且$\beta\cap\gamma=a$,可知$c/\!/a$.

所以 a,b,c 互相平行.

五、本题考查对数函数的基本概念、对数方程的解法和分析问题的能力.

解法一:由原对数方程得

$$(cx+\frac{d}{x})^{-1}=x\ \ (x>0),$$

∴

$$x(cx+\frac{d}{x})=1,$$

$$cx^2+d=1.$$

由$c\neq 0$,可得$x^2=\frac{1-d}{c}$.

因为x为正实数,所以$\frac{1-d}{c}>0$.

这个不等式仅在以下两种情形下成立:

①c>0,1-d>0,即 c>0,d<1;

②c<0,1-d<0,即 c<0,d>1.

再由底数$cx+\frac{d}{x}\neq 1$及$x(cx+\frac{d}{x})=1$知$x\neq 1$,又由真数$x>0$及$x^2=\frac{1-d}{c}$,得$c\neq 1-d$.

从而,当$c>0,d<1$且$c\neq 1-d$时,或者当$c<0,d>1$且$c\neq 1-d$时,如原方程有解,它的解都是$x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$.

把$x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$代入$\log_{(cx+\frac{d}{x})}x=-1$中验算,可知$x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$确是原方程的解.

解法二:原对数方程有解的充要条件是:

(1)x>0,

$(2)cx+\frac{d}{x}>0$,

$(3)cx+\frac{d}{x}\neq 1$,

$(4)(cx+\frac{d}{x})^{-1}=x$.

由条件(4)知$x(cx+\frac{d}{x})=1$,所以

$$cx^2+d=1.$$

再由$c\neq 0$,可得$x^2=\frac{1-d}{c}$.

又由$x(cx+\frac{d}{x})=1$及$x>0$,知$cx+\frac{d}{x}>0$,即条件(2)包含在条件(1)及(4)中.

再由条件(3)及$x(cx+\frac{d}{x})=1$,知$x\neq 1$.

因此,条件组(1)~(4)可简化为以下的等价条件组:

(1)$x>0$,

(5)$x\neq 1$,

(6)$x^2=\frac{1-d}{c}$.

由条件(1),(6)知$\frac{1-d}{c}>0$.

这个不等式仅在以下两种情形下成立:

①$c>0,1-d>0$,即$c>0,d<1$;

②$c<0,1-d<0$,即$c<0,d>1$.

再由条件(1),(5)及(6),可知$c\neq 1-d$.

以下同解法一,知$x=\sqrt{\frac{1-d}{c}}$是原方程的解(不必验根).

六、本题考查复数的概念、复数的几何意义、椭圆的基础知识和轨迹方程的求法.

(1)解法一:因为p,q为实数,$p\neq 0$,z_1,z_2为虚数,所以

$$(-2p)^2-4q<0,q>p^2>0.$$

由z_1,z_2为共轭虚数,知z_1,z_2关于x轴对称,所以椭圆短轴在x轴上.又由椭圆经过原点,可知原点为椭圆短轴的一个端点.

根据椭圆的性质,复数加、减法几何意义及一元二次方程根与系数的关系,可得椭圆的

短轴长$=2b=|z_1+z_2|=|2p|=2|p|$,

$$焦距=2c=|z_1-z_2|=\sqrt{|(z_1+z_2)^2-4z_1z_2|}$$
$$=2\sqrt{q-p^2},$$

$$长轴长=2a=2\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{q}.$$

解法二:同解法一,得$q>p^2>0$.

根据实系数一元二次方程的求根公式,得

$$z_{1,2}=\frac{2p\pm\sqrt{4q-(-2p)^2}i}{2}=p\pm\sqrt{q-p^2}i,$$

可知z_1,z_2关于x轴对称,所以椭圆短轴在x轴上.又由椭圆经过原点,可知原点为椭圆短轴的一个端点.

根据椭圆的性质和复数的几何意义,可得椭圆的

$$短轴长=2b=2|p|,$$

$$焦距=2c=2\sqrt{q-p^2},$$

$$长轴长=2a=2\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{q}..$$

注:也可利用椭圆长半轴的长等于短轴上的顶点到焦点的距离,直接得出

$$长轴长=2|z_1|=2\sqrt{q}.$$

(2)解:因为椭圆经过点$M(1,2)$,且以y轴为准线,所以椭圆在y轴右侧,长轴平行于x轴.

设椭圆左顶点为$A(x,y)$,因为椭圆的离心率为$\frac{1}{2}$,所以左顶点A到左焦点F的距离为A到y轴的距离的$\frac{1}{2}$,从而左焦点F的坐标为$(\frac{3x}{2},y)$.

设d为点M到y轴的距离,则$d=1$.根据$\frac{|MF|}{d}=\frac{1}{2}$及两点间距离公式,可知

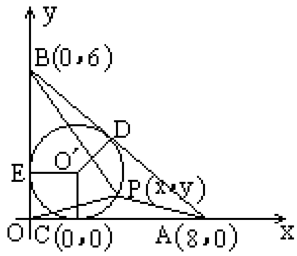
$$(\frac{3}{2}x-1)^2+(y-2)^2=(\frac{1}{2})^2,$$

即

$$9(x-\frac{2}{3})^2+4(y-2)^2=1.$$

这就是所求的轨迹方程.

七、本题考查解三角形和用坐标法解几何问题的能力.



解法一:由$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{b}{a}$,运用正弦定理,有

$$\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{\sin B}{\sin A},$$

∴ $$\sin A\cos A=\sin B\cos B$$

$$\sin 2A=\sin 2B.$$

因为$A\neq B$,所以$2A=\pi-2B$,即$A+B=\frac{\pi}{2}$.由此可知△ABC是直角三角形.

由$c=10,\frac{b}{a}=\frac{4}{3},a^2+b^2=c^2$以及$a>0,b>0$,可得

$$a=6,b=8.$$

如图,设△ABC的内切圆圆心为O′,切点分别为D,E,F,则

$$AD+DB+EC$$

$$=\frac{1}{2}(10+8+6)=12.$$

但上式中$AD+DB=c=10$, 所以内切圆半径$r=EC=2$.

如图建立坐标系,则内切圆方程为

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

设圆上动点P的坐标为(x,y),则

$$\begin{aligned}S &= |PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\\ &= (x-8)^2+y^2+x^2+(y-6)^2+x^2+y^2\\ &= 3x^2+3y^2-16x-12y+100\\ &= 3[(x-2)^2+(y-2)^2]-4x+76\\ &= 3\times 4-4x+76\\ &= 88-4x.\end{aligned}$$

因为 P 点在内切圆上,所以 $0\le x\le 4$.于是

$$S_{最大值}=88-0=88,$$

$$S_{最小值}=88-16=72.$$

解法二:同解法一,得△ABC 是直角三角形,且 r=2.

内切圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=2+2\cos\alpha,\\ y=2+2\sin\alpha\end{cases}\ (0\le\alpha\le 2\pi),$$

所以圆上动点 P 的坐标为$(2+2\cos\alpha,2+2\sin\alpha)$.从而

$$\begin{aligned}S &= |PA|^2+|PB|^2+|PC|^2\\ &= (2\cos\alpha-6)^2+(2+2\sin\alpha)^2\\ &\quad+(2+2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha-4)^2+(2+2\cos\alpha)^2+(2+2\sin\alpha)^2\\ &= 80-8\cos\alpha.\end{aligned}$$

因为 $0\le\alpha\le 2\pi$,所以

$$S_{最大值}=80+8=88,$$

$$S_{最小值}=80-8=72.$$

八、本题考查数列的基础知识、不等式的证明和数学归纳法的运用.

(1)证明:先证明 $x_n>2(n=1,2,\cdots)$.用数学归纳法.由条件 $\alpha>2$ 及 $x_1=\alpha$ 知不等式当 n=1 时成立.假设不等式当 $n=k(k\ge 1)$时成立.当 n=k+1 时,因为由条件及归纳假设知

$$x_{k+1}>2\Leftrightarrow x_k^2-4x_k+4>0\Leftrightarrow (x_k-2)^2>0,$$

再由归纳假设知不等式$(x_{k-2})^2>0$ 成立,所以不等式 $x_{k+1}>2$ 也成立.从而不等式 $x_n>2$ 对于所有的正整数 n 成立.

数学归纳法的第二个步骤也可以这样证:

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}[(x_k-1)+\frac{1}{x_k-1}+2]>\frac{1}{2}(2+2)=2.$$

所以不等式 $x_n>2(n=1,2,\cdots)$成立.

再证明 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1(n=1,2,\cdots)$.由条件及 $x_n>2(n=1,2,\cdots)$知

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1\Leftrightarrow\frac{x_n}{2(x_n-1)}<1\Leftrightarrow x_n>2,$$

因此不等式 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1(n=1,2,\cdots)$也成立.

也可以这样证：对所有正整数 n 有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x_n-1})<\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2-1})=1.$$

还可以这样证：由于对所有正整数 n 有

$$x_n-x_{n+1}=\frac{x_n(x_n-2)}{2(x_n-1)}>0,$$

所以 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1(n=1,2,\cdots)$.

(2)证法一：用数学归纳法．由条件 $x_1=\alpha\leq3$ 知不等式当 n=1 时成立．假设不等式当 n=k(k≥1)时成立．当 n=k+1 时，由条件及 $x_k>2$ 知

$$x_{k+1}\leq2+\frac{1}{2^k}\Leftrightarrow x_k^2\leq2(x_k-1)(2+\frac{1}{2^k})$$

$$\Leftrightarrow x_k^2-2(2+\frac{1}{2^k})x_k+2(2+\frac{1}{2^k})\leq0$$

$$\Leftrightarrow (x_k-2)[x_k-(2+\frac{1}{2^{k-1}})]-\frac{1}{2^{k-1}}\leq0$$

再由 $x_k>2$ 及归纳假设知，上面最后一个不等式一定成立，所以不等式 $x_{k+1}\leq2+\frac{1}{2^k}$ 也成立.

从而不等式 $x_n\leq2+\frac{1}{2^{n-1}}$ 对所有的正整数n成立.

证法二：用数学归纳法．证不等式当 n=k+1 时成立用以下证法．由条件知

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+1+\frac{1}{x_k-1}).$$

再由 $x_k>2$ 及归纳假设可得

$$x_{k+1}\leq\frac{1}{2}[(2+\frac{1}{2^{k-1}})+1+1]=2+\frac{1}{2^k}.$$

(3)证法一：先证明若 $x_k>3$，则 $\frac{x_{k+1}}{x_k}<\frac{3}{4}$. 这是因为

$$\frac{x_{k+1}}{x_k}=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{x_k-1})<\frac{1}{2}(1+\frac{1}{3-1})=\frac{3}{4}.$$

然后用反证法．若当 $n\geq\frac{\lg\frac{\alpha}{3}}{\lg\frac{4}{3}}$ 时，有 $x_{n+1}\geq3$ 则由第(1)小题知

$$x_1>x_2>\cdots>x_n>x_{n+1}\geq3.$$

因此，由上面证明的结论及 $x_1=\alpha$ 可得

$$3 \leq x_{n+1} = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \cdots \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} < \alpha \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

即$n < \dfrac{\lg \frac{\alpha}{3}}{\lg \frac{4}{3}}$,这与假设矛盾.所以本小题的结论成立.

证法二:同证法一得 $\dfrac{x_{k+1}}{x_k} < \dfrac{3}{4}$.

对任意正整数$n \geq \dfrac{\lg \frac{\alpha}{3}}{\lg \frac{4}{3}}$,有$x_n \leq 3$及$x_n > 3$两种情形.

若 $x_n \leq 3$,则由第(1)小题可知 $x_{n+1} < x_n$,从而有 $x_{n+1} < 3$.

若 $x_n > 3$,则由第(1)小题可知 $x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 3$.由此式及上面证明的结论,可得

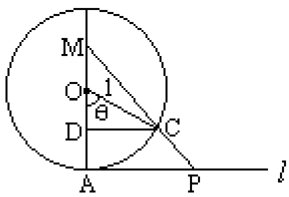
$$x_{n+1} = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{x_3}{x_2} \cdot \cdots \cdot \frac{x_{n+1}}{x_n} < a\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq a\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{(\lg \frac{a}{3})}{(\lg \frac{4}{3})}}$$

$$= a\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{4}{3}} \frac{a}{3}} = a \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{\frac{4}{3}} \frac{3}{a}} = 3,$$

所以当$n \geq \dfrac{\lg \frac{a}{3}}{\lg \frac{4}{3}}$ 时,必有$x_{n+1} < 3$.

九、(本题不计入总分)本题考查导数概念、微分法和利用导数概念的物理意义解决实际问题的能力.

解:作$CD \perp AM$,并设$AP = x, AM = y, \angle COD = \theta$.由假设$\overset{\frown}{AC}$的长为$\dfrac{2}{3}AP = \dfrac{2}{3}x$,半径$OC = 1$,可知$\theta = \dfrac{2}{3}x$. 考虑$x \in (0, \pi)$.



∵ $\triangle APM \backsim \triangle DCM$,

∴ $\frac{AM}{AP} = \frac{DM}{DC}$.

而

$$DM = y - (1 - \cos\frac{2}{3}x),$$

$$DC = \sin\frac{2}{3}x,$$

∴ $\frac{y}{x} = \frac{y - (1 - \cos\frac{2}{3}x)}{\sin\frac{2}{3}x}$.

解得

$$y = \frac{x(1 - \cos\frac{2}{3}x)}{x - \sin\frac{2}{3}x}.$$

∴ $\frac{dy}{dt} = \frac{(x - \sin\frac{2}{3}x)(1 - \cos\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}x\sin\frac{2}{3}x) - x(1 - \cos\frac{2}{3}x)(1 - \frac{2}{3}\cos\frac{2}{3}x)}{(x - \sin\frac{2}{3}x)^2}\frac{dx}{dt}$.

当$x = \frac{3\pi}{4}$时,$\frac{dx}{dt} = v$,代入上式得M点的速度

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(3\pi^2 - 4\pi - 8)}{(3\pi - 4)^2}v.$$

1984年试题

(文史类)

一、本题每一个小题都给出代号为A,B,C,D的四个结论,其中只有一个结论是正确的,把正确结论的代号写在题后的括号内.

(1)数集$X=\{(2n+1)\pi, n$是整数$\}$与数集$Y=\{(4k\pm1)\pi, k$是整数$\}$之间的关系是

(A)$X\subset Y$　　(B)$X\supset Y$

(C)$X=Y$　　(D)$X\neq Y$

【　　】

(2)函数$y=f(x)$与它的反函数$y=f^{-1}(x)$的图象

(A)关于y轴对称　　(B)关于原点对称

(C)关于直线$x+y=0$对称　　(D)关于直线$x-y=0$对称

【　　】

(3)复数$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$的三角形式是

(A)$\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})$　　(B)$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$

(C)$\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$　　(D)$\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{6}$

【　　】

(4)直线与平面平行的充要条件是这条直线与平面内的

(A)一条直线不相交　　(B)两条直线不相交

(C)任意一条直线都不相交　　(D)无数条直线不相交

【　　】

(5)方程$x^2-79x+1=0$的两个根可分别作为

(A)一椭圆和一双曲线的离心率　　(B)两抛物线的离心率

(C)一椭圆和一抛物线的离心率　　(D)两椭圆的离心率

【　　】

二、只要求直接写出结果.

(1)已知函数$\log_{0.5}(2x-3)>0$,求x的取值范围.

(2)已知圆柱的侧面展开图是边长为2与4的矩形,求圆柱的体积.

(3)已知实数m及x满足$2x^2-(2i-1)x+m-i=0$,求m及x的值.

(4)求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)+(n^2+2)+\cdots+(n^2+n)}{n(n-1)(n-2)}$的值.

(5)求$(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})^6$的展开式中x的一次幂的系数.

(6)要排一张有6个歌唱节目和4个舞蹈节目的演出节目单,任何两个舞蹈节目不得相邻,问有多少种不同的排法(只要求写出式子,不必计算).

三、本题只要求画出图形.

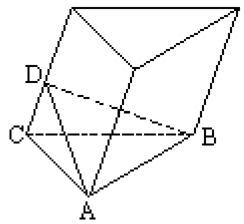
(1)画出方程$y^2=-4x$的曲线.

(2)画出函数$y=\frac{1}{(x+1)^2}$的图象.

四、已知等差数列a,b,c中的三个数都是正数,且公差不为零.求证它们的倒数所组成的数列$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$不可能成等差数列.

五、把$1-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\sin^2\beta-\cos^4\alpha$化成三角函数的积的形式(要求结果最简).

六、如图,经过正三棱柱底面一边 AB,作与底面成 30°角的平面,已知截面三角形 ABD 的面积为 32cm²,求截得的三棱锥 D—ABC 的体积.



七、某工厂 1983 年生产某种产品 2 万件,计划从 1984 年开始,每年的产量比上一年增长 20%.问从哪一年开始,这家工厂生产这种产品的年产量超过 12 万件(已知 lg2=0.3010,lg3=0.4771).

八、已知两个椭圆的方程分别是

$C_1: x^2+9y^2-45=0$,

$C_2: x^2+9y^2-6x-27=0$.

(1)求这两个椭圆的中心、焦点的坐标.

(2)求经过这两个椭圆的交点且与直线 $x-2y+11=0$ 相切的圆的方程.

1984 年试题(文史类)答案

一、本题考查基本概念和基本运算.

(1)C;　(2)D;　(3)A;　(4)C;　(5)A.

二、本题考查基础知识和基本运算,只需直接写出结果.

(1)$\frac{3}{2}<x<2$;

(2)$\frac{4}{\pi}$或$\frac{8}{\pi}$;

(3)$m=0, x=-\frac{1}{2}$;

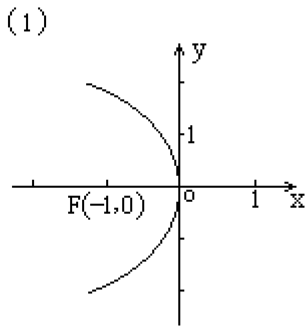
(4)1;

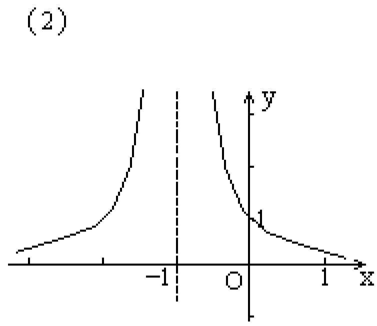
(5)240;

(6)$P_7^4\cdot 6!$.

三、本题考查在直角坐标系内画出图形的能力.

解:





四、本题考查等差数列概念和逻辑推理能力．

证法一:**如果**$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$**成等差数列**,**那么**

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b},$$

即

$$\frac{a-b}{ba}=\frac{b-c}{cb}.$$

两边都乘以b,**得**

$$\frac{a-b}{a}=\frac{b-c}{c}.$$

又因为a,b,c**成等差数列**,**且公差不为零**,**所以**

$$a-b=b-c\neq 0.$$

由以上两式,**可知**

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{c}.$$

两边都乘以ac,**得**

$$a=c.$$

但由数列a,b,c**的公差不为零**,**知**a≠c,**这就得出矛盾**.

从而$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$**不可能成等差数列**.

证法二:如果$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$成等差数列,则

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

因为a,b,c成等差数列,所以

$$2b=a+c.$$

将上面两个等式的两边分别相乘,得

$$(a+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{c})=4,$$

即

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c}=2.$$

将此式两边都乘以ac,得

$$a^2+c^2=2ac,$$

即$(a-c)^2=0$,所以

$$a=c.$$

但由数列a,b,c的公差不为零,知$a\neq c$,这就得出矛盾.

从而$\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$不可能成等差数列.

五、本题考查运用基本三角恒等式的能力.

解:原式$=(1-\sin^2\beta)-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha-\cos^4\alpha$

$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\cos^4\alpha$

$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

$=(\cos\beta+\cos\alpha)(\cos\beta-\cos\alpha)$

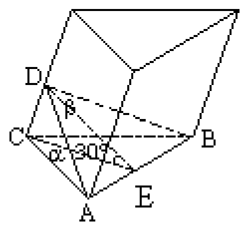
$=(2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2})(-2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2})$

$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

六、本题考查直线、平面之间的位置关系,空间想象能力和计算能力.

解法一:因为这个三棱柱是正三棱柱,所以△ABC 是正三角形,且 DC 所在直线与△ABC 所在平面垂直.

如图,作△ABC 的高 CE,连结 DE.由三垂线定理,知 DE⊥AB.所以∠DEC 是二面角α-AB-β的平面角,∠DEC=30°,



$$CE=\frac{AB}{2}\text{tg}60°=\frac{\sqrt{3}}{2}AB,$$

$$DE=\frac{CE}{\cos 30°}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}AB$$

$$=AB.$$

用$S_{截}$表示△ABD的面积,则

$$32=S_{截}=\frac{1}{2}AB\cdot DE=\frac{1}{2}AB^2,$$

∴ $$AB=8.$$

用$S_{底}$表示△ABC的面积,则

$$S_{底}=\frac{1}{2}AB\cdot CE=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=16\sqrt{3}.$$

因为$\angle DEC=30°$,所以$DC=4$.

∴ $$V_{三棱锥}=\frac{1}{3}S_{底}\cdot DC=\frac{1}{3}\times 16\sqrt{3}\times 4=\frac{64\sqrt{3}}{3}\ (cm^3).$$

解法二:同解法一,求出$\angle DEC=30°$.

$$S_{底}=S_{截}\cdot\cos 30°=32\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}.$$

由$S_{底}=\frac{AB^2\sin 60°}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$,得

$$AB=8.$$

从而

$$CE=8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3},$$

$$DC=CE\cdot\text{tg}30°=4\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=4.$$

∴ $$V_{三棱锥}=\frac{1}{3}S_{底}\cdot DC=\frac{64\sqrt{3}}{3}(cm^3).$$

七、本题考查等比数列的基本概念和利用对数解决实际问题的能力.

解:设 a_1 为这家工厂 1983 年生产这种产品的年产量,即 $a_1=2$.并将这家工厂 1984,1985,…年生产这种产品的年产量分别记为 $a_2,a_3,\cdots$.根据题意,数列$\{a_n\}$是一个公比为 1.2 的等比数列,其通项公式为

$$a_n=2\times 1.2^{n-1}.$$

根据题意,设

$$2\times 1.2^{x-1}=12.$$

两边取常用对数,得

$$\lg 2+(x-1)\lg 1.2=\lg 12.$$

$$x=\frac{\lg 12-\lg 2}{\lg 1.2}+1$$

$$=\frac{\lg 3+2\lg 2-\lg 2}{\lg 3+2\lg 2-1}+1$$

$$=\frac{0.7781}{0.0791}+1\approx 10.84.$$

因为 $y=2\times 1.2^x$ 是增函数,现 x 取正整数,可知从 1993 年开始,这家工厂生产这种产品的年产量超过 12 万台.

答:从 1993 年开始,这家工厂生产这种产品的年产量超过 12 万台.

八、本题考查椭圆、圆的基础知识和用坐标法解决几何问题的能力.

(1)解:把椭圆 C_1 的方程化为标准方程,得

$$C_1:\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{5}=1.$$

∴ $a=3\sqrt{5},b=\sqrt{5},c=\sqrt{a^2-b^2}=2\sqrt{10}.$

可知椭圆C_1的中心是原点,焦点坐标分别是$(2\sqrt{10},0),(-2\sqrt{10},0)$.

把椭圆C_2的方程化为标准方程,得

$$C_2:\frac{(x-3)^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1.$$

∴ $a=6,b=2,c=\sqrt{a^2-B^2}=4\sqrt{2}.$

可知椭圆C_2的中心坐标是$(3,0)$,焦点坐标分别是$(3+4\sqrt{2},0)$,
$(3-4\sqrt{2},0)$.

(2)解法一:解方程组

$$\begin{cases}x^2+9y^2-45=0,\\x^2+9y^2-6x-27=0,\end{cases}$$

得

$\begin{cases}x=3,\\y=2;\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=-2,\end{cases}$

所以两椭圆 C_1,C_2 的交点是 A(3,2),B(3,-2).

设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ex+F=0.$$

因为 A,B 两点在圆上,所以有

$$\begin{cases}3D+2E+F+13=0,\\3D-2E+F+13=0.\end{cases}$$

解得

$$E=0,F=-3D-13.$$

从而所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx-3D-13=0.$$

由所求圆与直线$x-2y+11=0$相切,知方程$x^2+(\frac{x+11}{2})^2+Dx-3D-13=0$

即 $5x^2+(22+4D)x-12D+69=0$ 的判别式为 0,就是

$$D^2+26D-56=0.$$

解得

$$D=2 \text{ 或 } D=-28.$$

从而所求圆的方程是

$$x^2+y^2+2x-19=0,$$

或

$$x^2+y^2-28x+71=0.$$

解法二:同解法一,求出两椭圆 C_1,C_2 的交点为 A(3,2),B(3,-2).

所求圆的圆心在线段 AB 的垂直平分线即 x 轴上.因此,可设圆心为(m,0).

由所求圆与直线 $x-2y+11=0$ 相切,可知点(m,0)到直线 $x-2y+11=0$ 的距离等于点(m,0)与点 A(3,2)之间的距离(都等于所求圆的半径),所以

$$\frac{|m+11|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{(m-3)^2+2^2}.$$

整理,化简,得

$$m^2-13m-14=0.$$

解得

$$m=-1,\text{或 } m=14.$$

当$m=-1$时,圆的半径$r=2\sqrt{5}$,所求圆的方程是

$$x^2+y^2+2x-19=0;$$

当$m=14$时,圆的半径$r=5\sqrt{5}$,所求圆的方程是

$$x^2+y^2-28x+71=0.$$

1985年试题

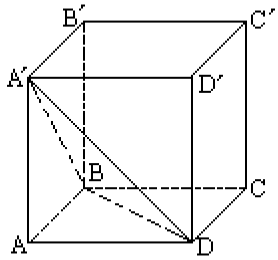
(理工农医类)

一、本题每一个小题都给出代号为A,B,C,D的四个结论,其中只有一个结论是正确的,把正确结论的代号写在题后的括号内.

(1)如果正方体ABCD—A′B′C′D′的棱长为a,那么四面体A′—ABD的体积是

(A) $\frac{a^3}{2}$　　(B) $\frac{a^3}{3}$

(C) $\frac{a^3}{4}$　　(D) $\frac{a^3}{6}$



【　　】

(2) $tgx = 1$ 是 $x = \frac{5}{4}\pi$ 的

(A)必要条件　　(B)充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分又不必要的条件

【　　】

(3)在下面给出的函数中,哪一个函数既是区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的增函数,又是以π为周期的偶函数?

(A) $y=x^2$　　$(x\in R)$

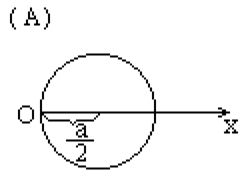
(B) $y=|\sin x|$　　$(x\in R)$

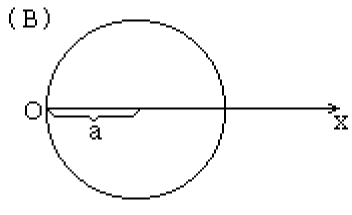
(C) $y=\cos 2x$　　$(x\in R)$

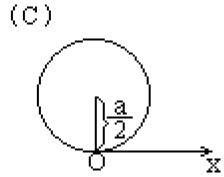
(D) $y=e^{\sin 2x}$　　$(x\in R)$

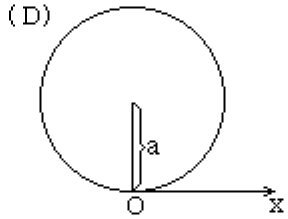
【　　】

(4)极坐标方程 $\rho=a\sin\theta\ (a>0)$ 的图象是









【　　】

(5)用1,2,3,4,5这五个数字,可以组成比20000大,并且百位数不是数字3的没有重复数字的五位数,共有

(A)96个　　　　(B)78个

(C)72个　　　　(D)64个

【　　】

二、只要求直接写出结果.

(1)求方程$2\sin(x+\frac{\pi}{6})=1$的解集.

(2)设$|a|\le 1$,求arccosa+arccos(-a)的值.

(3)求曲线$y^2=-16x+64$的焦点.

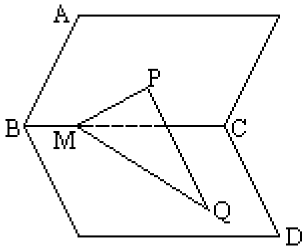
(4)设$(3x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$,求$a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$的值.

(5)设函数f(x)的定义域是[0,1],求函数$f(x^2)$的定义域.

三、(1)解方程　$\log_4(3-x)+\log_{0.25}(3+x)=\log_4(1-x)+\log_{0.25}(2x+1)$.

(2)解不等式$\sqrt{2x+5}>x+1$

四、如图,设平面AC和BD相交于BC,它们所成的一个二面角为45°,P为面AC内的一点,Q为面BD内的一点.已知直线MQ是直线PQ在平面BD内的射影,并且M在BC上.又设PQ与平面BD所成的角为β,∠CMQ=θ(0°<θ<90°)线段PM的长为a.求线段PQ的长.

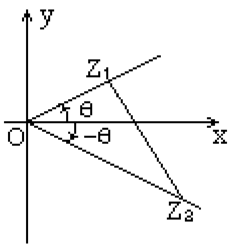


五、设O为复平面的原点,Z_1和Z_2为复平面内的两个动点,并且满足:

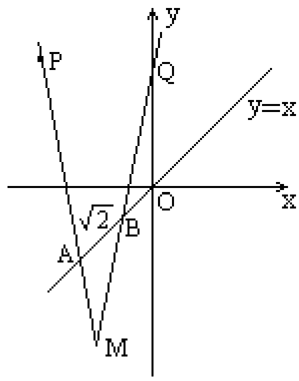
(1)Z_1和Z_2所对应的复数的辐角分别为定值θ和-θ$(0<\theta<\frac{\pi}{2})$,

(2)△OZ_1Z_2的面积为定值S.

求△OZ_1Z_2的重心Z所对应的复数的模的最小值.



六、已知两点P(-2,2),Q(0,2)以及一条直线$l: y=x$.设长为$\sqrt{2}$的线段AB在直线l上移动,如图.求直线PA和QB的交点M的轨迹方程.(要求把结果写成普通方程)



七、设$a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}\ (n=1,2,\cdots).$

(1)证明不等式

$$\frac{n(n+1)}{2}<a_n<\frac{(n+1)^2}{2}$$

对所有的正整数 n 都成立.

(2)设$b_n=\frac{a_n}{n(n+1)}\ (n=1,2,\cdots)$,用极限定义证明$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{2}.$

八、设 a,b 是两个实数,

A={(x,y)｜x=n,y=na+b,n 是整数},

B={(x,y)｜x=,m,y=3m²+15,m 是整数},

C={(x,y)｜x^2+y^2≤144}

是平面 XOY 内的点集合.讨论是否存在 a 和 b 使得

(1)A∩B≠∅(∅表示空集),

(2)(a,b)∈C

同时成立.

九、(附加题,不计入总分)

已知曲线 $y=x^3-6x^2+11x-6$.在它对应于 x∈[0,2]的弧段上求一点 P,使得曲线在该点的切线在 y 轴上的截距为最小,并求出这个最小值.

1985 年试题(理工农医类)答案

一、本题考查基本概念和基本运算.

(1)D; (2)A; (3)B; (4)C; (5)B.

二、本题考查基础知识和基本运算,只需直接写出结果.

(1)$\{x\mid x=k\pi+[(-1)^k-1]\frac{\pi}{6},k\in Z\}$;

(2)π;

(3)(0,0);

(4)64(或 2^6);

(5)[-1,1](或{x｜-1≤x≤1},或-1≤x≤1).

三、本题考查对数方程、无理不等式的解法和分析问题的能力.

(1)解法一:由原对数方程得

$$\log_4\left(\frac{3-x}{1-x}\right)=\log_{0.25}\left(\frac{2x+1}{3+x}\right).$$

因为 $\log_{0.25}a=-\log_4 a$,上式变成

$$\log_4(\frac{3-x}{1-x})=-\log_4(\frac{2x+1}{3+x})$$

$$\log_4(\frac{3-x}{1-x}\cdot\frac{2x+1}{3+x})=0$$

由此得到

$$\frac{(3-x)(2x+1)}{(1-x)(3+x)}=1.$$

解这个方程,得到

$$x_1=0,x_2=7.$$

检验:把 $x=0$ 代入原方程,左右两边都等于 0;故 $x=0$ 是原方程的根.但当 $x=7$ 时,由于 $3-x<0,1-x<0$,它们的对数无意义;故 $x=7$ 不是原方程的根,应舍去.

因此,原对数方程的根是 $x=0$.

解法二:使原方程有意义的 x 的取值范围是 $-\frac{1}{2}<x<1.$

对原方程变形,同解法一,得 $x_1=0$, $x_2=7$.

因为 7 不在区间 $(-\frac{1}{2},1)$ 中,$x=7$ 应舍去.故原对数方程的根是 $x=0$.

(2)解:为使不等式有意义,应要求 $2x+5\geq 0$,即 $x\geq-\frac{5}{2}$.

(i)当 $-\frac{5}{2}\leq x<-1$ 时,$\sqrt{2x+5}\geq 0$ 而 $x+1<0$.显然原不等式成立,因此

$-\frac{5}{2}<x<-1$ 是原不等式的解.

(ii)当 $x\geq-1$ 时,$\sqrt{2x+5}>0,x+1\geq 0$.把原不等式两边平方,得

$$2x+5>x^2+2x+1,$$

$$x^2<4,\text{即}-2<x<2.$$

但由条件 $x\geq-1$,因此 $-1\leq x<2$ 也是原不等式的解.

综合(i),(ii),得出原不等式的解集是

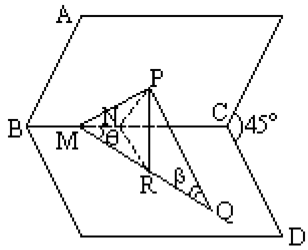
$$\{x\mid -\frac{5}{2}\leq x<2\}.$$

四、本题考查三垂线定理、二面角、斜线与平面所成的角、解三角形、空间想象能力和综合运用知识的能力.

解法一:自点 P 作平面 BD 的垂线,垂足为 R,由于直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 内的射影,所以 R 在 MQ 上,过 R 作 BC 的垂线,设垂足为 N,则 PN⊥BC.(三垂线定理)

因此∠PNR 是所给二面角的平面角,所以∠PNR=45°.

由于直线 MQ 是直线 PQ 在平面 BD 内的射影,所以∠PQR=β.



在 Rt△PNR 中,NR=PRctg45°,所以 NR=PR.

在Rt△MNR中, $MR = NR\frac{1}{\sin\theta}$

$$= PR\cdot\frac{1}{\sin\theta}.$$

在Rt△PMR中, $a^2 = PR^2 + MR^2$

$$= PR^2 + \frac{PR^2}{\sin^2\theta}$$

$$= PR^2(1+\frac{1}{\sin^2 q}).$$

又已知 0°<θ<90°,所以

$$PR = \frac{a\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}.$$

在Rt△PRQ中, $PQ = PR\frac{1}{\sin\beta} = \frac{a\sin\theta}{\sin\beta\sqrt{1+\sin^2\theta}}.$

故线段PQ的长为 $\frac{a\sin\theta}{\sin\beta\sqrt{1+\sin^2\theta}}.$

解法二:同解法一,得∠PQR=β.

设:∠PMR=α则在 Rt△PMR 中,MR=acosα,

PR=asinα,

在 Rt△MNR 中,NR=MRsinθ=acosα·sinθ.

又在 Rt△PNR 中,由于∠PNR=45°,所以 PR=NR.

于是 asinα=acosα·sinθ,

tgα=sinθ,

因此, $\sin\alpha = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}.$

在△PMQ 中,应用正弦定理得

$$PQ = \frac{a\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a\sin\theta}{\sin\beta\sqrt{1+\sin^2\theta}}$$

五、本题考查复数的概念、复数运算的几何意义、三角恒等式、不等式以及灵活运用知识的能力.

解法一:设 Z_1、Z_2 和 Z 对应的复数分别为 z_1、z_2 和 z,其中

$z_1=r_1(\cos\theta+i\sin\theta)$,

$z_2=r_2(\cos\theta-i\sin\theta)$.

由于 Z 是△OZ_1Z_2 的重心，根据复数加法的几何意义，则有 $3z=z_1+z_2=(r_1+r_2)\cos\theta+(r_1-r_2)i\sin\theta$.

于是
$$
\begin{aligned}
|3z|^2&=(r_1+r_2)^2\cos^2\theta+(r_1-r_2)^2\sin^2\theta\\
&=(r_1-r_2)^2\cos^2\theta+4r_1r_2\cos^2\theta+(r_1-r_2)^2\sin^2\theta\\
&=(r_1-r_2)^2+4r_1r_2\cos^2\theta.
\end{aligned}
$$

又已知△Z_1Z_2的面积为S及$\sin2\theta>0$(因$0<\theta<\frac{\pi}{2}$),所以

$$\frac{1}{2}r_1r_2\sin2\theta=S,\text{即}r_1r_2=\frac{2S}{\sin2\theta}.$$

由此，$|3z|^2=(r_1-r_2)^2+\dfrac{8S\cos^2\theta}{\sin2\theta}$

$$=(r_1-r_2)^2+4S\operatorname{ctg}\theta.$$

故当$r_1=r_2=\sqrt{\dfrac{2S}{\sin2\theta}}$时,$|z|$最小,且

$$|z|_{\text{最小值}}=\frac{2}{3}\sqrt{S\operatorname{ctg}\theta}.$$

解法二：同解法一，得 $3z=(r_1+r_2)\cos\theta+(r_1-r_2)i\sin\theta$.

于是 $|3z|^2=(r_1+r_2)^2\cos^2\theta+(r_1-r_2)^2\sin^2\theta$.

$$
\begin{aligned}
&=(r_1^2+2r_1r_2+r_2^2)\cos^2\theta+(r_1^2-2r_1r_2+r_2^2)\sin^2\theta\\
&=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\\
&=r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos2\theta
\end{aligned}
$$

又已知△OZ_1Z_2的面积为 S,且 r_1 为三角形边长,$r_1>0$,以及 $\sin2>\theta$ (因$0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$$\therefore\frac{1}{2}r_1r_2\sin2\theta=S,r_2=\frac{2S}{r_1\sin2\theta}.$$

因此 $|3z|^2=r_1^2+\dfrac{4S^2}{r_1^2\sin^22\theta}+\dfrac{4S\cos2\theta}{\sin2\theta}$

$$\geq2\sqrt{r_1^2\cdot\frac{4S^2}{r_1^2\sin^22\theta}}+\frac{4S\cos2\theta}{\sin2\theta}.$$

故$|3z|^2$ $\geq\dfrac{4S(1+\cos2\theta)}{\sin2\theta}=4S\operatorname{ctg}\theta$.

上式中等号当且仅当$r_1^2=\dfrac{4S^2}{r_1^2\sin^22\theta}=r_2^2$时成立,因此当$r_1=r_2=\sqrt{\dfrac{2S}{\sin2\theta}}$时,$|z|$取最小值.

$$|z|_{\text{最小值}}=\frac{2}{3}\sqrt{S\operatorname{ctg}\theta}.$$

六、本题考查直线方程、两点间的距离公式、参数方程以及轨迹方程的求法.

解法一：由于线段AB在直线$y=x$上移动，且AB长为$\sqrt{2}$，所以可设点A和B分别是(a,a)和$(a+1,a+1)$，其中a为参数.

于是可得

直线PA的方程是$y-2=\frac{a-2}{a+2}(x+2)\ (a\neq -2)$, (1)

直线QB的方程是$y-2=\frac{a-1}{a+1}x\ (a\neq -1)$. (2)

1. 当$\frac{a-2}{a+2}=\frac{a-1}{a+1}$，即$a=0$时，直线PA和QB平行，无交点.

2. 当 $a\neq 0$ 时，直线 PA 与 QB 相交，设交点为 M(x,y)，由(2)式得

$$y-2=(1-\frac{2}{a+1})x,$$

$$a+1=\frac{2x}{x-y+2},$$

$$a+2=\frac{2x}{x-y+2}+1=\frac{3x-y+2}{x-y+2},$$

$$a-2=\frac{3y-x-6}{x-y+2}.$$

将上述两式代入(1)式，得

$$y-2=\frac{3y-x-6}{3x-y+2}(x+2).$$

整理得　$x^2-y^2+2x-2y+8=0$，　(*)

即　$\frac{(x+1)^2}{8}-\frac{(y+1)^2}{8}=-1.$

当 a=-2 或 a=-1 时，直线 PA 和 QB 仍然相交，并且交点坐标也满足(*)式.

所以(*)式即为所求动点的轨迹方程.

解法二：设直线 PA 和 QB 的交点为 M(x,y).

当点 M 与点 P 及点 Q 都不重合时，直线 PM 的方程是

$$(x+2)(Y-2)=(y-2)(X+2),$$

直线 QM 的方程是

$$x(Y-2)=(y-2)X.$$

由方程组

$$\begin{cases}(x+2)(Y-2)=(y-2)(X+2)\\ Y=X\end{cases}$$

解得直线 PM 和直线 l 的交点 A 的坐标为

$$X=\frac{2(x+y)}{x-y+4},\quad Y=\frac{2(x+y)}{x-y+4}.$$

由方程组

$$\begin{cases}x(Y-2)=(y-2)X,\\ Y=X\end{cases}$$

解得直线 QM 和直线 l 的交点 B 的坐标为

$$X=\frac{2x}{x-y+2},Y=\frac{2x}{x-y+2}.$$

根据题意,线段 AB 两端点 A,B 的横坐标有如下关系:

$$\frac{2x}{x-y+2}=\frac{2(x+y)}{x-y+4}+1,$$

从而得 $x^2-y^2+2x-2y+8=0$,(*)

即

$$\frac{(x+1)^2}{8}-\frac{(y+1)^2}{8}=-1.$$

又因点 M 与点 P 或点 Q 重合时,M 点的坐标也满足(*)式.所以(*)式即为所求动点 M 的轨迹方程.

七、本题考查数列和极限的基础知识,证明不等式的基本方法.

(1)证法一:用数学归纳法.

当$n=1$时,由于$a_1=\sqrt{1\cdot 2}=\sqrt{2},\frac{1\cdot 2}{2}=1<\sqrt{2}$及$\frac{(1+1)^2}{2}=2>\sqrt{2}$知不等式成立.

假设当 $n=k(k\geq 1)$时不等式成立,即

$$\frac{k(k+1)}{2}<a_k<\frac{(k+1)^2}{2}.$$

当 $n=k+1$ 时,可得

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}\\&>a_k+(k+1)\\&>\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)\\&=\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k+\sqrt{(k+1)(k+2)}\\&<a_k+\frac{(k+1)+(k+2)}{2}\\&<\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{2k+3}{2}\\&=\frac{(k+2)^2}{2}\\&=\frac{[(k+1)+1]^2}{2}\end{aligned}$$

即

$$\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}<a_{k+1}<\frac{[(k+1)+1]^2}{2}$$

也成立.

从而不等式对所有的正整数 n 都成立.

证法二:直接证明.

由于不等式

$$k < \sqrt{k(k+1)} < \frac{k+(k+1)}{2} = \frac{2k+1}{2}$$

对所有的正整数 k 成立,把它对 k 从 1 到 n(n≥1)求和,得到

$$1+2+\cdots+n < a_n < \frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{2n+1}{2}.$$

又因

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

以及

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\cdots+\frac{2n+1}{2} < \frac{1}{2}[1+3+5+\cdots+(2n+1)] = \frac{(n+1)^2}{2},$$

因此不等式

$$\frac{n(n+1)}{2} < a_n < \frac{(n+1)^2}{2}$$

对所有的正整数 n 都成立.

(2)由(1)及 b_n 的定义知

$$\frac{1}{2} < b_n < \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2n},$$

于是

$$\left| b_n - \frac{1}{2} \right| = b_n - \frac{1}{2} < \frac{1}{2n}.$$

对任意指定的正数 ε,要使 $\left| b_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$,只要使 $\frac{1}{2n} < \varepsilon$,即只要使 $n > \frac{1}{2\varepsilon}$.取N是 $\frac{1}{2\varepsilon}$ 的整数部分,则数列 b_n 的第N项以后所有的项都满足 $\left| b_n - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$.

根据极限定义,证得 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}$.

八、本题考查集合的基本知识,不等式的证明以及分析问题的能力.

解法一:如果实数 a 和 b 使得(1)成立,于是存在整数 m 和 n 使得

$$(n, na+b) = (m, 3m^2+15),$$

即

$$\begin{cases} n = m, \\ na+b = 3m^2+15. \end{cases}$$

由此得出,存在整数 n 使得

$$na+b = 3n^2+15,$$

或写成

$$na+b-(3n^2+15) = 0.$$

这个等式表明点 P(a,b)在直线 l:$nx+y-(3n^2+15)=0$ 上,记从原点到直线 l 的距离为 d,于是

$$d=\frac{3n^2+15}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$=6\left[\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}+\frac{2}{n^2+1}\right]$$

$$\geq 12\qquad (因为当x>0时,x+\frac{1}{x}\geq 2).$$

当且仅当

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{2}=1,即n^2=3$$

时上式中等号才成立.由于 n 是整数,因此 $n^2\neq 3$,所以上式中等号不可能成立.即

$$d>12.$$

因为点P在直线l上,点P到原点的距离$\sqrt{a^2+b^2}$必满足

$$\sqrt{a^2+b^2}\geq d>12.$$

而(2)成立要求$a^2+b^2\leq 144$,即$\sqrt{a^2+b^2}\leq 12$.由此可见使得(1)成立的a和b必不能使(2)成立.

所以,不存在实数 a 和 b 使得(1),(2)同时成立.

解法二:如果实数a和b使得(1),(2)同时成立.同解法一,由于(1)成立,知存在整数 n 使得 $na+b=3n^2+15$,即

$$b=3n^2+15-an.\quad (*)$$

由(2)成立,得

$$a^2+b^2\leq 144.$$

把(*)式代入上式,得关于 a 的不等式

$$(1+n^2)a^2-2n(3n^2+15)a+(3n^2+15)^2-144\leq 0.(**)$$

它的判别式

$$\Delta=4n^2(3n^2+15)^2-4(1+n)^2[(3n^2+15)^2-144]$$
$$=-36(n^2-3)^2.$$

但 n 是整数,$n^2-3\neq 0$,因而$\Delta<0$.

又因 $1+n^2>0$,故(**)式不可能有实数解 a,这就表明,不存在实数 a 和 b 使得(1)、(2)同时成立.

解法三:如果实数 a 和 b 使(1)、(2)同时成立.同解法一,由(1)成立知,必存在整数 n 使得

$$3n^2-an-(b-15)=0.(*)$$

于是,它的判别式非负,即

$$\Delta=a^2+12b-180\geq 0,(**)$$

由(**)得 $$12b-180\geq -a^2.$$

由(2)成立知 $$a^2+b^2\leq 144,(***)$$

即 $$-a^2\geq b^2-144.$$

因此,$12b-180\geq b^2-144$,

即 $$(b-6)^2\leq 0,$$

由此得出 b=6.

把b=6代入判别式(**),得出$a^2\geq 108$,但把b=6代入(***),得出$a^2\leq 108$,

因而必有 $a^2=108$.

此时,从(*)式可解出

$$n=\frac{a}{6}=\pm\sqrt{3}\neq 整数.$$

所以,不存在实数 a 和 b 使得(1),(2)同时成立.

九、(本题分数不计入总分)本题考查导数的几何意义,利用导数解决函数的最大值、最小值问题的能力.

解:已知曲线方程是 $y=x^3-6x^2+11x-6$,因此 $y'=3x^2-12x+11$.

在曲线上任取一点 $P(x_0,y_0)$,则点 P 处切线的斜率是

$$y'\big|_{x=x_0}=3x_0^2-12x_0+11,$$

点 P 处切线方程是

$$y=(3x_0^2-12x_0+11)(x-x_0)+y_0.$$

设这切线与 y 轴的截距为 r,则

$$r=(3x_0^2-12x_0+11)(-x_0)+(x_0^3-6x_0^2+11x_0-6)$$

$$=-2x_0^3+6x_0^2-6.$$

根据题意,要求 r(它是以 x_0 为自变量的函数)在区间[0,2]上的最小值.因为

$$r'=-6x_0^2+12x_0=-6x_0(x_0-2).$$

当 $0<x_0<2$ 时 $r'>0$,因此 r 是增函数,故 r 在区间[0,2]的左端点 $x_0=0$ 处取到最小值.即在点 P(0,-6)处切线在 y 轴上的截距最小.

这个最小值是

$$r_{最小值}=-6.$$

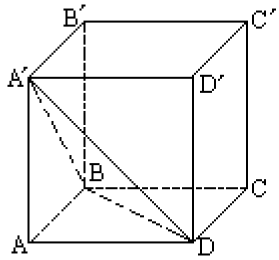
1985 年试题
(文史类)

一、本题每个小题都给出代号为 A,B,C,D 的四个结论,其中只有一个结论是正确的,把正确结论的代号写在题后的括号内.

(1)设正方体 ABCD—A′B′C′D′的棱长为 a,那么三棱锥 A′—ABD 的体积是

(A) $\frac{a^3}{2}$　　(B) $\frac{a^3}{3}$

(C) $\frac{a^3}{4}$　　(D) $\frac{a^3}{6}$



【　　】

(2) $\mathrm{tg}x = 1$ 是 $x = \frac{5}{4}\pi$ 的

(A)必要条件　　(B)充分条件

(C)充分必要条件　　(D)既不充分又不必要的条件

【　　】

(3)设集合 X={0,1,2,4,5,7},Y={1,3,6,8,9},Z={3,7,8},那么集合(x∩Y)∪Z 是

(A){0,1,2,6,8}　　(B){3,7,8}

(C){1,3,7,8}　　(D){1,3,6,7,8}

【　　】

(4)在下面给出的函数中,哪一个函数既是区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的增函数,又是以π为周期的偶函数?

(A) $y=x^2$　(x∈R)　　(B) $y=|\sin x|$　(x∈R)

(C) $y=\cos 2x$ (x∈R)　　(D) $y=e^{\sin 2x}$　(x∈R)

【　　】

(5)用 1,2,3,4,5 这五个数字,可以组成比 20000 大,并且百位数不是数字 3 的没有重复数字的五位数,共有

(A)96 个　　(B)78 个

(C)72 个　　(D)64 个

【　　】

二、只要求直接写出结果.

(1)求函数 $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ 的定义域.

(2)求圆锥曲线 $3x^2-y^2+6x+2y-1=0$ 的离心率.

(3)求函数 $y=-x^2+4x-2$ 在区间[0,3]上的最大值和最小值.

(4)设 $(3x-1)^6=a_6x^6+a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$,求 $a_6+a_5+a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ 的值.

(5)设 i 是虚数单位,求 $(1+i)^6$ 的值.

三、设 $S_1=1^2$, $S_2=1^2+2^2+1^2$, $S_3=1^2+2^2+3^2+2^2+1^2$, $\cdots$, $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$, $\cdots$.

用数学归纳法证明:公式

$$Sn=\frac{n(2n^2+1)}{3}$$

对所有的正整数 n 都成立.

四、证明三角恒等式

$$2\sin^4x+\frac{3}{4}\sin^2 2x+5\cos^4x-\cos3x\cos x=2(1+\cos^2x).$$

五、(1)解方程

$$\lg(3-x)-\lg(3+x)=\lg(1-x)-\lg(2x+1).$$

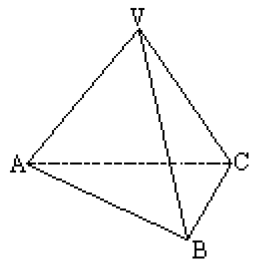
(2)解不等式

$$\sqrt{2x+5}>x+1.$$

六、设三棱锥 V-ABC 的三个侧面与底面所成的二面角都是β,它的高是 h.求这个三棱锥底面的内切圆半径.

七、已知一个圆 $C:x^2+y^2+4x-12y+39=0$ 和一条直线 $l:3x-4y+5=0$.求圆 C 关于直线 l 对称的圆的方程.

八、设首项为1,公比为 $q(q>0)$ 的等比数列的前 n 项之和为 S_n.又设 $T_n=\frac{S_n}{S_{n+1}}, n=1,2,\cdots$.求 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$.



1985 年试题(文史类)答案

一、本题考查基本概念和基本运算.

(1)D; (2)A; (3)C; (4)B; (5)B.

二、本题考查基础知识和基本运算,只需直接写出结果.

(1) $\{x\mid -2\le x<1\}\cup\{x\mid 1<x\le 2\}$;

(2)2;

(3)最大值是 2,最小值是-2;

(4)64(或 2^6;

(5)-8i.

三、本题考查应用数学归纳法证明问题的能力.

证明:因为 $S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$,即要证明

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+\cdots+3^2+2^2+1^2$$
$$=\frac{n(2n^2+1)}{3}, \qquad (A)$$

(Ⅰ)当$n=1$时,左边$=1$,右边$=\frac{1\cdot 3}{3}=1$,故(A)式成立.

(Ⅱ)假设当 n=k 时,(A)式成立,即

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+\cdots+2^2+1^2=\frac{k(2k^2+1)}{3}.$$

现设 n=k+1,在上式两边都加上$(k+1)^2+k^2$,得

$$1^2+2^2+\cdots+k^2+(k+1)^2+k^2+\cdots+2^2+1^2$$
$$=\frac{k(2k^2+1)}{3}+(k+1)^2+k^2$$
$$=\frac{2k^3+k+3(k+1)^2+3k^2}{3}$$
$$=\frac{k(2k+1)(k+1)+3(k+1)^2}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(2k^2+4k+3)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)[2(k+1)^2+1]}{3}.$$

即证得当 n=k+1 时(A)式也成立.

根据(Ⅰ)和(Ⅱ),(A)式对所有的正整数 n 都成立,即证得

$$S_n=\frac{n(2n^2+1)}{3}.$$

四、本题考查三角公式和证明三角恒等式的能力.

证法一:

左边$=2\sin^4x+3\sin^2x\cos^2x+5\cos^4x-(4\cos^3x-3\cos x)\cos x$

$=2\sin^4x+3\sin^2x\cos^2x+\cos^4x+3\cos^2x$

$=(2\sin^2x+\cos^2x)(\sin^2x+\cos^2x)+3\cos^2x$

$=2\sin^2x+\cos^2x+3\cos^2x$

$=2+2\cos^2x=$右边.

证法二:

左边 $=\frac{1}{2}(1-\cos2x)^2+\frac{3}{4}\sin^2 2x+\frac{5}{4}(1+\cos2x)^2-\frac{1}{2}\cos4x-\frac{1}{2}\cos2x$

$=\frac{1}{2}-\cos2x+\frac{1}{2}\cos^2 2x+\frac{3}{4}\sin^2 2x+\frac{5}{4}+\frac{5}{2}\cos2x+\frac{5}{4}\cos^2 2x-\frac{1}{2}\cos4x$

$-\frac{1}{2}\cos2x$

$=\frac{1}{2}(1-\cos4x)+\cos2x+\cos^2 2x+2$

$=\sin^2 2x+\cos^2 2x+\cos2x+2$

$=1+\cos2x+2$

$=2\cos^2 x+2$

=右边.

五、本题考查对数方程、无理不等式的解法以及分析问题的能力.

(1)解法一:由原对数方程得

$$\lg(\frac{3-x}{3+x})=\lg(\frac{1-x}{2x+1}),$$

于是

$$\frac{3-x}{3+x}=\frac{1-x}{2x+1}.$$

解这个方程,得到

$$x_1=0,\ x_2=7.$$

检验:把 $x=0$ 代入原方程,左边=0=右边;故 $x=0$ 是原方程的根.把 $x=7$ 代入原方程,由于 $3-x<0,1-x<0$,它们的对数无意义,故 $x=7$ 不是原方程的根,应舍去.

因此,原对数方程的根是 $x=0$.

解法二:使原方程有意义的 x 的取值范围是 $-\frac{1}{2}<x<1$.

对原方程变形,同解法一,得

$$x_1=0,\quad x_2=7.$$

因为 7 不在区间 $(-\frac{1}{2},1)$ 中, $x=7$ 应舍去.故原对数方程的根是 $x=0$.

(2)解:为使不等式有意义,应要求 $2x+5\geq0$,即 $x\geq-\frac{5}{2}$.

(i)当 $-\frac{5}{2}\leq x\leq-1$ 时, $\sqrt{2x+5}\geq0$ 而 $x+1<0$.显然原不等式成立,因此

$-\frac{5}{2}\leq x<-1$ 是原不等式的解.

(ii)当 $x\geq-1$ 时, $\sqrt{2x+5}>0, x+1\geq0$,原不等式两边平方,得

$$2x+5>x^2+2x+1,$$

$$x^2<4,\text{即}-2<x<2.$$

但由条件 $x\geq-1$,因此 $-1\leq x<2$ 也是原不等式的解.

综合(i)和(ii),得出原不等式的解集是

$$\{x \mid -\frac{5}{2} \leq x < 2\}$$

六、本题考查三棱锥、二面角的概念,三垂线定理和解决空间图形问题的能力.

解:自三棱锥的顶点V向底面作垂线,垂足为O.再过O分别作AB,BC,CA的垂线,垂足分别为E,F,G.连接VE,VF,VG.根据三垂线定理知

VE⊥AB,VF⊥BC,VG⊥AC.

因此∠VEO,∠VFO,∠VGO分别为侧面与底面所成二面角的平面角,由已知条件得

∠VEO=∠VFO=∠VGO=β.

在△VOE和△VOF中,由于VO⊥平面ABC,所以VO⊥OE,VO⊥OF.

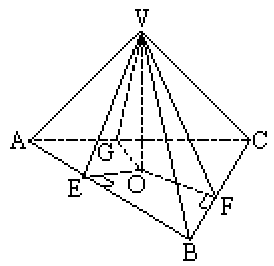
又因VO=VO,∠VEO=∠VFO,于是△VEO≌△VFO.由此得到OE=OF.

同理可证OE=OG.

因此OE=OF=OG.

又因OE⊥AB,OF⊥BC,OG⊥AC,所以点O是△ABC的内切圆的圆心.

在直角三角形VEO中,VO=h,∠VEO=β,因此OE=hctgβ.即这个三棱锥底面的内切圆半径为hctgβ.



七、本题考查直线和圆的基础知识和用解析法解决几何问题的能力.

解法一:已知圆C的方程是 $x^2+y^2+4x-12y+39=0$,它可写成$(x+2)^2+(y-6)^2=1$,因此它的圆心为P(-2,6),半径为1.

设所求圆的圆心为P′(a,b),则PP′的中点$(\frac{a-2}{2}, \frac{b+6}{2})$应在直线l上,

故有

$$3(\frac{a-2}{2})-4(\frac{b+6}{2})+5=0,$$

即

$$3a-4b-20=0. \qquad (1)$$

又PP′⊥l,故有

$$\frac{b-6}{a+2} \cdot \frac{3}{4}=-1,$$

即

$$4a+3b-10=0. \qquad (2)$$

解(1),(2)所组成的方程组,得

$$a=4, b=-2.$$

由此,所求圆的方程为$(x-4)^2+(y+2)^2=1$,即

$$x^2+y^2-8x+4y+19=0.$$

解法二：设圆 C 上任一点(x',y')关于直线 l 的对称点为(x,y).则有

$$\begin{cases}3\left(\frac{x'+x}{2}\right)-4\left(\frac{y'+y}{2}\right)+5=0,\\ \frac{y-y'}{x-x'}\cdot\frac{3}{4}=-1.\end{cases}$$

由此可得

$$\begin{cases}x'=\frac{1}{25}(7x+24y-30),\\ y'=\frac{1}{25}(24x-7y+40).\end{cases}$$

因点(x',y')在圆 C 上,故有$(x'+2)^2+(y'-6)^2=1$,即有

$$\frac{1}{625}(7x+24y+20)^2+\frac{1}{625}(24x-7y-110)^2=1.$$

化简,得 $x^2+y^2-8x+4y+19=0$,这就是所求圆的方程.

八、本题考查数列和极限的基础知识以及分析问题的能力.

解：当公比 q 满足 $0<q<1$ 时,

$$S_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q},$$

于是

$$T_n=\frac{S_n}{S_{n+1}}=\frac{1-q^n}{1-q^{n+1}}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q^{n+1}}=\frac{1-0}{1-0}=1.$$

当公比 $q=1$ 时,$S_n=1+1+\cdots+1=n$,于是

$$T_n=\frac{S_n}{S_{n+1}}=\frac{n}{n+1}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1.$$

当公比 $q>1$ 时,

$$S_n=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1},$$

于是

$$T_n=\frac{S_n}{S_{n+1}}=\frac{q^n-1}{q^{n+1}-1}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}\frac{q^n - 1}{q^{n+1} - 1} = \frac{1}{q}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{q}\cdot\frac{1-0}{1-0} = \frac{1}{q}.$$

综合以上讨论得到

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \begin{cases} 1(\text{当} 0 < q \leq 1 \text{时}), \\ \frac{1}{q}(\text{当} q > 1 \text{时}). \end{cases}$$

1986年试题

(理工农医类)

一、本题每一个小题都给出代号为A,B,C,D的四个结论,其中只有一个结论是正确的,把正确结论的代号写在题后的括号内.

(1)在下列各数中,已表示成三角形式的复数是

(A) $2(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$ (B) $2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

(C) $2(\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4})$ (D) $-2(\sin\frac{\pi}{4}-i\cos\frac{\pi}{4})$

【 】

(2)函数 $y=(0.2)^{-x}+1$ 的反函数是

(A) $y=\log_5 x+1$ (B) $y=\log_x 5+1$

(C) $y=\log_5(x-1)$ (D) $y=\log_5 x-1$

【 】

(3)极坐标方程 $\rho\cos\theta=\frac{4}{3}$ 表示

(A)一条平行于x轴的直线 (B)一条垂直于x轴的直线

(C)一个圆 (D)一条抛物线

【 】

(4)函数 $y=\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x$ 是

(A)周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数 (B)周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数

(C)周期为 $\frac{\pi}{4}$ 的奇函数 (D)周期为 $\frac{\pi}{4}$ 的偶函数

【 】

(5)给出20个数

87 91 94 88 93 91 89 87 92 86

90 92 88 90 91 86 89 92 95 88

它们的和是

(A)1789 (B)1799

(C)1879 (D)1899

【 】

(6)设甲是乙的充分条件,乙是丙的充要条件,丙是丁的必要条件,那么丁是甲的

(A)充分条件 (B)必要条件

(C)充要条件 (D)既不充分也不必要的条件

【 】

(7)如果方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ $(D^2+E^2-4F>0)$ 所表示的曲线关于直线 $y=x$ 对称,那么必有

(A) D=E (B) D=F

(C) E=F (D) D=E=F

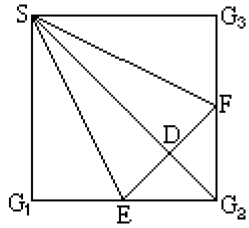
【 】

(8)在正方形 $SG_1G_2G_3$ 中E、F分别是 G_1G_2 及 G_2G_3 的中点,D是EF的中点,

现在沿 SE、SF 及 EF 把这个正方形折成一个四面体,使 G_1、G_2、G_3 三点重合,重合后的点记为 G.那么,在四面体 S—EFG 中必有

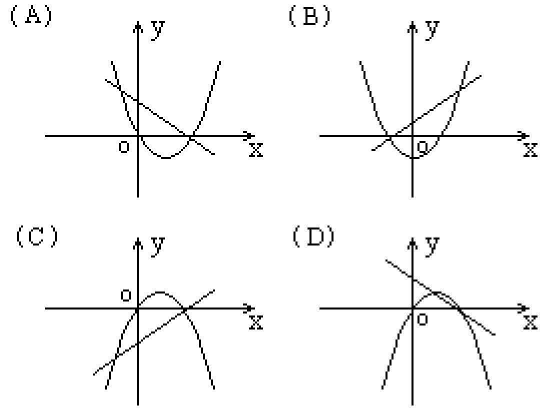
(A)SG⊥△EFG 所在平面　　(B)SD⊥△EFG 所在平面

(C)GF⊥△SEF 所在平面　　(D)GD⊥△SEF 所在平面



【　　】

(9)在下列各图中,$y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b(ab\neq 0)$的图象只可能是



【　　】

(10)当 $x\in[-1,0]$时,在下面关系式中正确的是

(A) $\pi-\arccos(-x)=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

(B) $\pi-\arcsin(-x)=\arccos\sqrt{1-x^2}$

(C) $\pi-\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$

(D) $\pi-\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2}$

【　　】

二、只要求直接写出结果.

(1)求方程$25^{(x^2+x-0.5)}=\sqrt[4]{5}$的解.

(2)已知$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,求$\omega^2+\omega+1$的值.

(3)在 xoy 平面上,四边形 ABCD 的四个顶点坐标依次为(0,0)、(1,0)、(2,1)及(0,3),求这个四边形绕 x 轴旋转一周所得到的几何体的体积.

(4)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$.

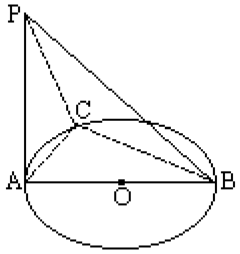
(5)求$(2x^3-\dfrac{1}{x^2})^5$展开式中的常数项.

(6)已知$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$,求$\sin^3\theta-\cos^3\theta$的值.

三、如图,AB 是圆 O 的直径,PA 垂直于圆 O 所在的平面,C 是圆周上不

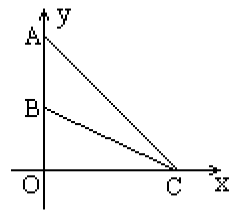
同于 A、B 的任意一点.

求证:平面 PAC 垂直于平面 PBC.



四、当 sin2x>0 时,求不等式 $\log_{0.5}(x^2-2x-15)>\log_{0.5}(x+13)$的解集.

五、如图,在平面直角坐标系中,在 y 轴的正半轴(坐标原点除外)上给定两点 A、B.试在 x 轴的正半轴(坐标原点除外)上求点 C,使∠ACB 取得最大值.



六、已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素,A∩B 含有 4 个元素,试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数:

(Ⅰ)$C\subset A\cup B$,且C中含有3个元素,

(Ⅱ)$C\cap A\neq\varnothing$($\varnothing$表示空集).

七、过点 M(-1,0)的直线 l_1 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 P_1、P_2 两点.记:线段 P_1P_2 的中点为 P;过点 P 和这个抛物线的焦点 F 的直线为 l_2;l_1 的斜率为 k.试把直线 l_2 的斜率与直线 l_1 的斜率之比表示为 k 的函数,并指出这个函数的定义域、单调区间,同时说明在每一单调区间上它是增函数还是减函数.

八、已知$x_1>0, x_1\neq1$,且$x_{n+1}=\dfrac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}$,$(n=1,2,\cdots)$.试证:数列$\{x_n\}$或者对任意自然数n都满足$x_n<x_{n+1}$,或者对任意自然数n都满足$x_n>x_{n+1}$.

九、(附加题不计入总分)

(1)求 $y=x\operatorname{arctg}x^2$ 的导数.

(2)求过点(-1,0)并与曲线$y=\dfrac{x+1}{x+2}$相切的直线方程.

1986 年试题(理工农医类)答案

一、本题考查基本概念和基本运算.

(1)B;　(2)C;　(3)B;　(4)A;　(5)B;

(6)D;　(7)A;　(8)A;　(9)D;　(10)C.

二、本题考查基础知识和基本运算,只需直接写出结果.

(1)$x_1=\dfrac{1}{2}, x_2=-\dfrac{3}{2}$;　(2)0;　(3)$\dfrac{25}{3}\pi$;

(4)$\dfrac{1}{3}$;　(5)-40;　(6)$\dfrac{11}{16}$.

三、本题考查空间直线和平面的位置关系及推证能力.

证明:设圆O所在平面为α.

由已知条件,PA⊥平面α,又BC在平面α内,

因此 PA⊥BC.

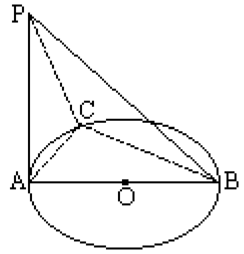
因此∠BCA是直角,

因此BC⊥AC.

而PA与AC是△PAC所在平面内的相交直线,

因此BC⊥△PAC所在平面.

从而证得△PBC所在平面与△PAC所在平面垂直.



四、本题主要考查对数和不等式知识及运算推导能力.

解:满足sin2x>0的x取值范围是

$$k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z, \qquad ①$$

而由 $\log_{0.5}(x^2-2x-15) > \log_{0.5}(x+13)$ 以及对数函数的定义域及性质得到

$$x^2-2x-15<x+13, \qquad ②$$

$$x^2-2x-15>0, \qquad ③$$

$$x+13>0, ④$$

解不等式②得:

$$-4<x<7, \qquad ⑤$$

解不等式③及④得

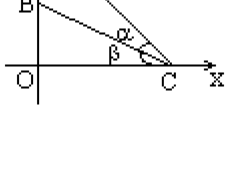
$$-13<x<-3 \text{ 或 } x>5. \qquad ⑥$$

综合①、⑤及⑥,可知所求的解集为

$$(-\pi,-3)\cup(2\pi,7).$$

五、本题主要考查三角函数、函数最大(小)值知识及分析问题的能力.

解:设点A的坐标为(0,a)、点B的坐标为(0,b),0<b<a,又设所求点C的坐标为(x,0),x>0.



记∠BCA=α,∠OCB=β,则∠OCA=α+β.

显然,$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

现在有 $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}[(\alpha+\beta)-\beta]$

$$=\frac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}(\alpha+\beta)\mathrm{tg}\beta}$$

$$=\frac{\frac{a}{x}-\frac{b}{x}}{1+\frac{ab}{x^2}}$$

$$=\frac{a-b}{x+\frac{ab}{x}}$$

$$=\frac{a-b}{\sqrt{ab}(\frac{x}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{x})}$$

记$y=\frac{x}{\sqrt{ab}}+\frac{\sqrt{ab}}{x}$,

那么,当$x=\sqrt{ab}$时,y取得最小值2.

因此,当$x=\sqrt{ab}$时,$\mathrm{tg}\alpha$取得最大值$\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$,

因为在$(0,\frac{\pi}{2})$内$\mathrm{tg}\alpha$是增函数,所以当$x=\sqrt{ab}$时,$\angle ACB$取得最大值

$\mathrm{arctg}\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$

故所求点C的坐标为$(\sqrt{ab},0)$.

注:不要求考生说明$\mathrm{arctg}\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$是最大值的理由.

六、本题考查排列组合、集合等知识与分析问题的能力.

解法一:因为 A、B 各含 12 个元素,A∩B 含 4 个元素,因此,

A∪B 元素的个数是 12+12-4=20.

满足题目条件(Ⅰ)的集合的个数是C_{20}^3,

在上面集合中,还满足$A\cap C=\varnothing$的集合C的个数是C_8^3,

因此,所求集合C的个数是$C_{20}^3-C_8^3=1084$.

解法二:由题目条件可知,属于 B 而不属于 A 的元素个数是 12-4=8.

因此,在$A\cup B$中只含A中1个元素的所要求的集合C的个数为$C_{12}^1C_8^2$,

含A中2个元素的集合C的个数是$C_{12}^2C_8^1$,

含A中3个元素的集合C的个数是C_{12}^3,

所以,所求集合C的个数是

$$C_{12}^1C_8^2+C_{12}^2C_8^1+C_{12}^3=1084.$$

七、本题考查直线、抛物线和函数的基本知识及综合推导能力.

解:由已知条件可知,直线 l_1 的方程是

$y=k(x+1)$,　　　　　　　　　　　　　①

把①代入抛物线方程 $y^2=4x$,整理后得到

$k^2x^2+(2k^2-4)x+k^2=0$,　　　　　　　　　　②

因此,直线 l_1 与该抛物线有两个交点的充要条件是:

$(2k^2-4)^2-4k^2\cdot k^2>0$,　　　　　　　　　　③

及　　　　　　$k\neq 0$.　　　　　　　　　　④

解出③与④得到　　$k\in(-1,0)\cup(0,1)$.

现在设点P的坐标为 $(\bar{x},\bar{y})$,

则直线l_1的斜率 $k=\dfrac{\bar{y}}{\bar{x}+1}$,

而直线l_2的斜率 $k_2=\dfrac{\bar{y}}{\bar{x}-1}$,

记$f(k)=\dfrac{k_2}{k}$,则$f(k)=\dfrac{\bar{x}+1}{\bar{x}-1}$.

今记 l_1 与抛物线的两个交点 P_1 与 P_2 的横坐标分别为 x_1 和 x_2,由韦达定理及②得

$$x_1+x_2=\frac{4-2k^2}{k^2},(k\in(-1,0)\cup(0,1))$$

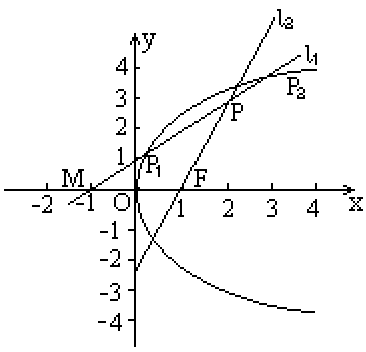
因此　　$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2-k^2}{k^2}$,

由此得到　$f(k)=\dfrac{1}{1-k^2}$,

定义域是　　　$(-1,0)\cup(0,1)$.

显然,$1-k^2$在$(-1,0)$内递增,在$(0,1)$内递减.所以,$f(k)=\dfrac{1}{1-k^2}$在$(0,1)$内为增函数,在$(-1,0)$内为减函数.

注:可先解出 k 的取值范围作为定义域,后给出函数 f(k)的表达式,也可先给出函数表达式,后解出 k 的取值范围作为定义域.



八、本题主要考查数列的概念及运用数学归纳法解题的能力.

证明:首先,

$$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n(x_n^2+3)}{3x_n^2+1}-x_n$$

$$=\frac{2x_n(1-x_n^2)}{3x_n^2+1}$$

由于 $x_1>0$,由数列$\{x_n\}$的定义可知

$x_n>0,(n=1,2\cdots)$

所以,$x_{n+1}-x_n$与$1-x_n^2$的符号相同.

(i)假定$x_1<1$,我们用数学归纳法证明$1-x_n^2>0(n\in N)$.

显然, $n=1$时,$1-x_1^2>0$,

设 $n=k$时 $1-x_k^2>0$,

那么当 n=k+1 时

$$1-x_{k+1}^2=1-[\frac{x_k(x_k^2+3)}{3x_k^2+1}]^2$$

$$=\frac{(1-x_k^2)^3}{(3x_k^2+1)^2}>0$$

因此,对一切自然数n都有$1-x_n^2>0$,

从而对一切自然数 n 都有 $x_{n+1}>x_n$.

(ii)若 $x_1>1$,同理可证,对一切自然数 n 都有 $x_{n+1}<x_n$.

九、(附加题,不计入总分)本题主要考查导数的运算及几何意义.

解:(1)$y'=\text{arctg}x^2+\frac{2x^2}{1+x^4}$.

(2)$y'=\frac{1}{(x+2)^2}$,

而点(-1,0)在曲线$y=\frac{x+1}{x+2}$上,$y'|_{x=-1}=1$,所以所求的切线方程为

$y=x+1$.

1986 年试题
(文史类)

一、本题每个小题都给出代号为 A,B,C,D 的四个结论,其中只有一个结论是正确的,把正确结论的代号写在题后的括号内.

(1)在下列各数中,已表示成三角形式的复数是

(A)$2(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$ (B)$2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

(C)$2(\sin\frac{\pi}{4}+i\cos\frac{\pi}{4})$ (D)$-2(\sin\frac{\pi}{4}-i\cos\frac{\pi}{4})$

【 】

(2)函数 $y=5^x+1$ 的反函数是

(A)$y=\log_5(x+1)$ (B)$y=\log_x5+1$

(C)$y=\log_5(x-1)$ (D)$y=\log_{(x-1)}5$

【 】

(3)已知全集 I={1,2,3,4,5,6,7,8),A={3,4,5},B={1,3,6},那么集合{2,7,8}是

(A)$A\cup B$. (B)$A\cap B$.

(C)$\overline{A}\cup\overline{B}$. (D)$\overline{A}\cap\overline{B}$.

【 】

(4)函数$y=\sqrt{2}\sin2x\cos2x$是

(A)周期为$\frac{\pi}{2}$的奇函数 (B)周期为$\frac{\pi}{2}$的偶函数

(C)周期为$\frac{\pi}{4}$的奇函数 (D)周期为$\frac{\pi}{4}$的偶函数

【 】

(5)已知 $c<0$,在下列不等式中成立的一个是

(A)$c>2^c$ (B)$c>(\frac{1}{2})^c$

(C)$2^c<(\frac{1}{2})^c$ (D)$2^c>(\frac{1}{2})^c$

【 】

(6)有以下 20 个数

87,91,94,88,93,91,89,87,92,86,

90,92,88,90,91,86,89,92,95,88;

它们的和是

(A)1789 (B)1799

(C)1879 (D)1899

【 】

(7)已知某正方体对角线长为 a,那么,这个正方体的全面积是

(A)$2\sqrt{2}a^2$ (B)$2a^2$

(C)$2\sqrt{3}a^2$ (D)$3\sqrt{2}a^2$

【　　】

(8)如果方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$所表示的曲线关于直线 $y=x$ 对称,那么必有

(A)D=E　　　　(B)D=F

(C)E=F　　　　(D)D=E=F

【　　】

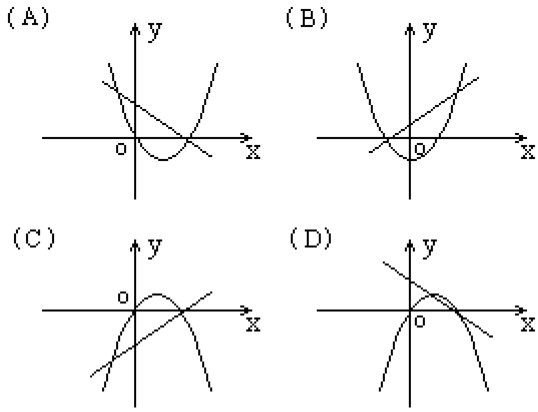
(9)设甲为乙的充分条件,丙为乙的充要条件,丙为丁的必要条件,那么丁为甲的

(A)充分条件　　　　(B)必要条件

(C)充要条件　　　　(D)既不充分也不必要的条件

【　　】

(10)已知函数 $y=ax^2+bx$ 与 $y=ax+b$,其中 $a \cdot b\neq 0,b>0$,那么,在下列各图中,它们的图象只可能是



【　　】

二、只要求直接写出结果.

(1)求方程$\sqrt{25^{(x^2+x-0.5)}}=\sqrt[4]{5}$的解.

(2)已知$\omega=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$,求$\omega^2+\omega+1$的值.

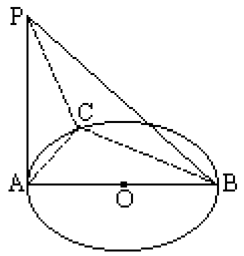
(3)在 xOy 平面内,△ABC 的三个顶点坐标依次为(0,0),(1,0),(0,3),将这个三角形绕 x 轴旋转一周,求所得到的几何体的体积.

(4)求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n+7}{5n^2+4}$.

(5)求$(2x^3-\dfrac{1}{x^2})^5$展开式中的常数项.

(6)求与椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$有公共焦点,且离心率为$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$的双曲线方程.

三、如图,AB 是圆 O 的直径,PA 垂直于这个圆所在的平面,C 是圆周上不同于 A、B 的任意一点,求证平面 PAC 垂直于平面 PBC.



四、求满足方程 $|Z+3-\sqrt{3}i|=\sqrt{3}$ **的辐角主值最小的复数** Z.

五、已知抛物线 $y^2=x+1$,定点 A(3,1),B 为抛物线上任意一点,点 P 在线段 AB 上,且有 BP∶PA=1∶2.当点 B 在抛物线上变动时,求点 P 的轨迹方程,并指出这个轨迹为哪种曲线.

六、甲、乙、丙、丁四个公司承包 8 项工程,甲公司承包 3 项,乙公司承包 1 项,丙、丁两公司各承包 2 项,问共有多少种承包方式.

七、已知 sinA+sin3A+sin5A=a,cosA+cos3A+cos5A=b.

求证:(1) **当** $b\neq 0$ **时**, $\mathrm{tg}3A=\frac{a}{b}$.

(2) $(1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2$.

八、已知数列 $\{a_n\}$, **其中** $a_1=\frac{4}{3}, a_2=\frac{13}{9}$ **且当** $n\geq 3$ **时**,

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{3}(a_{n-1}-a_{n-2}).$$

(1) **求数列** $\{a_n\}$ **的通项公式**.

(2) **求** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

1986 年试题(文史类)答案

一、本题考查基本概念和基本性质.

(1)B;　(2)C;　(3)D;　(4)A;　(5)C;

(6)B;　(7)B;　(8)A;　(9)D;　(10)D.

二、本题考查基本概念和基本运算,只需直接写出结果.

(1) $\frac{1}{2},-\frac{3}{2}$;　(2) 0;　(3) 3π;

(4) $\frac{2}{5}$;　(5) -40;　(6) $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

三、本题主要考查空间直线和平面的位置关系与论证能力.

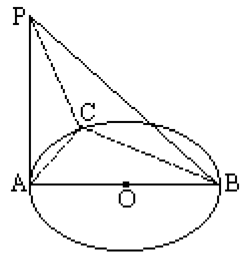
证明:设圆 O 所在的平面为α.由已知条件,PA 垂直于平面α,又 BC 在平面α内,

因此,PA⊥BC.

因为∠BCA 是直角,因此,BC⊥AC,

而 PA 与 AC 是△PAC 所在平面内的相交直线,因此,BC⊥△PAC 所在平面.

从而证得△PBC 所在平面与△PAC 所在平面垂直.



四、本题主要考查复数等基本知识和推算能力.

解:满足方程$\left|Z+3-\sqrt{3}i\right|=\sqrt{3}$**的复数在复平面上所对应的点的全体组成了如图所示的一个圆,其圆心**A**对应的复数为**$-3+\sqrt{3}i$,**半径为**$\sqrt{3}$,**因而圆与**x**轴相切于点**Q,**点**Q**对应的复数是**-3.

从点O作圆的另一条切线OP,P为切点,则点P所对应的复数为所求的复数.

$\because -3+\sqrt{3}i=2\sqrt{3}(\cos150°+i\sin150°)$,

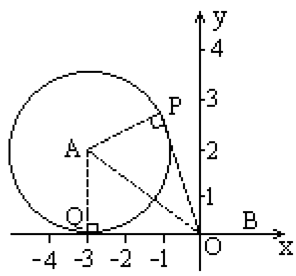
设点B**对应的复数为**1, $\therefore \angle BOA=150°$, $|OA|=2\sqrt{3}$,

$$\angle QOA=180°=\angle BOA$$
$$=30°.$$

$\because$ OP、OQ**是从同一点引出的圆的两条切线**,A**是圆心**, $\therefore \angle AOP=\angle QOA=30°$, $\angle QOP=2\angle QOA=60°$, $\angle BOP=180°-\angle QOP=180°-60°=120°$, $|OP|=|OA|\cos\angle AOP=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$.

∴所要求的复数

$$z=3(\cos120°+i\sin120°)$$
$$=3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{3}i.$$



五、本题主要考查二次曲线等知识以及分析问题的能力.

解:设点B的坐标为(X,Y),点P的坐标为(x,y),则

$$x=\frac{X+\frac{1}{2}\cdot 3}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2X+3}{3},$$

$$y=\frac{Y+\frac{1}{2}\cdot 1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2Y+1}{3}.$$

∴ $X=\frac{3}{2}(x-1)$,①

$Y=\frac{1}{2}(3y-1)$,②

∵ 点 B 在抛物线上,∴$Y^2=X+1$,将①、②代入此方程,得

$$[\frac{1}{2}(3y-1)]^2=\frac{3}{2}(x-1)+1,$$

化简得 $3y^2-2y-2x+1=0$,

即$x=\frac{3}{2}y^2-y+\frac{1}{2}$,因而此轨迹为抛物线.

六、本题主要考查排列组合的知识以及分析问题的能力.

解:甲公司从8项工程中选出3项有C_8^3种方式.

乙公司从甲公司挑选后余下的5项中选出1项有C_5^1种方式.

丙公司从甲、乙两公司挑选后余下的4项中选出2项有C_4^2种方式.

丁公司从甲、乙、丙3个公司挑选后余下的2项中选出2项有C_2^2种方式.

∴ 承包方式的种数是

$C_8^3\cdot C_5^1\cdot C_4^2\cdot C_2^2$(或$C_8^3\cdot C_5^1\cdot C_4^2$)

$=\frac{8\times7\times6}{1\times2\times3}\times\frac{5}{1}\times\frac{4\times3}{1\times2}\times\frac{2\times1}{1\times2}$

$=1680$(种).

七、本题主要考查三角恒等变形的有关知识和论证能力.

证明:由已知 $\sin A+\sin 3A+\sin 5A=a$,利用和差化积公式得

$2\sin 3A\cos 2A+\sin 3A=a$,

∴$\sin 3A(1+2\cos 2A)=a$, ①

又由已知 $\cos A+\cos 3A+\cos 5A=b$,利用和差化积公式得

$2\cos 3A\cos 2A+\cos 3A=b$,

∴$\cos 3A(1+2\cos 2A)=b$, ②

当 $b\neq0$ 时,

①÷② 得

$\frac{\sin 3A}{\cos 3A}=\frac{a}{b}$,从而证得$\mathrm{tg}3A=\frac{a}{b}$.

①^2+②^2 得

$\sin^2 3A(1+2\cos 2A)^2+\cos^2 3A(1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2$,

$\therefore (1+2\cos 2A)^2(\sin^2 3A+\cos^2 3A)=a^2+b^2$,

$\therefore (1+2\cos 2A)^2=a^2+b^2$.

八、本题主要考查数列和极限的知识以及灵活运用知识的能力.

解:(1)设$a_n-a_{n-1}=x_{n-1}$,则由已知条件得$x_{n-1}=\frac{1}{3}x_{n-2}$,所以数列$\{x_n\}$组成了一个公比为$\frac{1}{3}$的等比数列,其首项$x_1=a_2-a_1=\frac{13}{9}-\frac{4}{3}=\frac{1}{9}$,

$$x_{n-1}=x_1\cdot(\frac{1}{3})^{n-2}=\frac{1}{9}(\frac{1}{3})^{n-2}=(\frac{1}{3})^n,(n=2,3,4,\cdots)$$

即 $a_n-a_{n-1}=(\frac{1}{3})^n,(n=2,3,4,\cdots)$

$\therefore a_2-a_1=(\frac{1}{3})^2$,

$a_3-a_2=(\frac{1}{3})^3$,

…………

$a_n-a_{n-1}=(\frac{1}{3})^n$,

将以上 n-1 个式子相加,得

$$a_n-a_1=(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^3+\cdots+(\frac{1}{3})^n=\frac{(\frac{1}{3})^2[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}[1-(\frac{1}{3})^{n-1}],$$

$$\therefore a_n=a_1+\frac{1}{6}[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]=\frac{4}{3}+\frac{1}{6}[1-(\frac{1}{3})^{n-1}]=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^n=\frac{3}{2}-0=\frac{3}{2}$.

1987 年试题
(理工农医类)

一、本题每一个小题都给出代号为 A,B,C,D 的四个结论,其中只有一个结论是正确的,把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内.

(1)设S,T是两个非空集合,且$S\not\subseteq T,T\not\subseteq S$,令$X=S\cap T$,那么$S\cup X$等于

(A)X　　(B)T　　(C)Φ　　(D)S

【　】

(2)椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,令$c^2=a^2-b^2$,那么它的准线方程为

(A)$y=\pm\frac{a^2}{c}$　　(B)$y=\pm\frac{b^2}{c}$

(C)$x=\pm\frac{a^2}{c}$　　(D)$x=\pm\frac{b^2}{c}$

【　】

(3)设 a,b 是满足 ab<0 的实数,那么

(A)$|a+b|>|a-b|$　　(B)$|a+b|<|a-b|$

(C)$|a-b|<||a|-|b||$　　(D)$|a-b|<|a|+|b|$

【　】

(4)已知 E,F,G,H 为空间中的四个点,设

命题甲:点 E,F,G,H 不共面.

命题乙:直线 EF 和 GH 不相交.

那么

(A)甲是乙的充分条件,但不是必要条件.

(B)甲是乙的必要条件,但不是充分条件.

(C)甲是乙的充要条件.

(D)甲不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件.

【　】

(5)在区间(-∞,0)上为增函数的是

(A)$y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　　(B)$y=\frac{x}{1-x}$

(C)$y=-(x+1)^2$　　(D)$y=1+x^2$

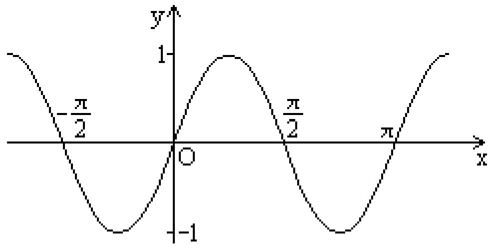
【　】

(6)要得到$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图象,只要将$y=\sin 2x$的图象(如图)

(A)向左平行移动$\frac{\pi}{3}$　　(B)向右平行移动$\frac{\pi}{3}$

(C)向左平行移动$\frac{\pi}{6}$　　(D)向右平行移动$\frac{\pi}{6}$

【　】



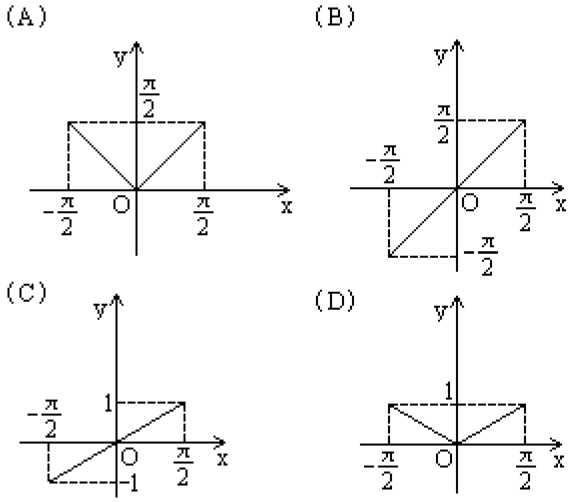
(7)极坐标方程 $\rho=\sin\theta+2\cos\theta$ 所表示的曲线是

(A)直线 **(B)圆**

(C)双曲线 **(D)抛物线**

【　　】

(8)**函数**$y=\arccos(\cos x)\ (x\in[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}])$**的图象是**



【　　】

二、只要求写出结果.

(1)**求函数** $y=\mathrm{tg}\frac{2x}{3}$ **的周期**

(2)**已知方程** $\frac{x^2}{2+\lambda}-\frac{y^2}{1+\lambda}=1$**表示双曲线,求 λ 的范围.**

(3)若 $(1+x)^n$ 的展开式中,x^3 的系数等于 x 的系数的 7 倍,求 n.

(4)**求极限** $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+1}+\frac{3}{n^2+1}+\cdots\cdots+\frac{2n}{n^2+1})$**.**

(5)在抛物线 $y=4x^2$ 上求一点,使该点到直线 $y=4x-5$ 的距离为最短.

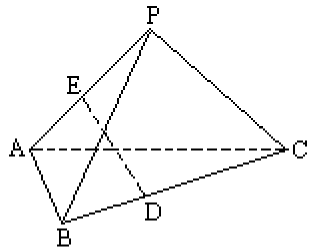
(6)由数字 1,2,3,4,5 组成没有重复数字且数字 1 与 2 不相邻的五位数.求这种五位数的个数.

(7)一个正三棱台的下底和上底的周长分别为 30㎝ 和 12㎝,而侧面积等于两底面积之差,求斜高.

三、求 $\sin10°\sin30°\sin50°\sin70°$ 的值.

四、如图,三棱锥 P—ABC 中,已知 PA⊥BC,PA=BC=L,PA,BC 的公垂线 ED=h.

求证:三棱锥P—ABC**的体积**$V=\frac{1}{6}L^2h$.



五、设对所有实数 x,不等式

$$x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$$

恒成立,求 a 的取值范围.

六、设复数 z_1 和 z_2 满足关系式

$$z_1\overline{z_2}+\overline{A}z_1+A\overline{z_2}=0,$$

其中 A 为不等于 0 的复数.证明:

(1) $|z_1+A||z_2+A|=|A|^2$;

(2) $\frac{z_1+A}{z_2+A}=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|$.

七、设数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的前 n 项的和 S_n 与 a_n 的关系是

$$S_n=-ba_n+1-\frac{1}{(1+b)^n},$$

其中是 b 与 n 无关的常数,且 $b\neq-1$.

(1)求 a_n 和 a_{n-1} 的关系式;

(2)写出用 n 和 b 表示 a_n 的表达式;

(3)当 $0<b<1$ 时,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$.

八、定长为 3 的线段 AB 的两个端点在抛物线 $y^2=x$ 上移动,记线段 AB 的中点为 M.求点 M 到 y 轴的最短距离,并求此时点 M 的坐标.

九、(附加题,不计入总分)

(1)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2x})^x$.

(2)设 $y=x\ln(1+x^2)$,求 y'.

1987 年试题(理工农医类)答案

一、本题考查基本概念和基本运算.

(1)D (2)C (3)B (4)A

(5)B (6)D (7)B (8)A

二、本题考查基础知识和基本运算,只需写出结果.

(1) $\frac{3\pi}{2}$; (2) $\lambda<-1$ 或 $\lambda>-2$; (3)8; (4)2;

(5) $(\frac{1}{2},1)$; (6)72; (7) $\sqrt{3}$;

三、本题考查三角的恒等变形知识和运算能力.

解法一：sin10°sin50°sin70°

$$=\sin 10°\cdot\frac{1}{2}(\cos 20°-\cos 120°)$$

$$=\frac{1}{2}\sin 10°(\cos 20°+\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{4}(\sin 30°-\sin 10°)+\frac{1}{4}\sin 10°$$

$$=\frac{1}{4}\sin 30°$$

$$=\frac{1}{8}.$$

∴sin10°sin30°sin50°sin70°

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}$$

$$=\frac{1}{16}$$

解法二：

∵sin10°sin50°sin70°

$$=\frac{2\sin 10°\cos 10°\sin 50°\sin 70°}{2\cos 10°}$$

$$=\frac{\sin 20°\cos 20°\sin 50°}{2\cos 10°}$$

$$=\frac{\sin 40°\sin 50°}{4\cos 10°}$$

$$=\frac{\sin 40°\cos 40°}{4\cos 10°}$$

$$=\frac{\sin 40°\sin 50°}{4\cos 10°}$$

$$=\frac{\sin 40°\cos 40°}{4\cos 10°}$$

$$=\frac{\sin 80°}{8\cos 10°}$$

$$=\frac{1}{8}$$

又∵$\sin 30°=\frac{1}{2}$，

∴$\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°=\frac{1}{16}$.

解法三：

sin10°sin30°sin50°sin70°

$$=\frac{1}{4}(\cos 20°-\cos 40°)(\cos 20°-\cos 120°)$$

$$=\frac{1}{4}(\cos20°-\cos40°)(\cos20°-\frac{1}{2})$$

$$=\frac{1}{4}(\cos^2 20°-\cos40°\cos20°+\frac{1}{2}\cos20°-\frac{1}{2}\cos40°)$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{1+\cos40°}{2}-\frac{1}{2}\cos20°-\frac{1}{2}\cos60°+\frac{1}{2}\cos20°-\frac{1}{2}\cos40°$$

$$=\frac{1}{16}.$$

四、本题考查直线和平面的位置关系、体积计算等知识和推理能力.

证明:连结 AD 和 PD.

∵BC⊥PA，BC⊥ED，PA 与 ED 相交，

∴BC⊥平面 PAD，

$$\therefore S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}PA\cdot ED=\frac{1}{2}L\cdot h,$$

三棱锥 B—PAD 体积

$$V_1=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}Lh)\cdot BD=\frac{1}{6}Lh\cdot BD$$

同理,三棱锥 C—PAD 的体积

$$V_2=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}Lh)L_2=\frac{1}{6}Lh\cdot CD,$$

∴　三棱锥 P—ABC 体积

∵　$V=V_1+V_2$,

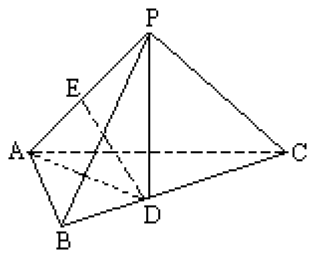
$$V=\frac{1}{6}Lh\cdot BD+\frac{1}{6}Lh\cdot CD$$

$$=\frac{1}{6}Lh(BD+CD)$$

$$=\frac{1}{6}Lh\cdot BC$$

$$=\frac{1}{6}L^2h.$$

若 E,D 不是分别在线段 AP,BC 上,结论仍成立.



五、本题考查对数、不等式等知识和运算能力.

解:由题意得

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a+1}>0 & ① \\ \log_2\dfrac{4(a+1)}{a}>0, & ② \\ (2\log_2\dfrac{2a}{a+1})^2-4\log_2\dfrac{4(a+1)}{a}\cdot\log_2\dfrac{(a+1)^2}{4a^2}<0 & ③ \end{cases}$$

令$z=\log_2\dfrac{2a}{a+1}$，则②变为，

$z^2-(\log_2 8-z)\cdot(-2z)<0$，

化简为 $z(6-z)<0$，

解得 $z>6$,或 $z<0$. ④

①式变形为 $\log_2 8-z>0$，

∴ $z<3$， ⑤

综合④,⑤得 $z<0$，

由此 $\log_2\dfrac{2a}{a+1}<0$， ⑥

解①，⑥得 a 的取值范围： $0<a<1$.

六、本题考查复数知识和运算以及推理能力.

解法一:(1)由已知的关系式得

$(z_1+A)(\overline{z_2}+\overline{A})=A\overline{A}=|A|^2$, ①

∵ $|z_1+A||z_2+A|$

$=|z_1+A||\overline{z_2+A}|$

$=|z_1+A||\overline{z_2}+\overline{A}|$

$=|(z_1+A)(\overline{z_2}+\overline{A})|$

由①证得

$|z_1+A||z_2+A|=||A|^2|=|A|^2$. ②

(2)∵ $A\neq 0$,由①得

$z_1+A\neq 0$, $(\overline{z_2}+\overline{A})\neq 0$

$$z_1+A=\frac{|A|^2}{\overline{z_2}+\overline{A}}.$$

由此得

$$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{|A|^2}{(\overline{z_2}+\overline{A})(z_2+A)}$$

$$=\frac{|A|^2}{(\overline{z_2+A})(z_2+A)}$$

$$=\frac{|A|^2}{|z_2+A|^2}.$$

由②得

$$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{|z_1+A||z_2+A|}{|z_2+A|^2}$$

$$=\frac{|z_1+A|}{|z_2+A|}$$

$$=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|.$$

解法二:(1)由题设

$$z_1(\overline{z_2}+\overline{A})+A\overline{z_2}=0 \qquad ①$$

若$\overline{z_2}+\overline{A}=0$,由①得$A\overline{z_2}=0$,但已知$A\neq 0$,故$\overline{z_2}=0$,

由此又得$\overline{A}=0$,与$A\neq 0$相矛盾.

故得

$\overline{z_2}+\overline{A}\neq 0$,

于是由①解得

$$z_1=\frac{-A\overline{z_2}}{\overline{z_2}+\overline{A}} \qquad ②$$

$$|z_1+A||z_2+A|$$

$$=\left|\frac{-A\overline{z_2}}{\overline{z_2}+\overline{A}}+A\right||z_2+A|$$

$$=\left|\frac{A\overline{A}}{\overline{z_2}+\overline{A}}\right||z_2+A|$$

$$=\frac{|A|^2}{|\overline{z_2}+\overline{A}|}|z_2+A|$$

$$=\frac{|A|^2}{|\overline{z_2+A}|}|z_2+A|$$

$$=\frac{|A|^2}{|z_2+A|}|z_2+A|$$

所以证得 $|z_1+A||z_2+A|=|A|^2$

(2)

$$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{\dfrac{-A\overline{z_2}}{\overline{z_2}+\overline{A}}+A}{z_2+A}$$

$$=\frac{|A|^2}{|z_2+A|^2},$$

以(1)中的结果代入得

$$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{|z_1+A||z_2+A|}{|z_2+A|^2}$$

$$=\frac{|z_1+A|}{|z_2+A|}$$

$$=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|.$$

解法三:(1)由已知的关系式得

$(z_1+A)(\overline{z_2}+\overline{A})=A\overline{A}=|A|^2,$ ①

令 $z_1+A=r(\cos\alpha+i\sin\alpha),z_2+A=s(\cos\beta+i\sin\beta),$

由于 $A\neq0$,我们有 $r\neq0,s\neq0$.

$$\overline{z_2+A}=\overline{z_2}+\overline{A}=s[\cos(-\beta)+\sin(-\beta)].$$

由①得

$$rs[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]=|A|^2,$$

于是

$$rs\cos(\alpha-\beta)=|A|^2,\sin(\alpha-\beta)=0,$$

∴ $\cos(\alpha-\beta)=1,$

$rs=|A|^2,$

而 $|z_1+A||z_2+A|=rs,$

所以证得 $|z_1+A||z_2+A|=|A|^2.$

(2)∵ $\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{r}{s}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]$

$$=\frac{r}{s}>0$$

$$\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|=\frac{r}{s},$$

∴ $\frac{z_1+A}{z_2+A}=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|.$

解法四:(1) $|z_1+A||z_2+A|$

$=|z_1+A||\overline{z_2+A}|$

$=|(z_1+A)(\overline{z_2+A})|$

$=|(z_1+A)(\overline{z_2}+\overline{A})|$

$=|z_1\overline{z_2}+A\overline{z_2}+\overline{A}z_1+A\overline{A}|$

$=|A\overline{A}|$

$=|A|^2.$

(2)由 $A\neq0$ 和(1)的结论知 $z_2+A\neq0$.

$$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{(z_1+A)(\overline{z_2}+\overline{A})}{(z_2+A)(z_2+A)}$$

$$=\frac{z_1\overline{z_2}+A\overline{z_2}+\overline{A}z_1+A\overline{A}}{|z_2+A|}$$

$$=\frac{|A|^2}{|z_2+A|^2}$$

利用(1)的结果

$$\frac{z_1+A}{z_2+A}=\frac{|z_1+A||z_2+A|}{|z_2+A|^2}$$

$$=\frac{|z_1+A|}{|z_2+A|}$$

$$=\left|\frac{z_1+A}{z_2+A}\right|.$$

七、本题考查数列、极限等知识和运算以及推理能力.

解法一:(1)$a_n=S_n-S_{n-1}$

$$=-b(a_n-a_{n-1})-\frac{1}{(1+b)^n}+\frac{1}{(1+b)^{n-1}}$$

$$=-b(a_n-a_{n-1})+\frac{b}{(1+b)^n}\quad(n\geq 2).$$

由此解得

$$a_n=\frac{b}{1+b}a_{n-1}+\frac{b}{(1+b)^{n+1}}\quad(n\geq 2).\qquad ①$$

(2) ∵ $a_1=S_1=-ba_1+1-\frac{1}{1+b}$

∴ $a_1=\frac{b}{(1+b)^2}$ ②

$$a_n=\frac{b}{1+b}\left[\frac{b}{1+b}a_{n-2}+\frac{b}{(1+b)^n}\right]+\frac{b}{(1+b)^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{b}{1+b}\right)^2a_{n-2}+\frac{b+b^2}{(1+b)^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{b}{1+b}\right)^2\left[\frac{b}{1+b}a_{n-3}+\frac{b}{(1+b)^{n-1}}\right]+\frac{b+b^2}{(1+b)^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{b}{1+b}\right)^3a_{n-3}+\frac{b+b^2+b^3}{(1+b)^{n+1}},$$

由此推得

$$a_n=\left(\frac{b}{1+b}\right)^{n-1}a_1+\frac{b+b^2+\cdots+b^{n-1}}{(1+b)^{n+1}},\qquad ③$$

把②代入③得

$$a_n=\frac{b+b^2+\cdots+b^{n-1}+b^n}{(1+b)^{n+1}},$$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{b-b^{n+1}}{(1-b)(1-b)^{n+1}}, & b\neq 1,\\ \dfrac{n}{2^{n+1}}, & b=1.\end{cases}$$

(3) $S_n=\frac{(-b)(b-b^{n+1})}{1-b}\cdot(\frac{1}{1+b})^{n+1}+1-(\frac{1}{1+b})^n$，$(b\neq1)$，

∵0<b<1 时

$$\lim_{n\to\infty}b^n=0，\quad \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1+b})^n=0$$

所以当 0<b<1 时

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

解法二:(1)同解法一，

$$a_n=\frac{b}{1+b}a_{n-1}+\frac{b}{(1+b)^{n+1}}\quad(n\geq2). \qquad ①$$

(2)同解法一得,

$$\therefore\quad a_1=\frac{b}{(1+b)^2} \qquad ②$$

由①得

$$a_2=\frac{b^2}{(1+b)^3}+\frac{b}{(1+b)^3}=\frac{b+b^2}{(1+b)^3},$$

$$a_3=\frac{b}{1+b}\cdot\frac{b+b^2}{(1+b)^3}+\frac{b}{(1+b)^4}=\frac{b+b^2+b^3}{(1+b)^4}.$$

我们来证明

$$a_n=\frac{b+b^2+\cdots+b^{n-1}+b^n}{(1+b)^{n+1}},$$

由②知 n=1 时③式成立.

设 n=K 时③式成立,则由递推公式①有

$$a_{k+1}=(\frac{b}{1+b})a_k+\frac{b}{(1+b)^{k+2}}$$

$$=\frac{b}{1+b}\cdot\frac{b+b^2+\cdots+b^k}{(1+b)^{k+1}}+\frac{b}{(1+b)^{k+2}}$$

$$=\frac{b+b^2+\cdots+b^{k+1}}{(1+b)^{k+2}},$$

即当 n=K+1 时③式也成立.由归纳原理,对任意自然数 n,③式成立.

以下同解法一.

(3)同解法一.

八、本题考查距离公式、中点坐标等解析几何知识、最小值知识及分析问题的能力.

解法一:设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,AB 长度为 3,那么

$$x_1=y_1^2，x_2=y_2^2， \qquad ①$$

$$3^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$=(y_2^2-y_1^2)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$=(y_2-y_1)^2\cdot[(y_2+y_1)^2+1]. \qquad ②$$

线段 AB 的中点 M(x,y)到 y 轴的距离为

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)$$
$$=\frac{1}{4}[(y_1-y_2)^2+((y_1+y_2)^2+1)-1]$$
$$\geq\frac{1}{4}[2\sqrt{(y_1-y_2)^2+((y_1+y_2)^2+1)}-1].$$

由②得

$$x\geq\frac{1}{4}(2\times3-1)=\frac{5}{4},$$

并且当

$$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2+1=3 \qquad ③$$

时x**取得最小值**$x_0=\frac{5}{4}$.

下面证明 x 能达到最小值,根据题意不防设 $y_1>y_2$,由③得

$$\begin{cases} y_1-y_2=\sqrt{3}, & ④ \\ y_1+y_2=\pm\sqrt{2} & ⑤ \end{cases}$$

由此解得 y_1,y_2,由①解得 x_1,x_2,所以 x 可取得最小值 $\frac{5}{4}$. 相应的 M 点的纵坐标

$$y_0=\frac{y_1+y_2}{2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以这时点 M 的坐标为 $(\frac{5}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(\frac{5}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$

解法二:设 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$,那么

$$x_1=y_1^2,\ x_2=y_2^2, \qquad ①$$
$$3^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2. \qquad ②$$

AB 中点 M(x,y)到 y 轴的距离

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{2}.$$

由②得

$$3^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2$$
$$=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+x_1+x_2-2y_1y_2$$
$$=4x^2-4y_1^2y_2^2+2x-2y_1y_2$$

整理得

$$4(y_1y_2)^2+2y_1y_2+3^2-4x^2-2x=0, \qquad ④$$

因 y_1y_2 为实数,故

$$\triangle=4-4\times4(3^2-4x^2-2x)\geq0,$$

由此得

$$16x^2+8x+1\geq4\times3^2,$$
$$(4x+1)^2\geq4\times3^2,$$

因为 $x\geq0$,所以

4x+1≥6,

$x \geq \frac{5}{4}$. ⑤

当 $x=\frac{5}{4}$ 时△=0,由④解得

$y_1y_2=-\frac{1}{4}$ ⑥

$$(y_1+y_2)^2=y_1^2+y_2^2+2y_1y_2$$
$$=2x-\frac{1}{2}=2\times\frac{5}{4}-\frac{1}{2}=2,$$
$$y_1+y_2=\pm\sqrt{2}.$$ ⑦

由⑥,⑦可解得 y_1,y_2,由①即得相应 x_1,x_2,故 AB 中点 M 距 y 轴最短距离为

$$x_0=\frac{5}{4},$$

且相应中点坐标为

$$(\frac{5}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2})\text{或}(\frac{5}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

解法三:同解法二得④,由此得

$$(2x+\frac{1}{2})^2=3^2+(2y_1y_2+\frac{1}{2})^2,$$

当 $2y_1y_2+\frac{1}{2}=0$**时,**$(2x+\frac{1}{2})^2$ **取最小值**3^2,

$$(2x+\frac{1}{2})^2=3^2,$$
$$x=\frac{5}{4}$$

以下同解法二.

九、本题考查极限和导数运算.

解:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2x})^x$

$$=\lim_{n\to\infty}[(1-\frac{1}{2x})^{-2x}]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(2) $y'=\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}$.

1987年试题
(文史类)

一、本题每个小题都给出代号为A,B,C,D的四个结论,其中只有一个结论是正确的,把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内.

(1)设S,T是两个非空集合,且$S\not\subseteq T$,$T\not\subseteq S$,令$X=S\cap T$,那么$S\cup X$等于

(A)S　　(B)T　　(C)φ　　(D)X

【　】

(2)椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,令$c^2=a^2-b^2$,那么它的准线方程为

(A)$y=\pm\frac{a^2}{c}$　　(B)$y=\pm\frac{b^2}{c}$

(C)$x=\pm\frac{a^2}{c}$　　(D)$x=\pm\frac{b^2}{c}$

【　】

(3)设$\log_3 4\cdot\log_4 8\cdot\log_8 m=\log_4 16$,那么m等于

(A)$\frac{9}{2}$　　(B)9

(C)18　　(D)27

【　】

(4)复数sin40°-icos40°的辐角为

(A)40°　　(B)140°

(C)220°　　(D)310°

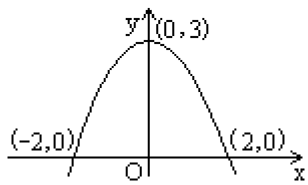
【　】

(5)二次函数y=f(x)的图象如图所示,那么此函数为

(A)$y=x^2-4$　　(B)$y=4-x^2$

(C)$y=\frac{3}{4}(4-x^2)$　　(D)$y=\frac{3}{4}(2-x)^2$

【　】



(6)在区间(-∞,0)上为增函数的是

(A)$y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$　　(B)$y=\frac{x}{1-x}$

(C)$y=-(x+1)^2$　　(D)$y=1+x^2$

【　】

(7)已知平面上一点P在原坐标系中的坐标为(0,m)(m≠0),而在平移后

得到的新坐标系中的坐标为(m,0),那么新坐标系的原点 O′在原坐标系中的坐标为

(A)(-m,m)　　　　　　　　(B)(m,-m)

(C)(m,m)　　　　　　　　(D)(-m,-m)

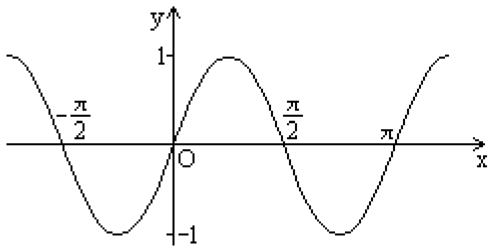
【　】

(8)要得到$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图象,只要将$y=\sin 2x$的图象(如图)

(A)向左平行移动$\frac{\pi}{3}$　　　　　　(B)向右平行移动$\frac{\pi}{3}$

(C)向左平行移动$\frac{\pi}{6}$　　　　　　(D)向右平行移动$\frac{\pi}{6}$

【　】



二、只要求写出结果.

(1)求 $y=\sin^2 2x$ 的周期.

(2)已知方程$\frac{x^2}{2+\lambda}-\frac{y^2}{1+\lambda}=1$表示双曲线,求λ的范围.

(3)若$(1+x)^n$的展开式中,x^3项的系数等于 x 项的系数的 7 倍,求 n.

(4)求$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{2n}{n^2})$.

(5)由 1,2,3,4,5 五个数字组成没有重复数字且 1 与 2 不相邻的五位数,求这种五位数的个数.

(6)求函数 $y=\log_2(1+2x-3x^2)$的定义域.

(7)圆锥底面面积为 3π,母线与底面所成的角为 60°,求它的体积.

三、发电厂发出的电是三相交流电,它的三根导线上的电流强度分别是时间 t 的函数:

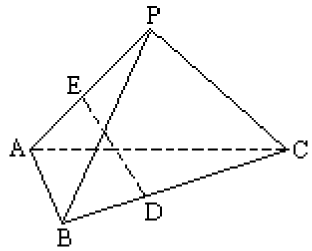
$I_A=I\sin\omega t$,$I_B=I\sin(\omega t+120°)$,$I_C=I\sin(\omega t+240°)$,

求$I_A+I_B+I_C$的值.

四、在复平面内,已知等边三角形的两个顶点所表示的复数分别为

2,$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,求第三个顶点所表示的复数.

五、如图,三棱锥 P—ABC 中,已知 PA⊥BC,PA=BC=L,PA,BC 的公垂线 ED=h,求证:三棱锥P—ABC的体积$V=\frac{1}{6}L^2h$.



六、设对所有实数 x,不等式

$$x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\cdot\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$$

恒成立.求 a 的取值范围.

七、设数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$的前 n 项的和 S_n 与 a_n 的关系是 $S_n=ka_n+1$(其中 k 是与 n 无关的实数,且 $k\neq1$).

(1)试写出由 n,k 表示的 a_n 表达式;

(2)**若**$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$**,求**k**的取值范围.**

八、正方形 ABCD 在直角坐标平面内,已知其一条边 AB 在直线 y=x+4 上,C,D 在抛物线 $x=y^2$ 上,求正方形 ABCD 的面积.

1987 年试题(文史类)答案

一、本题考查基本概念和基本性质.

(1)A; (2)C; (3)B; (4)D;
(5)C; (6)B; (7)A; (8)D.

二、本题考查基本概念和基本运算,只需写出结果.

(1)$\frac{\pi}{2}$; (2)$\lambda<-2$**或**$\lambda>-1$; (3)8; (4)2;

(5)72; (6)$-\frac{1}{3}<x<1$; (7)3π;

三、本题主要考查三角运算的能力.

解:$I_A+I_B+I_C=I\sin\omega t+I\sin(\omega t+120°)+I\sin(\omega t+240°)$

$=I[\sin\omega t+\sin(\omega t+120°)+\sin(\omega t+240°)]$

$=I[\sin\omega t+(\sin\omega t\cos120°+\cos\omega t\sin120°)+(\sin\omega t\cos240°+\cos\omega t\sin240°)]$

$=I[\sin\omega t+(-\frac{1}{2}\sin\omega t+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t)+(-\frac{1}{2}\sin\omega t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\omega t)]$

$=I\cdot0$

$=0$.

四、本题主要考查复数等基本知识和推理能力.

解法一:设第三个顶点所表示的复数为 $z=x+yi(x,y\in R)$.

由题意得:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-0)^2=(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{\sqrt{3}}{2})^2, & ① \\ (x-2)^2+(y-0)^2=(2-\frac{1}{2})^2+(0-\frac{\sqrt{3}}{2})^2. & ②\end{cases}$$

由①得$y=\sqrt{3}(x-1)$． ③

由②得 $x^2-4x+4+y^2=3$． ④

把③代入④得 $2x^2-5x+2=0$，

解得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=2$．

把 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=2$分别代入③，得

$$y_1=\frac{\sqrt{3}}{2}，y_2=\sqrt{3}．$$

答：第三个顶点所表示的复数为$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$或$2+\sqrt{3}i$．

解法二：设第三个顶点所表示的复数为 z,那么根据题意，

$z-2$和$z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$的模相等，辐角差为$\frac{\pi}{3}$(或$-\frac{\pi}{3}$)，

因而$\frac{z-2}{z-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$， ①

或.$\frac{z-2}{z-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)}=\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$． ②

由①式得

$$z-2=[z-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)](\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

$$z-2=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2,$$

$$[1-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)]z=2-[\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i+(\frac{\sqrt{3}}{2}i)^2],$$

$$(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)z=2-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

$$(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)z=\frac{2}{5}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z=2+\sqrt{3}i；$$

由②式得

$$z-2=[z-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)](\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

$$z-2=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z-(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i),$$

$$(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)z=2-(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}),$$

$$z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

五、本题主要考查线面关系和体积计算等基本知识和推理能力.

证明:连结 AD,PD,

∵BC⊥ED,BC⊥AP,

又∵ED∩AP=E,　　∴BC⊥平面 PAD,

令 BD=L_1,　　　　∵ED⊥PA,

$$\therefore S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}AP\cdot ED=\frac{1}{2}L\cdot h,$$

∴三棱锥 B—PAD 体积

$$V_1=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}Lh)L_1=\frac{1}{6}LhL_1,$$

同理,令 DC=l_2,得三棱锥 C—PAD 的体积

$$V_2=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}Lh)L_2=\frac{1}{6}LhL_2,$$

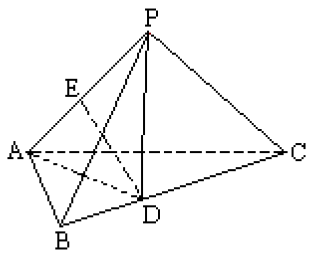
∵$l=l_1+l_2$,

∴三棱锥 P—ABC 体积

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{6}LhL_1+\frac{1}{6}LhL_2$$

$$=\frac{1}{6}Lh(L_1+L_2)$$

$$=\frac{1}{6}L^2h.$$



六、本题主要考查对数、不等式等基本知识及运算能力.

解:由题意得

$$\begin{cases}\log_2\frac{4(a+1)}{a}>0, & ①\\ (2\log_2\frac{2a}{a+1})^2-4\log_2\frac{4(a+1)}{a}\cdot\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}<0 & ②\\ \frac{a}{a+1}>0 & ③\end{cases}$$

令$z=\log_2\frac{2a}{a+1}$，则②变为，

$z^2-(\log_2 8-z)\cdot(-2z)<0$，

化简为 $z(6-z)<0$,

解得 $z>6$,或 $z<0$. ④

①式变形为 $\log_2 8-z>0$,

∴ $Z<3$, ⑤

综合④,⑤得 $z<0$,

即$\log_2\frac{2a}{a+1}<0$， ⑥

由③,⑥得

$0<\frac{2a}{a+1}<1$，

解得 $0<a<1$.

答:当 $0<a<1$ 时不等式恒成立.

七、本题主要考查数列、极限、不等式等基本知识和推理能力.

(1)解法一:$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=(ka_{n+1}+1)-(ka_n+1)$,

$a_{n+1}=ka_{n+1}-ka_n$,

$(k-1)a_{n+1}=ka_n$,

因为 $k\neq1$,解得

$$a_{n+1}=\frac{k}{k-1}a_n. \quad ①$$

若 $k\neq0$,则由题设知 $a_1\neq0$,由①式易知 $a_n\neq0$,$n>1$,

所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{k}{k-1}$.

故该数列是公比为$\frac{k}{k-1}$的等比数列,

其首项为 $a_1=S_1=ka_1+1$, $a_1=\frac{1}{1-k}$,

∴ $a_n=\frac{1}{1-k}(\frac{k}{k-1})^{n-1}=-\frac{k^{n-1}}{(k-1)^n}$.

当 $k=0$ 时,由①式知 $a_n=0$,$n>1$,上式当 $n>1$ 时对 $k=0$ 也成立.

解法二:$a_n=S_n-S_{n-1}=ka_n+1-(ka_{n-1}+1)\ (n\geq2)$,

∴ $a_n=\frac{k}{k-1}a_{n-1}$,

$a_n=\frac{k}{k-1}(\frac{k}{k-1})a_{n-2}=-(\frac{k}{k-1)})^2a_{n-2}$,

由此推得

$$a_n=(\frac{k}{k-1})^{n-1}a_1\ \ (n\geq2).$$

∵ $a_1=S_1$,

即 $a_1=ka_1+1$,

$$a_1=\frac{1}{1-k}.$$

代入①得

$$a_n=\frac{1}{1-k}\left(\frac{k}{1-k}\right)^{n-1}\ (n\geq 2).$$

(2)**若** $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$,**即** $\lim\limits_{n\to\infty}(ka_n+1)=1$,

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-1)=0$,

即 $\lim\limits_{n\to\infty}k\cdot\frac{-k^{n-1}}{(k-1)^n}=0$,

∴ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{k}{k-1}\right)=0$,

∴ $\left|\frac{k}{k-1}\right|<1$

∴ $-1<\frac{k}{k-1}<1$,

∴ $\begin{cases}\frac{1}{k-1}<0,\\ \frac{2k-1}{k-1}>0.\end{cases}$

解得 $k<\frac{1}{2}$.

八、本题主要考查直线、抛物线等方面的知识和推理能力.

解法一:设 CD 的直线方程为 y=x+b.

由方程组

$$\begin{cases}y=x+b & ①\\ x=y^2 & ②\end{cases}$$

解得 $C(x_C,y_C)$,$D(x_D,y_D)$两点坐标为

$$\begin{cases}x_C=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4b})-b,\\ y_C=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4b});\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_D=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4b})-b,\\ y_D=\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4b}).\end{cases}$$

$$|CD|=\sqrt{(x_C-x_D)^2+(y_C-y_D)^2}=\sqrt{2-8b},$$

$$|AD|=\frac{|x_D-y_D+4|}{\sqrt{2}}=\frac{|4-b|}{\sqrt{2}}.$$

∵ **|CD|=|AD|,**

$\therefore \dfrac{|4-b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2-8b}$ ③

$\therefore (4-b)^2=(\sqrt{2}-\sqrt{2-8b})^2$，

$b^2+8b+12=0$,

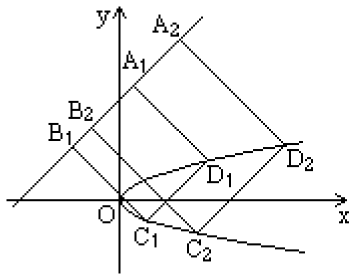
解得 $b_1=-2, b_2=-6$.

经检验 b_1, b_2 均为方程③的根.

∴面积 $S_1=|C_1D_1|^2=2-8b_1=18$,

面积 $S_2=|C_2D_2|^2=2-8b_2=50$.

答:这样的正方形有两个,其面积分别为 18,50.



解法二:∵,C,D 两点在抛物线上,

∴可设 $C(s^2,s)$, $D(t^2,t)$,

又∵ A,B 在直线 $y=x+4$ 上,

∴ AB 与 y 轴成 45°角,

∵ 四边形 ABCD 为正方形,

∴ 对角线 AC 与边 AB 也成 45°角,

∴ AC∥y 轴,同理 BD∥x 轴,

∴ 可设 $A(s^2,s^2+4)$, $B(t-4,t)$

∵AB∥CD,对角线 AC,BD 互相垂直平分,所以有

$$\begin{cases}\dfrac{t-s}{t^2-s^2}=1,\\ \dfrac{(s^2+4)+s}{2}=t.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}s_1=-1,\\ s_1=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}s_2=-2,\\ t_2=3.\end{cases}$

∴面积 $S_1=|C_1D_1|^2=[(-1)^2-2^2]^2+[(-1)-2]^2=18$,

面积 $S_2=|C_2D_2|^2=[(-2)^2-3^2]^2+[(-2)-3]^2=50$.

答:这样的正方形有两个,其面积分别为 18,50.

1988 年试题
(理工农医类)

一、本题每一个小题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论，其中只有一个是正确的,把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内.

(1)$(\frac{1-i}{1+i})^2$的值等于

(A)1　　(B)-1　　(C)I　　(D)-i

【　】

(2)设圆 M 的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=2$,直线 L 的方程为 $x+y-3=0$,点 P 的坐标为(2,1),那么

(A)点 P 在直线 L 上,但不在圆 M 上

(B)点 P 在圆 M 上,但不在直线 L 上

(C)点 P 既在圆 M 上,又在直线 L 上

(D)点 P 既不在圆 M 上,也不在直线 L 上

【　】

(3)集合{1,2,3}的子集总共有

(A)7 个　　(B)8 个

(C)6 个　　(D)5 个

【　】

(4)已知双曲线方程$\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$,那么它的焦距是

(A)10　　(B)5

(C)$\sqrt{15}$　　(D)$2\sqrt{15}$

【　】

(5)在$(x-\sqrt{3})^{10}$的展开式中,x^6的系数是

(A)$-27C_{10}^6$　　(B)$27C_{10}^4$

(C)$-9C_{10}^6$　　(D)$9C_{10}^4$

【　】

(6)函数 $y=\cos^4x-\sin^4x$ 的最小正周期是

(A)π　　(B)2π

(C)$\frac{\pi}{2}$　　(D)4π

【　】

(7)方程$4\cos^2x-4\sqrt{3}\cos x+3=0$的解集是

(A)$\left\{x \mid x=k\pi+(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6},\ k\in Z\right\}$.

(B)$\left\{x \mid x=k\pi+(-1)^k \cdot \frac{\pi}{3},\ k\in Z\right\}$.

(C)$\left\{x \mid x=2k\pi\pm\frac{\pi}{6},\ k\in Z\right\}$.

(D)$\left\{x \mid x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3},\ k\in Z\right\}$.

【　】

(8) 极坐标方程$\rho=\dfrac{4}{3-2\cos\theta}$所表示的曲线是

(A)圆　　(B)双曲线右支

(C)抛物线　　(D)椭圆

【　　】

(9)如图,正四棱台中,A'D'所在的直线与BB'所在的直线是

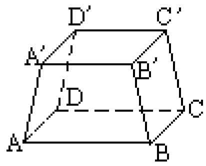
(A)相交直线

(B)平行直线

(C)不互相垂直的异面直线

(D)互相垂直的异面直线

【　　】



(10) $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\dfrac{1}{5}+\mathrm{arctg}3)$的值等于

(A) 4　　(B) $\dfrac{1}{4}$

(C)$\dfrac{1}{8}$　　(D) 8

【　　】

(11)设命题甲:△ABC的一个内角为60°.

命题乙:△ABC的三个内角的度数成等差数列.那么

(A)甲是乙的充分条件,但不是必要条件

(B)甲是乙的必要条件,但不是充分条件

(C)甲是乙的充要条件

(D)甲不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件

【　　】

(12)复平面内,若复数z满足｜z+1｜=｜z-i｜,则z所对应的点Z的集合构成的图形是

(A)圆　　(B)直线　　(C)椭圆　　(D)双曲线

【　　】

(13)如果曲线 $x^2-y^2-2x-2y-1=0$ 经过平移坐标轴后的新方程为 $x'^2-y'^2=1$，那么新坐标系的原点在原坐标系中的坐标为

(A)(1,1)　　(B)(-1,-1)

(C)(-1,1)　　(D)(1,-1)

【　　】

(14)假设在200件产品中有3件是次品,现在从中任意抽取5件,其中至少有2件次品的抽法有

(A) $C_3^2C_{197}^3$种　　(B) $C_3^2C_{197}^3+C_3^3C_{197}^2$种

(C) $C_{200}^5-C_{197}^5$种　　(D) $C_{200}^5-C_3^1C_{197}^4$种

【　　】

(15)如图,二面角α－AB－β的平面角是锐角,C 是面α内的一点(它不在棱 AB

上),点 D 是点 C 在面β上的射影,点 E 是棱 AB 上满足∠CEB 为锐角的任意一点,那么

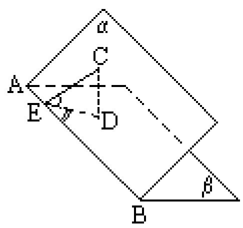
(A)∠CEB>∠DEB

(B)∠CEB=∠DEB

(C)∠CEB<∠DEB

(D)∠CEB 与∠DEB 的大小关系不能确定

【　　】



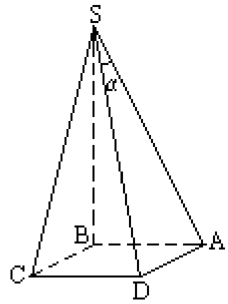
二、只要求直接写出结果.

(1)求复数$\sqrt{3}-i$的模和辐角的主值.

(2)解方程 $9^{-x}-2\cdot 3^{1-x}=27$.

(3)已知$\sin\theta=-\frac{3}{5}$，$3\pi<\theta<\frac{7\pi}{2}$，求$tg\frac{\theta}{2}$的值.

(4)如图,四棱锥 S-ABCD 的底面是边长为 1 的正方形,侧棱 SB 垂直于底面,并且$SB=\sqrt{3}$,用α表示∠ASD,求 sin α的值.

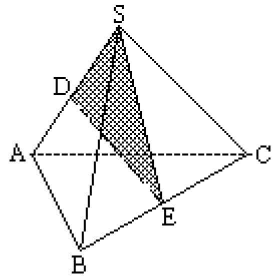


(5)已知等比数列$\{a_n\}$的公比 q>1,并且 $a_1=b(b\neq0)$,求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_6+a_7+a_8+\cdots+a_n}.$$

三、已知$tgx=a$,求$\frac{3\sin x+\sin 3x}{3\cos x+\cos 3}$的值.

四、如图,正三棱锥 S-ABC 的侧面是边长为 a 的正三角形,D 是 SA 的中点,E 是 BC 的中点,求△SDE 绕直线 SE 旋转一周所得到的旋转体的体积.



五、设$a>0,a\neq 1,t>0$,比较$\frac{1}{2}\log_a t$与$\log a\frac{t+1}{2}$的大小,并证明你的结论.

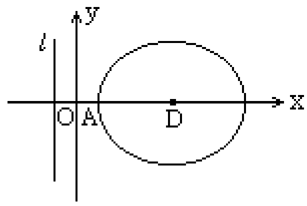
六、给定实数 a,a≠0,且 a≠1 设函数

$$y=\frac{x-1}{ax-1}\ (x\in R,\ \text{且}\ x\neq\frac{1}{a}).$$

证明(1)经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴;

(2)这个函数的图象关于直线 y=x 成轴对称图形.

七、如图,直线L的方程$x=-\frac{p}{2}$,其中$p>0$;椭圆的中心为$D(2+\frac{p}{2},0)$,焦点在x轴上,长半轴长为2,短半轴长为1,它的一个顶点为$A(\frac{p}{2},0)$,问p在哪个范围内取值时,椭圆上有四个不同的点,它们中每一个点到点A的距离等于该点到直线L的距离.



1988 年试题(理工农医类)答案

一、本题考查基本概念和基本运算.

(1)B (2)C (3)B (4)A (5)D (6)A (7)C (8)D

(9)C (10)D (11)C (12)B (13)D (14)B (15)A

二、本题考查基础知识和基本运算,只需要写出结果.

$(1)2$,$\frac{11}{6}\pi$; $(2)x=-2$; $(3)-3$; $(4)\frac{\sqrt{5}}{5}$; $(5)1$.

三、本题主要考查三角公式和进行三角式的恒等变形的能力.

解法一:

$$\frac{3\sin x+\sin 3x}{3\cos x+\cos 3x}$$
$$=\frac{2\sin x+\sin x+\sin 3x}{2\cos x+\cos x+\cos 3x}$$
$$=\frac{2\sin x+2\sin 2x\cos x}{2\cos x+2\cos 2x\cos x}$$

$$= \frac{2\sin x + 4\sin x\cos^2 x}{2\cos x(1+\cos 2x)}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}x(1+2\cos^2 x)}{2\cos^2 x}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}x}{2}(\sec^2 x + 2)$$

$$= \frac{\mathrm{tg}x}{2}(\mathrm{tg}^2 x + 3)$$

$$= \frac{a}{2}(a^2 + 3).$$

解法二:

原式 $= \frac{3\sin x + \sin(2x + x)}{3\cos x + \cos(2x + x)}$

$$= \frac{3\sin x + \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x}{3\cos x + \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x}$$

$$= \frac{\sin x(3 + 2\cos^2 x + \cos 2x)}{\cos x(3 + \cos 2x - 2\sin^2 x)}$$

$$= \mathrm{tg}x \cdot \frac{4\cos^2 x + 2}{4 - 4\sin^2 x}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}x}{2} \cdot \frac{2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}x}{2}(2 + \sec^2 x)$$

$$= \frac{\mathrm{tg}x}{2}(2 + 1 + \mathrm{tg}^2 x)$$

$$= \frac{a}{2}(a^2 + 3).$$

解法三:

原式 $= \frac{3\sin x + 3\sin x - 4\sin^3 x}{3\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x}$

$$= \frac{\mathrm{tg}x}{2} \cdot \frac{1 + 2\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\mathrm{tg}x}{2}(\sec^2 x + 2)$$

$$= \frac{\mathrm{tg}x}{2}(1 + \mathrm{tg}^2 x + 2)$$

$$= \frac{a}{2}(a^2 + 3).$$

解法四:

原式 $= \frac{3\sin x + 3\sin x - 4\sin^3 x}{3\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x}$

$$= \frac{6\sin x - 4\sin^3 x}{4\cos^3 x}$$

$$= \frac{3\mathrm{tg}x\sec^2 x - 2\mathrm{tg}^3 x}{2}$$

$$= \frac{3\mathrm{tg}x + 3\mathrm{tg}^3x - 2\mathrm{tg}^3x}{2}$$

$$= \frac{3\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}^3x}{2}$$

$$= \frac{3a + a^3}{2}$$

四、本题主要考查空间想象能力、体积计算等知识和推理能力.

解法一:连接 AE,因为△SBC 和△ABC 都是边长为 a 的正三角形,并且 SE 和 AE 分别是它们的中线,所以 SE=AE,从而△SEA 为等腰三角形,由于 D 是 SA 的中点,所以 ED⊥SA.

作 DF⊥SE,交 SE 于点 F.考虑直角△SDE 的面积,得到

$$\frac{1}{2}SE \cdot DF = \frac{1}{2}SD \cdot DE,$$

所以,
$$DF = \frac{SD \cdot DE}{SE} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot DE}{SE}.$$

易知,
$$SE = \sqrt{SB^2 - BE^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$DE = \sqrt{SE^2 - SD^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a,$$

所以,
$$DF = \frac{a}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{6}a.$$

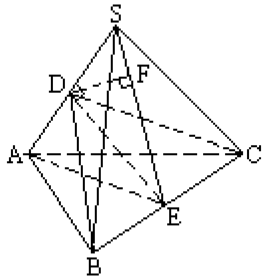
所求的旋转体的体积是以 DF 为底面半径,分别以 SF 和 EF 为高的两个圆锥的体积的和,即

$$\frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2 \cdot SF + \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2 \cdot EF$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2 \cdot SE$$

$$= \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi}{36}a^3.$$



解法二:连结BD.因为BD是正三角形SBA的中线,所以BD⊥SA.连结CD,同理CD⊥SA.于是SA⊥平面BDC,所以SA⊥DE.

作DF⊥SE,交SE于点F.在直角△SDE中,

$$SD^2=SF\cdot SE,$$

于是 $$SF=\frac{SD^2}{SE}=\frac{(\frac{a}{2})^2}{a\sin 60°}=\frac{\sqrt{3}}{6}a.$$

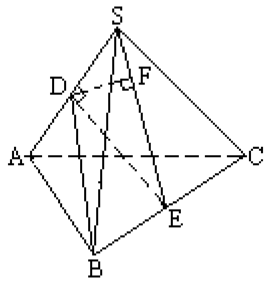
所以 $$DF=\sqrt{SD^2-SF^2}=\sqrt{(\frac{a}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{6}a)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}a,$$

$$EF=SE-SF=\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{6}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

所求的旋转体的体积为

$$\frac{1}{3}\pi\cdot(\frac{\sqrt{6}}{6}a)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}a+\frac{1}{3}\pi\cdot(\frac{\sqrt{6}}{6}a)^2\cdot(\frac{\sqrt{3}}{3}a)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{108}a^3+\frac{\sqrt{3}\pi}{54}a^3=\frac{\sqrt{3}\pi}{36}a^3.$$



五、本题主要考查对数函数的性质,以及运用重要不等式解决问题的能力.

解法一:

$$\log_a\frac{t+1}{2}-\frac{1}{2}\log_a t$$

$$=\log_a\frac{t+1}{2}-\log_a\sqrt{t}$$

$$=\log_a\frac{t+1}{2\sqrt{t}}$$

$$=\log_a\frac{\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}}{2}.$$

$\because \quad \dfrac{\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}}{2} \ge \sqrt{\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}}=1$，

当且仅当$\sqrt{t}=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$，即$t=1$时，取“ = ”号．

$\therefore$ 当$t=1$时，$\log_a \dfrac{\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}}{2}=0$，

即 $\log_a \dfrac{t+1}{2}=\dfrac{1}{2}\log_a t$．

当 $t\neq 1$时，$\log_a \dfrac{t+1}{2} \neq \dfrac{1}{2}\log_a t$．此时分两种情况．．

情形 1：0<a<1．

$\therefore \quad \dfrac{\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}}{2} > 1$，

$\therefore \quad \log_a \dfrac{\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}}{2} < 0$，

于是 $\log_a \dfrac{t+1}{2} < \dfrac{1}{2}\log_a t$．

情形 2：a>1．

$\because \quad \dfrac{\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}}{2} > 1$，

$\therefore \quad \log_a \dfrac{\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}}{2} > 0$，

于是 $\log_a \dfrac{t+1}{2} > \dfrac{1}{2}\log_a t$．

解法二：当 t>0 时，由重要不等式可得

$$\frac{t+1}{2} \ge \sqrt{t},$$

当且仅当 t=1 时取“=”号．

$\therefore t=1$时，$\log_a \dfrac{t+1}{2}=\log_a \sqrt{t}$

即 $\log_a \dfrac{t+1}{2}=\dfrac{1}{2}\log_a t$．

$t\neq 1$时，$\dfrac{t+1}{2} > \sqrt{t}$．

当 0<a<1 时，$y=\log_a x$ 是减函数，

所以 $\log_a \frac{t+1}{2} < \log_a \sqrt{t}$，

即 $\log_a \frac{t+1}{2} < \frac{1}{2}\log_a t$.

当 a>1 时，$y=\log_a x$ 是增函数，

所以 $\log_a \frac{t+1}{2} > \log_a \sqrt{t}$，

即 $\log_a \frac{t+1}{2} > \frac{1}{2}\log_a t$.

解法三：因为 t>0，又有

$$\frac{t^2+2t+1}{4} - t = \frac{(t-1)^2}{4} \geq 0,$$

当且仅当 t=1 时取“=”号，

所以 $\frac{t+1}{2} \geq \sqrt{t}$,

当且仅当 t=1 时取“=”号.

以下同解法二.

六、本题主要考查考生在正确理解数学概念(函数的图象的概念，轴对称图形的概念等)的基础上进行推理的能力，以及灵活运用学过的代数和解析几何的知识(互为反函数的图象之间的关系，两条直线平行的条件等)解决问题的能力.

证法一：

(1)设 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$是这个函数图象上任意两个不同的点，

则$x_1 \neq x_2$，且 $y_2 - y_1 = \frac{x_2-1}{ax_2-1} - \frac{x_1-1}{ax_1-1}$

$$= \frac{ax_1x_2 - x_2 - ax_1 + 1 - (ax_1x_2 - x_1 - ax_2 + 1)}{(ax_2-1)(ax_1-1)}$$

$$= \frac{a(x_2-x_1) - (x_2-x_1)}{(ax_2-1)(ax_1-1)}$$

$$= \frac{(x_2-x_1)(a-1)}{(ax_2-1)(ax_1-1)}$$

∵ $a \neq 1$，且 $x_1 \neq x_2$，

∴ $y_2 - y_1 \neq 0$.

从而直线M_1M_2的斜率$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \neq 0$，

因此，M_1M_2 不平行于 x 轴.

(2) 设点$P(x', y')$是这个函数的图象上任意一点，则$x' \neq \frac{1}{a}$，且

$$y' = \frac{x'-1}{ax'-1}. \quad ①$$

易知点$P(x', y')$关于直线$y = x$的对称点P'的坐标为(y', x').

由①式得

即 $\begin{cases} y'(ax'-1)=x'-1, \\ x'(ay'-1)=y'-1, \end{cases}$ ②

即,由此得 a=1,与已知矛盾,

$$\therefore\quad ay'-1\neq 0.$$

于是由②式得

$$x'=\frac{y'-1}{ay'-1}$$

这说明点$P'(y',x')$在已知函数的图象上，因此，这个函数的图象关于直线$y=x$成轴对称图形.

证法二:

(1)设 $M_1(x_1,y_1)$,$M_2(x_2,y_2)$是这个函数的图象上任意两个不同的点,则$x_1\neq x_2$.假如直线 M_1M_2 平行于 x 轴,那么 $y_1=y_2$,即

$$\frac{x_1-1}{ax_1-1}=\frac{x_2-1}{ax_2-1},$$

亦即$(x_1-1)(ax_2-1)=(x_2-1)(ax_1-1)$,

整理得 $a(x_1-x_2)=x_1-x_2$,

因为 $x_1\neq x_2$,所以 a=1,这与已知矛盾.

因此 M_1M_2 不平行于 x 轴.

(2)先求所给函数的反函数:由

$$y=\frac{x-1}{ax-1}\ (x\in R, x\neq\frac{1}{a}),$$

得 $y(ax-1)=x-1$,

即 $(ay-1)x=y-1$.

假如 $ay-1=0$，则$y=\frac{1}{a}$，代入所给函数的解析式，得

$$\frac{1}{a}=\frac{x-1}{ax-1}$$

即 $ax-a=ax-1$,

由此得 a=1,与已知矛盾,所以 $ay-1\neq 0$.

因此得到

$$x=\frac{y-1}{ay-1}，\text{其中}y\neq\frac{1}{a}，$$

这表明函数$y=\frac{x-1}{ax-1}\ (x\in R,\text{且}x\neq\frac{1}{a})$的反函数是

$$y=\frac{x-1}{ax-1}(x\in R,\text{且}x\neq\frac{1}{a}).$$

由于函数 $y=f(x)$的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 y=x 对称,所以函数$y=\frac{x-1}{ax-1}\ (x\in R,\text{且}x\neq\frac{1}{a})$的图象关于直线$y=x$成轴对称图形.

证法三:

(1)任取一条与 x 轴平行的直线 *L*,则 *l* 的方程为 y=c(c 为常数).

考虑 *L* 与所给函数的图象是否相交以及交点数目的情况.

$$\begin{cases} y = \dfrac{x-1}{ax-1}, & ① \\ y = c. & ② \end{cases}$$

将②代入①得

$$c(ax-1)=x-1,$$

即 $$(ca-1)x=c-1. \qquad ③$$

当$c = \dfrac{1}{a}$时，由③式变成

$$0 = \frac{1}{a} - 1,$$

由此得$a = 1$，这与已知矛盾，这说明当$c = \dfrac{1}{a}$时原方程组无解，从而直线 L 与所给函数的图象无交点.

当$c \neq \dfrac{1}{a}$时，由③式解得

$$x = \frac{c-1}{ca-1},$$

这说明原方程组恰有一个解,从而直线 L 与所给函数的图象恰有一个交点.

综上述,平行于 x 轴的直线与所给函数的图象或者不相交,或者恰有一个交点.

因此,经过这个函数图象上任意两个不同的点的直线不平行于 x 轴.

(2)同证法一或证法二.

七、本题主要考查考生利用方程研究曲线性质的能力,以及综合运用学过的代数知识(一元二次方程的判别式,根与系数的关系,解二元二次方程组,解不等式等)去解题的能力.

解法一:假定椭圆上有符合题意的四个点,则这四个点的坐标都应满足下面的椭圆方程:

$$\frac{[x-(2+\frac{p}{2})]^2}{4} + y^2 = 1,$$

又这四个点的坐标应满足下面的抛物线方程

$$y^2=2px,$$

从而它们都是下面的方程组的解:

$$\begin{cases} \dfrac{[x-(2+\frac{p}{2})]^2}{4} + y^2 = 1, & ① \\ y^2 = 2px. & ② \end{cases}$$

将②式代入①式,得

$$[x-(2+\frac{p}{2})]^2 + 8px = 4,$$

即 $$x^2 + (7p-4)x + \frac{p^2}{4} + 2p = 0. \qquad ③$$

由于上述方程组有 4 个不同的实数解,所以方程③的判别式应大于零,

即 $$(7p-4)^2 - 4(\frac{p^2}{4} + 2p) > 0,$$

整理得　　　　$3p^2-4p+1>0$，

解此不等式得 $p>1$，或 $p<\frac{1}{3}$.　　　　④

由已知，椭圆上的点的横坐标都大于零，所以方程③的两个根应都为正数，于是得　　　　$7p-4<0$，

解此不等式得

$$p<\frac{4}{7}\qquad ⑤$$

由④、⑤以及已知条件得

$$0<p<\frac{1}{3}$$

反之，当 $0<p<\frac{1}{3}$ 时，方程③的判别式大于零，从而方程③有两个不相等的实数根 x_1,x_2，又由于方程③的常数项 $\frac{p^2}{4}+2p>0$，一次项系数 $7p-4<0$，所以 x_1,x_2 都为正数.

把 x_1 及 x_2 分别代入②中，可解得

$$y_1=\sqrt{2px_1}，\ y_2=-\sqrt{2px_1}，\ y_3=\sqrt{2px_2}，\ y_4=-\sqrt{2px_2}.$$

显然 y_1,y_2,y_3,y_4 两两不相等.

由于 (x_1,y_1) 适合②式和③式，从而也适合①式，因此点 $M_1(x_1,y_1)$ 是符合题意的点.

同理 $M_2(x_1,y_2)$，$M_3(x_2,y_3)$，$M_4(x_2,y_4)$ 都是符合题意的点，并且它们是互不相同的.

综上述，所求的 p 的取值范围是 $0<p<\frac{1}{3}$.

解法二：椭圆上有四个点符合题意的充要条件是方程组

$$\begin{cases}\dfrac{[x-(2+\frac{p}{2})]^2}{4}+y^2=1, & ①\\ y^2=2px. & ②\end{cases}$$

有四个不同的实数解.

由于

$$\begin{cases}\dfrac{[x-(2+\frac{p}{2})]^2}{4}+y^2=1,\\ y^2=2px.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}[x-(2+\frac{p}{2})]^2+8px=4,\\ y^2=2px\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(7p-4)x+\dfrac{p^2}{4}+2p=0, & ③\\ y^2=2px\end{cases}$$

所以原方程组有四个不同的实数解，当且仅当方程③有两个不相等的正根.而这又等介于

$$\begin{cases}\triangle=(7p-4)^2-4\left(\frac{p^2}{4}+2p\right)>0, \\ \frac{p^2}{4}+2p>0, \\ 7p-4<0.\end{cases}$$

在 p>0 的条件下,解此不等式组,得到

$$0<p<\frac{1}{3}$$

所以，所求的p的取值范围为 $0<p<\frac{1}{3}$.

解法三:易求出所给椭圆的方程为

$$\frac{[x-(2+\frac{p}{2})]^2}{4}+y^2=1,$$

假定这个椭圆上有符合题意的四个点,则这些点的坐标应是下述方程组的解:

$$\begin{cases}\frac{[x-(2+\frac{p}{2})]^2}{4}+y^2=1, & ① \\ \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|. & ②\end{cases}$$

把②式化简得 $y^2=2px$.

以下同解法一.

1988年试题
(文史类)

一、本题每一个小题都给出代号为 A,B,C,D 的四个结论,其中只有一个是正确的,把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内.

(1)$(\frac{1-i}{1+i})^2$的值等于

(A)1　　(B)-1　　(C)i　　(D)-i

【　　】

(2)设圆 M 的方程为$(x-3)^2+(y-2)^2=2$,直线 L 的方程为 $x+y-3=0$,点 P 的坐标为(2,1),那么

(A)点 P 在直线 L 上,但不在圆 M 上.

(B)点 P 在圆 M 上,但不在直线 L 上.

(C)点 P 既在圆 M 上,又在直线 L 上.

(D)点 P 既不在直线 L 上,也不在圆 M 上.

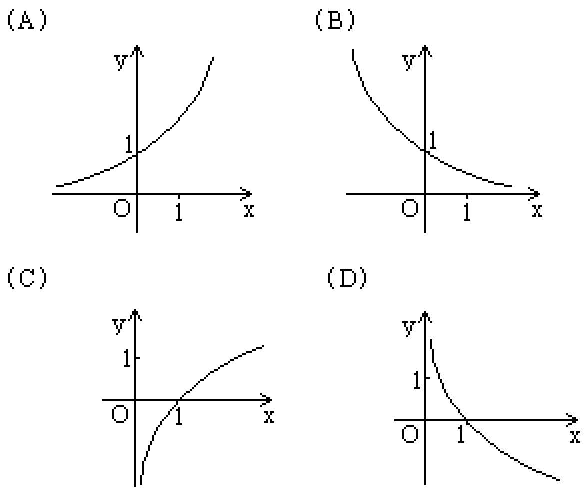
【　　】

(3)集合{1,2,3}的子集总共有

(A)5 个　　(B)6 个　　(C)7 个　　(D)8 个

【　　】

(4)函数 $y=a^x(0<a<1)$的图像是



【　　】

(5)已知双曲线方程为$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$,那么它的焦距是

(A)6　　(B)3

(C) $2\sqrt{31}$　　(D) $\sqrt{31}$

【　　】

(6)在复平面内,与复数 $z=-1-i$ 的共轭复数对应的点位于

(A)第一象限　　(B)第二象限

(C)第三象限　　(D)第四象限

【　　】

(7) 在$(x-\sqrt{3})^{10}$的展开式中,x^6的系数是

(A) $-27C_{10}^{6}$　　　　(B) $27C_{10}^{4}$

(C) $-9C_{10}^{6}$　　　　(D) $9C_{10}^{4}$

【　　】

(8) 函数$y=3\cos(\frac{2}{5}x-\frac{\pi}{6})$的最小正周期是

(A) $\frac{2}{5}\pi$　　　　(B) $\frac{5}{2}\pi$

(C) 2π　　　　(D) 5π

【　　】

(9) $\sin(-\frac{19}{6}\pi)$的值等于

(A) $\frac{1}{2}$　　　　(B) $-\frac{1}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【　　】

(10) 直线$x+ay=2a+2$与$ax+y=a+1$平行(不重合)的充要条件是

(A) $a=\frac{1}{2}$　　　　(B) $a=-\frac{1}{2}$

(C) $a=1$　　　　(D) $a=-1$

【　　】

(11) 函数$y=\frac{x-2}{2x-1}$ $(x\in R且x\neq\frac{1}{2})$的反函数是

(A) $y=\frac{x-2}{2x-1}$ $(x\in R且x\neq\frac{1}{2})$.

(B) $y=\frac{2x-1}{x-2}$ $(x\in R且x\neq 2)$.

(C) $y=\frac{x+2}{2x-1}$ $(x\in R且x\neq\frac{1}{2})$.

(D) $y=\frac{2x-1}{x+2}$ $(x\in R且x\neq -2)$.

【　　】

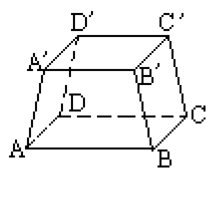
(12) 如图,正四棱台中,$A'D'$所在的直线与BB'所在的直线是

(A)相交直线

(B)平行直线

(C)不互相垂直的异面直线

(D)互相垂直的异面直线



【　　】

(13) 函数$y=\sin(x+\frac{\pi}{4})$在闭区间

(A)$[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$上是增函数

(B) $[-\frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]$上是增函数

(C) $[-\pi,0]$上是增函数

(D) $[-\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}]$上是增函数

【　　】

(14)假设在200件产品中有3件次品,现在从中任意抽取5件,其中至少有2件次品抽法有

(A) $C_3^2C_{197}^3+C_3^3C_{197}^2$种　　(B) $C_3^2C_{197}^3$种

(C) $C_{200}^5-C_{197}^5$种　　(D) $C_{200}^5-C_3^1C_{197}^4$种

【　　】

(15)已知二面角α-AB-β的平面角是锐角θ,α内一点C到β的距离为3,点C到棱AB的距离为4,那么tgθ的值等于

(A) $\frac{3}{4}$　　(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{3}{7}\sqrt{7}$　　(D) $\frac{1}{3}\sqrt{7}$

【　　】

二、只要求直接写出结果.

(1)求复数$\sqrt{3}-i$的模和辐角的主值.

(2)解方程$9^{-x}-2\cdot3^{1-x}=27$.

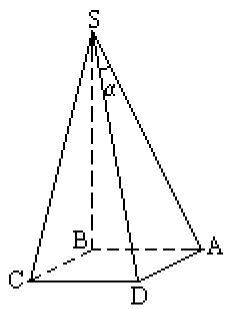
(3)已知$\sin\theta=-\frac{3}{5}$,$3\pi<\theta<\frac{7\pi}{2}$,求$tg\frac{\theta}{2}$的值.

(4)一个直角三角形的两条直角边的长分别为3㎝和4㎝,将这个直角三角形以斜边为轴旋转一周,求所得旋转体的体积.

(5)求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+3n-1}$.

三、证明$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$.

四、如图,四棱锥S-ABCD的底面是边长为1的正方形,侧棱SB垂直于底面,并且$SB=\sqrt{3}$,用α表示∠ASD,求sinα的值.



五、在双曲线$x^2-y^2=1$的右支上求点P(a,b),使该点到直线y=x的距离为$\sqrt{2}$.

六、解不等式$\lg(x-\frac{1}{x})<0$.

七、一个数列：当$\{a_n\}$当n为奇数时，$a_n = 5n+1$；当n为偶数时，$a_n = 2^{\frac{n}{2}}$．求这个数列的前 2m 项的和(m 是正整数)．

1988 年试题(文史类)答案

一、本题考查基本概念和基本性质．

(1)B　(2)C　(3)D　(4)B　(5)A　(6)B　(7)D　(8)D

(9)A　(10)C　(11)A　(12)C　(13)B　(14)A　(15)C

二、本题考查基本概念和基本运算，只需要写出结果．

(1)2，$\frac{11}{6}\pi$；　(2)$x=-2$；　(3) -3；

(4) $\frac{48}{5}\pi cm^3$；　(5) 3．

三、本题主要考查三角公式和进行三角式的恒等变形的能力．

证明：

$$\begin{aligned}\cos3\alpha &= \cos(2\alpha+\alpha)\\ &= \cos2\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha\\ &= (2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha\\ &= 2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha\\ &= 2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha\\ &= 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \cos3\alpha = 4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

四、本题主要考查线面关系以及空间想象能力．

解法一：因为 SB 垂直于底面 ABCD，所以斜线段 SA 在底面上的射影为 AB，由于 DA⊥AB，所以

DA⊥SA．

从而　$\sin\alpha = \frac{AD}{SD} = \frac{1}{SD}$．

连结BD，易知　$BD=\sqrt{2}$．

由于 SB⊥BD，所以

$$SD=\sqrt{SB^2+BD^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}.$$

因此，　$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$．

解法二：连结 BD，因为 SB 垂直底面 ABCD，所以 SB⊥BD，SB⊥BA．

又　$BD=\sqrt{2}$，

于是　$SD=\sqrt{SB^2+BD^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$，

$SA=\sqrt{SB^2+BA^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$．

由于$(\sqrt{5})^2=2^2+1^2$，即$SD^2=SA^2+AD^2$，

所以△SAD 为直角三角形，其中

∠SAD 为直角．

于是　$\sin\alpha=\frac{AD}{SD}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}$．

解法三：同解法二求出 SD，SA．

在△SAD 中,有

$$\cos\alpha=\frac{SA^2+SD^2-AD^2}{2\cdot SA\cdot SD}$$

$$=\frac{2^2+(\sqrt{5})^2-1^2}{2\cdot 2\cdot \sqrt{5}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

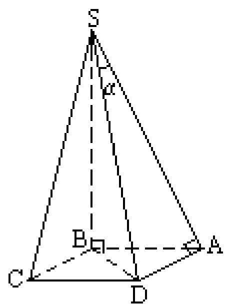
从而 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$$=\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{5}})^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\sqrt{5}.$$

解法四:因为 SB 垂直于底面 ABCD,所以 SB⊥DA.由于 ABCD 是正方形,所以 DA⊥AB,从而 DA⊥平面 SAB,由此得 DA⊥SA.

以下同解法一.



五、本题主要考查点到直线的距离公式,以及利用方程研究图形性质的能力.

解法一:由题意,点 P 的坐标(a,b)是下述方程组的解:

$$\begin{cases} a^2-b^2=1 & ① \\ \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} & ② \end{cases}$$

并且 a>0.

由①式得$a^2=1+b^2$,因为$a>0$,所以$a=\sqrt{1+b^2}>\sqrt{b^2}=|b|$,

从而$a>b$,于是由②式得 $a-b=2$. ③

把③式代入①式得

$$(b+2)^2-b^2=1,$$

解得 $b=-\frac{3}{4}$,代入③得$a=\frac{5}{4}$.

∴ 所求的点P的坐标为$(\frac{5}{4},-\frac{3}{4})$.

解法二:由题意,点 P 的坐标为(a,b)是下述方程组的解:

$$\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \end{cases}$$

并且 a>0.

由上述方程组得到下面两个方程组:

(i) $\begin{cases} a^2-b^2=1, \\ a-b=2, \end{cases}$ 或 (ii) $\begin{cases} a^2-b^2=1, \\ a-b=-2. \end{cases}$

解方程组(i):

$$\begin{cases} a^2-b^2=1, \\ a-b=2, \end{cases}$$

得 $\begin{cases} a=\dfrac{5}{4}, \\ b=-\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

解方程组(ii):

$$\begin{cases} a^2-b^2=1, \\ a-b=-2, \end{cases}$$

得 $\begin{cases} a=-\dfrac{5}{4}, \\ b=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

这个解不合题意,应当舍去.

∴ 所求的点P的坐标为$(\dfrac{5}{4}, -\dfrac{3}{4})$.

六、本题主要考查对数函数的性质,不等式的解法.

解法一:由对数函数的定义域和性质知道,x 应满足

$$0<x-\frac{1}{x}<1.$$

即 $\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x}>0, \\ \dfrac{x^2-1}{x}<1. \end{cases}$

情形1 $\begin{cases} x^2-1>0, \\ x>0, \\ \dfrac{x^2-1}{x}<1. \end{cases}$

即 $\begin{cases} x^2>1, \\ x>0, \\ x^2-1<x. \end{cases}$

此不等式组的解集为 $\{x \mid 1<x<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

情形2 $\begin{cases} x^2-1<0, \\ x<0, \\ \dfrac{x^2-1}{x}<1. \end{cases}$

即 $\begin{cases} x^2<1, \\ x<0, \\ x^2-1>x. \end{cases}$

此不等式组的解集为 $\{x \mid -1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$.

所以原不等式的解集是 $\{x \mid -1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}\} \cup \{x \mid 1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

解法二:由对数函数的定义域和性质得

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}>0, \\ x-\dfrac{1}{x}<1. \end{cases}$$

即 $\begin{cases} x>\dfrac{1}{x}, \\ x<1+\dfrac{1}{x}. \end{cases}$

情形 1 当 x>0 时,上述不等式组变成

$$\begin{cases} x^2>1, \\ x^2<x+1. \end{cases}$$

解得 $1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

情形 2 当 x<0 时,原不等式组变成

$$\begin{cases} x^2<1, \\ x^2>x+1. \end{cases}$$

解得 $-1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

所以原不等式的解集是 $\{x \mid -1<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}\} \cup \{x \mid 1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.

七、本题主要考查考生灵活运用等差数列和等比数列的概念以及公式进行解题的能力.

解法一:数列$\{a_n\}$的第 1,3,5,…,2m-1 项依次为:

6,16,26,…,5(2m-1)+1,

它们形成公差为 10 的等差数列,此数列共有 m 项,因此它们的和为

$$\frac{[6+5(2m-1)+1]m}{2}=5m^2+m.$$

数列$\{a_n\}$的第 2,4,6,…,2m 项依次为:

$2,2^2,2^3,\cdots,2^m$,

它们形成公比为 2 的等比数列,此数列共有 m 项,
因此它们的和为

$$\frac{2(1-2^m)}{1-2}=2^{m+1}-2.$$

所以数列$\{a_n\}$的前 2m 项的和为:

$$S_{2m}=5m^2+m+2^{m+1}-2.$$

解法二:因为

$$a_{2k+1}-a_{2k-1}=[5(2k+1)+1]-[5(2k-1)+1]=10,$$

所以 $a_1,a_3,a_5,\cdots,a_{2m-1}$ 是公差为 10 的等差数列.

因为

$$a_{2k+2}\div a_{2k}=(2^{\frac{2k+2}{2}})\div(2^{\frac{2k}{2}})=2,$$

所以 $a_2,a_4,a_6,\cdots a_{2m}$ 是公比为 2 的等比数列.

从而数列$\{a_n\}$的前 2m 项的和为:

$$\begin{aligned}S_{2m}&=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2m})\\&=\frac{[6+5(2m-1)+1]m}{2}+\frac{2(1-2^m)}{1-2}\\&=5m^2+m+2^{m+1}-2.\end{aligned}$$

1989 年试题
(理工农医类)

一、选择题:每一个小题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论,其中只有一个是正确的,把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内.

(1)如果$I=\{a,b,c,d,e\}$, $M=\{a,c,d\}$, $N=\{b,d,e\}$,其中I是全集,那么$\overline{M}\cap\overline{N}$等于

(A)Φ　　(B)$\{d\}$

(C)$\{a,c\}$　　(D)$\{b,e\}$

【　　】

(2)与函数 y=x 有相同图象的一个函数是

(A)$y=\sqrt{x^2}$　　(B)$y=\frac{x^2}{x}$

(C)$y=a^{\log_a x}$,其中$a>0$,$a\neq 1$　　(D)$y=\log_a a^x$,其中$a>0,a\neq 1$

【　　】

(3)如果圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$,高为2,那么它的侧面积是

(A)$4\sqrt{3}\pi$　　(B)$2\sqrt{2}\pi$

(C)$2\sqrt{3}\pi$　　(D)$4\sqrt{2}\pi$

【　　】

(4) $\cos[\arcsin(-\frac{4}{5})-\arccos(-\frac{3}{5})]$的值等于

(A)-1　　(B)$-\frac{7}{25}$

(C)$\frac{7}{25}$　　(D)$-\frac{\sqrt{10}}{5}$

【　　】

(5)已知$\{a_n\}$是等比数列,如果$a_1+a_2+a_3=18$,$a_2+a_3+a_4=-9$,且$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$,那么$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的值等于

(A)8　　(B)16

(C)32　　(D)48

【　　】

(6)如果$|\cos\theta|=\frac{1}{5}$, $\frac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$,那么$\sin\frac{\theta}{2}$的值等于

(A)$-\frac{\sqrt{10}}{5}$　　(B)$\frac{\sqrt{10}}{5}$

(C)$-\frac{\sqrt{15}}{5}$　　(D)$\frac{\sqrt{15}}{5}$

【　　】

(7)设复数z满足关系式$z+|\bar{z}|=2+i$,那以z等于

(A)$-\frac{3}{4}+i$　　(B)$\frac{3}{4}-i$

(C) $-\frac{3}{4}-i$　　　　(D) $\frac{3}{4}+i$

【　　】

(8)已知球的两个平行截面的面积分别为 5π和 8π,它们位于球心的同一侧,且相距为 1,那么这个球的半径是

(A)4　　　　(B)3

(C)2　　　　(D)5

【　　】

(9)已知椭圆的极坐标方程是 $\rho=\frac{5}{3-2\cos\theta}$，那么它的短轴长是

(A) $\frac{10}{3}$　　　　(B) $\sqrt{5}$

(C) $2\sqrt{5}$　　　　(D) $2\sqrt{3}$

【　　】

(10)如果双曲线 $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ 上一点P到它的右焦点的距离是8，那么点P到它的右准线的距离是

(A)10　　　　(B) $\frac{32\sqrt{7}}{7}$

(C) $2\sqrt{7}$　　　　(D) $\frac{32}{5}$

【　　】

(11)已知 $f(x)=8+2x-x^2$,如果 $g(x)=f(2-x^2)$,那么 $g(x)$

(A)在区间(-1,0)上是减函数

(B)在区间(0,1)上是减函数

(C)在区间(-2,0)上是增函数

(D)在区间(0,2)上是增函数

【　　】

(12)由数字 1,2,3,4,5 组成没有重复数字的五位数,其中小于 50000 的偶数共有

(A)60 个　　　　(B)48 个

(C)36 个　　　　(D)24 个

【　　】

二、填空题:只要求直接填写结果.

(13)方程 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sqrt{2}$ 的解集是____________.

(14)不等式 $|x^2-3x|>4$ 的解集是____________.

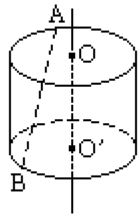
(15)函数 $y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 的反函数的定义域是____________.

(16)已知 $(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$,那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$________.

(17)已知A和B是两个命题，如果A是B的充分条件，那么B是A的______条件；$\overline{A}$和$\overline{B}$的____________条件.

(18)如图,已知圆柱的底面半径是 3,高是 4,A、B 两点分别在两底面的

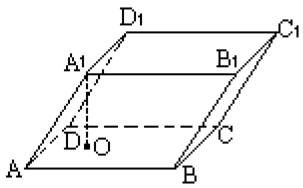
圆周上,并且 AB=5,那么直线 AB 与轴 OO'之间的距离等于_________.



三、解答题.

(19)证明 $\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$.

(20)如图,在平行六面体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,已知 $AB=5, AD=4, AA_1=3, AB\perp AD$, $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\frac{\pi}{3}$



(Ⅰ)求证:顶点 A_1 在底面 ABCD 的射影 O 在∠BAD 的平分线上;

(Ⅱ)求这个平行六面体的体积.

(21)自点 A(-3,3)发出的光线 L 射到 x 轴上,被 x 轴反射,其反射光线所在直线与圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切,求光线 L 所在直线的方程.

(22)已知 a>0,a≠1,试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_a 2(x^2-a^2$ 有解的 k 的取值范围.

(23)是否存在常数 a,b,c 使得等式

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(an^2+bn+c)$$

对一切自然数 n 都成立?并证明你的结论.

(24)设 f(x)是定义在区间(-∞,+∞)上以 2 为周期的函数,对 k∈Z,用 I_k 表示区间(2k-1,2k+1],已知当 $x\in I_0$ 时 $f(x)=x^2$.

(Ⅰ)求 f(x)在 I_k 上的解析表达式;

(Ⅱ)对自然数 k,求集合 M_k={a|使方程 f(x)=ax 在 I_k 上有两个不相等的实根}.

1989 年试题(理工农医类)答案

一、本题考查基本概念和基本运算.

(1)A	(2)D	(3)C	(4)A	(5)B	(6)C
(7)D	(8)B	(9)C	(10)D	(11)A	(12)C

二、本题考查基本概念和基本运算,只需要写出结果.

(13) $\left\{x \middle| x=2kx+\frac{7x}{12}\text{,或}x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{12}\text{,}k\in Z\right\}$

(14) $\left\{x \middle| x<-1\text{,或}x>4\right\}$

(15)(-1,1)

(16)-2

(17)必要,必要

(18) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

注：第(13)题答案也可写成$\left\{x \middle| x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}，\ k \in Z\right\}$.

三、解答题.

(19)本题主要考查:运用三角公式进行恒等变形的能力.

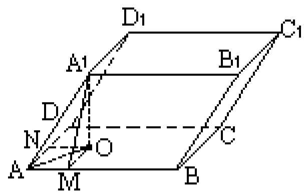
证法一:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\frac{3x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2} &= \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}} - \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2})}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{2\sin x}{\cos x + \cos 2x}
\end{aligned}$$

证法二:

$$\begin{aligned}
\frac{2\sin x}{\cos x + \cos 2x} &= \frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin(\frac{3x}{2} - \frac{x}{2})}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}} - \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \\
&= \operatorname{tg}\frac{3x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

(20)本题主要考查:线面关系,三垂线定理以及空间想象能力.



(Ⅰ)证明:

如图,连结 A_1O,则 A_1O⊥底面 ABCD.作 OM⊥AB 交 AB 于 M,作 ON⊥AD 交 AD 于 N,连结 A_1M,A_1N.

由三垂线定理得

$A_1M\perp AB$,$A_1N\perp AD$.

∵ $\angle A_1AM=\angle A_1AN$,

∴ $Rt\triangle A_1NA\cong Rt\triangle A_1MA$.

∴ $A_1M=A_1N$.

∴ OM=ON.

∴ 点 O 在∠BAD 的平分线上.

(Ⅱ)解:

∵ $AM=AA_1\cos\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

∴ $AO=AM\csc\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

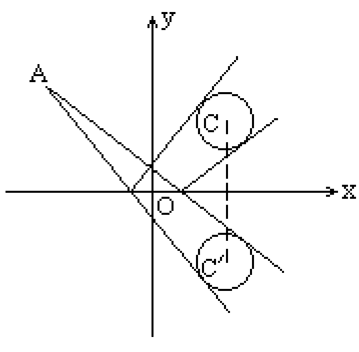
又在$Rt\triangle AOA_1$中,$A_1O^2=AA_1^2-AO^2=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$,

∴ $A_1O=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

∴ 平行六面体的体积

$V=5\cdot4\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}=30\sqrt{2}$.

(21)本题主要考查:直线和圆的方程以及灵活应用有关知识解决问题的能力.



解法一:

已知圆的标准方程是

$(x-2)^2+(y-2)^2=1$,

它关于 x 轴的对称圆的方程是

$(x-2)^2+(y+2)^2=1$.

设光线 L 所在直线的方程是

$y-3=k(x+3)$ (其中斜率 k 待定).

由题设知对称圆的圆心 C'(2,-2)到这条直线的距离等于 1,即

$$d=\frac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1.$$

整理得

$12k^2+25k+12=0$,

解得 $k=-\frac{3}{4}$,或 $k=-\frac{4}{3}$.

故所求的直线方程是

$$y-3=-\frac{3}{4}(x+3),\text{或 } y-3=-\frac{4}{3}(x+3),$$

即 $3x+4y-3=0$,或 $4x+3y+3=0$.

解法二:

已知圆的标准方程是

$(x-2)^2+(y-2)^2=1$.

设光线 L 所在直线的方程是

$y-3=k(x+3)$ (其中斜率 k 待定).

由题意知 $k\neq0$,于是 L 的反射点的坐标是

$$\left(-\frac{3(1+k)}{k},\ 0\right).$$

因为光线的入射角等于反射角,所以反射光线 L' 所在直线的方程是

$$y=-k\left\{x+\frac{3(1+k)}{k}\right\},$$

即 $y+kx+3(1+k)=0$.

这条直线应与已知圆相切,故圆心 C 到它的距离等于 1,

即 $$d=\frac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1.$$

以下同解法一.

(22)本题主要考查:对数函数的性质以及解不等式的能力.

解:

由对数函数的性质可知,原方程的解 x 应满足

$$\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2, & ①\\ x-ak>0, & ②\\ x^2-a^2>0. & ③\end{cases}$$

当①,②同时成立时,③显然成立,因此只需解

$$\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2, & ①\\ x-ak>0. & ②\end{cases}$$

由①得 $2kx=a(2+k^2)$. ④

当 $k=0$ 时,由 $a>0$ 知④无解,因而原方程无解.

当 $k\neq0$ 时,④的解是 $x=\frac{a(1+k^2)}{2k}$ ⑤

把⑤代入②,得

$$\frac{1+k^2}{2k}>k.$$

当　$k<0$ 时得 $k^2>1$,即 $-\infty<k<-1$.

当　$k>0$ 时得 $k^2<1$,即 $0<k<1$.

综合得,当 k 在集合 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 内取值时,原方程有解.

(23)本题主要考查:综合运用待定系数法、数学归纳法解决问题的能力.

解法一:

假设存在 a,b,c 使题设的等式成立,这时,

令　$n=1$　得　$4=\frac{1}{6}(a+b+c)$,

令　$n=2$　得　$22=\frac{1}{2}(4a+2b+c)$,

令　$n=3$　得　$70=9a+3b+c$,

经整理得

$$\begin{cases}a+b+c=24,\\4a+2b+c=44,\\9a+3b+c=70.\end{cases}$$

解得

$a=3,b=11,c=10$.

于是,对 $n=1,2,3$ 下面等式成立:

$$1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10).$$

记　$S_n=1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2$.

设　$n=k$ 时上式成立,即

$$S_k=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10),$$

那么

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+(k+1)(k+2)^2\\&=\frac{k(k+1)}{12}(3k^2+11k+10)+(k+1)(k+2)^2\\&=\frac{k(k+1)}{12}(k+2)(3k+5)+(k+1)(k+2)^2\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{12}(3k^2+5k+12k+24)\\&=\frac{(k+1)(k+2)}{12}[3(k+1)^2+11(k+1)+10].\end{aligned}$$

也就是说,等式对 $n=k+1$ 也成立.

综上所述,当 $a=3,b=11,c=10$ 时,题设的等式对一切自然数 n 成立.

解法二:

因为　$n(n+1)^2=n^3+2n^2+n$,所以

$S_n=1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\cdots+n(n+1)^2$

$=(1^3+2\cdot 1^2+1)+(2^3+2\cdot 2^2+2)+\cdots+(n^3+2n^2+n)$

$=(1^3+2^3+\cdots+n^3)+2(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)$.

由于下列等式对一切自然数 n 成立:

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

由此可知

$$S_n=\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+11n+10).$$

综上所述,当 a=3,b=11,c=10 时,

题设的等式对一切自然数 n 成立.

(24)本题主要考查:周期函数的概念,解不等式的能力.

(Ⅰ)解:∵ f(x)是以 2 为周期的函数,

∴ 当 $k\in Z$ 时,2k 是 f(x)的周期.

又∵ 当 $x\in I_k$ 时,$(x-2k)\in I_0$,

∴ $f(x)=f(x-2k)=(x-2k)^2$.

即对 $k\in Z$,当 $x\in I_k$ 时,$f(x)=(x-2k)^2$.

(Ⅱ)解:当 $k\in N$ 且 $x\in I_k$ 时,利用(Ⅰ)的结论可得方程 $(x-2k)^2=ax$,

整理得 $x^2-(4k+a)x+4k^2=0$.

它的判别式是

$\triangle=(4k+a)^2-16k^2=a(a+8k)$.

上述方程在区间 I_k 上恰有两个不相等的实根的充要条件是 a 满足

$$\begin{cases} a(a+8k)>0, \\ 2k-1<\frac{1}{2}[4k+a-\sqrt{a(a+8k)}], \\ 2k+1\geq\frac{1}{2}[4k+a+\sqrt{a(a+8k)}]. \end{cases}$$

化简得

$$\begin{cases} a(a+8k)>0, & ① \\ \sqrt{a(a+8k)}<2+a, & ② \\ \sqrt{a(a+8k)}\leq 2-a. & ③ \end{cases}$$

由①知 a>0,或 a<-8k.

当 a>0 时:

因 $2+a>2-a$,故从②,③可得 $\sqrt{a(a+8k)}\leq 2-a$,即

$$\begin{cases} a(a+8k)\leq(2-a)^2, \\ 2-a>0. \end{cases}$$

即$\begin{cases}(2k+1)a \le 1, \\ a < 2.\end{cases}$

即 $0 < a \le \dfrac{1}{2k+1}$.

当 a<-8k 时:

$2+a < 2-8k < 0$，易知$\sqrt{a(a+8k)} < 2+a$无解.

综上所述，a应满足 $0 < a \le \dfrac{1}{2k+1}$.

故所求集合

$$M_k = \left\{a \middle| 0 < a \le \frac{1}{2k+1}\right\}.$$

1989年试题

(文史类)

一、选择题:每一个小题都给出代号为A、B、C、D的四个结论,其中只有一个是正确的,把你认为正确的结论的代号写在题后的括号内.

(1)如果$I=\{a,b,c,d,e\}$, $M=\{a,c,d\}$, $N=\{b,d,e\}$,其中I是全集,那么$\overline{M}\cap\overline{N}$等于

(A)φ　　(B){d}

(C){a,c}　　(D){b,e}

【　】

(2)与函数y=x有相同图象的一个函数是

(A) $y=\sqrt{x^2}$

(B) $y=\dfrac{x^2}{x}$

(C) $y=a^{\log_a x}$,其中$a>0,a\neq1$

(D) $y=\log_a a^x$,其中$a>0,a\neq1$

【　】

(3)如果圆锥的底面半径为$\sqrt{2}$,高为2,那么它的侧面积是

(A)$2\sqrt{3}\pi$　(B)$2\sqrt{2}\pi$

(C)$4\sqrt{3}\pi$　(D)$4\sqrt{2}\pi$

【　】

(4)已知$\{a_n\}$是等比数列,如果$a_1+a_2=12$,$a_2+a_3=-6$,且$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,那么$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的值等于

(A)8　　(B)16

(C)32　　(D)48

【　】

(5)如果$(1-2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_7x^7$,那么$a_1+a_2+\cdots+a_7$的值等于

(A)-2　(B)-1　(C)0　(D)2

【　】

(6)如果$|\cos\theta|=\dfrac{1}{5}$,$\dfrac{5\pi}{2}<\theta<3\pi$,那么$\sin\dfrac{\theta}{2}$的值等于

(A) $-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　(B) $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

(C) $-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$　　(D) $\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

【　】

(7)与直线2x+3y-6=0关于点(1,-1)对称的直线是

(A)3x-2y+2=0　　(B)2x+3y+7=0

(C)3x-2y-12=0　　(D)2x+3y+8=0

【　】

(8)已知球的两个平行截面的面积分别为5π和8π,它们位于球心的同一侧且

相距为 1,那么这个球的半径是

(A)4　　(B)3

(C)2　　(D)5

【　　】

(9)由数字 1,2,3,4,5 组成没有重复数字的五位数,其中偶数共有

(A)60 个　　(B)48 个

(C)36 个　　(D)24 个

【　　】

(10)如果双曲线$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$上的一点P到它的右焦点的距离是8，那么P到它的右准线的距离是

(A)10　　(B)$\frac{32\sqrt{7}}{7}$

(C)$2\sqrt{7}$　　(D)$\frac{32}{5}$

【　　】

(11)如果$|x|\le\frac{\pi}{4}$,那么函数$f(x)=\cos^2x+\sin x$的最小值是

(A)$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　　(B)$-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

(C)-1　　(D)$\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

【　　】

(12)已知 $f(x)=8+2x-x^2$,如果 $g(x)=f(2-x^2)$,那么 $g(x)$

(A)在区间(-2,0)上是增函数

(B)在区间(0,2)上是增函数

(C)在区间(-1,0)上是减函数

(D)在区间(0,1)上是减函数

【　　】

二、填空题:只要求直接填写结果.

(13)给定三点 A(1,0),B(-1,0),C(1,2),那么通过点 A 并且与直线 BC 垂直的直线方程是________________.

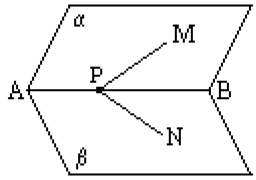
(14)不等式$|x^2-3x|>4$ 的解集是______________.

(15)函数$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$的反函数的定义域是 ______________.

(16)已知 A 和 B 是两个命题,如果 A 是 B 的充分条件,那么 B 是 A 的___________条件;$\overline{A}$是$\overline{B}$的________________条件.

(17)已知$0<a<1,0<b<1$,如果$a^{\log_b(x-3)}<1$,那么x的取值范围是_______.

(18)如图,P 是二面角α-AB-β棱 AB 上的一点,分别在α,β上引射线 PM,PN,如果∠BPM=∠BPN=45°,∠MPN=60°,那么二面角α-AB-β的大小是_____.



三、解答题.

(19)设复数$z=(1-\sqrt{3}i)^5$,求z的模和辐角的主值.

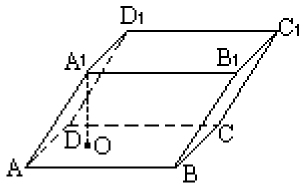
(20)证明$\mathrm{tg}\dfrac{3x}{2}-\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$.

(21) 如图,在平行六面体ABCD—$A_1B_1C_1D_1$中,已知:

$$AB=5,AD=4,AA_1=3,AB\perp AD,\angle A_1AB=\angle A_1AD=\frac{\pi}{3}.$$

(i)求证:顶点A_1在底面ABCD的射影O在∠BAD的平分线上;

(ii)求这个平行六面体的体积.

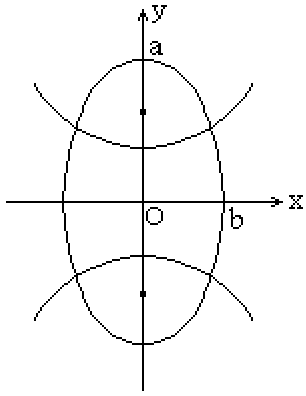


(22)用数学归纳法证明

$(1\cdot 2^2-2\cdot 3^2)+(3\cdot 4^2-4\cdot 5^2)+\cdots+[(2n-1)(2n)^2-2n(2n+1)^2]=-n(n+1)(4n+3)$.

(23)已知$a>0,a\neq 1$,试求使方程$\log_a(x-ak)=\log_{a^2}(x^2-a^2)$有解的k的取值范围.

(24)给定椭圆:$\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b>0)$,求与这个椭圆有公共焦点的双曲线,使得以它们的交点为顶点的四边形面积最大,并求相应的四边形的顶点坐标.



1989年试题(文史类)答案

一、本题考查基本概念和基本运算.

(1)A	(2)D	(3)A	(4)B	(5)A	(6)C
(7)D	(8)B	(9)B	(10)D	(11)D	(12)C

二、本题考查基础知识和基本运算，只需要写出结果.

(13) $x+y-1=0$　　(14) $\{x\mid x<-1,或\ x>4\}$　　(15) $(-1,1)$

(16)必要，必要　　(17) $(3,4)$　　(18) $90°$

三、解答题.

(19)本题主要考查：复数的模与辐角主值的概念以及复数的运算能力.

解：∵ $(1-3i)^5=2^5(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i)^5$

$$=32(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi)^5$$

$$=32(\cos\frac{25}{3}\pi+i\sin\frac{25}{3}\pi)$$

$$=32(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}).$$

∴复数z的模为32，辐角的主值为 $\frac{\pi}{3}$.

(20)本题主要考查：运用三角公式进行恒等变形的能力.

证法一：$\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\dfrac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$$=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin(\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}x)}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}$$

证法二：$\dfrac{2\sin x}{\cos x+\cos 2x}=\dfrac{\sin x}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$

$$=\frac{\sin(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2})}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{3x}{2}}{\cos\frac{3x}{2}}-\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$$

$$=\operatorname{tg}\frac{3x}{2}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

(21)本题主要考查:线面关系,三垂线定理以及空间想象能力.

(i)证明:如图,连结 A_1O,则 $A_1O\perp$底面 ABCD.作 OM⊥AB 交 AB 于 M,作 ON⊥AD 交 AD 于 N,连结 A_1M,A_1N.由三垂线定理得

$A_1M\perp AB$,$A_1N\perp AD$.

∵$\angle A_1AM=\angle A_1AN$,

∴$Rt\triangle A_1NA\cong Rt\triangle A_1MA$.

∴$A_1M=A_1N$.

∴OM=ON.

∴点 O 在∠BAD 的平分线上.

(ii)解:$\because AM=A_1A\cos\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

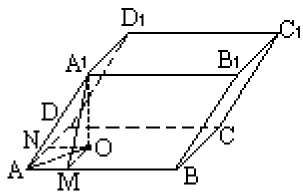
$\therefore AO=AM\csc\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$

又在$Rt\triangle AOA_1$中 $A_1O^2=A_1A^2-AO^2=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$,

$\therefore A_1O=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$

∴平行六面体的体积

$$V=5\cdot 4\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}=30\sqrt{2}.$$



(22)本题主要考查:运用数学归纳法证题的能力.

证明:当 n=1 时,左边=-14,右边=-1·2·7=-14,等式成立.

假设当 n=k 时等式成立,即有

$(1\cdot 2^2-2\cdot 3^2)+\cdots\cdots+[(2k-1)(2k)^2-2k(2k+1)^2]$

$=-k(k+1)(4k+3)$.

那么 当 n=k+1 时,

$(1\cdot 2^2-2\cdot 3^2)+\cdots\cdots+[(2k-1)(2k)^2-2k(2k+1)^2]+$

$[(2k+1)(2k+2)^2-(2k+2)(2k+3)^2]$

$=-k(k+1)(4k+3)-2(k+1)[4k^2+12k+9-4k^2-6k-2]$

$=-(k+1)[4k^2+3k+2(6k+7)]$

$=-(k+1)(4k^2+15k+14)$

$=-(k+1)(k+2)(4k+7)$

=-(k+1)[(k+1)+1][4(k+1)+3].

这就是说,当 n=k+1 时等式也成立.

根据以上论证可知等式对任何 n∈N 都成立.

(23)本题主要考查:对数函数的性质以及解不等式的能力.

解:由对数函数的性质可知,原方程的解 x 应满足

$$\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2, & ① \\ x-ak>0, & ② \\ x^2-a^2>0. & ③\end{cases}$$

当①,②同时成立时,③显然成立,因此只需解

$$\begin{cases}(x-ak)^2=x^2-a^2, & ① \\ x-a>0. & ②\end{cases}$$

由①得　　2kx=a(1+k²),　　④

当 k=0 时,④无解,因而原方程无解.

当$k\neq 0$时，④的解是$x=\dfrac{a(1+k^2)}{2k}$.　⑤

把⑤代入②，得$\dfrac{1+k^2}{2k}>k$.

当$k<0$时，得$k^2>1$，即$-\infty<k<-1$.

当$k>0$时，得$k^2<1$，即$0<k<1$.

综合得,当 k 在集合(-∞,-1)∪(0,1)内取值时,原方程有解.

(24)本题主要考查:椭圆和双曲线的概念,极值的求法以及综合解题的能力.

解:设所求双曲线的方程是

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=-1.$$

由题设知

$$c^2=\alpha^2+\beta^2=a^2-b^2。$$

由方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1, \\ \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{c^2-a^2}=-1.\end{cases}$$

解得交点的坐标满足

$$x^2=\frac{b^2a^2}{c^2},\ y^2=a^2(1-\frac{a^2}{c^2}),$$

即　　$|x|=\dfrac{ba}{c},\ |y|=a\sqrt{1-\dfrac{a^2}{c^2}}$

由椭圆和双曲线关于坐标轴的对称性知,以它们的交点为顶点的四边形是长方形,其面积

$$S=4\,|xy|=4ab\cdot\frac{a}{c}\sqrt{1-\frac{a^2}{c^2}}.$$

因为S**与**$\frac{a^2}{c^2}(1-\frac{a^2}{c^2})$**同时达到最大值，所以当**$(\frac{a}{c})^2=\frac{1}{2}$**时，**

S**达到最大值**$2ab$.

这时$\alpha^2=\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2),\beta^2=\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2),$

因此,满足题设的双曲线方程是

$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}(a^2-b^2)}-\frac{y^2}{\frac{1}{2}(a^2-b^2)}=-1.$$

相应的四边形顶点的坐标是

$(\frac{\sqrt{2}}{2}b，\frac{\sqrt{2}}{2}a)$，$(-\frac{\sqrt{2}}{2}b，\frac{\sqrt{2}}{2}a)$，$(-\frac{\sqrt{2}}{2}b，-\frac{\sqrt{2}}{2}a)$，$(\frac{\sqrt{2}}{2}b，-\frac{\sqrt{2}}{2}a)$

1990 年试题
(理工农医类)

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,把所选项前的字母填在题后括号内.

(1)方程$2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$的解是

(A)$x=\frac{1}{9}$　　(B)$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C)$x=\sqrt{3}$　　(D)$x=9$　　【　　】

(2)把复数$1+i$对应的向量按顺时针方向旋转$\frac{2\pi}{3}$,所得到的向量对应的复数是

(A) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$

(B) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$

(C) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$

(D) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$　　【　　】

(3)如果轴截面为正方形的圆柱的侧面积是 S,那么圆柱的体积等于

(A)$\frac{S}{2}\sqrt{S}$　　(B) $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

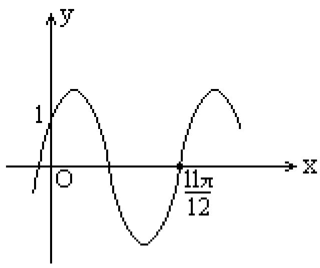
(C)$\frac{S}{4}\sqrt{S}$　　(D) $\frac{S}{4}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

【　　】

(4)方程 sin2x=sinx 在区间$(0,2\pi)$内的解的个数是

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4　　【　　】

(5)



已知上图是函数$y=2\sin(\omega x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的图象,那么

(A) $\omega=\frac{10}{11},\varphi=\frac{\pi}{6}$

(B) $\omega=\frac{10}{11},\varphi=-\frac{\pi}{6}$

(C) $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$

(D) $\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$ 【　　】

(6) 函数 $y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\operatorname{tg}x}{|\operatorname{tg}x|}+\frac{|\operatorname{ctg}x|}{\operatorname{ctg}x}$ 的值域是

(A){-2,4}　　(B){-2,0,4}

(C){-2,0,2,4}　　(D){-4,-2,0,4} 【　　】

(7)如果直线 y=ax＋2 与直线 y=3x－b 关于直线 y＝x 对称,那么

(A) $a=\frac{1}{3},b=6$　　(B) $a=\frac{1}{3},b=-6$

(C)a=3,b=-2　　(D)a=3,b=6 【　　】

(8) 极坐标方程 $4\rho\sin^2\frac{\theta}{2}=5$ 表示的曲线是

(A)圆　　(B)椭圆

(C)双曲线的一支　　(D)抛物线 【　　】

(9) 设全集 $I=\{(x,y)|x,y\in R\}$, 集合 $M=\{(x,y)|\frac{y-3}{x-2}=1\}$,

$N=\{(x,y)|y\neq x+1\}$. 那么 $\overline{M\cup N}$ 等于

(A) $\frac{1}{2}$　　(B){(2,3)}

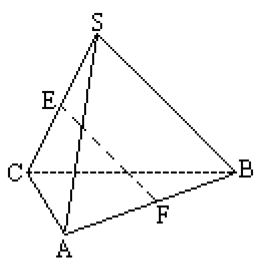
(C)(2,3)　　(D){(x,y)｜y=x+1} 【　　】

(10)如果实数 x,y 满足等式 $(x-2)^2+y^2=3$, 那么 $\frac{y}{x}$ 的最大值是

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(D) $\sqrt{3}$ 【　　】

(11)如图,正三棱锥 S—ABC 的侧棱与底面边长相等,如果 E、F 分别为 SC、AB 的中点,那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于



(A)90°　　(B)60°　　(C)45°　　(D)30° 【　　】

(12)已知 h>0.设命题甲为:两个实数 a,b 满足｜a－b｜<2h;命题乙为:两个实数 a,b 满足｜a－1｜<h 且｜b-1｜<h.那么

(A)甲是乙的充分条件,但不是乙的必要条件

(B)甲是乙的必要条件,但不是乙的充分条件

(C)甲是乙的充分条件

(D)甲不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件 【 】

(13)A,B,C,D,E 五人并排站成一排,如果 B 必须站在 A 的右边(A,B 可以不相邻),那么不同的排法共有

(A)24 种 (B)60 种 (C)90 种 (D)120 种 【 】

(14)以一个正方体的顶点为顶点的四面体共有

(A)70 个 (B)64 个 (C)58 个 (D)52 个

【 】

(15)设函数 y=arctgx 的图象沿 x 轴正方向平移 2 个单位所得到的图象为 C.又设图象 C'与 C 关于原点对称,那么 C'所对应的函数是

(A)y=-arctg(x-2) (B)y=arctg(x-2)

(C)y=-arctg(x+2) (D)y=arctg(x+2) 【 】

二、填空题:把答案填在题中横线上.

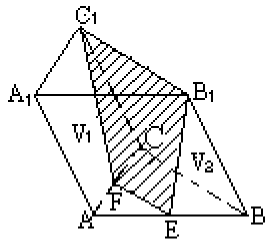
(16)双曲线$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$的准线方程是______________

(17)$(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5$ 的展开式中,x^2 的系数等于____________.

(18)已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列,如果 S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项的和,那么$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}$等于_________________

(19)函数 y=sinxcosx+sinx+cosx 的最大值是________.

(20)如图,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,若 E、F 分别为 AB、AC 的中点,平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1、V_2 的两部分,那么 $V_1:V_2$=_______.

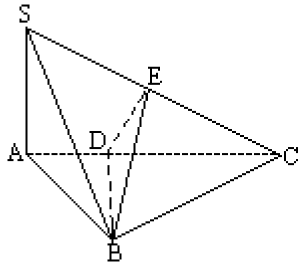


三、解答题.7

(21)有四个数,其中前三个数成等差数列,后三个数成等比数列,并且第一个数与第四个数的和是 16,第二个数与第三个数的和是 12.求这四个数.

(22)已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4},\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$,求$tg(\alpha+\beta)$的值。

(23)如图,在三棱锥 S—ABC 中,SA⊥底面 ABC,AB⊥BC.DE 垂直平分 SC,且分别交 AC、SC 于 D、E.又 SA=AB,SB=BC.求以 BD 为棱,以 BDE 与 BDC 为面的二面角的度数.



(24)设 $a\geq 0$,在复数集 C 中解方程 $z^2+2|z|=a$.

(25)**设椭圆的中心是坐标原点,长轴在x轴上,离心率**$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$,**已知点**$P(0,\frac{3}{2})$**到这个椭圆上的点的最远距离是**$\sqrt{7}$.**求这个椭圆的方程,并求椭圆上到点**P**的距离等于**$\sqrt{7}$**的点的坐标。**

(26) $f(x)=\lg\frac{1+2^x+\Lambda+(n-1)^x+n^x a}{n}$**,其中**a**是实数,**n**是任意自然数且 $n\geq 2$.**

(Ⅰ)如果 $f(x)$ 当 $x\in(-\infty,1]$ 时有意义,求 a 的取值范围;

(Ⅱ)如果 $a\in(0,1]$,证明 $2f(x)<f(2x)$ 当 $x\neq 0$ 时成立.

1990 年试题(理工农医类)答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)A	(2)B	(3)D	(4)C	(5)C	(6)B
(7)A	(8)D	(9)B	(10)D	(11)C	(12)B
(13)B	(14)C	(15)D			

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(16)$y=\pm\frac{16}{5}$　　(17)-20　　(18)2

(19)$\frac{1}{2}+\sqrt{2}$　　(20)7:5

三、解答题.

(21)本小题考查等差数列、等比数列的概念和运用方程(组)解决问题的能力.

解法一:

设四个数依次为$a-d,a,a+d$,$\frac{(a+d)^2}{a}$.　　①

依题意,有 $\begin{cases}(a-d)+\frac{(a+d)^2}{a}=16,\\ a+(a+d)=12.\end{cases}$　　②

由②式得　$d=12-2a$.　　③

将③式代入①式得 $[a-(12-2a)]+\frac{(12-a)^2}{a}=16$,

整理得　　$a^2-13a+36=0$

解得　　　　　　　　$a_1=4,a_2=9$.

代入③式得　　　　　$d_1=4,d_2=-6$.

从而得所求四个数为 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

解法二:设四个数依次为 x,y,12-y,16-x　　　　①

依题意，有 $\begin{cases} x+(12-y)=2y, \\ y(16-x)=(12-y)^2. \end{cases}$　　　　②

由①式得　　$x=3y-12$.　　　　③

将③式代入②式得　　$y(16-3y+12)=(12-y)^2$,

整理得　　　　　$y^2-13y+36=0$.

解得　　　　　　$y_1=4,y_2=9$.

代入③式得　　　$x_1=0,x_2=15$.

从而得所求四个数为 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(22)本小题考查三角公式以及三角函数式的恒等变形和运算能力.

解法一:由已知得

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{4},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3},$$

两式相除得 $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}$.

所以

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}.$$

解法二:如图,不妨设 $0\leq\alpha\leq\beta<2\pi$,且点 A 的坐标是（$\cos\alpha$, $\sin\alpha$）,点 B 的坐标是（$\cos\beta$,$\sin\beta$）,则点 A,B 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上.

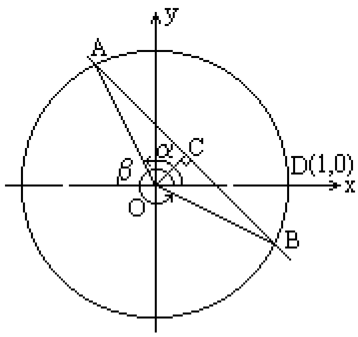
连结 AB,若C是AB的中点,由题设知点C的坐标是 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{8}\right)$.

连结 OC,于是 $OC\perp AB$,若设点 D 的坐标是（1,0）,再连结 OA,OB,则有

$\angle DOA=\alpha,\angle DOB=\beta,\angle DOC=\dfrac{\alpha+\beta}{3}-\pi..$

从而$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\mathrm{tg}\angle DOC=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{3}{4}.$

所以$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2\mathrm{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{2\times\dfrac{3}{4}}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{24}{7}.$



解法三:由题设得　4(sinα+sinβ)=3(cosα+cosβ).

将上式变形为 $\dfrac{4}{5}\sin\alpha-\dfrac{3}{5}\cos\alpha=\dfrac{3}{5}\cos\beta-\dfrac{4}{5}\sin\beta$　　①

设　$\cos\varphi=\dfrac{4}{5},\sin\varphi=\dfrac{3}{5},$　　②

将②式代入①式,可得　sin(α-φ)=sin(φ-β).

于是　α－φ＝(2k+1)π-(φ-β)(k∈Z),

或　α-φ=2kπ+(φ-β)(k∈Z).

若　α-φ=(2k+1)π-(φ-β)(k∈Z),则α＝β＋(2k+1)π(k∈Z).

于是　sinα=-sinβ,即sinα+sinβ=0.

这与已知条件　$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{4}$矛盾.

由此可知　α-φ=2kπ+(φ-β)(k∈Z),

即　α＋β＝2φ+2kπ(k∈Z).

由②式得$\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{3}{4}$

所以

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\mathrm{tg}2\varphi=\frac{2\mathrm{tg}\varphi}{1-\mathrm{tg}^2\varphi}=\frac{2\times\dfrac{3}{4}}{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2}=\frac{24}{7}.$$

(23)本小题考查直线和平面,直线和直线的位置关系,二面角等基本知识,以及逻辑推理能力和空间想象能力.

解法一:由于SB＝BC,且E是SC的中点,因此BE是等腰三角形SBC的底

边 SC 的中线,所以 SC⊥BE.

又已知 SC⊥DE,BE∩DE=E,

∴SC⊥面 BDE,

∴SC⊥BD.

又 ∵SA⊥底面 ABC,BD 在底面 ABC 上,

∴SA⊥BD.

而 SC∩SA=S,∴BD⊥面 SAC.

∵DE=面 SAC∩面 BDE,DC=面 SAC∩面 BDC,

∴BD⊥DE,BD⊥DC.

∴∠EDC 是所求的二面角的平面角.

∵SA⊥底面 ABC,∴SA⊥AB,SA⊥AC.

设 SA=a,

则$AB=a, BC=SB=\sqrt{2}a.$

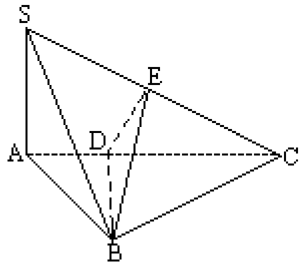
又因为 AB⊥BC,

所以$AC=\sqrt{3}a.$

在$Rt\triangle SAC$中,$tg\angle ACS=\dfrac{SA}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{3}},$

∴∠ACS=30°.

又已知 DE⊥SC,所以∠EDC=60°,即所求的二面角等于 60°.



解法二:由于 SB=BC,且 E 是 SC 的中点,因此 BE 是等腰三角形 SBC 的底边 SC 的中线,所以 SC⊥BE.

又已知 SC⊥DE,BE∩DE=E∴SC⊥面 BDE,

∴SC⊥BD.

由于 SA⊥底面 ABC,且 A 是垂足,所以 AC 是 SC 在平面 ABC 上的射影.由三垂线定理的逆定理得 BD⊥AC;又因 E∈SC,AC 是 SC 在平面 ABC 上的射影,所以 E 在平面 ABC 上的射影在 AC 上,由于 D∈AC,所以 DE 在平面 ABC 上的射影也在 AC 上,根据三垂线定理又得 BD⊥DE.

∵DE⊂面 BDE,DC⊂面 BDC,

∴∠EDC 是所求的二面角的平面角.

以下同解法一.

(24)本小题考查复数与解方程等基本知识以及综合分析能力.

解法一:设 z=x+yi,代入原方程得

$$x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=a$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a, & ① \\ 2xy=0. & ② \end{cases}$$

由②式得 y=0 或 x=0.由此可见,若原方程有解,则其解或为实数,或为纯虚数.下面分别加以讨论.

情形 1.若 y=0,即求原方程的实数解 z=x.此时,①式化为

$$x^2+2|x|=a. \quad ③$$

(Ⅰ)令 x>0,方程③变为 $x^2+2x=a$. ④

解方程④得 $x=-1\pm\sqrt{1+a}$.

由此可知:当 a=0 时,方程④无正根;

当 $a>0$ 时,方程④有正根 $x=-1+\sqrt{1+a}$.

(Ⅱ)令 x<0,方程③变为 $x^2-2x=a$. ⑤

解方程⑤得 $x=1\pm\sqrt{1+a}$.

由此可知:当 a=0 时,方程⑤无负根;

当 a>0 时,方程⑤有负根

$$x=1-\sqrt{1+a}.$$

(Ⅲ)令 x=0,方程③变为 0=a. ⑥

由此可知:当 a=0 时,方程⑥有零解 x=0;

当 a>0 时,方程⑥无零解.

所以,原方程的实数解是:

当 a=0 时,z=0;

当 $a>0$ 时,$z=\pm(1-\sqrt{1+a})$.

情形 2.若 x=0,由于 y=0 的情形前已讨论,现在只需考查 y≠0 的情形,即求原方程的纯虚数解 z=yi(y≠0).此时,①式化为

$$-y^2+2|y|=a. \quad ⑦$$

(Ⅰ)令 y>0,方程⑦变为 $-y^2+2y=a$,即 $(y-1)^2=1-a$. ⑧

由此可知:当 a>1 时,方程⑧无实根.

当 a≤1 时解方程⑧得

$$y=1\pm\sqrt{1-a},$$

从而, 当 a=0 时,方程⑧有正根 y=2;

当 0<a≤1 时,方程⑧有正根 $y=1\pm\sqrt{1-a}$.

(Ⅱ)令 y<0,方程⑦变为 $-y^2-2y=a$,即 $(y+1)^2=1-a$. ⑨

由此可知:当 a>1 时,方程⑨无实根.

当 a≤1 时解方程⑨得 $y=-1\pm\sqrt{1-a}$,

从而,当 a=0 时,方程⑨有负根 y=-2;

当 0<a≤1 时,方程⑨有负根 $y=-1\pm\sqrt{1-a}$

所以,原方程的纯虚数解是:

当 a=0 时,z=±2i;

当 0<a≤1 时, $z=\pm(1+\sqrt{1-a})i$,$z=\pm(1-\sqrt{1-a})i$.

而当 a>1 时,原方程无纯虚数解.

解法二:设 z=x+yi 代入原方程得

$$x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=a,$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a, & ① \\ 2xy=0. & ② \end{cases}$$

由②式得 y=0 或 x=0.由此可见,若原方程有解,则其解或为实数,或为纯虚数.下面分别加以讨论.

情形 1.若 y=0,即求原方程的实数解 z=x.此时,①式化为

$$x^2+2|x|=a.$$

即 $$|x|^2+2|x|=a. \quad ③$$

解方程③得

$$|x|=-1+\sqrt{1+a},$$

所以,原方程的实数解是

$$z=\pm(-1+\sqrt{1+a}).$$

情形 2.若 x=0,由于 y=0 的情形前已讨论,现在只需考查 y≠0 的情形,即求原方程的纯虚数解 z=yi(y≠0).此时,①式化为

$$-y^2+2|y|=a.$$

即 $$-|y|^2+2|y|=a. \quad ④$$

当 a=0 时,因 y≠0,解方程④得|y|=2,

即当 a=0 时,原方程的纯虚数解是 z=±2i.

当 0<a≤1 时,解方程④得

$$|y|=1\pm\sqrt{1-a},$$

即当 0<a≤1 时,原方程的纯虚数解是

$$z=\pm(1+\sqrt{1-a})i, z=\pm(1-\sqrt{1-a})i..$$

而当 a>1 时,方程④无实根,所以这时原方程无纯虚数解.

解法三:因为 $z^2=-2|z|+a$ 是实数,所以若原方程有解,则其解或为实数,或为纯虚数,即 z=x 或 z=yi(y≠0).

情形 1.若 z=x.以下同解法一或解法二中的情形 1.

情形 2.若 z=yi(y≠0).以下同解法一或解法二中的情形 2.

解法四:设 z=r(cosθ+isinθ),其中 r≥0,0≤θ<2π.代入原方程得

$$r^2\cos2\theta+2r+ir^2\sin2\theta=a.$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} r^2\cos2\theta+2r=a, & ① \\ r^2\sin2\theta=0. & ② \end{cases}$$

由②式得 $r=0$ 或 $\theta=\dfrac{k\pi}{2}(k=0,1,2,3).$

情形 1.若 r=0.①式变成

$$0=a. \quad ③$$

由此可知:当 a=0 时,r=0 是方程③的解.

当 a>0 时,方程③无解.

所以, 当 a=0 时,原方程有解 z=0;

当 a>0 时,原方程无零解.

情形2.若$\theta = \frac{k\pi}{2}(k=0,1,2,3)$,由于$r=0$的情形前已讨论,现在只需考查 r>0 的情形.

(Ⅰ)当 k=0,2 时,对应的复数是 z=±r.因 cos2θ=1,故①式化为

$$r^2+2r=a. \qquad ④$$

解方程④可得$r=-1\pm\sqrt{1+a}$.

由此可知:当 a=0 时,方程④无正根;

当 a>0 时,方程④有正根 $r=-1+\sqrt{1+a}$.

所以,当 a>0 时,原方程有解 $z=\pm(\sqrt{1+a}-1)$.

(Ⅱ)当 k=1,3 时,对应的复数是 z=±ri.因 cos2θ=-1,故①式化为

$$-r^2+2r=a,\text{即}(r-1)^2=1-a, \qquad ⑤$$

由此可知:当 a>1 时,方程⑤无实根,从而无正根;

当$a\le 1$时解方程⑤得$r=1\pm\sqrt{1-a}$.

从而, 当 a=0 时,方程⑤有正根 r=2;

当$0<a\le 1$时,方程⑤有正根$r=1\pm\sqrt{1-a}$.

所以, 当 a=0 时,原方程有解 z=±2i;

当 0<a≤1 时,原方程有解

$$z=\pm(1+\sqrt{1-a})i,$$

$$z=\pm(1-\sqrt{1-a})i.$$

当 a>1 时,原方程无纯虚数解.

(25)本小题考查椭圆的性质,距离公式,最大值知识以及分析问题的能力.

解法一:根据题设条件,可取椭圆的参数方程是

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=b\sin\theta. \end{cases}$$

其中 a>b>0 待定,0≤θ<2π.

由 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-(\frac{a}{b})^2$,

可得 $\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$,

即 $a=2b.$

设椭圆上的点(x,y)到点 P 的距离为 d,则

$$d^2=x^2+(y-\frac{3}{2})^2$$

$$=a^2\cos^2\theta+(b\sin\theta-\frac{3}{2})^2$$

$$=a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta-3b\sin\theta+\frac{9}{4}$$

$$=4b^2-3b^2\sin^2\theta-3b\sin\theta+\frac{9}{4}$$

$$=-3b^2(\sin\theta+\frac{1}{2b})^2+4b^2+3.$$

如果 $\frac{1}{2b}>1$,即$b<\frac{1}{2}$,则当$\sin\theta=-1$时d^2(从而d)有最大值,由题设得

$$\left(\sqrt{7}\right)^2=(b+\frac{3}{2})^2,$$

由此得$b=\sqrt{7}-\frac{3}{2}>\frac{1}{2}$,与$b<\frac{1}{2}$矛盾.

因此必有

$\frac{1}{2b}\leq 1$成立.于是当$\sin\theta=-\frac{1}{2b}$时d^2(从而d)有最大值，由题设得

$$\left(\sqrt{7}\right)^2=4b^2+3,$$

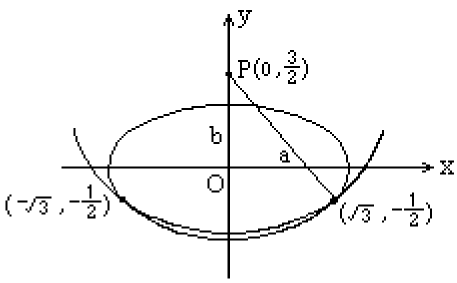
由此可得 b=1,a=2.

所求椭圆的参数方程是

$$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sin\theta.\end{cases}$$

由$\sin\theta=-\frac{1}{2}$,$\cos\theta=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$可得,椭圆上的点$(-\sqrt{3},-\frac{1}{2})$,点$(\sqrt{3},-\frac{1}{2})$到点P的距离都$\sqrt{7}$。

.



解法二:设所求椭圆的直角坐标方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中 a>b>0 待定.

由 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-(\frac{b}{a})^2$,

可得$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$, ，

即 $a=2b$.

设椭圆上的点(x,y)到点 P 的距离为 d,则

$$d^2=x^2+(y-\frac{3}{2})^2$$

$$=a^2(1-\frac{y^2}{b^2})+y^2-3y+\frac{9}{4}$$

$$=4b^2-3y^2-3y+\frac{9}{4}$$

$$=-3(y+\frac{1}{2})^2+4b^2+3,$$

其中 $-b\le y\le b$.

如果$b<\frac{1}{2}$,则当$y=-b$时d^2（从而d）有最大值,由题设得

$$(\sqrt{7})^2=(b+\frac{3}{2})^2,$$

由此得

$$b=\sqrt{7}-\frac{3}{2}>\frac{1}{2},\text{与}<\frac{1}{2}\text{矛盾。}$$

因此必有$b\geq\frac{1}{2}$成立.于是当$y=-\frac{1}{2}$时d^2（从而d）有最大值,由题设得

$$(\sqrt{7})^2=4b^2+3,$$

由此可得 $b=1,a=2$.

所求椭圆的直角坐标方程是

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1,$$

由$y=-\frac{1}{2}$及求得的椭圆方程可得,椭圆上的点$(-\sqrt{3},-\frac{1}{2})$,点$(\sqrt{3},-\frac{1}{2})$到点P的距离都$\sqrt{7}$。

(26)本题考查对数函数,指数函数,数学归纳法,不等式的知识以及综合运用有关知识解决问题的能力.

(Ⅰ)解:f(x)当 $x\in(-\infty,1]$时有意义的条件是

$1+2^x+\cdots(n-1)^x+n^xa>0\quad x\in(-\infty,1],n\geq 2$,

即 $$a>-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\Lambda+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right]x\in(-\infty,1)]\qquad ①$$

因为 $$-\left(\frac{k}{n}\right)^x(k=1,2,\Lambda,n-1)\text{在}(-\infty,1],$$

上都是增函数,

所以 $$-\left[\left(\frac{1}{n}\right)^x+\left(\frac{2}{n}\right)^x+\Lambda+\left(\frac{n-1}{n}\right)^x\right]$$

在$(-\infty,1]$上也是增函数,从而它在 $x=1$ 时取得最大值

$$-(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n})=-\frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n}=-\frac{1}{2}(n-1).$$

因此,①式等价于$a > -\frac{1}{2}(n-1)$.

也就是 a 的取值范围为

$$\{a \mid a > -\frac{1}{2}(n-1)\}.$$

(Ⅱ)证法一:2f(x)<f(2x)　　$a\in(0,1]$, $x\neq 0$.即

$$[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a]^2<n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a]$$

$$a\in(0,1],x\neq 0.②$$

现用数学归纳法证明②式.

(A) 先证明当 n=2 时②式成立.

假如 $0<a<1$, $x\neq 0$,则

$$(1+2^x a)^2=1+2\cdot 2^x a+2^{2x}a^2\leq 2(1+2^{2x})<2(1+2^{2x}a).$$

假如 $a=1$, $x\neq 0$,因为 $1\neq 2^x$,所以

$$(1+2^x)^2=1+2\cdot 2^x+2^{2x}<2(1+2^{2x})$$

因而当 n=2 时②式成立.

(B) 假如当 $n=k(k\geq 2)$时②式成立,即有

$$[1+2^x+\cdots+(k-1)^x+k^x a]^2<k[1+2^{2x}+\cdots+(k-1)^{2x}a]\quad a\in(0,1],x\neq 0,$$

那么,当 $a\in(0,1]$, $x\neq 0$ 时

$$\begin{aligned}&[(1+2^x+\cdots+k^x)+(k+1)^{xa}]^2\\&=(1+2^x+\cdots+k^x)^2+2(1+2^x+\cdots+k^x)(k+1)^x a+(k+1)^{2x}a^2\\&<k(1+2^{2x}+\cdots+k^{2x})+2(1+2^x+\cdots+k^x)(k+1)^x a+(k+1)^{2x}a^2\\&=k(1+2^{2x}+\cdots+k^{2x})+[2\cdot 1\cdot(k+1)^x a+2\cdot 2^x(k+1)^x a+\cdots\\&+2k^x(k+1)^x a]+(k+1)^{2x}a^2<k(1+2^{2x}+\cdots\\&+k^{2x})+\{[1+(k+1)^{2x}a^2]+[2^{2x}+(k+1)^{2x}a^2]+\cdots\\&+[k^{2X}+(k+1)^{2x}a^2]\}+(k+1)^{2x}a^2]\\&=(k+1)[1+2^{2x}+\cdots+k^{2x}+(k+1)^{2x}a^2]\\&\leq(k+1)[1+2^{2x}+\cdots+k^{2x+(k+1)2x}a],\end{aligned}$$

这就是说,当 n=k+1 时②式也成立.

根据(A),(B)可知,②式对任何 $n\geq 2(n\in N)$都成立.即有

$$2f(x)<f(2x)\qquad a\in(0,1],x\neq 0.$$

证法二:只需证明 $n\geq 2$ 时

$$[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x a]^2<n[1+2^{2x}+\Lambda+(n-1)^{2x}+n^{2x}a]\quad a\in(0,1],x\neq 0.)$$

因为

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+\cdots+a_n^2)^2\\&=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)\\&\leq(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+[(a_1^2+a_2^2)+\cdots+(a_1^2+a_n^2)]+[(a_2^2+a_3^2)+\cdots\\&+(a_2^2+a_n^2)]+\Lambda+[(a_{n-2}^2+a_{n-1}^2)+(a_{n-2}^2+a_n^2)]+(a_{n-1}^2+a_n^2)\\&=n(a_1^2+a_2^2+\Lambda+a_n^2).\end{aligned}$$

于是$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2\leq n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$,

其中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立.

利用上面结果知,当 $a=1,x\neq 0$ 时,因 $1\neq 2^x$,所以有

$$[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^x]^2<n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}].$$

当 $0<a<1,x\neq 0$ 时,因 $a^2<a$,所以有

$$[1+2^x+\cdots+(n-1)^x+n^xa]^2$$
$$\leq n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a^2]<n[1+2^{2x}+\cdots+(n-1)^{2x}+n^{2x}a].$$

即有 $$2f(x)<f(2x)\qquad a\in(0,1],x\neq 0.$$

1990 年试题
(文史类)

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后括号内.

(1)**方程**$2^{\log_3 x}=\frac{1}{4}$**的解是**

(A)$x=\frac{1}{9}$　　(B)$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(C)$x=\sqrt{3}$　　(D)$x=9$

【　　】

(2)cos²75°+cos²15°+cos75°cos15°的值等于

(A)$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　(B)$\frac{3}{2}$

(C)$\frac{5}{4}$　　(D)$1+\frac{\sqrt{3}}{4}$

【　　】

(3)如果轴截面为正方形的圆柱的侧面积是 S,那么圆柱的体积等于

(A)$\frac{S}{2}\sqrt{S}$　　(B)$\frac{S}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

(C)$\frac{S}{4}\sqrt{S}$　　(D)$\frac{S}{4}\sqrt{\frac{S}{\pi}}$

【　　】

(4)**把复数** $1+i$ **对应的向量按顺时针方向旋转**$\frac{2\pi}{3}$,**所得到的向量对应的复数是**

(A)$\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$.

(B)$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$.

(C)$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$.

(D)$\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}}{2}i$.

【　　】

(5)**双曲线**$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$**的准线方程是**

(A)$y=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$　　(B)$x=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$

(C)$x=\pm\frac{16}{5}$　　(D)$y=\pm\frac{16}{5}$

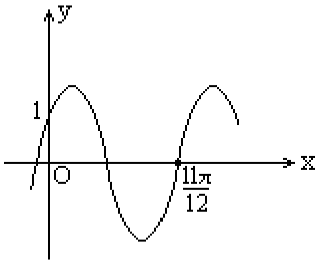
【　　】

(6)已知上图是函数 y=2sin(ωx+ψ)(｜ψ｜<$\frac{\pi}{2}$)的图象,那么

(A)$\omega=\frac{10}{11}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　　　(B)$\omega=\frac{10}{11}$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

(C)$\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　　　(D)$\omega=2$，$\varphi=-\frac{\pi}{6}$

【　　】



(7)设命题甲为:0<x<5;命题乙为:｜x-2｜<3.那么

(A)甲是乙的充分条件,但不是乙的必要条件.

(B)甲是乙的必要条件,但不是乙的充分条件.

(C)甲是乙的充要条件.

(D)甲不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件.

【　　】

(8)函数$y=\frac{\sin x}{|\sin x|}+\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\operatorname{tg}x}{|\operatorname{tg}x|}+\frac{|\operatorname{ctg}x|}{\operatorname{ctg}x}$的值域是

(A){-2,4}　　　(B){-2,0,4}

(C){-2,0,2,4}　　　(D){-4,-2,0,4}

【　　】

(9)如果直线 y=ax+2 与直线 y=3x-b 关于直线 y=x 对称,那么

(A)$a=\frac{1}{3}$，$b=6$　　　(B)$a=\frac{1}{3}$，$b=-6$

(C)a=3,b=-2　　　(D)a=3,b=6

【　　】

(10)如果抛物线 y^2=a(x+1)的准线方程是 x=-3,那么这条抛物线的焦点坐标是

(A)(3,0)　　　(B)(2,0)

(C)(1,0)　　　(D)(-1,0)

【　　】

(11)设全集$I=\{(x,y)\mid x,y\in R\}$,集合$M=\{(x,y)\mid \frac{y-3}{x-2}=1\}$,$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$.

那么$\overline{M}\cap\overline{N}$等于

(A)Φ　　　(B){(2,3)}

(C)(2,3)　　　(D){(x,y)｜y=x+1}

【　　】

(12)A,B,C,D,E 五人并排站成一排,如果 A,B 必须相邻且 B 在 A 的右边,那么不同的排法共有

(A)60 种　　　　　　　　　　　　(B)48 种
(C)36 种　　　　　　　　　　　　(D)24 种

【　　】

(13)已知 $f(x)=x^5+ax^3+bx-8$,且 $f(-2)=10$,那么 $f(2)$等于

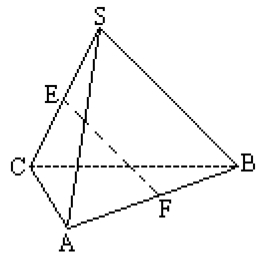
(A)-26　　　　　(B)-18
(C)-10　　　　　(D)10

【　　】

(14)如图,正三棱锥 S-ABC 的侧棱与底面边长相等,如果 E、F 分别为 SC、AB 的中点,那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于

(A)90°
(B)60°
(C)45°
(D)30°

【　　】



(15)以一个正三棱柱的顶点为顶点的四面体共有

(A)6 个　　　　　(B)12 个
(C)18 个　　　　　(D)30 个

【　　】

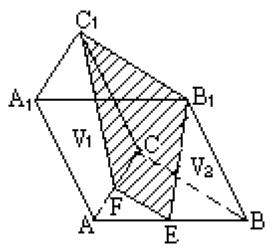
二、填空题:把答案填在题中横线上.

(16)已知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,那么$\sin\frac{\alpha}{2}$的值等于________.

(17)$(x-1)-(x-1)^2+(x-1)^3-(x-1)^4+(x-1)^5$ 的展开式中,x^2 的系数等于__________.

(18)已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列,如果 S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项的和,那么$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}$等于__________.

(19)如图,三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 中,若 E、F 分别为 AB、AC 的中点,平面 EB_1C_1F 将三棱柱分成体积为 V_1、V_2 的两部分,那么 $V_1:V_2$=_________.



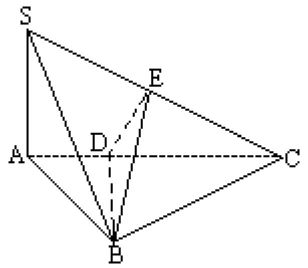
(20)如果实数x,y满足等式$(x-2)^2+y^2=3$,那么$\frac{y}{x}$的最大值是____.

三、解答题.

(21)有四个数,其中前三个数成等差数列,后三个数成等比数列,并且第一个数与第四个数的和是16,第二个数与第三个数的和是12,求这四个数.

(22)已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{4}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{1}{3}$, 求$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$的值.

(23)如图,在三棱锥S-ABC中,SA⊥底面ABC,AB⊥BC.DE垂直平分SC,且分别交AC、SC于D、E.又SA=AB,SB=BC.求以BD为棱,以BDE与BDC为面的二面角的度数.



(24)已知a>0,a≠1,解不等式 $\log_a(4+3x-x^2)-\log_a(2x-1)>\log_a 2$.

(25)设a≥0,在复数集C中解方程 $z^2+2|z|=a$.

(26)设椭圆的中心是坐标原点,长轴在x轴上,离心率 $e=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,已知点 $P(0,\dfrac{3}{2})$ 到这个椭圆上的点的最远距离是$\sqrt{7}$.求这个椭圆的方程,并求椭圆上到点P的距离等于$\sqrt{7}$ 的点的坐标.

1990年试题(文史类)答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)A	(2)C	(3)D	(4)B	(5)D
(6)C	(7)A	(8)B	(9)A	(10)C
(11)B	(12)D	(13)A	(14)C	(15)B

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(16)$\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　(17)-20　　(18)2　　(19)7:5　　(20)$\sqrt{3}$

三、解答题.

(21)本小题考查等差数列、等比数列的概念和运用方程(组)解决问题的能力.

解法一:设四个数依次为$a-d$,a,$a+d$,$\dfrac{(a+d)^2}{a}$.

依题意有

$$\begin{cases}(a-d)+\dfrac{(a+d)^2}{a}=16, & ①\\ a+(a+d)=12. & ②\end{cases}$$

由②式得　　$d=12-2a$.　　③

将③式代入①式得$[a-(12-2a)]+\frac{(12-a)^2}{a}=16$,

整理得　　　$a^2-13a+36=0$.

解得　　　　$a_1=4$, $a_2=9$.

代入③式得　$d_1=4$, $d_2=-6$.

从而得所求四个数为 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

解法二:设四个数依次为 x,y,12-y,16-x.

依题意,有

$$\begin{cases} x+(12-y)=2y, & ① \\ y(16-x)=(12-y)^2 & ② \end{cases}$$

由①式得　　　　$x=3y-12$.　　　③

将③式代入②式得　$y(16-3y+12)=(12-y)^2$,

整理得　　　　$y^2-13y+36=0$.

解得　　　　　$y_1=4, y_2=9$.

代入③式得　　$x_1=0, x_2=15$.

从而得所求四个数为 0,4,8,16 或 15,9,3,1.

(22)本小题考查三角公式以及三角函数式的恒等变形和运算能力.

解法一:由已知得

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{4},$$

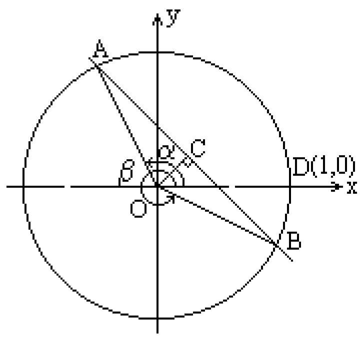
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{3},$$

两式相除得

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{4}.$$

所以　$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}.$$

解法二:如图,不妨设 $0\le\alpha\le\beta<2\pi$,且点 A 的坐标是$(\cos\alpha,\sin\alpha)$,点 B 的坐标是$(\cos\beta,\sin\beta)$,则点 A,B 在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上.连结 AB,若 C 是 AB 的中点,由题设知点 C 的坐标是$(\frac{1}{6},\frac{1}{8})$.



连结 OC,于是 OC⊥AB,若设点 D 的坐标是(1,0),再连结 OA,OB,则有

$$\angle DOA=\alpha，\angle DOB=\beta，\angle DOC=\frac{\alpha+\beta}{2}-\pi.$$

从而 $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{tg}\angle DOC=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}=\frac{3}{4}.$

所以 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}.$

解法三:由题设得 $4(\sin\alpha+\sin\beta)=3(\cos\alpha+\cos\beta).$

将上式变形为 $\frac{4}{5}\sin\alpha-\frac{3}{5}\cos\alpha=\frac{3}{5}\cos\beta-\frac{4}{5}\sin\beta.$ ①

设 $\cos\varphi=\frac{4}{5}，\sin\varphi=\frac{3}{5}，$ ②

将②式代入①式,可得 $\sin(\alpha-\varphi)=\sin(\varphi-\beta).$

于是 $\alpha-\varphi=(2k+1)\pi-(\varphi-\beta)(k\in Z),$

或 $\alpha-\varphi=2k\pi+(\varphi-\beta)(k\in Z).$

若 $\alpha-\varphi=(2k+1)\pi-(\varphi-\beta)(k\in Z)$,则 $\alpha=\beta+(2k+1)\pi(k\in Z).$

于是 $\sin\alpha=-\sin\beta$,即 $\sin\alpha+\sin\beta=0.$

这与已知条件 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$矛盾。

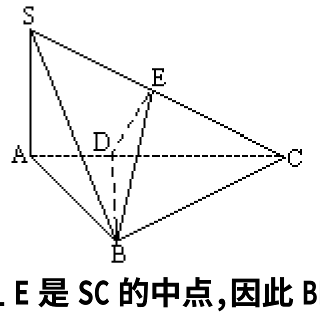
由此可知 $\alpha-\varphi=2k\pi+(\varphi-\beta)(k\in Z).$

即 $\alpha+\beta=2\varphi+2k\pi(k\in Z).$

由②式得 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{3}{4}.$

所以 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}2\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi}=\frac{2\times\frac{3}{4}}{1-(\frac{3}{4})^2}=\frac{24}{7}.$

(23)本小题考查直线和平面,直线和直线的位置关系,二面角等基本知识,以及逻辑推理能力和空间想象能力.



解法一:由于 SB=BC,且 E 是 SC 的中点,因此 BE 是等腰三角形 SBC 的底边 SC 的中线,所以 SC⊥BE.

又已知 SC⊥DE,BE∩DE=E,

∴ SC⊥面 BDE,

∴ SC⊥BD.

又 ∵SA⊥底面 ABC,BD 在底面 ABC 上,∴SA⊥BD.

而　　SC∩SA=S,∴BD⊥面 SAC.

∵　　DE=面 SAC∩面 BDE,DC=面 SAC∩面 BDC,

∴　　BD⊥DE,BD⊥DC.

∴　　∠EDC 是所求的二面角的平面角.

∵　　SA⊥底面 ABC,∴SA⊥AB,SA⊥AC.

设$SA=a$。则$AB=a$，$BC=SB=\sqrt{2}a$。

又因为$AB\perp BC$，所以$AC=\sqrt{3}a$。

在$Rt\triangle SAC$中，$tg\angle ACS=\frac{SA}{AC}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\therefore\angle ACS=30°$。

又已知 DE⊥SC,所以∠EDC=60°,即所求的二面角等于 60°.

解法二:由于 SB=BC,且 E 是 SC 的中点,因此 BE 是等腰三角形 SBC 的底边 SC 的中线,所以 SC⊥BE.

又已知　　SC⊥DE,BE∩DE=E.

∴　　SC⊥面 BDE,

∴　　SC⊥BD.

由于 SA⊥底面 ABC,且 A 是垂足,所以 AC 是 SC 在平面 ABC 上的射影.由三垂线定理的逆定理得 BD⊥AC;又因 E∈SC,AC 是 SC 在平面 ABC 上的射影,所以 E 在平面 ABC 上的射影在 AC 上,由于 D∈AC,所以 DE 在平面 ABC 上的射影在 AC 上,根据三垂线定理又得 BD⊥DE.

∵DE⊂面 BDE,DC⊂面 BDC,

∴∠EDC 是所求的二面角的平面角.

以下同解法一.

(24)本小题考查对数,不等式的基本知识及运算能力.

解:原不等式可化为

$$\log_a(4+3x-x^2)>\log_a 2(2x-1).\qquad ①$$

当 0<a<1 时,①式等价于

$$\begin{cases}4+3x-x^2>0,\\ 2(2x-1)>0,\\ 4+3x-x^2<2(2x-1).\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4+3x-x^2>0,\\ 4+3x-x^2<2(2x-1).\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(4-x)(1+x)>0,\\ (x+3)(x-2)>0.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<4,\\ x<-3\text{或}x>2.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2<x<4.$$

即当 0<a<1 时,原不等式的解集是{x｜2<x<4}.

当 a>1 时,①式等价于

$$\begin{cases}4+3x-x^2>0,\\2(2x-1)>0,\\4+3x-x^2>2(2x-1).\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{1}{2},\\-3<x<2.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}<x<2.$$

即当$a>1$时，原不等式的解集是$\{x|\frac{1}{2}<x<2\}$.

综合以上讨论知,当 $0<a<1$ 时,原不等式的解集是$\{x\mid 2<x<4\}$,当 $a>1$ 时,原不等式的解集是$\{x\mid \frac{1}{2}<x<2\}$.

(25)本小题考查复数与解方程等基本知识以及综合分析能力.

解法一:设 $z=x+yi$,代入原方程得

$$x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=a,$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases}x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a, & ①\\2xy=0. & ②\end{cases}$$

由②式得 $y=0$ 或 $x=0$.由此可见,若原方程有解,则其解或为实数或为纯虚数.下面分别加以讨论.

情形 1.　若 $y=0$,即求原方程的实数解 $z=x$.此时,①式化为

$$x^2+2|x|=a. \quad ③$$

(Ⅰ)令 $x>0$,方程③变为 $x^2+2x=a$. ④

解方程④得　$x=-1\pm\sqrt{1+a}$.

由此可知:当 $a=0$ 时,方程④无正根;

当$a>0$时，方程④有正根　$x=-1+\sqrt{1+a}$.

(Ⅱ)令 $x<0$,方程③变为 $x^2-2x=a$. ⑤

解方程⑤得　$x=1\pm\sqrt{1+a}$.

由此可知:当 $a=0$ 时,方程⑤无负根;

当$a>0$时，方程⑤有负根　$x=1-\sqrt{1+a}$.

(Ⅲ)令 $x=0$,方程③变为 $0=a$. ⑥

由此可知:当 $a=0$ 时,方程⑥有零解 $x=0$;

当 $a>0$ 时,方程⑥无零解.

所以,原方程的实数解是:

当 $a=0$ 时,$z=0$;

当$a>0$时，$z=\pm(1-\sqrt{1+a})$.

情形 2.　若 $x=0$,由于 $y=0$ 的情形前已讨论,现在只需考查 $y\neq0$ 的情形,即求原方程的纯虚数解 $z=yi(y\neq0)$.此时,①式化为

$$-y^2+2|y|=a. \quad ⑦$$

(Ⅰ)令 $y>0$,方程⑦变为 $-y^2+2y=a$,即 $(y-1)^2=1-a$. ⑧

由此可知:当 $a>1$ 时,方程⑧无实根.

当$a \le 1$时，解方程⑧得 $y=1\pm\sqrt{1-a}$，

从而， 当 $a=0$ 时,方程⑧有正根 $y=2$;

当$0<a\le 1$时，方程⑧有正根 $y=1\pm\sqrt{1-a}$.

(Ⅱ)令 $y<0$,方程⑦变为$-y^2-2y=a$,即$(y+1)^2=1-a$. ⑨

由此可知:当 $a>1$ 时,方程⑨无实根.

当$a\le 1$时解方程⑨得 $y=-1\pm\sqrt{1-a}$，

从而， 当 $a=0$ 时,方程⑨有负根 $y=-2$;

当$0<a\le 1$时，方程⑨有负根 $y=-1\pm\sqrt{1-a}$.

所以,原方程的纯虚数解是:

当 $a=0$ 时,$z=\pm 2i$;

当$0<a\le 1$时，$z=\pm(1+\sqrt{1-a})i$，$z=\pm(1-\sqrt{1-a})i$.

而当 $a>1$ 时,原方程无纯虚数解.

解法二:设 $z=x+yi$,代入原方程得

$$x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+2xyi=a,$$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}=a, & ① \\ 2xy=0. & ② \end{cases}$$

由②式得 $y=0$ 或 $x=0$.由此可见,若原方程有解,则其解或为实数,或为纯虚数.下面分别加以讨论.

情形 1. 若 $y=0$,即求原方程的实数解 $z=x$.此时,①式化为

$$x^2+2|x|=a.$$

即 $$|x|^2+2|x|=a. \quad ③$$

解方程③得 $|x|=-1+\sqrt{1+a}$，

所以，原方程的实数解是$z=\pm(-1+\sqrt{1+a})$.

情形 2. 若 $x=0$,由于 $y=0$ 的情形前已讨论,现在只需考查 $y\neq 0$ 的情形,即求原方程的纯虚数解 $z=yi(y\neq 0)$.此时,①式化为

$$-y^2+2|y|=a.$$

即 $$-|y|^2+2|y|=a. \quad ④$$

当 $a=0$ 时,因 $y\neq 0$,解方程④得$|y|=2$,

即当 $a=0$ 时,原方程的纯虚数解是 $z=\pm 2i$.

当$0<a\le 1$时，解方程④得$|y|=1\pm\sqrt{1-a}$.

即当 $0<a\le 1$ 时,原方程的纯虚数解是

$$z=\pm(1+\sqrt{1-a})i，z=\pm(1-\sqrt{1-a})i.$$

当 $a>1$ 时,方程④无实根,所以这时原方程无纯虚数解.

解法三:因为 $z^2=-2|z|+a$ 是实数,所以若原方程有解,则其解或为实数,或为纯虚数,即 $z=x$ 或 $z=yi(y\neq 0)$.

情形 1. 若 $z=x$.以下同解法一或解法二中的情形 1.

情形 2. 若 $z=yi(y\neq 0)$.以下同解法一或解法二中的情形 2.

解法四:设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$,其中 $r\ge 0,0\le\theta<2\pi$.代入原方程得

$r^2\cos 2\theta+2r+ir^2\sin 2\theta=a.$

于是原方程等价于方程组

$$\begin{cases} r^2\cos 2\theta+2r=a, & ① \\ r^2\sin 2\theta=0. & ② \end{cases}$$

由②式得$r=0$或$\theta=\dfrac{k\pi}{2}(k=0，1，2，3)$.

情形 1.　若 r=0.①式变成

$0=a.$　③

由此可知:当 a=0 时,r=0 是方程③的解.

当 a>0 时,方程③无解.

所以,　当 a=0 时,原方程有解 z=0;

当 a>0 时,原方程无零解.

情形 2.　若 $\theta=\dfrac{k\pi}{2}$ (k=0,1,2,3),由于 r=0 的情形前已讨论,现在只需考查 r>0 的情形.

(Ⅰ)当 k=0,2 时,对应的复数是 z=±r.因 cos2θ=1,故①式化为

$r^2+2r=a.$　④

解方程④可得$r=-1\pm\sqrt{1+a}$.

由此可知:当 a=0 时,方程④无正根;

当$a>0$时，方程④有正根$r=-1+\sqrt{1+a}$.

所以,　当$a>0$时，原方程有解$z=\pm(\sqrt{1+a}-1)$.

(Ⅱ)当 k=1,3 时,对应的复数是 z=±ri.因 cos2θ=-1,故①式化为

$-r^2+2r=a$,即$(r-1)^2=1-a$,　⑤

由此可知:当 a>1 时,方程⑤无实根,从而无正根;

当$a\leq 1$时解方程⑤得　$r=1\pm\sqrt{1-a}$.

从而,　当 a=0 时,方程⑤有正根　r=2;

当$0<a\leq 1$时，方程⑤有正根　$r=1\pm\sqrt{1-a}$.

所以,　当 a=o 时,原方程有解 z=±2i;

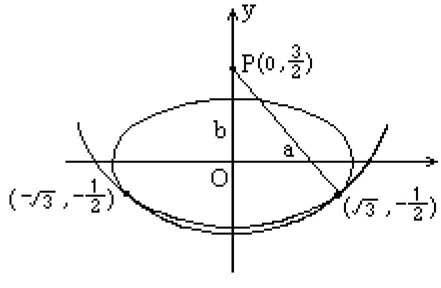
当 0<a≤1 时,原方程有解

$$z=\pm(1+\sqrt{1-a})i，z=\pm(1-\sqrt{1-a})i.$$

当 a>1 时,原方程无纯虚数解.

(26)本小题考查椭圆的性质,距离公式,最大值知识以及分析问题的能力.

解:设所求椭圆的直角坐标方程是



1991 年试题
(湖南、云南、海南三省用题)

本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷两部分.
第Ⅰ卷为选择题,第Ⅱ卷为非选择题.

第Ⅰ卷

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)$\sin 15°\cos 30°\sin 75°$的值等于

(A)$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (B)$\frac{\sqrt{3}}{8}$ (C)$\frac{1}{8}$ (D)$\frac{1}{4}$

(2)一个等差数列的第 5 项等于 10,前 3 项的和等于 3,那么

(A)它的首项是−2,公差是 3 (B)它的首项是 2,公差是−3

(C)它的首项是−3,公差是 2 (D)它的首项是 3,公差是−2

(3)设正六棱锥的底面边长为1,侧棱长为$\sqrt{5}$,那么它的体积为

(A)$6\sqrt{3}$ (B)$2\sqrt{3}$ (C)$\sqrt{3}$ (D)2

(4)在直角坐标系xOy中,参数方程$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 2t^2 - 1 \end{cases}$(其中t是参数)表示的曲

(A)双曲线 (B)抛物线 (C)直线 (D)圆

(5)设全集Ⅰ为自然数集 N,E={2n|n∈N},F={4n|n∈N},那么集合 N 可以表示成

(A)$E\cap F$ (B)$\overline{E}\cup F$ (C)$E\cup\overline{F}$ (D)$\overline{E}\cap\overline{F}$

(6)已知 Z_1,Z_2 是两个给定的复数,且 $Z_1\neq Z_2$,它们在复平面上分别对应于点 Z_1 和点 Z_2.如果 z 满足方程 $|z-z_1|-|z-z_2|=0$,那么 z 对应的点 Z 的集合是

(A)双曲线 (B)线段 Z_1Z_2 的垂直平分线

(C)分别过 Z_1,Z_2 的两条相交直线 (D)椭圆

(7) 设$5\pi < \theta < 6\pi$, $\cos\frac{\theta}{2} = a$,那么$\sin\frac{\theta}{4}$等于

(A)$-\frac{\sqrt{1+a}}{2}$ (B)$-\frac{\sqrt{1-a}}{2}$ (C)$-\sqrt{\frac{1+a}{2}}$ (D)$-\sqrt{\frac{1-a}{2}}$

(8)函数$y = \sin x, x\in[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$的反函数为

(A)$y = \arcsin x, x\in[-1,1]$ (B)$y = -\arcsin x, x\in[-1,1]$

(C)$y = \pi + \arcsin x, x\in[-1,1]$ (D)$y = \pi - \arcsin x, x\in[-1,1]$

(9)复数$z = -3(\sin\frac{4}{3}\pi - i\cos\frac{4}{3}\pi)$的辐角的主值是

(A)$\frac{4}{3}\pi$ (B)$\frac{5}{3}\pi$ (C)$\frac{11}{6}\pi$ (D)$\frac{\pi}{6}$

(10)满足$\sin(x - \frac{\pi}{4}) \geq \frac{1}{2}$的x的集合是

(A)$\{x \mid 2k\pi+\frac{5}{12}\pi \le x \le 2k\pi+\frac{13}{12}\pi, k\in Z\}$

(B)$\{x \mid 2k\pi-\frac{\pi}{12} \le x \le 2k\pi+\frac{7}{12}\pi, k\in Z\}$

(C)$\{x \mid 2k\pi+\frac{\pi}{6} \le x \le 2k\pi+\frac{5}{6}\pi, k\in Z\}$

(D)$\{x \mid 2k\pi \le x \le 2k\pi+\frac{\pi}{6}, k\in Z\} \cup \{x \mid 2k\pi+\frac{5}{6}\pi \le x \le (2k+1)\pi,$
$k\in Z\}$

(11)点(4,0)关于直线 5x+4y+21=0 的对称点是

(A)(−6,8)　　(B)(−8,−6)　　(C)(6,8)　　(D)(−6,−8)

(12)极坐标方程 $4\sin^2\theta=3$ 表示的曲线是

(A)二条射线　　(B)二条相交直线　　(C)圆　　(D)抛物线

(13)由数字 0,1,2,3,4,5 组成没有重复数字的六位数,其中个位数字小于十位数字的共有

(A)210 个　　(B)300 个　　(C)464 个　　(D)600 个

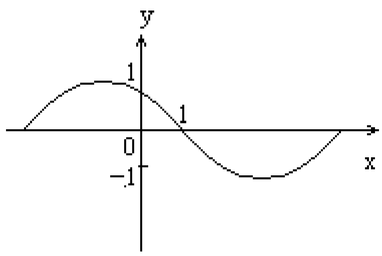
(14)如果下图是周期为 2π的三角函数 y=f(x)的图象,那么 f(x)可以写成

(A)sin(1+x)

(B)sin(-1-x)

(C)sin(x-1)

(D)sin(1-x)



(15)设命题甲为 $\lg x^2=0$;命题乙为 x=1.那么

(A)甲是乙的充分条件,但不是乙的必要条件

(B)甲是乙的必要条件,但不是乙的充分条件

(C)甲是乙的充要条件

(D)甲不是乙的充分条件,也不是乙的必要条件

(16)$(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}})^6$展开式的常数项为

(A)−160　　(B)−40　　(C)40　　(D)160

(17)体积相等的正方体、球、等边圆柱(即底面直径与母线相等的圆柱)的全面积分别为 S_1,S_2,S_3,那么它们的大小关系为

(A)$S_1<S_2<S_3$　　(B)$S_1<S_3<S_2$

(C)$S_2<S_3<S_1$　　(D)$S_2<S_1<S_3$

(18)曲线 $2y^2+3x+3=0$ 与曲线 $x^2+y^2-4x-5=0$ 的公共点的个数是

(A)4 (B)3 (C)2 (D)1

第II卷

二、填空题:把答案填在题中的横线上.

(19)椭圆 $9x^2+16y^2=144$ 的离心率为___________.

(20)设复数 $z_1=2-i, z_2=1-3i$, 则复数 $\frac{i}{z_1}+\frac{\bar{z}_2}{5}$ 的虚部等于__________.

(21)已知圆台的上、下底面半径分别为 r、2r,侧面积等于上、下底面积之和,则圆台的高为___________.

(22) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n\cdot 2^n+1}{n\cdot 3^n-1}=$ ____________.

(23)在体积为 V 的斜三棱柱 ABC-A'B'C'中,已知 S 是侧棱 CC'上的一点,过点 S,A,B 的截面截得的三棱锥的体积为 V_1,那么过点 S,A',B'的截面截得的三棱锥的体积为___________.

(24)设函数 $f(x)=x^2+x+\frac{1}{2}$ 的定义域是 $[n,n+1]$(n是自然数),那么在 $f(x)$ 的值域中共有___________个整数.

三、解答题.

(25)已知α,β为锐角, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=-\frac{1}{3}$.求 $\cos\beta$ 的值.

(26)解不等式 $\sqrt{5-4x-x^2}\geq x$.

(27) 如图,已知:在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中 $\angle ACB=90°$, $\angle BAC=30°$,

$BC=1$

$AA_1=\sqrt{6}$, M是 CC_1 的中点.求证 $AB_1\perp A_1M$.

(28)设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1=1$, S_n 是它的前 n 项和;$\{b_n\}$是等比数列,其公比的绝对值小于1, T_n 是它的前n项和.如果 $a_3=b_2$, $S_5=2T_2-6$, $\lim_{n\to\infty}T_n=9$, 求 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$的通项公式.

(29)已知双曲线C的实半轴长与虚半轴长的乘积为 $\sqrt{3}$, C的两个焦点分别为 F_1,F_2. 直线l过 F_2 且与直线 F_1F_2 的夹角为ψ, $\operatorname{tg}\psi=\frac{\sqrt{21}}{2}$, l与线段 F_1F_2 的垂直平分线的交点是 P,线段 PF_2 与双曲线 C 的交点为 Q,且 $|PQ|:|QF_2|=2:1$.求双曲线 C 的方程.

(30)已知函数$f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$. .

(Ⅰ)证明:f(x)在(-∞,+∞)上是增函数;

(Ⅱ)证明:对于任意不小于3的自然数n,都有 $f(n)>\dfrac{n}{n+1}$.

1991 年试题答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)B	(2)A	(3)C	(4)B	(5)C	(6)B	(7)D
(8)D	(9)C	(10)A	(11)D	(12)B	(13)B	(14)D
(15)B	(16)A	(17)C	(18)D			

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(19)$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　(20)1　　(21)$\dfrac{4}{3}r$

(22)0　　(23)$\dfrac{V}{3}-V_1$　　(24)2n+2

三、解答题.

(25)本小题考查三角公式、三角函数式的恒等变形和运算能力.

解法一:∵α是锐角,$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$,

∴　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{3}{5}$,

$$\text{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3}{4}.$$

∵　$\text{tg}\,\beta=\text{tg}[\alpha-(\alpha-\beta)]$

$$=\frac{\text{tg}\,\alpha-\text{tg}(\alpha-\beta)}{1+\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}{1+\frac{3}{4}\cdot(-\frac{1}{3})}=\frac{13}{9},$$

又β是锐角,

∴　$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\text{tg}^2\beta}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{13}{9})^2}}=\frac{9}{50}\sqrt{10}$$

解法二:∵α是锐角,$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$,

$\therefore \quad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{3}{5}.$

$\because$ α, β **都是锐角**, $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = -\frac{1}{3}$,

$\therefore$ $\alpha-\beta$ 在第四象限.

于是

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2(\alpha-\beta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{-1}{3}\right)^2}} = \frac{3}{10}\sqrt{10}$$

$$\sin(\alpha-\beta) = -\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)} = -\sqrt{1-\frac{9}{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

由此得出 $\cos\beta = \cos[\alpha-(\alpha-\beta)]$

$$= \cos\alpha\cos(\alpha-\beta) + \sin\alpha\sin(\alpha-\beta)$$

$$= \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{10}\sqrt{10} + \frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{10}\sqrt{10}\right) = \frac{9}{50}\sqrt{10}$$

(26)本小题考查不等式的性质与解法以及分析问题的能力.

解:原不等式 $\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ 5-4x-x^2\geq 0, \\ 5-4x-x^2\geq x^2. \end{cases}$ **或** $\begin{cases} x<0, \\ 5-4x-x^2\geq 0. \end{cases}$

$$(\mathrm{I})\begin{cases} x\geq 0, \\ 5-4x-x^2\geq 0, \\ 5-4x-x^2\geq x^2, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ 2x^2+4x-5\leq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0, \\ -1-\frac{\sqrt{14}}{2}\leq x\leq -1+\frac{\sqrt{14}}{2}, \end{cases}$$

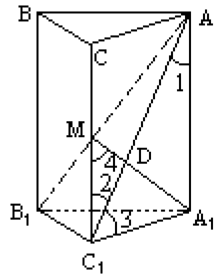
$$\Leftrightarrow 0\leq x\leq -1+\frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases} x<0, \\ 5-4x-x^2\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<0, \\ -5\leq x\leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -5\leq x<0$$

$\therefore$原不等式的解集为$\{x \mid -5\leq x\leq -1+\frac{\sqrt{14}}{2}\}.$

(27)本小题考查直线与直线,直线与平面的位置关系,三垂线定理的知识,推理,空间想象以及计算的能力.



证法一:由题设知 $B_1C_1 \perp A_1C_1$,$B_1C_1 \perp C_1C$.

∴ $B_1C_1 \perp$侧面 A_1ACC_1(线面垂直的判定定理).

连结 C_1A,则 C_1A 是 B_1A 在侧面 A_1ACC_1 上的射影.

设 AC_1 与 A_1M 相交于点 D.

在 $Rt\triangle A_1B_1C_1$ 中,由 $B_1C_1=1$ 和 $\angle B_1A_1C_1=\angle BAC=30°$,

得$A_1C_1=\sqrt{3}$.

$\therefore \dfrac{AA_1}{A_1C_1}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}.$

在$\triangle RtA_1C_1M$中,$\dfrac{A_1C_1}{MC_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{2}.$

$\therefore \dfrac{AA_1}{A_1C_1}=\dfrac{A_1C_1}{MC_1}$.

又$\angle AA_1C_1=\angle A_1C_1M=90°$,

∴ $\triangle AA_1C_1 \backsim \triangle A_1C_1M$.

∴ $\angle 3=\angle 4$,

∵ $AA_1 /\!/ CC_1$

∴ $\angle 1=\angle 2$,

从而$\angle C_1DM=\angle C_1A_1A=90°$.

∴ $AC_1 \perp A_1M$,

由三垂线定理得 $AB_1 \perp A_1M$.

证法二:作直三棱柱 $A_1B_1C_1-A_2B_2C_2$,使 C_1 为 CC_2 的中点.

连结 A_1B_2, B_2M.∵$AA_1=B_1B_2$,且 $AA_1 /\!/ B_1B_2$,∴$AB_1 /\!/ A_1B_2$,则 A_1B_2 与 A_1M 所成的角就是 AB_1 与 A_1M 所成的角.

由题设知

$A_1B_1=AB=2, A_1C_1=AC=\sqrt{3}, C_1C_2=\sqrt{6}.$在$Rt\triangle A_1C_1M$中,

$A_1M^2=C_1M^2+A_1C_1{}^2=(\dfrac{\sqrt{6}}{2})^2+(\sqrt{3})^2=\dfrac{9}{2}$在$Rt\triangle A_1B_1B_2$中,

$A_1B_2{}^2=A_1B_1{}^2+B_1B_2{}^2=2^2+(\sqrt{6})^2=10$

在 $Rt\triangle B_2C_2M$ 中,

$B_2M^2=B_2C_2{}^2+C_2M^2=1+(\dfrac{3\sqrt{6}}{2})^2=\dfrac{29}{2}$ PGSX_080

∴ $A_1B_2{}^2+A_1M^2=10+\dfrac{9}{2}=\dfrac{29}{2}=B_2M^2$.

∴　MA_1B_2 是直角三角形，$A_1M\perp A_1B_2$

∴　$A_1M\perp AB_1$.

(28)本小题考查等差数列、等比数列的概念，数列的极限，运用方程(组)解决问题的能力.

解法一：设数列$\{a_n\}$的公差为 d，数列$\{b_n\}$的公比为 q($|q|<1$).

由题意有$\begin{cases}1+2d=b_1q, & ①\\ \frac{5}{2}(1+1+4d)=2(b_1+b_1q)-6. & ②\end{cases}$

把①代入②得 $3b_1q=2b_1-6$，　③

由题设 $\frac{b_1}{1-q}=9$ 得 $b_1=9(1-q)$.　④

把④代入③得 $27q(1-q)=18(1-q)-6$，

化简得 $9q^2-15q+4=0$，

解得 $q=\frac{1}{3}$，或 $q=\frac{4}{3}$(不合题意，舍去).

由此得 $b_1=6, d=\frac{1}{2}$，

故$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=1+\frac{1}{2}(n-1)$

，$\{b_n\}$的通项公式是 $b_n=6\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$.

解法二：

同解法一得③式.

由题设 $\frac{b_1}{1-q}=9$ 得 $q=1-\frac{b_1}{9}$.　④

把④代入③得 $3b(1-\frac{b_1}{9})=2b_1-6$，化简得 $b_1^2-3b_1-18=0$，

解得 $b_1=6$ 或 $b_1=-3$，

代入④得 $q=\frac{1}{3}$ 或 $q=\frac{4}{3}$(不合题意，舍去).

由此得 $d=\frac{1}{2}$.　.

以下同解法一.

(29)本小题考查利用坐标法研究几何问题的思想，两条直线所成的角，线段的定比分点，双曲线的有关知识及综合解题能力.

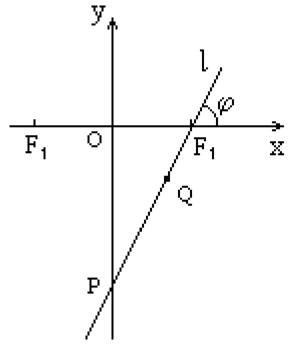
解法一：如图，以 F_1F_2 所在的直线为 x 轴，线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系.

设双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a,b>0$ 待定.

又设F_1,F_2**的坐标分别为**$(-c,0),(c,0)$,**其中**$c=\sqrt{a^2+b^2}$.**则点**P**的坐标为** .

则点P**的坐标为**$(0,-\frac{\sqrt{21}}{2}c)$.

由线段的定比分点公式得点Q**的坐标为**$(\frac{2}{3}c,-$



PGSX_081

将点Q**的坐标代入双曲线方程得**$\frac{4c^2}{9a^2}-\frac{21c^2}{36b^2}=$

,

整理得$16(\frac{b}{a})^4-41(\frac{b}{a})^2-21=0$.

解得$(\frac{b}{a})^2=3$**或**

$(\frac{b}{a})^2=-\frac{7}{16}$(**舍去**),

于是$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$ **.**

结合题设$ab=\sqrt{3}$,**解得**$a=1,\ b=\sqrt{3}$**故所求双曲线方程为** $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

解法二:**同解法一得**$\frac{4c^2}{9a^2}-\frac{21c^2}{36b^2}=1$.

将 $e=\frac{c}{a}$**代入并整理得**$16e^4-73e^2+36=0$,

解得$e_2=4$**或** $e^2=\frac{9}{16}$,**由于**$e>1$,**所以**$e=2$.

由已知 $ab=\sqrt{3}$,**得**$a^4(e^2-1)=3$,**所以**$a=1,b=\sqrt{3}$**.** **.**

故所求双曲线C**的方程为**$x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

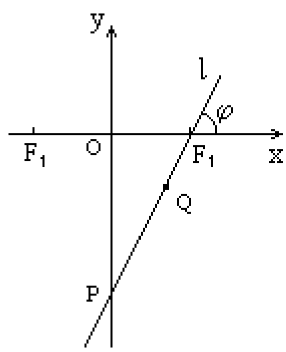
解法三:如图,以 F_2 为极点,F_2F_1 的反向延长线为极轴,建立极坐标系.设 所求双曲线右支的极坐标方程为$\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}(\rho>0)$ **.**

设｜F_1F_2｜=2c,双曲线的实半轴长为 a,虚半轴长为 b,则点 P 的极坐标为

$(\frac{5}{2}c,\pi+\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{21}}{2})$,

点Q**的极坐标为**$(\frac{5}{6}c,\pi+\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{21}}{2})$.

由于点 Q 在双曲线的右支上,故有



PGSX_082

$$\frac{5}{6}c=\frac{ep}{1-e\cos(\pi+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{21}}{2})} \quad ①$$

由$e=\frac{c}{a},p=c-\frac{a^2}{c}$得$p=ae-\frac{a}{e}$ ②

以$c=ae$和②代入①得$\frac{5}{6}ae=\frac{e(ae-\frac{a}{e})}{1+\frac{2}{5}e}$,

化简得 $4e^2-5e-6=0$.

解得$e=2$或$e=-\frac{3}{4}$ (不合题意,舍去).

再由$ab=\sqrt{3}$,$a^2b^2=3$得$a^4(e^2-1)=3$,把$e=2$代入得$a^4=1$.

$\because$ $a>0$, $\therefore a=1$.故$p=ae-\frac{a}{e}=1\cdot 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

所求双曲线右支的极坐标方程为$\rho=\frac{3}{1-2\cos\theta}$, ③

因为要求的双曲线有两支,所以方程③中的ρ允许取负值即得到要求的双曲线方程.

(30)本小题考查指数函数,数学归纳法,不等式证明等知识以及综合运用有关知识解决问题的能力.

(Ⅰ)证明:设 x_1,x_2 为任意两个实数,且 $x_1<x_2$,

$$f(x)=\frac{2^x-1}{2^x+1}=1-\frac{2}{2^x+1},$$

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{2}{2^{x_1}+1}-\frac{2}{2^{x_2}+1}$$

$$=2\cdot\frac{2^{x_2}-2^{x_1}}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}$$

由指数函数性质知,$(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)>0$,$2^{x_2}-2^{x_1}>0$,

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$,故 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

(Ⅱ)证法一:要证$f(n)>\frac{n}{n+1}$ $(n\in N,n\geq 3)$,

即要证$1-\frac{2}{2^n+1}>1-\frac{1}{n+1}$,

即要证 $2^n-1>2n(n\geq 3)$. ①

现在用数学归纳法证明①式.

(A)当 $n=3$ 时,左边$=2^3-1=7$,右边$=2\times 3=6$,

∴ 左边>右边,因而当 $n=3$ 时①式成立.

(B)假设当 $n=k(k\geq 3)$时①式成立,即有 $2^k-1>2k$,那么

$2^{k+1}-1=2\cdot 2^k-1=2(2^k-1)+1>2\cdot 2k+1=2(k+1)+(2k-1)$,

∵ $k\geq 3$, $\therefore 2k-1>0$.

∴ $2^{k+1}-1>2(k+1)$.

这就是说,当 $n=k+1$ 时①式成立.

根据(A)、(B)可知,①式对于任意不小于 3 的自然数 n 都成立.

由此有$f(n) > \frac{n}{n+1}$ ($n\in N$, 且$n\geq 3$).

证法二:同证法一得 $2^n-1>2n(n\geq 3)$,

$\because 2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$

$\therefore 2^n - C_n^0 = C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + C_n^n$

$= C_n^1 + C_n^{n-1} + (C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^{n-2} + C_n^n)$,

$\because$ $C_n^0 = 1, C_n^1 + C_n^{n-1} = 2n$,

当$n\geq 3, C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^{n-2} + C_n^n > 0$,

$\therefore$ $2^n-1>2n(n\geq 3)$

由此有$f(n) > \frac{n}{n+1}$ ($n\in N, n\geq 3$).

1991年试题
(理工农医类)

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后括号内.

(1)已知$\sin\alpha=\frac{4}{5}$,并且α是第二象限的角,那么$\operatorname{tg}\alpha$的值等于

(A)$-\frac{4}{3}$.　(B)$-\frac{3}{4}$.　(C)$\frac{3}{4}$.　(D)$\frac{4}{3}$.

【　】

(2)焦点在(-1,0),顶点在(1,0)的抛物线方程是

(A)$y^2=8(x+1)$　(B)$y^2=-8(x+1)$

(C)$y^2=8(x-1)$　(D)$y^2=-8(x-1)$

【　】

(3)函数 $y=\cos^4x-\sin^4x$ 的最小正周期是

(A)$\frac{\pi}{2}$　(B)π　(C)2π　(D)4π

【　】

(4)如果把两条异面直线看成"一对",那么六棱锥的棱所在的12条直线中,异面直线共有

(A)12对　(B)24对　(C)36对　(D)48对

【　】

(5)函数$y=\sin(2x+\frac{5\pi}{2})$的图象的一条对称轴的方程是

(A)$x=-\frac{\pi}{2}$　(B)$x=-\frac{\pi}{4}$　(C)$x=\frac{\pi}{8}$　(D)$x=\frac{5\pi}{4}$

【　】

(6)如果三棱锥S—ABC的底面是不等边三角形,侧面与底面所成的二面角都相

等,且顶点S在底面的射影O在△ABC内,那么O是△ABC的

(A)垂心　(B)重心　(C)外心　(D)内心

【　】

(7)已知$\{a_n\}$}是等比数列,且$a_n>0$,$a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$,那么a_3+a_5的值等于

(A)5　(B)10　(C)15　(D)20

【　】

(8)如果圆锥曲线的极坐标方程为$\rho=\frac{16}{5-3\cos\theta}$,那么它的焦点的极坐标为

(A)(0,0),(6,π)　(B)(-3,0),(3,0)

(C)(0,0),(3,0)　(D)(0,0),(6,0)

【　】

(9)从4台甲型和5台乙型电视机中任意取出3台,其中至少要有甲型与

乙型电视机各 1 台,则不同的取法共有

(A)140 种　(B)84 种　(C)70 种　(D)35 种

【　】

(10)如果AC＜0且BC＜0,那么直线Ax＋By＋C＝0不通过

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限

【　】

(11)设甲、乙、丙是三个命题.如果甲是乙的必要条件;丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件,那么

(A)丙是甲的充分条件,但不是甲的必要条件

(B)丙是甲的必要条件,但不是甲的充分条件

(C)丙是甲的充要条件

(D)丙不是甲的充分条件,也不是甲的必要条件

【　】

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5})\cdots(1-\frac{1}{n+2})]$的值等于)

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

【　】

(13)如果奇函数 f(x)在区间[3,7]上是增函数且最小值为 5,那么 f(x)在区间[-7,-3]上是

(A)增函数且最小值为－5　(B)增函数且最大值为－5

(C)减函数且最小值为－5　(D)减函数且最大值为－5

【　】

(14)圆$x^2+2x+y^2+4y-3=0$上到直线$x+y+1=0$的距离为$\sqrt{2}$的点共有

(A)1 个　(B)2 个　(C)3 个　(D)4 个

【　】

(15)设全集为 R,f(x)=sinx,g(x)=cosx,M={x｜f(x)≠0},N={x｜g(x)≠0},那么集合{x｜f(x)g(x)=0}等于

(A) $\overline{M}\cap\overline{N}$　(B) $\overline{M}\cup N$　(C) $M\cup\overline{N}$　(D) $\overline{M}\cup\overline{N}$

【　】

二、填空题:把答案填在题中横线上.

(16)$\mathrm{arctg}\frac{1}{3}+\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$的值是____________.

(17)不等式$6^{x^2+x-2}<1$的解集是____________.

(18)已知正三棱台上底面边长为 2,下底面边长为 4,且侧棱与底面所成的角是

45°,那么这个正三棱台的体积等于________.

(19)在$(ax+1)^7$的展开式中,x^3的系数是x^2的系数与x^4的系数的等差中项,若实数

a>1,那么 a=________.

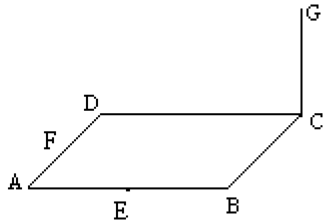
(20)在球面上有四个点 P、A、B、C,如果 PA、PB、PC 两两互相垂直,且 PA＝PB＝PC＝a.那么这个球面的面积是______.

三、解答题.

(21)求函数$y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$的最小值,并写出使函数y取最小值的x的集合.

(22)已知复数$z=1+i$，求复数$\frac{z^2-3z+6}{z+1}$的模和辐角的主值.

(23)已知ABCD是边长为4的正方形,E、F分别是AB、AD的中点,GC垂直于ABCD所在的平面,且GC＝2.求点B到平面EFG的距离.



(24)根据函数单调性的定义,证明函数$f(x)=-x^3+1$在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

(25)已知n为自然数,实数a>1,解关于x的不等式

$$\log_a x-\log_{a^2} x+12\log_{a^3} x+\cdots+n(-2)^{n-1}\log_{a^n} x>\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$$

(26)双曲线的中心在坐标原点O，焦点在x轴上，过双曲线右焦点且斜率为$\sqrt{\frac{3}{5}}$的直线交双曲线于P、Q两点。若$OP\perp OQ$，$|PQ|=4$，求双曲线的方程，

1991年试题（理工农医类）答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

常规卷和A型卷答案

(1)A	(2)D	(3)B	(4)B	(5)A
(6)D	(7)A	(8)D	(9)C	(10)C
(11)A	(12)C	(13)B	(14)C	(15)D

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(16)$\frac{\pi}{4}$(17)$\{x\mid -2<x<1\}$(18)$\frac{14}{3}$(19)$1+\frac{\sqrt{10}}{5}$(20)$3\pi a^2$

三、解答题.

(21)本小题考查三角形函数式的恒等变形及三角函数的性质.

解:$y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$

$=(\sin^2x+\cos^2x)+2\sin x\cos x+2\cos^2x$

$=1+\sin2x+(1+\cos2x)$

$=2+\sin2x+\cos2x$

$=2+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4}).$

当$\sin(2x+\frac{\pi}{4})=-1$时y取得最小值$2-\sqrt{2}$.

使y取最小值的x的集合为{ $\{x\mid x=k\pi-\frac{3}{8}\pi,k\in z\}$.

(22)本小题考查复数基本概念和运算能力.

解:$\dfrac{z^2-3z+6}{z+1}=\dfrac{(1+i)^2-3(1+i)+6}{1+i+1}$

$=\dfrac{3-i}{2+i}$

$=1-i.$

$1-i$的模$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.因为$1-i$对应的点在第四象限且辐角的正切

$tg\theta=-1$,所以辐角的主值$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$.

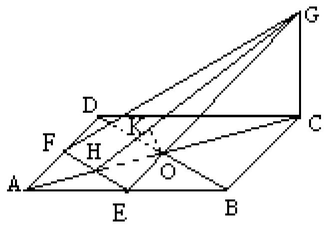
(23)本小题考查直线与直线,直线与平面,平面与平面的位置关系,以及逻辑推理和空间想象能力.

解:如图,连结 EG、FG、EF、BD、AC.EF、BD 分别交 AC 于 H、O. 因为 ABCD 是正方形,E、F 分别为 AB 和 AD 的中点,故 EF∥BD,H 为 AO 的中点.

BD 不在平面 EFG 上.否则,平面 EFG 和平面 ABCD 重合,从而点 G 在平面的 ABCD 上,与题设矛盾.

由直线和平面平行的判定定理知 BD∥平面 EFG,

所以 BD 和平面 EFG 的距离就是点 B 到平面 EFG 的距离.



∵BD⊥AC,

∴EF⊥HC.

∵GC⊥平面 ABCD,

∴EF⊥GC,

∴EF⊥平面 HCG.

∴平面 EFG⊥平面 HCG,HG 是这两个垂直平面的交线.

作 OK⊥HG 交 HG 于点 K,由两平面垂直的性质定理知 OK⊥平面 EFG,所以线段 OK 的长就是点 B 到平面 EFG 的距离.

∵正方形ABCD的边长为4,GC=2,

∴$AC=4\sqrt{2}$,$HO=\sqrt{2}$,$HC=3\sqrt{2}$.

∴在Rt△HCG中,$HG=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$.

由于Rt△HKO和Rt△HCG有一个锐角是公共的,故△HKO∽△HCG.

∴$OK=\dfrac{HO\cdot GC}{HG}=\dfrac{\sqrt{2}\times 2}{\sqrt{22}}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

即点B到平面EFG的距离为$\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

注:未证明“BD 不在平面 EFG 上”不扣分.

(24)本小题考查函数单调性的概念,不等式的证明,以及逻辑推理能力.

证法一:在$(-\infty,+\infty)$上任取 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,

则$f(x_2)-f(x_1)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$.

∵$x_1<x_2$,

∴$x_1-x_2<0$.

当$x_1x_2<0$时,有$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2>0$;

当$x_1x_2\geq 0$时,有$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$;

∴$f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$.

即 $f(x_2)<f(x_1)$

所以,函数 $f(x)=-x^3+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

证法二:在$(-\infty,+\infty)$上任取 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_2)-f(x_1)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$.

∵ $x_1<x_2$,

∴ $x_1-x_2<0$.

∵ x_1,x_2 不同时为零,

∴ $x_1^2+x_2^2>0$.

又 ∵$x_1^2+x_2^2>\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)\geq|x_1x_2|\geq -x_1x_2$,

∴$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$,

∴$f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$.

即 $f(x_2)<f(x_1)$.

所以,函数 $f(x)=-x^3+1$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

(25)本小题考查对数、数列、解不等式等基本知识,以及分析问题的能

力.

解:利用对数换底公式,原不等式左端化为

$$\log_a x-4\cdot\frac{\log_a x}{\log_a a^2}+12\cdot\frac{\log_a x}{\log_a a^3}+\cdots+n(-2)^{n-1}\cdot\frac{\log_a x}{\log_a a^n}$$

$$=[1-2+4+\cdots+(-2)^{n-1}]\log_a x$$

$$=\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a x.$$

故原不等式可化为$\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a x>\frac{1-(-2)^n}{3}\log_a(x^2-a)$ ①

当n为奇数时,$\frac{1-(-2)^n}{3}>0$,不等式①等价于

$\log_a x>\log_a(x^2-a)$ ②

因为 $a>1$,②式等价于

$$\begin{cases}x>0,\\x^2-a>0,\\x>x^2-a;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ |x|>\sqrt{a},\\ x^2-x-a<0;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\sqrt{a},\\ \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.\end{cases}$$

因为 $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0,\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>\frac{\sqrt{4a}}{2}=\sqrt{a},$

所以,不等式②的解集为 $\{x\mid\sqrt{a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}.$

当n为偶数时,$\frac{1-(-2)^n}{3}<0,$ 不等式①等价于

$\log_a x<\log_a(x^2-a)$.

因为 a>1,②式等价于

$$\begin{cases}x>0,\\ x^2-a>0,\\ x<x^2-a;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ |x|>\sqrt{a},\\ x^2-x-a>0;\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\sqrt{a},\\ x<\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2};\end{cases} \text{或} \begin{cases}x>\sqrt{a},\\ x>\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.\end{cases}$$

因为 $\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}<0,\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}>\frac{\sqrt{4a}}{2}=\sqrt{a},$

所以,不等式③的解集为 $\{x\mid x>\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}.$

综合得:当n为奇数时,原不等式的解集是 $\{x\mid\sqrt{a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\};$

当n为偶数时,原不等式的解集是 $\{x\mid x>\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\}.$

(26)本小题考查双曲线性质,两点距离公式,两直线垂直条件,代数二次方程等基本知识,以及综合分析能力.

解法一:设双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$

依题意知,点 P,Q 的坐标满足方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, & ①\\ y=\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x-c)(\text{其中}c=\sqrt{a^2+b^2}). & ②\end{cases}$$

将②式代入①式，整理得

$$(5b^2-3a^2)x^2+6a^2cx-(3a^2c^2+5a^2b^2)=0. \qquad ③$$

设方程③的两个根为x_1,x_2.若$5b^2-3a^2=0$,则$\dfrac{b}{a}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}$,即直线②与双曲线①的两条渐近线中的一条平行,故与双曲线只能有一个交点,与题设矛盾,所以$5b^2-3a^2\neq 0$.

根据根与系数的关系，有

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{6a^2c}{5b^2-3a^2}, & ④\\ x_1x_2=-\dfrac{3a^2c^2+5a^2b^2}{5b^2-3a^2}. & ⑤\end{cases}$$

由于P、Q在直线$y=\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x-c)$上,可记为

$P(x_1,\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x_1-c)),Q(x_2,\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x_2-c))$.

由$OP\perp OQ$得$\dfrac{\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)}{x_1}\cdot\dfrac{\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)}{x_2}=-1$,

整理得 $3c(x_1+x_2)-8x_1x_2-3c^2=0.$ ⑥

将④,⑤式及 $c^2=a^2+b^2$ 代入⑥式，并整理得

$3a^4+8a^2b^2-3b^4=0,$

$(a^2+3b^2)(3a^2-b^2)=0.$

因为 $a^2+3b^2\neq 0$,解得 $b^2=3a^2$,

所以 $c=\sqrt{a^2+b^2}=2a.$

由$|PQ|=4$,得$(x_2-x_1)^2+[\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x_2-c)-\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x_1-c)]^2=4^2$.

整理得$(x_1+x_2)^2-4x_1x_2-10=0.$ ⑦

将④,⑤式及 $b^2=3a^2,c=2a$ 代入⑦式，解得 $a^2=1$.

将 $a^2=1$ 代入 $b^2=3a^2$ 得 $b^2=3$.

故所求双曲线方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

解法二：④式以上同解法一.

解方程③得$x_1=\frac{-3a^2c+\sqrt{40}ab^2}{5b^2-3a^2}, x_2=\frac{-3a^2c-\sqrt{40}ab^2}{5b^2-3a^2}$.　　④

由于P、Q在直线$y=\sqrt{\frac{3}{5}}(x-c)$上,可记为$P(x_1,\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)), Q(x_2,\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c))$.

由$OP\perp OQ$,得$x_1x_2+\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)=0$.　　⑤

将④式及 $c^2=a^2+b^2$ 代入⑤式并整理得　$3a^4+8a^2b^2-3b^4=0$,
即　$(a^2+3b^2)(3a^2-b^2)=0$.
因 $a^2+3b^2\neq 0$,解得 $b^2=3a^2$.

由$|PQ|=4$,得$(x_2-x_1)^2+[\sqrt{\frac{3}{5}}(x_2-c)-\sqrt{\frac{3}{5}}(x_1-c)]^2=4^2$.

即　$(x_2-x_1)^2=10$.　　⑥
将④式代入⑥式并整理得
$(5b^2-3a^2)^2-16a^2b^4=0$.
将 $b^2=3a^2$ 代入上式,得 $a^2=1$,
将 $a^2=1$ 代入 $b^2=3a^2$ 得 $b^2=3$.
故所求双曲线方程为

$$x^2-\frac{y^2}{3}=1.$$

1991年试题
（文史类）

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后括号内.

(1)已知 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$,并且α是第二象限的角,那么 tg α的值等于

(A) $-\frac{4}{3}$　　(B) $-\frac{3}{4}$　　(C) $\frac{3}{4}$　　(D) $\frac{4}{3}$

【　　】

(2)焦点在(-1,0),顶点在(1,0)的抛物线方程是

(A) $y^2=8(x+1)$　　(B) $y^2=-8(x+1)$

(C) $y^2=8(x-1)$　　(D) $y^2=-8(x-1)$

【　　】

(3)函数 $y=\cos^4x-\sin^4x$ 的最小正周期是

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 4π

【　　】

(4)点 P(2,5)关于直线 x+y=0 的对称点的坐标是

(A)(5,2)　　(B)(2,-5)　　(C)(-5,-2)　　(D)(-2,-5)

【　　】

(5)如果把两条异面直线看成“一对”,那么六棱锥的棱所在的12条直线中,异面直线共有

(A)12对　　(B)24对　　(C)36对　　(D)48对

【　　】

(6)函数 $y=\sin(2x+\frac{5\pi}{2})$ 的图象的一条对称轴的方程是

(A) $x=-\frac{\pi}{2}$　　(B) $x=-\frac{\pi}{4}$

(C) $x=\frac{\pi}{8}$　　(D) $x=\frac{5\pi}{4}$

【　　】

(7)如果三棱锥 S—ABC 的底面是不等边三角形,侧面与底面所成二面角都相等,且顶点 S 在底面的射影 O 在△ABC 内,那么 O 是△ABC 的

(A)垂心　　(B)重心　　(C)外心　　(D)内心

【　　】

(8)已知 $\{a_n\}$ 是等比数列,且 $a_n>0$, $a_2a_4+2a_3a_5+a_4a_6=25$,那么 a_3+a_5 的值等于

(A)5　　(B)10　　(C)15　　(D)20

【　　】

(9)已知函数 $y=\frac{6x+5}{x-1}$ ($x\in R$,且 $x\neq 1$),那么它的反函数为

(A) $y=\frac{6x+5}{x-1}$ ($x\in R$,且 $x\neq 1$)

$(B)y=\frac{x+5}{x-6}(x\in R,且x\neq 6)$

$(C)y=\frac{x-1}{6x+5}(x\in R,且x\neq -\frac{5}{6})$

$(D)y=\frac{x-6}{x+5}(x\in R,且x\neq -5)$

【　　】

(10)从4台甲型和5台乙型电视机中任意取出3台,其中至少要有甲型与乙型电视各1台,则不同的取法共有

(A)140种　　(B)84种　　(C)70种　　(D)35种

【　　】

(11)设甲、乙、丙是三个命题.如果甲是乙的必要条件;丙是乙的充分条件但不是乙的必要条件,那么

(A)丙是甲的充分条件,但不是甲的必要条件.

(B)丙是甲的必要条件,但不是甲的充分条件.

(C)丙是甲的充要条件.

(D)丙不是甲的充分条件,也不是甲的必要条件.

【　　】

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{5})\cdots(1-\frac{1}{n+2})]$的值等于

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3

【　　】

(13)如果AC＜0且BC＜0,那么直线Ax＋By＋C＝0不通过

(A)第一象限　　(B)第二象限

(C)第三象限　　(D)第四象限

【　　】

(14)如果奇函数f(x)在区间[3,7]上是增函数且最小值为5,那么f(x)在区间[-7,-3]上是

(A)增函数且最小值为－5

(B)增函数且最大值为－5

(C)减函数且最小值为－5

(D)减函数且最大值为－5

【　　】

(15)圆$x^2+2x+y^2+4y-3=0$上到直线$x+y+1=0$的距离为$\sqrt{2}$的点共有

(A)1个　　(B)2个　　(C)3个　　(D)4个

【　　】

二、填空题:把答案填在题中横线上.

(16)双曲线以直线x=-1和y=2为对称轴,如果它的一个焦点在y轴上,那么它的另一个焦点的坐标是________________.

(17)已知$\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,则$\sin 2(x-\frac{\pi}{4})=$ ______________

(18)不等式$\lg(x^2+2x+2)<1$的解集是______________.

(19)在$(ax+1)^7$的展开式中,x^3的系数是x^2的系数与x^4的系数的等差中项,若实数a>1,那么a=______________________.

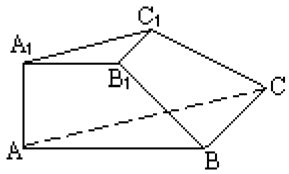
(20)在长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中,已知顶点 A 上三条棱长分别是 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、2 .如果对角线AC_1与过点A的相邻三个面所成的角分别是 α、β、γ,那么 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=$____________.

三、解答题.

(21)求函数 $y=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x$ 的最大值.

(22)已知复数$z=1+i$,求复数$\dfrac{z^2-3z+6}{z+1}$的模和辐角的主值.

(23)如图,在三棱台 $A_1B_1C_1—ABC$ 中,已知 $A_1A\perp$底面 ABC,$A_1A=A_1B_1=B_1C_1=a$,$B_1B\perp BC$,且 B_1B 和底面 ABC 所成的角是 45°.求这个棱台的体积.



(24)设$\{a_n\}$是等差数列,$b_n=(\frac{1}{2})^{a_n}$.已知:$b_1+b_2+b_3=\dfrac{21}{8}$,$b_1b_2b_3=\dfrac{1}{8}$.求等差数列的通项$a_n$.

(25)设$a>0,a\neq1$,解关于x的不等式$a^{x^4-2x^2}>(\frac{1}{a})^{a^2}$.

(26)已知椭圆的中心在坐标原点 O,焦点在坐标轴上,直线 y=x+1 与该椭圆相交于P和Q,且$OP\perp OQ$,$|PQ|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.求椭圆的方程.

1991 年试题（文史类）答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)A	(2)D	(3)B	(4)C	(5)B
(6)A	(7)D	(8)A	(9)B	(10)C
(11)A	(12)C	(13)C	(14)B	(15)C

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(16)(-2,2)　　(17)$2-\sqrt{5}$

(18)$\{x\mid -4<x<2\}$　　(19)$1+\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　(20)2

三、解答题.

(21)本小题考查三角函数式的恒等变形及三角函数的性质.

解:
$$\begin{aligned}y&=\sin^2x+2\sin x\cos x+3\cos^2x\\&=(\sin^2x+\cos^2x)+2\sin x\cos x+2\cos^2x\\&=1+\sin2x+(1+\cos2x)\\&=2+\sin2x+\cos2x\\&=2+\sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

当$\sin(2x+\frac{\pi}{4})=1$时,函数y有最大值,这时y的最大值等于$2+\sqrt{2}$.

(22)本小题考查复数基本概念和运算能力.

解：$\frac{z^2-3z+6}{z+1}=\frac{(1+i)^2-3(1+i)+6}{1+i+1}$

$=\frac{3-i}{2+i}$

$=1-i.$

$1-i$的模$r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.因为$1-i$对应的点在第四象限且辐角的正切$\operatorname{tg}\theta=-1$,所以辐角的主值$\theta=\frac{7}{4}\pi$..

(23)本小题考查直线与直线,直线与平面的位置关系,以及逻辑推理和空间想象能力.

解:因为 A_1A⊥底面 ABC,所以根据平面的垂线的定义有 A_1A⊥BC.又 BC⊥BB_1,且棱 AA_1 和 BB_1 的延长线交于一点,所以利用直线的平面垂直的判定定理可以推出 BC⊥侧面 A_1ABB_1,从而根据平面垂线的定义又可得出 BC⊥AB.∴△ABC 是直角三角形,∠ABC＝90°.并且∠ABB_1 就是 BB_1 和底面 ABC 所成的角,

∠ABB_1＝45°.

作 B_1D⊥AB 交 AB 于 D,则 B_1D∥A_1A,故 B_1D⊥底面 ABC.

∵Rt△B_1DB 中.∠DBB_1＝45°,

∴DB＝DB_1＝AA_1＝a,

∴AB=2a.

由于棱台的两个底面相似,故

Rt△ABC∽Rt△$A_1B_1C_1$.

∵B_1C_1＝A_1B_1＝a，AB＝2a.

∴BC＝2a.

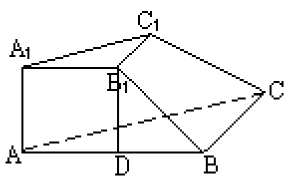
设棱台的上、下底面的面积分别是 $S_{上}$、$S_{下}$,

$S_{上}=\frac{1}{2}A_1B_1\times B_1C_1=\frac{a^2}{2}$.

$S_{下}=\frac{1}{2}AB\times BC=2a^2$.

$V_{棱台}=\frac{1}{3}\cdot A_1A\cdot(S_{上}+\sqrt{S_{上}\cdot S_{下}}+S_{下})$

$=\frac{1}{3}\cdot a\cdot(\frac{a^2}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{2}\times 2a^2}+2a^2)=\frac{7}{6}a^3$.



(24)本小题考查等差数列,等比数列的概念及运用方程(组)解决问

题的能力.

解:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_n=a_1+(n-1)d$.

$$\therefore b_n=(\frac{1}{2})^{a_1+(n-1)d}$$

$$b_1b_3=(\frac{1}{2})^{a_1}\cdot(\frac{1}{2})^{a_1+2d}$$

$$=(\frac{1}{2})^{2(a_1+d)}$$

$$=b_2^2.$$

由$b_1b_2b_3=\frac{1}{8}$,得$b_2^3=\frac{1}{8}$

解得$b_2=\frac{1}{2}$..

代入已知条件

$$\begin{cases} b_1b_2b_3=\frac{1}{8}, \\ b_1+b_2+b_3=\frac{21}{8}. \end{cases}$$

整理得

$$\begin{cases} b_1b_3=\frac{1}{4}, \\ b_1+b_3=\frac{17}{8} \end{cases}.$$

解这个方程组得$b_1=2,b_3=\frac{1}{8}$ 或$b_1=\frac{1}{8},b_3=2,$

$\therefore a_1=-1,d=2$ 或 $a_1=3,d=-2$.

所以,当 $a_1=-1,d=2$ 时

$a_n=a_1+(n-1)d=2n-3$.

当 $a_1=3,d=-2$ 时

$a_n=a_1+(n-1)d=5-2n$.

(25)本小题考查指数函数性质、解不等式及综合分析能力.

解法一:原不等式可写成 $a^{x^4-2x^2}>a^{-a^2}$. ①

根据指数函数性质,分为两种情形讨论:

(Ⅰ)当 $0<a<1$ 时,由①式得

$x^4-2x^2+a^2<0$, ②

由于 $0<a<1$ 时,判别式

$\triangle=4-4a^2>0$,

所以②式等价于

$$\begin{cases} x^2>1-\sqrt{1-a^2}, & ③ \\ x^2<1+\sqrt{1-a^2}. & ④ \end{cases}$$

解③式得 $x < -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$ 或 $x > \sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$,

解④式得 $-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}$.

所以,$0 < a < 1$时,原不等式的解集为

{ $\{x \mid -\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} < x < -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\}$

} ∪ $\{x \mid \sqrt{1-\sqrt{1-a^2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\}$

(Ⅱ)当 a>1 时,由①式得

$x^4-2x^2+a^2>0$

由于 a>1,判别式△<0,故⑤式对任意实数 x 成立,即得原不等式的解集为

{x|-∞<x<+∞}.

综合得

当 0<a<1 时,原不等式的解集为

{ $\{x \mid -\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} < x < -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\}$

} ∪ $\{x \mid \sqrt{1-\sqrt{1-a^2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\}$

当 a>1 时,原不等式的解集为{x|-∞<x<+∞]} .

解法二:原不等式可写成 $a^{x^4-2x^2} > a^{-a^2}$ ①

(Ⅰ)当 0<a<1 时,由①式得

$x^4-2x^2+a^2<0$, ②

分解因式得 $(x^2-1+\sqrt{1-a^2})(x^2-1-\sqrt{1-a^2})<0.$ ③

即 $\begin{cases} x^2-1+\sqrt{1-a^2}>0, & ④ \\ x^2-1-\sqrt{1-a^2}<0; & ⑤ \end{cases}$

或 $\begin{cases} x^2-1+\sqrt{1-a^2}<0, & ⑥ \\ x^2-1-\sqrt{1-a^2}>0. & ⑦ \end{cases}$

解由④、⑤组成的不等式组得

$-\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} < x < -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}$

或 $\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}$

由⑥、⑦组成的不等式组解集为空集;所以,0<a<1 时,原不等式的解集为

{ $\{x \mid -\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} < x < -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\}$

} ∪ $\{x \mid \sqrt{1-\sqrt{1-a^2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\}$

(Ⅱ)当 a>1 时,由①式得

$x^4-2x^2+a^2>0$, ⑧

配方得 $(x^2-1)^2+a^2-1>0$, ⑨

对任意实数 x,不等式⑨都成立,即 a>1 时,原不等式的解集为

{x|-∞<x<+∞}.

综合得

当 $0<a<1$ 时,原不等式的解集为

$$\{\ \{x \mid -\sqrt{1+\sqrt{1-a^2}} < x < -\sqrt{1-\sqrt{1-a^2}}\}$$

$$\}\ \cup \{x \mid \sqrt{1-\sqrt{1-a^2}} < x < \sqrt{1+\sqrt{1-a^2}}\}$$

当 $a>1$ 时,原不等式的解集为$\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$.

(26)本小题考查椭圆的性质、两点的距离公式、两条直线垂直条件、二次方程根与系数的关系及分析问题的能力.

解法一:设所求椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

依题意知,点 P,Q 的坐标满足方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, & ① \\ y=x+1. & ② \end{cases}$$

将②式代入①式,整理得

$$(a^2+b^2)x^2+2a^2x+a^2(1-b^2)=0, ③$$

设方程③的两个根分别为 x_1,x_2,那么直线 $y=x+1$ 与椭圆的交点为

$$P(x_1,x_1+1),Q(x_2,x_2+1).$$

由题设$OP\perp OQ$, $|PQ|=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$,可得

$$\begin{cases} \dfrac{x_1+1}{x_1}\cdot\dfrac{x_2+1}{x_2}=-1, \\ (x_2-x_1)^2+[(x_2+1)-(x_1+1)]^2=(\dfrac{\sqrt{10}}{2})^2 \end{cases}$$

整理得

$$(x_1+x_2)+2x_1x_2+1=0, \quad ④$$

$$4(x_1+x_2)^2-16x_1x_2-5=0 \quad ⑤$$

解这个方程组,得

$$\begin{cases} x_1x_2=\dfrac{1}{4}, \\ x_1+x_2=-\dfrac{3}{2}; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_1x_2=-\dfrac{1}{4} \\ x_1+x_2=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

根据根与系数的关系,由③式得

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \dfrac{2a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{a^2(1-b^2)}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{4}; \end{cases} \quad 或 \quad (\mathrm{II})\begin{cases} \dfrac{2a^2}{a^2+b^2}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a^2(1-b^2)}{a^2+b^2}=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

解方程组(Ⅰ),(Ⅱ),得

$$\begin{cases} a^2=2, \\ b^2=\dfrac{2}{3} \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a^2=\dfrac{2}{3} \\ b^2=2 \end{cases}$$

故所求椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1,\quad \text{或} \quad \frac{x^2}{\frac{2}{3}}+\frac{y^2}{2}=1.$$

解法二:同解法一得

$$(a^2+b^2)x^2+2a^2x+a^2(1-b^2)=0, \qquad ③$$

解方程③得

$$x_1=\frac{-a^2+ab\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2},\ x_2=\frac{-a^2-ab\sqrt{a^2+b^2-1}}{a^2+b^2} \qquad ④$$

则直线 y=x+1 与椭圆的交点为

$$P(x_1,x_1+1),Q(x_2,x_2+1).$$

由题设 OP⊥OQ,得

$$\frac{x_1+1}{x_1}\cdot\frac{x_2+1}{x_2}=-1. \qquad ⑤$$

将④式代入⑤式,整理得

$$a^2+b^2=2a^2b^2. \qquad ⑥$$

由 $|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$,得

$$(x_2-x_1)^2+[(x_2+1)-(x_1+1)]^2=(\frac{\sqrt{10}}{2})2,$$

即

$$(x_2-x_1)^2=\frac{5}{4} \qquad ⑦$$

将④式代入⑦式,得

$$\frac{4a^2b^2(a^2+b^2-1)}{(a^2+b^2)^2}=\frac{5}{4}, \qquad ⑧$$

将⑥式、⑧式联立,整理得

$$\begin{cases} a^2+b^2=\frac{8}{3}, \\ a^2b^2=\frac{4}{3}. \end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases} a^2=2, \\ b^2=\frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} a^2=\frac{2}{3} \\ b^2=2 \end{cases}$$

故所求椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{\frac{2}{3}}=1,\quad \text{或} \quad \frac{x^2}{\frac{2}{3}}+\frac{y^2}{2}=1.$$

1992年试题
(湖南、云南、海南三省用题)

第Ⅰ卷

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)设复数$z = i^2 + \sqrt{3}i$,那么$\arg z$是

(A)$\frac{5}{6}\pi$　(B)$\frac{\pi}{3}$　(C)$\frac{2}{3}\pi$　(D)$-\frac{4}{3}\pi$

(2)如果等边圆柱(即底面直径与母线相等的圆柱)的体积是 $16\pi\ cm^3$,那么它的底面半径等于

(A)$4\sqrt[3]{2}cm$　(B)$4cm$　(C)$2\sqrt[3]{2}cm$　(D)$2cm$

(3)$\dfrac{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \arccos(-\frac{1}{2})}{\mathrm{arcctg}(-\sqrt{3})}$的值等于

(A)$\frac{2}{5}$　(B)0　(C)$-\frac{2}{5}$　(D)$-\frac{6}{5}$

(4)函数$y = \log_{\frac{1}{2}}(1-x)(x<1)$的反函数是

(A)$y=1+2^{-x}$　$(x\in R)$　(B)$y=1-2^{-x}$　$(x\in R)$

(C)$y=1+2^{x}$　$(x\in R)$　(D)$y=1-2^{x}$　$(x\in R)$

(5)在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,如果 $AB=BC=a$,$AA_1=2a$,那么点 A 到直线 A_1C 的距离等于

(A)$\frac{2\sqrt{6}}{3}a$　(B)$\frac{3\sqrt{6}}{2}a$　(C)$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$　(D)$\frac{\sqrt{6}}{3}a$

(6)函数$y = \sin x\cos x + \sqrt{3}\cos^2 x - \frac{\sqrt{3}}{2}$的最小正周期等于

(A)π　(B)2π　(C)$\frac{\pi}{4}$　(D)$\frac{\pi}{2}$

(7)有一个椭圆,它的极坐标方程是

(A)$\rho = \dfrac{5}{\sqrt{3}-2\cos\theta}$　(B)$\rho = \dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\cos\theta}$

(C)$\rho = \dfrac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{5}$　(D)$\rho = \dfrac{5}{2-\sqrt{3}\cos\theta}$

(8)不等式$|\sqrt{x-2}-3|<1$的解集是

(A)$\{x|5<x<16\}$　(B)$\{x|6<x<18\}$

(C)$\{x|7<x<20\}$　(D)$\{x|8<x<22\}$

(9)设等差数列$\{a_n\}$的公差是 d,如果它的前 n 项和 $S_n=-n^2$,那么

(A)$a_n=2n-1,d=-2$　(B)$a_n=2n-1,d=2$

(C)$a_n=-2n+1,d=-2$　(D)$a_n=-2n+1,d=2$

(10)方程 $\cos2x=3\cos x+1$ 的解集是

(A)$\{x \mid x=2k\pi\pm\frac{2}{3}\pi, k\in Z\}$

(B)$\{x \mid x=k\pi\pm\frac{1}{3}\pi, k\in Z\}$

(C)$\{x \mid x=k\pi\pm\frac{2}{3}\pi, k\in Z\}$

(D)$\{x \mid x=2k\pi\pm\frac{1}{3}\pi, k\in Z\}$

(11)有一条半径是 2 的弧,度数是 60°,它绕经过弧的中点的直径旋转得到一个球冠,那么这个球冠的面积是

(A)$4(2-\sqrt{3})\pi$　　(B)$2(2-\sqrt{3})\pi$

(C)$4\sqrt{3}\pi$　　(D)$2\sqrt{3}\pi$

(12)某小组共有 10 名学生,其中女生 3 名.现选举 2 名代表,至少有 1 名女生当选的不同的选法共有

(A)27 种　(B)48 种　(C)21 种　(D)24 种

(13)设全集$I=R$,集合$M=\{x \mid \sqrt{x^2}>2\}$, $N=\{x \mid \log_x 7>\log_3 7\}$,

那么$M\cap\overline{N}=$

(A)$\{x \mid x<-2\}$　　(B)$\{x \mid x<-2$,或 $x\geq 3\}$

(C)$\{x \mid x\geq 3\}$　　(D)$\{x \mid -2\leq x<3\}$

(14) 设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列,公比 $q=2$,且 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{30}=2^{30}$,那么 $a_3\cdot a_6\cdot a_9\cdot\cdots\cdots a_{30}$ 等于

(A)2^{10}　(B)2^{20}　(C)2^{16}　(D)2^{15}

(15)设△ABC 不是直角三角形,A 和 B 是它的两个内角,那么

(A)"A<B"是"tgA<tgB"的充分条件,但不是必要条件.

(B)"A<B"是"tgA<tgB"的必要条件,但不是充分条件.

(C)"A<B"是"tgA<tgB"的充分必要条件.

(D)"A<B"不是"tgA<tgB"的充分条件,也不是必要条件.

(16)对于定义域是 R 的任何奇函数 f(x),都有

(A)$f(x)-f(-x)>0\ (x\in R)$

(B)$f(x)-f(-x)\leq 0\ (x\in R)$

(C)$f(x)f(-x)\leq 0\ (x\in R)$

(D)$f(x)f(-x)>0\ (x\in R)$

(17)如果双曲线的两条渐近线的方程是$y=\pm\frac{3}{2}x$,焦点坐标是$(-\sqrt{26},0)$和$(\sqrt{26},0)$,那么它的两条准线之间的跟离是

(A)$\frac{8}{13}\sqrt{26}$　(B)$\frac{4}{13}\sqrt{26}$　(C)$\frac{18}{13}\sqrt{26}$　(D)$\frac{9}{13}\sqrt{26}$

第 II 卷

二、填空题:把答案填在题中的横线上.

(18)$\mathrm{tg}\frac{\pi}{8}=$ ______.

(19)设直线的参数方程是$\begin{cases} x=2+\frac{1}{2}t, \\ y=3+\frac{\sqrt{3}}{2}t, \end{cases}$ 那么它的斜截式方程是_____.

(20)如果三角形的顶点分别是 O(0,0),A(0,15),B(-8,0),那么它的内切圆方程是___.

(21) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}]=$ ______.

(22)91^{92} 除以 100 的余数是___.

(23)已知三棱锥 A-BCD 的体积是 V,棱 BC 的长是 a,面 ABC 和面 DBC 的面积分别是 S_1 和 S_2.

设面 ABC 和面 DBC 所成的二面角是α,那么 sinα=_.

三、解答题:解题应写出文字说明、演算步骤.

(24)已知关于 x 的方程 $2a^{2x-2}-7a^{x-1}+3=0$ 有一个根是 2.求 a 的值和方程其余的根.

(25)已知:平面 a 和不在这个平面内的直线 a 都垂直于平面β.

求证:a∥α.

(26)证明不等式 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\ \ (n\in N)$.

(27)设抛物线经过两点(-1,6)和(-1,-2)对称轴与 x 轴平行,开口向右,直线$y=2x+7$被抛物线截得的线段的长是$4\sqrt{10}$.求抛物线的方程.

(28)求同时满足下列两个条件的所有复数 z:

(Ⅰ)$z+\frac{10}{z}$是实数,且$1<z+\frac{10}{z}\le 6$;

(Ⅱ)z 的实部和虚部都是整数.

1992 年试题答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)C	(2)D	(3)C	(4)B	(5)C	(6)A
(7)D	(8)B	(9)C	(10)A	(11)A	(12)D
(13)B	(14)B	(15)D	(16)C	(17)A	

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(18)$\sqrt{2}-1$ (19)$y=\sqrt{3}x+3-2\sqrt{3}$ (20) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$

(21)$\frac{1}{3}$ (22)81 (23)$\frac{3aV}{2S_1S_2}$

三、解答题.

(24)本小题考查方程的概念、解指数方程的能力.

解法一:∵2 是关于 x 的方程 $2a^{2x-2}-7a^{x-1}+3=0$ 的根,

∴$2a^{4-2}-7a^{2-1}+3=0$,

即 $2a^2-7a+3=0$.

解得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=3.$

(Ⅰ)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,原方程化为 $2(\frac{1}{2})^{2x-2}-7(\frac{1}{2})^{x-1}+3=0$

解得 $(\frac{1}{2})^{x-1}=\frac{1}{2}$ 或 $(\frac{1}{2})^{x-1}=3,$

从而有两根 $x=2, x=1+\log_{\frac{1}{2}}3$.

(Ⅱ)当 a=3 时,原方程化为 $2\cdot3^{2x-2}-7\cdot3^{x-1}+3=0$,

解得 $3^{x-1}=\frac{1}{2}$ 或 $3^{x-1}=3$,

从而有两根 $x=1-\log_3 2, x=2$.

综上所述,可得 $a=\frac{1}{2}$,方程的另一根为 $x=1+\log_{\frac{1}{2}}3$;

a=3,方程的另一根为 $x=1-\log_3 2$.

解法二:设 $a^{x-1}=y$,则原方程化为 $2y^2-7y+3=0$,

解得 $y_1=\frac{1}{2}$,$y_2=3$.

即 $a^{x-1}=\frac{1}{2}$,$a^{x-1}=3$.

∵2 是关于 x 的方程 $2a^{2x-2}-7a^{x-1}+3=0$ 的根,

∴ 2 也是关于 x 的方程 $a^{x-1}=\frac{1}{2}$ 或 $a^{x-1}=3$ 的根,

即 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=3.$

以下同解法一.

(25)本小题考查直线与平面、平面与平面的位置关系以及逻辑推理和空间想象能力.

证法一:设 $\alpha\cap\beta=b$.在 α 内作直线 $c\perp b$.

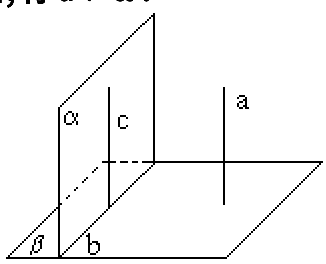
则由 $\alpha\perp\beta$ 可知 $c\perp\beta$.

∵$a\not\subset\alpha, c\subset\alpha$, ∴a,c不重合.

又知 $\alpha\perp\beta$.

∴根据直线和平面垂直的性质定理,有 $a\parallel c$.

∴根据直线和平面平行的判定定理,有 $a\parallel\alpha$.



证法二:假定 a 不平行于 α,

则 a 与 α 必有公共点.

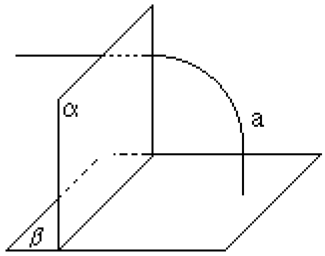
于是由α⊥β,a⊥β,

知 $a \subset \alpha$.

此结论与已知" $a \not\subset \alpha$"相矛盾.

可见前述"a 不平行于α"的假定不成立.

∴a∥α



(26)本小题考查不等式的基础知识以及证明不等式的能力.

证法一:(Ⅰ)当 n=1 时,不等式的左边=1,右边=2,故不等式成立.

(Ⅱ)假设当 n=k 时不等式成立,即

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k},$$

那么 $(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}})+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$,

又 $2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{2\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}\le\frac{k+k+1+1}{\sqrt{k+1}}$,

$=2\sqrt{k+1}$.

这就是说,当 n=k+1 时不等式也成立.

根据(Ⅰ)和(Ⅱ),可知不等式对任何自然数 n 都成立.

证法二:

先证 $\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) \quad (k\in N)$.

∵ $\sqrt{k}-\sqrt{k-1}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$,

又 $\sqrt{k-1}<\sqrt{k}$,

∴ $\sqrt{k}-\sqrt{k-1}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}>\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}=\frac{1}{2\sqrt{k}}$,

即 $\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}) \quad (k\in N)$.

对 k=1,2,⋯,n(n∈N)有

$1<2(\sqrt{1}-0)$，

$\frac{1}{\sqrt{2}}<2(\sqrt{2}-\sqrt{1})$，

$\frac{1}{\sqrt{3}}<2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$，

……

$\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

把上列不等式两边分别相加,即得

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\qquad(n\in N)$$

(27)本小题考查直线与抛物线的基础知识,坐标轴的平移以及综合解题的能力.

解法一:由于抛物线过点(-1,6)和点(-1,-2),而

$$\frac{6+(-2)}{2}=2,$$

所以它的对称轴是 y=2.

因此,可设抛物线的顶点坐标是(a,2),它的方程是

$(y-2)^2=2p\ (x-a)(p>0)$. ①

由抛物线通过点(-1,6)得

$8=-p(1+a)$. ②

将直线方程 y=2x+7 代入①,消去 y 可得

$(2x+5)^2=2p(x-a)$,

即 $4x^2+(20-2p)x+(25+2pa)=0$. ③

设抛物线与直线的交点是(x_1,y_1)和(x_2,y_2),于是x_1和x_2满足方程③,所以

$$\begin{aligned}(x_1-x_2)^2&=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=(\frac{20-2p}{4})^2-(25+2pa)\\&=\frac{(10-p)^2}{4}-25-2pa.\end{aligned}$$

又因 $y_1=2x_1+7$,$y_2=2x_2+7$,于是

$(y_1-y_2)^2=4(x_1-x_2)^2$,

由题设可得 $(4\sqrt{10})^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

$=5(x_1-x_2)^2$ ⑤

由④,⑤可得 $128=(10-p)^2-100-8pa$, ⑥

再由②得 $-8pa=64+8p$,

代入⑥得 $128=(10-p)^2-36+8p$,

即 $p^2-12p-64=0$,

解出 $p_1=16$,$p_2=-4$(不合题意,舍去).

把 $p_1=16$ 代入②可得

$$a=-\frac{3}{2}.$$

所以,抛物线的方程是

$$(y-2)^2=32(x+\frac{3}{2}).$$

解法二:同解法一得抛物线的对称轴是 y=2.

设所求抛物线的方程是

$$x=a(y-2)^2+b \quad (a>0). \qquad ①$$

由于它通过点(-1,6)得

$$-1=16a+b. \qquad ②$$

把直线方程 $y=2x+7$ 代入①消去 y 得

$$x=a(2x+5)^2+b,$$

即 $$4ax^2+(20a-1)x+25a+b=0. \qquad ③$$

设直线与抛物线的交点是(x_1,y_1)和(x_2,y_2),于是 x_1 和 x_2 满足方程③,所以

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$$

$$=\frac{1}{16a^2}[(20a-1)^2-16a(25a+b)]. \qquad ④$$

又因 $y_1=2x_1+7$,$y_2=2x_2+7$,于是

$$(y_1-y_2)^2=4(x_1-x_2)^2,$$

由题设可得

$$(4\sqrt{10})^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=5(x_1-x_2)^2. \qquad ⑤$$

由④,⑤可得 $512a^2+40a-1+16ab=0$, ⑥

由②,⑥消去 b 可得 $256a^2+24a-1=0$.

解出 $a_1=\frac{1}{32}$, $a_2=-\frac{1}{8}$ (不合题意,舍去).

代入②得 $b=-\frac{3}{2}$,

所以,抛物线的方程是$x=\frac{1}{32}(y-2)^2-\frac{3}{2}$.

(28)本小题考查复数和解不等式的基础知识及综合解题能力.

解:设 z=x+yi,其中 x,y∈R,且 x,y 不同时为零,于是

$$z+\frac{10}{z}=x+yi+\frac{10}{x+yi}$$

$$=x+yi+\frac{10(x-yi)}{x^2+y^2}$$

$$=x(1+\frac{10}{x^2+y^2})+y(1-\frac{10}{x^2+y^2})i$$

∵ $z+\frac{10}{z}$是实数,

∴ $y(1-\frac{10}{x^2+y^2})=0$,

即 $y=0$ 或 $x^2+y^2=10$.

于是,又 $\because\ 1 < z + \frac{10}{z} \leq 6$，

$\therefore\ 1 < x(1 + \frac{10}{x^2 + y^2}) \leq 6$． ①

当 y=0 时,由 $x \neq 0$ 知①即

$$1 < x + \frac{10}{x} \leq 6.$$

$\because$ 当 $x < 0$ 时 $x + \frac{10}{x} < 0$，

当 $x > 0$ 时 $x + \frac{10}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{10}{x}} = 2\sqrt{10} > 6$,

$\therefore 1 < x + \frac{10}{x} \leq 6$ 无解.

当 $x^2+y^2=10$ 时,①即 $1<2x\leq 6$,

即 $\frac{1}{2} < x \leq 3$.

因为 z 满足条件(Ⅱ),即 x 和 y 都是整数,于是可得

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = -3. \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = 1. \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = -1, \end{cases}$$

所以,同时满足条件(Ⅰ)和(Ⅱ)的全体复数是

1+3i,1-3i,3+i,3-i.

1992 年试题
(理工农医类)

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) $\dfrac{\log_8 9}{\log_2 3}$ 的值是

(A) $\dfrac{2}{3}$.　　(B)1.　　(C) $\dfrac{3}{2}$.　　(D)2.

【　　】

(2)如果函数 $y=\sin(\omega x)\cos(\omega x)$ 的最小正周期是 4π,那么常数 ω 为

(A)4.　　(B)2.　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) $\dfrac{1}{4}$.

【　　】

(3)极坐标方程分别是 $\rho=\cos\theta$ 和 $\rho=\sin\theta$ 的两个圆的圆心距是

(A)2.　　(B) $\sqrt{2}$.　　(C)1.　　(D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

【　　】

(4)方程 $\sin4x\cos5x=-\cos4x\sin5x$ 的一个解是

(A)10°.　(B)20°.　(C)50°.　(D)70°

【　　】

(5)已知轴截面是正方形的圆柱的高与球的直径相等,则圆柱的全面积与球的表面积的比是

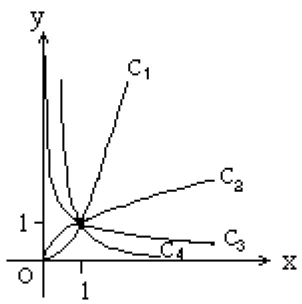
(A)6:5.　(B)5:4.　(C)4:3.　(D)3:2

【　　】

(6)图中曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限的图象.已知 n 取 $\pm2, \pm\dfrac{1}{2}$ 四个值,则相应于曲线 c_1、c_2、c_3、c_4 的 n 依次为

(A) $-2, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 2$.　　(B) $2, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, -2$.

(C) $-\dfrac{1}{2}, -2, 2, \dfrac{1}{2}$.　　(D) $2, \dfrac{1}{2}, -2, -\dfrac{1}{2}$.



【　　】

(7)若 $\log_a 2<\log_b 2<0$,则

(A) $0<a<b<1$　　(B) $0<b<a<1$

(C) $a>b>1$　　(D) $b>a>1$

【　　】

(8)直线$\begin{cases} x = t\sin 20° + 3, \\ y = -t\cos 20° \end{cases}$ (t为参数)的倾斜角是

(A)20°.　(B)70°.　(C)110°.　(D)160°

【　】

(9)在四棱锥的四个侧面中,直角三角形最多可有

(A)1 个.　(B)2 个.　(C)3 个.　(D)4 个.

【　】

(10)圆心在抛物线 $y^2=2x$ 上,且与 x 轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程是

(A)$x^2+y^2-x-2y-\frac{1}{4}=0$.　(B)$x^2+y^2+x-2y+1=0$.

(C)$x^2+y^2-x-2y+1=0$.　(D)$x^2+y^2-x-2y+\frac{1}{4}=0$.

【　】

(11)在$(x^2+3x+2)^5$的展开式中 x 的系数为

(A)160.　(B)240.　(C)360.　(D)800.

【　】

(12)若 $0<a<1$,在$[0,2\pi]$上满足 $\sin x\geq a$ 的 x 的范围是

(A)$[0,\arcsin a]$.　(B)$[\arcsin a,\pi-\arcsin a]$.

(C)$[\pi-\arcsin a,\pi]$.　(D)$[\arcsin a,\frac{\pi}{2}+\arcsin a]$.

【　】

(13)已知直线 l_1 和 l_2 夹角的平分线为 $y=x$,如果 l_1 的方程是 $ax+by+c=0$ $(ab>0)$,那么 l_2 的方程是

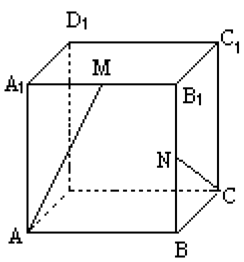
(A)$bx+ay+c=0$.　(B)$ax-by+c=0$.

(C)$bx+ay-c=0$.　(D)$bx-ay+c=0$.

【　】

(14)在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 和 N 分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点,那么直线 AM 与 CN 所成角的余弦值是

(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$.　(B)$\frac{\sqrt{10}}{10}$.　(C)$\frac{3}{5}$.　(D)$\frac{2}{5}$.



【　】

(15)已知复数 z 的模为 2,则｜z-i｜的最大值为

(A)1.　(B)2.　(C)$\sqrt{5}$.　(D)3.

【　】

(16)函数$y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$的反函数

(A)是奇函数,它在(0,+∞)上是减函数.
(B)是偶函数,它在(0,+∞)上是减函数.
(C)是奇函数,它在(0,+∞)上是增函数.
(D)是偶函数,它在(0,+∞)上是增函数.

【　　】

(17)如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 $f(2+t)=f(2-t)$,那么

(A)$f(2)<f(1)<f(4)$. (B)$f(1)<f(2)<f(4)$.
(C)$f(2)<f(4)<f(1)$. (D)$f(4)<f(2)<f(1)$.

【　　】

(18)长方体的全面积为 11,十二条棱长度之和为 24,则这个长方体的一条对角线长为

(A)$2\sqrt{3}$. (B)$\sqrt{14}$.
(C)5. (D)6.

【　　】

二、填空题:把答案填在题中横线上.

(19)方程$\frac{1+3^{-x}}{1+3^{x}}=3$的解是__________.

(20)$\sin15°\sin75°$ 的值是____________.

(21)设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S,其中由 3 个元素组成的子集数为T,则$\frac{T}{S}$的值为__________.

(22)焦点为 $F_1(-2,0)$和 $F_2(6,0)$,离心率为 2 的双曲线的方程是.

(23)已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d\neq0$,且 a_1,a_3,a_9 成等比数列,则$\frac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}$的值是__________.

三、解答题:解答应写出文字说明、演算步骤.

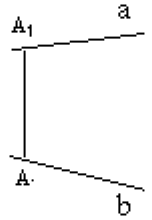
(24)已知$z\in C$,解方程$z\bar{z}-3i\bar{z}=1+3i$.

(25)已知$\frac{\pi}{2}<\beta<\alpha<\frac{3\pi}{4},\cos(\alpha-\beta)=\frac{12}{13},\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$.

求$\sin2\alpha$的值.

(26)已知:两条异面直线 a、b 所成的角为θ,它们的公垂线段 AA_1 的长度为 d.在直线 a、b 上分别取点 E、F,设 $A_1E=m$,$AF=n$.

求证:$EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm2mn\cos\theta}$.



(27)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.已知 $a_3=12$,$S_{12}>0$,$S_{13}<0$.

(Ⅰ)求公差 d 的取值范围.

(Ⅱ)指出 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中哪一个值最大,并说明理由.

(28)已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,A、B是椭圆上的两点,线段AB的垂直平分线与x轴相交于点$P(x_0,0)$.证明 $-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$.

1992 年试题(理工农医类)答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)A	(2)D	(3)D	(4)B	(5)D	(6)B
(7)B	(8)C	(9)D	(10)D	(11)B	(12)B
(13)A	(14)D	(15)D	(16)C	(17)A	(18)C

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(19) $x=-1$　(20) $\frac{1}{4}$　(21) $\frac{15}{128}$　(22) $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$　(23) $\frac{13}{16}$

三、解答案

(24)本小题考查复数相等的条件及解方程的知识.

解:设 $z=x+yi(x,y\in R)$.

将 $z=x+yi$ 代入原方程,得

$$(x+yi)(x-yi)-3i(x-yi)=1+3i,$$

整理得

$$x^2+y^2-3y-3xi=1+3i.$$

根据复数相等的定义,得

$$\begin{cases}-3x=3, & ①\\ x^2+y^2-3y=1. & ②\end{cases}$$

由①得　$x=-1$.

将 $x=-1$ 代入②式解得 $y=0,y=3$.

$\therefore z_1=-1,z_2=-1+3i$.

(25)本小题主要考查三角函数和角公式等基础知识及运算能力.

解:由题设知 $\alpha-\beta$ 为第一象限的角,

$$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}$$

$$=\sqrt{1-(\frac{12}{13})^2}=\frac{5}{13}.$$

由题设知 $\alpha+\beta$ 为第三象限的角,

$$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=-\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}$$

$$=-\sqrt{1-(-\frac{3}{5})^2}=-\frac{4}{5}.$$

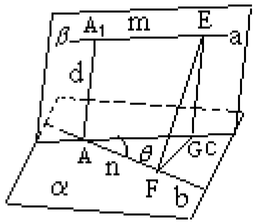
$$\therefore\ \sin2\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)]$$

$$=\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$$

$$=\frac{5}{13}\times(-\frac{4}{5})+\frac{12}{13}\times(-\frac{3}{5})=-\frac{56}{65}.$$

(26)本小题考查空间图形的线面关系,空间想象能力和逻辑思维能力.

解法一:设经过 b 与 a 平行的平面为α,经过 a 和 AA_1 的平面为β,α∩β=c,则 c∥a.因而 b,c 所成的角等于θ,且 AA_1⊥c(如图).



∵ AA_1⊥b, ∴ AA_1⊥α.

根据两个平面垂直的判定定理,β⊥α.

在平面β内作 EG⊥c,垂足为 G,则 $EG=AA_1$.并且根据两个平面垂直的性质定理,EG⊥α.连结 FG,则 EG⊥FG.在 Rt△EFG 中,$EF^2=EG^2+FG^2$.

∵ AG=m,

∴在△AFG 中,

$$FG^2=m^2+n^2-2mn\cos\theta.$$

∵ $EG^2=d^2$,

∴ $EF^2=d^2+m^2+n^2-2mn\cos\theta$.

如果点 F(或 E)在点 A(或 A_1)的另一侧,则

$$EF^2=d^2+m^2+n^2+2mn\cos\theta.$$

因此, $EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}$.

解法二:经过点 A 作直线 c∥a,则 c、b 所成的角等于θ,且 AA_1⊥c.

根据直线和平面垂直的判定定理,AA_1 垂直于 b、c 所确定的平面? .

在两平行直线 a、c 所确定的平面内,作 EG⊥c,垂足为 G,则 EG 平行且等于 AA_1,

从而 EG⊥α.

连结 FG,则根据直线和平面垂直的定义,EG⊥FG.

在 Rt△EFG 中,$EF^2=EG^2+FG^2$.

(以下同解法一)

(27)本小题考查数列、不等式及综合运用有关知识解决问题的能力.

(Ⅰ)解:依题意,有

$$S_{12}=12a_1+\frac{12\times(12-1)}{2}\cdot d>0,$$

$$S_{13}=13a_1+\frac{13\times(13-1)}{2}\cdot d<0.$$

即 $$\begin{cases}2a_1+11d>0, & ①\\ a_1+6d<0. & ②\end{cases}$$

由 $a_3=12$,得

$$a_1=12-2d. \qquad ③$$

将③式分别代①、②入,得

$$\begin{cases} 24+7d>0, \\ 3+d<0. \end{cases}$$

$\therefore \quad -\frac{24}{7}<d<-3.$

(Ⅱ)解法一:由 d<0 可知

$$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{12}>a_{13}.$$

因此,若 $1\leq n\leq 12$ 在中存在自然数 n,使得 $a_n>0$,$a_{n+1}<0$,

则 S_n 就是 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中的最大值.

由于 $\quad S_{12}=6(a_6+a_7)>0,$

$\quad S_{13}=13a_7<0,$

即 $\quad a_6+a_7>0,$

$\quad a_7<0.$

由此得 $\quad a_6>-a_7>0.$

因为 $\quad a_6>0,a_7<0,$

故在 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中 S_6 的值最大.

(Ⅱ)解法二:

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$

$$=n(12-2d)+\frac{1}{2}n(n-1)d$$

$$=\frac{d}{2}\left[n-\frac{1}{2}\left(5-\frac{24}{d}\right)\right]^2-\frac{d}{2}\left[\frac{1}{2}\left(5-\frac{24}{d}\right)\right]^2.$$

$\because \quad d<0,$

$\therefore \quad \left[n-\frac{1}{2}\left(5-\frac{24}{d}\right)\right]^2$ **最小时**,S_n **最大**.

当 $-\frac{24}{7}<d<-3$**时**

$$6<\frac{1}{2}\left(5-\frac{24}{d}\right)<6.5,$$

$\because$ **正整数**$n=6$**时**$\left[n-\frac{1}{2}\left(5-\frac{24}{d}\right)\right]^2$ **最小**,

$\therefore \quad S_6$ **最大.**

(Ⅱ)解法三:

由 d<0 可知 $\quad a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{12}>a_{13}.$

因此,若在 $1\leq n\leq 12$ 中存在自然数 n,使得 $a_n>0$,$a_{n+1}<0$,

则 S_n 就是 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中的最大值.

$$\begin{cases} S_{12}>0 \\ S_{13}<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a_1+\frac{12\times 11}{2}d>0 \\ 13a_1+\frac{13\times 12}{2}d<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1+5d>-\dfrac{d}{2}>0\\a_1+6d<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_6>0\\a_7<0.\end{cases}$$

故在 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中 S_6 的值最大.

(28)本小题考查椭圆性质、直线方程等知识,以及综合分析能力.

证法一:设 A、B 的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2).因线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交,故 AB 不平行于 y 轴,即 $x_1\neq x_2$.又交点为 $P(x_0,0)$,故 $|PA|=|PB|$,即

$$(x_1-x_0)^2+y_1^2=(x_2-x_0)^2+y_2^2. \qquad ①$$

∵ A、B 在椭圆上,

∴ $$y_1^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_1^2,$$

$$y_2^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x_2^2.$$

将上式代入①,得

$$2(x_2-x_1)x_0=(x_2^2-x_1^2)\frac{a^2-b^2}{a^2}. \qquad ②$$

∵ $x_1\neq x_2$,可得

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2}. \qquad ③$$

∵ $-a\leq x_1\leq a,-a\leq x_2\leq a$,且 $x_1\neq x_2$,

∴ $-2a<x_1+x_2<2a$,

∴ $$-\frac{a^2-b^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}.$$

证法二:设 A、B 的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2).因 $P(x_0,0)$ 在 AB 的垂直平分线上,以点 P 为圆心,$|PA|=r$ 为半径的圆 P 过 A、B 两点,圆 P 的方程为

$$(x-x_0)^2+y^2=r^2,$$

与椭圆方程联立,消去 y 得

$$(x-x_0)^2-\frac{b^2}{a^2}x^2=r^2-b^2,$$

∴ $$\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2-2x_0x+x_0^2-r^2+b^2=0. \qquad ①$$

因 A、B 是椭圆与圆 P 的交点,故 x_1,x_2 为方程①的两个根.由韦达定理得

$$x_1+x_2=\frac{2a^2}{a^2-b^2}x_0.$$

因 $-a\leq x_1\leq a,-a\leq x_2\leq a$,且 $x_1\neq x_2$,故

$$-2a < x_1 + x_2 = \frac{2a^2}{a^2 - b^2} x_0 < 2a,$$

$$\therefore \quad -\frac{a^2 - b^2}{a} < x_0 < \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

1992年试题

(文史类)

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后括号内.

(1) $\dfrac{\log_8 9}{\log_2 3}$ 的值是

(A) $\dfrac{2}{3}$ (B)1 (C) $\dfrac{3}{2}$ (D)2

【 】

(2)已知椭圆 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 上一点P到椭圆一个焦点的距离为3，则P到另一焦点的距离为

(A)2 (B)3

(C)5 (D)7

【 】

(3)如果函数 $y=\sin(\omega x)\cos(\omega x)$ 的最小正周期是 4π,那么常数 ω 为

(A)4 (B)2

(C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{4}$

【 】

(4)在 $(\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}})^8$ 的展开式中常数项是

(A)-28 (B)-7

(C)7 (D)28

【 】

(5)已知轴截面是正方形的圆柱的高与球的直径相等,则圆柱的全面积与球的表面积的比是

(A)6:5 (B)5:4

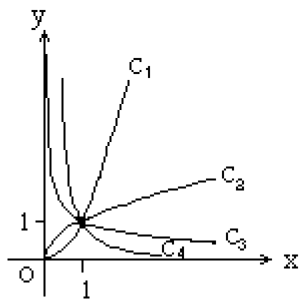
(C)4:3 (D)3:2

【 】

(6)图中曲线是幂函数 $y=x^n$ 在第一象限的图象.已知 n 取 ± 2, $\pm\dfrac{1}{2}$ 四个值,则相应于曲线的 c_1、c_2、c_3、c_4 的 n 依次为

(A) $-2,-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},2$ (B) $2,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-2$

(C) $-\dfrac{1}{2},-2,2,\dfrac{1}{2}$ (D) $2,\dfrac{1}{2},-2,-\dfrac{1}{2}$



【 】

(7)若 $\log_a 2<\log_b 2<0$,则

(A)0<a<b<1 (B)0<b<a<1

(C)a>b>1 (D)b>a>1

【 】

(8)原点关于直线 8x+6y=25 的对称点坐标为

(A)$(2,\frac{3}{2})$ (B)$(\frac{25}{8},\frac{25}{6})$

(C)(3,4) (D)(4,3)

【 】

(9)在四棱锥的四个侧面中,直角三角形最多可有

(A)1 个 (B)2 个

(C)3 个 (D)4 个

【 】

(10)圆心在抛物线 $y^2=2x$ 上,且与 x 轴和该抛物线的准线都相切的一个圆的方程是

(A)$x^2+y^2-x-2y-\frac{1}{4}=0$ (B)$x^2+y^2+x-2y+1=0$

(C)$x^2+y^2-x-2y+1=0$ (D)$x^2+y^2-x-2y+\frac{1}{4}=0$

【 】

(11)在[0，2π]上满足 $\sin x\geq\frac{1}{2}$ 的x的取值范围是

(A)$[0,\frac{\pi}{6}]$ (B)$[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$

(C)$[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}]$ (D)$[\frac{5\pi}{6},\pi]$

【 】

(12)已知直线 l_1 和 l_2 夹角的平分线为 y=x,如果 l_1 的方程是 ax+by+c=0(ab>0),那么 l_2 的方程是

(A)bx+ay+c=0 (B)ax-by+c=0

(C)bx+ay-c=0 (D)bx-ay+c=0

【 】

(13)如果$\alpha,\beta\in(\frac{\pi}{2},\pi)$且$\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{ctg}\beta$,那么必有

(A)$\alpha<\beta$　　　　(B)$\beta<\alpha$

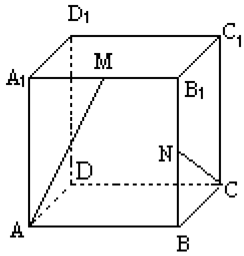
(C)$\alpha+\beta<\frac{3}{2}\pi$　　　　(D)$\alpha+\beta>\frac{3}{2}\pi$

【　　】

(14)在棱长为 1 的正方体 ABCD--$A_1B_1C_1D_1$ 中,M 和 N 分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点,那么直线 AM 与 CN 所成角的余弦值是

(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　(B)$\frac{\sqrt{10}}{10}$

(C)$\frac{3}{5}$　　　　(D)$\frac{2}{5}$



【　　】

(15)已知复数 z 的模为 2,则｜z-i｜的最大值为

(A)1　　　　(B)2

(C)$\sqrt{5}$　　　　(D)3

【　　】

(16)函数$y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$的反函数

(A)是奇函数,它在(0,+∞)上是减函数.

(B)是偶函数,它在(0,+∞)上是减函数.

(C)是奇函数,它在(0,+∞)上是增函数.

(D)是偶函数,它在(0,+∞)上是增函数.

【　　】

(17)如果函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 对任意实数 t 都有 f(2+t)=f(2-t),那么

(A)f(2)<f(1)<f(4)

(B)f(1)<f(2)<f(4)

(C)f(2)<f(4)<f(1)

(D)f(4)<f(2)<f(1)

【　　】

(18)已知长方体的全面积为 11,十二条棱长度之和为 24,则这个长方体的一条对角线长为

(A)$2\sqrt{3}$　　　　(B)$\sqrt{14}$

(C)5　　　　(D)6

【　　】

二、填空题:把答案填在题中横线上.

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}[\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}]$的值为__________.

(20)已知α在第三象限且 tgα=2,则 cosα的值是______.

(21)方程 $\frac{1+3^{-x}}{1+3^{x}}=3$的解是________.

(22)设含有 10 个元素的集合的全部子集数为 S,其中由 3 个元素组成的子集数为T,则 $\frac{T}{S}$ 的值为________.

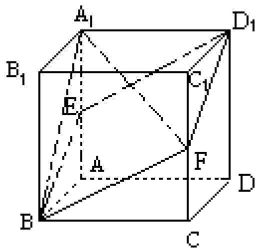
(23)焦点为 $F_1(-2,0)$和 $F_2(6,0)$,离心率为 2 的双曲线的方程是______.

三、解答题:解答应写出文字说明、演算步骤.

(24)求 $\sin^2 20°+\cos^2 80°+\sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$ 的值.

(25)设 z∈C,解方程 z-2|z|=-7+4i.

(26)如图,已知 ABCD--$A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体,E、F 分别为棱 AA_1 与 CC_1 的中点,求四棱锥 A_1-$EBFD_1$ 的体积.



(27)在△ABC 中,BC 边上的高所在直线的方程 x-2y+1=0,∠A 的平分线所在直线的方程为 y=0.若点 B 的坐标为(1,2),求点 A 和点 C 的坐标.

(28)设等差数列{a_n}的前 n 项和为 S_n.已知 a_3=12,S_{12}>0,S_{13}<0.

(Ⅰ)求公差 d 的取值范围;

(Ⅱ)指出 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中哪一个值最大,并说明理由.

1992 年试题(文史类)答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)A	(2)D	(3)D	(4)C	(5)D
(6)B	(7)B	(8)D	(9)D	(10)D
(11)B	(12)A	(13)C	(14)D	(15)D
(16)C	(17)A	(18)C		

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(19) $\frac{1}{4}$　　(20) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　　(21) x = -1

(22) $\frac{15}{128}$　　(23) $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

三、解答题.

(24)本小题主要考查三角函数恒等变形知识和运算能力.

解:$\sin^2 20° + \cos^2 80° + \sqrt{3}\sin 20° \cos 80°$

$$= \frac{1-\cos 40°}{2} + \frac{1+\cos 160°}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 100° - \sin 60°)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos 160° - \cos 40°) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 100° - \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot 2\sin 100° \sin 60° + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 100°$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 100° + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 100°$$

$$= \frac{1}{4}$$

(25)本小题主要考查复数相等的条件及解方程的知识.

解　设 $z=x+yi(x,y\in R)$.

依题意有

$$x + yi - 2\sqrt{x^2 + y^2} = -7 + 4i.$$

由复数相等的定义,得

$$\begin{cases} x - 2\sqrt{x^2 + y^2} = -7, & ① \\ y = 4. & ② \end{cases}$$

将②代入①,得

$$x - 2\sqrt{x^2 + 16} = -7$$

解此方程并经检验得

$$x_1 = 3,\quad x_2 = \frac{5}{3}$$

$$\therefore\quad z_1 = 3 + 4i,\quad z_2 = \frac{5}{3} + 4i$$

(26)本小题主要考查直线与直线,直线与平面,平面与平面的位置关系,以及空间想象能力和逻辑推理能力.

解法一:$\because\ EB = BF = FD_1 = D_1E = \sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$

$\therefore$ 四棱锥$A_1 - EBFD_1$的底面是菱形.

连结A_1C_1、EF、BD_1,则$A_1C_1 /\!/ EF$.

根据直线和平面平行的判定定理,A_1C_1 平行于 A_1-$EBFD_1$ 的底面,从而 A_1C_1 到底面 $EBFD_1$ 的距离就是 A_1-$EBFD_1$ 的高.

设 G、H 分别是 A_1C_1、EF 的中点,连结 D_1G、GH,则

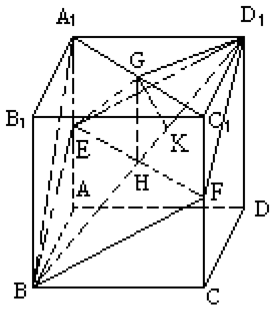
$FH \perp HG, FH \perp HD_1$.

根据直线和平面垂直的判定定理,有

$FH \perp$ 平面 HGD_1.

又,四棱锥 A_1-$EBFD_1$ 的底面过 FH,根据两平面垂直的判定定理,有

A_1-$EBFD_1$ 的底面$\perp$平面 HGD_1.



作 $GK\perp HD_1$ 于 K,根据两平面垂直的性质定理,有 GK 垂直于 A_1-$EBFD_1$ 的底面.

∵正方体的对角面 AA_1C_1C 垂直于底面 $A_1B_1C_1D_1$,∴$\angle HGD_1=90°$.

在$Rt\triangle HGD_1$内,$GD_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a, HG=\frac{1}{2}a, HD_1=\frac{BD_1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$

∴ $\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot GK=\frac{1}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a$,从而$GK=\frac{\sqrt{6}}{6}a.$

∴ $V_{A_1\text{-}EBFD_1}=\frac{1}{3}S_{菱形EBFD_1}\cdot GK$

$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot EF\cdot BD_1\cdot GK$

$=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{2}a\cdot\sqrt{3}a\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}a$

$=\frac{1}{6}a^3.$

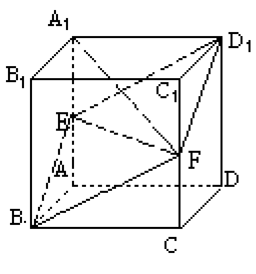
解法二:∵ $EB=BF=FD_1=D_1E=\sqrt{a^2+(\frac{a}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a,$

∴四菱锥 A_1-$EBFD_1$ 的底面是菱形.

连结 EF,则$\triangle EFB\cong\triangle EFD_1$.

∵三棱锥 A_1-EFB 与三棱锥 A_1-EFD_1 等底同高,

∴$V_{A_1-EFB}=V_{A_1\text{-}EFD_1}$



∴ $V_{A_1\text{-}EBFD_1}=2V_{A_1\text{-}EFB}$.

又 $V_{A_1\text{-}EFB}=V_{F\text{-}EBA_1}$,

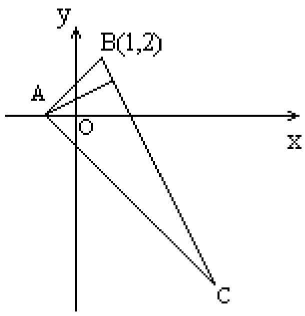
∴ $V_{A_1\text{-}EBFD_1}=2V_{F\text{-}EBA_1}$.

∵CC_1∥平面 ABB_1A_1,∴三棱锥 F-EBA_1 的高就是 CC_1 到平面 ABB_1A_1 的距离,即棱长 a.

又△EBA_1边EA_1上的高为 a.

$$\therefore V_{A_1\text{-}EBFD_1}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle EBA_1}\cdot a=\frac{1}{6}a^3.$$

(27)本小题主要考查有关直线方程的知识及综合运用知识的能力.



解：由$\begin{cases}x-2y+1=0,\\ y=0,\end{cases}$

得顶点 A(-1,0).

又,AB的斜率 $k_{AB}=\frac{2-0}{1-(-1)}=1.$

∵x 轴是∠A 的平分线,

故 AC 的斜率为-1,AC 所在直线的方程为

y=-(x+1). ①

已知 BC 上的高所在直线的方程为 x-2y+1=0,故 BC 的斜率为-2,BC 所在的直线方程为

y-2=-2(x-1). ②

解①,②得顶点 C 的坐标为(5,-6).

(28)本小题考查数列、不等式及综合运用有关知识解决问题的能力.

(Ⅰ)解：依题意,有

$$S_{12}=12a_1+\frac{12\times(12-1)}{2}\cdot d>0,$$

$$S_{13}=13a_1+\frac{13\times(13-1)}{2}\cdot d<0.$$

即 $\begin{cases}2a_1+11d>0, & ①\\ a_1+6d<0. & ②\end{cases}$

由 $a_3=12$,得

$a_1+2d=12$ ③

将③式分别代入①、②式,得

$$\begin{cases}24+7d>0,\\ 3+d<0\end{cases}$$

解此不等式组得

$$-\frac{24}{7}<d<-3.$$

(Ⅱ)解法一:由 d<0 可知

$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{12}>a_{13}$.

因此,若在 $1\le n\le 12$ 中存在自然数 n,使得 $a_n>0,a_{n+1}<0$,

则 S_n 就是 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中的最大值.

由于 $S_{12}=6(a_6+a_7)>0,$

$S_{13}=13a_7<0,$

即 $a_6+a_7>0,$

$a_7<0,$

由此得 $a_6>-a_7>0.$

因 $a_6>0,a_7<0.$

故在 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中 S_6 的值最大.

(Ⅱ)解法二:$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$$=n(12-2d)+\frac{1}{2}n(n-1)d$$

$$=\frac{d}{2}[n-\frac{1}{2}(5-\frac{24}{d})]^2-\frac{d}{2}[\frac{1}{2}(5-\frac{24}{d})]^2,$$

$\because d<0,$

$\therefore [n-\frac{1}{2}(5-\frac{24}{d})]^2$ 最小时,S_n 最大.

当 $-\frac{24}{7}<d<-3$ 时

$$6<\frac{1}{2}(5-\frac{24}{d})<6.5,$$

$\therefore$ 正整数 $n=6$ 时 $[n-\frac{1}{2}(5-\frac{24}{d})]^2$ 最小,

$\therefore S_6$ 最大.

(Ⅱ)解法三:

由 $d<0$ 可知

$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{12}>a_{13}$.

因此,若在 $1\le n\le 12$ 中存在自然数 n,使得 $a_n>0,a_{n+1}<0$,

则 S_n 就是 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中的最大值.

$$\begin{cases}S_{12}>0\\S_{13}<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}12a_1+\frac{12\times 11}{2}d>0\\13a_1+\frac{13\times 12}{2}d<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1+5d>-\frac{d}{2}>0\\a_1+6d<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_6>0\\a_7<0\end{cases}$$

故在S_1, S_2**，…，**S_{12}**中**S_6**的值最大**

1993 年试题(文史类)
(北京、湖北、湖南、云南、海南、贵州等省市用题)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.

第Ⅰ卷

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)函数 f(x)=sinx+cosx 的最小正周期是

(A)$2p$　(B)$2\sqrt{2}p$　(C)p　(D)$\frac{p}{4}$

(2)如果双曲线的焦距为 6,两条准线间的距离为 4,那么该双曲线的离心率为

(A)$\frac{3}{2}$　(B)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C)$\frac{\sqrt{6}}{2}$　(D)2

(3)和直线 3x-4y+5=0 关于 x 轴对称的直线的方程为

(A)3x+4y-5=0　(B)3x+4y+5=0

(C)-3x+4y-5=0　(D)-3x+4y+5=0

(4)$i^{2n-3}+i^{2n-1}+i^{2n+1}+i^{2n+3}$的值为

(A)-2　(B)0　(C)2　(D)4

(5)$y=x^{\frac{3}{5}}$在$[-1,1]$上是

(A)增函数且是奇函数　(B)增函数且是偶函数

(C)减函数且是奇函数　(D)减函数且是偶函数

(6)$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2-1}{2n^2-n+5}$ 的值为

(A)$-\frac{1}{5}$　(B)$-\frac{5}{2}$　(C)$\frac{1}{5}$　(D)$\frac{5}{2}$

(7)集合$M=\{x \mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\},N=\{x \mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$,则

(A)$M=N$　(B)$M\supset N$　(C)$M\subset N$　(D)$M \text{ I } N=\phi$.

(8)sin20°cos70°+sin10°sin50° 的值是

(A)$\frac{1}{4}$　(B)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　(C)$\frac{1}{2}$　(D)$\frac{\sqrt{3}}{4}$

(9)圆 $x^2+y^2=1$ 上的点到直线 3x+4y-25=0 的距离的最小值是

(A)6　(B)4　(C)5　(D)1

(10)若 a、b 是任意实数,且 a>b,则

(A)$a^2>b^2$　(B)$\frac{b}{a}<1$

(C)$\lg(a-b)>0$　(D)$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

(11)一动圆与两圆$x^2+y^2=1$和$x^2+y^2-8x+12=0$都外切,则动圆圆心轨迹为

(A)圆　(B)椭圆

(C)双曲线的一支　　(D)抛物线

(12)圆柱轴截面的周长 l 为定值,那么圆柱体积的最大值是

(A)$(\frac{l}{6})^3\pi$　　(B)$\frac{1}{9}(\frac{l}{2})^3\pi$

(C)$(\frac{l}{4})^3\pi$　　(D)$2(\frac{l}{4})^3\pi$

(13)$(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$展开式中x^4的系数为

(A)-40　　(B)10

(C)40　　(D)45

(14)直角梯形的一个内角为$45°$,下底长为上底长的$\frac{3}{2}$,这个梯形绕下底所在的直线旋转一周所成的旋转体的全面积为$(5+\sqrt{2})\pi$,则旋转体的体积为

(A)2π　　(B)$\frac{4+\sqrt{2}}{3}\pi$

(C)$\frac{5+\sqrt{2}}{3}\pi$　　(D)$\frac{7}{3}\pi$

(15)已知 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 为各项都大于零的等比数列,公比 $q\neq1$,则

(A)$a_1+a_8>a_4+a_5$

(B)$a_1+a_8<a_4+a_5$

(C)$a_1+a_8=a_4+a_5$

(D)a_1+a_8 和 a_4+a_5 的大小关系不能由已知条件确定.

(16)设有如下三个命题:

甲:相交两直线 l,m 都在平面α内,并且都不在平面β内.

乙:l,m 之中至少有一条与β相交.

丙:α与β相交.

当甲成立时

(A)乙是丙的充分而不必要的条件

(B)乙是丙的必要而不充分的条件

(C)乙是丙的充分且必要的条件

(D)乙既不是丙的充分条件又不是丙的必要条件

(17)将数字 1,2,3,4 填入标号为 1,2,3,4 的四个方格里,每格填一个数字,则每个方格的标号与所填的数字均不相同的填法有

(A)6 种　　(B)9 种　　(C)11 种　　(D)23 种

第 II 卷

二、填空题:把答案填在题中横线上.

(18)设$a>1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1+a^{n-1}}=$ ______.

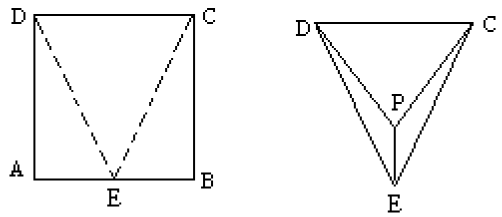
(19)若双曲线 $\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{4k^2}=1$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 没有公共点,则实数 k 的取值范围为______.

(20)从 1,2,⋯,10 这十个数中取出四个数,使它们的和为奇数,共有___________种取法(用数字作答).

(21)设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$,则 $f^{-1}(0)=$_____________.

(22)建造一个容积为 8m³,深为 2m 的长方体无盖水池.如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元,那么水池的最低总造价为___________元.

(23)如图,ABCD 是正方形,E 是 AB 的中点,如将△DAE 和△CBE 分别沿虚线 DE 和 CE 折起,使 AE 与 BE 重合,记 A 与 B 重合后的点为 P,则面 PCD 与面 ECD 所成的二面角为__________度.



三、解答题:解题应写出文字说明、演算步骤.

(24)求 $tg20°+4\sin20°$ 的值.

(25)已知 $f(x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}\ (a>0,a\neq1)$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的定义域;

(Ⅱ)判断 $f(x)$ 的奇偶性并予以证明;

(Ⅲ)求使 $f(x)>0$ 的 x 取值范围.

(26)已知数列

$$\frac{8\cdot1}{1^2\cdot3^2},\frac{8\cdot2}{3^2\cdot5^2},\cdots,\frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},\cdots.$$

S_n 为其前 n 项和.计算得

$$S_1=\frac{8}{9},\ S_2=\frac{24}{25},\ S_3=\frac{48}{49},\ S_4=\frac{80}{81}.$$

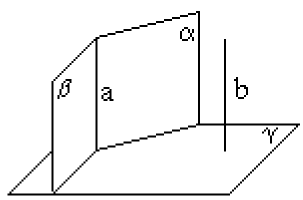
观察上述结果,推测出计算 S_n 的公式,并用数学归纳法加以证明.

(27)已知:平面 α∩平面 β=直线 a.

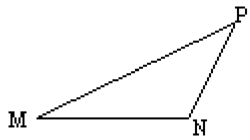
α,β 同垂直于平面 γ,又同平行于直线 b.

求证:(Ⅰ)a⊥γ;

(Ⅱ)b⊥γ.



(28)在面积为1的△PMN中,$\mathrm{tg}\angle PMN=\frac{1}{2}$,$\mathrm{tg}\angle MNP=-2$.建立适当的坐标系,求以M,N为焦点且过点P的椭圆方程.



1993年试题(文史类)答案

(北京、湖北、湖南、云南、海南、贵州等省市用题)

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)A	(2)C	(3)B	(4)B	(5)A
(6)D	(7)C	(8)A	(9)B	(10)D
(11)C	(12)A	(13)D	(14)D	(15)A
(16)C	(17)B			

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(18) $-a^2$　　(19) $\{k\mid |k|>\frac{1}{3}\}$

(20)100　　(21)1

(22)1760　　(23)30

三、解答题.

(24)本小题考查三角函数式的恒等变形及运算能力.

解: $\mathrm{tg}20°+4\sin20°$

$$=\frac{\sin20°+4\sin20°\cos20°}{\cos20°}$$
$$=\frac{\sin20°+2\sin40°}{\cos20°}$$
$$=\frac{(\sin20°+\sin40°)+\sin40°}{\cos20°}$$
$$=\frac{2\sin30°\cos10°+\sin40°}{\cos20°}$$
$$=\frac{\sin80°+\sin40°}{\cos20°}$$
$$=\frac{2\sin60°\cos20°}{\cos20°}$$
$$=2\sin60°$$
$$=\sqrt{3}$$

(25)本小题考查函数的奇偶性、对数函数的性质、不等式的性质和解法等基本知识及运算能力.

解:(Ⅰ)由对数函数的定义知 $\frac{1+x}{1-x}>0.$

如果 $\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$ 则 $-1<x<1;$

如果 $\begin{cases}1+x<0,\\1-x<0,\end{cases}$ 则不等式组无解.

故 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,1).$

(Ⅱ) $\because f(-x)=\log_a\frac{1-x}{1+x}=-\log_a\frac{1+x}{1-x}=-f(x),$

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

(Ⅲ) (i)对 $a>1,\log_a\frac{1+x}{1-x}>0$ 等价于

$\frac{1+x}{1-x}>1,$ ①

而从(Ⅰ)知 1-x>0,故①等价于 1+x>1-x,又等价于 x>0.故对 a>1,当 x∈(0,1)时有 f(x)>0.

(ii)对 $0<a<1,\log_a\frac{1+x}{1-x}>0$ 等价于

$0<\frac{1+x}{1-x}<1.$ ②

而从(Ⅰ)知 1-x>0,故②等价于-1<x<0.故对 0<a<1,当 x∈(-1,0)时有 f(x)>0.

(26)本小题考查观察、分析、归纳的能力和数学归纳法.

解:$S_n=\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\quad(n\in N).$

证明如下:

(Ⅰ)当 $n=1$ 时,$S_1=\frac{3^2-1}{3^2}=\frac{8}{9}$,等式成立.

(Ⅱ)设当 n=k 时等式成立,即

$$S_k=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}.$$

则$S_{k+1}=S_k+\dfrac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$

$$=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$

$$=\frac{[(2k+1)^2-1](2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$

$$=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$

$$=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+1)^2}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$

$$=\frac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2}$$

$$=\frac{[2(k+1)+1]^2-1}{[2(k+1)+1]^2}$$

由此可知,当 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据(Ⅰ)、(Ⅱ)可知,等式对任何 $n\in N$ 都成立.

(27)本小题考查直线与平面的平行、垂直和两平面垂直的基础知识,以及空间想象能力和逻辑思维能力.

证法一:(Ⅰ)设 $\alpha\cap\gamma=AB$, $\beta\cap\gamma=AC$.

在 γ 内任取一点 P 并于 γ 内作直线

$PM\perp AB$, $PN\perp AC$.

$\because \gamma\perp\alpha$,

$\therefore PM\perp\alpha$,

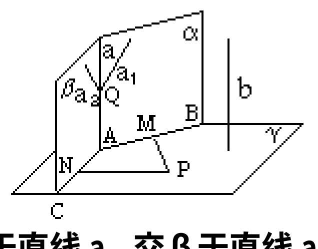
而 $a\subset\alpha$,

$\therefore PM\perp a$.

同理 $PN\perp a$.

又 $PM\subset\gamma$, $PN\subset\gamma$.

$\therefore a\perp\gamma$.



(Ⅱ)于 a 上任取一点 Q,过 b 与 Q 作一平面交 α 于直线 a_1,交 β 于直线 a_2.

∵ b∥α,∴b∥a_1.

同理 b∥a_2.

∵ a_1,a_2 同过 Q 且平行于 b,

∴ a_1,a_2 重合.

又$a_1 \subset a, a_2 \subset b,$

∴ a_1,a_2 都是α、β的交线,即都重合于 a.

∵ b∥a_1,∴b∥a.

而 a⊥γ,

∴b⊥γ.

证法二:(Ⅰ)在 a 上任取一点 P,过 P 作直线 a′⊥γ.

∵α⊥γ,P∈α,

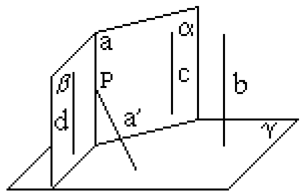
∴a′$\subset a$.

同理a′$\subset b$.

可见 a′是α,β的交线.

因而 a′重合于 a.

又 a′⊥γ,∴a⊥γ.



(Ⅱ)于α内任取不在 a 上的一点,过 b 和该点作平面与α交于直线 c.同法过 b 作平面与β交于直线 d.

∵b∥α,b∥β.

∴b∥c,b∥d.

又$c \not\subset$ β,$d \subset$ β,可见c与d不重合.因而c∥d.

于是 c∥β.

∵c∥b,$c \subset a$,$a \cap b = a$,

∴c∥a.

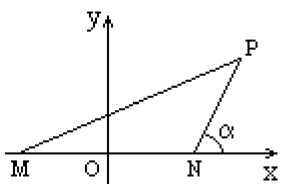
∵b∥c,a∥c,b与a不重合($b \not\subset a$,而$a \subset a$),

∴b∥a.

而 a⊥γ.

∴b⊥γ.

(28)本小题主要考查坐标系、椭圆的概念和性质、直线方程以及综合应用能力.



解法一:如图,以 MN 所在直线为 x 轴,MN 的垂直平分线为 y 轴建立直角

坐标系,设以M,N为焦点且过点P的椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,焦点为$M(-c,0),N(c,0)$.

由$tgM=\frac{1}{2}$, $tg\alpha=tg(\pi-\angle MNP)=2$,得直线PM和直线PN的方程分别为$y=\frac{1}{2}(x+c)$和$y=2(x-c)$.将此二方程联立,

解得$x=\frac{5}{3}c, y=\frac{4}{3}c$,即P点坐标为$(\frac{5}{3}c, \frac{4}{3}c)$.

在△MNP中,|MN|=2c,MN上的高为点P的纵坐标,故

$$S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot\frac{4}{3}c=\frac{4}{3}c^2.$$

由题设条件$S_{\triangle MNP}=1$, $\therefore c=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即P点坐标为$(\frac{5\sqrt{3}}{6},\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

由两点间的距离公式

$$\begin{aligned}|PM| &= \sqrt{(x+c)^2+y^2}\\ &= \sqrt{(\frac{5\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}\\ &= \frac{2\sqrt{15}}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|PN| &= \sqrt{(x-c)^2+y^2}\\ &= \sqrt{(\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}\\ &= \frac{\sqrt{15}}{3}.\end{aligned}$$

得 $a=\frac{1}{2}(|PM|+|PN|)=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

又 $b^2=a^2-c^2=\frac{15}{4}-\frac{3}{4}=3$,

故所求椭圆方程为$\frac{4x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$.

解法二:同解法一得$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$,P点的坐标为$(\frac{5\sqrt{3}}{6},\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

∵ 点P在椭圆上,且$a^2=b^2+c^2$.

$$\therefore \frac{(\frac{5\sqrt{3}}{6})^2}{b^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}{b^2}=1.$$

化简得$3b^4-8b^2-3=0$.

解得 $b^2=3$,或$b^2=-\frac{1}{3}$(舍去).

又 $a^2=b^2+c^2=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$.

故所求椭圆方程为 $\frac{4x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$.

解法三:同解法一建立坐标系.

∵ $\angle P=\angle \alpha-\angle PMN$,

$$\therefore \operatorname{tg}P=\frac{\operatorname{tg}(\pi-N)-\operatorname{tg}M}{1+\operatorname{tg}(\pi-N)\operatorname{tg}M}$$

$$=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}.$$

∴ $\angle P$为锐角.

∴ $\sin P=\frac{3}{5},\cos P=\frac{4}{5}$.

而 $S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}|PM|\cdot|PN|\sin P=1$,

∴ $|PM|\cdot|PN|=\frac{10}{3}$.

∵ $|PM|+|PN|=2a,|MN|=2c$,

由余弦定理,得

$(2c)^2=|PM|^2+|PN|^2-2|PM|\cdot|PN|\cos P$

$=(|PM|+|PN|)^2-2|PM|\cdot|PN|(1+\cos P)$

$=(2a)^2-2\cdot\frac{10}{3}-2\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{4}{5}$,

∴$c^2=a^2-3$,即 $b^2=3$.

又 $\sin M=\frac{1}{\sqrt{5}}$,$\sin N=\frac{2}{\sqrt{5}}$,

由正弦定理,得

$$\frac{|PM|}{\sin N}=\frac{|PN|}{\sin M}=\frac{|MN|}{\sin P},$$

$$\therefore \frac{|PM|+|PN|}{\sin N+\sin M}=\frac{|MN|}{\sin P}.$$

即 $\dfrac{2a}{\dfrac{2}{\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}}=\dfrac{2c}{\dfrac{3}{5}},$

$\therefore a=\sqrt{5}c.$

$\therefore a^2=b^2+c^2=3+\dfrac{a^2}{5}.$

$\therefore a^2=\dfrac{15}{4}.$

故所求椭圆方程为 $\dfrac{4x^2}{15}+\dfrac{y^2}{3}=1.$

1993年试题(理工农医类)

(北京、湖北、湖南、云南、海南、贵州等省市用题)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.

第Ⅰ卷

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后括号内.

(1)函数 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的最小正周期是

(A) 2π　　(B) $2\sqrt{2\pi}$

(C) π　　(D) $\frac{\pi}{4}$

(2)如果双曲线的焦距为6,两条准线间的距离为4,那么该双曲线的离心率为

(A) $\frac{3}{2}$　　(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　(D) 2

(3)和直线 $3x-4y+5=0$ 关于x轴对称的直线的方程为

(A) $3X+4y-5=0$

(B) $3x+4y+5=0$

(C) $-3x+4y-5=0$

(D) $-3x+4y+5=0$

(4)极坐标方程 $\rho=\frac{4}{3-5\cos\theta}$ 所表示的曲线是

(A)焦点到准线距离为 $\frac{4}{5}$ 的椭圆

(B)焦点到准线距离为 $\frac{4}{5}$ 的双曲线右支

(C)焦点到准线距离为 $\frac{4}{3}$ 的椭圆

(D)焦点到准线距离为 $\frac{4}{3}$ 的双曲线右支

(5) $y=x^{\frac{3}{5}}$ 在 $[-1,1]$ 上是

(A)增函数且是奇函数　　(B)增函数且是偶函数

(C)减函数且是奇函数　　(D)减函数且是偶函数

(6) $\lim\limits_{n\to oo}\frac{5n^2-1}{2n^2-n+5}$ 的值为

(A) $-\frac{1}{5}$.　　(B) $-\frac{5}{2}$.

(C) $\frac{1}{5}$　　.　　(D) $\frac{5}{2}$.

(7)集合 $M=\{x\mid x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in Z\}$, $N=\{x\mid x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in Z\}$,则

(A)$M=N$ (B)$M\supset N$
(C)$M\subset N$ (D)$M\cap N=\varnothing$

(8)$\sin 20^\circ\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\sin 50^\circ$的值是

(A)$\frac{1}{4}$ (B)$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C)$\frac{1}{2}$ (D)$\frac{\sqrt{3}}{4}$

(9)参数方程$\begin{cases}x=\left|\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right|,\\ y=\frac{1}{2}(1+\sin\theta)\end{cases}$ $(0<\theta<2\pi)$表示

(A)双曲线的一支,这支过点$(1,\frac{1}{2})$

(B)抛物线的一部分,这部分过$(1,\frac{1}{2})$

(C)双曲线的一支,这支过点$(-1,\frac{1}{2})$

(D)抛物线的一部分,这部分过$(-1,\frac{1}{2})$

(10)若 a、b 是任意实数,且 a>b,则

(A)$a^2>b^2$ (B)$\frac{b}{a}<1$

(C)$\lg(a-b)>0$ (D)$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

(11)一动圆与两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切,则动圆圆心轨迹为

(A)圆 (B)椭圆
(C)双曲线的一支 (D)抛物线

(12)圆柱轴截面的周长 l 为定值,那么圆柱体积的最大值是

(A)$(\frac{l}{6})^3\pi$ (B)$\frac{1}{9}(\frac{l}{2})^3\pi$

(C)$(\frac{l}{4})^3\pi$ (D)$2(\frac{l}{4})^3\pi$

(13)$(\sqrt{x}+1)^4(x-1)^5$展开式中x^4的系数为

(A)-40 (B)10
(C)40 (D)45

(14)直角梯形的一个内角为45°,下底长为上底长的$\frac{3}{2}$,这个梯形绕下底所在的直线旋转一周所成的旋转体的全面积为$(5+\sqrt{2})\pi$,则旋转体的体积为

(A)2π (B)$\frac{4+\sqrt{2}}{3}\pi$

(C)$\frac{5+\sqrt{2}}{3}\pi$ (D)$\frac{7}{3}\pi$

(15)已知 $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 为各项都大于零的等比数列,公比 $q\neq 1$,则

(A)$a_1+a_8>a_4+a_5$

(B)$a_1+a_8<a_4+a_5$

(C)$a_1+a_8=a_4+a_5$

(D)a_1+a_8和a_4+a_5的大小关系不能由已知条件确定.

(16)设有如下三个命题:

甲:相交两直线l,m都在平面α内,并且都不在平面β内.

乙:l,m之中至少有一条与β相交.

丙:α与β相交.

当甲成立时

(A)乙是丙的充分而不必要的条件

(B)乙是丙的必要而不充分的条件

(C)乙是丙的充分且必要的条件

(D)乙既不是丙的充分条件又不是丙的必要条件

(17)将数字1,2,3,4填入标号为1,2,3,4的四个方格里,每格填一个数字,则每个方格的标号所填的数字均不相同的填法有

(A)6种　　(B)9种

(C)11种　　(D)23种

第II卷

二、填空题:把答案填在题中横线上.

(18)$\sin(\arccos\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{3})=$______

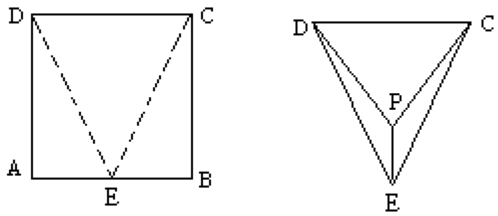
(19)若双曲线$\frac{x^2}{9k^2}-\frac{y^2}{4k^2}=1$与圆$x^2+y^2=1$没有公共点,则实数k的取值范围为______.

(20)从1,2,…,10这十个数中取出四个数,使它们的和为奇数,共有______种取法(用数字作答).

(21)设$f(x)=4^x-2^{x+1}$,则$f^{-1}(0)=$______.

(22)建造一个容积为8m³,深为2m的长方体无盖水池.如果池底和池壁的造价每平方米分别为120元和80元,那么水池的最低总造价为______元.

(23)如图,ABCD是正方形,E是AB的中点,如将△DAE和△CBE分别沿虚线DE和CE折起,使AE与BE重合,记A与B重合后的点为P,则面PCD与面ECD所成的二面角为______度.



三、解答题:解答题应写出文字说明、演算步骤.

(24)已知$f(x)=\log_a\frac{1+x}{1-x}(a>0,a\neq1)$.

(Ⅰ)求f(x)的定义域;

(Ⅱ)判断 f(x)的奇偶性并予以证明;

(Ⅲ)求使 f(x)>0 的 x 取值范围.

(25)已知数列

$$\frac{8\cdot 1}{1^2\cdot 3^2},\frac{8\cdot 2}{3^2\cdot 5^2},\cdots,\frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}\cdots.$$

S_n 为其前 n 项和.计算得

$$S_1=\frac{8}{9},\ S_2=\frac{24}{25},\ S_3=\frac{48}{49},\ S_4=\frac{80}{81}\ .$$

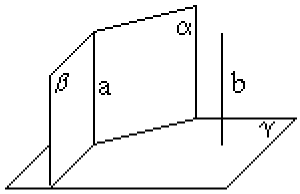
观察上述结果,推测出计算 S_n 的公式,并用数学归纳法加以证明.

(26)已知:平面α∩平面β=直线 a.

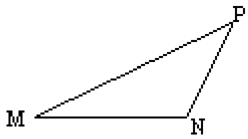
α,β同垂直于平面γ,又同平行于直线 b.

求证:(Ⅰ)a⊥γ;

(Ⅱ)b⊥γ.



(27)在面积为1的△PMN中,$\mathrm{tg}\angle PMN=\frac{1}{2}$,$\mathrm{tg}\angle MNP=-2$.建立适当的坐标系,求以 M,N 为焦点且过点 P 的椭圆方程.



(28)设复数$z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0<\theta<\pi)$,$\omega=\frac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$,并且$|\omega|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\arg\omega<\frac{\pi}{2}$,求θ.

1993 年试题(理工农医类)答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)A (2)C (3)B (4)B (5)A (6)D (7)C (8)A (9)B

(10)D (11)C (12)A (13)D (14)D (15)A (16)C (17)B

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(18)$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ (19)$\{k\,|\,|k|>\frac{1}{3}\}$ (20)100

(21)1 (22)1760 (23)30

三、解答题.

(24)本小题考查函数的奇偶性、对数函数的性质、不等式的性质和解法等基本知识及运算能力.

解:(Ⅰ)由对数函数的定义知$\frac{1+x}{1-x}>0.$

如果$\begin{cases}1+x>0,\\1-x>0,\end{cases}$则$-1<x<1;$

如果$\begin{cases}1+x<0,\\1-x<0\end{cases}$,则不等式组无解.

故$f(x)$的定义域为$(-1,1)$.

(Ⅱ)$\because f(-x)=\log_a\frac{1-x}{1+x}=-\log_a\frac{1+x}{1-x}=-f(x),$

$\therefore f(x)$为奇函数.

(Ⅲ) (i)对$a>1,\log_a\frac{1+x}{1-x}>0$等价于

$$\frac{1+x}{1-x}>1, \qquad ①$$

而从(Ⅰ)知1-x>0,故①等价于1+x>1-x,又等价于x>0.故对a>1,当x∈(0,1)时有f(x)>0.

(ii)对$0<a<1,\log_a\frac{1+x}{1-x}>0.$等价于

$$0<\frac{1+x}{1-x}<1. \qquad ②$$

而从(Ⅰ)知$1-x>0$,故②等价于$-1<x<0$.故对

$0<a<1$,当$x\in(-1,0)$时有$f(x)>0$.

(25)本小题考查观察、分析、归纳的能力和数学归纳法.

解:$S_n=\frac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\ (n\in N).$

证明如下:

(Ⅰ)当$n=1$时,$S_1=\frac{3^2-1}{3^2}=\frac{8}{9}$,等式成立.

(Ⅱ)设当$n=k$时等式成立,即

$$S_k=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}.$$

则$S_{k+1}=S_k+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$

$$=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$
$$=\frac{[(2k+1)^2-1](2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$
$$=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$
$$=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+1)^2}{(2k+1)^2(2k+3)^2}$$
$$=\frac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2}$$
$$=\frac{[2(k+1)+1]^2-1}{[2(k+1)+1]^2}$$

由此可知,当n=k+1时等式也成立.

根据(Ⅰ)、(Ⅱ)可知,等式对任何 $n\in N$ 都成立.

(26)本小题考查直线与平面的平行、垂直和两平面垂直的基础知识,以及空间想象能力和逻辑思维能力.

证法一:(Ⅰ)设 $\alpha\cap\gamma=AB$, $\beta\cap\gamma=AC$.

在 γ 内任取一点 P 并于 γ 内作直线

$PM\perp AB$, $PN\perp AC$.

∵ $\gamma\perp\alpha$,

∴ $PM\perp\alpha$,

而 $a\subset\alpha$,

∴ $PM\perp a$.

同理 $PN\perp a$.

又 $PM\subset\gamma$, $PN\subset\gamma$,

∴ $a\perp\gamma$.

(Ⅱ)于 a 上任取一点 Q,过 b 与 Q 作一平面交 α 于直线 a_1,交 β 于直线 a_2.

∵ $b\parallel\alpha$, ∴ $b\parallel a_1$.

同理 $b\parallel a_2$.

∵ a_1,a_2 同过 Q 且平行于 b,

∴ a_1,a_2 重合.

又 $a_1\subset\alpha$, $a_2\subset\beta$,

∴ a_1,a_2 都是 α、β 的交线,即都重合于 a.

∵ $b\parallel a_1$, ∴ $b\parallel a$.

而 $a\perp\gamma$,

∴ $b\perp\gamma$.

证法二:(Ⅰ)在 a 上任取一点 P,过 P 作直线 $a'\perp\gamma$.

∵ $\alpha\perp\gamma$, $P\in\alpha$,

∴ $a'\subset\alpha$.

同理 $a'\subset\beta$.

可见 a' 是 α, β 的交线.

因而 a' 重合于 a.

又 $a'\perp\gamma$, ∴ $a\perp\gamma$.

(Ⅱ)于 α 内任取不在 a 上的一点,过 b 和该点作平面与 α 交于直线 c.同法过 b 作平面与 β 交于直线 d.

∵ $b\parallel\alpha$, $b\parallel\beta$.

∴ $b\parallel c$, $b\parallel d$.

又 $c\not\subset\beta$, $d\subset\beta$, 可见 c 与 d 不重合.因而 $c\parallel d$.

于是 $c\parallel\beta$.

∵ $c\parallel\beta$, $c\subset\alpha$, $\alpha\cap\beta=a$,

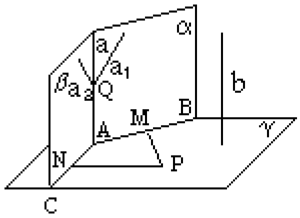
∴ $c\parallel a$.

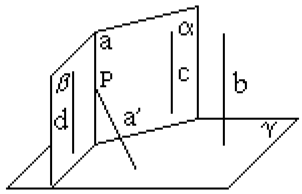
∵ $b\parallel c$, $a\parallel c$, b 与 a 不重合($b\not\subset a$, 而 $a\subset\alpha$),

∴ $b\parallel a$.

而 $a\perp\gamma$.

∴ $b\perp\gamma$.





(27)本小题主要考查坐标系、椭圆的概念和性质、直线方程以及综合应用能力.

解法一:如图,以MN所在直线为x轴,MN的垂直平分线为y轴建立直角坐标系,

设以M,N为焦点且过点P的椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,焦点为$M(-c,0),N(c,0)$.

由$\text{tg}M=\frac{1}{2}, \text{tg}\alpha=\text{tg}(\pi-\angle MNP)=2$,得直线PM和直线PN的方程分别为$y=\frac{1}{2}(x+c)$和$y=2(x-c)$.将此二方程联立,

解得$x=\frac{5}{3}c, y=\frac{4}{3}c$,即P点坐标为$(\frac{5}{3}c,\frac{4}{3}c)$.

在△MNP中,$|MN|=2c$,MN上的高为点P的纵坐标,故

$$S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot\frac{4}{3}c=\frac{4}{3}c^2.$$

由题设条件$S_{\triangle MNP}=1$,$\therefore c=\frac{\sqrt{3}}{2}$,即P点坐标为$(\frac{5\sqrt{3}}{6},\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

由两点间的距离公式

$$\begin{aligned}|PM|&=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\\&=\sqrt{(\frac{5\sqrt{3}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}\\&=\frac{2\sqrt{15}}{3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|PN|&=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\&=\sqrt{(\frac{5\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}\\&=\frac{\sqrt{15}}{3}.\end{aligned}$$

得　$a=\frac{1}{2}(|PM|+|PN|)=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

又　$b^2=a^2-c^2=\frac{15}{4}-\frac{3}{4}=3$,

故所求椭圆方程为

$$\frac{4x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1.$$

解法二:同解法一得$c=\frac{\sqrt{3}}{2}$, P点的坐标为$(\frac{5\sqrt{3}}{6},\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

∵ 点P在椭圆上, 且$a^2=b^2+c^2$.

$$\therefore \quad \frac{(\frac{5\sqrt{3}}{6})^2}{b^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}{b^2}=1.$$

化简得$3b^4-8b^2-3=0$.

解得 $b^2=3$, 或$b^2=-\frac{1}{3}$(舍去).

又 $a^2=b^2+c^2=3+\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$.

故所求椭圆方程为$\frac{4x^2}{15}+\frac{y^2}{3}=1$.

解法三:同解法一建立坐标系.

∵ $\angle P=\angle\alpha-\angle PMN$,

$$\therefore \quad \mathrm{tg}P=\frac{\mathrm{tg}(\pi-N)-\mathrm{tg}M}{1+\mathrm{tg}(\pi-N)\mathrm{tg}M}=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}.$$

∴ $\angle P$为锐角.

∴ $\sin P=\frac{3}{5}$, $\cos P=\frac{4}{5}$.

而 $S_{\triangle MNP}=\frac{1}{2}|PM|\cdot|PN|\sin P=1$,

∴ $|PM|\cdot|PN|=\frac{10}{3}$.

∵ $|PM|+|PN|=2a$, $|MN|=2c$, 由余弦定理,

$$\begin{aligned}(2c)^2&=|PM|^2+|PN|^2-2|PN|\cdot|PN|\cos P\\&=(|PM|+|PN|)^2-2|PM|\cdot|PN|(1+\cos P)\\&=(2a)^2-2\cdot\frac{10}{3}-2\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{4}{5},\end{aligned}$$

∴ $c^2=a^2-3$, 即$b^2=3$.

又$\sin M=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin N=\frac{2}{\sqrt{5}}$, 由正弦定理, 得

$$\frac{|PM|}{\sin N}=\frac{|PN|}{\sin M}=\frac{|MN|}{\sin P},$$

$$\therefore \frac{|PM|+|PN|}{\sin N+\sin M}=\frac{|MN|}{\sin P}.$$

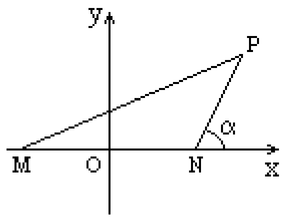
即$\dfrac{2a}{\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}}}=\dfrac{2c}{\frac{3}{5}}$,

$\therefore a=\sqrt{5}c.$

$\therefore a^2=b^2+c^2=3+\dfrac{a^2}{5}$.

$\therefore a^2=\dfrac{15}{4}$.

故所求椭圆方程为 $\dfrac{4x^2}{15}+\dfrac{y^2}{3}=1.$



(28)本小题考查复数的基本概念和运算,三角函数式的恒等变形及综合解题能力.

解法一:

$$\omega=\frac{1-[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^4}{1+[\cos\theta+i\sin\theta]^4}$$

$$=\frac{1-\cos(-4\theta)-i\sin(-4\theta)}{1+\cos4\theta+i\sin4\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}{2\cos^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}$$

$$=tg2\theta(\sin4\theta+i\cos4\theta).$$

$|\omega|=|tg2\theta|\cdot|\sin4\theta+i\cos4\theta|=|tg2\theta|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

$tg2\theta=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

因 $0<\theta<\pi$**,故有**

(i) **当**$tg2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$**时,得**$\theta=\dfrac{\pi}{12}$**或**$\theta=\dfrac{7\pi}{12}$ **,这时都有**

$$\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}),$$

得 $\arg\omega=\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$**,适合题意.**

(ii) **当**$tg2\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$**时,得**$\theta=\dfrac{5\pi}{12}$**或**$\theta=\dfrac{11\pi}{12}$**,这时都有**

$$\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}),$$

得 $\arg\omega=\dfrac{11\pi}{6}>\dfrac{\pi}{2}$**,不适合题意,舍去.**

综合(i)、(ii)**知**$\theta=\dfrac{\pi}{12}$**或**$\theta=\dfrac{7\pi}{12}$.

解法二:

$$z^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta.$$

记 $\psi = 4\theta$,得$(\bar{z})^4 = \overline{z^4} = \cos\psi - i\sin\psi$

.

$$\omega = \frac{1-\cos\psi + i\sin\psi}{1+\cos\psi + i\sin\psi}.$$
$$= \frac{\sin\psi}{1+\cos\psi}(\sin\psi + i\cos\psi)$$
$$= \mathrm{tg}\frac{\psi}{2}(\sin\psi + i\cos\psi).$$

$\because \ |\omega| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \arg\omega < \dfrac{\pi}{2}$,

$$\therefore \begin{cases} \left|\mathrm{tg}\dfrac{\psi}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, & ① \\ \mathrm{tg}\dfrac{\psi}{2}\cdot\sin\psi > 0, & ② \\ \mathrm{tg}\dfrac{\psi}{2}\cdot\cos\psi \geq 0 & ③ \end{cases}$$

当①成立时,②恒成立,所以θ应满足

$$\text{(i)}\begin{cases} < 0 < \theta < \pi, \\ \mathrm{tg}2\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ \cos 4\theta \geq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \text{(ii)}\begin{cases} 0 < \theta < \pi, \\ \mathrm{tg}2\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \\ \cos 4\theta \leq 0. \end{cases}$$

解(i)得$\theta = \dfrac{\pi}{12}$或$\theta = \dfrac{7\pi}{12}$.(ii)无解

综合(i)、(ii)知 $\theta = \dfrac{\pi}{12}$ 或$\theta = \dfrac{7\pi}{12}$.

1993 年试题
(理工农医类)

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后括号内.

(1)如果双曲线的实半轴长为 2,焦距为 6,那么该双曲线的离心率为

(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B)$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　(C)$\frac{3}{2}$　　(D)2

【　　】

(2)函数$y=\frac{1-tg^2 2x}{1+tg^2 2x}$的最小正周期是

(A)$\frac{p}{4}$　　(B)$\frac{p}{2}$　　(C)p　　(D)$2p$

【　　】

(3)当圆锥的侧面积和底面积的比值是$\sqrt{2}$时,圆锥的轴截面顶角是

(A)45°　　(B)60°　　(C)90°　　(D)120°

【　　】

(4)当$z=-\frac{1-i}{\sqrt{2}}$时,$z^{100}+z^{50}+1$的值等于

(A)1　　(B)-1　　(C)i　　(D)-i

【　　】

(5)直线 bx+ay=ab(a<0,b<0)的倾斜角是

(A)$\mathrm{arctg}(-\frac{b}{a})$　　(B)$\mathrm{arctg}(-\frac{a}{b})$

(C)$p-\mathrm{arctg}-\frac{b}{a}$　　(D)$p-\mathrm{arctg}\frac{a}{b}$

【　　】

(6)在直角三角形中两锐角为 A 和 B,则 sinAsinB

(A)有最大值$\frac{1}{2}$和最小值0

(B)有最大值$\frac{1}{2}$,但无最小值

(C)既无最大值也无最小值

(D)有最大值 1,但无最小值

【　　】

(7)在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_5a_6=9$,则 $\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=$

(A)12　　(B)10　　(C)8　　(D)$2+\log_35$

【　　】

(8)$F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})f(x)\ (x\neq 0)$是偶函数,且f(x)不恒等于零,则f(x)

(A)是奇函数

(B)是偶函数

(C)可能是奇函数也可能是偶函数

(D)不是奇函数也不是偶函数

【　　】

(9)曲线的参数方程为$\begin{cases} x = 3t^2 + 2, \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$ $(0 \leq t \leq 5)$,则曲线是

(A)线段　　　　　　(B)双曲线的一支

(C)圆弧　　　　　　(D)射线

【　　】

(10)若 a、b 是任意实数,且 a>b,则

(A)$a^2 > b^2$　　　　(B)$\frac{b}{a} < 1$

(C)$\lg(a-b) > 0$　　　　(D)$(\frac{1}{2})^a < (\frac{1}{2})^b$

【　　】

(11)已知集合 E={θ｜cosθ<sinθ,0≤θ≤2π},F={θ｜tgθ<sinθ},那么 E∩F 为区间

(A)$(\frac{p}{2}, p)$　　　　(B)$(\frac{p}{4}, \frac{3p}{4})$

(C)$(p, \frac{3p}{2})$　　　　(D)$(\frac{3p}{4}, \frac{5p}{4})$

【　　】

(12)一动圆与两圆:$x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切,则动圆圆心的轨迹为

(A)抛物线　　　　　　(B)圆

(C)双曲线的一支　　　　(D)椭圆

【　　】

(13)若正棱锥的底面边长与侧棱长相等,则该棱锥一定不是

(A)三棱锥　　　　　　(B)四棱锥

(C)五棱锥　　　　　　(D)六棱锥

【　　】

(14)如果圆柱轴截面的周长 l 为定值,那么圆柱体积的最大值是

(A)$(\frac{l}{6})^3 p$　　(B)$(\frac{l}{3})^3 p$

(C)$(\frac{l}{4})^3 p$　　(D)$\frac{1}{4}(\frac{l}{4})^3 p$

【　　】

(15)由$(\sqrt{3}x + \sqrt[3]{2})^{100}$展开所得的x的多项式中,系数为有理数的共有

(A)50 项　　　　　　(B)17 项

(C)16 项　　　　　　(D)15 项

【　　】

(16)设 a,b,c 都是正数,且 $3^a=4^b=6^c$,那么

(A)$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$　　　　(B)$\frac{2}{c} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$

(C)$\frac{1}{c} = \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$　　　　(D)$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$

【　　】

(17)同室四人各写一张贺年卡,先集中起来,然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡,则四张贺年卡不同的分配方式有

(A)6 种　　(B)9 种　　(C)11 种　　(D)23 种

【　　】

(18)已知异面直线 a 与 b 所成的角为 50°,P 为空间一定点,则过点 P 且与 a,b 所成的角都是 30°的直线有且仅有

(A)1 条　　(B)2 条　　(C)3 条　　(D)4 条

【　　】

二、填空题:把答案填在题中横线上.

(19)抛物线$y^2=4x$的弦AB垂直于x轴,若AB的长为$4\sqrt{3}$,则焦点到AB的距离为__________.

(20)在半径为 30m 的圆形广场中央上空,设置一个照明光源,射向地面的光呈圆锥形,且其轴截面顶角为 120°.若要光源恰好照亮整个广场,则其高度应为______m(精确到 0.1m).

(21)在 50 件产品中有 4 件是次品,从中任意抽出 5 件,至少有 3 件是次品的抽法共____种(用数字作答).

(22)建造一个容积为 $8m^3$,深为 2m 的长方体无盖水池.如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元,那么水池的最低总造价为____元.

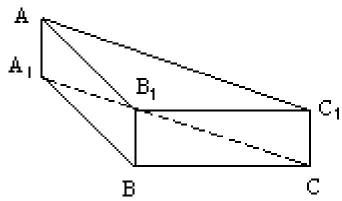
(23)设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$,则 $f^{-1}(0)=$_______.

(24)已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d>0$,首项$a_1>0$,$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_ia_{i+1}}$,则$\lim_{n\to\infty}S_n=$________.

三、解答题:解答应写出文字说明、演算步骤.

(25)解不等式$2+\log_{\frac{1}{2}}(5-x)+\log_2\frac{1}{x}>0$

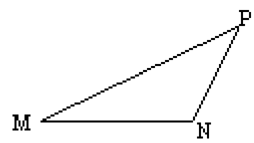
(26)如图,$A_1B_1C_1$-ABC 是直三棱柱,过点 A_1、B、C_1 的平面和平面 ABC 的交线记作 l.



(Ⅰ)判定直线 A_1C_1 和 l 的位置关系,并加以证明;

(Ⅱ)若 $A_1A=1$,AB=4,BC=3,∠ABC=90°,求顶点到直线 l 的距离.

(27)在面积为1的△PMN中,$tgM=\frac{1}{2}$,$tgN=-2$.建立适当的坐标系,求出以 M,N 为焦点且过点 P 的椭圆方程.



(28)设复数$z=\cos\theta+i\sin\theta(0<\theta<\pi),w=\dfrac{1-(\overline{z})^4}{1+z^4}$.

已知$|w|=\dfrac{\sqrt{3}}{3},\arg w<\dfrac{\pi}{2}$,求$\theta$.

(29)已知关于 x 的实系数二次方程 $x^2+ax+b=0$ 有两个实数根α,β.证明:

(Ⅰ)如果|α|<2,|β|<2,那么2|α|<4+b 且|b|<4;

(Ⅱ)如果2|α|<4+b 且|b|<4,那么|α|<2,|β|<2.

1993 年试题(理工农医类)答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)C	(2)B	(3)C	(4)D	(5)C	(6)B
(7)B	(8)A	(9)A	(10)D	(11)A	(12)C
(13)D	(14)A	(15)B	(16)B	(17)B	(18)B

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(19)2　　(20)17.3　　(21)4186

(22)1760　　(23)1　　(24)$\dfrac{1}{a_1d}$

三、解答题.

(25)本小题考查对数函数的概念及性质,不等式的解法.

解:原不等式等价于

$$\begin{cases}5-x>0,\\ x>0,\\ \log_{\frac{1}{2}}[\frac{1}{4}x(5-x)]>0.\end{cases}$$

解得$\begin{cases}x<5,\\ x>0,\\ x<1\text{或}x>4.\end{cases}$

所以原不等式的解集为

$$\{x\mid 0<x<1\}\cup\{x\mid 4<x<5\}.$$

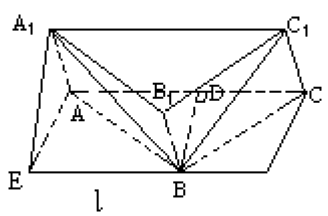
(26)本小题主要考查空间图形的线面关系、三棱柱的性质、空间想象能力和逻辑推理能力.

解:(Ⅰ)l∥A_1C_1.证明如下:

根据棱柱的定义知平面$A_1B_1C_1$和平面 ABC 平行.

由题设知直线A_1C_1=平面$A_1B_1C_1$∩平面A_1BC_1,直线l=平面A_1BC_1∩平面 ABC.

根据两平面平行的性质定理有l∥A_1C_1.



(Ⅱ)解法一:

过点 A_1 作 $A_1E\perp l$ 于 E,则 A_1E 的长为点 A_1 到 l 的距离.

连结 AE.由直棱柱的定义知 $A_1A\perp$平面 ABC.

∴ 直线 AE 是直线 A_1E 在平面 ABC 上的射影.

又 l 在平面 ABC 上,根据三垂线定理的逆定理有

$AE\perp l$.

由棱柱的定义知 A_1C_1∥AC,又 l∥A_1C_1,

∵ l∥AC.

作 BD⊥AC 于 D,则 BD 是 Rt△ABC 斜边 AC 上的高,且 BD=AE,

从而$AE = BD = \dfrac{AB\times BC}{AC} = \dfrac{4\times 3}{5} = \dfrac{12}{5}$.

在 Rt△A_1AE 中,

∵ $A_1A=1$,∠$A_1AE=90°$,

∴ $A_1E = \sqrt{AE^2 + A_1A^2} = (\dfrac{12}{5})^2 + 1^2 = \dfrac{13}{5}$.

故点A_1到直线l的距离为$\dfrac{13}{5}$.

解法二:

同解法一得 l∥AC.

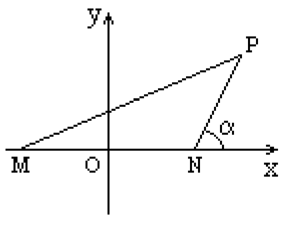
由平行直线的性质定理知∠CAB=∠ABE,从而有 Rt△ABC∽Rt△BEA,AE:BC=AB:AC,

∴ $AE = \dfrac{BC\times AB}{AC}$.

以下同解法一.

(27)本小题主要考查坐标系、椭圆的概念和性质、直线方程以及综合应用的能力.

解法一:建立直角坐标系如图:以 MN 所在直线为 x 轴,线段 MN 的垂直平分线为 y 轴.



设所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.分别记M、N、P点的坐标为(-c,0)、(c,0)和(x_0,y_0).

∵ tgα=tg(π-∠N)=2,

∴ 由题设知

$$\begin{cases} y_0 = \frac{1}{2}(x_0 + C), \\ y_0 = 2(x_0 - C). \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_0 = \frac{5}{3}c, \\ y_0 = \frac{4}{3}c, \end{cases}$ 即 $P(\frac{5}{3}c, \frac{4}{3}c)$.

在 $\triangle MNP$ 中, $MN = 2c$, MN 上的高为 $\frac{4}{3}c$.

$\therefore\ S_{\triangle MNP} = \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{4}{3}c = 1$,

$\therefore\ c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $P(\frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$.

$|PM| = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$,

$|PN| = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

$\therefore\ a = \frac{1}{2}(|PM| + |PN|) = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

从而 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$.

故所求椭圆方程为 $\frac{4x^2}{15} + \frac{y^2}{3} = 1$.

解法二:

同解法一得 $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $P(\frac{5\sqrt{3}}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$.

$\because$ 点 P 在椭圆上, 且 $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\therefore\ \frac{(\frac{5\sqrt{3}}{6})^2}{b^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}{b^2} = 1.$$

解得 $b^2 = 3$, 或 $b^2 = -\frac{1}{3}$(舍去).

$a^2 = b^2 + c^2 = \frac{15}{4}$.

故所求椭圆方程为 $\frac{4x^2}{15} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(28)本小题考查复数的基本概念和运算,三角函数式的恒等变形及综合解题能力.

解: $\omega=\dfrac{1-[\cos(-\theta)+i\sin(-q)]^4}{1+[\cos\theta+i\sin\theta]^4}$

$=\dfrac{1-\cos(-4\theta)-i\sin(-4\theta)}{1+\cos4\theta+i\sin4\theta}$

$=\dfrac{2\sin^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}{2\cos^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}$

$=\mathrm{tg}2\theta(\sin4\theta+i\cos4\theta)$.

$|\omega|=|\mathrm{tg}2\theta|\cdot|\sin4\theta+i\cos4\theta|=|\mathrm{tg}2\theta|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

因 $0<\theta<\pi$,故有

(Ⅰ)当$\mathrm{tg}2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时,得$\theta=\dfrac{\pi}{12}$或$\theta=\dfrac{7\pi}{12}$,这时都有

$\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$,

得 $\arg\omega=\dfrac{p}{6}<\dfrac{p}{2}$,适合题意.

(Ⅱ)当$\mathrm{tg}2q=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时,得$q=\dfrac{5p}{12}$或$q=\dfrac{11p}{12}$,这时都有

$\omega=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\cos\dfrac{11p}{6}+i\sin\dfrac{11p}{6})$,

得 $\arg\omega=\dfrac{11p}{6}>\dfrac{p}{2}$ 不适合题意,舍去.

综合(Ⅰ)、(Ⅱ)可知$q=\dfrac{p}{12}$或$q=\dfrac{7p}{12}$.

(29)本小题考查一元二次方程根与系数的关系,绝对值不等式的性质和证明;逻辑推理能力和分析问题、解决问题的能力.

证法一:

依题设,二次方程有两个实根α,β,所以判别式

$\triangle=a^2-4b\geq0$.

不妨取 $a=\dfrac{1}{2}(-a-\sqrt{\triangle}),b=\dfrac{1}{2}(-a+\sqrt{\triangle})$.

(Ⅰ)$\because|a|<2,|b|<2$,

$\therefore|b|=|ab|=|a|\cdot|b|<4$,

且 $-2<\dfrac{1}{2}(-a-\sqrt{\triangle}),<\dfrac{1}{2}(-a+\sqrt{\triangle})<2$.

$0\leq\sqrt{\triangle}<4-a,0\leq\sqrt{\triangle}<4+a$,

平方得 $a^2-4b<16-8a+a^2,a^2-4b<16+8a+a^2$,

由此得 $-4(4+b)<8a<4(4+b)$,

$\therefore2|a|<4+b$.

(Ⅱ)$\because2|a|<4+b,|b|<4$,

$\therefore|a|<\dfrac{1}{2}(4+|b|)<4$,

$4\pm a>0$;

且 $\triangle=a^2-4b<a^2-4(2|a|-4)$

$=a^2\pm8a+16=(4\pm a)^2$,

又 $\triangle\geq0$,

∴ $\sqrt{\triangle} < 4 \pm a$.

得 $-4 < -a - \sqrt{\triangle} \leq -a + \sqrt{\triangle} < 4$,

∴ $-2 < \alpha \leq \beta < 2$,

得 $|\alpha| < 2, |\beta| < 2$.

证法二:

(Ⅰ)根据韦达定理 $|b| = |\alpha\beta| < 4$.

因为二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$ 开口向上, $|\alpha|<2, |\beta|<2$.

故必有 $f(\pm 2)>0$,

即 $4+2a+b>0, 2a>-(4+b)$;

$4-2a+b>0, 2a<4+b$.

∴ $2|a|<4+b$.

(Ⅱ)由 $2|a|<4+b$ 得 $4+2a+b>0$ 即 $2^2+2a+b>0, f(2)>0$. ①

及 $4-2a+b>0$ 即 $(-2)^2+(-2)a+b>0, f(-2)>0$. ②

由此可知 $f(x)=0$ 的每个实根或者在区间 $(-2,2)$ 之内或者在 $(-2,2)$ 之外.若两根 α, β 均落在 $(-2,2)$ 之外,则与 $|b|=|\alpha\beta|<4$ 矛盾.

若 α(或 β)落在 $(-2,2)$ 外,则由于 $|b|=|\alpha\beta|<4$,另一个根 β(或 α)必须落在 $(-2,2)$ 内,则与①、②式矛盾.

综上所述 α, β 均落在 $(-2,2)$ 内.

∴ $|\alpha|<2, |\beta|<2$.

1993 年试题

(文史类)

一、选择题:在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.把所选项前的字母填在题后括号内.

(1)如果双曲线的实半轴长为 2,焦距为 6,那么该双曲线的离心率为

(A)$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　(B)$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　(C)$\frac{3}{2}$　　(D)2

【　　】

(2)函数$y=\frac{1-tg^2 2x}{1+tg^2 2x}$的最小正周期是

(A)$\frac{\pi}{4}$　　(B)$\frac{\pi}{2}$　　(C)π　　(D)2π

【　　】

(3)当圆锥的侧面积和底面积的比值是$\sqrt{2}$时,圆锥的轴截面顶角是

(A)45°　　(B)60°　　(C)90°　　(D)120°

【　　】

(4)当$z=\frac{1-i}{2}$时,$z^{100}+z^{50}+1$的值等于

(A)1　　(B)-1　　(C)i　　(D)-i

【　　】

(5)若正棱锥的底面边长与侧棱长相等,则该棱锥一定不是

(A)三棱锥　　(B)四棱锥

(C)五棱锥　　(D)六棱锥

【　　】

(6)在直角三角形中两锐角为 A 和 B,则 sinAsinB

(A)有最大值$\frac{1}{2}$和最小值0

(B)有最大值$\frac{1}{2}$，但无最小值

(C)既无最大值也无最小值

(D)有最大值 1,但无最小值

【　　】

(7)在各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,若 $a_5a_6=9$,则 $\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_{10}=$

(A)12　　(B)10　　(C)8　　(D)$2+\log_35$

【　　】

(8)$F(x)=(1+\frac{2}{2^x-1})f(x)\ (x\neq 0)$是偶函数,且f(x)不恒等于零,则f(x)

(A)是奇函数

(B)是偶函数

(C)可能是奇函数也可能是偶函数

(D)不是奇函数也不是偶函数

【　　】

(9)设直线$2x-y-\sqrt{3}=0$与y轴的交点为P，点P把圆$(x+1)^2+y^2=25$直径分为两段,则其长度之比为

(A)$\frac{7}{3}$或$\frac{3}{7}$　　(B)$\frac{7}{4}$或$\frac{4}{7}$

(C)$\frac{7}{5}$或$\frac{5}{7}$　　(D)$\frac{7}{6}$或$\frac{6}{7}$

【　　】

(10)若 a、b 是任意实数,且 a>b,则

(A)$a^2>b^2$　　(B)$\frac{b}{a}<1$

(C)$\lg(a-b)>0$　　(D)$(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

【　　】

(11)已知集合 E={θ｜cosθ<sinθ,0≤θ≤2π},F={θ｜tgθ<sinθ},那么 E∩F 为区间

(A)$(\frac{\pi}{2},\pi)$　　(B)$(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})$

(C)$(\pi,\frac{3\pi}{2})$　　(D)$(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$

【　　】

(12)一动圆与两圆:$x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-8x+12=0$ 都外切,则动圆圆心的轨迹为

(A)抛物线　　(B)圆

(C)双曲线的一支　　(D)椭圆

【　　】

(13)若直线 ax+by+c=0 在第一、二、三象限,则

(A)ab>0,bc>0　　(B)ab>0,bc<0

(C)ab<0,bc>0　　(D)ab<0,bc<0

【　　】

(14)如果圆柱轴截面的周长 L 为定值,那么圆柱体积的最大值是

(A)$(\frac{L}{6})^3\pi$　　(B)$(\frac{L}{3})^3\pi$

(C)$(\frac{L}{4})^3\pi$　　(D)$\frac{1}{4}(\frac{L}{4})^3\pi$

【　　】

(15)由$(\sqrt{3}x+\sqrt[3]{2})^{100}$展开所得的x的多项式中,系数为有理数的共有

(A)50 项　　(B)17 项　　(C)16 项　　(D)15 项

【　　】

(16)设 a,b,c 都是正数,且 $3^a=4^b=6^c$,那么

(A) $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$　　(B) $\frac{2}{c}=\frac{2}{a}+\frac{1}{b}$

(C) $\frac{1}{c}=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$　　(D) $\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$

【　】

(17)同室四人各写一张贺年卡,先集中起来,然后每人从中拿一张别人送出的贺年卡,则四张贺年卡不同的分配方式有

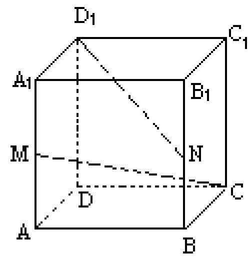
(A)6 种　(B)9 种　(C)11 种　(D)23 种

【　】

(18)在正方体 $A_1B_1C_1D_1$-ABCD 中,M、N 分别为棱 A_1A 和 B_1B 的中点(如图).若 θ 为直线 CM 与 D_1N 所成的角,则 sinθ=

(A) $\frac{1}{9}$　(B) $\frac{2}{3}$　(C) $\frac{2\sqrt{5}}{9}$　(D) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$

【　】



二、填空题:把答案填在题中横线上.

(19)抛物线 $y^2=4x$ 的弦 AB 垂直于 x 轴,若 AB 的长为 $4\sqrt{3}$,则焦点到 AB 的距离为__________.

(20)在半径为 30m 的圆形广场中央上空,设置一个照明光源,射向地面的光呈圆锥形,且其轴截面顶角为 120°.若要光源恰好照亮整个广场,则其高度应为____m(精确到 0.1m).

(21)在 50 件产品中有 4 件是次品,从中任意抽出 5 件,至少有 3 件是次品的抽法共____种(用数字作答).

(22)建造一个容积为 $8m^3$,深为 2m 的长方体无盖水池.如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元,那么水池的最低总造价为____元.

(23)设 $f(x)=4^x-2^{x+1}$,则 $f^{-1}(0)$=____________.

(24)设 $a>1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1+a^{n+1}}=$______.

三、解答题:解答应写出文字说明、演算步骤.

(25)解方程 $\lg(x^2+4x-26)-\lg(x-3)=1$.

(26)已知数列

$$\frac{8\cdot 1}{1^2\cdot 3^2},\ \frac{8\cdot 2}{3^2\cdot 5^2},\ \frac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2},\ \cdots.$$

S_n 为其前 n 项和.计算得

$$s_1=\frac{8}{9},\ s_2=\frac{24}{25},\ s_3=\frac{48}{49},\ s_4=\frac{80}{81}.$$

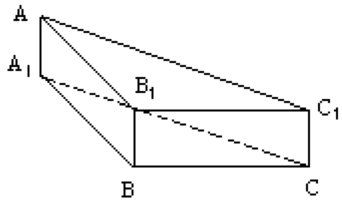
观察上述结果,推测出计算 S_n 的公式,并用数学归纳法加以证明.

(27)如图,$A_1B_1C_1$-ABC 是直三棱柱,过点 A_1、B、C_1 的平面和平面 ABC 的交线记作 l.

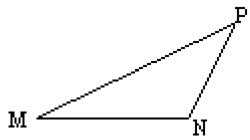
(Ⅰ)判定直线 A_1C_1 和 l 的位置关系,并加以证明;

(Ⅱ)若 $A_1A=1$,AB=4,BC=3,∠ABC=90°,求顶点 A_1 到直线 l 的距离.

(28)在面积为1的△PMN中,$\mathrm{tg}M=\frac{1}{2}$,$\mathrm{tg}N=-2$.建立适当的坐标系,求出以 M,N 为焦点且过点 P 的椭圆方程.



(29)设复数$z=\cos\theta+i\sin\theta(0<\theta<\pi)$,$\omega=\frac{1-(\bar{z})^4}{1+z^4}$.已知$|\omega|=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\arg\omega<\frac{\pi}{2}$,求$\theta$.



1993 年试题(文史类)答案

一、选择题:本题考查基本知识和基本运算.

(1)C	(2)B	(3)C	(4)D	(5)D	(6)B
(7)B	(8)A	(9)A	(10)D	(11)A	(12)C
(13)D	(14)A	(15)B	(16)B	(17)B	(18)D

二、填空题:本题考查基本知识和基本运算.

(19)2	(20)17.3	(21)4186
(22)1760	(23)1	(24)-1

三、解答题.

(25)本小题考查对数方程的解法及运算能力.

解:原方程可化为

$$\lg\frac{x^2+4x-26}{x-3}=\lg10,$$

$$\frac{x^2+4x-26}{x-3}=10.$$

解得 $x_1=3-\sqrt{5}$;

$x_2=3+\sqrt{5}$.

检验:$x=3-\sqrt{5}$时，$x-3=-\sqrt{5}<0$．负数的对数没有意义，

所以$x=3-\sqrt{5}$不是原方程的根．

$x=3+\sqrt{5}$时，原方程左边 $=\lg 10\sqrt{5}-\lg\sqrt{5}=\lg 10=1=$ 右边．

所以原方程的根是$x=3+\sqrt{5}$．

(26)本小题考查观察、分析、归纳的能力和数学归纳法．

解：$S_n=\dfrac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\ (n\in N)$．

证明如下:

(Ⅰ)当$n=1$时，$S_1=\dfrac{3^2-1}{3^2}=\dfrac{8}{9}$，等式成立．

(Ⅱ)设当 n=k 时等式成立,即

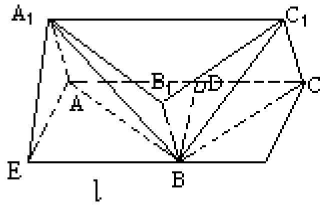
$$S_k=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}.$$

则
$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\
&=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\
&=\frac{[(2k+1)^2-1](2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\
&=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\
&=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+1)^2}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\
&=\frac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2}\\
&=\frac{[2(k+1)+1]^2-1}{[2(k+1)+1]^2}\end{aligned}$$

由此可知,当 n=k+1 时等式也成立.

根据(Ⅰ)、(Ⅱ)可知,等式对任何 n∈N 都成立.

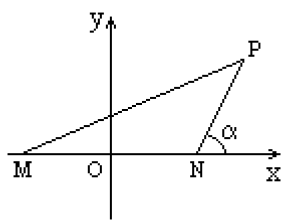
(27)本小题主要考查空间图形的线面关系、三棱柱的性质、空间想象能力和逻辑推理能力.



解:(Ⅰ)$l\parallel A_1C_1$.证明如下:

根据棱柱的定义知平面 $A_1B_1C_1$ 和平面 ABC 平行.

由题设知直线 A_1C_1=平面 $A_1B_1C_1\cap$平面 A_1BC_1，直线 l=平面 $A_1BC_1\cap$平面 ABC.
根据两平面平行的性质定理有 $l\parallel A_1C_1$.
(II)解法一:
过点 A_1 作 $A_1E\perp L$ 于 E，则 A_1E 的长为点 A_1 到 l 的距离.
连结 AE.由直棱柱的定义知 $A_1A\perp$平面 ABC.
∴　直线 AE 是直线 A_1E 在平面 ABC 上的射影.
又　l 在平面 ABC 上，根据三垂线定理的逆定理有
$AE\perp l$.
由棱柱的定义知 $A_1C_1\parallel AC$，又 $l\parallel A_1C_1$，
∴　$l\parallel AC$.
作 $BD\perp AC$ 于 D，则 BD 是 Rt△ABC 斜边 AC 上的高，且 BD=AE，
从而 $AE=BD=\frac{AB\times BC}{AC}=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}$.
在 Rt$\triangle A_1AE$ 中，
∵　$A_1A=1$，$\angle A_1AE=90°$，
∴　$A_1E=\sqrt{AE^2+A_1A^2}$
$=\sqrt{(\frac{12}{5})^2+1^2}=\frac{13}{5}$.
故点 A_1 到直线 l 的距离为 $\frac{13}{5}$.
解法二:
同解法一得 $l\parallel AC$.
由平行直线的性质定理知∠CAB=∠ABE，
从而有 Rt△ABC∽Rt△BEA，AE:BC=AB:AC，
∴ $AE=\frac{BC\times AB}{AC}$.
以下同解法一.
(28)本小题主要考查坐标系、椭圆的概念和性质、直线方程以及综合应用的能力.



解法一:建立直角坐标系如图:以 MN 所在直线为 x 轴，MN 的垂直平分线为 y 轴.
设所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
分别记 M、N、P 点的坐标为(-c,0)、(c,0)和(x_0,y_0).
∵　$tg\alpha=tg(\pi-\angle N)=2$，

∴　　由题设知

$$\begin{cases} y_0=\dfrac{1}{2}(x_0+c), \\ y_0=2(x_0-c). \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x_0=\dfrac{5}{3}c, \\ y_0=\dfrac{4}{3}c, \end{cases}$　　即$p(\dfrac{5}{3}c，\dfrac{4}{3}c)$.

在△MNP中，$MN=2c$，MN上的高为$\dfrac{4}{3}c$.

∵　$S_{\triangle MNP}=\dfrac{1}{2}\times 2c\times\dfrac{4}{3}c=1$，

∴　$c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $P(\dfrac{5\sqrt{3}}{6}，\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$.

$|PM|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^{\ 2}}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$，

$|PN|=\sqrt{(x_0-c)^2+y_0^{\ 2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

∴　$a=\dfrac{1}{2}(|PM|+|PN|)=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

从而　　$b^2=a^2-c^2=3$.

故所求椭圆方程为 $\dfrac{4x^2}{15}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

解法二：

同解法一得 $c=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即$P(\dfrac{5\sqrt{3}}{6}，\dfrac{2\sqrt{3}}{3})$

∵　　点P在椭圆上，且$a^2=b^2+c^2$.

∴　$$\frac{(\frac{5\sqrt{3}}{6})^2}{b^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}+\frac{(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2}{b^2}=1.$$

解得　$b^2=3$，或$b^2=-\dfrac{1}{3}$(舍去).

$$a^2=b^2+c^2=\frac{15}{4}.$$

故所求椭圆方程为 $\dfrac{4x^2}{15}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(29)本小题考查复数的基本概念和运算，三角函数式的恒等变形及综合解题能力.

解：$\omega=\dfrac{1-[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^4}{1+[\cos\theta+i\sin\theta]^4}$

$$=\frac{1-\cos(-4\theta)-i\sin(-4\theta)}{1+\cos4\theta+i\sin4\theta}$$

$$=\frac{2\sin^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}{2\cos^2 2\theta+2i\sin2\theta\cos2\theta}$$

$$=\operatorname{tg}2\theta(\sin4\theta+i\cos4\theta).$$

$|\omega|=|\operatorname{tg}2\theta|\cdot|\sin4\theta+i\cos4\theta|=|\operatorname{tg}2\theta|=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

因 $0<\theta<\pi$，故有

(Ⅰ)当$\operatorname{tg}2\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，得$\theta=\dfrac{\pi}{12}$或$\theta=\dfrac{7\pi}{12}$，这时都有

$$\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

得 $\arg\omega=\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}$，适合题意.

(Ⅱ)当$\operatorname{tg}2\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$时，得$\theta=\dfrac{5\pi}{12}$或$\theta=\dfrac{11\pi}{12}$，这时都有

$$\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right),$$

得 $\arg\omega=\dfrac{11\pi}{6}>\dfrac{\pi}{2}$不适合题意，舍去.

综合(Ⅰ)、(Ⅱ)可知$\theta=\dfrac{\pi}{12}$或$\theta=\dfrac{7\pi}{12}$.

1994年普通高等学校招生全国统一考试
数学
(理工农医类)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.共 150 分,考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题共65分)

一、选择题:本大题共 15 小题;第(1)—(10)题每小题 4 分,第(11)—(15)题每小题 5 分,共 65 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)设全集 I={0,1,2,3,4},集合 A={0,1,2,3},集合 B={2,3,4},则

$\overline{A} \cup \overline{B} =$

(A){0}　(B){0,1}　(C){0,1,4}　(D){0,1,2,3,4}

【　】

(2)如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,那么实数 k 的取值范围是

(A)(0,+∞)　(B)(0,2)　(C)(1,+∞)　(D)(0,1)

【　】

(3)极坐标方程 $\rho=\cos(\frac{\pi}{4}-\theta)$ 所表示的曲线是

(A)双曲线　(B)椭圆　(C)抛物线　(D)圆

【　】

(4)设θ是第二象限的角,则必有

(A)$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}>\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$　(B)$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}<\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$

(C)$\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$　(D)$\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$

【　】

(5)某种细菌在培养过程中,每 20 分钟分裂一次(一个分裂为两个).经过 3 小时,这种细菌由 1 个可繁殖成

(A)511 个　(B)512 个　(C)1023 个　(D)1024 个

【　】

(6)在下列函数中,以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期的函数是

(A)y=sin2x+cos4x　(B)y=sin2xcos4x

(C)y=sin2x+cos2x　(D)y=sin2xcos2x

【　】

(7)已知正六棱台的上、下底面边长分别为 2 和 4,高为 2,则其体积为

(A)$32\sqrt{3}$　(B)$28\sqrt{3}$　(C)$24\sqrt{3}$　(D)$20\sqrt{3}$

【　】

(8)设 F_1 和 F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的两个焦点,点 P 在双曲线上且满足 $\angle F_1PF_2=90°$,则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积是

(A)1　(B)$\frac{\sqrt{5}}{2}$　(C)2　(D)$\sqrt{5}$

【　　】

(9)如果复数 z 满足｜z+i｜+｜z-i｜=2,那么｜z+i+1｜的最小值是

(A)1　(B)$\sqrt{2}$　(C)2　(D)$\sqrt{5}$

【　　】

(10)有甲、乙、丙三项任务,甲需 2 人承担,乙、丙各需 1 人承担.从 10 人中选派 4 人承担这三项任务,不同的选法共有

(A)1260 种　(B)2025 种　(C)2520 种　(D)5040 种

【　　】

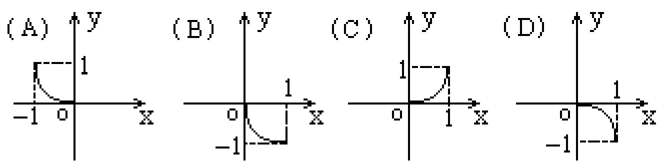
(11)对于直线 m、n 和平面α、β,α⊥β的一个充分条件是

(A)$m\perp n, m\parallel\alpha, n\parallel\beta$　(B)$m\perp n, \alpha\cap\beta=m, n\subset\alpha$

(C)$m\parallel n, n\perp\beta, m\subset\alpha$　(D)$m\parallel n, m\perp\alpha, n\perp\beta$

【　　】

(12)**设函数**$f(x)=1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\leq x\leq 0)$,**则函数**$y=f^{-1}(x)$**的图象是**



【　　】

(13)已知过球面上 A、B、C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半,且 AB=BC=CA=2,则球面面积是

(A)$\frac{16}{9}\pi$　(B)$\frac{8}{3}\pi$　(C)4π　(D)$\frac{64}{9}\pi$

【　　】

(14)**函数**$y=\arccos(\sin x)(-\frac{\pi}{3}<x<\frac{2\pi}{3})$**的值域是**

(A)$(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$　(B)$[0,\frac{5\pi}{6})$　(C)$(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$　(D)$[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$

【　　】

(15)定义在(-∞,+∞)上的任意函数 f(x)都可以表示成一个奇函数 g(x)和一个偶函数 h(x)之和,如果 f(x)=lg(10^x+1),x∈(-∞,+∞),那么

(A)$g(x)=x, h(x)=\lg(10^x+10^{-x}+2)$

(B)$g(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)+x], h(x)=\frac{1}{2}[\lg(10^x+1)-x]$

(C)$g(x)=\frac{x}{2}, h(x)=\lg(10^x+1)-\frac{x}{2}$

(D)$g(x)=-\frac{x}{2}, h(x)=\lg(10^x+1)+\frac{x}{2}$

【　　】

第 II 卷(非选择题共 85 分)

二、填空题(本大题共 5 小题,共 6 个空格;每空格 4 分,共 24 分.把答案填在题中横线上)

16.在$(3-x)^7$的展开式中,x^5的系数是__________.(用数字作答)

17.抛物线 $y^2=8-4x$ 的准线方程是____________,圆心在该抛物线的顶点且与其准线相切的圆的方程是________________.

18.已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$, $\theta\in(0,\pi)$,则 $\operatorname{ctg}\theta$ 的值是__________.

19.设圆锥底面圆周上两点 A、B 间的距离为 2,圆锥顶点到直线 AB 的距离为 $\sqrt{3}$, AB 和圆锥的轴的距离为 1,则该圆锥的体积为_______.

20.在测量某物理量的过程中,因仪器和观察的误差,使得 n 次测量分别得到 $a_1,a_2,\cdots a_n$,共 n 个数据,我们规定所测量物理量的"最佳近似值"a 是这样一个量:与其他近似值比较,a 与各数据的差的平方和最小.依此规定,从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 推出的 a=______.

三、解答题(本大题共 5 小题,共 61 分;解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

21.(本小题满分 11 分)

已知 z=1+i.

(1)设 $\omega=z^2+3\bar{z}-4$,求 ω 的三角形式;

(2)如果 $\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-i$,求实数 a, b 的值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\operatorname{tg}x, x\in(0,\frac{\pi}{2})$.若 $x_1,x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$,且 $x_1\neq x_2$,证明

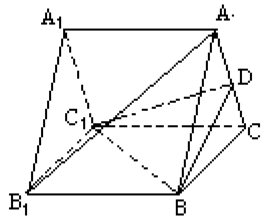
$$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\frac{x_1+x_2}{2}).$$

23.(本小题满分 12 分)

如图,已知 $A_1B_1C_1$-ABC 是正三棱柱,D 是 AC 中点.

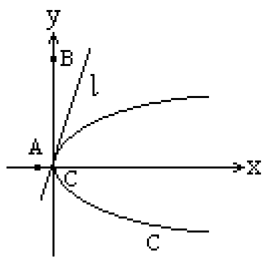
(1)证明 AB_1∥平面 DBC_1;

(2)假设 $AB_1\perp BC_1$,求以 BC_1 为棱,DBC_1 与 CBC_1 为面的二面角 α 的度数.



24.(本小题满分 12 分)

已知直线 *l* 过坐标原点,抛物线 C 顶点在原点,焦点在 x 轴正半轴上.若点 A(-1,0)和点 B(0,8)关于 *l* 的对称点都在 C 上,求直线 *l* 和抛物线 C 的方程.



25.(本小题满分 14 分)

设$\{a_n\}$是正数组成的数列,其前 n 项和为 S_n,并且对于所有的自然数 n,a_n与 2 的等差中项等于S_n与 2 的等比中项.

(1)写出数列$\{a_n\}$的前 3 项;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式(写出推证过程);

(3)令$b_n=\frac{1}{2}(\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_{n+1}})$ $(n\in N)$,求$\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n-n)$.

1994年普通高等学校招生全国统一考试
数学试题(理工农医类)参考解答

一、选择题(本题考查基本知识和基本运算)

1.C 2.D 3.D 4.A 5.B

6.D 7.B 8.A 9.A 10.C

11.C 12.B 13.D 14.B 15.C

二、填空题(本题考查基本知识和基本运算)

16.-189 17.$x=3,(x-2)^2+y^2=1$ 18.$-\frac{3}{4}$

19.$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ 20.$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

三、解答题

21.本小题考查共轭复数、复数的三角形式等基础知识及运算能力.

解:(1)由 z=1+i,有

$$\begin{aligned}\omega&=z^2+3\bar{z}-4\\&=(1+i)^2+3\overline{(1+i)}-4\\&=2i+3(1-i)-4=-1-i,\end{aligned}$$

ω的三角形式是

$$\sqrt{2}(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi).$$

(2)由 z=1+i,有

$$\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=\frac{(1+i)^2+a(1+i)+b}{(1+i)^2-(1+i)+1}$$

$$=\frac{(a+b)+(a+2)i}{i}$$

$$=(a+2)-(a+b)i$$

由题设条件知(a+2)-(a+b)i=1-i.

根据复数相等的定义,得$\begin{cases}a+2=1,\\-(a+b)=-1.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2.\end{cases}$

22.本小题考查三角函数基础知识、三角函数性质及推理能力.

证明:

$$\mathrm{tg}x_1+\mathrm{tg}x_2=\frac{\sin x_1}{\cos x_1}+\frac{\sin x_2}{\cos x_2}$$
$$=\frac{\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2}{\cos x_1\cos x_2}$$
$$=\frac{\sin(x_1+x_2)}{\cos x_1\cos x_2}$$
$$=\frac{2\sin(x_1+x_2)}{\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)}.$$

$\because x_1,x_2\in(0,\frac{p}{2}),x_1\neq x_2,$

$\therefore 2\sin(x_1+x_2>0,\cos x_1\cos x_2>0,)$

且 $0<\cos(x_1-x_2)<1$,从而有

$0<\cos(x_1+x_2)+\cos(x_1-x_2)<1+\cos(x_1+x_2)$,

由此得 $\mathrm{tg}x_1+\mathrm{tg}x_2>\dfrac{2\sin(x_1+x_2)}{1+\cos(x_1+x_2)},$

$\therefore \dfrac{1}{2}(\mathrm{tg}x_1+\mathrm{tg}x_2)>\mathrm{tg}\dfrac{x_1+x_2}{2},$

即 $\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\dfrac{x_1+x_2}{2}).$

23.本小题考查空间线面关系、正棱柱的性质、空间想象能力和逻辑推理能力.

(1)证明:

$\because A_1B_1C_1$-ABC 是正三棱柱,

$\therefore$四边形 B_1BCC_1 是矩形.

连结 B_1C 交 BC_1 于 E,则 $B_1E=EC$.连结 DE.

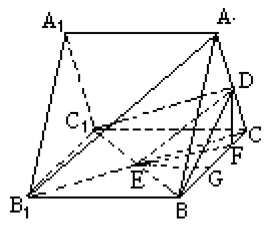
在△AB_1C 中,

$\because AD=DC$,

$\therefore DE\parallel AB_1$.

又 $AB_1\not\subset$ 平面 DBC_1, $DE\subset$ 平面 DBC_1,

$\therefore AB_1\parallel$平面 DBC_1.



(2)解:作 $DF\perp BC$,垂足为 F,则 $DF\perp$面 B_1BCC_1,连结 EF,则 EF 是 ED 在平面 B_1BCC_1 上的射影.

$\because AB_1\perp BC_1$,

由(1)知 $AB_1\parallel DE$,

$\therefore DE\perp BC_1$,

则 $BC_1 \perp EF$,

∴∠DEF 是二面角α的平面角.

设 $AC=1$,则 $DC=\frac{1}{2}$.

∵△ABC 是正三角形,

∴在 Rt△DCF 中,

$DF=DC\cdot\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}, CF=DC\cdot\cos C=\frac{1}{4}$.

取 BC 中点 G.

∵EB=EC,

∴EG⊥BC.

在 Rt△BEF 中,

$EF^2=BF\cdot GF$,又 $BF=BC-FC=\frac{3}{4}, GF=\frac{1}{4}$,

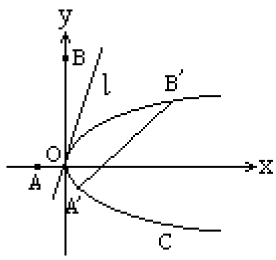
∴$EF^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}$,即 $EF=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$∴\operatorname{tg}\angle DEF=\frac{DF}{EF}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=1.$$

∴∠DEF=45°.

故二面角α为 45°.

24.本小题考查直线与抛物线的基本概念和性质,解析几何的基本思想方法以及综合运用知识解决问题的能力.



解法一:依题设抛物线 C 的方程可写为

$y^2=2px \quad (p>0)$,

且 x 轴和 y 轴不是所求直线,又 l 过原点,因而可设 l 的方程为

$y=kx \quad (k\neq 0)$. ①

设 A'、B'分别是 A、B 关于 l 的对称点,因而 $A'A\perp l$,直线 A'A 的方程为

$y=-\frac{1}{k}(x+1)$. ②

由①、②联立解得 AA' 与 l 的交点 M 的坐标为 $\left(-\frac{1}{k^2+1},-\frac{k}{k^2+1}\right)$.

又 M 为 AA'的中点,从而点 A'的坐标为

$$x_{A'}=2(-\frac{1}{k^2+1})+1=\frac{k^2-1}{k^2+1},$$ ③

$$y_{A'}=2(\frac{-k}{k^2+1})+0=-\frac{2k}{k^2+1}.$$

同理得点 B'的坐标为

$$x_{B'}=\frac{16k}{k^2+1},y_{B'}=\frac{8(k^2-1)}{k^2+1}.$$ ④

又 A'、B'均在抛物线 $y^2=2px(p>0)$上,由③得

$$(-\frac{2k}{k^2+1})^2=2p\cdot\frac{k^2-1}{k^2+1},$$ 由此知 $k\neq\pm1$,

即 $$p=\frac{2k^2}{k^4-1}.$$ ⑤

同理由④得 $$(\frac{8(k^2-1)}{k^2+1})^2=2p\cdot\frac{16k}{k^2+1}.$$

即 $$p=\frac{2(k^2-1)^2}{(k^2+1)k}.$$

从而 $$\frac{2k^2}{k^4-1}=\frac{2(k^2-1)^2}{(k^2+1)k},$$

整理得 $k^2-k-1=0$.

解得 $$k_1=\frac{1+\sqrt5}{2},k_2=\frac{1-\sqrt5}{2}.$$

但当 $k=\frac{1-\sqrt5}{2}$ 时,由③知 $x_A=\frac{\sqrt5}{5}<0$,这与 A' 在抛物线 $y^2=2px(p>0)$

上矛盾,故舍去 $k_2=\frac{1-\sqrt5}{5}$.

设 $k=\frac{1+\sqrt5}{2}$,则直线 l 的方程为 $y=\frac{1+\sqrt5}{2}x$.

将 $k=\frac{1+\sqrt5}{2}$ 代入⑤,求得 $p=\frac{2\sqrt5}{5}$.

所以直线方程为

$$y=\frac{1+\sqrt5}{2}x,$$

抛物线方程为

$$y^2=\frac{4\sqrt5}{5}x.$$

解法二:设点 A、B 关于 l 的对称点分别为 $A'(x_1、y_1)$、$B'(x_2,y_2)$,则

$|OA'|=|OA|=1,|OB'|=|OB|=8.$

设由 x 轴正向到 OB'的转角为 α,则

$x_2=8\cos\alpha,y_2=8\sin\alpha$. ①

因为 A'、B'为 A、B 关于直线 l 的对称点，而∠BOA 为直角,故

∠B'OA'为直角,因此

$$x_1 = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \sin\alpha, y_1 = \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos\alpha, \qquad ②$$

由题意知 $x_1>0,x_2>0$,故α为第一象限角.

因为 A'、B'都在抛物线 $y^2=2px$ 上,将①、②代入得

$\cos^2\alpha=2p\cdot\sin\alpha, 64\sin^2\alpha=2p\cdot 8\cos\alpha$.

$\therefore 8\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$,

$\therefore 2\sin\alpha=\cos\alpha$,

解得 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

将 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 代入 $\cos^2\alpha = 2p\sin\alpha$ 得

$$p = \frac{\cos^2\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

∴抛物线C的方程为 $y^2 = \frac{4\sqrt{5}}{5}x.$

因为直线 l 平分∠B'OB,故 l 的斜率

$$k = \mathrm{tg}[\alpha + \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \alpha)] = \mathrm{tg}(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})$$

$$= \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{2})}{1 + \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})} = \frac{\cos\alpha}{1 - \sin\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

∴直线 l 的方程为 $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}x.$

25.本小题考查等差数列、等比数列、数列极限等基础知识考查逻辑推理能力和分析问题与解决问题的能力.

解:(1)由题意,当 $n=1$ 时有 $\frac{a_1+2}{2} =, \sqrt{2S_1}, S_1 = a_1,$

$$\therefore \frac{a_1+2}{2} = \sqrt{2a_1},$$

解得 $a_1=2$.

当 $n=2$ 时有 $\frac{a_2+2}{2} = \sqrt{2S_2}, S_2 = a_1 + a_2$,将 $a_1 = 2$ 代入,整理得

$$(a_2-2)^2=16.$$

由 $a_2>0$,解得 $a_2=6$.

当 $n=3$ 时有 $\frac{a_3+2}{2} =, \sqrt{2S_3}, S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,将 $a_1 = 2, a_2 = 6$ 代入,整理得

$$(a_3-2)^2=64.$$

由 $a_3>0$,解得 $a_3=10$.

故该数列的前 3 项为 2,6,10.

(2)解法一:由(1)猜想数列 $\{a_n\}$ 有通项公式 $a_n=4n-2$.

下面用数学归纳法证明数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$a_n=4n-2 \quad (n\in N).$$

①当 $n=1$ 时,因为 $4\times1-2=2$,又在(1)中已求出 $a_1=2$,所以上述结论成立.

②假设 $n=k$ 时结论成立,即有 $a_k=4k-2$.由题意,有

$$\frac{a_k+2}{2}=\sqrt{2S_k},$$

将 $a_k=4k-2$ 代入上式,得 $2k=\sqrt{2S_k}$,解得

$$S_k=2k^2.$$

由题意,有

$$\frac{a_{k+1}+2}{2}=\sqrt{2S_{k+1}},S_{k+1}=S_k+a_{k+1},$$

将 $S_k=2k^2$ 代入,得 $\left(\frac{a_{k+1}+2}{2}\right)^2=2(a_{k+1}+2k^2)$,整理得

$$a_{k+1}^2-4a_{k+1}+4-16k^2=0.$$

由 $a_{k+1}>0$,解得 $a_{k+1}=2+4k$.所以

$$a_{k+1}=2+4k=4(k+1)-2.$$

这就是说,当 $n=k+1$ 时,上述结论成立.

根据①、②,上述结论对所有的自然数 n 成立.

解法二:由题意,有 $\frac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n} \quad (n\in N)$,整理得

$$S_n=\frac{1}{8}(a_n+2)^2,$$

由此得 $\quad S_{n+1}=\frac{1}{8}(a_{n+1}+2)^2,$

$$\therefore a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\frac{1}{8}[(a_{n+1}+2)^2-(a_n+2)^2],$$

整理得 $\quad (a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-4)=0,$

由题意知 $\quad a_{n+1}+a_n\neq0,$

$\therefore a_{n+1}-a_n=4.$

即数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,其中 $a_1=2$,公差 $d=4$.

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=2+4(n-1),$

即通项公式为 $a_n=4n-2$.

(3)解:令 $c_n=b_n-1$,则

$$c_n = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}} - 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right) + \left(\frac{2n-1}{2n+1} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1},$$

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n - n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2n+1}.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n - n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = 1.$$

1994年普通高等学校招生全国统一考试
数学
(文史类)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分 150 分.考试时间 120 分钟.

第Ⅰ卷(选择题共 65 分)

一、选择题(本大题共 15 小题;第 1—10 题每小题 4 分,第 11—15 题每小题 5 分,共 65 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.设全集 I= {0,1,2,3,4} ,集合 A= {0,1,2,3} ,集合 B= {2,3,4} ,则 $\overline{A}\cup\overline{B}=$

A. {0}　　B. {0,1}　　C. {0,1,4}　　D. {0,1,2,3,4}

2.如果方程 $x^2+ky^2=2$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆,那么实数 k 的取值范围是

A.(0,+∞)　B.(0,2)　　C.(1,+∞)　　D.(0,1)

3.点(0,5)到直线 y=2x 的距离是

A．$\frac{5}{2}$　　B．$\sqrt{5}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

4.设θ是第二象限的角,则必有

A．$\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}>\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$　　B．$\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}<\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}$

C．$\sin\frac{\theta}{2}>\cos\frac{\theta}{2}$　　D．$\sin\frac{\theta}{2}<\cos\frac{\theta}{2}$

5.某种细菌在培养过程中,每 20 分钟分裂一次(一个分裂为两个).经过 3 个小时,这种细菌由 1 个可繁殖成

A.511 个　　B.512 个　　C.1023 个　　D.1024 个

6.在下列函数中,以$\frac{\pi}{2}$ 为周期的函数是

A.y=sin2x+cos4x　　B.y=sin2xcos4x

C.y=sin2x+cos2x　　D.y=sin2xcos2x

7.已知正六棱台的上,下底面边长分别为 2 和 4,高为 2,则其体积为

A.$32\sqrt{3}$　B.$28\sqrt{3}$　C.$24\sqrt{3}$　D.$20\sqrt{3}$

8.设F_1和F_2为双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$的两个焦点,点P在双曲线上且满足

$\angle F_1PF_2=90°$,则$\triangle F_1PF_2$ 的面积是

A．1　　B．$\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C．2　　D．$\sqrt{5}$

9.如果复数 Z 满足｜Z+i｜+｜z-i｜=2,那么｜Z+i+1｜最小值是

A．1　B．$\sqrt{2}$　C．2　D．$\sqrt{5}$

10.有甲、乙、丙三项任务,甲需 2 人承担,乙、丙各需 1 人承担,从 10 人中选派 4 人承担这三项任务,不同的选法共有

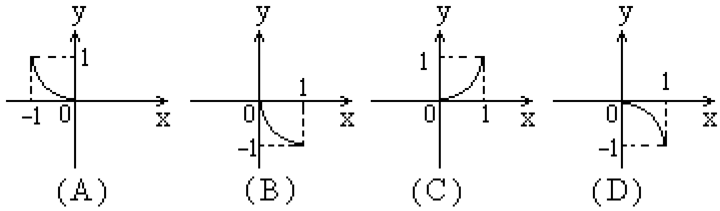
A.1260 种　　B.2025 种　　C.2520 种　　D.5040 种

11.对于直线 m、n 和平面α、β,α⊥β的一个充分条件是

A. $m\perp n, m /\!/ \alpha, n /\!/ \beta$　　B. $m\perp n, \alpha\cap\beta = m, n\subset\alpha$

C. $m /\!/ n, n\perp\beta, m\subset\alpha$　　D. $m /\!/ n, m\perp\alpha, n\perp\beta$

12. 设函数 $f(x) = 1-\sqrt{1-x^2}\ (-1\le x\le 0)$,则函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象是



13. 已知过球面上 A、B、C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半,且 AB=BC=CA=2,则球面面积是

A. $\frac{16}{9}\pi$　　B. $\frac{8}{3}\pi$　　C. 4π　　D. $\frac{64}{9}\pi$

14. 如果函数 $y = \sin 2x + a\cos 2x$ 的图象关于直线 $x = -\frac{\pi}{8}$ 对称,那么 $a =$

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. 1　　D. -1

15. 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数 $f(x)$ 都可以表示成一个奇函数 $g(x)$ 和一个偶函数 $h(x)$ 之和.如果 $f(x)=\lg(10^x+1)$, $x\in(-\infty,+\infty)$,那么

A. $g(x) = x, h(x) = \lg(10^x + 10^{-x} + 2)$

B. $g(x) = \frac{1}{2}[\lg(10^x + 1) + x]$

$h(x) = \frac{1}{2}[\lg(10^x + 1) - x]$

C. $g(x) = \frac{x}{2}, h(x) = \lg(10^x + 1) - \frac{x}{2}$

D. $g(x) = -\frac{x}{2}, h(x) = \lg(10^x + 1) + \frac{x}{2}$

第 II 卷(非选择题共 85 分)

二、填空题(本大题共 5 小题,共 6 个空格:每空格 4 分,共 24 分.把答案填在题中横线上)

16. 在 $(3-x)^7$ 的展开式中, x^5 的系数是________(用数作答).

17. 抛物线 $y^2=8-4x$ 的准线方程是_________,圆心在该抛物线的顶点且与其准线相切的圆的方程是_________.

18. 已知 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}, \theta\in(0,\pi)$,则 $\operatorname{ctg}\theta$ 的值是____.

19. 设圆锥底面圆周上两点A、B间的距离为2,圆锥顶点到直线AB的距离为 $\sqrt{3}$,

AB 和圆锥的轴的距离为 1,则该圆锥的体积为_______.

20. 在测量某物理量的过程中,因仪器和观察的误差,使得 n 次测量分别得到 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,共 n 个数据.我们规定所测量的"最佳近似值"a 是这样一个量:与其他近似值比较,a 与各数据的差的平方和最小.依此规定,从

$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 推出的 a=__________.

三、解答题(本大题共 5 小题,共 61 分;解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

21.(本小题满分 11 分)

求函数$y=\dfrac{\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x}{\cos^2 2x}+\sin 2x$的最小值.

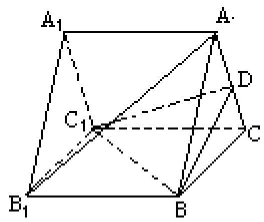
22.(本小题满分 12 分)

已知函数$f(x)=\log_a x(a>0$且$a\neq 1,x\in R^+$,若$x_1,x_2\in R^+$,

判断$\dfrac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$与$f(\dfrac{x_1+x_2}{2})$的大小,并加以证明.

23.(本小题满分 12 分)

如图,已知 $A_1B_1C_1$-ABC 是正三棱柱,D 是 AC 中点.

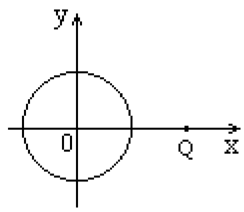


(1)证明 AB_1∥平面 DBC_1;

(2)假设 $AB_1\perp BC_1$,BC=2,求线段 AB_1 在侧面 B_1BCC_1 上的射影长.

24.(本小题满分 12 分)

已知直角坐标平面上点 Q(2,0)和圆 C:$x^2+y^2=1$,动点 M 到圆 C 的切线长与|MQ|的比等于常数λ(λ>0).求动点M的轨迹方程,说明它表示什么曲线.



25.(本小题满分 14 分)

设数列{a_n}的前 n 项和为 S_n,若对于所有的自然数 n,都有$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$,证明{$a_n$}是等差数列.

1994 年普通高等学校招生全国统一考试
数学试题(文史类)参考答案

一、选择题(本题考查基本知识和基本运算)

1.C	2.D	3.B	4.A	5.B
6.D	7.B	8.A	9.A	10.C
11.C	12.B	13.D	14.D	15.C

二、填空题(本题考查基本知识和基本运算. 每空格 4 分,共 24 分)

16.-189 **17.x=3,$(x-2)^2+y^2=1$**

18.$-\frac{3}{4}$ 19.$\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ 20.$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$

三、解答题

21.本小题考查利用有关三角公式并借助辅助角求三角函数最小值的方法及运算能力,满分 11 分.

解:因为

$$\begin{aligned}
&\sin3x\sin^3x+\cos3x\cos^3x\\
&=(\sin3x\sin x)\sin^2x+(\cos3x\cos x)\cos^2x\\
&=\frac{1}{2}[(\cos2x-\cos4x)\sin^2x+(\cos2x+\cos4x)\cos^2x]\\
&=\frac{1}{2}[(\sin^2x+\cos^2x)\cos2x+(\cos^2x-\sin^2x)\cos4x]\\
&=\frac{1}{2}(\cos2x+\cos2x\cos4x)\\
&=\frac{1}{2}\cos2x(1+\cos4x)\\
&=\cos^3 2x,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
y&=\frac{\cos^3 2x}{\cos^2 2x}+\sin2x\\
&=\cos2x+\sin2x\\
&=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

当$\sin\left(2x+\frac{p}{4}\right)=-1$**时,**$y$**取最小值**$-\sqrt{2}$**.**

22.本小题考查对数函数性质、平均值不等式等知识及推理论证的能力.满分 12 分.

解:

$f(x_1)+f(x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a(x_1x_2)$,

$\because x_1,x_2\in R^+$,

$\therefore x_1x_2\leq\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$(**当且仅当**$x_1=x_2$**时取**"="**号**).

当$a>1$**时,有**$\log_a(x_1x_2)\leq\log_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$

$\therefore\frac{1}{2}\log_a(x_1x_2)\leq\log_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2$,

$\frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)\leq\log_a\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$,

即$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]\leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$(**当且仅当**$x_1=x_2$**时取**"="**号**).

当$0<a<1$时,有$\log_a(x_1x_2)\geq\log_a(\frac{x_1+x_2}{2})^2$,

$\therefore \frac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)\geq\log_a(\frac{x_1+x_2}{2})$,

即$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)\geq f(\frac{x_1+x_2}{2})$

(当且仅当 $x_1=x_2$ 时取"="号).

23.本小题考查空间线面关系,正棱柱的性质,空间想象能力和逻辑推理能力.满分 12 分.

(1)证明:

∵$A_1B_1C_1$-ABC 是正三棱柱,

∴四边形 B_1BCC_1 是矩形.

连结 B_1C,交 BC_1 于 E,则 $B_1E=EC$.连结 DE.

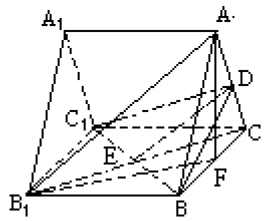
在△AB_1C 中,

∵AD=DC,

∴DE∥AB_1,

又$AB_1\not\subset$平面DBC_1.$DE\subset$平面DBC_1,

∴AB_1∥平面 DBC_1.



(2)解:作 AF⊥BC,垂足为 F.因为面 ABC⊥面 B_1BCC_1,所以 AF⊥平面 B_1BCC_1.连结 B_1F,则 B_1F 是 AB_1 在平面 B_1BCC_1 内的射影.

∵$BC_1\perp AB_1$,

∴$BC_1\perp B_1F$.

∵四边形 B_1BCC_1 是矩形,

∴$\angle B_1BF=\angle BCC_1=90°$;

又$\angle FB_1B=\angle C_1BC$,

∴$\triangle B_1BF\backsim\triangle BCC_1$.

$\therefore \frac{B_1B}{BC}=\frac{BF}{C_1C}=\frac{BF}{B_1B}$.

又 F 为正三角形 ABC 的 BC 边中点,因而 $B_1B^2=BF\cdot BC=1\times2=2$,

于是 $B_1F^2=B_1B^2+BF^2=3$,

$\therefore B_1F=\sqrt{3}$.

即线段AB_1在平面B_1BCC_1内的射影长为$\sqrt{3}$.

24.本小题考查曲线与方程的关系,轨迹的概念等解析几何的基本思想以及综合运用知识的能力.满分 12 分.

解:如图,设 MN 切圆于 N,则动点 M 组成的集合是

$$P=\{M \mid |MN|=\lambda|MQ|\},$$
式中常数λ＞0.

因为圆的半径|ON|=1,所以$|MN|^2=|MO|^2-|ON|^2=|MO|^2-1$.

设点M的坐标为(x,y),则

$$\sqrt{x^2+y^2-1}=\lambda\sqrt{(x-2)^2+y^2}$$

整理得

$$(\lambda^2-1)(x^2+y^2)-4\lambda^2x+(1+4\lambda^2)=0.$$

经检验,坐标适合这个方程的点都属于集合 P.故这个方程为所求的轨迹方程.

当$\lambda=1$时,方程化为$x=\frac{5}{4}$,它表示一条直线,该直线与x轴垂直且交x轴于点$(\frac{5}{4},0)$;

当$\lambda\neq1$时,方程化为$(x-\frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1})^2+y^2=\frac{1+3\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}$,它表示圆,该圆圆心的坐标为$(\frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1},0)$,半径为$\frac{\sqrt{1+3\lambda^2}}{|\lambda^2-1|}$.

25.本小题考查等差数列的基础知识,数学归纳法及推理论证能力.满分14分.

证法一:令$d=a_2-a_1$.

下面用数学归纳法证明 $a_n=a_1+(n-1)d\ (n\in N)$.

(1)当n=1时上述等式为恒等式$a_1=a_1$.

当n=2时,$a_1+(2-1)d=a_1+(a_2-a_1)=a_2$,等式成立.

(2)假设当$n=k(k\geq2)$时命题成立,$a_k=a_1+(k-1)d$.由题设,有

$$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2},$$

$$S_{k+1}=\frac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2},\text{又}S_{k+1}=S_k+a_{k+1},$$

所以 $\frac{(k+1)(a_1+a_{k+1})}{2}=\frac{k(a_1+a_k)}{2}+a_{k+1}$.

把$a_k=a_1+(k-1)d$代入上式,得

$(k+1)(a_1+a_{k+1})=2ka_1+k(k-1)d+2a_{k+1}$.

整理得$(k-1)a_{k+1}=(k-1)a_1+k(k-1)d$.

∵$k\geq2$,

∴$a_{k+1}=a_1+kd$.即当n=k+1时等式成立.

由(1)和(2),等式对所有的自然数n成立,从而$\{a_n\}$是等差数列.

证法二:当$n\geq2$时,由题设,

$$S_{n-1}=\frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2},\ S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n(a_1+a_n)}{2}-\frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2}.$

同理有

$$a_{n+1}=\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}-\frac{n(a_1+a_n)}{2}.$$

从而

$$a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)(a_1+a_{n+1})}{2}-n(a_1+a_n)+\frac{(n-1)(a_1+a_{n-1})}{2},$$

整理得 $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$,**对于任意**$n\geq 2$**成立**.**因此**

$$a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}=\cdots=a_2-a_1,$$

从而 $\{a_n\}$ **是等差数列**.

1995年普通高等学校招生全国统一考试
数学
(理工农医类)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分 150 分,考试时间 120 分.

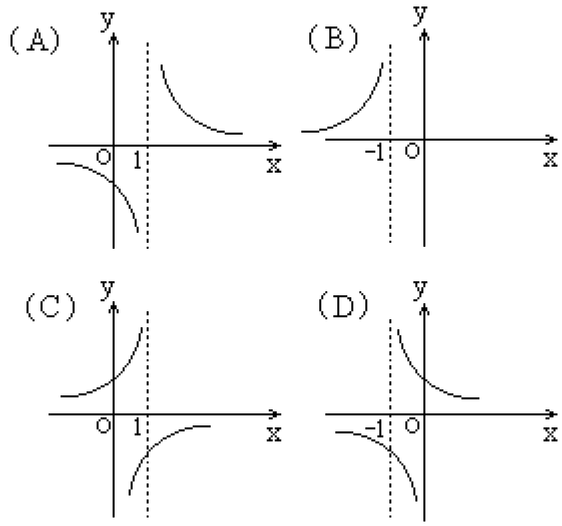
第Ⅰ卷(选择题共 65 分)

一、选择题(本大题共 15 小题:第 1—10 题每小题 4 分,第 11—15 题每小题 5 分,共 65 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1.已知 I 为全集,集合 M, $N\subset I$,若 $M\cap N=N$,则

A.$\overline{M}\supseteq\overline{N}$　B.$M\subseteq\overline{N}$　C.$\overline{M}\subseteq\overline{N}$　D.$M\supseteq\overline{N}$

2.函数$y=-\dfrac{1}{x+1}$的图象是



3.函数$y=4\sin(3x+\dfrac{\pi}{4})+3\cos(3x+\dfrac{\pi}{4})$的最小正周期是

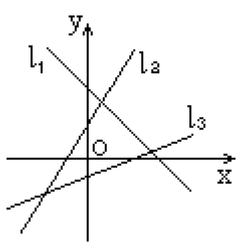
A.6π　B.2π　C.$\dfrac{2\pi}{3}$　D.$\dfrac{\pi}{3}$

4.正方体的全面积是 a^2,它的顶点都在球面上,这个球的表面积是

A.$\dfrac{\pi a^2}{3}$　B.$\dfrac{\pi a^2}{2}$　C.$2\pi a^2$　D.$3\pi a^2$

5.若图中的直线 l_1,l_2,l_3 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3,则

A.$k_1<k_2<k_3$　B.$k_3<k_1<k_2$　C.$k_3<k_2<k_1$　D.$k_1<k_3<k_2$



6.在$(1-x^3)(1+x)^{10}$的展开式中,x^5 的系数是

A.-297　B.-252　C.297　D.207

7.使 arcsinx>arccosx 成立的 x 的取值范围是

A.$(0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$　　B.$(\frac{\sqrt{2}}{2},1]$　　C.$[-1,\frac{\sqrt{2}}{2})$　　D.$[-1,0)$

8.双曲线 $3x^2-y^2=3$ 的渐近线方程是

A.$y=\pm 3x$　　B.$y=\pm\frac{1}{3}x$　　C.$y=\pm\sqrt{3}x$　　D.$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

9.已知θ是第三象限角,且 $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$,那么 $\sin2\theta$ 等于

A.$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B.$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　C.$\frac{2}{3}$　　D.$-\frac{2}{3}$

10.已知直线 l⊥平面α,直线 m⊂平面β,有下面四个命题:

①$\alpha /\!/ \beta \Rightarrow l\perp m$　　②$\alpha\perp\beta\Rightarrow l /\!/ m$

③$l /\!/ m\Rightarrow\alpha\perp\beta$　　④$l\perp m\Rightarrow\alpha /\!/ \beta$

其中正确的两个命题是

A.①与②　　B.③与④　　C.②与④　　D.①与③

11.已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在[0,1]上是 x 的减函数,则 a 的取值范围是

A.(0,1)　　B.(1,2)　　C.(0,2)　　D.[2,+∞)

12.等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n 与 T_n,

若 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 等于

A.1　　B.$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　C.$\frac{2}{3}$　　D.$\frac{4}{9}$

13.用 1,2,3,4,5 这五个数字,组成没有重复数字的三位数,其中偶数共有

A.24　　B.30　　C.40　　D.60

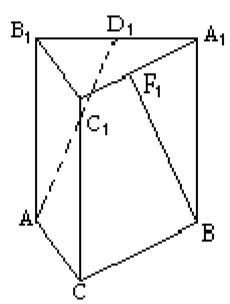
14.在极坐标系中,椭圆的二焦点分别在极点和点(2c,0),离心率为 e,则它的极坐标方程是

A. $\rho=\frac{c(1-e)}{1-e\cos\theta}$　　B. $\rho=\frac{c(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$

C. $\rho=\frac{c(1-e)}{e(1-e\cos\theta)}$　　D. $\rho=\frac{c(1-e^2)}{e(1-e\cos\theta)}$

15.如图,$A_1B_1C_1$-ABC 是直三棱柱,∠BCA=90°,点 D_1,F_1 分别是 A_1B_1,A_1C_1 的中点,若 $BC=CA=CC_1$,则 BD_1 与 AF_1 所成的角的余弦值是

A.$\frac{\sqrt{30}}{10}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{30}}{15}$　　D.$\frac{\sqrt{15}}{10}$



第II卷(非选择题,共85分)

二、填空题(本大题共5小题,每小题4分,共20分,把答案填在题中横线上)

16. 不等式$(\frac{1}{3})^{x^2-8} > 3^{-2x}$的解集是 ________ .

17. 已知圆台上、下底面圆周都在球面上,且下底面过球心,母线与底面所成的

角为$\frac{\pi}{3}$,则圆台的体积与球体积之比为______ .

18. 函数$y=\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos x$的最小值是________.

19. 直线 l 过抛物线 $y^2=a(x+1)(a>0)$的焦点,并且与 x 轴垂直,若 l 被抛物线截得的线段长为 4,则 a=_________________.

20. 四个不同的小球放入编号为 1,2,3,4 的四个盒中,则恰有一个空盒的放法共有_________________种(用数字作答).

三、解答题(本大题共 6 小题,共 65 分.解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

21. (本小题满分 7 分)

在复平面上,一个正方形的四个顶点按照逆时针方向依次为Z_1,Z_2,Z_3,O

(其中O为原点),已知Z_2对应复数$z_2=1+\sqrt{3}\,i$,求Z_1和Z_3对应的复数.

22. (本小题满分 10 分)

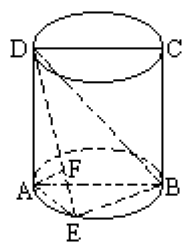
求 $\sin^2 20°+\cos^2 50°+\sin 20°\cos 50°$ 的值.

23. (本小题满分 12 分)

如图,圆柱的轴截面 ABCD 是正方形,点 E 在底面的圆周上,AF⊥DE,F 是垂足.

(1)求证:AF⊥DB;

(2)如果圆柱与三棱锥 D-ABE 的体积的比等于 3π,求直线 DE 与平面 ABCD 所成的角.



24. (本小题满分 12 分)

某地为促进淡水鱼养殖业的发展,将价格控制在适当范围内,决定对淡水鱼养值提供政府补贴.设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克,政府补贴为 t 元/千克.根据市场调查,当 8≤x≤14 时,淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 千克近似地满足关系:

$$P=1000(x+t-8)\quad (x\geq 8, t\geq 0),$$

$$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2}\quad (8\leq x\leq 14).$$

当 P=Q 时市场价格称为市场平衡价格.

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数,并求出函数的定义域;

(2)为使市场平衡价格不高于每千克 10 元,政府补贴至少为每千克多少元?

25.(本小题满分 12 分)

设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列,S_n是其前 n 项和.

(1)证明 $\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}$;

(2)是否存在常数 c>0,使得

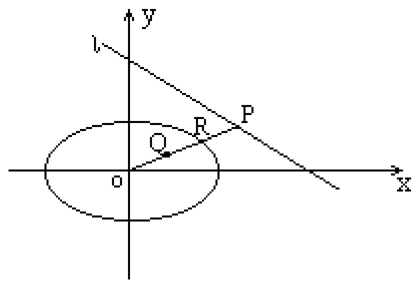
$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$$

成立?并证明你的结论.

26.(本小题满分 12 分)

已知椭圆$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$,直线$l$:$\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$. P是$l$上一点,射线OP交椭圆于点R,

又点 Q 在 OP 上且满足$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$.当点 P 在 l 上移动时,求点 Q 的轨迹方程,并说明轨迹是什么曲线.



(理工农医类)参考答案

一、选择题(本题考查基本知识和基本运算)

1.C	2.B	3.C	4.B	5.D
6.D	7.B	8.C	9.A	10.D
11.B	12.C	13.A	14.D	15.A

二、填空题(本题考查基本知识和基本运算)

16.$\{x\mid -2<x<4\}$　17.$\frac{7\sqrt{3}}{32}$　18.$-\frac{3}{4}$　19.4　20.144

三、解答题

21.本小题主要考查复数基本概念和几何意义,以及运算能力.

解:设 Z_1,Z_3 对应的复数分别为 z_1,z_3,依题设得

$$z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2[\cos(-\frac{\pi}{4})+i\sin(-\frac{\pi}{4})]$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}i)(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i)$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i,$$
$$z_3=\frac{1}{\sqrt{2}}z_2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}i)(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)$$
$$=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$$

22.本小题主要考查三角恒等式和运算能力.

解:

原式 $=\frac{1}{2}(1-\cos40°)+\frac{1}{2}(1+\cos100°)+\sin20°\cos50°$
$$=1+\frac{1}{2}(\cos100°-\cos40°)+\frac{1}{2}(\sin70°-\sin30°)$$
$$=\frac{3}{4}-\sin70°\sin30°+\frac{1}{2}\sin70°$$
$$=\frac{3}{4}.$$

23.本小题主要考查空间线面关系、圆柱性质、空间想象能力和逻辑推理能力.

(1)证明:根据圆柱性质,DA⊥平面 ABE.

∵$EB\subset$**平面**ABE,

∴DA⊥EB.

∵AB 是圆柱底面的直径,点 E 在圆周上,

∴AE⊥EB,又 AE∩AD=A,

故得 EB⊥平面 DAE.

∵$AF\subset$**平面**DAE,

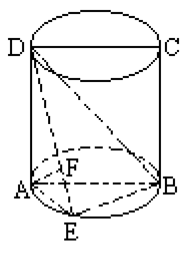
∴EB⊥AF.

又 AF⊥DE,且 EB∩DE=E,

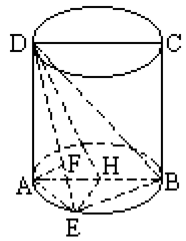
故得 AF⊥平面 DEB.

∵$DB\subset$**平面**DEB,

∴AF⊥DB.



(2)解:过点 E 作 EH⊥AB,H 是垂足,连结 DH.根据圆柱性质,平面 ABCD⊥平面 ABE,AB 是交线.且 EH⊂平面 ABE,所以 EH⊥平面 ABCD.



又 DH⊂平面 ABCD,所以 DH 是 ED 在平面 ABCD 上的射影,从而∠EDH 是 DE 与平面 ABCD 所成的角.

设圆柱的底面半径为 R,则 DA=AB=2R,于是

$V_{圆柱}=2\pi R^3$,

$$V_{D\text{-}ABE}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\triangle ABE}=\frac{2R^2}{3}\cdot EH.$$

由 $V_{圆柱}:V_{D\text{-}ABE}=3\pi$,得 EH=R,可知 H 是圆柱底面的圆心,

AH=R,

$$DH=\sqrt{DA^2+AH^2}=\sqrt{5}R,$$

$$\therefore \angle EDH=\operatorname{arcctg}\frac{DH}{EH}=\operatorname{arcctg}\sqrt{5}.$$

24.本小题主要考查运用所学数学知识和方法解决实际问题的能力,以及函数的概念、方程和不等式的解法等基础知识和方法.

解:(1)依题设有

$$1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2},$$

化简得 $5x^2+(8t-80)x+(4t^2-64t+280)=0$.

当判别式$\triangle=800-16t^2\geq 0$ 时,

可得 $x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}$.

由$\triangle\geq 0$,$t\geq 0$,$8\leq x\leq 14$,得不等式组:

① $\begin{cases}0\leq t\leq\sqrt{50}\\ 8\leq 8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 14;\end{cases}$

② $0\leq t\leq\sqrt{50}$,

$8\leq 8-\frac{4}{5}t-\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 14$

解不等式组①,得$0\leq t\leq\sqrt{10}$,不等式组②无解.故所求的函数关系式为

$$x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2},$$

函数的定义域为$[0,\sqrt{10}]$.

(2)为使 $x\leq 10$,应有

$$8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 10,$$

化简得 $t^2+4t-5\geq 0$.

解得 $t\geq 1$ 或 $t\leq -5$,由 $t\geq 0$ 知 $t\geq 1$.从而政府补贴至少为每千克 1 元.

25.本小题主要考查等比数列、对数、不等式等基础知识,考查推理能力以及分析问题和解决问题的能力.

(1)证明:设$\{a_n\}$的公比为 q,由题设 $a_1>0,q>0$.

(i)当 q=1 时,$S_n=na_1$,从而

$$S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2$$
$$=na_1\cdot(n+2)a_1-(n+1)^2a_1^2$$
$$=-a_1^2<0$$

(ii)当 $q\neq 1$ 时,$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$,从而

$$S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2$$
$$=\frac{a_1^2(1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q)^2}-\frac{a_1^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2}$$
$$=-a_1^2q^n<0.$$

由(i)和(ii)得 $S_n\cdot S_{n+2}<S^2_{n+1}$.根据对数函数的单调性,知

$$\lg(S_n\cdot S_{n+2})<\lg S_{n+1}^2,$$

即

$$\frac{\lg S_n+\lg S_{n+2}}{2}<\lg S_{n+1}.$$

(2)解:不存在.

证明一:要使

$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$$

成立,则有

$$\begin{cases}(Sn-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2, & ①\\ S_n-c>0. & ②\end{cases}$$

分两种情况讨论:

(i)当 q=1 时,

$$(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2$$
$$=(na_1-c)[(n+2)a_1-c]-[(n+1)a_1-c]^2$$
$$=-a_1^2<0.$$

可知,不满足条件①,即不存在常数 c>0,使结论成立.

(ii)当 $q\neq 1$ 时,若条件①成立,因为

$$(S_n-c)(S_{n+2}-c)-(S_{n+1}-c)^2$$
$$=[\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}-c][\frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q}-c]-[\frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q}-c]^2$$
$$=-a_1q^n[a_1-c(1-q)],$$

且 $a_1q^n\neq 0$,故只能有 $a_1-c(1-q)=0$,即 $c=\dfrac{a_1}{1-q}$.

此时,因为 $c>0,a_1>0$,所以 $0<q<1$.

但 $0<q<1$ 时,$S_n-\frac{a_1}{1-q}=\frac{a_1q^n}{1-q}<0$,不满足条件②,即不存在常数 $c>0$,使结论成立.

综合(ⅰ)、(ⅱ),同时满足条件①、②的常数 c>0 不存在,即不存在常数 c>0,使

$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c).$$

证法二:用反证法,假设存在常数 c>0,使

$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c),$$

则有

$$\begin{cases} S_n-c>0, & ① \\ S_{n+1}-c>0, & ② \\ S_{n+2}-c>0, & ③ \\ (S_n-c)(S_{n+2}-c)=(S_{n+1}-c)^2. & ④ \end{cases}$$

由④得

$$S_nS_{n+2}-S^2_{n+1}=c(S_n+S_{n+2}-2S_{n+1}).⑤$$

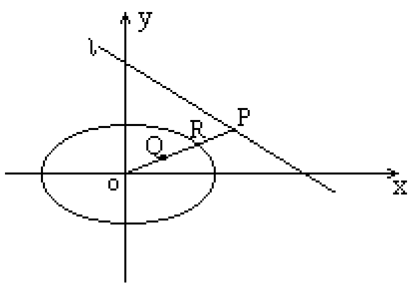
根据平均值不等式及①、②、③、④知

$$\begin{aligned} &S_n+S_{n+2}-2S_{n+1} \\ &=(S_n-c)+(S_{n+2}-c)-2(S_{n+1}-c) \\ &\geq 2\sqrt{(S_n-c)(S_{n+2}-c)}-2(S_{n+1}-c)=0. \end{aligned}$$

因为 c>0,故⑤式右端非负,而由(1)知,⑤式左端小于零,矛盾.故不存在常数 c>0,使

$$\frac{\lg(S_n-c)+\lg(S_{n+2}-c)}{2}=\lg(S_{n+1}-c)$$

26.本小题主要考查直线、椭圆的方程和性质,曲线与方程的关系,轨迹的概念和求法,利用方程判定曲线的性质等解析几何的基本思想和综合运用知识的能力.



解法一:由题设知点 Q 不在原点.设 P、R、Q 的坐标分别为(x_P,y_P),(x_R,y_R),(x,y),其中 x,y 不同时为零.

当点 P 不在 y 轴上时,由于点 R 在椭圆上及点 O、Q、R 共线,得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x_R^2}{24}+\dfrac{y_R^2}{16}=1,\\ \dfrac{y_R}{x_R}=\dfrac{y}{x}\end{cases}.$$

解得

$$\begin{cases}x_R^2=\dfrac{48x^2}{2x^2+3y^2}, & ①\\ y_R^2=\dfrac{48y^2}{2x^2+3y^2}. & ②\end{cases}$$

由于点 P 在直线 *l* 上及点 O、Q、P 共线,得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x_p}{12}+\dfrac{y_p}{8}=1\\ \dfrac{y_p}{x_p}=\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_p=\dfrac{24x}{2x+3y}, & ③\\ y_p=\dfrac{24y}{2x+3y}. & ④\end{cases}$$

当点 P 在 y 轴上时,经验证①—④式也成立.

由题设|OQ|·|OP|=|OR|²,得

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x_p^2+y_p^2}=\left(\sqrt{x_R^2+y_R^2}\right)^2$$

将①—④代入上式,化简整理得

$$\sqrt{\frac{24^2(x^2+y^2)^2}{(2x+3y)^2}}=\frac{48(x^2+y^2)}{2x^2+3y^2}.$$

因 x 与 x_p 同号或 y 与 y_p 同号,以及③、④知 2x+3y>0,故点 Q 的轨迹方程为

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}}=1(\text{其中}x,y\text{不同时为零}).$$

所以点Q的轨迹是以$(1,1)$为中心,长、短半轴分别为$\dfrac{\sqrt{10}}{2}$和$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$且长轴

与 x 轴平行的椭圆、去掉坐标原点.

解法二:由题设知点 Q 不在原点.设 P,R,Q 的坐标分别为 (x_p,y_p),(x_R,y_R),(x,y),其中 x,y 不同时为零.

设 OP 与 x 轴正方向的夹角为α,则有

x_p=|OP|cosα,y_p=|OP|sinα;

x_R=|OR|cosα,y_R=|OR|sinα;

x=|OQ|cosα,y=|OQ|sinα;

由上式及题设 $|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$,得

$$\begin{cases} x_P=\dfrac{|OP|}{|OQ|}x, & ① \\ y_P=\dfrac{|OP|}{|OQ|}y, & ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_R{}^2=\dfrac{|OP|}{|OQ|}x^2, & ③ \\ y_R{}^2=\dfrac{|OP|}{|OQ|}y^2, & ④ \end{cases}$$

由点 P 在直线 *l* 上,点 R 在椭圆上,得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{x_p}{12}+\dfrac{y_p}{8}=1, & ⑤ \\ \dfrac{x_R^2}{24}+\dfrac{y_R^2}{16}=1. & ⑥ \end{cases}$$

将①,②,③,④代入⑤,⑥,整理得点 Q 的轨迹方程为

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{5}{2}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{5}{3}}=1,\ (\text{其中}x,y\text{不同时为零}).$$

与 x 轴平行的椭圆、去掉坐标原点.

1995年普通高等学校招生全国统一考试
数学
(文史类)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.满分 150 分.考试时间120分钟.

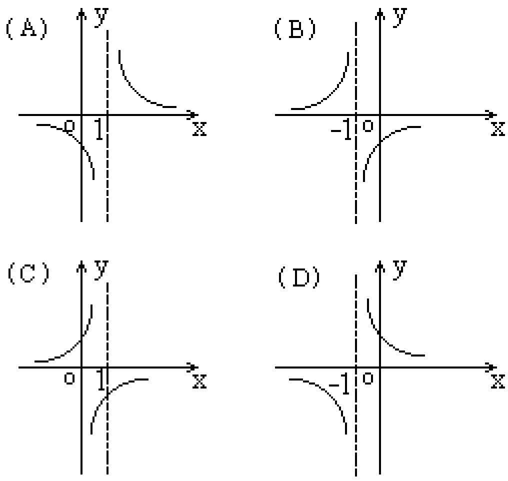
第Ⅰ卷(选择题共65分)

一、选择题(本大题共15小题;第1—10题每小题4分,第11—15题每小题5分,共65分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1．已知集合 I= {0,-1,-2,-3,-4} ,集合 M= {0,-1,-2,} ,N= {0,-3,-4,} ， 则$\overline{M}\cap N=$

A． {0}　 B． {-3,-4}　 C． {-1,-2}　 D．$\varnothing$

2．函数$y=\dfrac{1}{x+1}$的图象是



3．函数$y=4\sin(3x+\dfrac{\pi}{4})+3\cos(3x+\dfrac{\pi}{4})$的最小正周期是

A．6π　 B．2π　 C．$\dfrac{2\pi}{3}$　 D．$\dfrac{\pi}{3}$

4．正方体的全面积是 a^2,它的顶点都在球面上,这个球的表面积是

A．$\dfrac{\pi a^2}{3}$　 B．$\dfrac{\pi a^2}{2}$　 C．$2\pi a^2$　 D．$3\pi a^2$

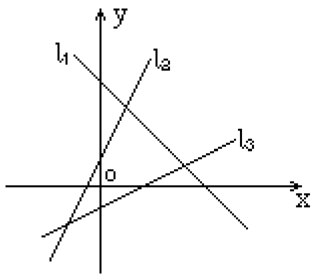
5．若图中的直线 l_1,l_2,l_3 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3,则

A．$k_1<k_2<k_3$

B．$k_3<k_1<k_2$

C．$k_3<k_2<k_1$

D．$k_1<k_3<k_2$



6．双曲线 $3x^2-y^2=3$ 的渐近线方程是

A．$y=\pm 3x$　　B．$y=\pm\frac{1}{3}x$

C．$y=\pm\sqrt{3}x$　　D．$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$

7．使 sinx≤cosx 成立的 x 的一个变化区间是

A．$[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$　　B．$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

C．$[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]$　　D．$[0,\pi]$

8．$x^2+y^2-2x=0$ 和 $x^2+y^2+4y=0$ 的位置关系是

A．相离　B．外切　C．相交　D．内切

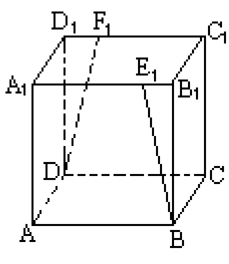
9．**已知θ是第三象限角,且**$\sin^4\theta+\cos^4\theta=\frac{5}{9}$.**那么**$\sin 2\theta$**等于**

A．$\frac{2\sqrt{2}}{3}$　B．$-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　C．$\frac{2}{3}$　D．$-\frac{2}{3}$

10．**如图**,$ABCD-A_1B_1C_1D_1$**是正方体**, $B_1E_1=D_1F_1=\frac{A_1B_1}{4}$,**则**$BE_1$**与**$DF_1$

所成的角的余弦值是

A．$\frac{15}{17}$　B　$\frac{1}{2}$　．C．$\frac{8}{17}$　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$



11．已知 $y=\log_a(2-x)$ 是 x 的增函数,则 a 的取值范围是

A．(0,2)　B．(0,1)　C．(1,2)　D．(2,+∞)

12．在 $(1-x^3)(1+x)^{10}$ 的展开式中,x^5 的系数是

A．-297　B．-252　C．297　D．207

13．已知直线 l⊥平面α,直线 m⊂平面β,有下面四个命题:

①$\alpha /\!/ \beta \Rightarrow l\perp m$　②$\alpha\perp\beta\Rightarrow l /\!/ m$

③$l /\!/ m\Rightarrow\alpha\perp\beta$　④$l\perp m\Rightarrow\alpha /\!/ \beta$

其中正确的两个命题是

A．①与② B．③与④ C．②与④ D．①与③

14．等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别是 S_n 与 T_n，若 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 等于

A．1 B．$\frac{\sqrt{6}}{3}$ C．$\frac{2}{3}$ D．$\frac{4}{9}$

15．用 1,2,3,4,5 这五个数字，组成没有重复数字的三位数，其中偶数共有

A．24 个 B．30 个 C．40 个 D．60 个

第 II 卷（非选择题共 85 分）

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 4 分，共 20 分，把答案填在题中的横线上）

16．方程 $\log_2(x+1)^2+\log_4(x+1)=5$ 的解是______.

17．已知圆台上、下底面圆周都在球面上，且下底面过球心，母线与底面所成角为 $\frac{\pi}{3}$，则圆台的体积与球体积之比为________.

18．函数 $y=\cos x+\cos(x+\frac{\pi}{3})$ 的最大值是________.

19．若直线 l 过抛物线 $y^2=4(x+1)$ 的焦点，并且与 x 轴垂直，则 l 被抛物线截得的线段长为________.

20．四个不同的小球放入编号为 1、2、3、4 的四个盒子中，则恰有一个空盒的放法共有________种（用数字作答）.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 65 分：解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤）

21．（本小题满分 7 分）

解方程 $3^{x+2}-3^{2-x}=80$.

22．（本小题满分 12 分）

设复数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\theta\in(\pi,2\pi)$，求复数 z^2+z 的模和辐角.

23．（本小题满分 10 分）

设 $\{a_n\}$ 是由正数组成的等比数列，S_n 是其前 n 项和，证明

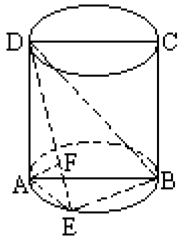
$$\frac{\log_{0.5}S_n+\log_{0.5}S_{n+2}}{2}>\log_{0.5}S_{n+1}.$$

24．（本小题满分 12 分）

如图，ABCD 是圆柱的轴截面，点 E 在底面的周长上，AF⊥DE，F 是垂足.

(1) 求证：AF⊥DB

(2) 如果 AB=a，圆柱与三棱锥 D-ABE 的体积比等于 3π，求点 E 到截面 ABCD 的距离.



25．(本小题满分 12 分)

某地为促进淡水鱼养殖业的发展,将价格控制在适当范围内,决定对淡水鱼养值提供政府补贴.设淡水鱼的市场价格为 x 元/千克,政府补贴为 t 元/千克.根据市场调查,当 8≤x≤14 时,淡水鱼的市场日供应量 P 千克与市场日需求量 Q 近似地满足关系:

$$P=1000(x+t-8) \quad (x\geq 8,t\geq 0),$$

$$Q=500\sqrt{40-(x-8)^2} \quad (8\leq x\leq 14).$$

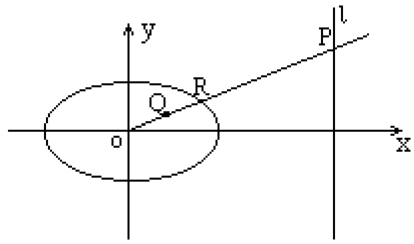
当 P=Q 时的市场价格为市场平衡价格.

(1)将市场平衡价格表示为政府补贴的函数,并求出函数的定义域:

(2)为使市场平衡价格不高于每千克 10 元,政府补贴至少每千克多少元?

26．(本小题满分 12 分)

已知椭圆$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$,**直线**$l: x=12$, P**是**$l$**上一点**,**射线**OP**交椭圆于点**R,**又点**Q**在**OP**上**,**且满足**$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$.**当点**P**在**l**上移动时**,**求点**Q**的轨迹方程**,**并说明轨迹是什么曲线**.



1995 年普通高等学校招生全国统一考试
数学试题(文史类)参考答案

一、选择题(本题考查基本知识和基本运算)

1．B	2．D	3．C	4．B	5．D
6．C	7．A	8．C	9．A	10．A
11．B	12．D	13．D	14．C	15．A

二、填空题(本题考查基本知识和基本运算)

16．3　　17．$\frac{7\sqrt{3}}{32}$

18．$\sqrt{3}$　　19．4　　20．144

三、解答题

21．本小题主要考查指数方程的解法及运算能力.

解：设 $y=3^x$，则原方程可化为

$$9y^2-80y-9=0.$$

解得 $y_1=9, y_2=-\frac{1}{9}$.

方程 $3^x=-\frac{1}{9}$ 无解.

由 $3^x=9$ 得 $x=2$，所以原方程的解为 $x=2$

22．本小题主要考查复数的有关概念，三角公式及运算能力.

解：

$$\begin{aligned}z^2+z&=(\cos\theta+i\sin\theta)^2+(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=\cos2\theta+i\sin2\theta+\cos\theta+i\sin\theta\\&=2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+i(2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})\\&=2\cos\frac{\theta}{2}(\cos\frac{3\theta}{2}+i\sin\frac{3\theta}{2})\\&=-2\cos\frac{\theta}{2}[\cos(-\pi+\frac{3\theta}{2})+i\sin(-\pi+\frac{3\theta}{2})].\end{aligned}$$

$\because \theta\in(\pi,2x)$，

$\therefore \frac{\theta}{2}\in(\frac{\pi}{2},\pi)$,

$\therefore -2\cos\frac{\theta}{2}>0.$

所以复数 z^2+z 的模为 $-2\cos\frac{\theta}{2}$;

辐角为 $(2k-1)\pi+\frac{3\theta}{2}\quad(k\in Z)$.

23．本小题主要考查等比数列、对数、不等式等基础知识以及逻辑推理能力.

证法一：设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题设知 $a_1>0,q>0$.

(1) 当 $q=1$ 时，$S_n=na_1$，从而

$$S_n\cdot S_{n+2}-S^2_{n+1}$$
$$=na_1(n+2)a_1-(n+1)^2a^2_1=-a^2_1<0.$$

(2) 当 $q\neq1$ 时，$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，从而

$$\begin{aligned}&S_n\cdot S_{n+2}-S_{n+1}^2\\&=\frac{a_1^2(1-q^n)(1-q^{n+2})}{(1-q^2)}-\frac{a_1^2(1-q^{n+1})^2}{(1-q)^2}\\&=-a_1^2q^n<0.\end{aligned}$$

由(1)和(2)得 $S_n\cdot S_{n+2}<S_{n+1}^2$.

根据对数函数的单调性，得

$\log_{0.5}(S_n \cdot S_{n+2}) > \log_{0.5} S_{n+1}^2$,

即 $\dfrac{\log_{0.5}S_n + \log_{0.5}S_{n+2}}{2} > \log_{0.5}S_{n+1}$

证法二：设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由题设知 $a_1>0, q>0$.

$\because S_{n+1}=a_1+qS_n$,

$S_{n+2}=a_1+qS_{n+1}$,

$\therefore S_n \cdot S_{n+2}-S^2_{n+1}$

$=S_n(a_1+qS_{n+1})-(a_1+qS_n)S_{n+1}$

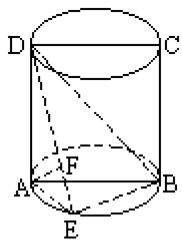
$=a_1(S_n-S_{n+1})$

$=-a_1a_{n+1}<0$.

即 $S_n \cdot S_{n+2} < S_{n+1}^2$.

(以下同证法一)

24．本小题主要考查空间线面关系、圆柱性质、空间想象能力和逻辑推理能力．



(1)证明：根据圆柱性质，$DA\perp$平面 ABE.

$\because EB\subset$平面 ABE,

$\therefore DA\perp EB$.

$\because AB$ 是圆柱底面的直径，点 E 在圆周上，

$\therefore AE\perp EB$，又 $AE\cap AD=A$，故得 $EB\perp$平面 DAE.

$\because AF\subset$平面 DAE，$\therefore EB\perp AF$.

又 $AF\perp DE$，且 $EB\cap DE=E$，故得 $AF\perp$平面 DEB.

$\because DB\subset$平面 DEB，$\therefore AF\perp DB$.

(2)解：设点 E 到平面 $ABCD$ 的距离为 d，记 $AD=h$，因圆柱轴截面 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD\perp AB$.

$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}AB\cdot AD=\frac{ah}{2},$$

$$\therefore V_{D\text{-}ABE}=V_{E\text{-}ABD}=\frac{d}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{6}dah.$$

又 $V_{圆柱}=\pi\left(\dfrac{AB^2}{2}\right)\cdot AD=\dfrac{\pi}{4}a^2h.$

由题设知 $\dfrac{\frac{\pi}{4}a^2h}{\frac{1}{6}dah}=3\pi$,

即 $d=\dfrac{a}{2}$.

25．本小题主要考查运用所学数学知识和方法解决实际问题的能力,以及函数的概念、方程和不等式的解法等基础知识和方法．

解：(1)依题设有

$$1000(x+t-8)=500\sqrt{40-(x-8)^2},$$

化简得 $5x^2+(8t-80)x+(4t^2-64t+280)=0$．

当判别式$\triangle=800-16t^2\geq 0$时,可得

$$x=8-\frac{4}{5}t\pm\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}.$$

由$\triangle\geq 0$,$t\geq 0$,$8\leq x\leq 14$,得不等式组：

$$①\begin{cases}0\leq t\leq\sqrt{50},\\ 8\leq 8-\dfrac{4}{5}t+\dfrac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 14;\end{cases}$$

$$②\begin{cases}0\leq t\leq\sqrt{50},\\ 8\leq 8-\dfrac{4}{5}t-\dfrac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 14.\end{cases}$$

解不等式组①,得 $0\leq t\leq\sqrt{10}$,不等式组②无解.故所求的函数关系式为．

$$x=8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2},$$

函数的定义域为$[0,\sqrt{10}]$.

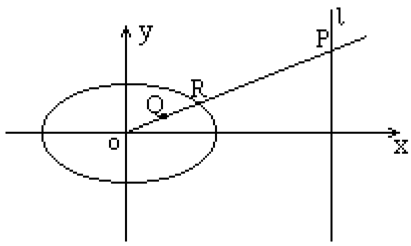
(2)为使 $x\leq 10$,应有

$$8-\frac{4}{5}t+\frac{2}{5}\sqrt{50-t^2}\leq 10,$$

化简得 $t^2+4t-5\geq 0$．

解得 $t\geq 1$ 或 $t\leq -5$,由于 $t\geq 0$ 知 $t\geq 1$,从而政府补贴至少为每千克 1 元．

26．本小题主要考查直线、椭圆的方程和性质,曲线与方程的关系,轨迹的概念和求法等解析几何的基本思想和综合运用知识的能力．



解:设点 P,Q,R 的坐标分别为$(12,y_p)$,(x,y),(x_R,y_R),由题设知 $x_R>0$,$x>0$．

由点 R 在椭圆上及点 O,Q,R 共线,得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{x_R^2}{24}+\dfrac{y_R^2}{16}=1,\\ \dfrac{y_R}{x_R}=\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_R^2 = \dfrac{48x^2}{2x^2+3y^2}, & ① \\ y_R^2 = \dfrac{48y^2}{2x^2+3y^2}. & ② \end{cases}$$

由点O, Q, P**共线，得**$\dfrac{y_p}{12} = \dfrac{y}{x}$**，即**

$$y_p = \frac{12y}{x} \qquad ③$$

由题设｜OQ｜·｜OP｜=｜OR｜²得

$$\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{12^2+y_p^2} = \left(\sqrt{x_R^2+y_R^2}\right)^2$$

将①、②、③式代入上式，整理得点 Q 的轨迹方程

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1 \qquad (x>0).$$

所以，点Q**的轨迹是以**$(1,0)$**为中心，长、短半轴长分别为**1**和**$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$**，且长轴在 x 轴上的椭圆、去掉坐标原点.**

1996年普通高等学校招生全国统一考试
数学(理工农医类)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.第Ⅰ卷1至2页.第Ⅱ卷3至8页.共150分.考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题共65分)

注意事项:

1.答第Ⅰ卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.

2.每小题选出答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案,不能答在试题卷上.

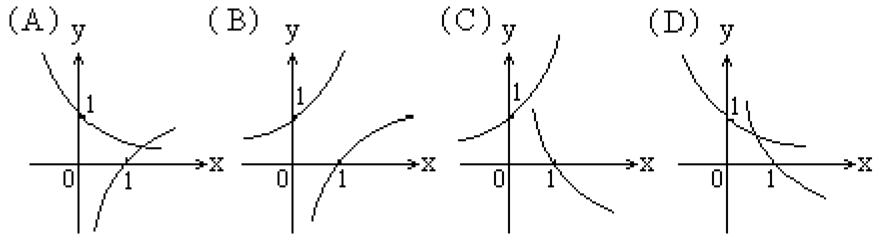
3.考试结束,监考人将本试卷和答题卡一并收回.

一.选择题:本大题共15小题;第1—10题每小题4分,第11—15题每小题5分,共65分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)已知全集 $I=N$,集合 $A=\{x\mid x=2n,n\in N\}$,$B=\{x\mid x=4n,n\in N\}$,则

(A)$I=A\cup B$　(B)$I=\overline{A}\cup B$　(C)$I=A\cup\overline{B}$　(D)$I=\overline{A}\cup\overline{B}$

(2)当 $a>1$ 时,在同一坐标系中,函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象是



(3)若 $\sin^2x>\cos^2x$,则 x 的取值范围是

(A)$\{x\mid 2k\pi-\frac{3}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{1}{4}\pi,k\in Z\}$

(B)$\{x\mid 2k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{5}{4}\pi,k\in Z\}$

(C)$\{x\mid k\pi-\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{1}{4}\pi,k\in Z\}$

(D)$\{x\mid k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi,k\in Z\}$

(4)复数 $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$ 等于

(A)$1+\sqrt{3}i$　　(B)$-1+\sqrt{3}i$

(C)$1-\sqrt{3}i$　　(D)$-1-\sqrt{3}i$

(5)如果直线 l、m 与平面 α、β、γ 满足:$l=\beta\cap\gamma$,$l\parallel\alpha$,$m\subset\alpha$ 和 $m\perp\gamma$,那么必有

(A)$\alpha\perp\gamma$ 且 $l\perp m$　　(B)$\alpha\perp\gamma$ 且 $m\parallel\beta$

(C)$m\parallel\beta$ 且 $l\perp m$　　(D)$\alpha\parallel\beta$ 且 $\alpha\perp\gamma$

(6)当 $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$,函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ 的

(A)最大值是1,最小值是 -1　　(B)最大值是1,最小值是 $-\frac{1}{2}$

(C)最大值是2,最小值是 -2　　(D)最大值是2,最小值是 -1

(7)椭圆 $\begin{cases}x=3+3\cos\varphi,\\ y=-1+5\sin\varphi\end{cases}$ 的两个焦点坐标是

(A)(-3,5),(-3,-3)　　(B)(3,3,),(3,-5)

(C)(1,1,),(-7,1)　　(D)(7,-1,),(-1,-1)

(8)若 $0<a<\frac{\pi}{2}$,则 $\arcsin[\cos(\frac{\pi}{2}+a)]+\arccos[\sin(\pi+a)]$ 等于

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{\pi}{2}-2a$ (D) $-\frac{\pi}{2}-2a$

(9)将边长为 a 的正方形 ABCD 沿对角线 AC 折起,使得 BD=a,则三棱锥 D-ABC 的体积为

(A) $\frac{a^3}{6}$　(B) $\frac{a^3}{12}$　(C) $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$　(D) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

(10)等比数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=-1$,前n项和为 S_n,若 $\frac{S_{10}}{S_5}=\frac{31}{32}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 等于

(A) $\frac{2}{3}$　(B) $-\frac{2}{3}$　(C)2　(D) -2

(11)椭圆的极坐标方程为 $\rho=\frac{3}{2-\cos\theta}$,则它在短轴上的两上顶点的极坐标是

(A)$(3,0),(1,\pi)$　　(B)$(\sqrt{3},\frac{\pi}{2}),(\sqrt{3},\frac{3\pi}{2})$

(C)$(2,\frac{\pi}{3}),(2,\frac{5\pi}{3})$　　(D)$(\sqrt{7},\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}),(\sqrt{7},2\pi-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2})$

(12)等差数列{a_n 的前 m 项和为 30,前 2m 项和为 100,则它的前 3m 项和为

(A)130　(B)170　(C)210　(D)260

(13)设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(0<a<b)$ 的半焦距为c,直线 l 过 $(a,0),(0,b)$ 两点。

已知原点到直线 l 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$,则双曲线的离心率为

(A) 2　(B) $\sqrt{3}$　(C) $\sqrt{2}$　(D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(14)母线长为 1 的圆锥体积最大时,其侧面展开图圆心角ψ等于

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$　(B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$　(C) $\sqrt{2}\pi$　(D) $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$

(15)设 f(x)是(-∞,+∞)上的奇函数,f(x+2)=f(x),当 0≤x≤1 时,f(x)=x,则 f(7.5)等于

(A)0.5　(B)-0.5

(C)1.5　　　　　　(D)-1.5

第II卷(非选择题共85分)

注意事项

1.第II卷共6页,用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.

2.答卷前将密封线内的项目填写清楚.

题号		20	21	22	23	24	25	总分
分数								

得分	评卷人

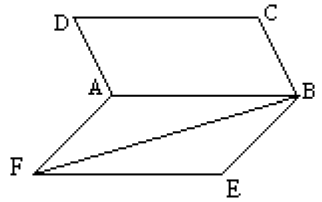
二.填空题:本大题共4小题;每小题4分,共16分.把答案填在题中横线上.

(16)已知圆 $x^2+y^2-6x-7=0$ 与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线相切.则 P=______________________.

(17)正六边形的中心和顶点共7个点,以其中3个点为顶点的三角形共有_______个(用数字作答).

(18)$tg20°+tg40°+\sqrt{3}tg20°tg40°$ 的值是____________.

(19)如图,正方形ABCD所在平面与正方形ABEF所在平面成60°的二面角,则异面直线AD与BF所成角的余弦值是_______________.



三.解答题:本大题共6小题;共69分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(20)(本小题满分11分)

解不等式 $\log_a(1-\frac{1}{x})>1$.

得分	评卷人

(21)(本小题满分为12分)

已知△ABC的三个内角A,B,C满足:$A+C=2B, \frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos A}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$.求 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的值.

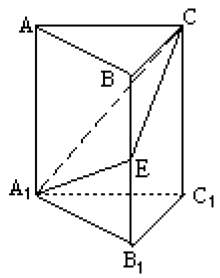
得分	评卷人

(22)(本小题满分为12分)

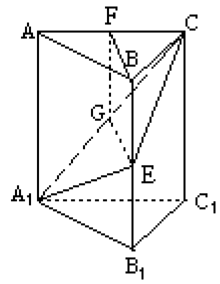
如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$E\in BB_1$, 截面 $A_1EC\perp$侧面 AC_1.

(Ⅰ)求证:$BE=EB_1$;

(Ⅱ)若 $AA_1=A_1B_1$;求平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角(锐角)的度数.



注意:在下面横线上填写适当内容,使之成为(Ⅰ)的完整证明,并解答(Ⅱ).



(Ⅰ)证明:在截面 A_1EC 内,过 E 作 $EG\perp A_1C$,G 是垂足.

① ∵____

∴$EG\perp$侧面 AC_1;取 AC 的中点 F,连结 BF,FG,由 $AB=BC$ 得 $BF\perp AC$,

② ∵______________________________

∴$BF\perp$侧面 AC_1;得 $BF\parallel EG$,BF、EG 确定一个平面,交侧面 AC_1 于 FG.

③ ∵________________________

∴$BE\parallel FG$,四边形 BEGF 是平行四边形,$BE=FG$,

④ ∵______________________________

∴$FG\parallel AA_1$,$\triangle AA_1C\backsim\triangle FGC$,

⑤ ∵______________________

∴$FG=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}BB_1$,即$BE=\frac{1}{2}BB_1$,故$BE=EB_1$.

(Ⅱ)解:

得分	评卷人

(23)(本小题满分 10 分)

某地现有耕地 10000 公顷,规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%,人均粮食占有量比现在提高 10%.如果人口年增长率为 1%,那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷(精确到 1 公顷)?

$$\left(\text{粮食单产}=\frac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}},\ \text{人均粮食占有量}=\frac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}\right)$$

得分	评卷人

(24)(本小题满分 12 分)

已知l_1、l_2是过点$P(-,\sqrt{2},0)$的两条互相垂直的直线,且l_1、l_2与双曲线$y^2-x^2=1$各有两个交点，分别为A_1、B_1和A_2、B_2.

(Ⅰ)求l_1的斜率k_1的取值范围;

(Ⅱ)若$|A_1B_1|=\sqrt{5}|A_2B_2|$,求$l_1$、$l_2$的方程

得分	评卷人

(25)(本小题满分 12 分)

已知 a、b、c 是实数,函数 $f(x)=ax^2+bx+c$,$g(x)=ax+b$,当$-1\le x\le 1$时,$|f(x)|\le 1$.

(Ⅰ)证明:$|c|\le 1$;

(Ⅱ)证明:当$-1\le x\le 1$时,$|g(x)|\le 2$;

(Ⅲ)设 $a>0$,当$-1\le x\le 1$时,$g(x)$的最大值为 2,求 $f(x)$.

1996 年普通高等学校招生全国统一考试
数学试题(理工农医类)参考解答及评分标准

说明:

一.本解答指出了每题要考查的主要知识和能力,并给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二.对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

三.解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四.只给整数分数.选择题和填空题不给中间分.

一.选择题:本题考查基本知识和基本运算.第(1)-(10)题每小题 4 分,第(11)-(15)题每小题 5 分.满分 65 分.

(1)C	(2)A	(3)D	(4)B	(5)A
(6)D	(7)B	(8)A	(9)D	(10)B
(11)C	(12)C	(13)A	(14)D	(15)B

二.填空题:本题考查基本知识和基本运算.每小题 4 分,满分 16 分.

(16)2　(17)32　(18)$\sqrt{3}$　(19)$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(20)本小题考查对数函数性质,对数不等式的解法,分类讨论的方法和运算能力.满分 11 分.

解:(Ⅰ)当 $a>1$ 时,原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases}1-\dfrac{1}{x}>0,\\ 1-\dfrac{1}{x}>a.\end{cases}$$ 2分

由此得$1-a>\frac{1}{x}$.

因为 1-a<0,所以 x<0,

$\therefore \frac{1}{1-a}<x<0.$ 5分

(Ⅱ)当 0<a<1 时,原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases}1-\frac{1}{x}>0, ① \\ 1-\frac{1}{x}<a. ②\end{cases}$$ 7分

由①得,x>1 或 x<0,

由②得,$0<x<\frac{1}{1-a}$,

$\therefore \quad 1<x<\frac{1}{1-a}.$ 10分

综上,当$a>1$时,不等式的解集为$\{x\mid \frac{1}{1-a}<x<0\}$;

当$0<a<1$时,不等式的解集为$\{x\mid 1<x<\frac{1}{1-a}\}$. 11分

(21)本小题考查三角函数基础知识,利用三角公式进行恒等变形和运算的能力.满分 12 分.

解法一:由题设条件知 B=60°,A+C=120°. 2 分

$\because \frac{-\sqrt{2}}{\cos 60°}=-2\sqrt{2},$

$\therefore \frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}.$

将上式化为$\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C.$

利用和差化积及积化和差公式,上式可化为

$$2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=-\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)].$$

6分

将$\cos\frac{A+C}{2}=\cos60°=\frac{1}{2},\cos(A+C)=-\frac{1}{2}$代入上式得

$$\cos(\frac{A-C}{2})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\cos(A-C).$$

将$\cos(A-C)=2\cos^2(\frac{A-C}{2})-1$代入上式并整理得

$$4\sqrt{2}\cos^2(\frac{A-C}{2})+2\cos(\frac{A-C}{2})-3\sqrt{2}=0,$$ 9分

$$2\cos(\frac{A-C}{2}-\sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3)=0,$$

∵ $2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3\neq0,$

∴ $2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2}=0.$

从而得 $\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$ 12分

解法二:由题设条件知 B=60°,A+C=120°.

设 $\alpha=\frac{A-C}{2.}$,则$A-C=2\alpha$,可得$A=60°+\alpha,C=60°-\alpha.$ 3分

所以 $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\cos(60°+\alpha)}+\frac{1}{\cos(60°-\alpha)}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}+\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}.$$ 7分

依题设条件有 $\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=\frac{-\sqrt{2}}{\cos B}$

∵ $\cos B=\frac{1}{2}$

∴ $\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=-2\sqrt{2}.$

整理得 $4\sqrt{2}\cos^2\alpha+2\cos\alpha-3\sqrt{2}=0,$ 9分

$$(2\cos\alpha - \sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\alpha + 3) = 0,$$

∵ $2\sqrt{2}\cos\alpha + 3 \neq 0,$

∴ $2\cos\alpha - \sqrt{2} = 0.$

从而得 $\cos\frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 12**分**

(22)本小题考查空间线面关系,正三棱柱的性质,逻辑思维能力,空间想象能力及运算能力.满分 12 分.

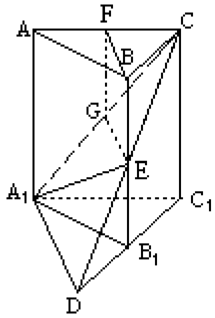
(Ⅰ)①∵面 A_1EC⊥侧面 AC_1, **2 分**

②∵面 ABC⊥侧面 AC_1, **3 分**

③∵BE∥侧面 AC_1, **4 分**

④∵BE∥AA_1, **5 分**

⑤∵AF=FC, **6 分**



(Ⅱ)解:分别延长 CE、C_1B_1 交于点 D,连结 A_1D.

$$\because EB_1 \parallel CC_1, EB_1 = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}CC_1,$$

$$\therefore DB_1 = \frac{1}{2}DC_1 = B_1C_1 = A_1B_1,$$

$$\because \angle B_1A_1C_1 = \angle B_1C_1A_1 = 60°,$$

$$\angle DA_1B_1 = \angle A_1DB_1 = \frac{1}{2}(180° - \angle DB_1A_1) = 30°,$$

$\therefore \angle DA_1C_1 = \angle DA_1B_1 + \angle B_1A_1C_1 = 90°$,**即**$DA_1 \perp A_1C_1$. 9**分**

∵CC_1⊥面 $A_1C_1B_1$,即 A_1C_1 是 A_1C 在平面 A_1C_1D 上的射影,根据三垂线定理得 DA_1⊥A_1C,

所以∠CA_1C_1 所求二面角的平面角. **11 分**

∵CC_1=AA_1=A_1B_1=A_1C_1,∠A_1C_1C=90°,

∴∠CA_1C_1=45°,即所求二面角为 45°. **12 分**

(23)本小题主要考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力,指数函数和二项式定理的应用,近似计算的方法和能力.满分 10 分.

解:设耕地平均每年至多只能减少 X 公顷,又设该地区现有人口为 P 人,粮食单产为 M 吨/公顷.

依题意得不等式

$$\frac{M\times(1+22\%)\times(10^4-10x)}{P\times(1+1\%)^{10}}\geq\frac{M\times10^4}{P}\times(1+10\%).$$ 5分

化简得 $x\leq10^3\times[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}]$. 7分

$\because 10^3\times[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}]$

$=10^3\times[1-\frac{1.1}{1.22}\times(1+C_{10}^1\times0.01+C_{10}^2\times0.01^2\cdots)]$

$\approx10^3\times[1-\frac{1.1}{1.22}\times1.1045]$

$\approx4.1.$ 9分

$\therefore x\leq4$（公顷）

答：按规划该地区耕地平均每年至多只能减少4公顷. 10分

(24)本小题主要考查直线与双曲线的性质，解析几何的基本思想，以及综合运用知识的能力.满分12分.

解:(Ⅰ)依题设，l_1、l_2的斜率都存在.因为l_1过点$P(-\sqrt{2},0)$且与双曲线有两个交点，故方程组

$$\begin{cases}y=k_1(x+\sqrt{2})(k_1\neq0)\\y^2-x^2=1\end{cases},\qquad ①$$ 1分

有两个不同的解.在方程组①中消去y，整理得

$$(k_1^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_1^2x+2k_1^2-1=0\qquad ②$$

若$k_1^2-1=0$，则方程组①只有一个解，即l_1与双曲线只有一个交点，与题设矛盾.故$k_1^2-1\neq0$，即$|k_1|\neq1$.方程②的判别式为

$$\triangle_1=(2\sqrt{2}k_1^2)^2-4(k_1^2-1)(2k_1^2-1)=4(3k_1^2-1).$$

设l_2的斜率为k_2，因为l_2过点$P(-\sqrt{2},0)$且与双曲线有两个交点，故方程组

$$\begin{cases}y=k_2(x+\sqrt{2})(k_2\neq0),\\y^2-x^2=1,\end{cases}\qquad ③$$

有两个不同的解.在方程组③中消去y，整理得

$$(k_2^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_2^2x+2k_2^2-1=0\qquad ④$$

同理有 $k_2^2-1\neq0,\triangle_2=4(3k_2^2-1)$

又因为 $l_1\perp l_2$，所以有 $k_1\cdot k_2=-1$. 4分

于是，l_1、l_2与双曲线各有两个交点，等价于

$$\begin{cases}3k_1^2-1>0,\\3k_2^2-1>0,\\k_1\cdot k_2=-1,\\|k_1|\neq1.\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{3} < |k_1| < \sqrt{3},\\ |k_1| \neq 1.\end{cases}$ 6分

$\therefore k_1 \in (-\sqrt{3},-1) \cup (-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\dfrac{\sqrt{3}}{3},1) \cup (1,\sqrt{3}).$ 7分

(Ⅱ)设 $A_1(x_1y_1)$,$B_1(x_2y_2)_1$.由方程②知

$$x_1 + x_2 = \frac{-2\sqrt{2}k_1^2}{k_1^2-1},\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{2k_1^2-1}{k_1^2-1}.$$

$\therefore |A_1B_1|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

$$= (1+k_1^2)(x_1-x_2)^2$$

$$= 4\frac{(1+k_1^2)(3k_1^2-1)}{(k_1^2-1)^2} \quad ⑤ \qquad 9分$$

同理,由方程④可求得 $|A_2B_2|^2$,整理得 $|A_2B_2|^2 = 4\dfrac{(1+k_1^2)(3-k_1^2)}{(1-k_1^2)^2}.$ ⑥

由 $|A_1B_1| = \sqrt{5}|A_2B_2|$,得 $|A_1B_1|^2 = 5|A_2B_2|^2$

将⑤、⑥代入上式得

$$\frac{4(1+k_1^2)(3k_1^2-1)}{(k_1^2-1)^2} = 5\times\frac{4(1+k_1^2)(3-k_1^2)}{(1-k_1^2)^2}.$$

解得 $k_1 \pm\sqrt{2}$

取 $k_1=\sqrt{2}$ 时, l_1:$y=\sqrt{2}(x+\sqrt{2})$,l_2:$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+\sqrt{2})$;

取 $k_1=-\sqrt{2}$ 时,l_1:$y=-\sqrt{2}(x+\sqrt{2})$,l_2:$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+\sqrt{2})$. 12分

(25)本小题主要考查函数的性质、含有绝对值的不等式的性质，以及综合运用数学知识分析问题与解决问题的能力。满分 12 分.

(Ⅰ)证明:由条件当 $-1\le x\le 1$ 时,$|f(x)|\le 1$,取 $x=0$ 得

$|c|=|f(0)|\le 1$,

即 $|c|\le 1$. 2 分

(Ⅱ)证法一:

当 $a>0$ 时,$g(x)=ax+b$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数,

$\therefore g(-1)\le g(x)\le g(1)$,

$\because |f(x)|\le 1(-1\le x\le 1)$,$|c|\le 1$,

$\therefore g(1)=a+b=f(1)-c\le |f(1)|+|c|\le 2$,

$g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\ge -(|f(-1)|+|c|\ge -2$,

由此得 $|g(x)|\le 2$; 5 分

当 $a<0$ 时,$g(x)=ax+b$ 在 $[-1,1]$ 上是减函数,

$\therefore g(-1)\ge g(x)\ge g(1)$,

$\because |f(x)|\le 1(-1\le x\le 1)$,$|c|\le 1$,

$\therefore g(-1)=-a+b=-f(-1)+c\le|f(-1)|+|c|\le 2$,

$g(1)=a+b=f(1)-c\ge -(|f(1)|+|c|)\ge -2$,

由此得 $|g(x)|\le 2$; 7 分

当 $a=0$ 时, $g(x)=b$, $f(x)=bx+c$.

$\because -1\le x\le 1$,

$\therefore |g(x)|=|f(1)-c|\le|f(1)|+|c|\le 2$.

综上得 $|g(x)|\le 2$. 8 分

证法二:

由 $x=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4}$, 可得

$$
\begin{aligned}
g(x) &= ax+b \\
&= a[(\frac{x+1}{2})^2-(\frac{x+1}{2})^2]+b(\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{2}) \\
&= [a(\frac{x+1}{2})^2+b(\frac{x+1}{2})+c]-[a(\frac{x-1}{2})^2+b(\frac{x-1}{2})+c] \\
&= f(\frac{x+1}{2})-f(\frac{x-1}{2}),
\end{aligned}
$$
6分

当 $-1\le x\le 1$ 时, 有 $0\le\dfrac{x+1}{2}\le 1, -1\le\dfrac{x-1}{2}\le 0$,

根据含绝对值的不等式的性质,得

$$|f(\frac{x+1}{2})-f(\frac{x-1}{2})|\le|f(\frac{x+1}{2})|+|f\frac{x-1}{2})|\le 2.$$

即 $|g(x)|\le 2$. 8 分

(III)因为 $a>0$, $g(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数,当 $x=1$ 时取得最大值 2,

即 $g(1)=a+b=f(1)-f(0)=2$.①

$\because -1\le f(0)=f(1)-2\le 1-2=-1$,

$\therefore c=f(0)=-1$. 10 分

因为当 $-1\le x\le 1$ 时, $f(x)\ge -1$, 即 $f(x)\ge f(0)$,

根据二次函数的性质,直线 $x=0$ 为 $f(x)$ 的图象的对称轴,由此得

$-\dfrac{b}{2a}=0$, 即 $b=0$.

由① 得 $a=2$.

所以 $f(x)=2x^2-1$. 12 分

1996年普通高等学校招生全国统一考试
数学(文史类)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.第Ⅰ卷1至2页.第Ⅱ卷3至8页.共150分.考试时间120分种.

第Ⅰ卷(选择题共65分)

注意事项:

1.答案Ⅰ卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.

2.每小题选出答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,在选涂其它答案,不能答在试题卷上.

3.考试结束,监考人将本试卷和答题卡一并收回.

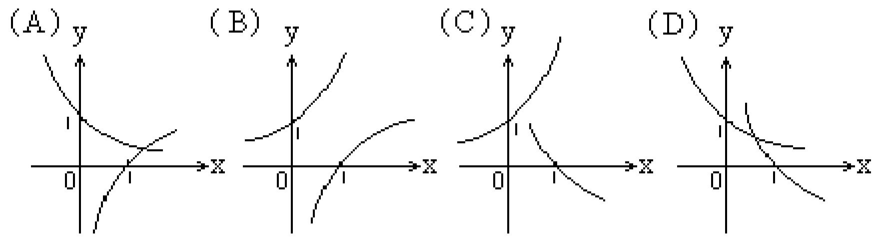
一.选择题:本大题共15小题;第1—10题每小题4分,第11—15题每小题5分,共65分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)设全集 I= {1,2,3,4,5,6,7} ,集合 A= {1,3,5,7} ,B= {3,5} .则

(A) $I = A\cup B$　　(B) $I = \overline{A}\cup B$

(C) $I = A\cup \overline{B}$　　(D) $I = \overline{A}\cup \overline{B}$

(2)当 a>1 时,在同一坐标系中.函数 $y=a^{-x}$ 与 $y=\log_a x$ 的图象是



(3)若 $\sin^2x>\cos^2x$,则 x 的取值范围是

(A) $\{x\mid 2k\pi-\frac{3}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{1}{4}\pi,k\in Z\}$

(B) $\{x\mid 2k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<2k\pi+\frac{5}{4}\pi,k\in Z\}$

(C) $\{x\mid k\pi-\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{1}{4}\pi,k\in Z\}$

(D) $\{x\mid k\pi+\frac{1}{4}\pi<x<k\pi+\frac{3}{4}\pi,k\in Z\}$

(4) 复数 $\frac{(2+2i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5}$ 等于

(A) $1+\sqrt{3}i$　　(B) $-1+\sqrt{3}i$　　(C) $1-\sqrt{3}i$　　(D) $-1-\sqrt{3}i$

(5)6名同学排成一排,其中甲、乙两人必须排在一起的不同排法有

(A)720种　(B)360种　(C)240种　(D)120种

(6)已知α是第三象限角且$\sin\alpha=-\frac{24}{25}$,则$tg\frac{\alpha}{2}=$

(A)$\frac{4}{3}$ (B)$\frac{3}{4}$ (C)$-\frac{3}{4}$ (D)$-\frac{4}{3}$

(7)如果直线l、m与平面α、β、γ满足:$l=\beta\cap\gamma$,l∥α,$m=\alpha$和$m\perp\gamma$,那么必有

(A)α⊥γ且l⊥m (B)α⊥γ且m∥β
(C)m∥β且l⊥m (D)α∥β且α⊥γ

(8)当$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$时,函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$的

(A)最大值是1,最小值是-1 (B)最大值是1,最小值是$-\frac{1}{2}$
(C)最大值是2,最小值是-2 (D)最大值是2,最小值是-1

(9)中心在原点,准线方程为$x=\pm4$,离心率为$\frac{1}{2}$的椭圆方程是

(A)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ (B)$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

(C)$\frac{x^2}{4}+y^2=1$ (D)$x^2+\frac{y^2}{4}=1$

(10)圆锥母线长为1,侧面展开图圆心角为240°,该圆锥的体积是

(A)$\frac{2\sqrt{2}}{81}\pi$ (B)$\frac{8}{81}\pi$ (C)$\frac{4\sqrt{5}}{81}\pi$ (D)$\frac{10}{81}\pi$

(11)椭圆$25x^2-150x+9y^2+18y+9=0$的两个焦点坐标是
(A)(-3,5),(-3,-3) (B)(3,3),(3,-5)
(C)(1,1),(-7,1) (D)(7,-1),(-1,-1)

(12)将边长为a的正方形ABCD沿对角线AC折起,使得BD=a,则三棱锥D-ABC的体积为

(A)$\frac{a^3}{6}$ (B)$\frac{a^3}{12}$

(C)$\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$ (D)$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

(13)等差数列$\{a_n\}$的前m项和为30,前2m项和为100,则它的前3m项和为
(A)130 (B)170
(C)210 (D)260

(14)设双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(0<a<b)$的半焦距为c,直线$l$过(a,0),(0,b)两点.已知原点到直线$l$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{4}c$.则双曲线的离心率为

(A)2 (B)$\sqrt{3}$ (C)$\sqrt{2}$ (D)$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(15)设 f(x)是(-∞,+∞)上的奇函数,f(x+2)=f(x),当 $0\le x\le 1$ 时,f(x)=x,则 f(7,5)等于

(A)0.5　　(B)-0.5

(C)1.5　　(D)-1.5

第II卷(非选择题共85分)

注意事项:

1.第II卷共6页,用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.

2.答卷前将密封线内的项目填写清楚.

题号	二	三						总分
		20	21	22	23	24	25	
分数								

得分	评卷人

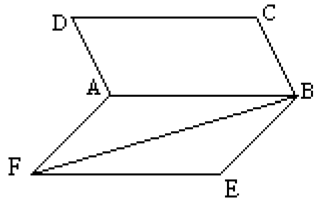
二.填空题:本大题共4小题;每小题4分,共16 分.把答案填在题中横线上.

(16)已知点(-2,3)与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点的距离是5,则 p=______

(17)正六边形的中心和顶点共7个点,以其中3个点为顶点的三角形共有______个.(用数字作答)

(18)$tg20°+tg40°+\sqrt{3}tg20°tg40°$ 的值是__________.

(19)如图,正方形ABCD所在平面与正方形ABEF所在平面成60°的二面角,则异面直线AD与BF所成角的余弦值是________.



三.解答题:本大题共6小题;共69分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(20)(本小题满分11分)

解不等式 $\log_a(x+1-a)>1$.

得分	评卷人

(21)(本小题满分12分)

设等比数列{a_n}的前n项和为 S_n.若 $S_3+S_6=2S_9$,求数列的公比q.

得分	评卷人

(22)(本小题满分 12 分)

已知△ABC的三个内角A, B, C满足: $A + C = 2B, \frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\cos C} = -\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$.

求$\cos\frac{A-C}{2}$的值.

得分	评卷人

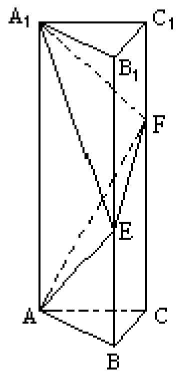
(23)(本小题满分 12 分)

【注意:本题的要求是,参照标号①的写法,在标号②、③、④、⑤的横线上填写适当步骤,完成(Ⅰ)证明的全过程;并解答(Ⅱ).】

如图,在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中, $AB = \frac{1}{3}AA_1 = a$. E、F分别是BB_1、CC_1上的点,且$BE = a, CF = 2a$.

(Ⅰ)求证:面 AEF⊥面 ACF;

(Ⅱ)求三棱锥 A_1-AEF 的体积.



(Ⅰ)证明:

① ∵BE=a,CF=2a,BE∥CF,延长 FE 与 CB 延长线交于 D,连结 AD.
∴△DBE∽△DCF

---

② ∴ $\frac{DB}{DC} = \frac{BE}{CF}$.

---

③ ∴DB=AB.

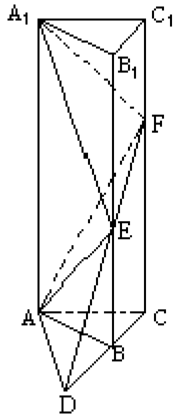
---

④ ∴DA⊥AC.

---

⑤ ∴FA⊥AD.

∴面 AEF⊥面 ACF.



(Ⅱ)解:

得分	评卷人

(24)(本小题满分 10 分)

某地现有耕地 10000 公顷.规划 10 年后粮食单产比现在增加 22%,人均粮食占有量比现在提高 10%.如果人口年增长率为 1%,那么耕地平均每年至多只能减少多少公顷(精确到 1 公顷)?

(**粮食单产** $=\dfrac{\text{总产量}}{\text{耕地面积}}$,**人均粮食占有量** $=\dfrac{\text{总产量}}{\text{总人口数}}$)

得分	评卷人

(25)(本小题满分 12 分)

已知l_1、l_2**是过点**$p(-\sqrt{2},0)$**的两条互相垂直的直线,且**l_1、l_2**与双曲线**
$y^2-x^2=1$

各有两个交点,分别为 A_1、B_1 和 A_2、B_2.

(Ⅰ)求 l_1 的斜率 k_1 的取值范围;

(Ⅱ)若 A_1 恰是双曲线的一个顶点,求$|A_2B_2|$的值.

1996 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题(文史类)参考解答及评分标准

说明:

一.本解答指出了每题要考查的主要知识和能力,并给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二.对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

三.解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四.只给整数分数,选择题和填空题不给中间分.

一.选择题:本题考查基本知识和基本运算,第(1)—(10)题每小题 4 分,第(11)—(15)题每小题 5 分.满分 65 分.

(1)C　(2)A　(3)D　(4)B　(5)C
(6)D　(7)A　(8)D　(9)A　(10)C
(11)B　(12)D　(13)C　(14)A　(15)B

二.填空题:本题考查基本知识和基本运算.每小题 4 分,满分 16 分.

(16)4　(17)32　(18)$\sqrt{3}$　(19)$\frac{\sqrt{2}}{4}$

三.解答题

(20)本小题考查对数函数性质,对数不等式的解法,分类讨论的方法和运算能力,满分 11 分.

解:(Ⅰ)当 a>1 时,原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases} x+1-a>0, \\ x+1-a>a \end{cases}$$ 2分

解得　x>2a-1.　5 分

(Ⅱ)当 0<a<1 时,原不等式等价于不等式组:

$$\begin{cases} x+1-a>0, \\ x+1-a<a. \end{cases}$$ 7分

解得　a-1<x<2a-1.　10 分

综上,当 a>1 时,不等式的解集为 {x|x>2a-1};

当 0<a<1 时,不等式的解集为 {x|a-1<x<2a-1}.　11 分

(21)本小题主要考查等比数列的基础知识,逻辑推理能力和运算能力.满分 12 分.

解:若 q=1,则有 $S_3=3a_1$,$S_6=6a_1$,$S_9=9a_1$.但 $a_1\neq0$,即得 $S_3+S_6\neq2S_9$,与题设矛盾,故 $q\neq1$.　2 分

又依题意 $S_3+S_6=2S_9$ 可得

$$\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=2\cdot\frac{a_1(1-q^9)}{1-q},$$ 6分

整理得 $q^3(2q^6-q^3-1)=0$.

由 $q\neq0$ 得方程　$2q^6-q^3-1=0$.

$(2q^3+1)(q^3-1)=0$,　9 分

∵　$q\neq1$,$q^3-1\neq0$,　∴$2q^3+1=0$,

$$\therefore\ q=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$ 12分

(22)本小题考查三角函数基础知识,利用三角公式进行恒等变形和运算能力.满分 12 分.

解法一:由题设条件知 B=60°,A+C=120°.　2 分

$$\because\ \frac{-\sqrt{2}}{\cos60°}=-2\sqrt{2},\quad \therefore\ \frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}$$

将上式化为　$\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C.$

利用和差化积及积化和差公式,上式可化为

$$2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=-\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)].$$ 6分

将$\cos\frac{A+C}{2}=\cos 60°=\frac{1}{2},\cos(A+C)=-\frac{1}{2}$代入上式得

$$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\cos(A-C).$$

将$\cos(A-C)=2\cos^2(\frac{(A-C)}{2})-1$代入上式并整理得

$$4\sqrt{2}\cos^2(\frac{A-C}{2})+2\cos\frac{A-C}{2}-3\sqrt{2}=0,$$ 9分

$$(2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3)=0.$$

$\because\ 2\sqrt{2}\cos\frac{A-C}{2}+3\neq 0,$

$\therefore\ 2\cos\frac{A-C}{2}-\sqrt{2}=0.$

从而得 $\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$ 12分

解法二:由题设条件知 B=60°,A+C=120°.

设$\alpha=\frac{A-C}{2}$,则$A-C=2a$,可得$A=60°+\alpha,C=60°-\alpha.$ 3分

所以$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=\frac{1}{\cos(60°+\alpha)}+\frac{1}{\cos(60°-\alpha)}$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}+\frac{1}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha}$$

$$=\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}.$$ 7分

依题设条件有 $\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=\frac{-\sqrt{2}}{\cos B},$

$\because\ \cos B=\frac{1}{2},$

$\therefore\ \frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\frac{3}{4}}=-2\sqrt{2}.$

整理得 $4\sqrt{2}\cos^2\alpha+2\cos\alpha-3\sqrt{2}=0$, 9分

$(2\cos\alpha-\sqrt{2})(2\sqrt{2}\cos\alpha+3)=0$,

∵ $2\sqrt{2}\cos\alpha+3\neq 0$,

∴ $2\cos\alpha-\sqrt{2}=0$,

从而得 $\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 12分

(23)本小题考查空间线面关系,正三棱柱的性质,逻辑思维能力,空间想象能力及运算能力.满分 12 分.

(Ⅰ)②∵BE:CF=1:2,

∴DC=2DB,

∴DB=BC, 1分

③∵△ABD 是等腰三角形,

且∠ABD=120°,

∴∠BAD=30°,

∴∠CAD=90°, 3分

④∵FC⊥面 ACD,

∴CA 是 FA 在面 ACD 上的射影,

且 CA⊥AD, 5分

⑤∵FA∩AC=A,

DA⊥面ACF, 而DA ⊂ 面ADF,

∴面 ADF⊥面 ACF. 7分

(Ⅱ)解:∵$V_{A_1-AEF}=V_{E-AA_1F}$.

在面 $A_1B_1C_1$ 内作 $B_1G\perp A_1C_1$,垂足为 G.

$B_1G=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

面 $A_1B_1C_1$⊥面 A_1C,

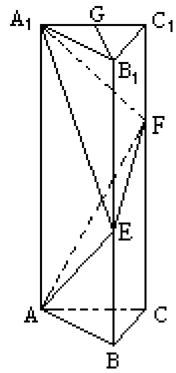
∴B_1G⊥面 A_1C,

∵$E\in BB_1$,而 BB_1∥面 A_1C,

∴三棱锥 $E-AA_1F$ 的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 9分

$S_{\Delta A_1AF}=\frac{1}{2}\cdot AA_1\cdot AC=\frac{3}{2}a^2$. 10分

∴ $V_{A_1-AEF}=V_{E-AA_1F}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3$. 12分



(24)本小题主要考查运用数学知识和方法解决实际问题的能力,指数函数和二项式定理的应用,近似计算的方法和能力.满分 10 分.

解:设耕地平均每年至多只能减少 x 公顷,又设该地区现有人口为 p 人,粮食单产为 M 吨／公顷.

依题意得不等式

$$\frac{M\times(1+22\%)\times(10^4-10x)}{p\times(1+1\%)^{10}}\geq\frac{M\times 10^4}{p}\times(1+10\%).\qquad 5\text{分}$$

化简得 $x\leq 10^3\times[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}].\qquad 7\text{分}$

$$\because 10^3\times[1-\frac{1.1\times(1+0.01)^{10}}{1.22}]$$

$$=10^3\times[1-\frac{1.1}{1.22}\times(1+C_{10}^1\times 0.01+C_{10}^2\times 0.01^2+\cdots)]$$

$$\approx 10^3\times[1-\frac{1.1}{1.22}\times 1.1045]$$

$$\approx 4.1\qquad 9\text{分}$$

$\therefore\quad x\leq 4$(公顷).

答按规划该地区耕地平均每年至多只能减少 4 公顷. 10 分

(25)本小题主要考查直线与双曲线的性质,解析几何的基本思想,以及综合运用知识的能力.满分 12 分.

解(Ⅰ)依题设,l_1、l_2的斜率都存在,因为l_1过点$p,(-\sqrt{2},0)$

且与双曲线有两个交点,故方程组

$$\begin{cases} y=k_1(x+\sqrt{2})(k_1\neq 0), \\ y^2-x^2=1\end{cases}\qquad ①\qquad 1\text{分}$$

有两个不同的解.在方程组①中消去 y,整理得

$$(k_1^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_1^2x+2k_1^2-1=0.\qquad ②$$

若$k_1^2-1=0$,则方程组①只有一个解,即l_1与双曲线只有一个交点,与题设矛盾.故$k_1^2-1\neq 0$.即$|k_1|\neq 1$.方程②的判别式为

$$\triangle_1=(2\sqrt{2}k_1^2)^2-4(k_1^2-1)(2k_1^2-1)=4(3k_1^2-1).$$

设l_2的斜率为k_2,因为l_2过点$p(-\sqrt{2},0)$且与双曲线有两个交点,故方程组

$$\begin{cases} y=k_2(x+\sqrt{2})(k_2\neq 0), \\ y^2-x^2=1 \end{cases} \quad ③$$

有两个不同的解,在方程组③中消去 y, 整理得

$$(k_2^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_2^2x+2k_2^2-1=0. \quad ④$$

同理有 $k_2^2-1\neq 0,\quad \triangle_2=4(3k_2^2-1).$

又因为 $l_1\perp l_2$,所以有 $k_1\cdot k_2=-1$ 4分

于是,l_1、l_2与双曲线各有两个交点,等价于

$$\begin{cases} 3k_1^2-1>0, \\ 3k_2^2-1>0, \\ k_1\cdot k_2=-1, \\ |k_1|\neq 1. \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{3}}{3}<|k_1|<\sqrt{3}, \\ |k_1|\neq 1. \end{cases}$ 6分

$\therefore k_1\in(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{3}}{3},1)\cup(1,\sqrt{3}).$ 7分

(Ⅱ)双曲线 $y^2-x^2=1$ 的顶点为(0,1)、(0,-1).取 $A_1(0,1)$时,有

$$k_1(0+\sqrt{2})=1,$$

解得$k_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 从而$k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-\sqrt{2}.$ 8分

将$k_2=-\sqrt{2}$代入方程④得

$$x^2+4\sqrt{2}x+3=0. \quad ⑤$$

记 l_2与双曲线的两交点为 $A_2(x_1,y_1)$、$B_2(x_2,y_2)$,则

$|A_2B_2|^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=3(x_1-x_2)^2=3[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2].$

由⑤知 $x_1+x_2=-4\sqrt{2},x_1\cdot x_2=3,$

$\therefore |A_2B_2|^2=3[(-4\sqrt{2})^2-4\times 3]=60.$

即 $|A_2B_2|=2\sqrt{15}.$ 11分

当取 $A_1(0,-1)$时,由双曲线 $y^2-x^2=1$ 关于 x 轴的对称性,知

$$|A_2B_2|=2\sqrt{15}.$$

所以l_1过双曲线的一个顶点时,$|A_2B_2|=2\sqrt{15}$ 12分

1997年普通高等学校招生全国统一考试
数　学（理工农医类）

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分.第Ⅰ卷1至2页.第Ⅱ卷3至8页.共150分.考试时间120分钟.

第Ⅰ卷（选择题共65分）

注意事项:

1.答第Ⅰ卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.

2.每小题选出答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案,不能答在试题卷上.

3.考试结束,监考人将本试卷和答题卡一并收回.

一.选择题:本大题共 15 小题;第(1)—(10)题每小题 4 分,第(11)—(15)题每小题 5 分,共 65 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)设集合 $M=\{x\mid 0\le x<2\}$,集合 $N=\{x\mid x^2-2x-3<0\}$,集合 $M\cap N=$

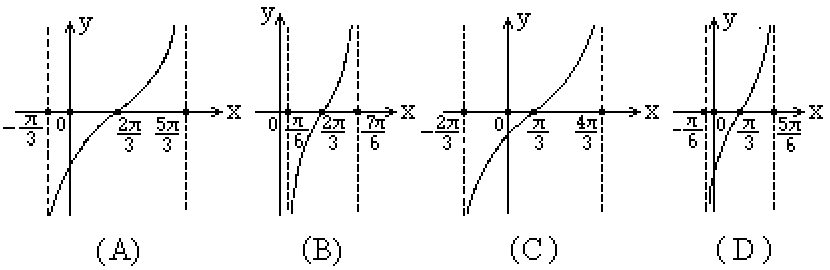
(A) $\{x\mid 0\le x<1\}$　　(B) $\{x\mid 0\le x<2\}$

(C) $\{x\mid 0\le x\le 1\}$　　(D) $\{x\mid 0\le x\le 2\}$

(2)如果直线 $ax+2y+2=0$ 与直线 $3x-y-2=0$ 平行,那么系数 $a=$

(A) -3　　(B) -6　　(C) $-\frac{3}{2}$　　(D) $\frac{2}{3}$

(3)函数 $y=\mathrm{tg}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\pi)$ 在一个周期内的图象是



(4)已知三棱锥 $D-ABC$ 的三个侧面与底面全等,且 $AB=AC=\sqrt{3}$, $BC=2$,则以 BC 为棱,以面 BCD 与面 BCA 为面的二面角的大小是

(A) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$　　(B) $\arccos\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{2\pi}{3}$

(5)函数 $y=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)+\cos 2x$ 的最小正周期是

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 4π

(6)满足 $\arccos(1-x)\ge\arccos x$ 的 x 的取值范围是

(A) $[-1,-\frac{1}{2}]$　　(B) $[-\frac{1}{2},0]$　　(C) $[0,\frac{1}{2}]$　　(D) $[\frac{1}{2},1]$

(7)将 $y=2^x$ 的图象

(A)先向左平行移动 1 个单位　　(B)先向右平行移动 1 个单位

(C)先向上平行移动 1 个单位　　(D)先向下平行移动 1 个单位

再作关于直线 y=x 对称的图象,可得到函数 $y=\log_2(x+1)$的图象.

(8)长方体一个顶点上三条棱的长分别是 3,4,5,且它的八个顶点都在同一个球面上,这个球的表面积是

(A)$20\sqrt{2}\pi$　　(B)$25\sqrt{2}\pi$　　(C)50π　　(D)200π

(9)曲线的参数方程是$\begin{cases} x=1-\frac{1}{t}, \\ y=1-t^2 \end{cases}$(t是参数,$t\neq 0$),它的普通方程是

(A)$(x-1)^2(y-1)=1$　　(B)$y=\frac{x(x-2)}{(1-x)^2}$

(C)$y=\frac{1}{(1-X)^2}-1$　　(D)$y=\frac{x}{1-x^2}+1$

(10)函数 $y=\cos^2x-3\cos x+2$ 的最小值为

(A)2　　(B)0　　(C)$-\frac{1}{4}$　　(D)6

(11)椭圆C与椭圆$\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{4}=1$关于直线$x+y=0$对称,椭圆C的方程

是

(A)$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$　　(B)$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

(C)$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$　　(D)$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

(12)圆台上、下底面积分别为π、4π,侧面积为 6π,这个圆台的体积是

(A)$\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　　(B)$2\sqrt{3}\pi$　　(C)$\frac{7\sqrt{3}\pi}{6}$　　(D)$\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$

(13)定义在区间(-∞,+∞)的奇函数f(x)为增函数;偶函数g(x)在区间[0,+∞)

的图象与 f(x)的图象重合.设 a>b>0,给出下列不等式:

①f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b);　②f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b);

③f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a);　④f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a),

其中成立的是

(A)①与④　　(B)②与③　　(C)①与③　　(D)②与④

(14)不等式组$\begin{cases} x>0, \\ \frac{3-x}{3+x}>\left|\frac{2-x}{2+x}\right| \end{cases}$的解集是

(A) $\{x \mid 0<x<2\}$　　(B) $\{x \mid 0<x<2.5\}$

(C) $\{x \mid 0<X<\sqrt{6}\}$　　(D) $\{x \mid 0<x<3\}$

(15)四面体的顶点和各棱中点共10个点,在其中取4个不共面的点,不同的取法共有

(A)150种　　(B)147种　　(C)144种　　(D)141种

第II卷　(非选择题共85分)

注意事项:

1.第II卷共6页,用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.

2.答卷前将密封线内的项目填写清楚.

得分	评卷人

二.填空题:本大题共 4 小题;每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中横线上.

(16)已知$(\frac{a}{x}-\sqrt{\frac{x}{2}})^9$的展开式中$x^3$的系数为$\frac{9}{4}$,常数$a$的值为________.

(17)已知直线的极坐标方程为$\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$则极点到该直线的距离,是__________.

(18)$\frac{\sin7°+\cos15°\sin8°}{\cos7°-\sin15°\sin8°}$的值为________.

(19)已知m、*l*是直线,α、β是平面,给出下列命题:

①若*l*垂直于α内的两条相交直线,则*l*⊥α;

②若*l*平行于α,则*l*平行于α内的所有直线;

③若m⊂α,*l*⊂β,且*l*⊥m,则α⊥β;

④若*l*⊂β,且*l*⊥α,则α⊥β;

⑤若m⊂α,*l*⊂β,且α∥β,则m∥*l*.

其中正确的命题的序号是__________.(注:把你认为正确的命题的序号都填上)

三.解答题:本大题共 6 小题;共 69 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(20)(本小题满分10分)

已知复数$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$,$\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.复数$\overline{z\omega}$,$z^2\omega^3$在复数平面上所对应的点分别为P,Q.证明△OPQ是等腰直角三角形(其中O为原点).

得分	评卷人

(21)(本小题满分11分)

已知数列 $\{a_n\}$ ，$\{b_n\}$ 都是由正数组成的等比数列,公比分别为 p,q,其中 p>q,且 p≠1,q≠1.设 $c_n=a_n+b_n$,s_n 为数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n-1}}.$$

得分	评卷人

(22)(本小题满分 12 分)

甲、乙两地相距 S 千米,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过 c 千米/时.已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成:可变部分与速度v(千米/时)的平方成正比,比例系数为b;固定部分为 a 元.

(Ⅰ)全程运输成本把 y(元)表示为速度 v(千米/时)的函数,并指出这个函数的定义域;

(Ⅱ)为了使全程运输成本最小,汽车应以多大速度行驶?

得分	评卷人

(23)(本小题满分 12 分)

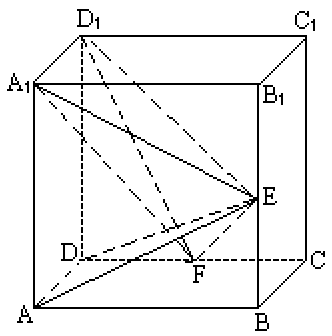
如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F 分别是 BB_1、CD 的中点.

(Ⅰ)证明 $AD\perp D_1F$;

(Ⅱ)求 AE 与 D_1F 所成的角;

(Ⅲ)证明面 AED⊥面 A_1FD_1;

(Ⅳ)设$AA_1=2$,求三棱锥$F-A_1ED_1$的体积$V_{F-A_1ED_1}$.



得分	评卷人

(24)(本小题满分 12 分)

设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$,方程 $f(x)-x=0$ 的两个根 x_1,x_2 满足 $0<x_1<x_2<\frac{1}{a}$.

(Ⅰ)当 $x\in(0,x_1)$时,证明 $x<f(x)<x_1$;

(Ⅱ)设函数$f(x)$的图象关于直线$x=x_0$对称,证明$x_0<\frac{x_1}{2}$.

得分	评卷人

(25)(本小题满分 12 分)

设圆满足:①截 y 轴所得弦长为 2;②被 x 轴分成两段圆弧,其弧长的比为 3:1,在满足条件①、②的所有圆中,求圆心到直线 ι :x-2y=0 的距离最小的圆的方程.

1997 年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题(理工农医类)参考解答及评分标准

说明:

一.本解答指出了每题要考查的主要知识和能力,并给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二.对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

三.解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四.只给整数分数.选择题和填空题不给中间分.

一.选择题:本题考查基本知识和基本运算.第(1)-(10)题每小题 4 分,第(11)-(15)题每小题 5 分,满分 65 分.

(1)B	(2)B	(3)A	(4)C	(5)B
(6)D	(7)D	(8)C	(9)B	(10)B
(11)A	(12)D	(13)C	(14)C	(15)D

二.填空题:本题考查基本知识和基本运算.每小题 4 分,满分 16 分.

(16)4　　(17)$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　(18)$2-\sqrt{3}$　　(19)①,④

注:第(19)题多填、漏填和错填均给 0 分.

三.解答题

(20)本小题主要考查复数的基本概念、复数的运算以及复数的几何意义等基础知识,考查运算能力和逻辑推理能力.满分 10 分.

解法一：

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=\cos(-\frac{\pi}{6})+i\sin(-\frac{\pi}{6}),$$

$$\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}.$$ -------2 分

于是

$$z\omega=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12},$$

$$\overline{z\omega}=\cos(-\frac{\pi}{12})+i\sin(-\frac{\pi}{12}),$$

$$z^2\omega^3 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})] \times (\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$= \cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}$$

-------5 分

因为OP与OQ的夹角为 $\frac{5\pi}{12} - (-\frac{\pi}{12}) = \frac{\pi}{2}$，所以OP⊥OQ. -------7分

因为 $|OP| = |\overline{z\omega}| = 1$, $|OQ| = |z^2\omega^3| = 1$，所以|OP|=|OQ|.

由此知△OPQ 有两边相等且其夹角为直角，故△OPQ 为等腰直角三解形. --------------7 分

解法二：

因为 $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})$，所以 $z^3 = -i$. ------------2 分

因为 $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$，所以 $\omega^4 = -1$. ------------4 分

于是 $\frac{z^2\omega^3}{z\omega} = \frac{z^2\omega^3}{z\omega} \cdot \frac{z\omega}{z\omega} = \frac{z^3\omega^4}{|z|^2|\omega|^2} = i$. ------------6 分

由此得 OP⊥OQ，|OP|=|OQ|.

由此知△OPQ 有两边相等且其夹角为直角，故△OPQ 为等腰直角三角形. -------------10 分

(21)本小题主要考查等比数列的概念、数列极限的运算等基础知识，考查逻辑推理能力和运算能力.满分 11 分.

解：

$$S_n = \frac{a_1(p^n - 1)}{p - 1} + \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},$$

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{a_1(q-1)(p^n - 1) + b_1(p-1)(q^n - 1)}{a_1(q-1)(p^{n-1} - 1) + b_1(p-1)(q^{n-1} - 1)}.$$ -------------3 分

分两种情况讨论.

(Ⅰ)p>1.

$\because p > q > 0, 0 < \frac{q}{p} < 1$,

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n-1}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{p^n\left[a_1(q-1)(1-\frac{1}{p^n}) + b_1(p-1)(\frac{q^n}{p^n} - \frac{1}{p^n})\right]}{p^{n-1}\left[a_1(q-1)(1-\frac{1}{p^{n-1}}) + b_1(p-1)(\frac{q^{n-1}}{p^{n-1}} - \frac{1}{p^{n-1}})\right]}$$

$$=P\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(q-1)(1-\frac{1}{p^n})+b_1(p-1)\left[(\frac{q}{p})^n-\frac{1}{p^n}\right]}{a_1(q-1)(1-\frac{1}{p^{n-1}})+b_1(p-1)\left[(\frac{q}{p})^{n-1}-\frac{1}{p^{n-1}}\right]}$$

$$=p\cdot\frac{a_1(q-1)}{a_1(q-1)}$$

=p. -------------7 分

(Ⅱ)p<1.

∵ 0<q<p<1,

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S_{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(q-1)(p^n-1)+b_1(p-1)(q^n-1)}{a_1(q-1)(p^{n-1}-1)+b_1(p-1)(q^{n-1}-1)}$$

$$=\frac{-a_1(q-1)-b_1(p-1)}{-a_1(q-1)-b_1(p-1)}=1.$$ **-------11 分**

(22)本小题主要考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识,考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力,满分 12 分.

解:(Ⅰ)依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为$\frac{s}{v}$,全程运输成本为

$$y=a\cdot\frac{S}{v}+bv^2\cdot\frac{S}{v}=S(\frac{a}{v}+bv),$$ **-------------**

4 分

故所求函数及其定义域为

$$y=S(\frac{a}{v}+bv),v\in(0,c]\ .$$ **-------------**

5 分

(Ⅱ)依题意知 S,a,b,v 都为正数,故有

$$S(\frac{a}{v}+bv)\geq 2S\sqrt{ab}\ .$$

当且仅当$\frac{a}{v}=bv$,即$v=\sqrt{\frac{a}{b}}$时上式中等号成立.

若$\sqrt{\frac{a}{b}}\leqslant c$,则当$v=\sqrt{\frac{a}{b}}$时,全程运输成本 y 最小. ------------9 分

若$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$,当 $v\in(0,c]$ 时,有

$$S(\frac{a}{v}+bv)-S(\frac{a}{c}+bc)$$
$$=S\left[(\frac{a}{v}-\frac{a}{c})+(bv-bc)\right]$$
$$=\frac{S}{vc}(c-v)(a-bcv).$$

因为 $c-v\geq 0$,且 $a>bc^2$,故有

$$a-bcv\geq a-bc^2>0,$$

所以 $S(\frac{a}{v}+bv)\geqslant S(\frac{a}{c}+bc)$,且仅当 $v=c$ 时等号成立,

也即当 $v=c$ 时,全程运输成本 y 最小.

综上知,为使全程运输成本 y 最小,当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}\leqslant c$ 时行驶速度应为 $v=\frac{\sqrt{ab}}{b}$;

当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$ 时行驶速度应为 $v=c$.　　　　　　　　-------------12分

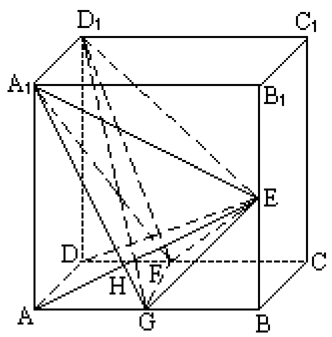
(23)本小题主要考查直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系,考查逻辑推理能力和空间想象能力,满分 12 分.

解:(Ⅰ)∵AC_1 是正方体,

∴$AD\perp$面 DC_1.

又 $D_1F\subset$面 DC_1,

∴$AD\perp D_1F$.　　　　　　　　　　　　　　　　-------------
2 分



(Ⅱ)取 AB 中点 G,连结 A_1G,FG.因为 F 是 CD 的中点,所以 GF、AD 平行且相等,又 A_1D_1、AD 平行且相等,所以 GF、A_1D_1 平行且相等,故 GFD_1A_1 是平行四边形,$A_1G\parallel D_1F$.

设 A_1G 与 AE 相交于点 H,则$\angle AHA_1$ 是 AE 与 D_1F 所成的角,因为 E 是 BB_1 的中点,所以 $Rt\triangle A_1AG\cong Rt\triangle ABE$,$\angle GA_1A=\angle GAH$, 从而 $\angle AHA_1=90°$,即直线 AE 与 D_1F 所成角为直角.　　　　　-------------
5 分

(Ⅲ)由(Ⅰ)知 $AD\perp D_1F$,由(Ⅱ)知 $AE\perp D_1F$,又 $AD\cap AE=A$,所以 $D_1F\perp$面 AED.又因为 $D_1F\subset$面 A_1FD_1,所以面 $AED\perp$面 A_1FD_1.　　　　-------------
7 分

(Ⅳ)连结 GE,GD_1.

∵FG∥A_1D_1,∴FG∥面 A_1ED_1,

∴体积$V_{F-A_1ED_1}=V_{G-A_1ED_1}=V_{D_1-A_1GE}$,   ------------9 分

∵$AA_1=2$,

∴面积$S_{\triangle A_1GE}=S_{\square ABB_1A_1}-2S_{\triangle A_1AG}-S_{\triangle GBE}=\frac{3}{2}$.

∴$V_{F-A_1ED_1}=V_{D_1-A_1GE}=\frac{1}{3}\times A_1D_1\times S_{\triangle A_1GE}=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{3}{2}=1$------------12分

(24)本小题主要考查一元二次方程、二次函数和不等式的基础知识,考查综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力.满分 12 分.

证明:(Ⅰ)令 F(x)=f(x)-x.因为 x_1,x_2 是方程 f(x)-x=0 的根,所以

$F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.   ------------2 分

当 $x\in(0,x_1)$时,由于 $x_1<x_2$,得$(x-x_1)(x-x_2)>0$,又 a>0,得

$F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)>0$,

即 x<f(x).   ------------4 分

$$\begin{aligned}&x_1-f(x)\\&=x_1-[x+F(x)]\\&=x_1-x+a(x_1-x)(x-x_2)\\&=(x_1-x)\ [1+a(x-x_2)]\ .\end{aligned}$$

因为$0<x<x_1<x_2<\frac{1}{a}$,

所以 $x_1-x>0$,$1+a(x-x_2)=1+ax-ax_2>1-ax_2>0$.

得 $x_1-f(x)>0$.

由此得 $f(x)<x_1$.   ------------7 分

(Ⅱ)依题意知

$$x_0=-\frac{b}{2a}.$$

因为 x_1,x_2是方程 f(x)-x=0的根,即 x_1,x_2 是方程$ax^2+(b-1)x+c=0$的根.

所以 $x_1+x_2=-\frac{b-1}{a}$,   ------------9 分

$$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{a(x_1+x_2)-1}{2a}=\frac{ax_1+ax_2-1}{2a}.$$

因为 $ax_2<1$,所以

$$x_0<\frac{ax_1}{2a}=\frac{x_1}{2}.$$ ------------12 分

(25)本小题主要考查轨迹的思想,求最小值的方法,考查综合运用知识建立曲线方程的能力.满分 12 分.

解法一:设圆的圆心为 P(a,b),半径为 r,则点 P 到 x 轴,y 轴的距离分别为|b|,|a|.

由题设知圆 P 截 x 轴所得劣弧对的圆心角为 90°,知圆 P 截 x 轴所得的弦长为 $\sqrt{2}r$,故

$r^2=2b^2$ ------------2 分

又圆 P 截 y 轴所得的弦长为 2,所以有

$r^2=a^2+1$.

从而得 $2b^2-a^2=1$. ------------- 5 分

又点 P(a,b)到直线 x–2y=0 的距离为

$$d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}},$$ ------------- 7 分

所以 $5d^2=|a-2b|^2$

$=a^2+4b^2-4ab$

$\geq a^2+4b^2-2(a^2+b^2)$

$=2b^2-a^2=1$,

当且仅当 a=b 时上式等号成立,此时 $5d^2=1$,从而 d 取得最小值. ------------- 10 分

由此有

$$\begin{cases} a=b, \\ 2b^2-a^2=1. \end{cases}$$

解此方程组得

$$\begin{cases} a=1, \\ b=1; \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=-1, \\ b=-1. \end{cases}$$

由于 $r^2=2b^2$ 知 $r=\sqrt{2}$.

于是,所求圆的方程是

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$,或$(x+1)^2+(y+1)^2=2$. ------------- 12 分

解法二:同解法一得

$$d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}$$ -------------7分

$\therefore a-2b=\pm\sqrt{5}d$,

得 $a^2=4b^2\pm4\sqrt{5}bd+5d^2$, ①

将 $a^2=2b^2-1$ 代入①式,整理得

$2b^2\pm4\sqrt{5}db+5d^2+1=0$, ②

把它看作 b 的二次方程,由于方程有实根,故判别式非负,即

$\triangle=8(5d^2-1)\geq0$,

得　$5d^2 \geq 1$.

所以$5d^2$有最小值1,从而d有最小值$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　　-------------10分.

将其代入②式得 $2b^2 \pm 4b+2=0$.解得 $b=\pm 1$.

将 $b=\pm 1$ 代入 $r^2=2b^2$,得 $r^2=2$.由 $r^2=a^2+1$ 得 $a=\pm 1$.

综上　$a=\pm 1,b=\pm 1,r^2=2$.

由$|a-2b|=1$知 a,b 同号.

于是,所求圆的方程是

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$,或$(x+1)^2+(y+1)^2=2$.　　　-------------12 分

1997年普通高等学校招生全国统一考试

数　学(文史类)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.第Ⅰ卷1至2页.第Ⅱ卷3至8页.共150分.考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题共65分)

注意事项:

1.答第Ⅰ卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目用铅笔涂写在答题卡上.

2.每小题选出答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案,不能答在试题卷上.

3.考试结束,监考人将本试卷和答题卡一并收回.

一.选择题:本大题共 15 小题;第(1)—(10)题每小题 4 分,第(11)—(15)题每小题 5 分,共 65 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

(1)设集合 M= $\{x\mid 0\le x<2\}$,集合 N= $\{x\mid x^2-2x-3<0\}$,集合 M∩N=

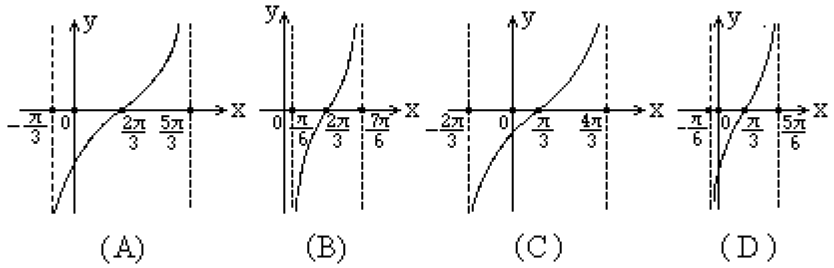
(A) $\{x\mid 0\le x<1\}$　　(B) $\{x\mid 0\le x<2\}$

(C) $\{x\mid 0\le x\le 1\}$　　(D) $\{x\mid 0\le x\le 2\}$

(2)如果直线 ax+2y+2=0 与直线 3x-y-2=0 平行,那么系数 a=

(A) -3　　(B) -6　　(C) $-\frac{3}{2}$　　(D) $\frac{2}{3}$

(3)函数 $y=\mathrm{tg}(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\pi)$ 在一个周期内的图象是



(4)已知三棱锥 D-ABC 的三个侧面与底面全等,且 $AB=AC=\sqrt{3}$, $BC=2$,则以 BC 为棱,以面 BCD 与面 BCA 为面的二面角的大小是

(A) $\frac{\pi}{4}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) $\frac{2\pi}{3}$

(5)函数 $y=\sin(\frac{\pi}{3}-2x)+\sin 2x$ 的最小正周期是

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) π　　(C) 2π　　(D) 4π

(6)满足 $\mathrm{tg}a\ge\mathrm{ctg}a$ 的角 a 的一个取值区间是

(A) $(0,\frac{\pi}{4}]$　　(B) $[0,\frac{\pi}{4}]$　　(C) $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$　　(D) $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

(7)设函数 y=f(x)定义在实数集上,则函数 y=f(x-1)与 y=f(1-x)的图象关

于

(A)直线 y=0 对称　　(B)直线 x=0 对称

(C)直线 y=1 对称　　(D)直线 x=1 对称

(8)长方体一个项点上三条棱的长分别是 3,4,5,且它的八个顶点都在同一个球面上,这个球的表面积是

(A)$20\sqrt{2}\pi$　　(B)$25\sqrt{2}\pi$　　(C)50π　　(D)200π

(9)如果直线 l 将圆:$x^2+y^2-2x-4y=0$ 平分,且不通过第四象限,那么 l 的斜率的取值范围是

(A)$[0,2]$　　(B)$[0,1]$　　(C)$[0,\frac{1}{2}]$　　(D)$[0,\frac{1}{2})$

(10)函数 $y=\cos^2x-3\cos x+2$ 的最小值为

(A)2　　(B)0　　(C)$-\frac{1}{4}$　　(D) 6

(11)椭圆C与$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$椭圆关于直线$x+y=0$对称,椭圆C的方程是

(A)$\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$　　(B)$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-3)^2}{4}=1$

(C)$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$　　(D)$\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$

(12)圆台上、下底面积分别为π、4π,侧面积为 6π,这个圆台的体积是

(A)$\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}$　　(B)$2\sqrt{3}\pi$　　(C)$\frac{7\sqrt{3}\pi}{6}$　　(D)$\frac{7\sqrt{3}\pi}{3}$

(13)定义在区间(-∞,+∞)的奇函数 f(x)为增函数;偶函数 g(x)在区间[0,+∞)的图象与 f(x)的图象重合.设 a>b>0,给出下列不等式

①f(b)-f(-a)>g(a)-g(-b);　　②f(b)-f(-a)<g(a)-g(-b);

③f(a)-f(-b)>g(b)-g(-a);　　④f(a)-f(-b)<g(b)-g(-a).

其中成立的是

(A)①与④　　(B)②与③　　(C)①与③　　(D)②与④

(14)不等式组$\begin{cases} x>0, \\ \frac{3-x}{3+x}>\left|\frac{2-x}{2+x}\right| \end{cases}$的解集是

(A) $\{x \mid 0<x<2\}$　　(B) $\{x \mid 0<x<2.5\}$

(C) $\{x \mid 0<x<\sqrt{6}\}$　　(D) $\{x \mid 0<x<3\}$

(15)四面体的一个顶点为 A,从其它项点与各棱的中点中取 3 个点,使它们和点 A 在同一平面上,不同的取法有

(A)30 种　　(B)33 种　　(C)36 种　　(D)39 种

第 II 卷(非选择题 共 85 分)

注意事项：

1.第Ⅱ卷共 6 页,用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中.

2.答卷前将密封线内的项目填写清楚.

题号	二	三						总分
		20	21	22	23	24	25	
分数								

得分	评卷人

二.填空题:本大题共 4 小题;每小题 4 分,共 16 分.把答案填在题中横线上.

(16)已知$(\frac{a}{x}-\sqrt{\frac{x}{2}})^9$的展开式中$x^3$的系数为$\frac{9}{4}$,常数 a 的值为__________.

(17)已知直线 x-y=2 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A、B 两点,那么线段 AB 的中点坐标是__________.

(18)$\frac{\sin 7^\circ+\cos 15^\circ \sin 8^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ \sin 8^\circ}$ **的值为**__________.

(19)已知 m、l 是直线，α、β是平面,给出下列命题:

①若 l 垂直于α内的两条相交直线,则 l⊥α;

②若 l 平行于α,则 l 平行于α内的所有直线;

③若$m\subset a, l\subset$ β,**且**$l\perp m$,**则**$a\perp b$;

④若$l\subset b$,**且**$l\perp a$,**则**$a\perp b$;

⑤若$m\subset a, l\subset b$,**且**$a /\!/ b$,**则**$m /\!/ l$.

其中正确的命题的序号是______________.(注 把你认为正确的命题的序号都填上)

三.解答题:本大题共 6 小题;共 69 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(20)(本小题满分 10 分)

已知复数$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \omega=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.求复数 $z\omega+z\omega^3$的模及辐角主值.

得分	评卷人

(21)(本小题满分 11 分)

设 S_n 是等差数列{a_n}前 n 项的和.已知$\frac{1}{3}S_3$与$\frac{1}{4}S_4$的等比中项为$\frac{1}{5}S_5$,$\frac{1}{3}S_3$与$\frac{1}{4}S_4$的等差中项为 1.求等差数列{a_n}的通项 a_n.

得分	评卷人

(22)(本小题满分 12 分)

甲、乙两地相距 S 千米,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过 c 千米/时.已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成:可变部分与速度 v(千米/时)的平方成正比,且比例系数为 b;固定部分为 a 元.

(Ⅰ)把全程运输成本 y(元)表示为速度 v(千米/时)的函数,并指出这个函数的定义域;

(Ⅱ)为了使全程运输成本最小,汽车应以多大速度行驶?

得分	评卷人

(23)(本小题满分 12 分)

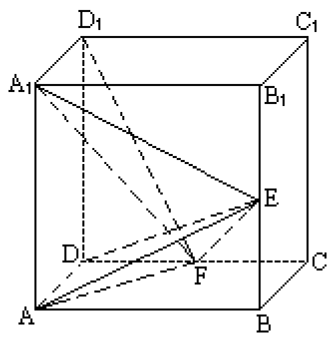
如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E、F 分别是 BB_1、CD 的中点.

(Ⅰ)证明 $AD\perp D_1F$;

(Ⅱ)求 AE 与 D_1F 所成的角;

(Ⅲ)证明面 AED⊥面 A_1FD_1;

(Ⅳ)设 $AA_1=2$,求三棱锥 $E-AA_1F$ 的体积 V_{E-AA_1F}.



得分	评卷人

(24)(本小题满分 12 分)

已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于 A、B 两点,分别过点 A、B 作 y 轴的平行线与函数 $y=\log_2 x$ 的图象交于 C、D 两点.

(Ⅰ)证明点 C、D 和原点 O 在同一条直线上;

(Ⅱ)当 BC 平行于 x 轴时,求点 A 的坐标.

得分	评卷人

(25)(本小题满分 12 分)

已知圆满足:①截 y 轴所得弦长为 2;②被 x 轴分成两段圆弧,其弧长的比为 3 ∶ 1;③圆心到直线 l:x-2y=0 的距离为$\frac{\sqrt{5}}{5}$.求该圆的方程.

1997 年普通高等学校招生全国统一考试
数学试题(文史类)参考解答及评分标准

说明:

一.本解答指出了每题要考查的主要知识和能力,并给出了一种或几种解法供参考,如果考生的解法与本解答不同,可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则.

二.对计算题,当考生的解答在某一步出现错误时,如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度,可视影响的程度决定后继部分的给分,但不得超过该部分正确解答应得分数的一半;如果后继部分的解答有较严重的错误,就不再给分.

三.解答右端所注分数,表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

四.只给整数分数.选择题和填空题不给中间分.

一.选择题:本题考查基本知识和基本运算.第(1)-(10)题每小题4分,第(11)-(15)题每小题5分.满分65分.

(1)B	(2)B	(3)A	(4)C	(5)B
(6)C	(7)D	(8)C	(9)A	(10)B
(11)A	(12)D	(13)C	(14)C	(15)B

二.填空题:本题考查基本知识和基本运算.每小题4分,满分16分.

(16)4　　(17)(4,2)　　(18)$2-\sqrt{3}$　　(19)①,④

注:第(19)题多填、漏填和错填均给0分.

三.解答题

(20)本小题主要考查复数的基本概念、复数的运算等基础知识,考查利用三角公式进行变形的技能和运算能力.满分10分.

解法一:将已知复数化为复数三角形式:

$$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3},$$

$$\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$ ------------2

$$=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}.$$

分

依题意有　$z\omega+z\omega^3$

$$=(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12})+(\cos\frac{13\pi}{12}+i\sin\frac{13\pi}{12})$$

$$=(\cos\frac{7\pi}{12}+\cos\frac{13\pi}{12})+i(\sin\frac{7\pi}{12}+\sin\frac{13\pi}{12})$$ ------------8

$$=2\cos\frac{\pi}{4}(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}).$$

分

故复数$z\omega+z\omega^3$的模为$\sqrt{2}$,辐角主值为$\frac{5\pi}{6}$.　------------10分

解法二:　$z\omega+z\omega^3$

$=z\omega(1+\omega^2)$

$$=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)(1+i)$$ ------------4

$$=\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{1}{2}i)$$

分

$$=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}).$$ ------------8

分

故复数 z ω+z ω 3的模为$\sqrt{2}$,辐角主值为$\frac{5\pi}{6}$. ------------10分

(21)本小题主要考查等差数列、等比数列、方程组等基础知识,考查运算能力.满分 11 分.

解：设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=a$,公差为 d,则通项为

$$a_n=a+(n-1)d,$$

前 n 项和为

$$S_n=na+\frac{n(n-1)}{2}d,$$ ------------2

分

依题意有

$$\begin{cases}\frac{1}{3}S_3\cdot\frac{1}{4}S_4=(\frac{1}{5}S_5)^2\\ \frac{1}{3}S_3+\frac{1}{4}S_4=2\end{cases}$$

其中 $S_5\neq 0$.

由此可得

$$\begin{cases}\frac{1}{3}(3a+\frac{3\times 2}{2}d)\times\frac{1}{4}(4a+\frac{4\times 3}{2}d)=\frac{1}{25}(5a+\frac{5\times 4}{2}d)^2\\ \frac{1}{3}(3a+\frac{3\times 2}{2}d)+\frac{1}{4}(4a+\frac{4\times 3}{2}d)=2\end{cases}$$

------------4

分

整理得

$$\begin{cases}3ad+5d^2=0\\ 2a+\frac{5}{2}d=2\end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases}d=0\\ a=1\end{cases},\qquad\begin{cases}d=-\frac{12}{5}\\ a=4\end{cases}$$ ------------8

分

由此得

$a_n=1$;

或 $a_n=4-\frac{12}{5}(n-1)$

------------8

$$=\frac{32}{5}-\frac{12}{5}n.$$

分

经验证知 $a_n=1$ 时,$S_5=5$,或 $a_n=\frac{32}{5}-\frac{12}{5}n$.时， $S_5=-4$ ，均适合题意.

故所求等差数列的通项为 $a_n=1$ ，或 $a_n=\frac{32}{5}-\frac{12}{5}n$.　　------------11 分

(22)本小题主要考查建立函数关系、不等式性质、最大值、最小值等基础知识,考查综合应用所学数学知识、思想和方法解决实际问题的能力.满分 12 分.

解：(Ⅰ)依题意知汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为 $\frac{S}{v}$,**全程运输成本为**

$$y=a\cdot\frac{S}{v}+bv^2\cdot\frac{S}{v}=S(\frac{a}{v}+bv),$$ **------------4 分**

故所求函数及其定义域为

$$y=S(\frac{a}{v}+bv),v\in(0,c].$$ **------------5 分**

(Ⅱ)依题意知 S,a,b,v 都为正数,故有

$$S(\frac{a}{v}+bv)\geq 2S\sqrt{ab}.$$

当且仅当 $\frac{a}{v}=bv$,即$v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时上式中等号成立.

若$\sqrt{\frac{a}{b}}\leq c$,则当$v=\sqrt{\frac{a}{b}}$ 时,全程运输成本 y 最小.　　-----------9 分

若$\sqrt{\frac{a}{b}}>c$,当 $v\in(0,c]$时,有

$$S(\frac{a}{v}+bv)-S(\frac{a}{c}+bc)$$
$$=S[(\frac{a}{v}-\frac{a}{c})+(bv-bc)]$$
$$=\frac{S}{vc}(c-v)(a-bcv).$$

因为 $c-v\geq 0$,且 $a>bc^2$,故有

$$a-bcv\geq a-bc^2>0,$$

所以$S(\frac{a}{v}+bv)\geq S(\frac{a}{c}+bc)$,**且仅当**$v=c$**时等号成立,**

也即当 v=c 时,全程运输成本 y 最小.

综上知,为使全程运输成本 y 最小，当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}\leqslant c$ 时行驶速度应为 $v=\frac{\sqrt{ab}}{b}$；当 $\frac{\sqrt{ab}}{b}>c$ 时行驶速度应为 v=c. ------------12 分

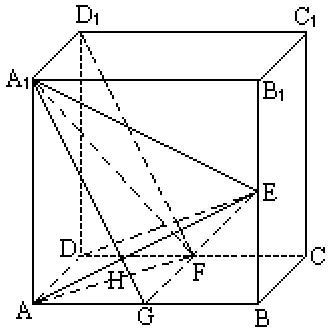
(23)本小题主要考查直线与直线,直线与平面,平面与平面的位置关系,考查逻辑推理和空间想象能力.满分 12 分.

解：(Ⅰ)∵AC_1 是正方体,

∴AD⊥面 DC_1.

又 D_1F⊂面 DC_1,

∴AD⊥D_1F.



------------2 分

(Ⅱ)取 AB 中点 G,连结 A_1G,FG.

因为 F 是 CD 的中点,所以 GF、AD 平行且相等,又 A_1D_1、AD 平行且相等,所以 GF、A_1D_1 平行且相等,故 GFD_1A_1 是平行四边形,

A_1G∥D_1F.

设 A_1G 与 AE 相交于点 H,∠AHA_1 是 AE 与 D_1F 所成的角.

因为 E 是 BB_1 的中点,所以

Rt△A_1AG≌Rt△ABE,∠GA_1A=∠GAH,

从而∠AHA_1=90°,

也即直线 AE 与 D_1F 所成的角为直角. ------------5 分

(Ⅲ)由(Ⅰ)知 AD⊥D_1F,由(Ⅱ)知 AE⊥D_1F,又 AD∩AE=A,

所以 D_1F⊥面 AED.

又因为 D_1F⊂面 A_1FD_1,所以面 AED⊥面 A_1FD_1. ------------7 分

(Ⅳ)∵体积 $V_{E-AA_1F}=V_{F-AA_1E}$,

又 FG⊥面 ABB_1A_1,三棱锥 F-AA_1E 的高 FG=AA_1=2,

面积 $S_{\Delta AA_1E}=\frac{1}{2}S_{\square ABB_1A}=\frac{1}{2}\times 2^2=2.$

$\therefore V_{E-AA_1F}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta AA_1E}\times FG=\frac{1}{3}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$ ------------12**分**.

(24)本小题主要考查对数函数图象、对数换底公式、对数方程、指数方程等基础知识,考查运算能力和分析问题的能力,满分 12 分.

解:(Ⅰ)设点 A、B 的横坐标分别为 x_1,x_2,由题设知,$x_1>1,x_2>1$.则点 A、B 纵坐标分别为 $\log_8 x_1,\log_8 x_2$.

因为 A、B 在过点 O 的直线上,

所以,$\frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}$ ------------2 分

点 C、D 坐标分别为$(x_1,\log_2 x_1),(x_2,\log_2 x_2)$.

由于$\log_2 x_1=\frac{\log_8 x_2}{\log_8 2}=3\log_8 x_1$,

$\log_2 x_2=\frac{\log_8 x_2}{\log_8 2}=3\log_8 x_2$, ------------4 分

OC的斜率 $k_1=\frac{\log_2 x_1}{x_1}=\frac{3\log_8 x_1}{x_1}$,

OD的斜率 $k_2=\frac{\log_2 x_2}{x_2}=\frac{3\log_8 x_2}{x_2}$.

由此可知,$k_1=k_2$,

即 O、C、D 在同一条直线上. ------------7 分

(Ⅱ)由于 BC 平行于 x 轴知

$\log_2 x_1=\log_8 x_2$,

即得 $\log_2 x_1=\frac{1}{3}\log_2 x_2$,

$\therefore x_2=x_1^3$. ------------9 分

代入 $x_2\log_8 x_1=x_1\log_8 x_2$ 得

$x_1^3\log_8 x_1=3x_1\log_8 x_1$.

由于 $x_1>1$ 知 $\log_8 x_1\neq 0$,

$\therefore x_1^3=3x_1$.

考虑$x_1>1$解得$x_1=\sqrt{3}$.

于是点A的坐标为$(\sqrt{3},\log_8\sqrt{3})$. ------------12 分

(25)本小题主要考查轨迹的思想,考查综合运用知识建立曲线方程的能力.满分 12 分.

解:设圆 P 的圆心为 P(a,b),半径为 r,则点 P 到 x 轴,y 轴的距离分别为

$|b|,|a|$.由题设知圆 P 截 x 轴所得劣弧对的圆心角为 90°,知圆 P 截x轴所得的弦长为$\sqrt{2}r$.故

$r^2=2b^2$ ------------3

分

又圆 P 被 y 轴所截得的弦长为 2,所以有

$r^2=a^2+1$.

从而得 $2b^2-a^2=1$. ------------6 分

又因为 $P(a,b)$ 到直线 $x-2y=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以

$$d=\frac{|a-2b|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$ ------------8 分

即有 $a-2b=\pm1$,

由此有

$$\begin{cases}2b^2-a^2=1,\\ a-2b=1;\end{cases}\qquad \begin{cases}2b^2-a^2=1,\\ a-2b=-1.\end{cases}$$

解方程组得

$$\begin{cases}a=-1,\\ b=-1;\end{cases}\qquad \begin{cases}a=1,\\ b=1.\end{cases}$$

于是 $r^2=2b^2=2$,

所求圆的方程是

$(x+1)^2+(y+1)^2=2$,或 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$. ------------12 分

1998年全国高校招生数学统考试题

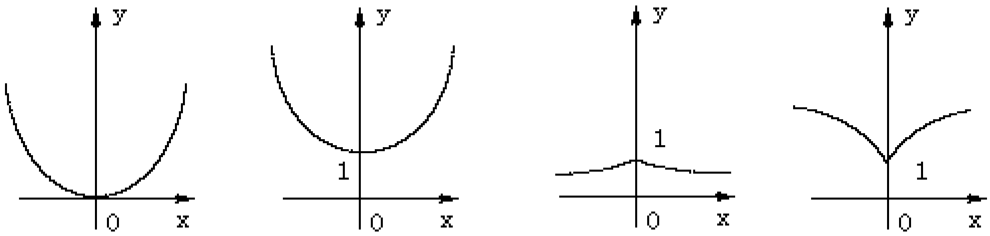
（理工农医类）

一、选择题：本大题共15小题；第（1）—（10）题每小题4分，第（11）—（15）题每小题5分，共65分。在每小题给出的四项选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）sin600°的值是

（A）1/2　　（B）-1/2　　（C）$\sqrt{3}/2$　　（D）$-\sqrt{3}/2$

（2）函数y=a|x|(a>1)的图象是



（A）　　（B）　　（C）　　（D）

（3）曲线的极坐标方程ρ=4sinθ化成直角坐标方程式为

（A）$x^2+(y+2)^2=4$　　（B）$x^2+(y-2)^2=4$

（C）$(x-2)^2+y^2=4$　　（D）$(x+2)^2+y^2=4$

（4）两条直线$A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$垂直的充要条件是

（A）$A_1A_2+B_1B_2=0$　　（B）$A_1A_2-B_1B_2=0$

（C）$A_1A_2/B_1B_2=-1$　　（D）$B_1B_2/A_1A_2=1$

（5）函数f(x)=1/x(x≠0)的反函数f-1(x)=

（A）x(x≠0)　　（B）1/x(x≠0)

（C）-x(x≠0)　　（D）-1/x(x≠0)

（6）已知点P（sinα-cosα,tgα）在第一象限，则[0,2π)内α的取值范围是

（A）(π/2,3π/4)∪(π,5π/4)　　（B）(π/4,π/2)∪(π,5π/4)

（C）(π/2,3π/4)∪(5π/2,3π/2)　　（D）(π/4,π/2)∪(3π/4,π)

（7）已知圆锥的全面积是底面积的3倍，那么该圆锥的侧面积展开图扇形的圆心角为

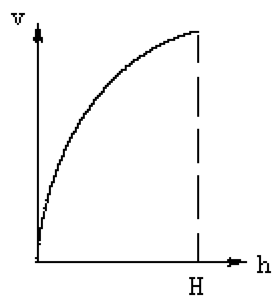
（A）120° （B）150° （C）180° （D）240°

（8）复数-i的一个立方根是i，它的另外两个立方根是

（A）$\sqrt{3}/2\pm(1/2)i$ （B）$-\sqrt{3}/2\pm(1/2)i$

（C）$\pm\sqrt{3}/2+(1/2)i$ （D）$\pm\sqrt{3}/2-(1/2)i$

（9）如果棱台的两底面积分别是S，S'，中截面的面积是S0，那么



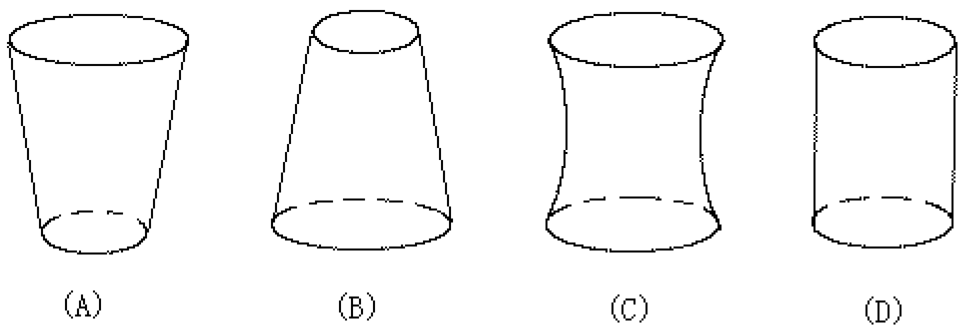
（A）$2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$

（B）$S_0=\sqrt{S'S}$

（C）$2S_0=S+S'$

（D）$S_0^2=2S'S$

（10）向高为H的水瓶中注水，注满为止，如果注水量V与深h的函数关系的图象如右图所示，那么水瓶的形状是



（11）3名医生和6名护士被分配到3所学校为学生体检，每校分配1名医生和2名护士。不同的分配方法共有

（A）90种 （B）180种 （C）207种 （D）540种

（12）椭圆$x_2/12+y_2/3=1$的焦点为F_1和F_2，点P在椭圆上，如果线段PF_1的中点在y轴上，那么$|PF_1|$是$|PF_2|$的

（A）7倍　　（B）5倍　　（C）4倍　　（D）3倍

（13）球面上有3个点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的1/6，经过这3个点的小圆的周长为4π，那么这个球的半径为

（A）$4\sqrt{3}$　　（B）$2\sqrt{3}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{3}$

（14）一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列，其最小内角为

（A）$\arccos\sqrt{5}-1/2$　　（B）$\arcsin\sqrt{5}-1/2$

（C）$\arccos 1-\sqrt{5}/2$　　（D）$\arcsin 1-\sqrt{5}/2$

（15）在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1>1$，且前n项和S_n满足$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1/a_1$，那么$a_1$的取值范围是

（A）（1，+∞）　　（B）（1，4）

（C）（1，2）　　（D）（1，$\sqrt{2}$）

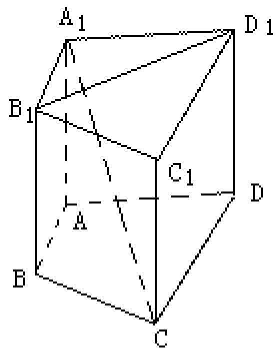
二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分，把答案填在题中横线上。

（16）设圆过双曲线$x_2/9-y_2/16=1$的一个顶点和一个焦点，圆心在双曲线上，则圆心到双曲线中心的距离是_____。

（17）$(x+2)10(x_2-1)$的展开式x_{10}的系数为______（用数字作答）。

（18）如图，在直四棱柱$A_1C_1D_1$－ABCD中，当底面四边形ABCD满足条件____时，有$A_1C\perp B_1D_1$。（注：填上你认为正确的一种条件即可，不必考虑所有可能的情形。）

（19）关于函数$F(x)=4\sin(2x+\pi/3)(x\in R)$，有下列命题：



①由$f(x_1)=f(x_2)=0$可得x_1-x_2必是π的整数倍；

②$y=f(x)$的表达式可改写为$y=4\cos(2x-\pi/6)$；

③$y=f(x)$的图象关于点（－π、6，0）对称；

④$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\pi/6$对称。

其中正确的命题的序号是_____。（注：把你认为正确的命题的序号都填上。）

三、解答题：本大题共6小题；共69分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(20)（本小题满分10分）在△ABC中，a,b,c分别是角A,B,C的对边，设a+c=2b，A-C=π/3，求sinB的值。以下公式供解题时参考：

$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\theta+\phi/2\cos\theta-\phi/2$,

$\sin\theta-\sin\phi=2\cos\theta+\phi/2\sin\theta-\phi/2$,

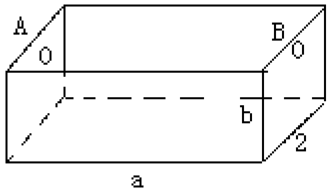
$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\theta+\phi/2\cos\theta-\phi/2$,

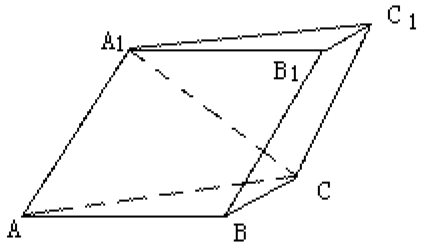
$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\theta+\phi/2\sin\theta-\phi/2$

(21)（本小题满分11分）如图，直线l_1和l_2相交于点M，$l_1\perp l_2$，点$N\in l_1$。以A、B为端点的曲线段C上的任一点到l_2的距离与点N的距离相等。若△AMN为锐角三角形，$|AM|=\sqrt{17}$，$|AN|=3$，且$|BN|=6$。建立适当的坐标系，求曲线C的方程。

(22)（本小题满分12分）如图，为处理含有某种杂质的污水，要制造一底宽为2米的无盖长方体沉淀箱。污水从A孔流入，经沉淀后从B孔流出。设箱体的长度为a米，高度为b米。已知流出的水中该杂质的质量分数与a,b的乘积ab成反比。现有制箱材料60平方米。问当a,b各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小（A、B孔的面积忽略不计）。

(23)（本小题满分12分）已知斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧面A_1ACC_1与底面ABC垂直，∠ABC＝90°，BC＝2，AC＝2　，且$AA_1⊥A_1C$，$AA_1＝A_1C$。





（Ⅰ）求侧棱A_1A与底面ABC所成角的大小；

（Ⅱ）求侧面A_1ABB_1与底面ABC所成二面角的大小；

（Ⅲ）求顶点C到侧面A_1ABB_1的距离。

(24)（本小题满分12分）设曲线C的方程是$y=x^3-x$，将C沿x轴、y轴正向分别平行移动t、s单位长度后得曲线C_1。

（Ⅰ）写出曲线C_1的方程；

（Ⅱ）证明曲线C与C_1关于点A（t/2,s/2）对称；

（Ⅲ）如果曲线C与C_1有且仅有一个公共点，证明$s=t_3/4-t$且$t≠0$。

(25)（本小题满分12分）已知数列$\{b_n\}$是等差数列，$b_1=1,b_1+b_2+\cdots+b_{10}=145$。

（Ⅰ）求数列$\{b_n\}$的能项b_n；

（Ⅱ）设数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\log a(1+1/b_n)$（其中a>0，且a≠1），记S_n是数列$\{a_n\}$的前n项的和。试比较S_n与$1/3\log ab_n+1$的大小，并证明你的结论。

1998年全国高校招生数学统考试题答案

（理工农医类）数学（理工类）

一、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答 案	D	B	B	A	B	B	C	D	A	B
题 号	11	12	13	14	15					
答 案	D	A	B	B	D					

二、填空题

（16）16/3

（17）-5120

（18）AC⊥BD

（19）①，③

三、解答题：

（20） 解：由正弦定理和已知条件 a+c=2b 得

sinA+sinC=2sinB。 ……2 分 由和差化积公式

得 2sin(A+C)/2cos(A-C)/2=2sinB。 由 A+B+C=π，

得 sin(A+C)/2=cosB/2， 又 A-C=π/3，得

($\sqrt{3}$/2)cosB/2=sinB，

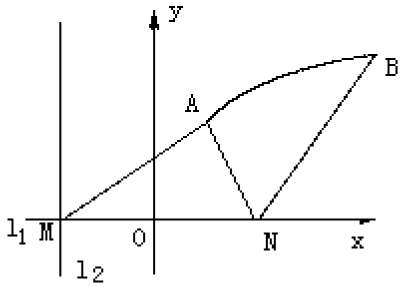
∴($\sqrt{3}$/2)cosB/2=2(sinB/2)(cosB/2)。 ……6 分

∵0<B/2<π/2，cosB/2≠0， ∴sinB/2=$\sqrt{3}$/4，

从而 cosB/2=$\sqrt{1-\sin^2\frac{B}{2}}$=$\sqrt{13}$/4 ……9 分

∴sinB=$\sqrt{3}$/2×$\sqrt{13}$/4=$\sqrt{39}$ /8 ……11 分 （21）

解法一：如图建立坐标系，以 l_1 为 x 轴，MN 的



垂直平分线为 y 轴，点 O 为坐标原点。 依题意知：曲线段 C 是以点 N 为焦点，以 l_2 为准线的抛物线的一段，其中 A、B 分别为 C 的端点。 设曲线段 C 的方程为 y_2=2px (p>0),(x_A≤x≤x_B,y>0)，其中 x_A,x_B 分别为 A，B 的横坐标，p=|MN|。所以 M(-p/2,0),N(p/2,0)。 ……4 分

由|AM|=$\sqrt{17}$，|AN|=3 得

(x_A+p/2)2+2px_A=17， ①

(x_A-p/2)2+2px_A=9。 ② ……6 分

由①，②两式联立得 x_A=4/p，再将其代

入①式并由 p>0 解得 p=4，x_A=1；

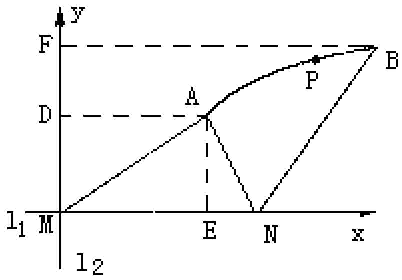
或 p=2，x_A=2。 因为△AMN 是锐角三角形，

所以 p/2>x_A，故舍去 p=2，x_A=2。

∴p=4，x_A=1。 由点 B 在曲线段 C 上，

得 x_B=|BN|-p/2=4。 综上得曲线段 C 的方程式为 y2=8x(1≤x≤4,y>0)。 ……12 分

解法二：如图建立坐标系，分别以 l_1、l_2



为 x、y 轴，M 为坐标原点。 作 $AE\perp l_1$，$AD\perp l_2$，$EF\perp l_2$，垂足分别为 E、D、F。 ……2 分

设 $A(x_A,y_A)$、$B(x_B,y_B)$、$N(x_N,0)$。

依题意有 $x_A=|ME|=|DA|=|AN|=3$， $y_A=|DM|=2\sqrt{2}$， 由于△AMN 为锐角三角形，故有 $x_N=|AE|+|EN|=4$。 $x_B=|BF|=|BN|=6$。 ……7 分

设点 P(x,y)是曲线段 C 上任一点，则由题意知 P 属于集合$\{(x,y)|(x-x_N)2=x_2,x_A\le x\le x_B,y>0\}$。 ……10 分

故曲线段 C 的方程

$y_2=8(x-2)(3\le x\le 6,y>0)$。 ……12 分

（22） 解法一：设 y 为流出的水中杂质的质量分数，则 y=k/ab，其中 k>0 为比例系数，依题意，即所求的 a,b 值使 y 值最小。 根据题设，有 4b+2ab+2a=60(a>0,b>0)， ……4 分

得 b=30-a/2+a（0<a<30）， ①

于是 y=k/ab=k/((30a-a2)/(2+a))

=k/(-a+32-64/(a+2))

=k/(34-(a+2+64/(a+2))

$$\ge k/(34-2\sqrt{(a+2)\times\frac{64}{2+a}}=k/18,$$

当 a+2=64/(a+2)时取等号，y 达最小值。 ……8 分

这时 a=6,a=-10（舍去）。 将 a=6 代入①式

得 b=3。 故当 a 为 6 米，b 为 3 米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小。……12 分

解法二：依题意，即所求的 a,b 的值使 ab 最大。

由题设知

4a+2ab+2a=60（a>0,b>0）， ……4 分

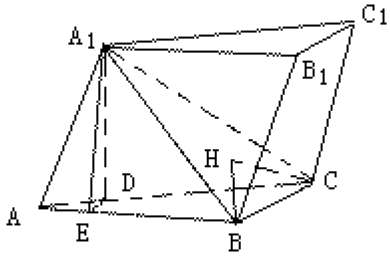
即 a+2b+ab=30（a>0,b>0）。 $\because a+2b\ge 2\sqrt{ab}$ ，

$\therefore 2\sqrt{2}\sqrt{ab}+ab\le 30$， 当且仅当 a=2b 时，上式取等号。 由 a>0，b>0，解得 0<ab≤18。

即当 a=2b 时，ab 取得最大值，其最大值为 18。 ……10 分

$\therefore 2b_2=18$。解得 b=3，a=6。 故当 a 为 6 米，b 为 3 米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小。 ……12 分

（23） 解：（Ⅰ）作 A1D⊥AC，垂足为 D，



由面 A_1ACC_1⊥面 ABC，得

A_1D⊥面 ABC， ∴$\angle A_1AD$

为 A_1A 与面 ABC 所成的角。……2 分

∵$AA_1\perp A_1C$，$AA_1=A_1C$，

∴$\angle A_1AD=45°$ 为所求。 ……4 分

（II）作 DE⊥AB，垂足为 E，连 A_1E，则由 A_1D⊥面 ABC，得 $A_1E\perp AB$。

∴$\angle A_1ED$ 是面 A_1ABB_1 与面 ABC 所成二面角的平面角。 ……6 分

由已知，AB⊥BC，得 ED∥BC。又 D 是 AC 的中点，

$BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$， ∴$DE=1$，$AD=A_1D=\sqrt{3}$，

$tgA_1ED=A_1D/DE=\sqrt{3}$。

故∠A1ED＝60°为所求。 ……8 分

（III）解法一：由点 C 作平面 A_1ABB_1 的垂线，垂足为 H，则 CH 的长是 C 到平面 A_1ABB_1 的距离。 ……10 分

连结 HB，由于 AB⊥BC，得 AB⊥HB。 又 $A_1E\perp AB$，

知 HB∥A_1E，且 BC∥ED， ∴$\angle HBC=\angle A_1ED=60°$。

∴$CH=BC\sin 60°=\sqrt{3}$ 为所求。 ……12 分

解法二：连结 A_1B。 根据定义，点 C 到面 A_1ABB_1 的距离，即为三棱锥 C－A1AB 的高 h。 ……10 分

由 V 锥 $C-A_1AB$＝V 锥 A_1-ABC 得

$1/2S\triangle AA_1Bh=1/2S\triangle ABCA_1D$，

即 $1/3\times2\sqrt{2}h=1/3\times2\sqrt{2}\times\sqrt{3}$，

∴$h=\sqrt{3}$ 为所求。 ……12 分

(24) （I）解：曲线 C_1 的方程为

$y=(x-t)^3-(x-t)+s$。 ……3 分

（II）证明：在曲线 C 上任取一点 $B_1(x_1,y_1)$。

设 $B_2(x_2,y_2)$ 是 B_1 关于点 A 的对称点，则有

$x_1+x_2/2=t/2$，$y_1+t_2/2=s/2$。

∴$x_1=t-x_2$，$y_1=s-y_2$。 ……5 分

代入曲线 C 的方程，得 x_2 和 y_2 满足方程：

$s-y_2=(t-x_2)^3-(t-x_2)$，

即 $y_2=(x_2-t)^3-(x_2-t)+s$，可知点 $B_2(x_2,y_2)$

在曲线 C_1 上。 ……7 分

反过来，同样可以证明，

在曲线 C_1 上的点关于点 A 的对称点在曲线 C 上。

因此，曲线 C 与 C_1 关于点 A 对称。

（III）证明：因为曲线 C 与 C_1 有且公有一个公共点，

所以，方程组 $y=x_3-x$，$y=(x-t)^3-(x-t)+s$

有且公有一组解。 消去 y，整理得

$3tx_2-3t_2x+(t_3-t-s)=0$， 这个关于 x 的一元二次方程有且仅有一个根。 ……10 分

所以 $t\neq0$ 并且其根的判别式 $\triangle=9t_4-12t(t_3-t-s)=0$。

即 $t\neq0$，$t(t_3-4t-4s)=0$。

$\therefore s=t_3/4-t$ 且 $t\neq0$。 ……12 分

(25) （Ⅰ）设数列$\{b_n\}$的公差为 d，由题意得

$b_1=1$，$10b_1+10(10-1)/2d=100$。

解得 $b_1=1$，$d=2$。 $\therefore b_n=2_{n-1}$。 ……2 分

（Ⅱ）由 $b_n=2_{n-1}$，知

$S_n=\lg(1+1)+\lg(1+1/3)+\cdots+\lg(1+1/2_{n-1})$

$=\lg[(1+1)(1+1/3)\times\cdots\times(1+1/2_{n-1})]$，$1/2\lg b_{n+1}$

$=\lg\sqrt{2n+1}$。

因此要比较 S_n 与 $1/2\lg b_{n+1}$ 的大小，可先比较

$(1+1)(1+1/3)\times\cdots\times(1+1/2n-1)$与$\sqrt{2n+1}$的大小。

取 n=1 有$(1+1)>\sqrt{3}$， 取 n=2 有

$(1+1)(1+1/3)>\sqrt{5}$， 由此推测

$(1+1)(1+1/3)\times\cdots\times(1+1/2n-1)>\sqrt{2n+1}$。 ① ……5 分

若①式成立，则由对数函数性质可断定：

$S_n>1/2\lg b_{n+1}$。 ……7 分

下面用数学归纳法证明①式。

(i)当 n=1 时已验证①式成立。

(ii)假设当 $n=k(k\geq1)$时，①式成立，即

$(1+1)(1+1/3)\times\cdots\times(1+1/2k-1)>\sqrt{2k+1}$。 ……8 分

那么，当 n=k+1 时，

$(1+1)(1+1/3)\cdots(1+1/2k-1)(1+1/2(k+1)-1)>\sqrt{2k+1}(1+1/2k+1)=\sqrt{2k+1}/2k+1(2k+2)$。

$\therefore[\sqrt{2k+1}/2k+1(2k+2)]2-[\sqrt{2k+3}]2$

$=4k2+8k+4k2+8k+3)/2k+1=1/2k+1>0$，

$\therefore\sqrt{2n+1}/2k+1(2k+2)>\sqrt{2k+3}$。

因而$(1+1)(1+1/3)\cdots(1+1/2k-1)(1+1/2k+1)>\sqrt{2(k+1)+1}$。

这就是说①式当 n=k+1 时也成立。

由(i)，(ii)知①式对任何正整数 n 都成立。

由此证得：$S_n=1/2\lg b_{n+1}$。 ……12 分

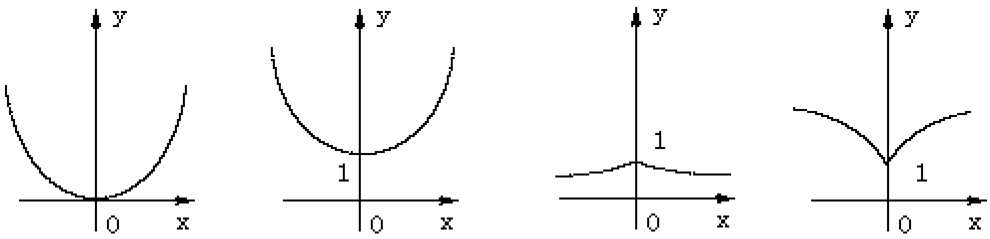
1998 年全国高校招生数学统考试题（文史类）

一、选择题：本大题共15小题；第（1）—（10）题每小题4分，第（11）—（15）题每小题5分，共65分。在每小题给出的四项选项中，只有一项是符合题目要求的。

（1）sin600°的值是

（A）1/2　（B）-1/2　（C）$\sqrt{3}/2$　（D）$-\sqrt{3}/2$

（2）函数y=a|x|(a>1)的图象是



（A）　（B）　（C）　（D）

（3）已知直线x=a(a>0)和圆$(x-1)^2+y^2=4$相切，那么a的值是

（A）5　（B）4　（C）3　（D）2

（4）两条直线$A_1x+B_1y+C_1=0$，$A_2x+B_2y+C_2=0$垂直的充要条件是

（A）$A_1A_2+B_1B_2=0$　（B）$A_1A_2-B_1B_2=0$

（C）$A_1A_2/B_1B_2=-1$　（D）$B_1B_2/A_1A_2=1$

（5）函数f(x)=1/x(x≠0)的反函数f-1(x)=

（A）x(x≠0)　（B）1/x(x≠0)

（C）-x(x≠0)　（D）-1/x(x≠0)

（6）已知点P（sinα-cosα,tgα）在第一象限，则[0,2π)内α的取值范围是

（A）(π/2,3π/4)∪(π,5π/4)　（B）(π/4,π/2)∪(π,5π/4)

（C）(π/2,3π/4)∪(5π/2,3π/2)　（D）(π/4,π/2)∪(3π/4,π)

（7）已知圆锥的全面积是底面积的3倍，那么该圆锥的侧面积展开图扇形的圆心角为

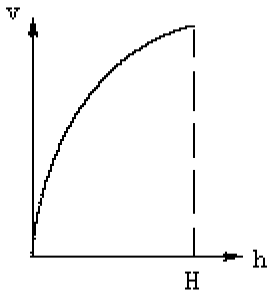
(A) 120° (B) 150° (C) 180° (D) 240°

(8) 复数-i的一个立方根是i，它的另外两个立方根是

(A) $\sqrt{3}/2\pm1/2$ (B) $-\sqrt{3}/2\pm1/2i$

(C) $\pm\sqrt{3}/2+1/2i$ (D) $\pm\sqrt{3}/2-1/2i$

(9) 如果棱台的两底面积分别是S，S'，中截面的面积是S0，那么



(A) $2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$

(B) $S_0=\sqrt{S'S}$

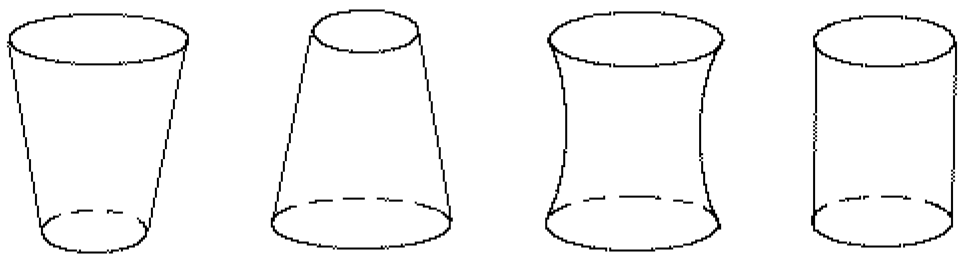
(C) $2S_0=S+S'$

(D) $S_0^2=2S'S$

(10) 2名医生和4名护士被分配到2所学校为学生体检，每校分配1名医生和2名护士。不同的分配方法共有

(A) 6种 (B) 12种 (C) 18种 (D) 24种

(11) 向高为H的水瓶中注水，注满为止，如果注水量V与深h的函数关系的图象如右图所示，那么水瓶的形状是



(A) (B) (C) (D)

(12) 椭圆$x_2/1_2+y_2/3=1$的焦点为F_1，点P在椭圆上，如果线段PF_1的中点M在y轴上，那么点M的纵坐标是

(A) $\pm\sqrt{3}/4$　(B) $\pm\sqrt{3}/2$　(C) $\pm\sqrt{3}/2$　(D) $\pm 3/4$

(13) 球面上有3个点，其中任意两点的球面距离都等于大圆周长的1/6，经过这3个点的小圆的周长为4π，那么这个球的半径为

(A) $4\sqrt{3}$　(B) $2\sqrt{3}$　(C) 2　(D) $\sqrt{3}$

(14) 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列，其最小内角为

(A) arccos$\sqrt{5}$-1/2　(B) arcsin$\sqrt{5}$-1/2

(C) arccos1-$\sqrt{5}$/2　(D) arcsin1-$\sqrt{5}$/2

(15) 等比数列$\{a_n\}$的公比为-1/2，前n项的和S_n满足$\lim_{n\to\infty}S_n=1/a_1$，那么$a_1$的值为

(A) $\pm\sqrt{3}$　(B) $\pm 3/2$　(C) $\pm\sqrt{2}$　(D) $\pm\sqrt{6}/2$

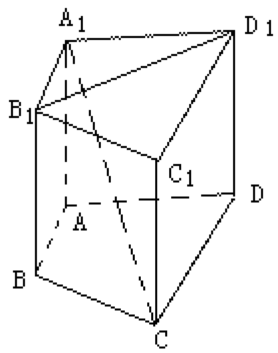
二、填空题：本大题共4小题，每小题4分，共16分，把答案填在题中横线上。

(16) 设圆过双曲线$x_2/9-y_2/16=1$的一个顶点和一个焦点，圆心在双曲线上，则圆心到双曲线中心的距离是_____。

(17) $(x+2)10(x_2-1)$的展开式x_{10}的系数为______（用数字作答）。

(18) 如图，在直四棱柱$A_1C_1D_1$—ABCD中，当底面四边形ABCD满足条件____时，有$A_1C\perp B_1D_1$。（注：填上你认为正确的一种条件即可，不必考虑所有可能的情形。）

(19) 关于函数$F(x)=4\sin(2x+\pi/3)(x\in R)$，有下列命题：



①由$f(x_1)=f(x_2)=0$可得x_1-x_2必是π的整数倍；

②$y=f(x)$的表达式可改写为$y=4\cos(2x-\pi/6)$；

③$y=f(x)$的图象关于点（$-\pi$、6，0）对称；

④$y=f(x)$的图象关于直线$x=-\pi/6$对称。

其中正确的命题的序号是_____。（注：把你认为正确的命题的序号都填上。）

三、解答题：本大题共6小题；共69分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（20）（本小题满分10分）设$a\neq b$，解关于x的不等式

$$a_2x+b_2(1-x)\geq[ax+b(1-x)]^2.$$

（21）（本小题满分10分）在△ABC中，a,b,c分别是角A,B,C的对边，设a+c=2b，$A-C=\pi/3$，求sinB的值。以下公式供解题时参考：

$$\sin\theta+\sin\phi=2\sin\theta+\phi/2\cos\theta-\phi/2,$$

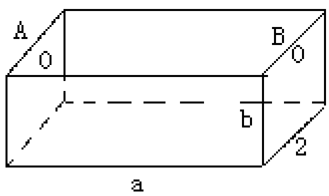
$$\sin\theta-\sin\phi=2\cos\theta+\phi/2\sin\theta-\phi/2,$$

$$\cos\theta+\cos\phi=2\cos\theta+\phi/2\cos\theta-\phi/2,$$

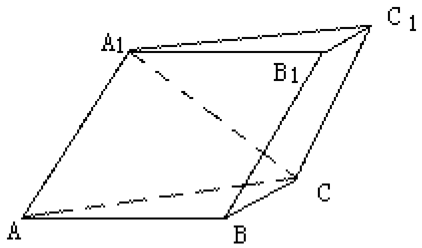
$$\cos\theta-\cos\phi=-2\sin\theta+\phi/2\sin\theta-\phi/2$$

（21）（本小题满分11分）如图，直线l_1和l_2相交于点M，$l_1\perp l_2$，点$N\in l_1$。以A、B为端点的曲线段C上的任一点到l_2的距离与点N的距离相等。若△AMN为锐角三角形，$|AM|=\sqrt{17}$，$|AN|=3$，且$|BN|=6$。建立适当的坐标系，求曲线C的方程。

（22）（本小题满分12分）如图，为处理含有某种杂质的污水，要制造一底宽为2米的无盖长方体沉淀箱。污水从A孔流入，经沉淀后从B孔流出。设箱体的长度为a米，高度为b米。已知流出的水中该杂质的质量分数与a,b的乘积ab成反比。现有制箱材料60平方米。问当a,b各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小（A、B孔的面积忽略不计）。



（23）（本小题满分12分）已知斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$的侧面A_1ACC_1与底面ABC垂直，$\angle ABC=90°$，BC＝2，AC＝2　，且$AA_1\perp A_1C$，$AA_1=A_1C$。



（Ⅰ）求侧棱A_1A与底面ABC所成角的大小；

（Ⅱ）求侧面A_1ABB_1与底面ABC所成二面角的大小；

（Ⅲ）求顶点C到侧面A_1ABB_1的距离。

（24）（本小题满分12分）设曲线C的方程是$y=x^3-x$，将C沿x轴、y轴正向分别平行移动t、s单位长度后得曲线C_1。

（Ⅰ）写出曲线C_1的方程；

（Ⅱ）证明曲线C与C_1关于点A（t/2,s/2）对称；

（Ⅲ）如果曲线C与C_1有且仅有一个公共点，证明s=t3/4-t且t≠0。

（25）（本小题满分12分）已知数列$\{b_n\}$是等差数列，$b_1=1,b_1+b_2+\cdots+b_{10}=145$。

（Ⅰ）求数列$\{b_n\}$的能项b_n；

（Ⅱ）设数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\log a(1+1/b_n)$（其中a>0，且a≠1），记S_n是数列$\{a_n\}$的前n项的和。试比较S_n与$1/3\log ab_n+1$的大小，并证明你的结论。

1998 年全国高校招生数学统考试题

答案（文史类） 数学（文史类）

一、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答 案	D	B	C	A	B	B	C	D	A	B
题 号	11	12	13	14	15					
答 案	B	A	B	C	D					

二、填空题

（16）16/3

（17）-5120

（18）AC⊥BD

(19) ①，③

三、解答题：

(20) 解：将原不等式化为 (a2-b2)x-b2≥

(a-b)2x2+2(a-b)bx+b2， ……4 分

移项，整理后得 (a-b)2(x2-x)≤0，

∵a≠b 即(a-b)2>0， ∴x2-x≤0， ……7 分

即 x(x-1)≤0。 解此不等式，

得解集 {x|0≤x≤1}。 ……10 分

(21) 解：由正弦定理和已知条件 a+c=2b 得

sinA+sinC=2sinB。 ……2 分 由和差化积公式

得 2(sin(A+C)/)2(cos(A-C)/2)=2sinB。 由 A+B+C=π，

得 sin(A+C)/2=cosB/2， 又 A-C=π/3，得

$\sqrt{3}$/2cosB/2=sinB，

∴($\sqrt{3}$/2)cosB/2=2(sinB/2)(cosB/2)。 ……6 分

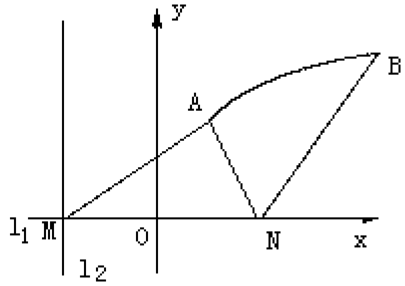
∵0<B/2<π/2，cosB/2≠0， ∴sinB/2=$\sqrt{3}$/4，

从而 cosB/2=$\sqrt{1-\sin^2\frac{B}{2}}$=$\sqrt{13}$/4 ……9 分

∴sinB=$\sqrt{3}$/2×$\sqrt{13}$/4=$\sqrt{39}$ /8 ……11 分

(22)

解法一：如图建立坐标系，以 l_1 为 x 轴，MN 的



垂直平分线为 y 轴，点 O 为坐标原点。 依题意

知：曲线段 C 是以点 N 为焦点，以 l_2 为准线的抛物线的一段，其中 A、B 分别为 C 的端点。 设曲线段 C 的方程为 y_2=2px (p>0),(x_A≤x≤x_B,y>0)，其中 x_A,x_B 分别为 A，B 的横坐标，p=|MN|。所以 M(-p/2,0),N(p/2,0)。 ……4 分

由|AM|=$\sqrt{17}$，|AN|=3 得

(x_A+p/2)2+2px_A=17， ①

(x_A-p/2)2+2px_A=9。 ② ……6 分

由①，②两式联立得 x_A=4/p，再将其代

入①式并由 p>0 解得 p=4，x_A=1；

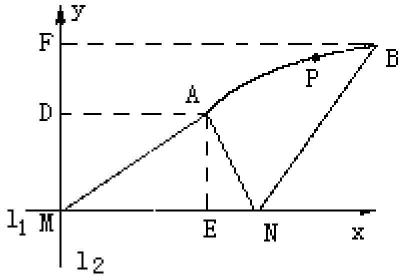
或 p=2，x_A=2。 因为△AMN 是锐角三角形，

所以 p/2>x_A，故舍去 p=2，x_A=2。

∴p=4，x_A=1。 由点 B 在曲线段 C 上，

得 x_B=|BN|-p/2=4。 综上得曲线段 C 的方程式为 y_2=8x(1≤x≤4,y>0)。 ……12 分

解法二：如图建立坐标系，分别以 l_1、l_2



为 x、y 轴，M 为坐标原点。 作 $AE\perp l_1$，

$AD\perp l_2$，$EF\perp l_2$，垂足分别为 E、D、F。 ……2 分

设 $A(x_A,y_A)$、$B(x_B,y_B)$、$N(x_N,0)$。

依题意有 $x_A=|ME|=|DA|=|AN|=3$，

$y_A=|DM|=2\sqrt{2}$， 由于△AMN 为锐角三角形，故有 $x_N=|AE|+|EN|=4$。

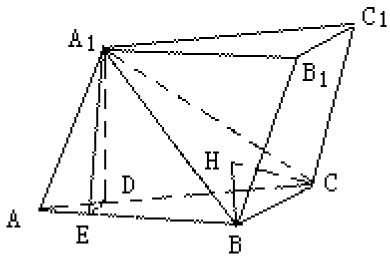
$x_B=|BF|=|BN|=6$。 ……7 分

设点 P(x,y)是曲线段 C 上任一点，则由题意知 P 属于集合 $\{(x,y)|(x-xN)2=x_2,x_A\le x\le x_B,y>0\}$。 ……10 分

故曲线段 C 的方程

$y_2=8(x-2)(3\le x\le 6,y>0)$。 ……12 分

(23) 解：（Ⅰ）作 $A_1D\perp AC$，垂足为 D，



由面 $A_1ACC_1\perp$面 ABC，得

$A_1D\perp$面 ABC， ∴$\angle A_1AD$

为 A_1A 与面 ABC 所成的角。……2 分

∵$AA_1\perp A_1C$，$AA_1=A_1C$，

∴$\angle A_1AD=45°$为所求。 ……4 分

（Ⅱ）作 $DE\perp AB$，垂足为 E，连 A_1E，则由 $A_1D\perp$面 ABC，得 $A_1E\perp AB$。 ∴$\angle A_1ED$ 是面 A_1ABB_1 与面 ABC 所成二面角的平面角。 ……6 分

由已知，$AB\perp BC$，得 $ED\parallel BC$。又 D 是 AC 的中点，$BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$， ∴$DE=1$，$AD=A_1D=\sqrt{3}$，$tgA_1ED=A_1D/DE=\sqrt{3}$。故$\angle A_1ED=60°$为所求。 ……8 分

（Ⅲ）解法一：由点 C 作平面 A_1ABB_1 的垂线，垂足为 H，则 CH 的长是 C 到平面 A_1ABB_1 的距离。 ……10 分

连结 HB，由于 $AB\perp BC$，得 $AB\perp HB$。 又 $A_1E\perp AB$，

知 $HB\parallel A_1E$，且 $BC\parallel ED$， ∴$\angle HBC=\angle A_1ED=60°$。

∴$CH=BC\sin 60°=\sqrt{3}$为所求。 ……12 分

解法二：连结 A_1B。 根据定义，点 C 到面 A_1ABB_1 的距离，即为三棱锥 $C-A_1AB$ 的高 h。 ……10 分

由 $V_{锥C-A_1AB}=V_{锥A_1-ABC}$ 得

$1/2S\triangle AA_1Bh=1/2S\triangle ABCA_1D$，

即 $1/3\times 2\sqrt{2}h=1/3\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{3}$，

∴$h=\sqrt{3}$ 为所求。 ……12 分

（24） 解法一：设 y 为流出的水中杂质的质量分数，则 y=k/ab，其中 k>0 为比例系数，依题意，即所求的 a,b 值使 y 值最小。 根据题设，有

4b+2ab+2a=60(a>0,b>0)， ……4 分

得 b=30-a/2+a（0<a<30)， ①

于是 y=k/ab=k/30a-a2/2+

=k/-a+32-64/a+2

=k/34-(a+2+64/a+2)

$\geq k/34-2\sqrt{(a+2)\times\frac{64}{2+a}}=k/18$，

当 a+2=64/a+2 时取等号，y 达最小值。 ……8 分

这时 a=6,a=-10（舍去）。 将 a=6 代入①式

得 b=3。 故当 a 为 6 米，b 为 3 米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小。……12 分

解法二：依题意，即所求的 a,b 的值使 ab 最大。

由题设知

4a+2ab+2a=60（a>0,b>0)， ……4 分

即 a+2b+ab=30（a>0,b>0)。 ∵$a+2b\geq 2\sqrt{ab}$，

∴$2\sqrt{2}\sqrt{ab}+ab\leq 30$， 当且仅当 a=2b 时，上式取等号。 由 a>0，b>0，解得 0<ab≤18。

即当 a=2b 时，ab 取得最大值，其最大值为 18。 ……10 分

∴2b2=18。解得 b=3，a=6。 故当 a 为 6 米，b 为 3 米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小。 ……12 分

（25）

（Ⅰ）设数列$\{b_n\}$的公差为 d，由题意得

$b_1=1$，$10b_1+10(10-1)/2d=100$。

解得 b1=1，d=2。 ∴bn=2n-1。 ……2 分

（Ⅱ）由 $b_n=2_{n-1}$，知

$S_n=\lg(1+1)+\lg(1+1/3)+\cdots+\lg(1+1/2_{n-1}+$

$=\lg[(1+1)(1+1/3)\times\cdots\times(1+1/2n-1)]$，

$1/2\lg bn+1=\lg\sqrt{2n+1}$。

因此要比较 S_n 与 $1/2\lg b_{n+1}$ 的大小，可先比较$(1+1)(1+1/3)\times\cdots\times(1+1/2_{n-1})$与$\sqrt{2n+1}$的大小。

取 n=1 有$(1+1)>\sqrt{3}$， 取 n=2 有$(1+1)(1+1/3)>\sqrt{3}$， 由此推测

$(1+1)(1+1/3)\times\cdots\times(1+1/2n-1)>\sqrt{5}$。 ① ……5 分

若①式成立，则由对数函数性质可断定：

$S_n>1/2\lg b_{n+1}$。 ……7 分

下面用数学归纳法证明①式。

(i)当 n=1 时已验证①式成立。

(ii)假设当 n=k(k≥1)时，①式成立，即

$(1+1)(1+1/3)\times\cdots\times(1+1/2k-1)>\sqrt{2k+1}$。 ……8 分

那么，当 n=k+1 时，

$(1+1)(1+1/3)\cdots(1+1/2k-1)(1+1/2(k+1)-1)>\sqrt{2k+1}(1+1/2k+1)=\sqrt{2k+1}/2k+1(2k+2)$。

$\therefore[\sqrt{2k+1}/2k+1(2k+2)]2-[\sqrt{2k+3}]2$

$=4k2+8k+4k2+8k+3)/2k+1=1/2k+1>0$，

$\therefore\sqrt{2n+1}/2k+1(2k+2)>\sqrt{2k+3}$。

因而 $(1+1)(1+1/3)\cdots(1+1/2k-1)(1+1/2k+1)>\sqrt{2(k+1)+1}$。

这就是说①式当 n=k+1 时也成立。

由(i)，(ii)知①式对任何正整数 n 都成立。

由此证得：$S_n=1/2\lg b_{n+1}$。 ……12 分

1999年普通高等学校招生全国统一考试
数 学（理工农医类）

试卷答案

本试卷分第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分。第Ⅰ卷1至2页。第Ⅱ卷3至8。共150分。考试时间120分钟。

第Ⅰ卷（选择题共60分）

注意事项：

l.答第Ⅰ卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目、试卷类型（A或B）用铅笔涂写在答题卡上。

2．每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后。再选涂其它答案，不能答在试题卷上。

3．考试结束。监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式： 正棱台、圆台的侧面积公式

三角函数的积化和差公式

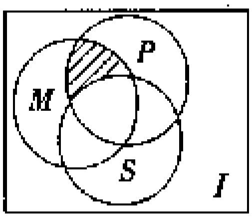
$\sin\alpha=\cos\beta[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha=\sin\beta[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha=\cos\beta[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha=\sin\beta[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$

一.选择题：本大题共14小题；第（1）—（10）题每小题4分，第（11）—（14）题每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。



（1）如图，I是全集，M、P、S是I的3个子集，则阴影部分所表示的集合是

（A） $(M\cap P)\cap S$　　（B） $(M\cap P)\cup S$

（C） $(M\cap P)\cap\overline{S}$　　（D） $(M\cap P)\cup\overline{S}$

（2）已知映射f：AB，其中，集合A={-3，-2，-1，l，2，3，4，}，集合B中的元素都是A中元素在映射f下的象，且对任意的a∈A，在B中和它对应的元素是{a}，则集合B中元素的个数是

（A）4　（B）5　（C）6　（D）7

（3）若函数y＝f（x）的反函数是y＝g（x），f（a）=b，ab 0，则g（b）等于

（A）a　（B）a-1　（C）b　（D）b-1

（4）函数f（x）＝Msin（ωx+ρ）（ω>0）在区间[a，b]上是增函数，且f（a）=-M，f（b）=M，则函数g（x）=Mcos（ωx+ρ）在[a，b]上

（A）是增函数　（B）是减函数

（C）可以取得最大值M　（D）可以取得最小值-M

（5）若 f（x）sinx 是周期为∏的奇函数，则 f（x）可以是

（A）sin x　（B）cos x　（C）sin 2x　（D）cos 2x

（6）在极坐标系中，曲线 $\rho=4\sin(\theta-\pi/3)$ 关于

（A）直线 $\theta=\pi/3$ 轴对称　（B）直线 $\theta=6/5\pi$ 轴对称

（C）点（2，$\pi/3$）中心对称　（D）极点中心对称

（7）若于毫升水倒人底面半径为 2cm 的圆柱形器皿中，量得水面的高度为 6cm，若将这些水倒人轴截面是正三角形的倒圆锥形器皿中，则水面的高度是

（A）$6\sqrt{3}$ cm　（B）6 cm　（C）$2\sqrt[3]{18}$ cm　（D）$3\sqrt[3]{12}$ cm

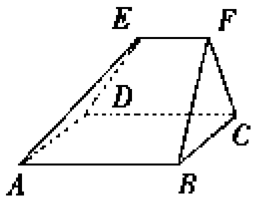
（8）若 $(2x+\sqrt{3})^4=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $(a_0+a_2+a_4)^2-(a_1+a_3)^2$ 的值为

（A）l　（B）-1　（C）0　（D）2

（9）直线 $\sqrt{3}x+y^2=0$ 截圆 $x^2+y^2=4$ 得的劣弧所对的圆心角为

（A）$\pi/6$　（B）$\pi/4$　（C）$\pi/3$　（D）$\pi/2$

（10）如图，在多面体 ABCDEF 中，已知面 ABCD 是边长为 3 的正方形，EF//AB，EF=3/2，EF 与面 AC 的距离为 2，则该多面体的体积为



（A）9/2　（B）5　（C）6　（D）15/2

（11）若 sina>tga>ctga($-\pi/2<a<\pi/2$)，则 a∈

（A）$(-\pi/2,-\pi/4)$　（B）$(-\pi/4,0)$

（C）$(0,\pi/4)$　（D）$(\pi/4,\pi/2)$

（12）如果圆台的上底面半径为 5．下底面半径为 R，中截面把圆台分为上、下两个圆台，它们的侧面积的比为 1：2，那么 R=

（A）10　（B）15　（C）20　（D）25

（13）已知两点 M（1，5/4）、N（-4，-5/4），给出下列曲线方程：

①4x＋2y-1=0②x2+y2=3 ③x2/2+y2=1 ④$x^2/2-y^2=1$

在曲线上存在点 P 满足|MP|=|NP|的所有曲线方程是

（A）①③　（B）②④　（C）①②③　（D）②③④

（14）某电脑用户计划使用不超过 500 元的资金购买单价分别为 60 元、70 元的单片软件和盒装磁盘，根据需要，软件至少买 3 片，磁盘至少买 2 盒，则不同的选购方式共有

（A）5 种　（B）6 种　（C）7 种　（D）8 种

第 II 卷（非选择题共 90 分）

注意事项：

1.第 II 卷共 6 页。用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。

2.答卷前将密封线内的项目填写清楚。

二.填空题：本大题共 4 小题；每小图 4 分，共 16 分把答案填在题中横

线

(15) 设椭圆 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ (a>b>0) 的右焦点为 F_1，右准线为 l_1。若过 F_1 且垂直于 x 轴的弦的长等于点 F_1 到 l_1 的距离，则椭圆的离心率是____________________。

(16) 在一块并排 10 垄的田地中，选择 2 垄分别种植 A、B 两种作物，每种作物种植一垄，为有利于作物生长，要求 A、B 两种作物的间隔不小于 6 垄，则不同的选垄方法共有________________种（用数字作答）。

(17) 若正数 a、b 满足 ab＝a+b+3，则 ab 的取值范围是________________。

(18) α、β是两个不同的平面，m、n 是平面及之外的两条不同直线。给出四个论断：①m⊥n ② α⊥β③n⊥β ④m⊥α以其中三个论断作为条件，余下一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题：____。

三.解答题：本大题共 6 小题：共 74 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

(19) （本小题满分 10 分）

解不等式

(20) （本小题满分 12 分）

设复数 $z=3\cos\theta+i\cdot 2\sin\theta$，$y=\theta-\arg Z(0<\theta<\pi/2)$求函数的最大值以及对应的θ值

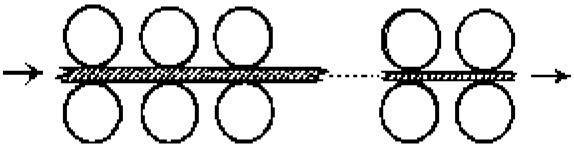
(21) 本小题满分 12 分

如图，已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 E 在棱 D_1D 上，截面 EACD1B，且面 EAC 与底面 ABcD 所成的角为 45°，AB＝a

（I）求截而 EAC 的面积：

（II）求异面直线 A_1B_1 与 AC 之间的距离；

（III）求三棱锥 B1—EAC 的体积



(22) （本小题满分 12 分）

上图为一台冷轧机的示意图；冷轧机由若干对轧辊组成。带钢从一端输人，经过各对轧辊逐步减薄后输出。

(1) 输入带钢的厚度为 a，输出带钢的厚度为β，若每对轧辊的减薄率不超过 ro，问冷轧机至少需要安装多少对轧辊？

（一对辊减薄率＝输入该对的带钢厚度－从该对输出的带钢厚度）输入该对的带钢厚度

1999 年普通高等学校招生全国统一考试
数学试题参考答案及评分标准(理工类)

错误！未定义书签。说明：

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算。第（1）－第（10）题每小题 4 分，第（11）－（14）题每小题 5 分，满分 60 分。

(1) C	(2) A	(3) A	(4) C	(5) B
(6) B	(7) D	(8) A	(9) C	(10) D
(11) B	(12) D	(13) D	(14) C	

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 4 分，满分 16 分

（15）1/2

（16）12

（17）[9,+∞]

（18）m⊥a，n⊥β，a⊥β==>m⊥n 或 m⊥n，m⊥a，m⊥β==>a⊥β

三．解答题

（19）本小题主要考查对数函数的性质，对数不等式、无理不等式解法等基础知识，考查分类论的思想，满分 10 分

解：原不等式等价于

$$\begin{cases} 3\log_a x-2\geqslant 0, & ① \\ 3\log_a x-2<(2\log_a x-1)^2, & ② \\ 2\log_a x-1>0. & ③ \end{cases}$$ ——————4

由①得 logax≥2/3

由②得 logax<3/4，或 logax>1,

由③得 logax>1/2.

由此得 2/3≤logax<3/4,或 logax>1.——————8 分

当 a>1 时得所求的解是

$\{x|a^{\frac{2}{3}}\le x<a^{\frac{3}{4}}\}\cup\{x|x>a\}$;

当 0<a<1 时得所求的解集是：

$\{x|a^{\frac{3}{4}}<x\le a^{\frac{2}{3}}\}\cup\{x|0<x<a\}$.——————10 分

（20）本小题主要考查复数的基本概念、三角公式和不等式等基础知识，考查综合运用所学数学知识解决问题的能力，满分 12 分。

解：由 0＜θ＜π/2 得 tgθ＞0。

由 z=3cosθ+i·2sinθ,

得 0＜argz＜π/2 及 tg(argz)=2sinθ/3cosθ=2/3tgθ.

故 tgy=tg(θ-argz)=(tgθ-2/3tgθ)/(1+2/3tg2θ)

=1/(3/tgθ+2tgθ)

∵3/tgθ+2tgθ≥$2\sqrt{6}$

$\therefore 1/(3/tg\theta+2tg\theta)\le\sqrt{6}/12$.

当且仅当 $3/tg\theta=2tg\theta$ ($0<\theta<\pi/2$ 时，

即 $tg\theta=\sqrt{6}/2$ 时，上式取等号。

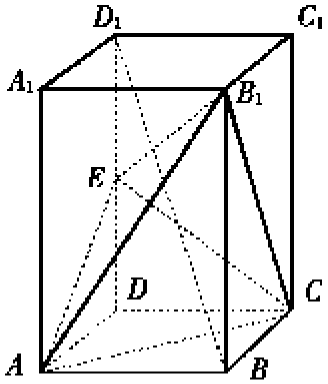
所以当 $\theta=arctg\sqrt{6}/2$ 时，函数 tgy 取最大值 $\sqrt{6}/12$。

由 $y=-arg\theta z$ 得 $y\in(-\pi/2,\pi/2)$. 由于在（$-\pi/2$，$\pi/2$)内因正切函数是递增函数，函数 y 也

取最大值 $arctg\sqrt{6}/12$. 12 分

（21）本小题主要考查空间线面关系、二面角和距离的概念思维能力、空间想象能力及运算能力。满分 12 分。

（1）解：如图，连结 DB 交 AC 于 O，连结 EO。



∵底面 ABCD 是正方形

∴DO⊥AC。

又∵ED⊥底面 AC，

∴EO⊥AC。

∴∠EOD 是面 EAC 与底面 AC 所成二面角的平面角，———2 分

∴ ∠EOD＝45°。

DO ＝ (2)1/2/2a，AC=(2)1/2a，

Eo=[(2)1/2a·sec45°]/2=a.

故 S△EAC=(2)1/2×a2/2

4 分

（II）解：由题设 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱，得 A_1A⊥底面 AC，A_1A⊥AC。

又 $A_1A\perp A_1B_1$，

∴A_1A 是异面直线 A_1B_1 与 AC 间的公垂线。 ————6 分

∵D_1B∥面 EAC，且面 D_1BD 与面 EAC 交线为 EO，

∴ D_1B∥EO。

又 O 是 DB 的中点，

∴E 是 D_1D 的中点， D_1B＝2ED＝2a。

异面直线 A_1B_1 与 AC 间的距离为(2)1/2a。 ————8 分

(III)解法一：如图，连结 D_1B_1。

∵D_1D＝DB＝(2)1/2a，

∴BDD_1B_1 是正方形。

连结 B_1D 交 D_1B 于 P，交 EO 于 Q。

∵$B_1D\perp D_1B$。 EO∥D_1B，

∴B_1D⊥EO

又 AC⊥EO， AC⊥ED，

∴AC⊥面 BDD_1B_1

∴B_1D⊥AC

$\therefore B_1D \perp$ 面 EAC。

$\therefore B_1Q$ 是三棱锥 B_1－EAC 的高。 －－－－10 分

由 DQ＝PQ，得 $B_1Q=3B_1D/4=3a/2$。

$\therefore VB_1$－EAC＝(1/3)·[(2)1/2a2/2]·(3/20=(2)1/2·a3/4.

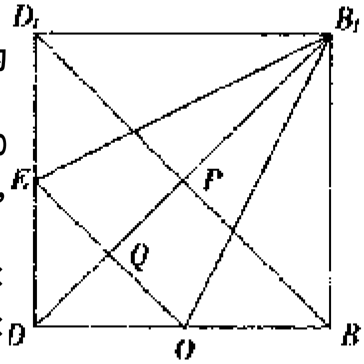
所以三棱锥了－EAC 的体积是(2)1/2·a3/4. －－－－12 分

解法二：连结 B_1O，则 VB_1－EAC＝2VA－EOB_1。

∵AO⊥面 BDD_1B_1，

∴AO 是三棱锥 A－EOB_1 的高，AO＝(2)1/2·a/2

在正方形 BDD_1B_1 中，E、O 分别是 D_1D、DB 的中点(如右图)，



则 $S\triangle EOB_1=3a2/4$.

∴ VB_1-EAC=2 × (1/30 × (3a2/4) × [(2)1/2a/2}=(2)1/2·a3/4.

所以三棱锥 B1－EAC 的体积是(2)1/2·a3/4.－－－－12 分。

(22) 本小题主要考查等比数列，对数计算等基本知识，考查综合运用数学知识和方法解决实际问题的能力，满分 14 分。

(I) 解：厚度为 a 的带钢经过减薄率均为 ro 的 n 对轧辊后厚度为 a(1-ro)n.为使出带钢的厚度不超过β，冷轧机的轧辊数（以对为单位）应满足

a(1-ro)n≤β，

即 (1-ro)n≤β/a －－－－4 分

由于(1-ro)n>0，β/a>0,对上式两端取对数，得

n_lg(l-ro)≤lg(β/a).

由于 lg(1-ro)<0,

所以 n≥(lgβ-lga)/[lg(1-ro)].

因此，至少需要安装不小于(lgβ-lga)/[lg(1-ro)]的整数对轧辊 －－－－7 分

(II) 解法一：第 k 对轧辊出口处疵点间距离为轧辊周长，在此处出口的两疵点间带钢的体积为 1600a×(1-r)k×宽度 （其中 r＝20%），而在冷轧机出口处两疵点间带钢的体积为 Lk×a(1-r)4×宽度。因宽度相等，且无损耗，由体积相等得

1600·a(1-r)k=Lk·a(1-k)4(r=20%),

即 Lk=1600·0.8K-4. －－－－10 分

由此得 l_3=2000(㎜),

l_2=2500(㎜),

l_1=3125㎜)

填表如下：

轧辊序号 K	1	2	3	4
疵点间距 LK（㎜）	3125	2500	2000	1600

————14 分

解法二：第 3 对轧辊出口疵点间距为轧辊周长，在此处出口的两疵点间带钢体积与冷轧机出口处两疵点间带钢体积相等，因宽度不变，有：

$1600=L_3\cdot(1-0.2)$,

所以 $L_3=1600/0.8=2000$(mm). ————10 分

同理 $L_2=L_3/0.8=2500$(mm).

$L_1=L_2/0.8=3125$(mm).

填表如下：

轧辊序号 K	1	2	3	4
疵点间距 LK（mm）	3125	2500	2000	1600

————14 分

（23）本小题主要考查函数的基本概念、等比数列、数列极限的基础知识，考查归纳、推理和综合的能力。满分 14 分。

(1) 解：依题意 f(0) =0，又由 f(x1)=1，当 0≤y≤1 时，，函数 y＝f(x)的图象是斜率为 b0=1 的线段，故由

$f(x_1)-f(0)/x_1-0=1$ 得 $x_1=1$ 2 分

又由 $f(x_2)=2$,当 1≤y＜2 时，函数 y=f(x)的图象是斜率为 B 的线段，故由

$f(x_2)-f(x_1)/X_2-X_1=b$ 即 $x_2=1+1/b$. 2 分

记 $x_0=0$,由函数 y=f(x)图象中第 n 段线段的斜率为 bn-1，故得

$f(x_n)\ -f(x_{n-1})/x_n-x_{n-1}=b_{n-1}$,

又 $f(x_n)=n,f(x_{n-1})=n-1$；

$\therefore x_n-x_{n-1}\ =(1/b)_{n-1},n=1,2,\cdots$。

由此知数列{xn-xn-1}为等比数列，其首项为 1/b，公比为 1/b

因 b≠1，得

$xn=\sum_{k=1}^{n}(xK-XK-1)$

$=1+1/b\ \cdots+1/bn-1=b-(1/b)n-1$,

即 $x_n=b-(1/b)_{n-1}/(b-1)$.———6 分

(II)解：当 0≤y≤1，从（I）可知 y＝x，即当 0≤x≤1 时，f(x)=x

当 n≤y≤n ＋1 时，即当 $x_n\le x\le x_{n+1}$ 时，由(I)可知

$f(x)=n+b_n(x-x_n)(x_n\le x\le x_{n+1},n=1,2,3\cdots)$ ———8 分

为求函数 f(x)的定义域，须对 $x_n=b-(1/b)_{n-1}/(b-1)(n=1,2,3\cdots)$ 进行讨论

当 b＞1 时，$\lim\limits_{n\to\infty}xn=\lim\limits_{n\to\infty}\ b-(1/b)_{n-1}/(b-1)=b/(b-1)$

当 0＜b＜1 时，n→∞，x_n 也趋向于无穷大。

综上，当 b>1 时，y=f(x)的定义域为[0,b/(b-1))；

当 0＜b＜1 时，y＝f（x）的定义域为[0,+∞] ———10 分

（24）本小题主要考查曲线与方程，直线和圆锥曲线等基础知识，以及求动点轨迹的基本技能和综合运用数学知识解决问题的能力。满分 14

分。

解法一：依题意，记 B（－1，b）（b∈R），则直线 OA 和 OB 的方程分别为 y＝0 和 y＝－bx，设点 C（x,y），则有 0≤x<a,由 OC 平分∠AOB，知点 C 到 OA、OB 距离相等，根据点到直线的距离公式得

$|y|=|y+bx|/\sqrt{1+b^2}$ ① －－－－4 分

依题设，点 C 在直线 AB 上，故有

$y=[-b/(1+a)](x-a)$. －－－－6 分

由 $x-a\neq 0$，得 $b=-(1+a)y/(x-a)$. ②

将②式代入①式得

$y^2[1+(1+a)^2y^2/(x-a)^2]=[y-(1+a)xy/x-a]^2$,

整理得

$y^2[(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2]=0$. －－－－9 分

若 $y\neq 0$，则 $(1-a)x^2-2as+(1+a)y^2=0(0<x<a)$;

若 y=0,则 b=0,∠AOB＝π，点 C 的坐标为（0，0），满足上式，

综上得点 C 的轨迹方程为

$(1-a)a^2-2ax+(1+A)y^2=0(0\neq x<a)$, －－－－10 分

$\because a\neq 1$,

$\therefore [x-a/(1-a)]2/[a/(1-a)]2+y2/[a2/(1-a2)]$

$=1(0\leq x<a)$. ③ －－－－12 分

由此知，当〔」「工时，方程③ 表示椭圆孤段；

当 a>1 时，方程③ 表示双曲线一支的弧段。 －－－－14 分

解法二：如图，设 D 是 l 与 x 轴的交点，过点 C 作 CE⊥x 轴，E 是垂足。

（1）当|BD|≠0 时，设点 C（x,y），则 0<x<a y≠0.

由 CE∥BD 得 $|BD|=|CE|\cdot|DA|/|EA|=|y|/a-x(1+a)$. －－－－3 分

$\because \angle COA=\angle COB=\angle COD-\angle BOD=\pi-\angle COA-\angle BOD$,

$\therefore 2\angle COA=\pi-\angle BOD$,

$\because$ $tg(2COA)=2tg\angle COA/(1-tg^2\angle COA)$, $tg(\pi-\angle BOD)=-tg\angle BOD$,

$tg\angle COA=|y|/x$, $tg\angle BOD = \angle|BD|/|OD|=|y|/a-x(1+a)$.

$\therefore [2\cdot|y|/x]/[1-(y^2/x^2)]=[|y|/(a-x)](1+a)$,

整理得 $(1-a)x2-2ax+(1+a)y2=0(0<x<a)$.

(II) 当|BD|=0 时，∠BOA＝π，则点 C 的坐标为（0，0），满足上式。

综合（I）（II），得点 C 的轨迹方程为

$(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2=0(0\leq x<a)$ －－－－10 分

以下同解法一。

1999年普通高等学校招生全国统一考试
数学试卷(文史)

本试卷分第I卷（选择题）和第II卷（非选择题）两部分。第I卷1至2页。第II卷3至8页。共150分。考试时间120分钟。

第I卷（选择题共60分）

注意事项：

l.答第I卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目、试卷类型（A或B）用铅笔涂写在答题卡上。

2.每小题选出答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后。再选涂其它答案，不能答在试题卷上。

3.考试结束，监考人将本试卷和答题卡一并收回。

参考公式：正棱台、圆台的侧面积公式

三角函数的积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]/2$ $\cos\alpha\sin\beta=[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]/2$

$\cos\alpha\cos\beta=[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]/2$ $\sin\alpha\sin\beta=-[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]/2$

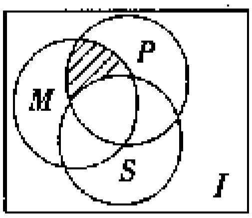
正棱台、圆台的侧面积公式：

S台侧=(c'+c)L/2其中c'和c表示圆台的上下底面的周长，L表示斜高或母线长。

台体的体积公式：$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$ 其中s,s'分别表示上下底面积，h表示高。

一.选择题：本大题共14小题；第(1)—(10)题每小题4分，第(11)—(14)题每小题5分，共60分在每小题给出的四个选顶中，只有一顶是符合题目要求的。

（1）如图，I是全集，M、P、S是I的3个子集，则阴影部分所表示的集合是



(A) $(M\cap P)\cap S$ (B) $(M\cap P)\cup S$

(C) $(M\cap P)\cap \overline{S}$ (D) $(M\cap P)\cup \overline{S}$

(2) 已知映射f：A→B，其中，集合A＝{-3，-2，-1，1，2，3，4}，集合B中的元素都是A中元素在映射f下的象，且对任意的a∈A，在B中和它对应的元素是|a|，则集合B中元素的个数是

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

(3) 若函数y＝f（x）的反函数是y=g（x），f（a）=b，ab≠0，则g（b）等于

(A) a (B) a-1 (C) b (D) b-1

(4) 函数f（x）＝Msin（ωx+ρ）（ω>0）在区间[a，b]上是增函数，且f（a）=-M，f（b）=M，则函数g（x）=Mcos（ωx+ρ）在[a，b]上

(A) 是增函数　　　　(B) 是减函数

(C) 可以取得最大值M　(D) 可以取得最小值-M

(5) 若f（x）sinx是周期为∏的奇函数，则f（x）可以是

(A) sinx (B) cosx (C) sin2x (D) cos2x

(6) 曲线x2+y2+2$\sqrt{2}$x-2$\sqrt{2}$y=0关于

(A) 直线x=轴对称 (B) 直线y=-x轴对称

(C) 点（-2，$\sqrt{2}$）中心对称 (D) 点（-$\sqrt{2}$，0）中心对称

(7) 若干毫升水倒人底面半径为2cm的圆柱形器皿中，量得水面的高为6cm，若将这些水倒人轴截面是正三角形的倒圆锥形器皿中，则水面的高度是

(A) 6$\sqrt{3}$cm (B) 6cm (C) 2$\sqrt[3]{18}$cm (D) 3$\sqrt[3]{12}$cm

(8) 若（2x＋$\sqrt{3}$）3＝a0+a1x+a2x2+a3x3，则（a0+a2）2-（a1+a3）2的值为

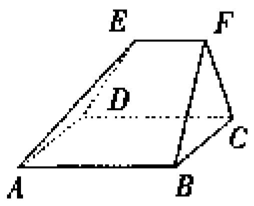
(A) -1 (B) l (C) 0 (D) 2

(9) 直线$\sqrt{3}$x＋y-2$\sqrt{3}$=0截圆x2+y2=4得的劣弧所对的圆心角为

(A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

(10) 如图，在多面体ABCDEF中，已知面ABCD是边长为3

的正方形，



EF∥AB，EF=3/2，EF与面AC的距离为2，则该多面体的体积为

(A) 9/2 (B) 5 (C) 6 (D) 15/2

(11) 若sina＞tga＞ctga($-\frac{\pi}{2}$＜a＜$\frac{\pi}{2}$)，则a∈

(A) ($-\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{4}$)　　(B) ($-\frac{\pi}{4}$，0)

(C) (0，$\frac{\pi}{4}$)　　(D) ($\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{2}$)

(12) 如果圆台的上底面半径为5，下底面半径为R，中截面把圆台分为上、下两个圆台，它们的侧面积的比为1：2，那么R=

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25

(13) 给出下列曲线：

①4x+2y-1=0②x2+y2=3③x2/2+y2=1④x2/2-y2=1其中与直线r＝-2x-3有交点的所有曲线是

(A) ①③ (B) ②④ (C) ①②③ (D) ②③④

(14) 某电脑用户计划使用不超过500元的资金购买单价分别为60元、70元的单片软件和盒装磁盘根据需要，软件至少买3片，磁盘至少买2盒则不同的选购方式共有

(A) 5种 (B) 6种 (C) 7种 (D) 8种

第II卷（非选择题共90分）

注意事项：

1．第II卷共6页，用钢笔或圆珠笔直接答在试题卷中。

2．答卷前将密封线内的项目填写清楚。

二，填空题：本大题共4小题；每小题4分，共16分，把答案填在题中横线

(15) 设椭圆(x2/a2)+(y2/b2)＝1 (a>b>0) 的右焦点为

F1，右准线为l1若过F1且垂直于x轴的弦的长等于点F1到l1的距离,则椭圆的离心率是_______

(16)在一块并排10垄的田地中，选择2垄分别种植A，B两种作物，每种作物种植一垄，为有利于作物生长。要求A、B两种作物的间隔不小于6垄，则不同的选垄方法共有_____种(用数字作答)

(17）若正数a、b满足ab=a+b+3，则ab的取值范围是

____

(18）α、β是两个不同的平面，m、n是平面α及β之外的两条不同直线，给出四个论断：

①m⊥n②α⊥β③n⊥β④m⊥α

以其中三个论断作为条件，余下一个论断作为结论，写出你认为正确的一个命题：

____

三.解答题：本大题共6小题；共74分解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

(19）（本小题满分10分）

解方程$\sqrt{3\lg x-2}$-3lgx+4=0

(20）（本小题满分12分）

数列{an}的前n项和记为Sn，已知an=5Sn-3（n∈N）求

(al+a3+…+a2n-1）的值。

(21）（本小题满分12分）

设复数z＝3cosθ+isinθ．求函数y=tg（θ－argz）（0<θ1B1C1D1,点E在棱D1D上,截面EAC∥D1B,且面EAC与底面ABCD所成的角为45°，AB=a

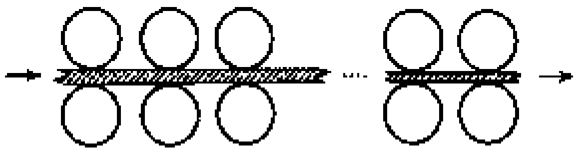
（Ⅰ）求截画EAC的面积；

（Ⅱ）求异面直线A1B1与AC之间的距离；

(III）求三棱B1—EAC的体积。

(23）（本小题满分14分）

下图为一台冷轧机的示意图。冷轧机由若干对轧辊组成，带钢从一端输入，经过各对轧辊逐步减薄后输出。



（1）输入带钢的厚度为a，输出带钢的厚度为β，若每对轧辊的减薄率不超过r0，问冷轧机至少需要安装多少对轧辊？

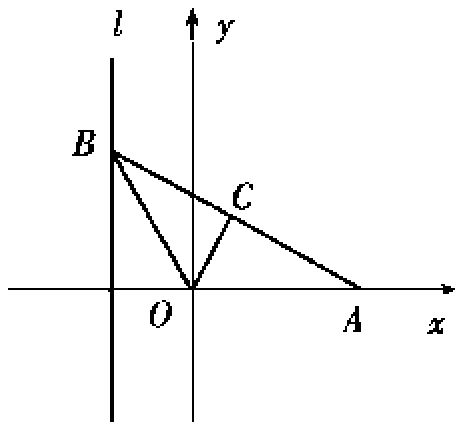
$$\left(\text{一对轧辊减薄率}=\frac{\text{输入该对的带钢厚度}-\text{从该对输出的带钢厚度}}{\text{输入该对的带钢厚度}}\right)$$

（II）已知一台冷轧机共有4对减薄率为20%的轧辊，所有轧辊周长均为1600㎜，若第k对轧辊有缺陷，每滚动一周在带钢上压出一个疵点，在冷轧机输出的带钢上，疵点的间距为Lk，为了便于检修，请计算L1、L2、L3并填入下表（轧钢过程中，带钢宽度不变，且不考虑损耗）。

轧辊序号	1	2	3	4
疵点间距Lk(单位：mm)				1600

（24）（本小题满分14分）

如图，给出定点A（a，0）（a＞0，a≠1）和直线l：x=-LB是直线l上的动点，∠BOA的角平分线交AB于点C，求点C的轨迹方程，并讨论方程表示的曲线类型与a值的关系。



1999年普通高等学校招生全国统一考试

数学试题参考答案及评分标准(文史类)

错误！未定义书签。

说明：

一、本解答指出了每题要考查的主要知识和能力，并给了一种或几种解

法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制订相应的评分细则。

二、对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

三、解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

四、只给整数分数，选择题和填空题不给中间分。

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算。第（1）－第（10）题每小题 4 分，第（11）－（14）题每小题 5 分，满分 60 分。

(1) C　(2) A　(3) A　(4) C　(5) B

(6) B　(7) B　(8) A　(9) C　(10) D

(11) B　(12) D　(13) D　(14) C

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算，每小题 4 分，满分 16 分

（15）1/2

（16）12

（17）[9,+∞]

（18）m⊥a，n⊥β，a⊥β==>m⊥n 或 m⊥n，m⊥a，m⊥β==>a⊥β

三．解答题

（19）本小题主要考查对数方程、无理方程的解法和运算能力。满分 10 分。

解：设(31gx-2)1/2=y,原方程化为

$y-y_2+2=0$．－－－－4 分

解得 y=-1，y=2．－－－－6 分

因为（31gx-2)1/2≥0,所以将 y=-1 舍去，

由（31gx-2)1/2=2

得 lgx=2，

所以 x=100．－－－－9 分

经检验 x=100 为原方程的解．－－－－10 分

（20）本小题主要考查等比数列和数列极限等基础知识，满分 12 分。

解：由 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ 知

$a_n=S_n-S_n-1(n\geq2)$,

$a_1=S_1$,－－－－ 2 分

由已知 $a_n=5S_{n-3}$ 得

$a_{n-1}=5S_{n-1}-3$．－－－－4 分

于是 $a_n-a_{n-1}=5(S_n-S_{n-1})=5a_n$,

所以 $a_n=-(a_n-1/4)$．－－－－6 分

由 $a_1=5S_1-3$,

得 $a_1=3/4$.

所以，数列$\{a_n\}$是首项 $a_1=3/4$，公比 q=-1/4 的等比数列．－－－－ 8 分

由此知数列 $a_1,a_3,a_5,\cdots,a_{2n-1},\cdots\cdots$是首项为 $a_1=3/4$，公比为(-1/4)2 的等比数列。

所以 $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2n-1})=(3/4)/[1-(-1/4)2]=4/5$．12 分

（21）本小题主要考查复数的基本概念、三角公式和不等式等基本知识，考查综合运用所学数学知识解决问题的能力，满分 12 分。

解：由 0<θ<π/2 得 tgθ>0.

由 z＝3cosθ+isinθ得 tg(arg z)=sinθ/3cosθ=1/3tgθ．———3 分

故 y=tg(θ-arg z)

=(tgθ－1/3tgθ)/(1＋1/3tg2θ) ————6 分

=2/[(3/tgθ)+tgθ]．

∵(3/tgθ)+tgθ≥2(3)1/2,

∴2/[(3/tgθ)+tgθ] ≤(3)1/2/3．————9 分

当且仅当 3/tgθ=tgθ(0<θ<π/2)时，即 tgθ＝(3)1/2 时，上式取等号。

所以当θ＝π/3 时，函数 y 取得最大值(3)1/2／3。 ————12 分。

（22）本小题主要考查空间线面关系，二面角和距离的概念，逻辑思维能力、空间想象能力及运算能力，满分 12 分。

（1）解：如图，连结 DB 交 AC 于 O，连结 EO。

∵底面 ABCD 是正方形

∴DO⊥AC。

又∵ED⊥底面 AC，

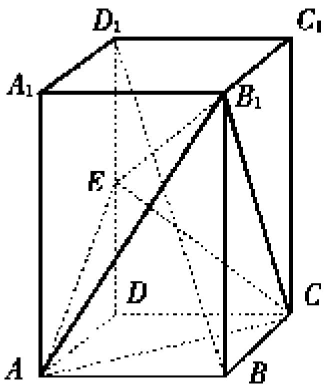
∴EO⊥AC。

∴∠EOD 是面 EAC 与底面 AC 所成二面角的平面角， ————2 分

∴ ∠EOD＝45°。

DO ＝ (2)1/2/2a， AC=(2)1/2a，Eo=[(2)1/2a·sec45°]/2=a.

故 S△EAC=(2)1/2×a_2/2 4 分



（II）解：由题设 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 是正四棱柱，得 A_1A⊥底面 AC，A_1A⊥AC。

又 A_1A⊥A_1B_1，

∴A_1A 是异面直线 A_1B_1 与 AC 间的公垂线。 ————6 分

∵D_1B∥面 EAC，且面 D_1BD 与面 EAC 交线为 EO，

∴ D_1B∥EO。

又 O 是 DB 的中点，

∴E 是 D_1D 的中点， D_1B＝2ED＝2a。

异面直线 A_1B_1 与 AC 间的距离为(2)1/2a。 ————8 分

(III)解法一：如图，连结 D_1B_1。

∵D_1D＝DB＝(2)1/2a，

∴BDD_1B_1 是正方形。

连结 B_1D 交 D_1B 于 P，交 EO 于 Q。

∵B_1D⊥D_1B。 EO∥D_1B，

∴B_1D⊥EO

又 $AC\perp EO$， $AC\perp ED$，

∴$AC\perp$面 BDD_1B_1

∴$B_1D\perp AC$

∴$B_1D\perp$面 EAC。

∴B_1Q 是三棱锥 B_1-EAC 的高。 ————10 分

由 DQ＝PQ，得 $B_1Q=3B_1D/4=3a/2$。

∴$VB_1-EAC=(1/3)\cdot[(2)1/2a2/2]\cdot(3/20=(2)1/2\cdot a3/4$.

所以三棱锥了－EAC 的体积是 $(2)1/2\cdot a3/4$. ————12 分

解法二：连结 B_1O，则 $VB_1-EAC=2VA-EOB_1$。

∵$AO\perp$面 BDD_1B_1，

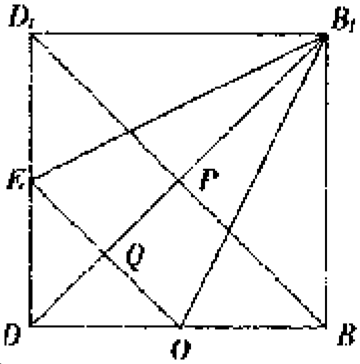
∴AO 是三棱锥 A－EOB1 的高，AO＝(2)1/2·a/2

在正方形 BDD_1B_1 中，E、O 分别是 D_1D、DB 的中点（如右图），

则 $S\triangle EOB_1=3a2/4$.

∴ $VB_1-EAC=2\times(1/30\times(3a2/4)\times[(2)1/2a/2\}=(2)1/2\cdot a3/4$.

所以三棱锥 B1－EAC 的体积是(2)1/2·a3/4.————12 分。



（23）本小题主要考查等比数列，对数计算等基本知识，考查综合运用数学知识和方法解决实际问题的能力，满分 14 分。

（I）解：厚度为 a 的带钢经过减薄率均为 ro 的 n 对轧辊后厚度为 a(1-ro)n.

为使出带钢的厚度不超过β，冷轧机的轧辊数（以对为单位）应满足 a(1-ro)n≤β，

即 (1-ro)n≤β/a ————4 分

由于(1-ro)n>0，β/a>0,对上式两端取对数，得

n_lg(l-ro)≤lg(β/a).

由于 lg(1-ro)<0,

所以 n≥(lgβ-lga)/[lg(1-ro)].

因此，至少需要安装不小于(lgβ-lga)/[lg(1-ro)]的整数对轧辊 —7 分

（II）解法一：第 k 对轧辊出口处疵点间距离为轧辊周长，在此处出口的两疵点间带钢的体积为 1600a×(1-r)k×宽度 （其中 r＝20%），而在冷轧机出口处两疵点间带钢的体积为 $Lk\times a(1-r)^4\times$宽度。

因宽度相等，且无损耗，由体积相等得

$1600\cdot a(1-r)k=Lk\cdot a(1-k)^4(r=20\%)$,

即 $Lk=1600\cdot 0.8K^{-4}$. ————10 分

由此得 $l_3=2000$(mm),

$l_2=2500$(mm),

$l_1=3125$mm)

填表如下：

轧辊序号 K	1	2	3	4
疵点间距 LK（mm）	3125	2500	2000	1600

－－－－14 分

解法二：第 3 对轧辊出口疵点间距为轧辊周长，在此处出口的两疵点间带钢体积与冷轧机出口处两疵点间带钢体积相等，因宽度不变，有：

$1600=L^3\cdot(1-0.2)$，

所以 $L_3=1600/0.8=2000$(㎜)．－－－－10 分

同理 $L_2=L_3/0.8=2500$(㎜)．

$L_1=L_2/0.8=3125$(㎜)．

填表如下：

轧辊序号 K	1	2	3	4
疵点间距 LK（mm）	3125	2500	2000	1600

－－－－14 分

（24）本小题主要考查曲线与方程，直线和圆锥曲线等基础知识，以及求动点轨迹的基本技能和综合运用数学知识解决问题的能力。满分 14 分。

解法一：依题意，记 B（－1，b）（b∈R），则直线 OA 和 OB 的方程分别为 y＝0 和 y＝－bx，设点 C（x,y），则有 0≤x<a,由 OC 平分∠AOB，知点 C 到 OA、OB 距离相等，根据点到直线的距离公式得

$|y|=|y+bx|/\sqrt{1+b^2}$ ① －－－－4 分

依题设，点 C 在直线 AB 上，故有

$y=[-b/(1+a)](x-a)$．－－－－6 分

由 $x-a\neq0$，得 $b=-(1+a)y/(x-a)$．②

将②式代入①式得

$y^2[1+(1+a)^2y^2/(x-a)^2]=[y-(1+a)xy/x-a]^2$，

整理得

$y^2[(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2]=0$．－－－－9 分

若 $y\neq0$，则 $(1-a)x^2-2as+(1+a)y^2=0(0<x<a)$；

若 y=0,则 b=0,∠AOB＝π，点 C 的坐标为（0，0），满足上式，

综上得点 C 的轨迹方程为

$(1-a)a^2-2ax+(1+A)y^2=0(0\neq x<a)$，－－－－10 分

∵$a\neq1$,

∴$[x-a/(1-a)]^2/[a/(1-a)]^2+y^2/[a^2/(1-a^2)]=1(0\leq x<a)$. ③ ————12 分

由此知，当〔」「工时，方程③ 表示椭圆孤段；

当 $a>1$ 时，方程③ 表示双曲线一支的弧段。 ————14 分

解法二：如图，设 D 是 l 与 x 轴的交点，过点 C 作 CE⊥x 轴，E 是垂足。

(1) 当$|BD|\neq0$ 时，设点 C（x,y），则 $0<x<a$ $y\neq0$.

由 CE∥BD 得 $|BD|=|CE|\cdot|DA|/|EA|=|y|/a-x(1+a)$. ————3 分

∵∠COA=∠COB=∠COD-∠BOD=π-∠COA-∠BOD,

∴2∠COA=π-∠BOD,

∵ tg(2COA)=2tg∠COA/(1-tg2∠COA), tg(π-∠BOD)=-tg∠BOD,

tg∠COA=|y|/x, tg∠BOD = ∠|BD|/|OD|=|y|/a-x(1+a).

∴$[2\cdot|y|/x]/[1-(y2/x2)]=[|y|/(a-x)](1+a)$,

整理得 $(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2=0(0<x<a)$.

(II) 当$|BD|=0$ 时，∠BOA＝π，则点 C 的坐标为（0，0），满足上式。

综合（I）（II），得点 C 的轨迹方程为

$(1-a)x^2-2ax+(1+a)y^2=0(0\leq x<a)$ ————10 分

以下同解法一。