
学校的理想装备
电子图书·学校专集
校园网上的最佳资源
三 年 级 数 学 活 动 课
BOOK
内部资料 非卖品

前　言

这套书定名为《新世纪小学数学活动丛书》。开宗明义，是为 21 世纪的孩子们编写的数学课外读物。

小学生正处在学知识、长身体的阶段。他们需要主动、和谐、富有朝气的课堂学习，也需要轻松、愉快、丰富多彩的课外活动。好的教科书重要，好的课外读物同样重要。

好的课外读物应当是生动的、趣味性的。读来有趣就会产生兴趣，对于小学生，兴趣就是学习的动力。本丛书以通俗的语言、流畅的文笔讲述古今中外的数学名题、趣题和智力游戏，展示出数学的神奇智慧和艺术般的魅力，激发孩子们的数学兴趣和探索求知的欲望，在不知不觉中将孩子们引进深奥有趣的数学世界之中。

好的课外读物应当是科学的、知识性的，虽然以课本之外的内容为主，却不离开小学数学教学的核心内容。本丛书是一个数学百宝园，＋，-，×，÷的来历，完全数、勾股数、亲和数……样样都有，孩子们的课外知识就靠这样一点一滴积累起来。各年级的数学活动课本，使孩子们循序渐进地学到更多的数学知识和数学思想，既巩固了课堂知识，又给孩子们的数学能力提供了一个发展空间。

好的课外读物还应当具有历史性和时代感。每一代人都是历史长河中的一个阶段，是社会发展中的一个链条。本丛书通过“四色定理”、“哥德巴赫猜想”等著名数学问题的发现、探索和求证过程，通过阿基米德、高斯、欧拉等伟大数学家的成长过程，向孩子们展示一个富于挑战性的数学世界，使孩子们知道，数学发展到今天，是多少代数学家不懈努力的结果。历史就要进入 21 世纪，接力棒就要传到我们手中，我们怎么办？从而激励孩子们从小爱数学，从小学数学，不怕困难，勇攀高峰的精神。

有了好的课外读物，还有一个怎样读的问题。看数学书不同于看小说，不能读得太快，要边阅读边思考。当把一个问题的题意弄清后，最好不要立刻就看下面的分析解答，而是自己独立思考一下，看看自己能不能解这道题，必要时手头准备好铅笔和纸，写写算算画画，进行一些必要的计算和推导，然后将自己想的方法与书上的分析解答进行比较，看看各有哪些优缺点。这样把眼、脑、手结合起来，边读边想边算，比单纯的阅读收获更大。如果能和同学们一起讨论书中的问题，集思广益，那么大家都会得到更多的收获。

数学并不难，只要有信心，有兴趣，多动脑筋，多思考，多练习，每个孩子都能把数学学好。

3～6 年级数学活动课可供学有余力，希望进一步提高数学素质和准备参加各级小学数学竞赛的学生作教材使用。

本丛书作为向新世纪的献礼工程，由北京竞赛数学研究所策划。自 1995 年底开始，历时近三年，马传渔、魏有德、周应斌、继承、朱华伟、齐世荫、梁北援、余文熊、翁丽丽、章明等作者，以极其严肃认真的态度，查阅了大量文献资料，分类、整理、编撰，并几易其稿，为本丛书付出大量心血。北京师范大学出版社自始至终给予本丛书大力支持。在此，对参予本丛书编写的所有作者及北京师范大学出版社表示诚挚的感谢。

刘京友

三年级数学 活动课

第 1 讲　加减法的巧算

在进行加减运算时，为了又快又准确，除了要熟练地掌握计算法则外，还需要掌握一些巧算方法。加减法的巧算主要是“凑整”，就是将算式中的数分成若干组，使每组的运算结果都是整十、整百、整千……的数，再将各组的结果求和。这种“化零为整”的思想是加减法巧算的基础。

先讲加法的巧算。加法具有以下两个运算律：

加法交换律：两个数相加，交换加数的位置，它们的和不变。即

$$a+b=b+a,$$

其中 a，b 各表示任意一数。例如，5+6=6+5。

一般地，多个数相加，任意改变相加的次序，其和不变。例如，

$$a+b+c+d=d+b+a+c=\cdots$$

其中 a，b，c，d 各表示任意一数。

加法结合律：三个数相加，先把前两个数相加，再加上第三个数；或者，先把后两个数相加，再与第一个数相加，它们的和不变。即

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c),$$

其中 a，b，c 各表示任意一数。例如，

$$4+9+7=(4+9)+7=4+(9+7)。$$

一般地，多个数(三个以上)相加，可先对其中几个数相加，再与其它数相加。

把加法交换律与加法结合律综合起来应用，就得到加法的一些巧算方法。

1.凑整法

先把加在一起为整十、整百、整千……的加数加起来，然后再与其它的数相加。

例 1 计算：(1)23＋54＋18＋47＋82；

(2)(1350＋49＋68)＋(51＋32＋1650)。

解：(1)23＋54＋18＋47＋82

＝(23＋47)＋(18＋82)＋54

＝70＋100＋54＝224；

(2)(1350＋49＋68)＋(51＋32＋1650)

＝1350＋49＋68＋51＋32+1650

＝(1350＋1650)＋(49＋51)＋(68＋32)

＝3000＋100＋100＝3200。

2.借数凑整法

有些题目直观上凑整不明显，这时可“借数”凑整。例如，计算 976＋85，可在 85 中借出 24，即把 85 拆分成 24＋61，这样就可以先用 976 加上 24，“凑”成 1000，然后再加 61。

例 2 计算：(1)57＋64＋238＋46；

(2)4993＋3996＋5997＋848。

解：(1)57＋64＋238＋46

＝57＋(62＋2)＋238＋(43＋3)

＝(57＋43)＋(62＋238)＋2＋3

＝100＋300＋2＋3＝405；

(2)4993＋3996＋5997＋848

=4993＋3996＋5997＋(7＋4＋3＋834)

=(4993＋7)＋(3996＋4)＋(5997＋3)＋834

=5000＋4000＋6000＋834＝15834。

下面讲减法和加减法混合运算的巧算。加、减法有如下一些重要性质：

(1)在连减或加、减混合运算中，如果算式中没有括号，那么计算时可以带着运算符号“搬家”。例如，

a-b-c＝a-c-b，a-b+c＝a+c-b，

其中 a，b，c 各表示一数。

(2)在加、减法混合运算中，去括号时：如果括号前面是“＋”号，那么去掉括号后，括号内的数的运算符号不变；如果括号前面是“-”号，那么去掉括号后，括号内的数的运算符号“＋”变为“-”，“-”变为“＋”。例如，

a＋(b-c)=a+b-c，

a-(b＋c)=a-b-c，

a-(b-c)=a-b+c。

(3)在加、减法混合运算中，添括号时：如果添加的括号前面是“＋”号，那么括号内的数的原运算符号不变；如果添加的括号前面是“-”号，那么括号内的数的原运算符号“＋”变为“－”，“-”变为“＋”。例如，

a＋b-c＝a＋(b-c)，

a-b＋c=a-(b-c)，

a-b-c＝a-(b＋c)。

灵活运用这些性质，可得减法或加、减法混合计算的一些简便方法。

3.分组凑整法

例 3 计算：(1)875-364-236；

(2)1847-1928＋628-136-64；

(3)1348-234-76＋2234-48-24。

解：(1)875-364-236

=875-(364＋236)

=875-600=275；

(2)1847-1928＋628-136-64

=1847-(1928-628)-(136＋64)

=1847-1300-200＝347；

(3)1348-234-76＋2234-48-24

=(1348-48)+(2234-234)-(76＋24)

=1300＋2000-100＝3200。

4.加补凑整法

例 4 计算：(1)512-382；

(2)6854-876-97；

(3)397-146＋288-339。

解：(1)512-382=(500＋12)-(400-18)

=500+12-400+18

＝(500-400)＋(12＋18)

＝100＋30＝130；

(2)6854-876-97

=6854-(1000-124)-(100-3)

=6854-1000＋124-100＋3

=5854+24+3＝5881；

(3)397-146＋288-339

＝397＋3-3-146＋288＋12-12-339

＝(397＋3)＋(288＋12)-(146＋3＋12＋339)

＝400＋300-500=200。

练习 1

巧算下列各题：

1.42＋71＋24＋29＋58。

2.43+(38＋45)＋(55＋62＋57)。

3.698＋784＋158。

4.3993+2996+7994＋135。

5.4356＋1287-356。

6.526-73-27-26。

7.4253-(253-158)。

8.1457-(185＋457)。

9.389-497＋234。

10.698-154+269+787。

第 2 讲　横式数字谜(一)

在一个数学式子(横式或竖式)中擦去部分数字，或用字母、文字来代替部分数字的不完整的算式或竖式，叫做数字谜题目。解数字谜题就是求出这些被擦去的数或用字母、文字代替的数的数值。

例如，求算式 324+□=528 中□所代表的数。

根据“加数=和-另一个加数”知，

□=582-324＝258。

又如，求右竖式中字母 A，B 所代表的数字。显然个位数相减时必须借位，所以，由 12-B＝5 知，B＝12-5＝7；由 A-1＝3 知，A＝3＋1＝4。

$$\begin{array}{r} A\ 2 \\ -\quad B \\ \hline 3\ 5 \end{array}$$

解数字谜问题既能增强数字运用能力，又能加深对运算的理解，还是培养和提高分析问题能力的有效方法。

这一讲介绍简单的算式(横式)数字谜的解法。

解横式数字谜，首先要熟知下面的运算规则：

(1)一个加数+另一个加数=和；

(2)被减数-减数=差；

(3)被乘数×乘数=积；

(4)被除数÷除数=商。

由它们推演还可以得到以下运算规则：

由(1)，得 和-一个加数=另一个加数；

由(2)，得$\begin{cases} \text{减数}+\text{差}=\text{被减数}, \\ \text{被减数}-\text{差}=\text{减数}; \end{cases}$

由(3)，得$\begin{cases} \text{积}\div\text{乘数}=\text{被乘数}, \\ \text{积}\div\text{被乘数}=\text{乘数}; \end{cases}$

由(4)，$\begin{cases} \text{得商}\times\text{除数}=\text{被除数}, \\ \text{被除数}\div\text{商}=\text{除数}。 \end{cases}$

其次，要熟悉数字运算和拆分。例如，8 可用加法拆分为

8＝0＋8＝1＋7＝2＋6＝3＋5＝4＋4；

24 可用乘法拆分为

24＝1×24=2×12＝3×8＝4×6(两个数之积)

=1×2×12＝2×2×6=…(三个数之积)

=1×2×2×6＝2×2×2×3=…(四个数之积)

例 1　下列算式中，□，○，△，☆，*各代表什么数？

(1)□+5＝13-6；　　(2)28-○＝15＋7；

(3)3×△=54；　　(4)☆÷3＝87；

(5)56÷*＝7。

解：(1)由加法运算规则知，□=13-6-5＝2；

(2)由减法运算规则知，○＝28-(15＋7)＝6；

(3)由乘法运算规则知，△＝54÷3＝18；

(4)由除法运算规则知，☆=87×3＝261；
(5)由除法运算规则知，*＝56÷7＝8。
例 2 下列算式中，□，○，△，☆各代表什么数？
(1)□+□+□=48；
(2)○＋○＋6＝21-○；
(3)5×△-18÷6＝12；
(4)6×3-45÷☆＝13。
解：(1)□表示一个数，根据乘法的意义知，
□+□+□=□×3，
故□=48÷3＝16。
(2)先把左端(○＋○＋6)看成一个数，就有
(○＋○＋6)＋○＝21，
○×3＝21-6，
○＝15÷3＝5。
(3)把 5×△，18÷6 分别看成一个数，得到
5×△=12＋18÷6，
5×△=15，
△=15÷5＝3。
(4)把 6×3，45÷☆分别看成一个数，得到
45÷☆＝6×3-13，
45÷☆＝5，
☆＝45÷5＝9。
例 3(1)满足 58＜12×□＜71 的整数□等于几？
(2)180 是由哪四个不同的且大于 1 的数字相乘得到的？试把这四个数按从小到大的次序填在下式的□里。
180=□×□×□×□。
(3)若数□，△满足
□×△=48 和□÷△=3，
则□，△各等于多少？
分析与解：(1)因为
58÷12＝4……10，71÷12＝5……11，
并且□为整数，所以，只有□=5 才满足原式。
(2)拆分 180 为四个整数的乘积有很多种方法，如
180＝1×4×5×90＝1×2×3×30＝…
但拆分成四个“大于 1”的数字的乘积，范围就缩小了，如
180＝2×2×5×9＝2×3×5×6＝…
若再限制拆分成四个“不同的”数字的乘积，范围又缩小了。按从小到大的次序排列只有下面一种：
180＝2×3×5×6。
所以填的四个数字依次为 2，3，5，6。
(3)首先，由□÷△=3 知，□＞△，因此，在把 48 拆分为两数的乘积时，有
48＝48×1＝24×2＝16×3＝12×4＝8×6，
其中，只有 48＝12×4 中，12÷4=3，因此

□=12，△=4。

这道题还可以这样解：由□÷△=3 知，□=△×3。把□×△=48 中的□换成△×3，就有

(△×3)×△＝48，

于是得到△×△=48÷3＝16。因为 16＝4×4，所以△=4。再把□=△×3 中的△换成 4，就有

□=△×3=4×3=12。

这是一种“代换”的思想，它在今后的数学学习中应用十分广泛。

下面，我们再结合例题讲一类“填运算符号”问题。

例 4 在等号左端的两个数中间添加上运算符号，使下列各式成立：

(1)4　4　4　4＝24；

(2)5　5　5　5　5=6。

解：(1)因为 4＋4＋4＋4＜24，所以必须填一个“×”。4×4＝16，剩下的两个 4 只需凑成 8，因此，有如下一些填法：

4×4＋4＋4＝24；

4＋4×4＋4＝24；

4＋4＋4×4＝24。

(2)因为 5+1=6，等号左端有五个 5，除一个 5 外，另外四个 5 凑成 1，至少要有一个“÷”，有如下填法：

5÷5+5-5+5＝6；

5＋5÷5+5-5＝6；

5＋5×5÷5÷5=6；

5＋5÷5×5÷5＝6。

由例 4 看出，填运算符号的问题一般会有多个解。这些填法都是通过对问题的综合观察、分析和试算得到的，如果只是盲目地“试算”，那么就可能走很多弯路。

例 5 在下式的两数中间添上四则运算符号，使等式成立：

8　2　3＝3　3。

分析与解：首先考察右端“3 3”，它有四种填法：

3+3＝6；　　3-3＝0；

3×3＝9；　　3÷3=1。

再考察左端“8 2 3”，因为只有一个奇数 3，所以要想得到奇数，3 的前面只能填“＋”或“-”，要想得到偶数，3 的前面只能填“×”。经试算，只有两种符合题意的填法：

8-2＋3＝3×3；8÷2-3＝3÷3。

填运算符号可加深对四则运算的理解和认识，也是培养分析能力的好内容。

练习 2

1.在下列各式中，□分别代表什么数？

□+16＝35；　47-□=12；　□-3＝15；

4×□=36；　□÷4=15；　84÷□=4。

2.在下列各式中，□，○，△，☆各代表什么数？

(□+350)÷3=200；　　　　(54-○)×4＝0；

360-△×7＝10；　　　　4×9-☆÷5=1。

3.在下列各式中，□，○，△各代表什么数？

150-□-□=□；

○×○＝○＋○；

△×9＋2×△=22。

4.120 是由哪四个不同的一位数字相乘得到的？试把这四个数字按从小到大的次序填在下式的□里：

120＝□ ×□×□×□。

5.若数□，△同时满足

□×△=36 和□-△=5，

则□，△各等于多少？

6.在两数中间添加运算符号，使下列等式成立：

(1)5　　5　　5　　5　　5＝3；

(2)1　　2　　3　　4＝1。

7.在下列各式的□内填上合适的运算符号，使等式成立：

12□4□4=10□3。

8.在下列各式的□内填上合适的运算符号，使等式成立：

123□45□67□89＝100；

123□45□67□8□9＝100；

123□4□5□67□89＝100；

123□4□5□6□7□8□9＝100；

12□3□4□5□67□8□9＝100；

1□23□4□56□7□8□9＝100；

12□3□4□5□6□7□89＝100。

第 3 讲　　竖式数字谜(一)

这一讲主要讲加、减法竖式的数字谜问题。解加、减法数字谜问题的基本功，在于掌握好上一讲中介绍的运算规则(1)(2)及其推演的变形规则，另外还要掌握数的加、减的“拆分”。关键是通过综合观察、分析，找出解题的“突破口”。题目不同，分析的方法不同，其“突破口”也就不同。这需要通过不断的“学”和“练”，逐步积累知识和经验，总结提高解题能力。

例 1 在右边的竖式中，A，B，C，D 各代表什么数字？

$$\begin{array}{r} 7AC \\ +\ B49 \\ \hline D\,23C \end{array}$$

解：显然，C=5，D=1(因两个数字之和只能进一位)。

由于 A＋4＋1 即 A＋5 的个位数为 3，且必进一位(因为 4＞3)，所以 A＋5=13，从而 A＝13-5=8。

同理，由 7＋B＋1=12，即 B＋8＝12，得到 B＝12-8＝4。

故所求的 A=8，B=4，C=5，D=1。

例 2 求下面各竖式中两个加数的各个数位上的数字之和：

$$(1)\ \begin{array}{r} \square\square \\ +\ \square\square \\ \hline 1\ 4\ 9 \end{array} \qquad (2)\ \begin{array}{r} \square\square \\ +\ \square\square \\ \hline 1\ 9\ 5 \end{array}$$

分析与解：(1)由于和的个位数字是 9，两个加数的个位数字之和不大于 9＋9＝18，所以两个加数的个位上的两个方框里的数字之和只能是 9。(这是“突破口”)

再由两个加数的个位数之和未进位，因而两个加数的十位数字之和就是 14。

故这两个加数的四个数字之和是 9＋14=23。

(2)由于和的最高两位数是 19，而任何两个一位数相加的和都不超过 18，因此，两个加数的个位数相加后必进一位。(这是“突破口”，与(1)不同)

这样，两个加数的个位数字相加之和是 15，十位数字相加之和是 18。

所求的两个加数的四个数字之和是 15＋18＝33。

注意：(1)(2)两题虽然题型相同，但两题的“突破口”不同。(1)是从和的个位着手分析，(2)是从和的最高两位着手分析。

例 3 在下面的竖式中，A，B，C，D，E 各代表什么数？

$$\begin{array}{r} 9A0B4 \\ -\ \ C300D \\ \hline 7E95 \end{array}$$

分析与解：解减法竖式数字谜，与解加法竖式数字谜的分析方法一样，所不同的是“减法”。

首先，从个位减起(因已知差的个位是 5)。4＜5，要使差的个位为 5，必

须退位，于是，由 14-D＝5 知，D=14-5＝9。(这是“突破口”)

再考察十位数字相减：由 B-1-0＜9 知，也要在百位上退位，于是有 10＋B-1-0＝9，从而 B＝0。

百位减法中，显然 E=9。

千位减法中，由 10＋A-1-3＝7 知，A＝1。

万位减法中，由 9-1-C＝0 知，C＝8。

所以，A＝1，B＝0，C＝8，D＝9，E＝9。

例 4 在下面的竖式中，“车”、“马”、“炮”各代表一个不同的数字。请把这个文字式写成符合题意的数字式。

$$\begin{array}{r} 炮车车炮 \\ -\quad 车马车 \\ \hline 马车马 \end{array}$$

分析与解：例 3 是从个位着手分析，而这里就只能从首位着手分析。

由一个四位数减去一个三位数的差是三位数知，“炮”＝1。

被减数与减数的百位数相同，其相减又是退位相减，所以，“马”＝9。至此，我们已得到下式：

$$\begin{array}{r} 1车车1 \\ -\quad 车9车 \\ \hline 9车9 \end{array}$$

由上式知，个位上的运算也是退位减法，由 11-“车”=9 得到“车”＝2。

因此，符合题意的数字式为：

$$\begin{array}{r} 1\,2\,2\,1 \\ -\quad 2\,9\,2 \\ \hline 9\,2\,9 \end{array}$$

例 5 在右边的竖式中，“巧，填，式，谜”分别代表不同的数字，它们各等于多少？

$$\begin{array}{r} 谜 \\ 式谜 \\ 填式谜 \\ +巧填式谜 \\ \hline 2\,0\,0\,0 \end{array}$$

解：由(4×谜)的个位数是 0 知，“谜”＝0 或 5。

当“谜”＝0 时，(3×式)的个位数是 0，推知“式”＝0，与“谜”≠“式”矛盾。

当“谜”＝5 时，个位向十位进 2。

由(3×式+2)的个位数是 0 知，“式”＝6，且十位要向百位进 2。

由(2×填+2)的个位数是 0，且不能向千位进 2 知，“填”＝4。

最后推知，“巧”＝1。

所以“巧”＝1，“填”＝4，“式”=6，“谜”＝5。

练习 3

1.在下列各竖式的□中填上适当的数字，使竖式成立：

(1) $\begin{array}{r} 7\square4 \\ +\ \square6\square \\ \hline \square029 \end{array}$　　(2) $\begin{array}{r} \square81 \\ +\ \square5\square \\ \hline \square94\square \end{array}$

(3) $\begin{array}{r} \square\square \\ +\ \square03 \\ \hline \square\square\square2 \end{array}$　　(4) $\begin{array}{r} \square8 \\ +\ \square7 \\ \hline \square118 \end{array}$

2.下列各竖式中，□里的数字被遮盖住了，求各竖式中被盖住的各数字的和：

(1) $\begin{array}{r} \square81 \\ +\ \square5\square \\ \hline \square94\square \end{array}$　　(2) $\begin{array}{r} \square81 \\ +\ \square5\square \\ \hline \square94\square \end{array}$

3.在下列各竖式的□中填入合适的数字，使竖式成立：

(1) $\begin{array}{r} 23\square04 \\ -\ \square85\square1 \\ \hline \square50\square \end{array}$　　(2) $\begin{array}{r} 1\square5\square \\ -\ \square\square9 \\ \hline 2991 \end{array}$

(3) $\begin{array}{r} 23\square04 \\ -\ \square85\square1 \\ \hline \square50\square \end{array}$　　(4) $\begin{array}{r} \square\square2\square \\ -\ 7\square\square9 \\ \hline 71 \end{array}$

4.下式中不同的汉字代表 1～9 中不同的数字,相同的汉字代表相同的数字。这个竖式的和是多少？

$$\begin{array}{r} \text{节童儿际国一六祝庆} \\ +\ 864197532 \\ \hline \text{庆祝六一国际儿童节} \end{array}$$

5.在下列各竖式的□中填入合适的数字，使竖式成立：

(1) $\begin{array}{r} \square8\square \\ +\ 3\square4 \\ \hline 4\square1 \\ -\ \square9\square \\ \hline \square5 \\ \hline \square5 \end{array}$

(2) $\begin{array}{r} \square\square9\square \\ -\ \square\square4 \\ \hline \square9 \\ 8\square2 \\ +\ \square \\ \hline \square\square\square\square \end{array}$

第 4 讲　　竖式数字谜(二)

本讲只限于乘数、除数是一位数的乘、除法竖式数字谜问题。

掌握好乘、除法的基本运算规则(第 2 讲的公式(3)(4)及推演出的变形式子)是解乘、除法竖式谜的基础。根据题目结构形式，通过综合观察、分析，找出“突破口”是解题的关键。

例 1　在左下乘法竖式的□中填入合适的数字，使竖式成立。

$$\begin{array}{rrrr} & \square & 8 & \square \\ \times & & & \square \\ \hline 7 & 0 & \square & 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rrrr} & \boxed{7} & 8 & \boxed{5} \\ \times & & & \boxed{9} \\ \hline 7 & 0 & \boxed{6} & 5 \end{array}$$

分析与解：由于积的个位数是 5，所以在乘数和被乘数的个位数中，一个是 5，另一个是奇数。因为乘积大于被乘数的 7 倍，所以乘数是大于 7 的奇数，即只能是 9(这是问题的“突破口”)，被乘数的个位数是 5。

因为 $7\times9<70<8\times9$，所以，被乘数的百位数字只能是 7。至此，求出被乘数是 785，乘数是 9(见右上式)。

例 2　在右边乘法竖式的□里填入合适的数字，使竖式成立。

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & \square & 7 \\ \times & & & \square \\ \hline 2 & \square & 9 & \square \end{array}$$

分析与解：由于乘积的数字不全，特别是不知道乘积的个位数，我们只能从最高位入手分析。

乘积的最高两位数是 2□，被乘数的最高位是 3，由

$$3\times\underset{(乘数)}{\square}+\underset{(进位数)}{\square}=2\square$$

可以确定乘数的大致范围，乘数只可能是 6，7，8，9。到底是哪一个呢？我们只能逐一进行试算：

(1)若乘数为 6，则积的个位填 2，并向十位进 4，此时，乘数 6 与被乘数的十位上的数字相乘之积的个位数只能是 5(因 4+5=9)。这样一来，被乘数的十位上就无数可填了。这说明乘数不能是 6。

(2)若乘数为 7，则积的个位填 9，并向十位进 4。与(1)分析相同，为使积的十位是 9，被乘数的十位只能填 5，从而积的百位填 4。得到符合题意的填法如右式。

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & \boxed{5} & 7 \\ \times & & & \boxed{7} \\ \hline 2 & \boxed{4} & 9 & \boxed{9} \end{array}$$

(3)若乘数为 8，则积的个位填 6，并向十位进 5。为使积的十位是 9，被乘数的十位只能填 3 或 8。

当被乘数的十位填 3 时，得到符合题意的填法如右式。当被乘数的十位填 8 时，积的最高两位为 3，不合题意。

$$\begin{array}{rrrr} & 3 & \boxed{3} & 7 \\ \times & & & \boxed{8} \\ \hline 2 & \boxed{6} & 9 & \boxed{6} \end{array}$$

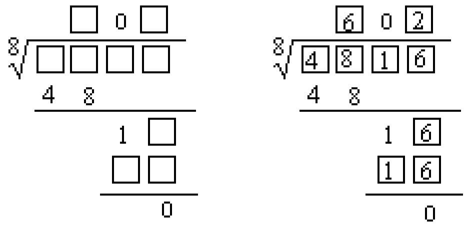
(4)若乘数为 9，则积的个位填 3，并向十位进 6。为使积的十位是 9，

被乘数的十位只能填 7。而此时，积的最高两位是 3☐，不合题意。

综上知，符合题意的填法有上面两种。

除法竖式数字谜问题的解法与乘法情形类似。

例 3 在左下边除法竖式的□中填入适当的数，使竖式成立。



分析与解：由 48÷8=6 即 8×6=48 知，商的百位填 6，且被除数的千位、百位分别填 4，8。又显然，被除数的十位填 1。由

1□=商的个位×8

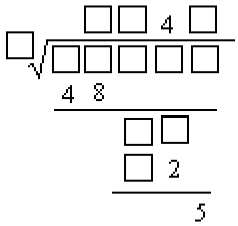
知，两位数 1□能被 8 除尽，只有 16÷8=2，推知被除数的个位填 6，商的个位填 2。填法如右上式。

例 3 是从最高位数入手分析而得出解的。

例 4 在右边除法竖式的□中填入合适的数字。使竖式成立。

分析与解：从已知的几个数入手分析。

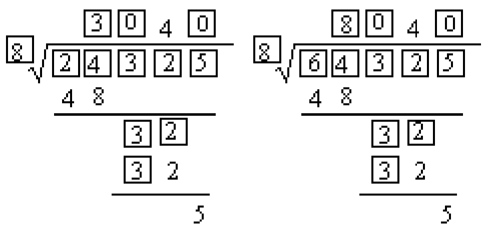
首先，由于余数是 5，推知除数＞5，且被除数个位填 5。



由于商 4 时是除尽了的，所以，被除数的十位应填 2，且由于 3×4=12，8×4=32，推知，除数必为 3 或 8。由于已经知道除数＞5，故除数=8。(这是关键！)

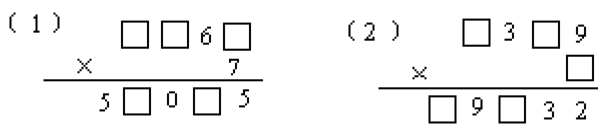
从 8×4=32 知，被除数的百位应填 3，且商的百位应填 0。

从除数为 8，第一步除法又出现了 4，8×8=64，8×3=24，这说明商的千位只能填 8 或 3。试算知，8 和 3 都可以。所以，此题有下面两种填法。



练习 4

1.在下列各竖式的□里填上合适的数：



2.在右式中，“我”、“爱”、“数”、“学”分别代表什么数时，乘法竖式成立？

$$\begin{array}{r} 爱\ 数\ 学\ 4 \\ \times \qquad\quad 3 \\ \hline 我\ 爱\ 数\ 学 \end{array}$$

3.“我”、“们”、“爱”、“祖”、“国”各代表一个不同的数字，它

们各等于多少时，右边的乘法竖式成立？

$$\begin{array}{r} 国\ 祖\ 爱\ 们\ 我 \\ \times \qquad\qquad 4 \\ \hline 我\ 们\ 爱\ 祖\ 国 \end{array}$$

4.在下列各除法竖式的□里填上合适的数，使竖式成立：

（1）

$$\begin{array}{r} \square\ 0\ \square \\ 7\,\overline{)\,\square\,\square\,\square\,\square} \\ \square\ 6\ \ \ \ \ \\ \hline \square \\ \square \\ \hline 0 \end{array}$$

（2）

$$\begin{array}{r} \square\,\square\ 4 \\ \overline{)\,\square\,\square\,\square} \\ 6\ \ \ \ \ \ \ \\ \hline \square\,\square\ \ \ \\ \square\ 1\ \ \ \\ \hline 1\ 2 \\ \square\,\square \\ \hline 0 \end{array}$$

5.在下式的□里填上合适的数。

$$\begin{array}{r} \square\,\square \\ \square\,\overline{)\,4\,\square\,\square} \\ \square\,\square\ \ \ \\ \hline \square\,\square \\ 3\,\square \\ \hline 7 \end{array}$$

第 5 讲　找规律(一)

这一讲我们先介绍什么是“数列”，然后讲如何发现和寻找“数列”的规律。

按一定次序排列的一列数就叫数列。例如，

(1) 1，2，3，4，5，6，…

(2) 1，2，4，8，16，32；

(3) 1，0，0，1，0，0，1，…

(4) 1，1，2，3，5，8，13。

一个数列中从左至右的第 n 个数，称为这个数列的第 n 项。如，数列(1)的第 3 项是 3，数列(2)的第 3 项是 4。一般地，我们将数列的第 n 项记作 a_n。

数列中的数可以是有限多个，如数列(2)(4)，也可以是无限多个，如数列(1)(3)。

许多数列中的数是按一定规律排列的，我们这一讲就是讲如何发现这些规律。

数列(1)是按照自然数从小到大的次序排列的，也叫做自然数数列，其规律是：后项=前项+1，或第 n 项 $a_n=n$。

数列(2)的规律是：后项=前项×2，或第 n 项

$$a_n=\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{(n-1)\text{个}2}\text{。}$$

数列(3)的规律是：“1，0，0”周而复始地出现。

数列(4)的规律是：从第三项起，每项等于它前面两项的和，即

$a_3=1+1=2$，$a_4=1+2=3$，$a_5=2+3=5$，

$a_6=3+5=8$，$a_7=5+8=13$。

常见的较简单的数列规律有这样几类：

第一类是数列各项只与它的项数有关，或只与它的前一项有关。例如数列(1)(2)。

第二类是前后几项为一组，以组为单元找关系才可找到规律。例如数列(3)(4)。

第三类是数列本身要与其他数列对比才能发现其规律。这类情形稍为复杂些，我们用后面的例 3、例 4 来作一些说明。

例 1　找出下列各数列的规律，并按其规律在(　　)内填上合适的数：

(1)4，7，10，13，(　　)，…

(2)84，72，60，(　　)，(　　)；

(3)2，6，18，(　　)，(　　)，…

(4)625，125，25，(　　)，(　　)；

(5)1，4，9，16，(　　)，…

(6)2，6，12，20，(　　)，(　　)，…

解：通过对已知的几个数的前后两项的观察、分析，可发现

(1)的规律是：前项+3=后项。所以应填 16。

(2)的规律是：前项-12=后项。所以应填 48，36。

(3)的规律是：前项×3=后项。所以应填 54，162。

(4)的规律是：前项÷5=后项。所以应填 5，1。

(5)的规律是：数列各项依次为

1=1×1， 4=2×2， 9=3×3， 16=4×4，
所以应填 5×5=25。

(6)的规律是：数列各项依次为

2=1×2，6=2×3，12=3×4，20=4×5，

所以，应填 5×6=30， 6×7=42。

说明：本例中各数列的每一项都只与它的项数有关，因此 a_n 可以用 n 来表示。各数列的第 n 项分别可以表示为

(1) $a_n=3_n+1$；(2) $a_n=96-12n$；

(3) $a_n=2\times3^{n-1}$；(4) $a_n=5^{5-n}$；(5) $a_n=n^2$；(6) $a_n=n(n+1)$。

这样表示的好处在于，如果求第 100 项等于几，那么不用一项一项地计算，直接就可以算出来，比如数列(1)的第 100 项等于 3×100+1=301。本例中，数列(2)(4)只有 5 项，当然没有必要计算大于 5 的项数了。

例 2 找出下列各数列的规律，并按其规律在(　　)内填上合适的数：

(1)1，2，2，3，3，4，(　　)，(　　)；

(2)(　　)，(　　)，10，5，12，6，14，7；

(3) 3，7，10，17，27，(　　)；

(4) 1，2，2，4，8，32，(　　)。

解：通过对各数列已知的几个数的观察分析可得其规律。

(1)把数列每两项分为一组，1，2，2，3，3，4，不难发现其规律是：前一组每个数加 1 得到后一组数，所以应填 4，5。

(2)把后面已知的六个数分成三组：10，5，12，6，14，7，每组中两数的商都是 2，且由 5，6，7 的次序知，应填 8，4。

(3) 这个数列的规律是：前面两项的和等于后面一项，故应填(17+27=)44。

(4)这个数列的规律是：前面两项的乘积等于后面一项，故应填(8×32=)256。

例 3 找出下列各数列的规律，并按其规律在(　　)内填上合适的数：

(1)18，20，24，30，(　　)；

(2)11，12，14，18，26，(　　)；

(3)2，5，11，23，47，(　　)，(　　)。

解：(1)因 20-18=2，24-20=4，30-24=6，说明(后项-前项)组成一新数列 2，4，6，…其规律是“依次加 2”，因为 6 后面是 8，所以，$a_5-a_4=a_5-30=8$，故

$$a_5=8+30=38。$$

(2)12-11=1，14-12=2， 18-14=4， 26-18=8，组成一新数列 1，2，4，8，…按此规律，8 后面为 16。因此，$a_6-a_5=a_6-26=16$，故 $a_6=16+26=42$。

(3)观察数列前、后项的关系，后项=前项×2+1，所以

$a_6=2a_5+1=2\times47+1=95$，

$a_7=2a_6+1=2\times95+1=191$。

例 4 找出下列各数列的规律，并按其规律在(　　)内填上合适的数：

(1)12，15，17，30， 22，45，(　　)，(　　)；

(2) 2，8，5，6，8，4，(　　)，(　　)。

解：(1)数列的第 1，3，5，…项组成一个新数列 12，17， 22，…其规

律是“依次加 5”，22 后面的项就是 27；数列的第 2，4，6，…项组成一个新数列 15，30，45，…其规律是“依次加 15”，45 后面的项就是 60。故应填 27，60。

(2)如(1)分析，由奇数项组成的新数列 2，5，8，…中，8 后面的数应为 11；由偶数项组成的新数列 8，6，4，… 中，4 后面的数应为 2。故应填 11，2。

练习 5

按其规律在下列各数列的(　　)内填数。

1.56，49，42，35，(　　)。

2.11， 15， 19， 23，(　　)，…

3.3，6，12，24，(　　)。

4.2，3，5，9，17，(　　)，…

5.1，3，4，7，11，(　　)。

6.1，3，7，13，21，(　　)。

7.3，5，3，10，3，15，(　　)，(　　)。

8.8，3，9，4，10，5，(　　)，(　　)。

9.2，5，10，17，26，(　　)。

10.15，21，18，19，21，17，(　　)，(　　)。

11.数列 1，3，5，7，11，13，15，17。

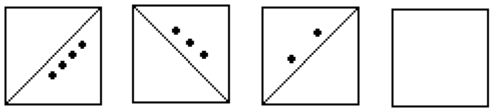
(1)如果其中缺少一个数，那么这个数是几？应补在何处？

(2)如果其中多了一个数，那么这个数是几？为什么？

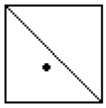
第 6 讲　找规律(二)

这一讲主要介绍如何发现和寻找图形、数表的变化规律。

例 1 观察下列图形的变化规律，并按照这个规律将第四个图形补充完整。



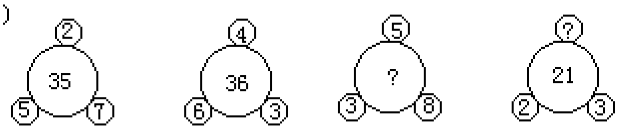
分析与解：观察前三个图，从左至右，黑点数依次为 4，3，2 个，并且每个图形依次按逆时针方向旋转 90°，所以第四个图如右图所示。



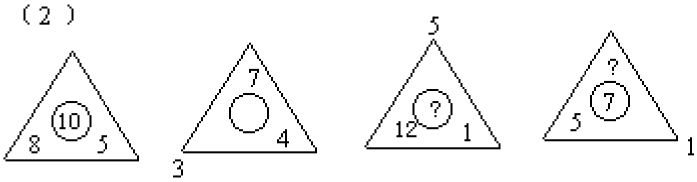
观察图形的变化，主要从各图形的形状、方向、数量、大小及各组成部分的相对位置入手，从中找出变化规律。

例 2 在下列各组图形中寻找规律，并按此规律在“？”处填上合适的数：

(1)



(2)



解：(1)观察前两个图形中的数可知，大圆圈内的数等于三个小圆圈内的数的乘积的一半，故

第三个图形中的“？”=5×3×8÷2=60；

第四个图形中的“？”=(21×2)÷3÷2=7。

(2)观察前两个图形中的已知数，发现有

10=8+5-3，　8=7+4-3，

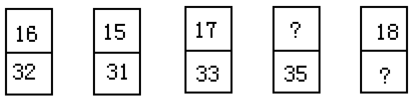
即三角形里面的数的和减去三角形外面的数就是中间小圆圈内的数。故

第三个图形中的“？”=12+1-5=8；

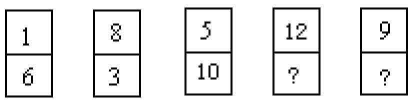
第四个图形中的“？”=7+1-5=3。

例 3 寻找规律填数：

(1)



(2)



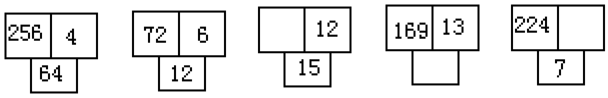
解：(1)考察上、下两数的差。32-16=16，31-15=16，33-17=16，可知，上面那个“？”=35-16=19，下面那个“？”=18+16=34。

(2)从左至右，一上一下地看，由 1，3，5，？，9，…知，12 下面的“？”

=7；一下一上看，由 6，8，10，12，？，…知，9 下面的“？”=14。

例 4 寻找规律在空格内填数：

（1）



（2）

12	17	23	31	43	
36	51	69	93		87

解：(1)因为前两图中的三个数满足：

256=4×64，72=6×12，

所以，第三图中空格应填 12×15=180；第四图中空格应填 169÷13=13。第五图中空格应填 224÷7=32。

(2)图中下面一行的数都是上一行对应数的 3 倍，故 43 下面应填 43×3=129；87 上面应填 87÷3=29。

例 5 在下列表格中寻找规律，并求出“？”：

（1）

3	11	8
4	6	2
5	?	7

（2）

1	4	7
3	5	2
7	?	11

解：(1)观察每行中两边的数与中间的数的关系，发现 3+8=11，4+2=6，所以，？=5+7=12。

(2)观察每列中三数的关系，发现 1+3×2=7，7+2×2=11，所以，？=4+5×2=14。

例 6 寻找规律填数：

(1)

$$1=1=1\times1$$
$$1+3=4=2\times2$$
$$1+3+5=9=3\times3$$
$$1+3+5+7=16=4\times4$$
$$1+3+5+7+9=25=5\times5$$
$$1+3+5+7+9+11=\text{？}$$
$$1+3+5+7+9+11+13=\text{？}$$

(2)

$$9 = 1 \times 9$$
$$108 = 12 \times 9$$
$$1107 = 123 \times 9$$
$$11106 = 1234 \times 9$$
$$111105 = 12345 \times 9$$
$$? = 123456 \times 9$$
$$? = 1234567 \times 9$$
$$? = 12345678 \times 9$$
$$? = 123456789 \times 9$$

解：(1)观察其规律知

$$1+3+5+7+9+11=6\times 6=36;$$
$$1+3+5+7+9+11+13=7\times 7=49。$$

(2)观察其规律知：

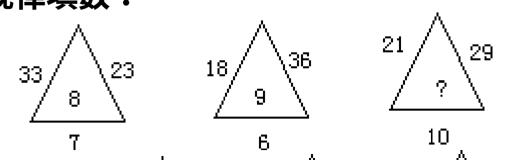
$$123456\times 9=1111104;$$
$$1234567\times 9=11111103;$$
$$12345678\times 9=111111102;$$
$$123456789\times 9=1111111101。$$

观察比较图形、图表、数列的变化，并能从图形、数量间的关系中发现规律，这种能力对于同学们今后的学习将大有益处。

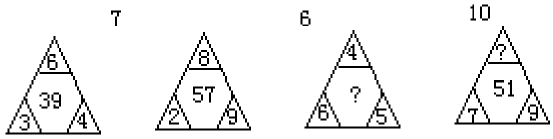
练习 6

寻找规律填数：

1.



2.



3. (1)

7	16	9
5	21	16
9	?	4

(2)

16	14	12
15	12	9
28	24	?

4.

1	2	3	4	5	15
6	7	8	9	10	?
11	12	13	14	15	?
16	17	18	19	20	?
21	22	23	24	25	?
55	?	?	?	?	?

5.

9	7	23	5
8	15	?	

6.下图中第 50 个图形是△还是○？

○△○○○△○○○△○…

7. 142857✕1 = 142857

142857✕2 = 285714

142857✕3 = 428571

142857✕4 = 571428

142857✕5 = **？**

142857✕6 = **？**

8. 81 = 9✕9

882 = 98✕9

8883 = 987✕9

88884 = 9876✕9

888885 = 98765✕9

？ = 987654✕9

88888887 = **？**

9. 1 + 2 + 1 = 4

1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9

1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = **？**

第 7 讲　加减法应用题

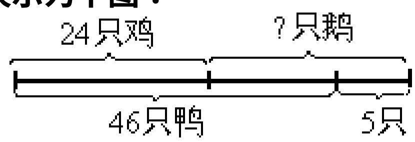
用数学方法解决人们生活和工作中的实际问题就产生了通常所说的“应用题”。

应用题由已知的“条件”和未知的“问题”两部分构成，而且给出的已知条件应能保证求出未知的问题。

这一讲主要介绍利用加、减法解答的简单应用题。

例 1 小玲家养了 46 只鸭子，24 只鸡，养的鸡和鹅的总只数比养的鸭多 5 只。小玲家养了多少只鹅？

解：将已知条件表示为下图：

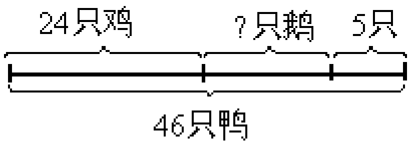


表示为算式是：24+？=46+5。由此可求得养鹅

(46+5)-24=27(只)。

答：养鹅 27 只。

若例 1 中鸡和鹅的总数比鸭少 5 只(其它不变)，则已知条件可表示为下图，

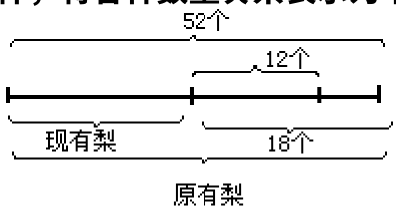


表示为算式是：24+？+5=46。由此可求得养鹅

46-5-24=17(只)。

例 2 一个筐里装着 52 个苹果，另一个筐里装着一些梨。如果从梨筐里取走 18 个梨，那么梨就比苹果少 12 个。原来梨筐里有多少个梨？

分析：根据已知条件，将各种数量关系表示为下图。



有几种思考方法：

(1)根据取走 18 个梨后，梨比苹果少 12 个，先求出梨筐里现有梨 52-12=40(个)，再求出原有梨

(52-12)+18=58(个)。

(2)根据取走 18 个梨后梨比苹果少 12 个，我们设想“少取 12 个”梨，则现有的梨和苹果一样多，都是 52 个。这样就可先求出原有梨比苹果多 18-12＝6(个)，再求出原有梨

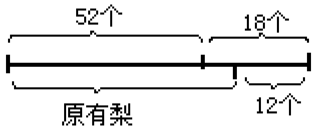
52+(18-12)=58(个)。

(3)根据取走 18 个梨后梨比苹果少 12 个，我们设想不取走梨，只在苹果筐里加入 18 个苹果，这时有苹果

52+18=70(个)。

这样一来，现有苹果就比原来的梨多了 12 个(见下图)。由此可求出原有

梨(52+18)-12=58(个)。



由上面三种不同角度的分析，得到如下三种解法。

解法 1：(52-12)+18=58(个)。

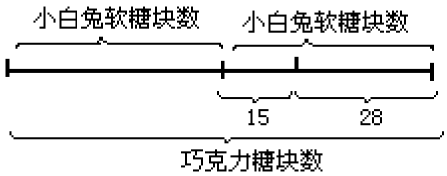
解法 2：52+(18-12)=58(个)。

解法 3：(52+18)-12=58(个)。

答：原来梨筐中有 58 个梨。

例 3 某校三年级一班为欢迎“ 手拉手 ” 小朋友们的到来，买了若干糖果。已知水果糖比小白兔软糖多 15 块，巧克力糖比水果糖多 28 块。又知巧克力糖的块数恰好是小白兔软糖块数的 2 倍。三年级一班共买了多少块糖果？

分析与解：只要求出某一种糖的块数，就可以根据已知条件得到其它两种糖的块数，总共买多少就可求出。先求出哪一种糖的块数最简便呢？我们先把已知条件表示为下图。



由上图可求出，

小白兔软糖块数=15+28=43(块)，

水果糖块数=43+15=58(块)，

巧克力糖块数=43×2=86(块)。

糖果总数=43+58+86=187(块)。

答:共买了 187 块糖果。

例 4 一口枯井深 230 厘米，一只蜗牛要从井底爬到井口处。它每天白天向上爬 110 厘米，而夜晚却要向下滑 70 厘米。这只蜗牛哪一个白天才能爬出井口？

分析与解：因蜗牛最后一个白天要向上爬 110 厘米，井深 230 厘米减去这 110 厘米后(等于 120 厘米)，就是蜗牛前几天一共要向上爬的路程。

因为蜗牛白天向上爬 110 厘米，而夜晚又向下滑 70 厘米，所以它每天向上爬 110-70=40(厘米)。

由于 120÷40=3，所以，120 厘米是蜗牛前 3 天一共爬的。故第 4 个白天蜗牛才能爬到井口。

若将例 4 中枯井深改为 240 厘米，其它数字不变，这只蜗牛在哪个白天才能爬出井口？(第 5 个白天)

练习 7

1.甲、乙、丙三人原各有桃子若干个。甲给乙 2 个，乙给丙 3 个，丙又给甲 5 个后，三人都有桃子 9 个。甲、乙、丙三人原来各有桃子多少个？

2.三座桥，第一座长 287 米，第二座比第一座长 85 米，第三座比第一座与第二座的总长短 142 米。第三座桥长多少米？

3.(1)幼儿园小班有巧克力糖 40 块，还有一些奶糖。分给小朋友奶糖 24

块后，奶糖就比巧克力糖少了 10 块。原有奶糖多少块？

(2)幼儿园中班有巧克力糖 48 块，还有一些奶糖。分给小朋友奶糖 26 块后，奶糖就只比巧克力糖多 18 块。原有奶糖多少块？

4.一桶柴油连桶称重 120 千克，用去一半柴油后，连桶称还重 65 千克。这桶里有多少千克柴油？空桶重多少？

5.一只蜗牛从一个枯水井底面向井口处爬，白天向上爬 110 厘米，而夜晚向下滑 40 厘米,第 5 天白天结束时,蜗牛到达井口处。这个枯水井有多深？

若第 5 天白天爬到井口处,这口井至少有多少厘米深？(厘米以下的长度不计)

6.在一条直线上，A 点在 B 点的左边 20 毫米处，C 点在 D 点左边 50 毫米处，D 点在 B 点右边 40 毫米处。写出这四点从左到右的次序。

7.(1)五个不同的数的和为 172，这些数中最小的数为 32，最大的数可以是多少？

(2)六个不同的数的和为 356，这些数中，最大的是 68，最小的数可以是多少？

第 8 讲　乘除法应用题

本讲向同学们介绍如何利用乘、除法解答简单应用题。用乘、除法解应用题，首先要明确下面几个关系，然后根据应用题中的已知条件，利用这些数量关系求解。

被乘数×乘数=乘积，相同数×个数=总数，

小数×倍数=大数，

被除数÷除数=商，被除数÷商=除数，

被除数÷除数=(不完全)商……余数。

例 1 学校开运动会，三年级有 86 人报名参加单项比赛，其他年级参加单项比赛的人数是三年级的4倍少5人。全校参加单项比赛的人数有多少人？

分析：先求出其他年级参赛人数，

86×4-5＝339(人)，

再加上三年级参赛人数，就可求出全校参赛人数。

解：(86×4-5)＋86＝425(人)。

答：全校参赛 425 人。

本题中全校参赛人数也可以看成是三年级参赛人数的 5 倍少 5 人，所以可列式为

86×5-5＝425(人)。

例 2 有 5 只猴子，其中 2 只各摘了 7 个桃子，另外 3 只各摘了 12 个桃子。把所有摘下的桃子平均分给这 5 只猴子，每只猴子能分到多少个桃子？

解：共摘桃子 7×2＋12×3＝50(个)，

平均每只猴可分 50÷5＝10(个)。

综合算式(7×2＋12×3)÷5＝10(个)。

答：每只猴子能分到 10 个桃。

例 3 小白兔上山采摘了许多蘑菇。它把这些蘑菇先平均分成 4 堆，3 堆送给它的小朋友，自己留一堆。后来它又把留下的这一堆平均分成 3 堆，两堆送给别的小白兔，一堆自己吃。自己吃的这一堆有 5 个。它共采摘了多少个蘑菇？

分析：我们从后向前分析。当分成 3 堆时，共有 5×3＝15(个)，这是分成 4 堆时每一堆的个数。所以，分成 4 堆时，共有 15×4＝60(个)。

解：(5×3)×4＝15×4=60(个)。

答：共摘了 60 个蘑菇。

例 4 小雨到奶奶家。如果来回都乘车，那么路上要用 20 分钟。如果去时乘车，回来时步行，那么一共要用 50 分钟。小雨步行回来用多少时间？

分析：来回都乘车用 20 分，所以乘车单程所用的时间是 20÷2=10(分)。去时乘车回来时步行共用 50 分，减掉去时乘车用的 10 分，回来时步行用了

50-10＝40(分)。

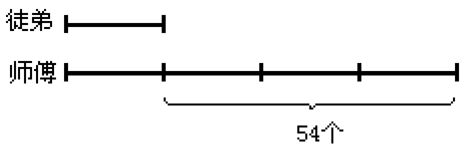
解：50-20÷2=40(分)。

答：步行回来用 40 分钟。

例 5 师徒二人加工同样的机器零件。师傅加工的个数是徒弟的 4 倍，其个数比徒弟多 54 个。师徒二人这天各加工了多少个零件？

分析：如下图所示，把徒弟加工的个数看成“1 份”，师傅加工的就是“4 份”，因而师傅比徒弟多(4-1)份。由上图可求得 1 份为 54÷(4-

1)=18(个)，由此可求出师徒二人各加工了多少个零件。



解：徒弟加工了 54÷(4-1)=18(个)，

师傅加工了 18×4＝72(个)。

答：徒弟加工了 18 个，师傅加工了 72 个。

解这类题的关键是分析出“54”是如何多出来的，即弄明白用“倍数-1”来除它，所得的数代表什么。

例 6 工厂装配四轮推车，1 个车身要配 4 个车轮。现在有 40 个车身，70 个车轮。问：装配出多少辆四轮推车后，剩下的车身和车轮的数量相等？

分析：1 个车身配 4 个车轮，即每装配出一辆四轮推车，用的车轮数比车身数多 4-1=3(个)。现在车轮比车身多 70-40＝30(个)，要把这 30 个车轮“消耗掉”，需装配 30÷3＝10(辆)四轮车。

解：(70-40)÷(4-1)＝10(辆)。

答：需装配出 10 辆四轮推车。

练习 8

1.某项工作 3 人做需要 3 个星期又 3 天，中间无休息日，那么，1 人单独做这项工作需要多少天？

2.贺林家养鸡的只数是鹅的只数的 6 倍，鸭比鹅多 8 只，鸭有 15 只。贺林家养了多少只鸡？

3.小敏买了一本书和一包糖。买一本书用了 3 元 6 角，买糖用的钱数是买书所用钱数的 5 倍。她带去的 50 元钱还剩多少？

4.小峰去老师家看望老师。如果往返都骑自行车，那么在路上要用 1 时 20 分。如果去时骑自行车，回来时步行，那么一共要用 2 时 30 分。小峰步行回来用多少时间？

5.4 元钱能买西瓜 8 千克，10 元钱能买多少西瓜？

6.小兰有 24 本书，小玲有 18 本书。小兰要给小玲几本书，两人的书才一样多？

7.小红与小光买拼音本。小红买了 12 本，小光买了 8 本。小红比小光多用 2 元 4 角钱。每本多少钱？

8.甲、乙两辆汽车分别从同一车站出发，沿相反方向开去，3 时共行 360 千米。甲的速度是乙的速度的 2 倍。甲、乙的速度各是多少？

9.甲、乙两个粮库共存粮 150 吨。甲库运出 40 吨，乙库运入 10 吨，这时甲库存粮是乙库存粮的 2 倍。甲、乙粮库原来存粮各多少？

第 9 讲　平均数

把一个(总)数平均分成几个相等的数，相等的数的数值就叫做这个(总)数的平均数。例如，24 平均分成四个数：6，6，6，6，数 6 就叫做 24 分成四份的平均数。又如，24 平均分成六个数：4，4，4，4，4，4，数 4 就叫做 24 分成六份的平均数。

由此可见，平均数是相对于“总数”和分成的“份数”而言的。知道了被均分的“总数”和均分的“份数”，就可以求出平均数：

总数÷份数=平均数。

“平均数”这个数学概念在我们的日常生活和工作中经常用到。例如，某次考试全班同学的“平均成绩”，几件货物的“平均重量”，某辆汽车行驶某段路程的“平均速度”等等，都是我们经常碰到的求平均数的问题。根据求平均数的一般公式可以得到它们的计算方法：

全班同学的总成绩÷全班同学人数=平均成绩，

几件货物的总重量÷货物件数=平均重量，

一辆汽车行驶的路程÷所用的时间=平均速度。

我们在上一讲的例 2 中，已经接触到求平均数的应用题，下面再举一些例子来说明有关平均数应用问题的解法。

例 1 一小组六个同学在某次数学考试中，分别为 98 分、87 分、93 分、86 分、88 分、94 分。他们的平均成绩是多少？

解：总成绩=98＋87＋93＋86＋88＋94＝546(分)。

这个小组有 6 个同学，平均成绩是

546÷6＝91(分)。

答：平均成绩是 91 分。

例 2 把 40 千克苹果和 80 千克梨装在 6 个筐内(可以混装)，使每个筐装的重量一样。每筐应装多少千克？

解：苹果和梨的总重量为

40＋80＝120(千克)。

因要装成 6 筐，所以，每筐平均应装

120÷6＝20(千克)。

答：每筐应装 20 千克。

例 3 小明家先后买了两批小猪，养到今年 10 月。第一批的 3 头每头重 66 千克，第二批的 5 头每头重 42 千克。小明家养的猪平均多重？

解：两批猪的总重量为

66×3＋42×5＝408(千克)。

两批猪的头数为 3＋5＝8(头)，故平均每头猪重

408÷8＝51(千克)。

答：平均每头猪重 51 千克。

注意，在上例中不能这样来求每头猪的平均重量：

(66＋42)÷2＝54(千克)。

上式求出的是两批猪的“平均重量的平均数”，而不是(3＋5＝)8 头猪的平均重量。这是刚接触平均数的同学最容易犯的错误！

例 4 一个学生为了培养自己的数学解题能力，除了认真读一些书外，还规定自己每周(一周为 7 天)平均每天做 4 道数学竞赛训练题。星期一至星期

三每天做 3 道，星期四不做，星期五、六两天共做了 13 道。那么，星期日要做几道题才能达到自己规定的要求？

分析：要先求出每周规定做的题目总数，然后求出星期一至星期六已做的题目数。两者相减就是星期日要完成的题目数。

每周要完成的题目总数是 4×7=28(道)。星期一至星期六已做题目 3×3＋13＝22(道)，所以，星期日要完成 28-22＝6(道)。

解：4×7-(3×3＋13)＝6(道)。

答：星期日要做 6 道题。

例 5 三年级二班共有 42 名同学，全班平均身高为 132 厘米，其中女生有 18 人，平均身高为 136 厘米。问：男生平均身高是多少？

解：全班身高的总数为

132×42＝5544(厘米)，

女生身高总数为

136×18＝2448(厘米)，

男生有 42-18＝24(人)，身高总数为

5544-2448＝3096(厘米)，男生平均身高为

3096÷24＝129(厘米)。

综合列式：

(132×42-136×18)÷(42-18)＝129(厘米)。

答：男生平均身高为 129 厘米。

例 6 小敏期末考试，数学 92 分，语文 90 分，英语成绩比这三门的平均成绩高 4 分。问：英语得了多少分？

分析：英语比平均成绩高的这 4 分，是“补”给了数学和语文，所以三门功课的平均成绩为

(92＋90＋4)÷2＝93(分)，

由此可求出英语成绩。

解：(92＋92＋4)÷2＋4＝97(分)。

答：英语得了 97 分。

练习 9

1.一班有 40 个学生，二班有 42 个学生，三班有 45 个学生。开学后又转学来了 11 个学生。怎样分才能使每班学生人数相等？

2.小岗计划 4 天做 15 道数学题，结果多做了 9 道。平均每天做了多少道？

3.一小组同学体检量身高时发现其中 2 人的身高是 123 厘米，另外 4 人的身高均为 132 厘米。这个小组同学的平均身高是多少？

4.小梅做跳绳练习，第一次跳了 67 下，第二次跳了 76 下。她要想三次平均成绩达到 80 下，第三次至少要跳多少下？

5.一农机站有 960 千克的柴油。用了 6 天，还剩 240 千克。照此用法，剩下的柴油还可用几天？

6.小浩为培养自己的阅读能力，自己规定这一个月(30 天)要读完共 288 页的彩图世界童话名著《伊索寓言》。头 9 天平均每天读了 8 页，第二个 9 天平均每天读了 10 页，第三个 9 天平均每天读了 11 页。最后三天平均每天需要读几页才能达到自己规定的要求？

7.五个同学期末考试的数学成绩平均 94 分,而其中有三个同学的平均成绩为 92 分，另两个同学的平均成绩是多少？

8.小亮学游泳，第一次游了 25 米，第二次游的距离比两次游的平均距离多 8 米。小亮第二次游了多少米？

9.篮球队中四名队员的平均身高是 182 厘米，另一名队员的身高比这五队员的平均身高矮 8 厘米，这名队员的身高是多少？

第 10 讲　　植树问题

绿化工程是造福子孙后代的大事。确定在一定条件下栽树、种花的棵数是最简单、最基本的“植树问题”。还有许多应用题可以化为“植树问题”来解，或借助解“植树问题”的思考方法来解。

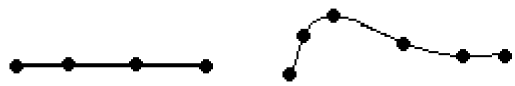
先介绍四类最简单、最基本的植树问题。

为使其更直观，我们用图示法来说明。树用点来表示，植树的沿线用线来表示，这样就把植树问题转化为一条非封闭或封闭的线上的“点数”与相邻两点间的线的段数之间的关系问题。

显然，只有下面四种情形：

(1)非封闭线的两端都有“点”时，

“点数”＝“段数”＋1。

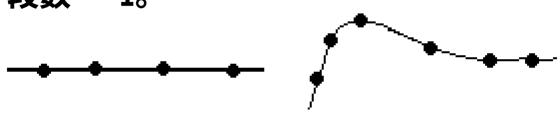


(2)非封闭线只有一端有“点”时，

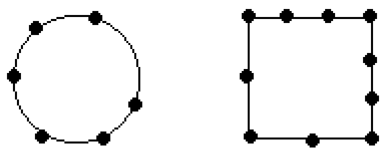
“点数”=“段数”。

(3)非封闭线的两端都没有“点”时，

“点数”＝“段数”-1。



(4)封闭线上，“点数”=“段数”。



最简单、最基本的植树问题只有这四类情形。

例如，一条河堤长 420 米，从头到尾每隔 3 米栽一棵树，要栽多少棵树？这是第(1)种情形，所以要栽树 420÷3＋1＝141(棵)。

又如，肖林家门口到公路边有一条小路，长 40 米。肖林要在小路一旁每隔 2 米栽一棵树，一共要栽多少棵树？由于门的一端不能栽树，公路边要栽树，所以，属于第(2)种情形，要栽树 40÷2＝20(棵)。

再如，两座楼房之间相距 30 米，每隔 2 米栽一棵树，一直行能栽多少棵树？因紧挨楼房的墙根不能栽树，所以，属于第(3)种情形，能栽树 30÷2-1＝14(棵)。

再例如，一个圆形水池的围台圈长 60 米。如果在此台圈上每隔 3 米放一盆花，那么一共能放多少盆花？这属于第(4)种情形，共能放花 60÷3＝20(盆)。

许多应用题都可以借助或归结为上述植树问题求解。

例 1 在一段路边每隔 50 米埋设一根路灯杆，包括这段路两端埋设的路灯杆，共埋设了 10 根。这段路长多少米？

解：这是第(1)种情形，所以，“段数”＝10－1＝9。这段路长为 50×

(10-1)＝450(米)。

答：这段路长 450 米。

例 2 小明要到高层建筑的 11 层，他走到 5 层用了 100 秒，照此速度计算，他还需走多少秒？

分析：因为 1 层不用走楼梯，走到 5 层走了 4 段楼梯，由此可求出走每段楼梯用 100÷(5－1)＝25(秒)。走到 11 层要走 10 段楼梯，还要走 6 段楼梯，所以还需

25×6＝150(秒)。

解：［100÷(5-1)］×(11-5)＝150(秒)。

答：还需 150 秒。

例 3 一次检阅，接受检阅的一列彩车车队共 30 辆，每辆车长 4 米，前后每辆车相隔 5 米。这列车队共排列了多长？如果车队每秒行驶 2 米，那么这列车队要通过 535 米长的检阅场地，需要多少时间？

解：车队间隔共有

30-1＝29(个)，

每个间隔 5 米，所以，间隔的总长为

(30-1)×5＝145(米)，

而车身的总长为 30×4＝120(米)，故这列车队的总长为

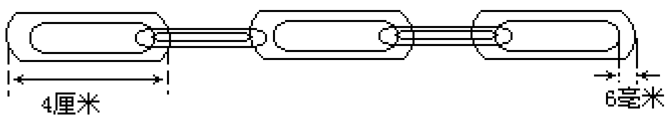
(30-1)×5+30×4＝265(米)。

由于车队要行 265＋535＝800(米)，且每秒行 2 米，所以，车队通过检阅场地需要

(265＋535)÷2＝400(秒)＝6 分 40 秒。

答：这列车队共长 265 米，通过检阅场地需要 6 分 40 秒。

例 4 下图是五个大小相同的铁环连在一起的图形。它的长度是多少？十个这样的铁环连在一起有多长？



解：如上图所示。关键是求出重叠的“环扣”数(每个长 6 毫米)。根据植树问题的第(3)种情形知，五个连在一起的“环扣”数为 5-1＝4(个)，所以重叠部分的长为

6×(5-1)＝24(毫米)，

又 4 厘米=40 毫米，所以五个铁环连在一起长

40×5-6×(5－1)＝176(毫米)。

同理，十个铁环连在一起的长度为

40×10-6×(10-1)=346(毫米)。

答：五个铁环连在一起的长度为 176 毫米。十个铁环连在一起的长度为 346 毫米。

例 5 父子俩一起攀登一个有 300 个台阶的山坡，父亲每步上 3 个台阶，儿子每步上 2 个台阶。从起点处开始，父子俩走完这段路共踏了多少个台阶？(重复踏的台阶只算一个)。

解：因为两端的台阶只有顶的台阶被踏过，根据已知条件，儿子踏过的台阶数为

300÷2＝150(个)，

父亲踏过的台阶数为 300÷3＝100(个)。

由于 2×3=6,所以父子俩每 6 个台阶要共同踏一个台阶,共重复踏了 300÷6＝50(个)。所以父子俩共踏了台阶

$$150+100-50=200(个)。$$

答：父子俩共踏了 200 个台阶。

练习 10

1.学校有一条长 60 米的走道，计划在道路一旁栽树。每隔 3 米栽一棵。

(1)如果两端都各栽一棵树，那么共需多少棵树苗？

(2)如果两端都不栽树，那么共需多少棵树苗？

(3)如果只有一端栽树，那么共需多少棵树苗？

2.一个长 100 米，宽 20 米的长方形游泳池，在离池边 3 米的外围圈(仍为长方形)上每隔 2 米种一棵树。共种了多少棵树？

3.一根 90 厘米长的钢条，要锯成 9 厘米长的小段，一共要锯几次？

4.测量人员测量一条路的长度。先立了一个标杆，然后每隔 40 米立一根标杆。当立杆 10 根时，第 1 根与第 10 根相距多少米？

5.学校举行运动会。参加入场式的仪仗队共 180 人，每 6 人一行，前后两行间隔 120 厘米。这个仪仗队共排了多长？

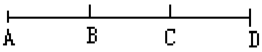
6.在一条长 1200 米的河堤边等距离植树(两端都要植树)。已挖好每隔 6 米植一棵树的坑，后要改成每隔 4 米植一棵树。还要挖多少个坑？需要填上多少个坑？

7.一个车队以 5 米/秒的速度缓缓地通过一座 210 米长的大桥，共用 100 秒。已知每辆车长 5 米，两车之间相隔 10 米，那么这个车队共有多少辆车？

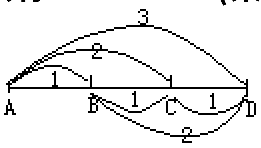
第 11 讲　巧数图形

数出某种图形的个数是一类有趣的图形问题。由于图形千变万化，错综复杂，所以要想准确地数出其中包含的某种图形的个数，还真需要动点脑筋。要想有条理、不重复、不遗漏地数出所要图形的个数，最常用的方法就是分类数。

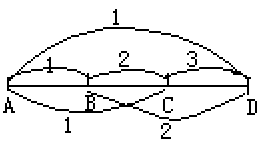
例 1 数出下图中共有多少条线段。



分析与解：我们可以按照线段的左端点的位置分为 A，B，C 三类。如下图所示，以 A 为左端点的线段有 3 条，以 B 为左端点的线段有 2 条，以 C 为左端点的线段有 1 条。所以共有 3＋2＋1＝6(条)。



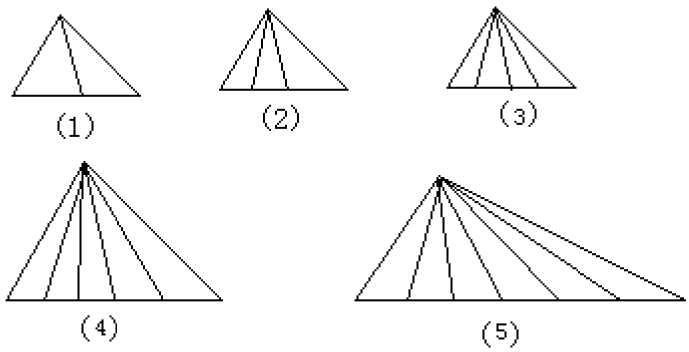
我们也可以按照一条线段是由几条小线段构成的来分类。如下图所示，AB，BC，CD 是最基本的小线段，由一条线段构成的线段有 3 条，由两条小线段构成的线段有 2 条，由三条小线段构成的线段有 1 条。



所以，共有 3＋2＋1＝6(条)。

由例 1 看出，数图形的分类方法可以不同，关键是分类要科学，所分的类型要包含所有的情况，并且相互不重叠，这样才能做到不重复、不遗漏。

例 2　下列各图形中，三角形的个数各是多少？



分析与解：因为底边上的任何一条线段都对应一个三角形(以顶点及这条线段的两个端点为顶点的三角形)，所以各图中最大的三角形的底边所包含的线段的条数就是三角形的总个数。由前面数线段的方法知，

图(1)中有三角形 1＋2＝3(个)。

图(2)中有三角形 1＋2＋3=6(个)。

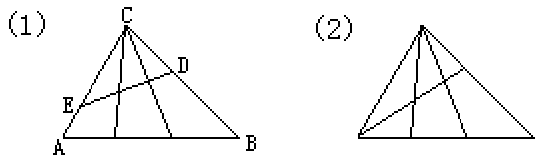
图(3)中有三角形 1＋2＋3＋4＝10(个)。

图(4)中有三角形 1＋2＋3＋4＋5＝15(个)。

图(5)中有三角形

1＋2＋3＋4＋5＋6=21(个)。

例 3 下列图形中各有多少个三角形？



分析与解：(1)只需分别求出以AB，ED为底边的三角形中各有多少个三角形。

以AB为底边的三角形ABC中，有三角形

1＋2＋3＝6(个)。

以ED为底边的三角形CDE中，有三角形

1＋2＋3＝6(个)。

所以共有三角形6＋6=12(个)。

这是以底边为标准来分类计算的方法。它的好处是可以借助“求底边线段数”而得出三角形的个数。我们也可以以小块个数作为分类的标准来计算：图中共有6个小块。

由1个小块组成的三角形有3个；

由2个小块组成的三角形有5个；

由3个小块组成的三角形有1个；

由4个小块组成的三角形有2个；

由6个小块组成的三角形有1个。

所以，共有三角形

3＋5＋1＋2＋1＝12(个)。

(2)如果以底边来分类计算，各种情况较复杂，因此我们采用以“小块个数”为分类标准来计算：

由1个小块组成的三角形有4个；

由2个小块组成的三角形有6个；

由3个小块组成的三角形有2个；

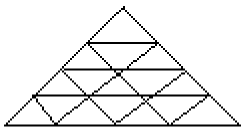
由4个小块组成的三角形有2个；

由6个小块组成的三角形有1个。

所以，共有三角形

4＋6＋2＋2＋1＝15(个)。

例4 右图中有多少个三角形？



解：假设每一个最小三角形的边长为1。按边的长度来分类计算三角形的个数。

边长为1的三角形，从上到下一层一层地数，有

1＋3＋5＋7=16(个)；

边长为 2 的三角形(注意，有一个尖朝下的三角形)有 1＋2＋3＋1=7(个)；

边长为3的三角形有1＋2＝3(个)；

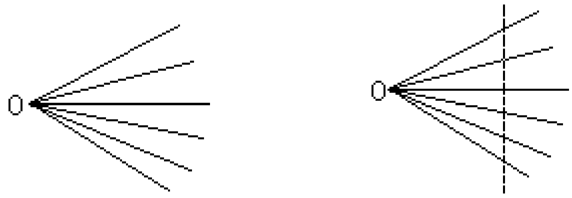
边长为4的三角形有1个。

所以，共有三角形

16＋7＋3＋1＝27(个)。

例 5 数出下页左上图中锐角的个数。

分析与解：在图中加一条虚线，如下页右上图。容

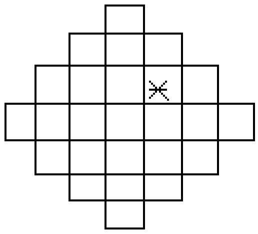


易发现,所要数的每个角都对应一个三角形(这个角与它所截的虚线段构成的三角形)，这就回到例 2，从而回到例 1 的问题，即所求锐角的个数，就等于从 0 点引出的 6 条射线将虚线截得的线段的条数。虚线上线段的条数有

1+2+3+4+5=15(条)。

所以图中共有 15 个锐角。

例 6 在下图中，包含“ * ”号的长方形和正方形共有多少个？



解：按包含的小块分类计数。

包含 1 小块的有 1 个；包含 2 小块的有 4 个；

包含 3 小块的有 4 个；包含 4 小块的有 7 个；

包含 5 小块的有 2 个；包含 6 小块的有 6 个；

包含 8 小块的有 4 个；包含 9 小块的有 3 个；

包含 10 小块的有 2 个；包含 12 小块的有 4 个；

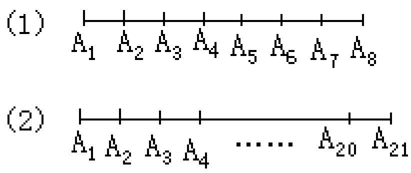
包含 15 小块的有 2 个。

所以共有

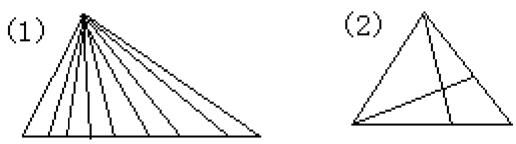
1＋4＋4＋7＋2＋6＋4＋3＋2＋4＋2=39(个)。

练习 11

1.下列图形中各有多少条线段？

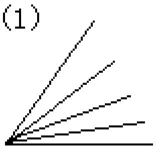


2.下列图形中各有多少个三角形？

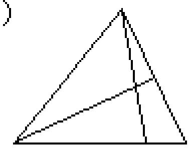


3.下列图形中，各有多少个小于 180°的角？

(1)

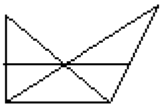


(2)

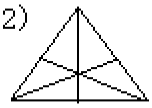


4.下列图形中各有多少个三角形？

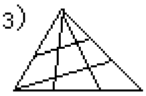
(1)



(2)

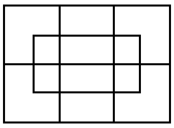


(3)

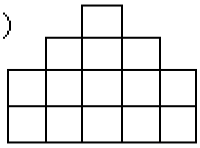


5.下列图形中各有多少个长方形？

(1)

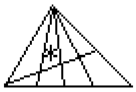


(2)

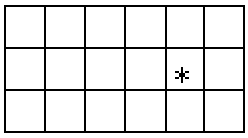


6.下列图形中，包含“*”号的三角形或长方形各有多少？

(1)

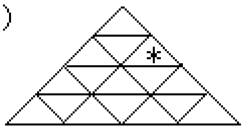


(2)

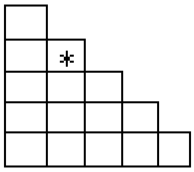


7.下列图形中，不含“*”号的三角形或长方形各有几个？

(1)



(2)



第 12 讲　巧求周长

我们知道：

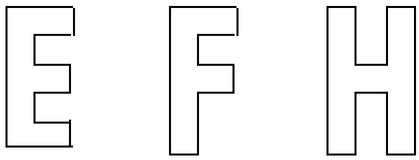
正方形周长＝边长×4，

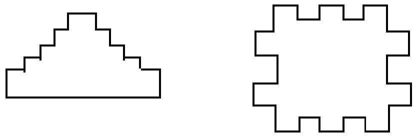
长方形周长＝长×2＋宽×2

＝(长＋宽)×2。

这两个计算公式看起来十分简单，但用途却十分广泛。用它们可以解决许多直角多边形(所有的角都是直角的多边形)的周长问题。这是因为直角多边形总可以分割成若干个正方形或长方形。

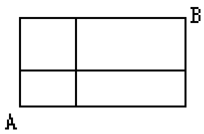
例如，下面的图形都可以分割成若干个正方形或长方形，当然分割的方法不是唯一的。

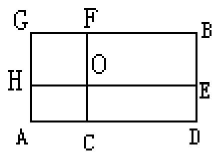




由此，可以演变出许多只涉及正方形、长方形周长计算公式的题目。

例 1 一个苗圃园(如左下图)，周边和中间有一些路供人行走(图中线段表示“路”)，几个小朋友在里面观赏时发现：从 A 处出发，在速度一样的情况下，只要是按“向右”、“向上”方向走，几个人分头走不同的路线，总会同时达到 B 处。你知道其中的道理吗？





分析与解：如右上图所示，将各个交点标上字母。由 A 处到 B 处，按“向右”、“向上”方向走，只有下面六条路线：

(1)A→C→D→E→B；

(2)A→C→O→E→B；

(3)A→C→O→F→B；

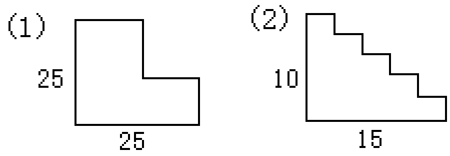
(4)A→H→G→F→B；

(5)A→H→O→E→B；

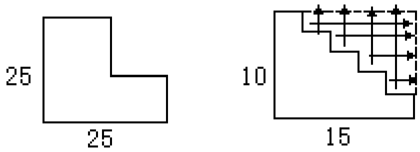
(6)A→H→O→F→B。

因为 A→C 与 H→O，G→F 的路程一样长，所以可以把它们都换成 A→C；同理，将 O→E，F→B 都换成 C→D；将 A→H，C→O 都换成 D→E；将 H→G，O→F 都换成 E→B。这样换过之后，就得到六条路线的长度都与第(1)条路线相同，而第(1)条路线的长“AD+DB”就是长方形的“长+宽”，也就是说，每条路线的长度都是“长+宽”。路程、速度都相同，当然到达 B 处的时间就相同了。

例 2 计算下列图形的周长(单位：厘米)。



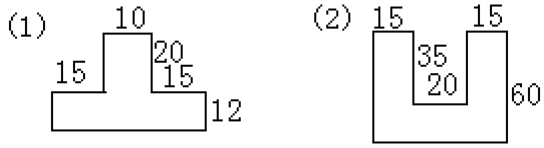
解：(1)将图中右上缺角处的线段分别向上、向右平行移动到虚线处(见左下图)，这样正好移补成一个正方形，所以它的周长为 25×4=100(厘米)。



(2)与(1)类似，可以移补成一个长方形，周长为

(10＋15)×2=50(厘米)。

例 3 求下面两个图形的周长(单位：厘米)。



解：(1)与例 2 类似，可以移补成一个长(15＋10＋15)厘米、宽(12＋20)厘米的长方形，所以周长为

(15＋10＋15)×2＋(12＋20)×2＝144(厘米)。

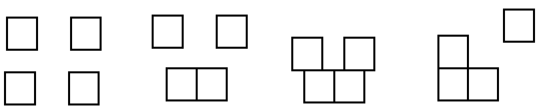
(2)设想先把长 20 厘米的线段向上平移到两条长 15 厘米的线段中间，构成一个长 60 厘米，宽(15＋20＋15)厘米的长方形，此时，还有两条长 35 厘米的竖线段。所以周长为

60×2＋(15＋20＋15)×2＋35×2＝290(厘米)。

例 4 在一张纸上画出由四个边长为 3 厘米的正方形拼凑或组合成的图形(重叠的线段只算画一次)。显然，这个图形有多种多样的画法，下列各图是其中的一部分画法。在所有的这些画法中，

(1)哪种画法画出的线段总长最长？有多长？

(2)哪种画法画出的线段总长最短？有多长？

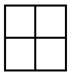


分析与解：画的线段重叠部分越少，画的线段就越长。反之，重叠部分越多，画的线段就越短。因此，类似图 1 那样画的线条最长，共画了

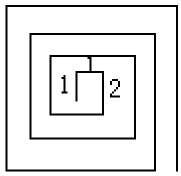
3×4×4=48(厘米)。

右图画的线条最短，共画了

(3＋3)×6=36(厘米)。

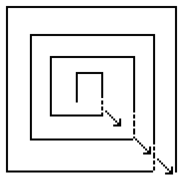


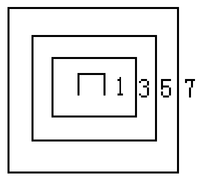
例 5 下图是一个方形螺线。已知两相邻平行线之间的距离均为 1 厘米，求螺线的总长度。



分析与解：如左下图所示，按箭头方向转动虚线部分，于是得到了三个边长分别为 3，5，7 厘米的正方形和中间一个三边图形(见右下图)。所以螺线总长度为

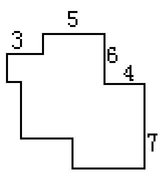
$$(3+5+7)\times4+1\times3=63(\text{厘米})。$$

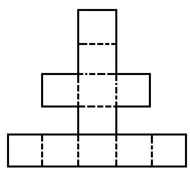




练习 12

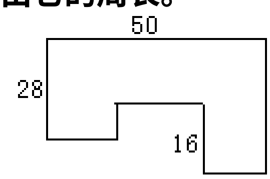
1.试求左下图的周长(单位：厘米)。



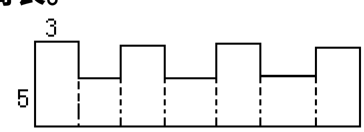


2.上页右下图是由边长为 1 厘米的 11 个正方形堆成的“土”字图形。试求出其周长。

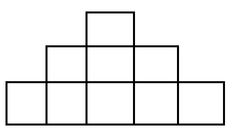
3.右图是某小学教学楼的平面示意图，设计者在图上只标明了三条线段的长度(单位：米)。请你算出它的周长。



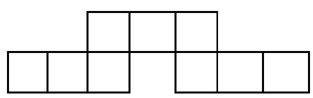
4.下图是由七个长 5 厘米、宽 3 厘米的相同长方形经过竖放、横放而成的图形。求这个图形的周长。



5.下面两图中的小方格的大小相同。图(1)的周长为 48 厘米，图(2)的周长等于多少？



(1)



(2)

6.如右图所示，一个正方形被分成了三个相同的长方形。如果其中一个长方形的周长是 16 米，那么这个正方形的周长是多少米？

第 13 讲　火柴棍游戏(一)

火柴除了可作火种外，人们常用它来摆图形、算式，做出许多有趣的游戏。它不受场地和时间的限制,只要有几根火柴(或几根长短一样的细小木棍)就可以进行。火柴游戏寓知识、技巧于游戏之中，启迪你的智慧，开阔你的思路，丰富你的课余生活。

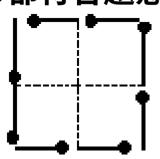
火柴游戏大体分为两种：一种是摆图形和变换图形；一种是变换算式。

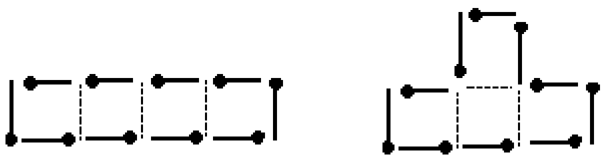
这一讲我们先介绍变换图形的游戏。

1.摆图形游戏

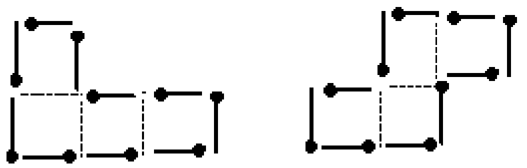
游戏 1 用 8 根火柴棍可以摆成一个正方形。现添两根，即用 10 根火柴能摆出与这个正方形同样大小的图形吗？

分析与解：8 根火柴摆一个正方形，每边必是两根火柴。它可以分成四个小正方形(如右图)。因此，只要用 10 根火柴摆出有四个同样大小的小正方形的图形即可。下面的四个图形都符合题意。

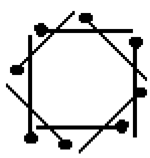




游戏 2 用 8 根火柴棍摆出八个大小一样的三角形和两个一样大小的正方形。

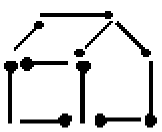


分析与解：4 根火柴可摆出一个正方形，另 4 根火柴又可摆出一个同样大小的正方形。把这两个正方形如右图所示交叉放在一起，就形成八个相同的三角形。



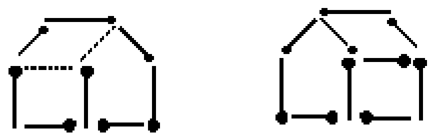
2.移动火柴，变换图形游戏

游戏 3 右图是用 10 根火柴棍摆成的一座房子。请移动 2 根火柴，使房子改变方向。

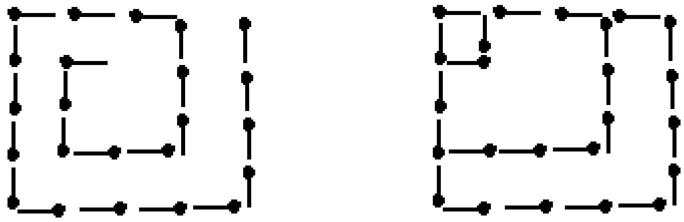


解：如左下图所示，除虚线表示的 2 根火柴外，其余火柴是左、右对称的，所以改变房子的方向与这些火柴无关，应移动虚线表示的 2 根火

柴(见右下图)。

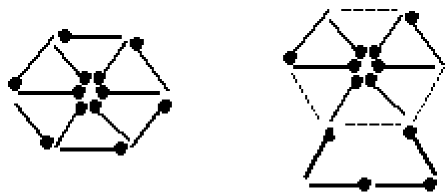


游戏 4 在左下图中移动 4 根火柴棍,使图形成为只有三个正方形的图形。



解：因为只能移动 4 根火柴，所以图中较长的边(3 根或 4 根火柴的边)都不能动。把图中最里面的 4 根火柴移补到右上图的相关位置上即可。

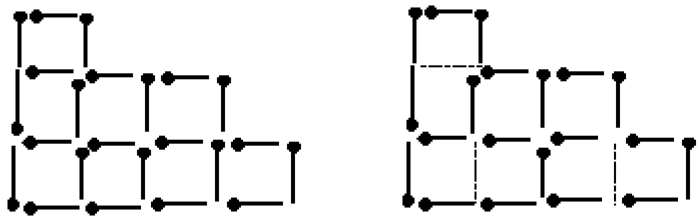
游戏 5 在左下图中移动 4 根火柴棍，使它变成 3 个三角形，并且这 3 个三角形的面积之和与原来的六边形面积相同。



解：原图中有 6 个三角形，变化后剩下 3 个三角形，这 3 个三角形与原来的 6 个三角形的面积相同，必然有一个三角形的面积要增大。如右上图所示，移动虚线表示的 4 根火柴。图中下面的大三角形面积等于小三角形面积的 4 倍。

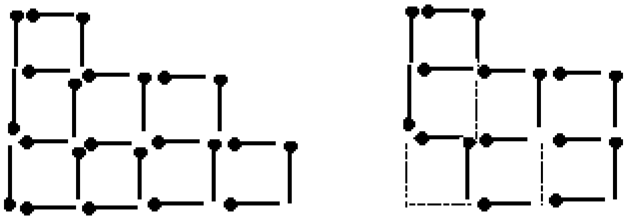
3.去掉火柴，变换图形游戏

游戏 6 在左下图中去掉尽量少的火柴棍，使得图中不存在任何正方形。



解：拿掉的火柴应能尽量多的“破坏”正方形。如右上图，拿掉虚线处的 4 根火柴即可。拿法不唯一。

游戏 7 在左下图中，去掉 4 根火柴棍，使它变成两个完全相同的图形组合。



分析与解：左上图的面积等于七个边长为 1 根火柴棍的小正方形的面积

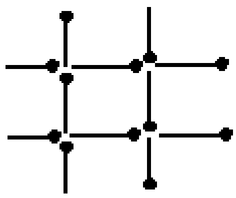
之和。要达到规定要求，必须去掉一个小正方形。剩下的部分划分成两个面积等于三个小正方形面积的图形。去掉右上图中虚线所示的火柴棍即可。

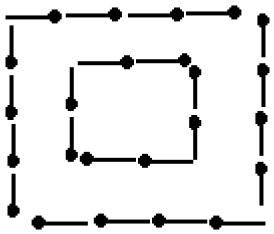
练习 13

1.用 9 根火柴棍摆出一个图形，使它含有五个等边三角形。

2.用 9 根火柴棍摆出一个图形,使它含有三个正方形和七个长方形(不含正方形)。

3.在左下图中移动 3 根火柴棍，使“井”字形变成“品”字形图形。





4.右上图是用 24 根火柴棍摆出的两个正方形。

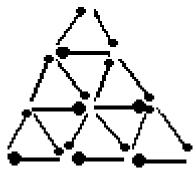
(1)请你移动 4 根，把它变成三个正方形；

(2)再移动 8 根，把(1)中所得图形变成九个完全相同的正方形；

(3)在(2)中所得图形上拿走 8 根火柴，使它变成五个完全相同的正方形。

5.用 13 根火柴棍摆成含有 6 个、7 个和 8 个等边三角形的图形。各给出一种摆法。

6.右图中共有 13 个三角形，从中拿掉尽量少的火柴棍，使得图中没有三角形。



第 14 讲　火柴棍游戏(二)

火柴棍游戏的另一种形式是摆算式。

用火柴棍可以摆出下列数字和符号：

1 2 3 4 5 6 0

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

− + × = > < ≤ ≥ ≠

这些数字和符号，在去掉或添加或移动火柴棍后有些可以相互变化。例如：

添加 1 根火柴，可以得到

1 → 7　5 → 6 或 9　− → + 或 =

去掉 1 根火柴，可以得到

8 → 6 或 9 或 0　≠ → =

移动 1 根火柴，可以得到

3 → 2 或 5　< → >

其中“→”表示“可变为”。

做火柴棍算式游戏就是利用这些变化，改变算式，使之符合题目要求。

下面举的几个例子，只要仔细观察答式，就可以明白是如何按规定变化的，因此就不再进行过细说明了。

游戏 1 下面火柴棍摆的算式都是错的。请在各式中去掉或添加 1 根火柴棍，使各式成立：

(1) 17 + 3 = 14

(2) 15 − 13 = 6

(3) 13 × 4 = 53

解：(1) 去掉 1 根，可变为

11 + 3 = 14 或 17 − 3 = 14

(2) 添加 1 根，可变为

19 − 13 = 6

(3) 去掉 1 根，可变为

13 × 4 = 52

游戏 2 在下列各式中只移动 1 根火柴棍,使错误的式子变成正确的算式：

(1) 221 − 11 − 4 = 1

(2) 11 + 27 − 17 = 21

(3) 7 × 7 = 21 − 4

解：(1)把 221 中的 1 移到等号右边使 1 变成 7。

22 − 11 − 4 = 7

(2)把 17 前面的“＋”变成“－”，这 1 根移到等号右边使 71 变成 21。

11 + 27 − 17 = 21

(3)移动 7 中 1 根到 4 前面去。

7 × 1 或 1 × 7 = 21 − 14

游戏 3 下面的两个算式都是错误的，各移动 2 根火柴，使它们都变成正确的算式：

(1) 1 + 9 = 8 + 8

(2) 1 + 6 + 8 = 8

解：(1)右边移 2 根到左边，变为正确算式。

7 + 8 = 6 + 9

(2)左边的 2 根火柴移动后，变为正确算式。

7 + 9 − 8 = 8

游戏 4 每式移动 3 根火柴棍，使各式都变为正确的算式：

(1) 5 + 5 = 5

(2) 205 × 8 = 1615

解：(1) 6 − 3 = 3

(2) 605 × 3 = 1015

为了锻炼同学们变换算式的灵活性，我们再做一个游戏。

游戏 5 下面是一个不正确的不等式，请移动其中 1 根火柴，使不等式成立。要求找到尽可能多的不同的移动方法。

80 − 69 > 21

分析与解：因为右边的 21 无法通过移动一根火柴变小，所以只考虑左边算式，或使被减数变大，或使减数变小，或改变“－”、“＞”等符号。

将“－”号变为“＋”号，有

80 + 59 > 21　　80 + 63 > 21

80 + 65 > 21　　90 + 69 > 21

60 + 69 > 21

改变“＞”号，有

$80-69<21$　　$90-69\geqslant 21$

改变被减数与减数，有

$98-69>21$　　$90-68>21$

$88-63>21$　　$88-59>21$

$88-65>21$　　$80-58>21$

练习 14

1.在下面各式中去掉或添加 1 根火柴棍，使各式变成正确的算式：

⑴ $13-2=10$

⑵ $14-1=15$

2.在下面各式中，只移动 1 根火柴棍，使各式变为正确的算式：

⑴ $17+7=7-7$

⑵ $12-2-7=11$

⑶ $14-11+4=11$

3.移动 2 根火柴棍，使下面的不等式反向：

$4-1>2$

4.在下列各式中移动 2 根火柴，使它们成立：

⑴ $3+3=3$

⑵ $19+8+8=38$

5.移动 3 根火柴棍，使下式成立：

$16\times 7=122$

6.在下面的等式中，移动 3 根火柴棍，使其成为一个新的等式：

$98-63=35$

7.下面是一个不正确的不等式，请移动其中 1 根火柴，使不等式成立。请找出尽量多的不同移法。

$93+31<32$

第 15 讲　趣题巧解

为了考考同学们的智力和灵气，先提几个问题：

一张长方形的纸，用剪刀剪掉一个角，还剩几个角？

把一根毛线对折两次后剪一刀，毛线被剪成了几段？

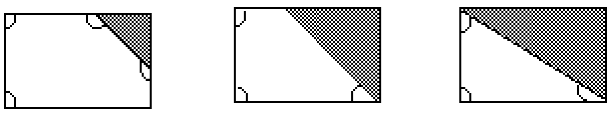
一树枝上有 10 只鸟，用汽枪打中了一只，树枝上还剩几只鸟？

这类智力问题很有趣，但回答时要小心，稍有不慎，就可能落入“圈套”。要想正确地解答这类题目，一是要全面考虑各种情况，二是要充分运用学过的数学知识，再就是还需要些思考问题的灵气和非常规的思考方法。

例 1 一张长方形纸片有四个角，用剪刀沿直线剪掉一个角后，还剩几个角？

分析：由于已知“剪掉一个角”，但没有限制如何剪，所以必须对这个已知条件中的“剪法”有一个全面的考虑。否则，不加思索地顺口答出“还剩 3 个角”，答案就不全面了。当我们仔细考虑“剪法”的各种可能性后，再根据角的定义，就会得到全面而正确的答案。

解：由于剪掉长方形纸片的一个角有下页图所示的三种不同剪法(图中阴影部分为剪掉的角)，所以，可能还有 5 个角、4 个角或 3 个角。



答：还剩 5 个角、4 个角或 3 个角。

例 2 37 个同学要坐船过河，渡口处只有一只能载 5 人的小船(无船工)。他们要全部渡过河去，至少要使用这只小船渡河多少次？

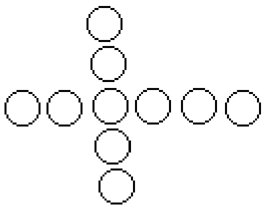
分析：如果由 37÷5=7……2，得出 7+1=8 次，那么就错了。因为忽视了至少要有 1 个人将小船划回来这个特定的要求。实际情况是：小船前面的每一个来回至多只能渡 4 个人过河去，只有最后一次小船不用返回才能渡 5 个人过河。

解：因为除最后一次可以渡 5 个人外，前面若干个来回每个来回只能渡过 4 个人，每个来回是 2 次渡河，所以至少渡河

$$[(37-5)\div 4]\times 2+1=17(\text{次})。$$

答：至少要渡河 17 次。

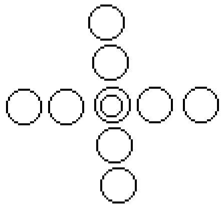
例 3(1)右图是 10 枚硬币，移动其中 1 枚硬币，使每一行上都有 6 枚硬币。



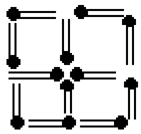
(2)用 12 根火柴拼出 6 个边长为 1 根火柴的正方形。

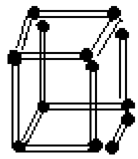
分析与解：(1)10 枚硬币摆两行，一般来说每行有 10÷2=5(枚)。图中的两行却是一行 5 枚一行 6 枚，原因是中间有 1 枚在两行的交叉点上，所以出现了 5+6＞10。由于题中并没有规定每个位置上只准放一枚，所以，只要

使其中 1 枚硬币在两直行的交叉点上再“ 重复 ”一下，即在两行的交叉点上重叠地放 2 枚硬币(见右上图)，就可达到目的。



(2)一个正方形需要 4 根火柴才能拼出，12 根火柴只能拼出 3 个正方形，即使如左下图所示，也只能拼出 4 个正方形。如果我们放弃“ 在平面上拼 ”这种平常的思路，而改为在“ 立体空间中去拼 ”的新思路，那么就可能“ 柳暗花明 ”。





当思路转向立体空间后，自然会联想到正方体图形。因为它有六个正方形表面，而且正方体的棱恰好是 12 条，所以完全符合题意。

拼法如右上图所示。

例 3 的解法说明，“ 换一个角度 ”或“ 换一个方向 ”去思考问题，往往能收到“ 奇效 ”！本题(2)如果把思路始终局限在平面上那么就绝无出路。事实上，题目中并没有这样的限制，而是习惯的思维方式把我们限制了。一旦转到立体空间去思考，问题就迎刃而解了。

例 4 一群动物在一起玩叠罗汉游戏。每只动物的重量都是整千克数，其中，最轻的重 1 千克，最重的重 60 千克。叠罗汉规定每只动物上面的总重量不能超过自己的重量。在重 1～60 千克的动物都有的情况下，它们最多能叠几层？(叠一个动物算一层)

分析与解：由于要求叠的层数尽量多，所以应该想到：①最上一层应是最轻的动物；②每只动物上面的总重量尽量等于自己的重量(也满足“ 不超过 ”自己的重量要求)。按这两条原则叠罗汉，能很容易找出各层的动物重量，从上到下，它们依次为：

第1层	第2层	第3层	第4层	第5层	第6层	第7层	第8层
1	2	3	6	12	24	48	96

因为 96＞60，所以这群动物最多只能叠七层罗汉。(叠法不唯一)

如果只有重 1，3，5，7，9，11，21 千克的七个动物，按例 4 中的要求叠罗汉，那么最多能叠几层？它是由哪些重量的动物叠出来的？(答案： 5 层；由重 1， 3， 5， 9， 21 千克的动物叠出)

例 5(1)小丽家里的闹钟每天早晨 6 点半准时响铃，提醒小丽起床，准备上学。有一次，小丽第二天要 6 点钟起床到学校去大扫除，她在头天晚上 9 点时把闹钟钟面时间调到 8 点半还是调到 9 点半，才能使闹钟第二天早晨 6 点钟响铃？

(2)小明和小强约定 10 点钟在学校门口碰面，小明的表慢 5 分钟，而他

却以为慢 10 分钟；小强的表慢 10 分钟，而他却以为快 5 分钟。他俩会面时，谁迟到了？先到者等了多少时间才见到迟到者？

分析与解：解决这两个问题的关键是弄清“正确时间”和“钟面时间”的含意。

(1)要使闹铃 6 点钟响，即比平常提前半小时响，此时的钟面时间是 6 点半，它比正确时间多半小时。所以，在头天晚上 9 点调时针时，必须使钟面时间比正确时间多半小时，即应调到 9 点半。

(2)以正确时间为准。小明以为他的表慢 10 分，所以，他比钟面时间提早 10 分到达，实际上他的钟面时间只比正确时间慢 5 分，所以小明提前了 10-5=5(分)；小强以为他的表快 5 分，所以，他比钟面时间晚到 5 分，实际上他的钟面时间比正确时间慢 10 分，小强迟到了 10+5=15(分)。会面时，小强迟到了，小明等了小强

$$5+15=20(分)。$$

例 6(1)三个小朋友三分钟削三支铅笔，照此效率，六个小朋友几分钟削六支铅笔？

(2)三只猫三天吃三只老鼠，照此效率，六只猫六天吃几只老鼠？

分析与解：这两个问题用来训练对倍数关系的准确理解。

(1)中小朋友个数变成 2 倍，削的铅笔也变成 2 倍，所以，完成的时间应不变，即 3 分钟。

如果具体分析，那么由已知条件推知，一个小朋友削一支铅笔需 3 分钟，所以，六个小朋友削六支铅笔还是需 3 分钟。

(2)中猫的只数变成 2 倍，天数也变成 2 倍，所以，吃的老鼠只数就变成了 2×2=4(倍)，即吃了

$$3×4=12(只)。$$

具体分析，由已知条件推知，一只猫三天吃一只老鼠，所以，当猫变成 6 倍(六只)，而天数不变时，就有六只猫三天吃 1×6=6(只)老鼠。进而，当猫不变(六只)，而天数变为 2 倍(六天)时，就有六只猫六天吃老鼠

$$6×2=12(只)。$$

练习 15

1.画三条线段，能构成几个角？

2.用 6 根长短、粗细一样的火柴棍拼出四个等边三角形(即三边相等的三角形)，如何拼？

3.一只挂钟，1 点整敲 1 下，2 点整敲 2 下……12 点整敲 12 下，每半点整敲 1 下。一昼夜(24 时)一共要敲多少下？

4.打靶时，小林和小峰各打了三枪，环数为 1，2，4，5，7，9 环。已知小林的总环数比小峰的总环数多 6 环。哪几环是小峰打的？

5.五个小朋友围坐在一个大圆桌边，按顺时针方向依次编为 1，2，3，4，5 号。老师给 1，2，3，4，5 号小朋友分别发 1，2，3，4，5 个苹果。从 5 号小朋友开始，依次按顺时针方向看，若邻坐的苹果比自己少，则送给对方一个；若邻坐的苹果不比自己少就不送。照此做下去，到第三圈为止，他们每人手中各有多少个苹果？

6.球场休息时，保管员慌忙中把甲、乙、丙三个运动员先前交给他的水

瓶都递送错了，结果甲喝的是丙的。乙、丙各喝的是谁的？

7.有一个台称，只能称 40 千克以上的重量，甲、乙、丙三个小朋友的体重都在 20～39 千克之间，他们都想知道自己的体重。用这台称怎样才能知道他们各自的体重？

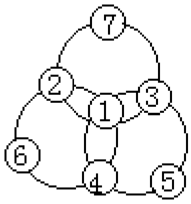
8.(1)三个小朋友三分钟削三支铅笔，九个小朋友六分钟削几支铅笔？

(2)三只猫三天吃三只老鼠，六只猫几天吃 18 只老鼠？

第 16 讲　数阵图(一)

在神奇的数学王国中，有一类非常有趣的数学问题，它变化多端，引人入胜，奇妙无穷。它就是数阵，一座真正的数字迷宫，它对喜欢探究数字规律的人有着极大的吸引力，以至有些人留连其中，用毕生的精力来研究它的变化，就连大数学家欧拉对它都有着浓厚的兴趣。

那么，到底什么是数阵呢？我们先观察下面两个图：

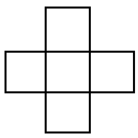


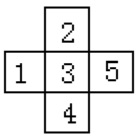
8	1	6
3	5	7
4	9	2

左上图中有 3 个大圆，每个圆周上都有四个数字，有意思的是，每个圆周上的四个数字之和都等于 13。右上图就更有意思了，1～9 九个数字被排成三行三列，每行的三个数字之和与每列的三个数字之和，以及每条对角线上的三个数字之和都等于 15，不信你就算算。

上面两个图就是数阵图。准确地说，数阵图是将一些数按照一定要求排列而成的某种图形，有时简称数阵。要排出这样巧妙的数阵图，可不是一件容易的事情。我们还是先从几个简单的例子开始。

例 1　把 1～5 这五个数分别填在左下图中的方格中，使得横行三数之和与竖列三数之和都等于 9。





同学们可能会觉得这道题太容易了，七拼八凑就写出了右上图的答案，可是却搞不清其中的道理。下面我们就一起来分析其中的道理，只有弄懂其中的道理，才可能解出复杂巧妙的数阵问题。

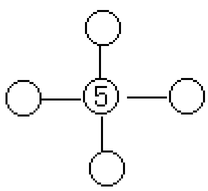
分析与解：中间方格中的数很特殊，横行的三个数有它，竖列的三个数也有它，我们把它叫做“重叠数”。也就是说，横行的三个数之和加上竖列的三个数之和，只有重叠数被加了两次，即重叠了一次，其余各数均被加了一次。因为横行的三个数之和与竖列的三个数之和都等于 9，所以

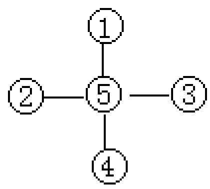
$$(1+2+3+4+5)+\text{重叠数}=9+9,$$

$$\text{重叠数}=(9+9)-(1+2+3+4+5)=3。$$

重叠数求出来了，其余各数就好填了(见右上图)。

例 2　把 1～5 这五个数填入下页左上图中的○里(已填入 5)，使两条直线上的三个数之和相等。





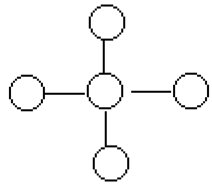
分析与解：与例 1 不同之处是已知“重叠数”为 5，而不知道两条直线上的三个数之和都等于什么数。所以，必须先求出这个“和”。根据例 1 的分析知，两条直线上的三个数

相加，只有重叠数被加了两遍，其余各数均被加了一遍，所以两条直线上的三个数之和都等于

$$[(1+2+3+4+5)+5]\div 2=10。$$

因此，两条直线上另两个数(非“重叠数”)的和等于 10-5=5。在剩下的四个数 1， 2， 3， 4 中，只有 1+4=2+ 3=5。故有右上图的填法。

例 3 把 1～5 这五个数填入右图中的○里，使每条直线上的三个数之和相等。



分析与解：例 1 是知道每条直线上的三数之和，不知道重叠数；例 2 是知道重叠数，不知道两条直线上的三个数之和；本例是这两样什么都不知道。但由例 1、例 2 的分析知道，

$$(1+2+3+4+5)+\text{重叠数}$$
$$=\text{每条直线上三数之和}\times 2，$$

所以，每条直线上三数之和等于(15+重叠数)÷2。

因为每条直线上的三数之和是整数，所以重叠数只可能是 1，3 或 5。

若“重叠数”=1，则两条直线上三数之和为

$$(15+1)\div 2=8。$$

填法见左下图；

若“重叠数”=3，则两条直线上三数之和为

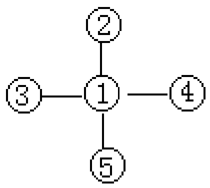
$$(15+3)\div 2=9。$$

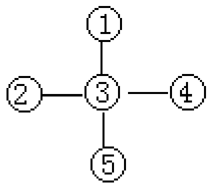
填法见下中图；

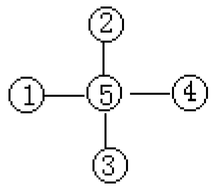
若“重叠数”=5，则两条直线上三数之和为

$$(15+5)\div 2=10。$$

填法见右下图。

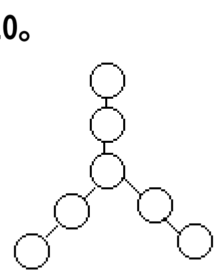


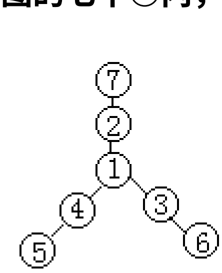




由以上几例看出，求出重叠数是解决数阵问题的关键。为了进一步学会掌握这种解题方法，我们再看两例。

例 4 将 1～7 这七个自然数填入左下图的七个○内，使得每条边上的三个数之和都等于 10。





分析与解：与例 1 类似，知道每条边上的三数之和，但不知道重叠数。

因为有 3 条边，所以中间的重叠数重叠了两次。于是得到

$$(1+2+\cdots+7)+重叠数\times 2=10\times 3。$$

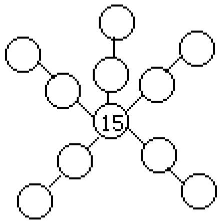
由此得出重叠数为

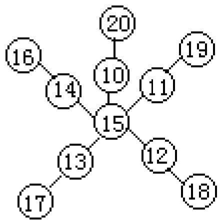
$$[10\times 3-(1+2+\cdots+7)]\div 2=1。$$

剩下的六个数中，两两之和等于 9 的有 2，7；3，6；4，5。可得右上图的填法。

如果把例 4 中“每条边上的三个数之和都等于 10”改为“每条边上的三个数之和都相等”，其他不变，那么仿照例 3，重叠数可能等于几？怎样填？

例 5 将 10～20 填入左下图的○内，其中 15 已填好，使得每条边上的三个数字之和都相等。





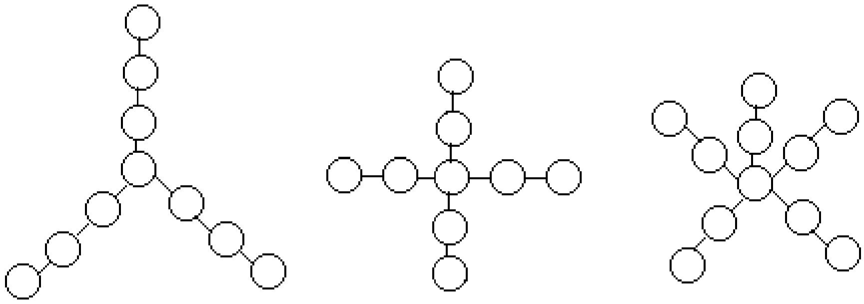
解：与例 2 类似，中间○内的 15 是重叠数，并且重叠了四次，所以每条边上的三个数字之和等于

$$[(10+11+\cdots+20)+15\times 4]\div 5=45。$$

剩下的十个数中，两两之和等于(45-15=)30 的有 10，20；11，19；12，18；13，17；14，16。于是得到右上图的填法。

例 1～5 都具有中心数是重叠数，并且每边的数字之和都相等的性质，这样的数阵图称为辐射型。例 4 的图中有三条边，每边有三个数，称为辐射型 3—3 图；例 5 有五条边每边有三个数，称为辐射型 5—3 图。

一般地，有 m 条边，每边有 n 个数的形如下图的图形称为辐射型 m－n 图。



辐射型数阵图只有一个重叠数，重叠次数是“直线条数”-1，即 m-1。对于辐射型数阵图，有

已知各数之和+重叠数×重叠次数
=直线上各数之和×直线条数。

由此得到：

(1)若已知每条直线上各数之和，则重叠数等于
(直线上各数之和×直线条数-
已知各数之和)÷重叠次数。

如例 1、例 4。

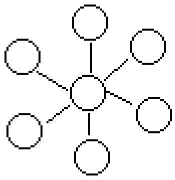
(2)若已知重叠数，则直线上各数之和等于(已知各数之和+重叠数×重叠次数)÷直线条数。如例 2、例 5。

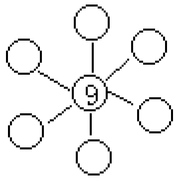
(3)若重叠数与每条直线上的各数之和都不知道，则要从重叠数的可能取值分析讨论，如例3。

练习16

1.将1～7这七个数分别填入左下图中的○里，使每条直线上的三个数之和都等于12。

如果每条直线上的三个数之和等于10，那么又该如何填？

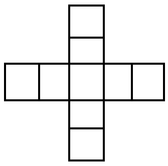




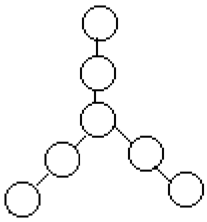
2.将1～9这九个数分别填入右上图中的○里(其中9已填好)，使每条直线上的三个数之和都相等。

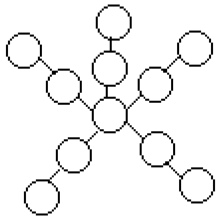
如果中心数是5，那么又该如何填？

3.将1～9这九个数分别填入右图的小方格里，使横行和竖列上五个数之和相等。(至少找出两种本质上不同的填法)



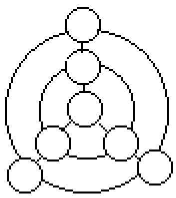
4.将3～9这七个数分别填入左下图的○里，使每条直线上的三个数之和等于20。





5.将1～11这十一个数分别填入右上图的○里，使每条直线上的三个数之和相等，并且尽可能大。

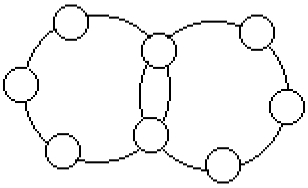
6.将1～7这七个数分别填入下图的○里，使得每条直线上三个数之和与每个圆圈上的三个数之和都相等。



第 17 讲　数阵图(二)

上一讲我们讲了仅有一个“重叠数”的辐射型数阵图的填数问题，这一讲我们讲有多个“重叠数”的封闭型数阵图。

例 1　将 1～8 这八个数分别填入右图的○中，使两个大圆上的五个数之和都等于 21。



分析与解：中间两个数是重叠数，重叠次数都是 1 次，所以两个重叠数之和为

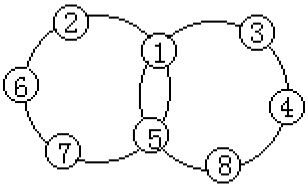
$$21\times2-(1+2+\cdots+8)=6。$$

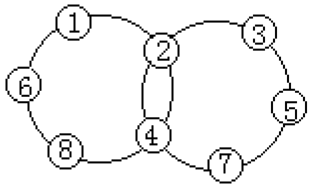
在已知的八个数中，两个数之和为 6 的只有 1 与 5，2 与 4。每个大圆上另外三个数之和为 21-6=15。

如果两个重叠数为 1 与 5，那么剩下的六个数 2，3，4，6，7，8 平分为两组，每组三数之和为 15 的只有

$$2+6+7=15 和 3+4+8=15，$$

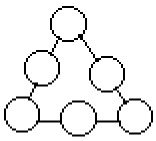
故有左下图的填法。





如果两个重叠数为 2 与 4，那么同理可得上页右下图的填法。

例 2　将 1～6 这六个自然数分别填入右图的六个○内，使得三角形每条边上的三个数之和都等于 11。

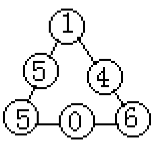


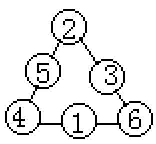
分析与解：本题有三个重叠数，即三角形三个顶点○内的数都是重叠数，并且各重叠一次。所以三个重叠数之和等于

$$11\times3-(1+2+\cdots+6)=12。$$

1～6 中三个数之和等于 12 的有 1，5，6；2，4，6；3，4，5。

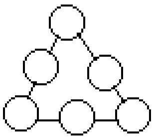
如果三个重叠数是 1，5，6，那么根据每条边上的三个数之和等于 11，可得左下图的填法。容易发现，所填数不是 1～6，不合题意。





同理，三个重叠数也不能是 3，4，5。

经试验，当重叠数是 2，4，6 时，可以得到符合题意的填法(见右上图)。



例 3 将 1～6 这六个自然数分别填入右图的六个○中，使得三角形每条边上的三个数之和都相等。

分析与解：与例 2 不同的是不知道每边的三数之和等于几。因为三个重叠数都重叠了一次，由 (1+2+…+6)+重叠数之和=每边三数之和×3，得到每边的三数之和等于

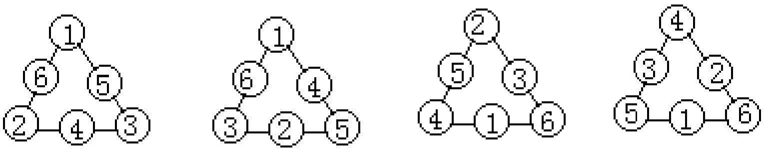
[(1+2+…+6)+重叠数之和]÷3

=(21+重叠数之和)÷3

=7+重叠数之和÷3。

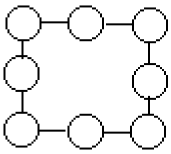
因为每边的三数之和是整数，所以重叠数之和应是 3 的倍数。考虑到重叠数是 1～6 中的数，所以三个重叠数之和只能是 6，9，12 或 15，对应的每条边上的三数之和就是 9，10，11 或 12。

与例 2 的方法类似，可得下图的四种填法：



每边三数之和=9　每边三数之和=10　每边三数之和=11　每边三数之和=12

例 4 将 2～9 这八个数分别填入右图的○里，使每条边上的三个数之和都等于 18。



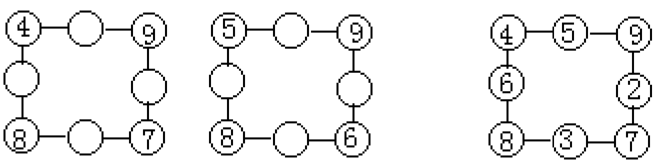
分析与解：四个角上的数是重叠数，重叠次数都是 1 次。所以四个重叠数之和等于

18×4-(2+3+…+9)=28。

而在已知的八个数中，四数之和为 28 的只有：

4+7+8+9=28 或 5+6+8+9=28。

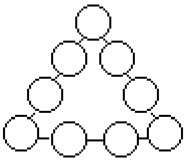
又由于 18-9-8=1，1 不是已知的八个数之一，所以，8 和 9 只能填对角处。由此得到左下图所示的重叠数的两种填法：



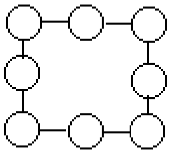
“试填”的结果，只有右上图的填法符合题意。

以上例题都是封闭型数阵图。

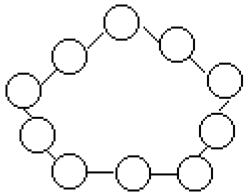
一般地，在 m 边形中，每条边上有 n 个数的形如下图的图形称为封闭型 m-n 图。



3-4 图



4-3图



5-3图

与“辐射型 m-n 图只有一个重叠数，重叠次数是 m-1”不同的是，封闭型 m-n 图有 m 个重叠数，重叠次数都是 1 次。

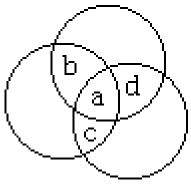
对于封闭型数阵图，因为重叠数只重叠一次，所以

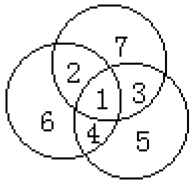
已知各数之和+重叠数之和
=每边各数之和×边数。

由这个关系式，就可以分析解决封闭型数阵图的问题。

前面我们讲了辐射型数阵图和封闭型数阵图，虽然大多数数阵问题要比它们复杂些，但只要紧紧抓住“重叠数”进行分析，就能解决很多数阵问题。

例 5 把 1～7 分别填入左下图中的七个空块里，使每个圆圈里的四个数之和都等于 13。





分析与解：这道题的“重叠数”很多。有重叠 2 次的(中心数，记为 a)；有重叠 1 次的(三个数，分别记为 b，c，d)。根据题意应有

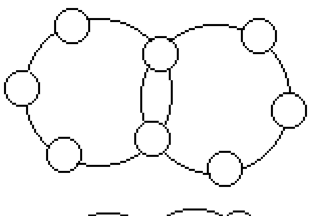
(1+2+…+7)+a+a+b+c+d=13×3，

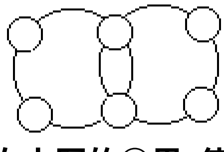
即　　a+a+b+c+d=11。

因为 1+2+3+4=10，11-10=1，所以只有 a=1，b，c，d 分别为 2，3，4 才符合题意，填法见右上图。

练习 17

1.把 1～8 填入下页左上图的八个○里，使每个圆圈上的五个数之和都等于 20。

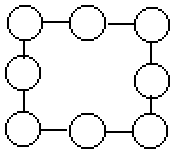




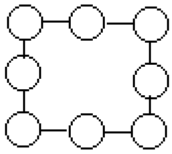
2.把 1～6 这六个数填入右上图的○里，使每个圆圈上的四个数之和都相等。

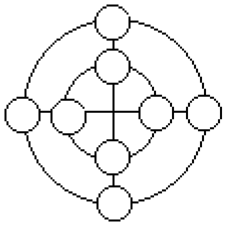
3.将 1～8 填入左下图的八个○中，使得每条边上的三个数之和都等于

15。

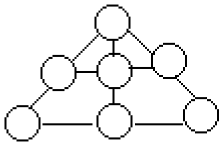


4.将 1～8 填入右上图的八个○中，使得每条直线上的四个数之和与每个圆周上的四个数之和都相等。

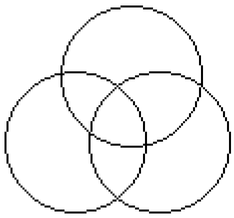




5.将 1～7 填入右图的七个○，使得每条直线上的各数之和都相等。



6.把 1，3，5，7，9，11，13 分别填入左图中的七个空块中，使得每个圆内的四个数之和都等于 34。



第 18 讲　能被 2，5 整除的数的特征

同学们都知道，自然数和 0 统称为(非负)整数。同学们还知道，两个整数相加，和仍是整数；两个整数相乘，乘积也是整数；两个整数相减，当被减数不小于减数时，差还是整数。两个整数相除时，情况就不那么简单了。如果被除数除以除数，商是整数，我们就说这个被除数能被这个除数整除；否则，就是不能整除。例如，

84 能被 2，3，4 整除，因为 84÷2=42，84÷3=28，84÷4=21，42，28，21 都是整数。

而 84 不能被 5 整除，因为 84÷5=16……4，有余数 4。也不能被 13 整除，因为 84÷13=6……6，有余数 6。

因为 0 除以任何自然数，商都是 0，所以 0 能被任何自然数整除。

这一讲的内容是能被 2 和 5 整除的数的特征，也就是讨论什么样的数能被 2 或 5 整除。

1.能被 2 整除的数的特征

因为任何整数乘以 2，所得乘数的个位数只有 0，2，4，6，8 五种情况，所以，能被 2 整除的数的个位数一定是 0，2，4，6 或 8。也就是说，凡是个位数是 0，2，4，6，8 的整数一定能被 2 整除，凡是个位数是 1，3，5，7，9 的整数一定不能被 2 整除。

例如，38，172，960 等都能被 2 整除，67，881，235 等都不能被 2 整除。

能被 2 整除的整数称为偶数，不能被 2 整除的整数称为奇数。

0，2，4，6，8，10，12，14，…就是全体偶数。

1，3，5，7，9，11，13，15，…就是全体奇数。

偶数和奇数有如下运算性质：

偶数±偶数=偶数，
奇数±奇数=偶数，
偶数±奇数=奇数，
奇数±偶数=奇数，
偶数×偶数=偶数，
偶数×奇数=偶数，
奇数×奇数=奇数。

例 1 在 1～199 中，有多少个奇数？有多少个偶数？其中奇数之和与偶数之和谁大？大多少？

分析与解：由于 1，2，3，4，…，197，198，199 是奇、偶数交替排列的，从小到大两两配对：

(1，2)，(3，4)，…，(197，198)，

还剩一个 199。共有 198÷2=99(对)，还剩一个奇数 199。所以

奇数的个数=198÷2+1=100(个)，
偶数的个数=198÷2=99(个)。

因为每对中的偶数比奇数大 1，99 对共大 99，而 199-99=100，所以奇数之和比偶数之和大，大 100。

如果按从大到小两两配对：

(199，198)，(197，196)，…，(3，2)，那么怎样解呢？

例 2(1)不算出结果，判断数(524+42-429)是偶数还是奇数？

(2)数(42□+30-147)能被 2 整除，那么，□里可填什么数？

(3)下面的连乘积是偶数还是奇数？

$$1\times3\times5\times7\times9\times11\times13\times14\times15。$$

解：根据奇偶数的运算性质：

(1)因为 524，42 是偶数，所以(524+42)是偶数。又因为 429 是奇数，所以(524+42-429)是奇数。

(2)数(42□+30-147)能被 2 整除，则它一定是偶数。因为 147 是奇数，所以数(42□+30)必是奇数。又因为其中的 30 是偶数，所以，数 42□必为奇数。于是，□里只能填奇数 1，3，5，7，9。

(3)1，3，5，7，9，11，13，15 都是奇数，由 1×3 为奇数，推知 1×3×5 为奇数……推知

$$1\times3\times5\times7\times9\times11\times13\times15$$

为奇数。因为 14 为偶数，所以

$(1\times3\times5\times7\times9\times11\times13\times15)\times14$ 为偶数，即

$1\times3\times5\times7\times9\times11\times13\times14\times15$ 为偶数。

由例 2 得出：

(1)在全部是加、减法的运算中，若参加运算的奇数的个数是偶数，则结果是偶数；若参加运算的奇数的个数是奇数，则结果是奇数。

(2)在连乘运算中，只要有一个因数是偶数，则整个乘积一定是偶数。

例 3 在黑板上先写出三个自然数 3，然后任意擦去其中的一个，换成所剩两个数的和。照这样进行 100 次后，黑板上留下的三个自然数的奇偶性如何？它们的乘积是奇数还是偶数？为什么？

解：根据奇偶数的运算性质知：

第一次擦后，改写得到的三个数是 6，3，3，是“二奇一偶”；

第二次擦后，改写得到的三个数是 6，3，3 或 6，9，3 或 6，3，9，都是“二奇一偶”。

以后若擦去的是偶数，则改写得到的数为二奇数之和，是偶数；若擦去的是奇数，则改写得到的数为一奇一偶之和，是奇数。总之，黑板上仍保持“二奇一偶”。

所以，无论进行多少次擦去与改写，黑板上的三个数始终为“二奇一偶”。它们的乘积

$$奇数\times奇数\times偶数=偶数。$$

故进行 100 次后，所得的三个自然数的奇偶性为二奇数、一偶数，它们的乘积一定是偶数。

2.能被 5 整除的数的特征

由 0×5=0，2×5=10，4×5=20，6×5=30，8×5= 40，…可以推想任何一个偶数乘以 5，所得乘积的个位数都是 0。

由 1×5=5，3×5=15，5×5=25，7×5=35，9×5= 45，…可以推想，任何一个奇数乘以 5，所得乘积的个位数都是 5。

因此，能被 5 整除的数的个位数一定是 0 或 5。也就是说，凡是个位数是 0 或 5 的整数一定能被 5 整除；凡是个位数不是 0 或 5 的整数一定不能被 5 整除。例如，870，6275，1234567890 等都能被 5 整除，264，3588 等都不能被 5 整除。

例 4 由 0，3，5 写成的没有重复数字的三位数中，有哪些能被 5 整除？

解：因为个位数为 0 或 5 的数才能被 5 整除，所以由 0，3，5 写成的没有重复数字的三位数中，只有 350，530，305 三个数能被 5 整除。

例 5 下面的连乘积中，末尾有多少个 0？

$$1\times2\times3\times\cdots\times29\times30。$$

解：因为 2×5=10，所以在连乘积中，有一个因子 2 和一个因子 5，末尾就有一个 0。连乘积中末尾的 0 的个数，等于 1～30 中因子 2 的个数与因子 5 的个数中较少的一个。而在连乘积中,因子 2 的个数比因子 5 的个数多(如 4 含两个因子 2，8 含三个因子 2)，所以，连乘积末尾 0 的个数与连乘积中因子 5 的个数相同。连乘积中含因子 5 的数有 5，10，15，20，25，30，这些数中共含有七个因子 5(其中 25 含有两个因子 5)。所以，1×2×3×…×29×30 的积中，末尾有七个 0。

练习 18

1.在 20～200 的整数中，有多少个偶数？有多少个奇数？偶数之和与奇数之和谁大？大多少？

2.不算出结果，直接判断下列各式的结果是奇数还是偶数：

(1)1＋2＋3＋4＋5；

(2)1＋2＋3＋4＋5＋6＋7；

(3)1＋2＋3＋…＋9＋10；

(4)1＋3＋5＋…＋21＋23；

(5)13-12＋11-10＋…＋3-2＋1。

3.由 4，5，6 三张数字卡片能组成多少个能被 2 整除的三位数？

4.两个质数之和是 13，这两个质数之积是多少？

5.下面的连乘积中，末尾有多少个 0？

$$20\times21\times22\times\cdots\times49\times50。$$

6.用 0，1，2，3，4，5 这六个数码组成的没有重复数字的两位数中，能被 5 整除的有几个？能被 2 整除的有几个？能被 10 整除的有几个？

第 19 讲　能被 3 整除的数的特征

上一讲我们讲了能被 2，5 整除的数的特征，根据这些特征，很容易就能判别出一个数是否能被 2 或 5 整除。同学们自然会问，有没有类似的简便方法，直接判断一个数能否被 3 整除？

我们先具体观察一些能被 3 整除的整数：

18，345，4737，25674

18 能被 3 整除，1+8=9 也能被 3 整除；

345 能被 3 整除，3+4+5=9 也能被 3 整除；

4737 能被 3 整除，4+7+3+7=21 也能被 3 整除；

25674 能被 3 整除，2+5+6+7+4=24 也能被 3 整除。

怎么这么巧？我们再试一个：7896852 能被 3 整除，7+8+9+6+8+5+2=45 也能被 3 整除。好了，不用再试了，同学们可能已经在想：“是不是所有能被 3 整除的数的各位数字的和都能被 3 整除？”结论是肯定的。它的一般性证明这里无法介绍，我们用一个具体的数来说明一般性的证明方法。

$$\begin{aligned}741 &= 700+40+1\\ &= 7\times 100+4\times 10+1\\ &= 7\times(99+1)+4\times(9+1)+1\\ &= 7\times 99+7+4\times 9+4+1\\ &= (7\times 99+4\times 9)+(7+4+1)。\end{aligned}$$

由 99 和 9 都能被 3 整除，推知(7×99+4×9)能被 3 整除。再由 741 能被 3 整除，推知(7+4+1)能被 3 整除；反之，由(7+4+1)能被 3 整除，推知 741 能被 3 整除。

因此，判断一个整数能否被 3 整除的简便方法是：

如果整数的各位数字之和能被 3 整除，那么此整数能被 3 整除。如果整数的各位数字之和不能被 3 整除，那么此整数不能被 3 整除。

例 1 判断下列各数是否能被 3 整除：

2574，38974，587931。

解：因为 2+5+7+4=18，18 能被 3 整除，所以 2574 能被 3 整除；

因为 3+8+9+7+4=31，31 不能被 3 整除，所以 38974 不能被 3 整除；

因为 5+8+7+9+3+1=33，33 能被 3 整除，所以 587931 能被 3 整除。

为了今后使用方便，我们介绍一个表示多位数的方法。当一个多位数中有一个或几个数字用字母来表示时，为防止理解错误，就在这个多位数的上面划一线段来表示这个多位数。例如，$\overline{3a5}$表示这个三位数的百、十、个位依次是 3，a，5；又如，$\overline{abcd}$ 表示这个四位数的千、百、十、个位依次是 a，b，c，d。

例 2 六位数 $\overline{257a38}$ 能被 3 整除，数字 a=？

解：2+5+7+a+3+8=25+a，要使 25+a 能被 3 整除，数字 a 只能是 2，5 或 8。即符合题意的 a 是 2，5 或 8。

例 3 由 1，3，5，7 这四个数字写成的没有重复数字的三位数中，有几个能被 3 整除？

解：在 1，3，5，7 这四个数中，任取三个，共有 4 组：

1，3，5；1，3，7；1，5，7；3，5，7。其中，1+3+5 和 3+5+7 能被 3 整除，所以，由 1，3，5 或 3，5，7 写成的没有重复数字的三位数能被 3 整除。由 1，3，5 可写成 135，153，315，351，513，531 六个三位数；同理，由 3，5，7 也能写成 6 个三位数。

所以，符合题意的三位数有 6×2=12(个)。

例 4 被 2，3，5 除余 1 且不等于 1 的最小整数是几？

解：除 1 以外，被 2 除余 1 的所有整数是

3，5，7，9，11，…，27，29，31，33，…

被 3 除余 1 的所有整数是

4，7，10，13，16，19，22，25，28，31，…

被 5 除余 1 的所有整数是

6，11，16，21，26，31，36，…

上面三列数中，第一个同时出现的数是 31，所以 31 是同时满足被 2，3，5 除均余 1 且不等于 1 的最小数。

例 4 中使用的方法是解这类题型的基本方法，但不够简捷。一个较简捷的方法是：

因为 5 大于 2 和 3，所以先从被 5 除余 1 的数

1，6，11，16，21，26，31，36，…

中找出第一个(1 除外)同时满足被 2 和 3 除都余 1 的数 31，就为所求。

到五年级学了更多的知识后，还可直接由 2×3×5+1=31 得到所求数。

例 5 同时能被 2，3，5 整除的最小三位数是几？

解：能被 5 整除的三位数是

100，105，110，115，120，125，…其中，第一个能同时被 2，3 整除的数是 120(它是偶数，且 1+2+0=3)，故 120 为所求。

练习 19

1.直接判断 25874 和 978651 能否被 3 整除。

2.六位数$\overline{125a58}$能被3整除，数字a = ？

3.由 2，3，4，5 这四个数字写成的没有重复数字的三位数中，有几个能被 3 整除？

4.(1)被 2，3 除余 1 且不等于 1 的最小整数是几？

(2)被 3，5 除余 2 且不等于 2 的最小整数是几？

5.同时能被 2，3，5 整除的最小自然数是几？

6.同时能被 2，3，5 整除的最大三位数是几？

7.一根铁丝长 125 厘米，要把它剪成长 2 厘米、3 厘米、5 厘米的三种不同规格的小段。最多能剪成多少段？

第 20 讲　乘、除法的运算律和性质

我们在第 1 讲中介绍了加、减法的运算律和性质，利用它们可以简化一些加、减法算式的计算。本讲将介绍在巧算中常用的一些乘、除法的运算律和性质，其目的也是使一些乘、除法计算得到简化。

1.乘法的运算律

乘法交换律：两个数相乘，交换两个数的位置，其积不变。即

$$a\times b=b\times a。$$

其中，a，b 为任意数。

例如，35×120=120×35=4200。

乘法结合律：三个数相乘，可以先把前两个数相乘后，再与后一个数相乘，或先把后两个数相乘后，再与前一个数相乘，积不变。即

$$a\times b\times c=(a\times b)\times c=a\times (b\times c)。$$

注意：

(1)这两个运算律中数的个数可以推广到更多个的情形。即多个数连乘中，可以任意交换其中各数的位置，积不变；多个数连乘中，可以任意先把几个数结合起来相乘后，再与其它数相乘，积不变。

(2)这两个运算律常一起并用。例如，并用的结果有

$$a\times b\times c=b\times (a\times c)等。$$

例 1 计算下列各题：

(1)17×4×25；　　(2)125×19×8；

(3)125×72；　　(4)25×125×16。

分析：由于 25×4=100，125×8=1000，125×4=500，运用乘法交换律和结合律，在计算中尽量先把 25 与 4、把 125 与 8 或 4 结合起来相乘后，再与其它数相乘，以简化计算。

解：

(1)17×4×25

=17×(4×25)

=17×100

=1700；

(2)125×19×8

=(125×8)×19

=1000×19

=19000；

(3)125×72

=125×(8×9)

=(125×8)×9

=1000×9

=9000；

(4)25×125×16 或

=25×125×2×8

=(25×2)×(125×8)

=50×1000

$=50000$，

$25\times125\times16$

$=25\times125\times4\times4$

$=(25\times4)\times(125\times4)$

$=100\times500$

$=50000$。

乘法分配律 两个数之和(或差)与一数相乘，可用此数先分别乘和(或差)中的各数，然后再把这两个积相加(或减)。即

$$(a+b)\times c=a\times c+b\times c,$$

$$(a-b)\times c=a\times c-b\times c。$$

例 2 计算下列各题：

(1)$125\times(40+8)$；　(2)$(100-4)\times25$；

(3)2004×25；　(4)125×792。

解：

(1)$125\times(40+8)$

$=125\times40+125\times8$

$=5000+1000$

$=6000$；

(2)$(100-4)\times25$

$=100\times25-4\times25$

$=2500-100$

$=2400$；

(3)2004×25

$=(2000+4)\times25$

$=2000\times25+4\times25$

$=50000+100$

$=50100$；

(4)125×792

$=125\times(800-8)$

$=125\times800-125\times8$

$=(125\times8)\times100-1000$

$=1000\times100-1000$

$=1000\times(100-1)$

$=99000$。

2.除法的运算律和性质

商不变性质：被除数和除数乘(或除)以同一个非零数，其商不变。即

$$a\div b=(a\times n)\div(b\times n)(n\neq0)$$

$$=(a\div m)\div(b\div m)(m\neq0)$$

例 3 计算：

(1)$425\div25$；(2)$3640\div70$。

解：

(1)$425\div25$

$=(425\times4)\div(25\times4)$

$=1700\div100$

=17；

(2)3640÷70

=(3640÷10)÷(70÷10)

=364÷7

=52。

(2)两数之和(或差)除以一个数，可以用这两个数分别除以那个数，然后再求两个商的和(或差)。即

$$(a\pm b)\div c=a\div c\pm b\div c。$$

例如，(8+4)÷2=8÷2+4÷2，

(9-6)÷3=9÷3-6÷3。

此性质可以推广到多个数之和(或差)的情形。例如

(1000-688-136)÷8

=1000÷8-688÷8-136÷8

=125-86-17=22。

(3)在连除中，可以交换除数的位置，商不变。即

$$a\div b\div c=a\div c\div b。$$

在这个性质中，除数的个数可以推广到更多个的情形。例如，

$$168\div 7\div 4\div 3=168\div 3\div 4\div 7=\cdots\cdots$$

例 4 计算下列各题：

(1)(182+325)÷13；

(2)(2046-1059-735)÷3；

(3)775÷25；

(4)2275÷13÷5。

解：(1)(182＋325)÷13

=182÷13+325÷13

=14+25

=39；

(2)(2046-1059-735)÷3

=2046÷3-1059÷3-735÷3

=682-353-245

=84；

(3)775÷25

=(700+75)÷25

=700÷25+75÷25

=28+3=31；

(4)2275÷13÷5

=2275÷5÷13

=455÷13

=35。

3.乘、除法混合运算的性质

(1)在乘、除混合运算中，被乘数、乘数或除数可以连同运算符号一起交换位置。例如，

$$a\times b\div c=a\div c\times b=b\div c\times a。$$

(2)在乘、除混合运算中，去掉或添加括号的规则去括号情形：

括号前是“×”时，去括号后，括号内的乘、除符号不变。即

$$a\times(b\times c)=a\times b\times c,$$
$$a\times(b\div c)=a\times b\div c。$$

括号前是“÷”时，去括号后，括号内的“×”变为“÷”，“÷”变为“×”。即

$$a\div(b\times c)=a\div b\div c,$$
$$a\div(b\div c)=a\div b\times c。$$

添加括号情形：

加括号时，括号前是“×”时，原符号不变；括号前是“÷”时，原符号“×”变为“÷”，“÷”变为“×”。即

$$a\times b\times c=a\times(b\times c),$$
$$a\times b\div c=a\times(b\div c),$$
$$a\div b\div c=a\div(b\times c),$$
$$a\div b\times c=a\div(b\div c)。$$

(3)两个数之积除以两个数之积，可以分别相除后再相乘。即

$$(a\times b)\div(c\times d)$$
$$=(a\div c)\times(b\div d)$$
$$=(a\div d)\times(b\div c)。$$

上面的三个性质都可以推广到多个数的情形。

例 5 计算下列各题：

(1) $136\times5\div8$
$=136\div8\times5$
$=17\times5=85$；

(2) $4032\div(8\times9)$
$=4032\div8\div9$
$=504\div9=56$；

(3) $125\times(16\div10)$
$=125\times16\div10$
$=256\times4$

(4) $2560\div(10\div4)$
$=2560\div10\times4$
$=1024$；

(5) $2460\div5\div2$
$=2460\div(5\times2)$
$=2460\div10$
$=246$；

(6) $527\times15\div5$
$=527\times(15\div5)=527\times3$
$=1581$；

(7) $(54\times24)\div(9\times4)$
$=(54\div9)\times(24\div4)$
$=6\times6=36$。

练习 20

用简便方法计算下列各题。

l.(1)12×4×25；(2)125×13×8；(3)125×56；(4)25×32×125。

2.(1)125×(80+4)；(2)(100-8)×25；(3)180×125；(4)125×88。

3.(1)1375÷25；(2)12880÷230。

4.(1)(128+1088)÷8；

(2)(1040-324-528)÷4；

(3)1125÷125；

(4)4505÷17÷5。

5.(1)384×12÷8；

(2)2352÷(7×8)；

(3)1200×(4÷12)；

(4)1250÷(10÷8)；

(5)2250÷75÷3；

(6)636×35÷7；

(7)(126×56)÷(7×18)。

第 21 讲　乘法中的巧算

上一讲我们介绍了乘、除法的一些运算律和性质，它是乘、除法中巧算的理论根据，也给出了一些巧算的方法。本讲在此基础上再介绍一些乘法中的巧算方法。

1.乘 11，101，1001 的速算法

一个数乘以 11，101，1001 时，因为 11，101，1001 分别比 10，100，1000 大 1，利用乘法分配律可得

$$a\times11=a\times(10+1)=10a+a,$$
$$a\times101=a\times(101+1)=100a+a,$$
$$a\times1001=a\times(1000+1)=1000a+a。$$

例如，38×101=38×100＋38=3838。

2.乘 9，99，999 的速算法

一个数乘以 9，99，999 时，因为 9，99，999 分别比 10，100，1000 小 1，利用乘法分配律可得

$$a\times9=a\times(10-1)=10a-a,$$
$$a\times99=a\times(100-1)=100a-a,$$
$$a\times999=a\times(1000-1)=1000a-a。$$

例如，18×99=18×100-18=1782。

上面讲的两类速算法，实际就是乘法的凑整速算。凑整速算是当乘数接近整十、整百、整千……的数时，将乘数表示成上述整十、整百、整千……与一个较小的自然数的和或差的形式，然后利用乘法分配律进行速算的方法。

例 1 计算：

（1）356×1001
＝356×(1000＋1)
＝356×1000＋356
＝356000＋356
＝356356；

（2）38×102
＝38×(100＋2)
＝38×100＋38×2
＝ 3800＋76
＝3876；

(3)526×99
＝526×(100-1)
＝ 526×100-526
＝ 52600-526
＝52074；

(4)1234×9998
＝ 1234×(10000-2)
＝1234×10000-1234×2
＝12340000-2468
＝12337532。

3.乘 5，25，125 的速算法

一个数乘以 5，25，125 时，因为 5×2＝10，25×4＝100，125×8＝1000，所以可以利用“乘一个数再除以同一个数，数值不变”及乘法结合律，得到

$$
\begin{aligned}
\alpha\times5&=\alpha\times(5\times2\div2)\\
&=\alpha\times(5\times2)\div2\\
&=10\alpha\div2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha\times25&=\alpha\times(25\times4\div4)\\
&=\alpha\times(25\times4)\div4\\
&=100\alpha\div4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha\times125&=\alpha\times(125\times8\div8)\\
&=\alpha\times(125\times8)\div8\\
&=1000\alpha\div8。
\end{aligned}
$$

例如，76×25＝7600÷4＝1900。

上面的方法也是一种“凑整”，只不过不是用加减法“凑整”，而是利用乘法“凑整”。当一个乘数乘以一个较小的自然数就能得到整十、整百、整千……的数时，将乘数先乘上这个较小的自然数，再除以这个较小的自然数，然后利用乘法结合律就可达到速算的目的。

例 2 计算：

（1）186×5
=186×(5×2)÷2
=1860÷2
=930；

（2）96×125
=96×(125×8)÷8
=96000÷8=12000。

有时题目不是上面讲的“标准形式”，比如乘数不是 25 而是 75，此时就需要灵活运用上面的方法及乘法运算律进行速算了。

例 3 计算：

（1）84×75
=(21×4)×(25×3)
=(21×3)×(4×25)
=63×100=6300；

(2)56×625
=(7×8)×(125×5)
=(7×5)×(8×125)
=35×1000=35000；

（3）33×125
=32×125+1×125
=4000+125=4125；

（4）39×75
=(32+1)×125 =(40-1)×75
=40×75-1×75

=3000-75=2925。

4.个位是 5 的两个相同的两位数相乘的速算法

个位是 5 的两个相同的两位数相乘，积的末尾两位是 25，25 前面的数是这个两位数的首位数与首位数加 1 之积。例如：

15 × 15 = 225　　　25 × 25 = 625

1 ×(1 + 1)　　　2 ×(2 + 1)

45 × 45 = 2025　　　75 × 75 = 5625

4 ×(4 + 1)　　　7 ×(7 + 1)

仿此同学们自己算算下面的乘积

35×35＝______　　　55×55＝______

65×65＝______　　　85×85＝______

95×95＝______

这种方法也适用于个位数是 5 的两个相同的多位

数相乘的计算，例如，

10 5 × 10 5 ＝110 25　　　19 5 × 19 5 ＝380 25

10 ×(10 ＋ 1)　　　19 ×(19 ＋ 1)

练习 21

用速算法计算下列各题：

1.(1) 68×101；　　　(2) 74×201；

(3) 256×1002；　　　(4) 154×601。

2.(1)45×9；　　　(2)457×99；

(3)762×999；　　　(4) 34×98。3.(1)536×5；　(2)437×5；

(3)638×15；　　　(4)739×15。

4.(1)32×25；　　　(2)17×25；

(3)130×25；　　　(4)68×75；

(5)49×75；　　　(6)87×75。

5.(1)56×125；　　　(2)77×125；

(3)66×375；　　　(4) 256×625；

(5)555×375；　　　(6)888×875。

6.(1)295×295；　　　(2)705×705。

第 22 讲　横式数字谜(二)

第 2 讲我们初步介绍了简单的横式填数问题。这一讲再继续介绍一些此类问题。

例 1　在下列各式的□里填上合适的数字：

(1)237÷□□=□；

(2)368÷□□=□□；

(3)14×□□=3□8。

解：(1)将除法变为乘法，可以转化为“在

$$237=□□×□$$

中填入合适的数字”的问题。因为 237＝237×1＝79×3，所以只有一种填法：

$$237=\boxed{7}\boxed{9}×\boxed{3}$$

(2)问题可以转化为“在 368＝□□×□□中填入合适的数字”的问题。因为

$$368＝368×1＝184×2＝92×4$$
$$＝46×8＝23×16,$$

其中只有 368＝23×16 是两个两位数之积。因而有如下两种填法：

$$368÷\boxed{2}\boxed{3}=\boxed{1}\boxed{6},\quad 368÷\boxed{1}\boxed{6}=\boxed{2}\boxed{3}$$

(3)由被乘数的个位数是 4，积的个位数是 8 知，乘数的个位数只可能为 2 或 7，再由被乘数的十位数是 1，积的百位数是 3 知，乘数的十位数不能填大于 3 的数字。所以乘数只可能是 12，17，22，27，32 或 37。经试算，符合题意的填法有两种：

$$14×\boxed{2}\boxed{2}=3\boxed{0}8,\quad 14×\boxed{2}\boxed{7}=3\boxed{7}8。$$

例 2　在下列各式的□里填上合适的数：

(1)□÷32＝7……29；

(2)480÷156＝□……12；

(3)5367÷□＝83……55。

分析：根据有余数的除法(简称带余除法)知：

被除数=不完全商×除数＋余数，

被除数-余数=不完全商×除数。

上式说明，(被除数-余数)是不完全商或除数的倍数，并且有

(被除数-余数)÷除数=不完全商，

(被除数-余数)÷不完全商=除数。

由此分析，可以得到如下解法。

解：(1)由 7×32＋29＝253，得到如下填法：

$$\boxed{253}÷32=7……29$$

(2)由(480-12)÷156＝3，得到如下填法：

$$480÷156=\boxed{3}……12。$$

(3)由(5367-55)÷83＝64，得到如下填法：

$$5367÷\boxed{63}=83……55。$$

例 3　在下列各式的□里填入合适的数字，使等式成立：

(1)□5□×23＝5□□2；

(2)9□□4÷48=□0□。

分析与解：(1)首先，从个位数分析，可知被乘数的个位数只能为 4。

其次，从首位数分析知，被乘数□5□的首位数只能为 2。因为，被乘数的首位取 1 时，$\boxed{1}5\boxed{4}$ ×23 的积的首位小于 5，而取大于 2 的数时，积的首位数大于 5。

由 254×23＝5842 知，填法如下：

$$\boxed{2}5\boxed{4}\times 23 = 5\boxed{8}\boxed{4}2$$

(2)将问题转换成“在 9□□4=□0□×48 中填数”的问题。

类似(1)的分析，被乘数□0□的首位只能填 2，个位数只能填 3 或 8。由

203×48＝9744 和 208×48＝9984

知，有如下两种填法：

$$9\boxed{7}\boxed{4}4\div 48=\boxed{2}0\boxed{3}，\quad 9\boxed{9}\boxed{8}4\div 48=\boxed{2}0\boxed{8}。$$

例 4 在下列各题中，每一题的四个□中都填同一个数字，使式子成立：

(1)□+□＞□×□；

(2)□+□=□×□；

(3)□+□＜□×□。

解：解这类题全靠对数的深刻认识和对四则运算的熟练掌握。

(1)只能填 1：$\boxed{1}+\boxed{1}>\boxed{1}\times\boxed{1}$。

(2)只能填 2 或 0：

$$\boxed{2}+\boxed{2}=\boxed{2}\times\boxed{2}，\quad \boxed{0}+\boxed{0}=\boxed{0}\times\boxed{0}。$$

(3)除 0，1，2 三数字外，其他数字 3，4，…，9 都可填。

$$\boxed{3}+\boxed{3}<\boxed{3}\times\boxed{3}，$$

$$\boxed{4}+\boxed{4}<\boxed{4}\times\boxed{4}，$$

……

$$\boxed{9}+\boxed{9}<\boxed{9}\times\boxed{9}。$$

例 5 在下式的□中填入合适的数字，并要求等式中没有重复的数字：

756=□×□□□。

分析与解：将乘法式子改写成除法式子：

756÷□=□□□。

因为被除数与商都是三位数，所以除数不能大于被除数的百位数 7。又因为题目要求没有重复数字，所以除数只可能是 2，3，4。逐一试除，得到

756÷2＝378，

756÷3＝252，

756÷4＝189。

只有 756÷4＝189 没有重复数字，所以只有一种填法：

$$756=\boxed{4}\times\boxed{1}\boxed{8}\boxed{9}。$$

例 6 将 0，1，2，3，4，5，6 七个数字分别填入下式的七个□里，使算式成立：

□□÷□=□×□=□□。

分析与解：为了方便，我们将原式分成两个等式，并在□里填上字母，以示区别：

AB ÷ C = DE，　　①

F × G = DE。　　②

其中字母 A，B，C，D，E，F，G 分别代表 0～6 这七个数字。由①式看出，E 不能是 0，否则 B 也是 0，不合题意。再由②式看出，F，G 既不能是 0，也不能是 1。F，G 只能是 2，3，4，5 或 6，考虑到 E≠0，再除去有重复数字的情形，满足②式的数字填法只有 3×4＝12。此时，还剩下 0，5，6 三个数字未填。因为在①式中 A，C 都不能是 0，所以 B 是 0，由 60÷5＝12，得到符合题意的唯一填法：

60÷5 = 3 ×4= 12。

练习 22

1.在下列各式的□中分别填入相同的两位数：

(1)5×□=2□；

(2)6×□＝3□。

2.将 3～9 中的数填入下列各式，使算式成立，要求各式中无重复的数字：

(1)□÷□=□÷□；

(2)□÷□＞□÷□。

3.在下列各式的□中填入合适的数字：

(1)448÷□□=□；

(2)2822÷□□=□□；

(3)13×□□= 4□6。

4.在下列各式的□中填入合适的数：

(1) □÷32＝8……31；

(2)573÷32＝□……29；

(3)4837÷□＝74……27。

5.在下列各式的□中填入合适的数字，要求各等式中无重复的数字：

(1)342÷□□=□；

(2)□×□□□＝567。

6.将 1～9 这九个数字分别填入下式中的九个□里，使连等式成立：

□÷□=□÷□=□□□÷□□。

第 23 讲　竖式数字谜(三)

在第 4 讲的基础上，再讲一些乘数、除数是两位数的竖式数字谜问题。

例 1　在下列乘法竖式的□中填入合适的数字：

(1)
$$\begin{array}{rrrrr} & & \square & 4 & \square \\ \times & & & \square & 6 \\ \hline & 1 & \square & \square & 0 \\ \square & \square & 5 & & \\ \hline 8 & \square & \square & \square & \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrrr} & & & \square & \square \\ \times & & & 9 & \square \\ \hline & & 6 & \square & \square \\ & 6 & \square & \square & \\ \hline & \square & \square & \square & 8 \end{array}$$

分析与解：(1)为方便叙述，将部分□用字母表示如左下式。

$$\begin{array}{rrrrr} & & A & 4 & B \\ \times & & & C & 6 \\ \hline & 1 & \square & \square & 0 \\ \square & \square & 5 & & \\ \hline 8 & \square & \square & \square & \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr} & & \boxed{2} & 4 & \boxed{5} \\ \times & & & \boxed{3} & 6 \\ \hline & 1 & \boxed{4} & \boxed{7} & 0 \\ \boxed{7} & \boxed{3} & 5 & & \\ \hline 8 & \boxed{8} & \boxed{2} & \boxed{0} & \end{array}$$

第 1 步：由 A4B×6 的个位数为 0 知，B=0 或 5；再由 A4B×C=□□5，推知 B＝5。

第 2 步：由 A45×6＝1□□0 知，A 只可能为 2 或 3。但 A 为 3 时，345×6＝2070，不可能等于 1□□0，不合题意，故 A=2。

第 3 步：由 245×C=□□5 知，乘数 C 是小于 5 的奇数，即 C 只可能为 1 或 3。

当 C 取 1 时，245×16＜8□□□，不合题意，所以 C 不能取 1。故 C＝3。

至此，可得填法如上页右下式。

从上面的详细解法中可看出：除了用已知条件按一定次序(即几步)来求解外，在分析中常应用“分枝”(或“分类”)讨论法，如第 2 步中 A 分“两枝”2 和 3，讨论“3”不合适(即排除了“3”)，从而得到 A＝2；第 3 步中，C 分“两枝”1 和 3，讨论“1”不合适(即排除了“1”)，从而得到 C＝3。分枝讨论法、排除法是解较难的数字问题的常用方法之一。

下面我们再应用这个方法来解第(2)题。

(2)为方便叙述，将部分□用字母表示如下式。

$$\begin{array}{rrrrr} & & & A & B \\ \times & & & 9 & C \\ \hline & & 6 & \square & D \\ & 6 & \square & 4 & \\ \hline & \square & \square & \square & 8 \end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr} & & & \boxed{7} & \boxed{6} \\ \times & & & 9 & \boxed{8} \\ \hline & & 6 & \boxed{0} & \boxed{8} \\ & 6 & \boxed{8} & 4 & \\ \hline & \boxed{7} & \boxed{4} & \boxed{4} & 8 \end{array}$$

第 1 步：在 AB×9＝6□4 中，因为积的个位是 4，所以 B＝6。

第 2 步：在 A6×9＝6□4 中，因为积的首位是 6，所以 A＝7。

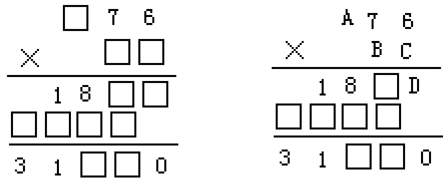
第 3 步：由积的个位数为 8 知，D＝8。再由 AB×C=76×C＝6□8 知 C＝3 或 8。当 C=3 时，

76×3＜6□8，

不合题意，所以 C＝8。

至此，A，B，C 都确定了，可得上页右式的填法。

例 2 在左下式的□中填入合适的数字。



分析与解：将部分□用字母表示如右上式。

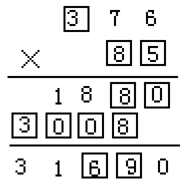
第 1 步：由积的个位数为 0 知 D＝0，进而得到 C＝5。

第 2 步：由 A76×5＝18□0 知，A＝3。

第 3 步：在 376×B5＝31□□0 中，由积的最高两位数是 31 知，B≥8，即 B 是 8 或 9。

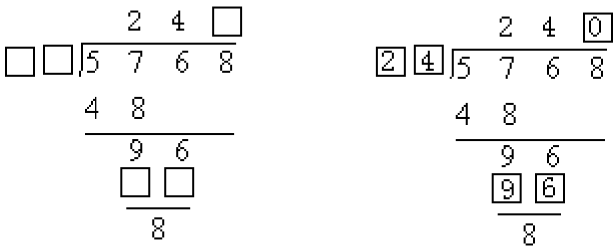
由 376×85=31960 及 376×95＝35720 知，B＝8。

至此，我们已经确定了 A＝3，B＝8，C＝5。唯一的填法如下式。



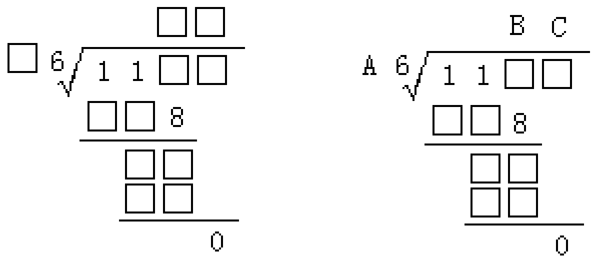
下面两道例题是除数为两位数的除法竖式数字谜。

例 3 在左下式的□中填入合适的数字。



解：由□□×2=48 知，除数□□=24。又由竖式的结构知，商的个位为 0。故有右上式的填法。

例 4 在左下式的□中填入合适的数字。

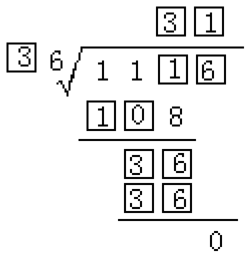


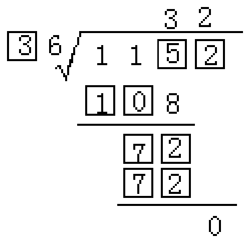
分析与解：将部分□用字母表示如右上式。

第 1 步：在 A6×B＝□□8 中，积的个位是 8，所以 B 只可能是 3 或 8。由□□8＜11□知，□□8 是 108 或 118，因为 108 和 118 都不是 8 的倍数，所以 B≠8，B＝3。又因为只有 108 是 3 的倍数，108÷3＝36，所以 A＝3。

第 2 步：由 A6×C＝36×C=□□知，C 只能是 1 或 2。当 C=1 时，36×31＝1116；当 C＝2 时，36×32＝1152。

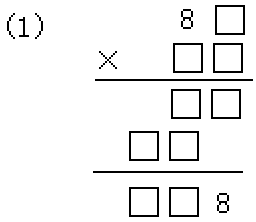
所以，本题有如下两种填法：

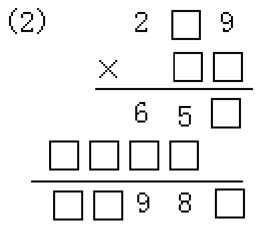




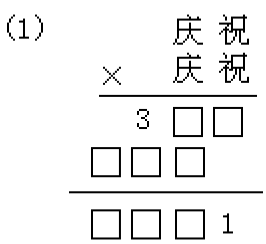
练习 23

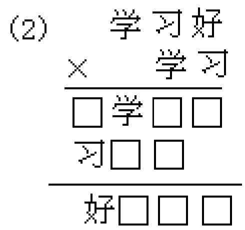
1.在下列各式的□中填入合适的数字：



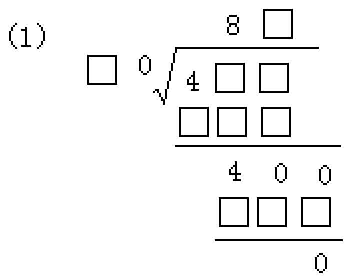


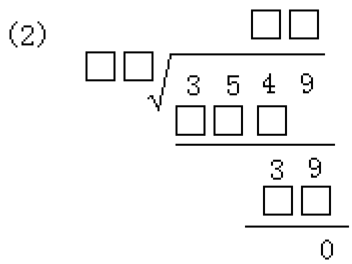
2.下列各题中，不同的汉字代表不同的数字，相同的汉字代表相同的数字。求出这些数字代表的数。



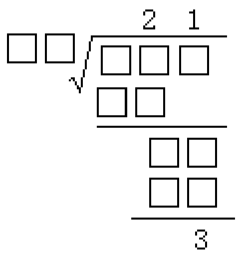


3.在下列各式的□中填入合适的数字：





4.在下面的竖式中，被除数、除数、商、余数的和是 709。请填上各□中的数字。



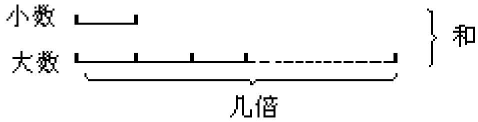
第 24 讲　和倍应用题

小学数学中有各种各样的应用题。根据它们的结构形式和数量关系，形成了一些用特定方法解答的典型应用题。比如，和倍应用题、差倍应用题、和差应用题等等。

和倍应用题的基本“数学格式”是：

已知大、小二数的“和”，又知大数是小数的几倍，求大、小二数各是多少。

上面的问题中有“和”，有“倍数”，所以叫做和倍应用题。为了清楚地表示和倍问题中大、小二数的数量关系，画出线段图如下：



从线段图知，“和”是小数的(倍数+1)倍，所以，

小数=和÷(倍数+1)。

上式称为和倍公式。由此得到

大数=和-小数，

或　大数=小数×倍数。

例如，大、小二数的和是 265，大数是小数的 4 倍，则

小数=265÷(4＋1)=53，

大数=265-53=212 或 53×4=212。

例 1　甲、乙两仓库共存粮 264 吨，甲仓库存粮是乙仓库存粮的 10 倍。甲、乙两仓库各存粮多少吨？

分析：把甲仓库存粮数看成“大数”，乙仓库存粮数看成“小数”，此例则是典型的和倍应用题。根据和倍公式即可求解。

解：乙仓库存粮 264÷(10＋1)＝24(吨)，甲仓库存粮

264-24=240(吨)，

或

24×10＝240(吨)。

答：乙仓库存粮 24 吨，甲仓库存粮 240 吨。

例 2　甲、乙两辆汽车在相距 360 千米的两地同时出发，相向而行，2 时后两车相遇。已知甲车的速度是乙车速度的 2 倍。甲、乙两辆汽车每小时各行多少千米？

分析：已知甲车速度是乙车速度的 2 倍，所以“1 倍”数是乙车的速度。现只需知道甲、乙汽车的速度和，就可用“和倍公式”了。由题意知两辆车 2 时共行 360 千米，故 1 时共行 360÷2＝180(千米)，这就是两辆车的速度和。

解：乙车的速度为

(360÷2)÷(2＋1)= 60(千米/时)，

甲车的速度为

60×2=20(千米/时)，或 180-60=120(千米/时)。

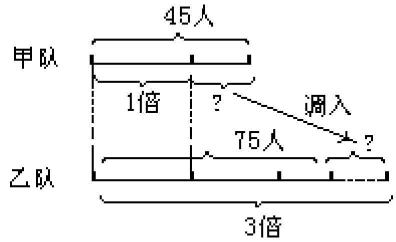
答：甲车每时行 120 千米，乙车每时行 60 千米。

从上面两道例题看出，用“和倍公式”的关键是确定“1 倍”数(即小数)是谁，“和”是谁。例 1、例 2 的“1 倍”数与“和”极为明显，其中例 2 中虽未直接给出“和”，但也很容易求出。下面我们讲几个“1 倍”数不太

明显的例子。

例 3 甲队有 45 人，乙队有 75 人。甲队要调入乙队多少人，乙队人数才是甲队人数的 3 倍？

分析：容易求得“二数之和”为 45＋75=120(人)。如果从“乙队人数才是甲队人数的 3 倍”推出“1 倍”数(即小数)是“甲队人数”那就错了，从 75 不是 45 的 3 倍也知是错的。这个“1 倍”数是谁？根据题意，应是调动后甲队的剩余人数。倍数关系也是调动后的人数关系，即“调入人后的乙队人数”是“调走人后甲队剩余的人数”的 3 倍。由此画出线段图如下：



从图中看出，把甲队中“？”人调入乙队后，(45＋75)就是甲队剩下人数的 3＋1＝4(倍)。从而，甲队调走人后剩下的人数就是“1 倍”数。由和倍公式可以求解。

解：甲队调动后剩下的人数为

(45＋75)÷(3＋1)＝ 30(人)，故甲队调入乙队的人数为 45-30＝15(人)。

答：甲队要调 15 人到乙队。

例 4 妹妹有书 24 本，哥哥有书 53 本。要使哥哥的书是妹妹的书的 6 倍，妹妹应给哥哥多少本书？

仿照例 3 的分析可得如下解法。

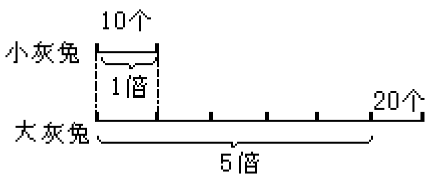
解：兄妹图书总数是妹妹给哥哥一些书后剩下图书的(6＋1)倍，根据和倍公式，妹妹剩下

(53＋24)÷(6＋1)＝11(本)。故妹妹给哥哥书 24-11＝13(本)。

答：妹妹给哥哥书 13 本。

例 5 大白兔和小灰兔共采摘了蘑菇 160 个。后来大白兔把它的蘑菇给了其它白兔 20 个，而小灰兔自己又采了 10 个。这时，大白兔的蘑菇是小灰兔的 5 倍。问：原来大白兔和小灰兔各采了多少个蘑菇？

分析与解：这道题仍是和倍应用题，因为有“和”、有“倍数”。但这里的“和”不是 160，而是 160－20＋10＝150，“1 倍”数却是“小灰兔又自己采了 10 个后的蘑菇数”。线段图如下：



根据和倍公式，小灰兔现有蘑菇(即“1 倍”数)

(160-20＋10)÷(5＋1)＝25(个)，

故小灰兔原有蘑菇 25-10＝15(个)，大白兔原有蘑菇

160-15＝145(个)。

答：原来大白兔采蘑菇 145 个，小灰兔采 15 个。

练习 24

1.小敏与爸爸的年龄之和是 64 岁，爸爸的年龄是小敏的 3 倍。小敏和她爸爸的年龄各是多少岁？

2.一肉店卖出猪肉和牛肉共 560 千克,卖出的猪肉是卖出的牛肉的 4 倍。猪、牛肉各卖了多少千克？

3.甲、乙两桶汽油共 84 千克。如果把乙桶中的油倒入甲桶 15 千克，那么这时甲桶中的汽油等于乙桶中的汽油的 3 倍。甲、乙两桶原有汽油各多少千克？

4.甲、乙两人共生产零件 100 个，其中甲有 2 个零件、乙有 5 个零件不合格。已知乙生产的合格零件是甲生产的合格零件的 2 倍。甲、乙各生产了多少个零件？

5.团结村原有水田 290 公顷，旱田 170 公顷。要把多少公顷旱田改为水田，才能使水田的公顷数比旱田的公顷数多 2 倍？

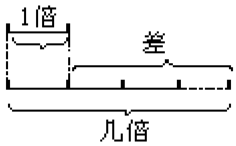
6.红星小学图书馆内，科技书是故事书的 3 倍，连环画书又是科技书的 2 倍。已知这三种书共有 1600 本，那么每种书各有多少本？

第 25 讲　差倍应用题

与和倍应用题相似的是差倍应用题。它的“基本数学格式”是：

已知大、小二数之“差”，又知大数是小数的几倍，求大、小二数各是多少。

上面的问题中，有“差”、有“倍数”，所以叫做差倍应用题。差倍问题中大、小二数的数量关系可以用下面的线段图表示：



从线段图知，“差”是小数(即“1 倍”数)的(倍数-1)倍，所以，

小数=差÷(倍数-1)。

上式称为差倍公式。由此得到

大数=小数+差，

或

大数=小数×倍数。

例如，大、小数之差是 152，大数是小数的 5 倍，则

小数=152÷(5-1)=38，

大数=38＋152=190 或 38×5＝190。

例 1 王师傅一天生产的零件比他的徒弟一天生产的零件多 128 个，且是徒弟的 3 倍。师徒二人一天各生产多少个零件？

分析：师徒二人一天生产的零件的“差”是 128 个。小数(即“1 倍”数)是徒弟一天生产的零件数，“倍数”为 3。由差倍公式可以求解。

解：徒弟一天生产零件

128÷(3-1)=64(个)，

师傅一天生产零件

128＋64＝192(个)或 64×3＝192(个)。

答：徒弟、师傅一天分别生产零件 64 个和 192 个。

例 2 两根电线的长相差 30 米，长的那根的长是短的那根的长的 4 倍。这两根电线各长多少米？

解：“差”＝30，倍数=4，由差倍公式得短的电线长

30÷(4-1)＝10(米)，

长的电线长

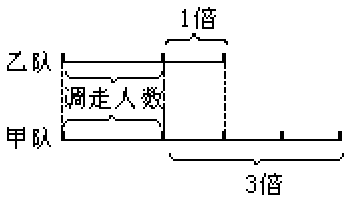
10＋30＝40(米)或 10×4＝40(米)。

答：短的电线长 10 米，长的电线长 40 米。

解差倍应用题的关键是确定“1 倍”数是谁，“差”是什么。上两例中，“1 倍”数及“差”都极明显地直接给出。下面讲两个稍有变化，不直接给出“差”和“1 倍”数的例子。

例 3 甲、乙二工程队，甲队有 56 人，乙队有 34 人。两队调走同样多人后，甲队人数是乙队人数的 3 倍。问：调动后两队各还有多少人？

分析：画线段图如下：



由上图可知，“1 倍”数是乙队调动后剩下的人数。因甲、乙队调走的人数相同(不影响他们二队人数之差)，所以，甲、乙两队人数之差仍是 56-34=22(人)。

解：由差倍公式得调动后乙队有

(56-34)÷(3-1)=11(人)。

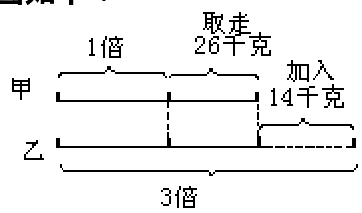
调动后甲队有

11×3=33(人)或 11＋(56-34)=33(人)。

答：调动后甲队有 33 人，乙队有 11 人。

例 4 甲、乙两桶油重量相等。甲桶取走 26 千克油，乙桶加入 14 千克油，这时，乙桶油的重量是甲桶油的重量的 3 倍。两桶油原来各有多少千克？

分析与解：画线段图如下：



从上图知，当甲桶取走 26 千克、乙桶加入 14 千克后，乙桶里的油就是甲桶里的油的 3 倍，所以，“1 倍”数是甲桶里剩下的油。“差”是什么呢？从图中可知，“1 倍”与“3 倍”之间的差 26＋14＝40(千克)就是我们要找的“差”。所以，由差倍公式知，

“1 倍”数=(26＋14)÷(3-1)＝20(千克)。

故甲、乙桶原来各有油

20＋26＝46(千克)，

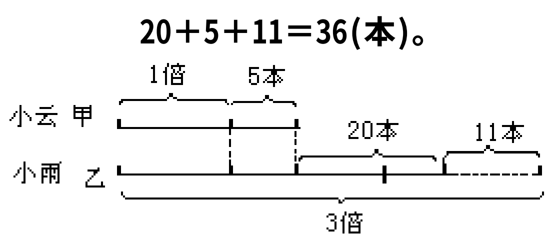
或 20×3-14＝46(千克)。

答：原来各有 46 千克。

例 5 小云比小雨少 20 本书，后来小云丢了 5 本书，小雨新买了 11 本书，这时小雨的书比小云的书多 2 倍。问：原来两人各有多少本书？

分析与解：“小雨的书比小云的书多 2 倍”，即小雨的书是小云的书的 3 倍。这个“倍数”是变化后的，所以“1 倍”数应是小云变化后的书(见下图)。“差”是

20＋5＋11＝36(本)。



根据和差公式得：

小云现有书

$(20+5+11)\div(3-1)=18$(本)。

小云原来有书 $18+5=23$(本)，

小雨原来有书 $23+20=43$(本)。

答：原来小云有 23 本书，小雨有 43 本书。

练习 25

1.大仓库存粮比小仓库存粮多 254 吨。又知大仓库存粮是小仓库存粮的 3 倍。大、小仓库各存粮多少吨？

2.一养鸡场，公鸡比母鸡少 369 只，母鸡是公鸡的 4 倍。公鸡、母鸡各多少只？

3.小林今年 9 岁，他爸爸今年 35 岁。小林多少岁时，他爸爸的年龄正好是他的 3 倍？

4.一车间男工 26 人，女工 14 人。调走男、女工同样多的人后，男工人数是女工人数的 3 倍。剩下的男、女工各多少人？

5.甲、乙二数相等。甲数加上 50，乙数减去 34 后，甲数就是乙数的 4 倍。原来甲、乙两数等于几？

6.两根同样长的电线，第一根用去 37 米，第二根用去 16 米后，第二根的长度是第一根长度的 4 倍。两根电线原来有多长？

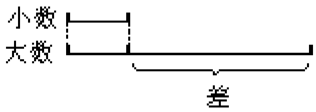
7.大、小二数之差是 504。大数个位数是 0，去掉这个 0，正好是小数。大、小数各是多少？

第 26 讲　和差应用题

和差应用题的基本“数学格式”是：

已知大、小二数的和与差，求此二数。

大、小二数的数量关系可表示为下面的线段图：



从线段图知：

(1)如果在小数中补进去一个已知的“差”，那么补后的小数与大数的和就是大数的 2 倍，即已知的和与已知的差之和是大数的 2 倍。所以，

大数=(和+差)÷2，小数=和-大数。

(2)如果在大数中去掉一个已知的差，那么去掉了“差”的大数与小数之和就是小数的 2 倍，即已知的和与已知的差之差是小数的 2 倍。所以，

小数=(和-差)÷2，大数=和-小数。

由此得到和差公式：

大数=(和+差)÷2，

小数=(和-差)÷2。

例如，已知二数之和为 324，二数之差为 152，求此二数。由和差公式知，

大数=(324＋152)÷2＝238，

小数=(324-152)÷2＝86。

例 1 小军和他爸爸今年的年龄之和是 42 岁，年龄之差是 26 岁。小军与他爸爸今年各多少岁？

分析：与和差问题的基本数学格式对比知，如果把爸爸的岁数看成“大数”，小军的岁数看成“小数”，那么它们的和为 42，差为 26。由和差公式可以求解。

解：爸爸的岁数=(42＋26)÷2＝34(岁)，

小军的岁数=(42-26)÷2＝8(岁)。

答：今年小军 8 岁，爸爸 34 岁。

本题中，求出爸爸的岁数后，小军的岁数也可以由(和-大数)求得，即 42-34＝8(岁)；还可以由(大数-差)求得，即 34-26＝8(岁)。

例 2 三年级一班有学生 49 人，其中女生比男生少 5 人。这个班男、女生各多少人？

解：男生(49＋5)÷2＝27(人)，

女生 49-27=22(人)。

答：男生 27 人，女生 22 人。

例 3 一条客轮在一条江上往返载客。顺江而下时，每小时行 80 千米，逆江而上时，每小时行 50 千米。求这条客轮在静水中的速度和这条江的水流速度。

分析：因为

顺流速度=静水速度+水流速度，

逆流速度=静水速度-水流速度，

根据题意，静水速度与水流速度之和为 80 千米/时，它们的差为 50 千米

/时，所以，这是和差问题。

解：静水中船速为

(80＋50)÷2＝65(千米/时)，

水流速度为 80-65=15(千米/时)。

答：静水中船速 65 千米/时，流速 15 千米/时。

例 4 哥哥今年 14 岁，妹妹今年 8 岁，当兄妹俩岁数的和是 42 岁时，俩人各应该是多少岁？

分析：由于“年龄差”不随年份的推移而变化，所以，兄妹的年龄差始终是 14-8＝6(岁)。当兄妹的岁数和是 42 岁时，由和差公式可以求解。

解：哥哥为(42＋6)÷2＝24(岁)，

妹妹为 42-24＝18(岁)。

答：那时哥哥 24 岁，妹妹 18 岁。

例 5 方方和圆圆共有图书 70 本，如果方方给圆圆 5 本，那么圆圆就比方方多 4 本。问：方方和圆圆原来各有图书多少本？

分析：方方给圆圆 5 本后，两人共有图书 70 本，圆圆比方方多 4 本。这是典型的和差问题。求出此时两人各多少本书后，就可以求出原来两人各有多少书。

解：如果方方给圆圆 5 本，那么圆圆就有

(70＋4)÷2＝37(本)，

所以，原来圆圆有 37-5＝32(本)，方方有 70－32＝38(本)。

答：方方有 38 本，圆圆有 32 本。

例 6 甲的书比乙多 9 本，比丙多 2 本，乙、丙共有书 47 本。问：甲、乙、丙各有多少本书？

分析：和差问题是指两个数的和与差，现在出现了三个数，需要化为两个数的和差问题。因为“甲的书比乙多 9 本，比丙多 2 本”，说明乙的书比丙少 9-2＝7

(本)。由“乙、丙共有书 47 本”，乙比丙少 7 本，可用和差公式求解。

解：乙有书 [47-(9-2)]÷2＝20(本)，

丙有书 47-20＝27(本)，

甲有书 20＋9＝29(本)。

答：甲有 29 本，乙有 20 本，丙有 27 本。

练习 26

1.一农业技术员做良种对比试验。选两块大小相同、水土完全一样的土地，一块种良种小麦，一块种非良种小麦。结果共收获 884 千克，良种小麦比非良种小麦多收 156 千克。求良种与非良种小麦的产量分别是多少千克？

2.水果店一天卖出苹果和梨共 386 千克，梨比苹果少卖 84 千克。苹果和梨各卖多少？

3.一条船在一条江上的两个码头之间往返行驶。顺江而下时，每小时行 70 千米，逆江而上时，每小时行 30 千米。静水中的船速和江水的流速各是多少？

4.弟弟今年 15 岁，姐姐今年 20 岁。当姐弟俩岁数的和是 75 岁时，两人各多少岁？

5.两堆石子相差 16 粒，如果混在一起，那么可以重新分成数量都是 28 粒的三堆。求原来两堆石子各有多少粒？

6.红红与兰兰共有 61 本书，红红给了兰兰 5 本书，兰兰自己又新买了 3 本书，红红现在比兰兰少 2 本书。问：两人原来各有几本书？

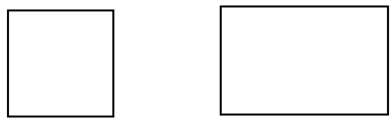
7.甲仓库存粮比乙仓库多 300 吨，比丙仓库少 100 吨，乙、丙仓库共存粮 3000 吨。三个仓库共存粮多少吨？

第 27 讲　巧用矩形面积公式

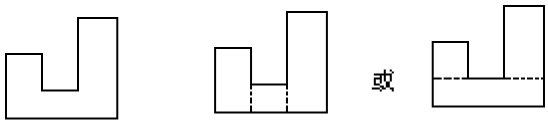
同学们都知道求正方形和长方形面积的公式：

正方形的面积=a×a(a 为边长)，

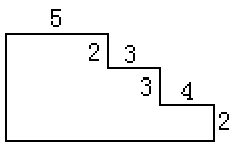
长方形的面积=a×b(a 为长，b 为宽)。



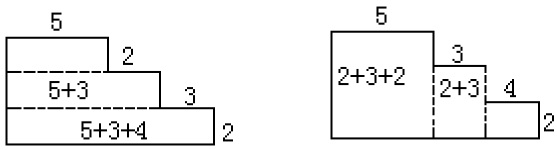
利用这两个公式可以计算出各种各样的直角多边形的面积。例如，对左下图，我们无法直接求出它的面积，但是通过将它分割成几块，其中每一块都是正方形或长方形(见右下图)，分别计算出各块面积再求和，就得出整个图形的面积。



例 1 右图中的每个数字分别表示所对应的线段的长度(单位：米)。这个图形的面积等于多少平方米？



分析与解：将此图形分割成长方形有下面两种较简单的方法，图形都被分割成三个长方形。根据这两种不同的分割方法，都可以计算出图形的的面积。

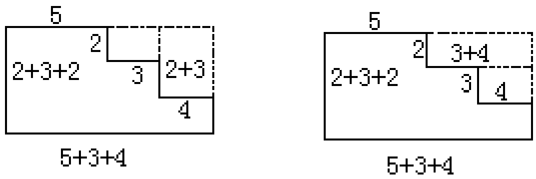


$$5\times2+(5+3)\times3+(5+3+4)\times2=58(米^2)；$$

或

$$5\times(2+3+2)+3\times(2+3)+4\times2=58(米^2)。$$

上面的方法是通过将图形分割成若干个长方形，然后求图形面积的。实际上，我们也可以将图形“添补”成一个大长方形(见下图)，然后利用大长方形与两个小长方形的面积之差，求出图形的面积。



$$(5+3+4)\times(2+3+2)-2\times3-(2+3)\times4=58(米^2)；$$

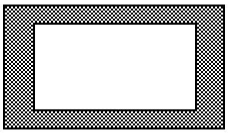
或

$$(5+3+4)\times(2+3+2)-2\times(3+4)-3\times4=58(米^2)。$$

由例 1 看出，计算直角多边形面积，主要是利用“分割”和“添补”的

方法，将图形演变为多个长方形的和或差，然后计算出图形的面积。其中“分割”是最基本、最常用的方法。

例 2 右图为一个长 50 米、宽 25 米的标准游泳池。它的四周铺设了宽 2 米的白瓷地砖(阴影部分)。求游泳池面积和地砖面积。



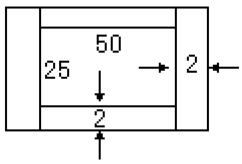
分析与解：游泳池面积=50×25＝1250(米^2)。

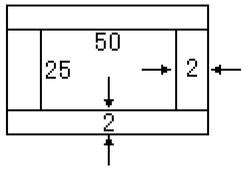
求地砖面积时，我们可以将阴影部分分成四个长方形(见下图)，从而可得白瓷地砖的面积为

$$(2+25+2)\times2\times2+50\times2\times2=316(米^2)；$$

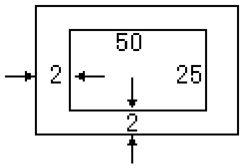
或

$$(2+50+2)\times2\times2+25\times2\times2=316(米^2)。$$





求地砖的面积，我们还可以通过“挖”的方法，即从大长方形内“挖掉”一个小长方形(见右图)。从而可得白瓷地砖面积为



$$(50+2+2)\times(25+2+2)-50\times25$$
$$=316(米^2)。$$

例 3 下图中有三个封闭图形，每个封闭图形均由边长为 1 厘米的小正方形组成。试求各图形的面积。

解：每个小方格的面积为 1 厘米^2。

图(1)可分成四个凸出块和一个中间块，这五块的面积都是 2×2＝4(厘米^2)。图(1)的面积为

$$4\times5=20(厘米^2)。$$

图(2)可以看成是从长 7 厘米、宽 6 厘米的长方形中，“挖掉”4 个边长为 2 厘米的正方形。它的面积等于

$$7\times6-(2\times2)\times4=26(厘米^2)。$$

图(3)像个宝鼎，竖行分割，从左至右分成五块，每块面积依次为 2，5，3，5，2 厘米^2，总面积为

$$2+5+3+5+2=17(厘米^2)。$$

例 3 中分割成正方形、长方形的方法很多，因而具体计算面积的方法也很多。由于图形内所含方格数不多，所以也可以通过数图中小方格的数目来

求得面积。

例 4 一个长方形的周长是 22 厘米。如果它的长和宽都是整数厘米，那么这个长方形的面积(单位：厘米 ^{2})有多少种可能值？最大、最小各是多少？

解：因为长方形的周长是 22 厘米，所以它的长、宽之和是 22÷2＝11(厘米)。考虑到长、宽都是整数厘米，只有如下情形：

长	厘米	10	9	8	7	6
宽	厘米	1	2	3	4	5
面积	厘米 ^{2}	10	18	24	28	30

所以，这个长方形的面积有五种可能值：10，18，24，28，30 厘米 ^{2}。最大是 30 厘米 ^{2}，最小是 10 厘米 ^{2}。

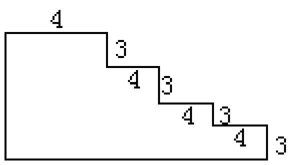
练习 27

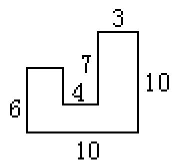
1.甲、乙两块地都是长方形，且一样长。

(1)如果甲地面积是乙地面积的 2 倍，那么甲地的宽是乙地的宽的多少倍？

(2)如果甲地的宽是乙地的宽的 3 倍，那么甲地面积是乙地面积的多少倍？

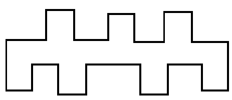
2.求下列各图的面积。(单位：厘米)





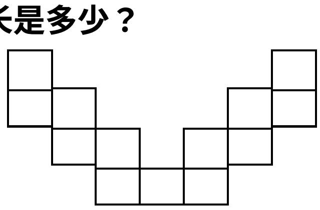
3.把边长为 40 米的正方形运动场扩为长 60 米、宽 50 米的长方形运动场。此运动场面积扩大了多少？周长增加了多少？

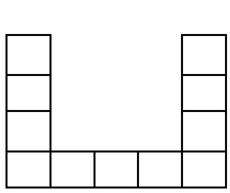
4.一个正方形的面积是 144 米 ^{2}。如果它被分成六个相同的长方形(如左下图)，那么，其中一个长方形的面积和周长各是多少？



5.右上图是用 30 根长 4 厘米的小棍摆成的图形。这个图形的面积是多少？用这些小棍摆成的面积最大的直角多边形比这个图形的面积大多少？

6.左下图的面积是 52 厘米 ^{2}，其中每个小方格都是一个正方形。这个图形的外沿的周长是多少？

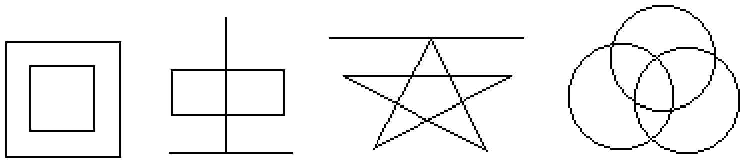




7.右上图由 11 个同样的正方形组成。如果这个图形的周长是 96 厘米，那么它的面积是多少？

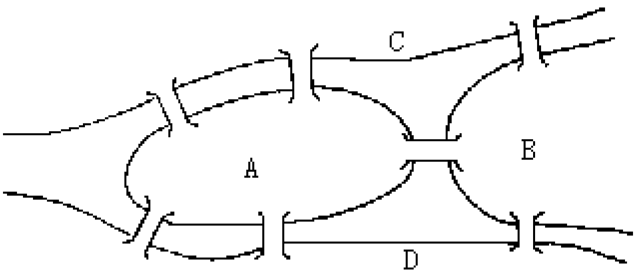
第 28 讲　一笔画(一)

如果一个图形可以用笔在纸上连续不断而且不重复地一笔画成,那么这个图形就叫一笔画。显然,在下面的图形中,(1)(2)不能一笔画成，故不是一笔画，(3)(4)可以一笔画成，是一笔画。



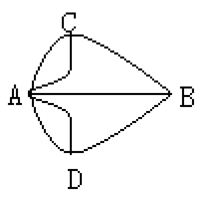
(1)　(2)　(3)　(4)

同学们可能会问：为什么有的图形能一笔画成，有的图形却不能一笔画成呢？一笔画图形有哪些特点？关于这个问题有一个著名的数学故事——哥尼斯堡七桥问题。哥尼斯堡是立陶宛共和国的一座城市，布勒格尔河从城中穿过，河中有两个岛，18 世纪时河上共有七座桥连接 A，B 两个岛以及河的两岸 C，D(如下图)。

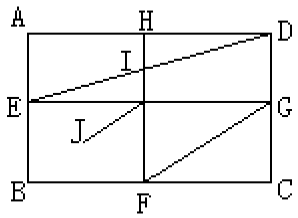


所谓七桥问题就是：一个散步者要一次走遍这七座桥，每座桥只走一次，怎样走才能成功？

当时的许多人都热衷于解决七桥问题，但是都没成功。后来，这个问题引起了大数学家欧拉(1707-1783)的兴趣,许多人的不成功促使欧拉从反面来思考问题：是否根本就不存在这样一条路线呢？经过认真研究，欧拉终于在 1736 年圆满地解决了七桥问题，并发现了一笔画原理。欧拉是怎样解决七桥问题的呢？因为岛的大小，桥的长短都与问题无关，所以欧拉把 A，B 两岛以及陆地 C，D 用点表示，桥用线表示，那么七桥问题就变为右图是否可以一笔画的问题了。



我们把一个图形上与偶数条线相连的点叫做偶点，与奇数条线相连的点叫做奇点。如下图中，A，B，C，E，F，G，I 是偶点，D，H，J，O 是奇点。



欧拉的一笔画原理是：

(1)一笔画必须是连通的(图形的各部分之间连接在一起)；

(2)没有奇点的连通图形是一笔画，画时可以以任一偶点为起点，最后仍回到这点；

(3)只有两个奇点的连通图形是一笔画，画时必须以一个奇点为起点，以另一个奇点为终点；

(4)奇点个数超过两个的图形不是一笔画。

利用一笔画原理，七桥问题很容易解决。因为图中 A，B，C，D 都是奇点，有四个奇点的图形不是一笔画，所以一个散步者不可能不重复地一次走遍这七座桥。

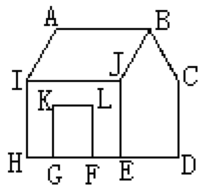
顺便补充两点：

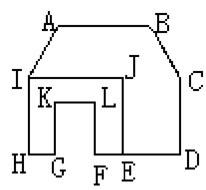
(1)一个图形的奇点数目一定是偶数。

因为图形中的每条线都有两个端点，所以图形中所有端点的总数必然是偶数。如果一个图形中奇点的数目是奇数，那么这个图形中与奇点相连接的端点数之和是奇数(奇数个奇数之和是奇数)，与偶点相连的线的端点数之和是偶数(任意个偶数之和是偶数)，于是得到所有端点的总数是奇数，这与前面的结论矛盾。所以一个图形的奇点数目一定是偶数。

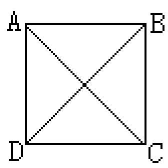
(2)有 K 个奇点的图形要 K÷2 笔才能画成。

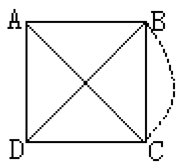
例如：下页左上图中的房子共有 B，E，F，G，I，J 六个奇点，所以不是一笔画。如果我们将其中的两个奇点间的连线去掉一条，那么这两个奇点都变成了偶点，如果能去掉两条这样的连线，使图中的六个奇点变成两个，那么新图形就是一笔画了。将线段 GF 和 BJ 去掉，剩下 I 和 E 两个奇点(见右下图)，这个图形是一笔画，再添上线段 GF 和 BJ，共需三笔，即(6 ÷2)笔画成。





一个 K(K＞1)笔画最少要添加几条连线才能变成一笔画呢？我们知道 K 笔画有 2K 个奇点，如果在任意两个奇点之间添加一条连线，那么这两个奇点同时变成了偶点。如左下图中的 B，C 两个奇点在右下图中都变成了偶点。所以只要在 K 笔画的 2K 个奇点间添加(K-1)笔就可以使奇点数目减少为 2 个，从而变成一笔画。



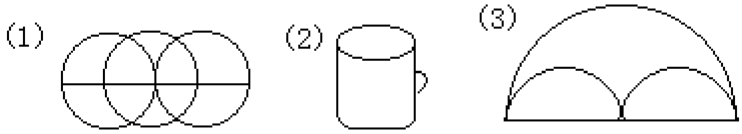


到现在为止，我们已经学会了如何判断一笔画和多笔画，以及怎样添加

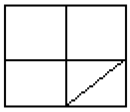
连线将多笔画变成一笔画。

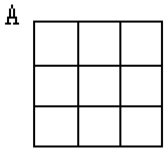
练习 28

1.下列图形分别是几笔画？怎样画？



2.能否用剪刀从左下图中一次连续剪下三个正方形和两个三角形？





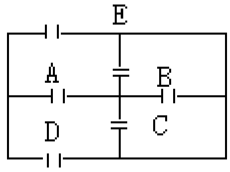
3.从 A 点出发，走遍右上图中所有的线段，再回到 A 点，怎样走才能使重复走的路程最短？

4.如下图所示，两条河流的交汇处有两个岛，有七座桥连接这两个岛及河岸。问：一个散步者能否一次不重复地走遍这七座桥？

第 29 讲　一笔画(二)

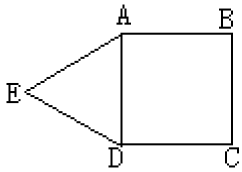
利用一笔画原理，我们可以解决许多有趣的实际问题。

例 1 右图是某展览馆的平面图，一个参观者能否不重复地穿过每一扇门？如果不能，请说明理由。如果能，应从哪开始走？



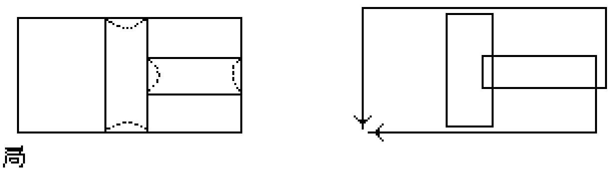
分析与解：我们将每个展室看成一个点，室外看成点 E，将每扇门看成一条线段，两个展室间有门相通表示两个点间有线段相连，于是得到右图。能否不重复地穿过每扇门的问题，变为右图是否一笔画问题。

右图中只有 A，D 两个奇点，是一笔画，所以答案是肯定的，应该从 A 或 D 展室开始走。



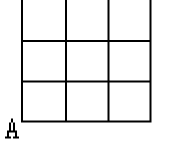
例 1 的关键是如何把一个实际问题变为判断是否一笔画问题，就像欧拉在解决哥尼斯堡七桥问题时做的那样。

例 2 一个邮递员投递信件要走的街道如下页左上图所示，图中的数字表示各条街道的千米数，他从邮局出发，要走遍各街道，最后回到邮局。怎样走才能使所走的行程最短？全程多少千米？



分析与解：图中共有 8 个奇点，必须在 8 个奇点间添加 4 条线，才能消除所有奇点，成为能从邮局出发最后返回邮局的一笔画。在距离最近的两个奇点间添加一条连线，如左上图中虚线所示，共添加 4 条连线，这 4 条连线表示要重复走的路，显然，这样重复走的路程最短，全程 30 千米。走法参考右上图(走法不唯一)。

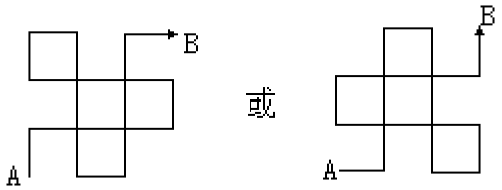
例 3 右图中每个小正方形的边长都是 100 米。小明沿线段从 A 点到 B 点，不许走重复路，他最多能走多少米？



分析与解：这道题大多数同学

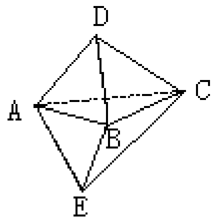
都采用试画的方法，实际上可以用一笔画原理求解。首先，图中有 8 个奇点，在 8 个奇点之间至少要去掉 4 条线段，才能使这 8 个奇点变成偶点；

其次，从 A 点出发到 B 点，A，B 两点必须是奇点，现在 A，B 都是偶点，必须在与 A，B 连接的线段中各去掉 1 条线段，使 A，B 成为奇点。所以至少要去掉 6 条线段，也就是最多能走 1800 米，走法如下页上图。或



例 2 与例 3 的图中各有 8 个奇点，都是通过减少奇点个数，将多笔画变成一笔画的问题，但它们采用的方法却完全不同。因为例 2 中只要求走遍所有的线段，没有要求不能重复，所以通过添加线段的方法(实际是重复走添加线段的这段路)，将奇点变为偶点，使多笔画变成一笔画。而在例 3 中，要求不能走重复的路，所以不能添加线段，只能通过减少线段的方法，将奇点变为偶点，使多笔画变成一笔画。区别就在于能否重复走！能“重复”就“添线”，不能“重复”就“减线”。

例 4 在六面体的顶点 B 和 E 处各有一只蚂蚁(见右图)，它们比赛看谁能爬过所有的棱线，最终到达终点 D。已知它们的爬速相同，哪只蚂蚁能获胜？

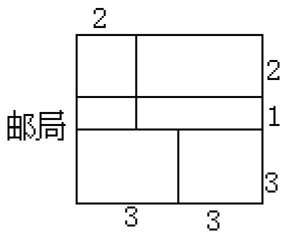


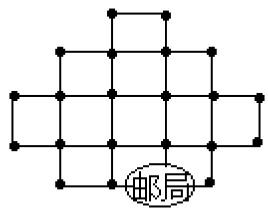
分析与解：许多同学看不出这

是一笔画问题，但利用一笔画的知识，能非常巧妙地解答这道题。这道题只要求爬过所有的棱，没要求不能重复。可是两只蚂蚁爬速相同，如果一只不重复地爬遍所有的棱，而另一只必须重复爬某些棱，那么前一只蚂蚁爬的路程短，自然先到达 D 点，因而获胜。问题变为从 B 到 D 与从 E 到 D 哪个是一笔画问题。图中只有 E，D 两个奇点，所以从 E 到 D 可以一笔画出，而从 B 到 D 却不能，因此 E 点的蚂蚁获胜。

练习 29

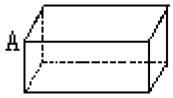
1.邮递员要从邮局出发，走遍左下图(单位：千米)中所有街道，最后回到邮局，怎样走路程最短？全程多少千米？





2.有一个邮局，负责 21 个村庄的投递工作，右上图中的点表示村庄，线段表示道路。邮递员从邮局出发，怎样才能不重复地经过每一个村庄，最后回到邮局？

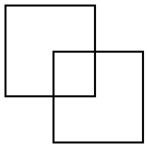
3.一只木箱的长、宽、高分别为 5，4，3 厘米(见右图)，有一只甲虫从 A 点出发，沿棱爬行，每条棱不允许重复，则甲虫回到 A 点时，最多能爬行多少厘米？

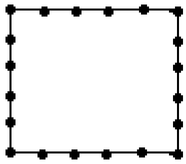


第 30 讲　包含与排除

同学们对这个题目可能很陌生，为了搞清楚什么是“包含与排除”，大家先一起回答两个问题：

（1）两个面积都是 4 厘米^{2}的正方形摆在桌面上(见左下图)，它们遮盖住桌面的面积是 8 厘米^{2}吗？





(2)一个正方形每条边上有 6 个点(见右上图)，四条边上一共有 24 个点吗？

聪明的同学马上就会发现：

(1)两个正方形的面积和是 8 厘米^2，现在它们有一部分重叠了。因此盖住桌面的面积应当从两个正方形的面积和中减去重叠的这部分面积，所以盖住桌面的面积应少于 8 厘米^2。

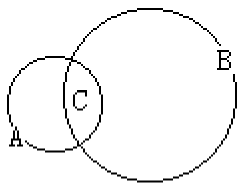
(2)四个角上的点每个点都在两条边上，因此被重复计算了，在求四条边上共有多少点时，应当减去重复计算的点，所以共有 $6\times4-4=20$(个)点。

这两个问题，在计算时，都采用了“去掉”重复的数值(面积或个数)的方法。

一般地，若已知 A，B，C 三部分的数量(见右图)，其中 C 为 A，B 的重复部分，则图中的数量就等于

$$A+B-C。$$

因为 A，B 有互相包含(重复)的部分 C，所以，在求 A 和 B 合在一起的数量时，就要在 A＋B 中减去 A 和 B 互相包含的部分 C。这种方法称为包含排除法。



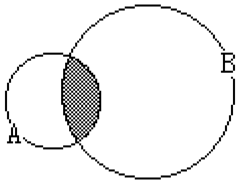
实际上，我们前面已经遇到过包含与排除的问题。如，第 10 讲“植树问题”的例 3 和例 4，只不过那时我们没有明确提出“包含排除法”。

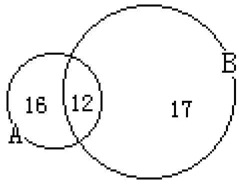
例 1 把长 38 厘米和 53 厘米的两根铁条焊接成一根铁条。已知焊接部分长 4 厘米，焊接后这根铁条有多长？

解：因为焊接部分为两根铁条的重合部分，所以，由包含排除法知，焊接后这根铁条长

$$38+53-4=87(厘米)。$$

例 2 某小学三年级四班，参加语文兴趣小组的有 28 人，参加数学兴趣小组的有 29 人，有 12 人两个小组都参加。这个班有多少人参加了语文或数学兴趣小组？





分析与解：如上页左下图所示，A 圆表示参加语文兴趣小组的人，B 圆表示参加数学兴趣小组的人，A 与 B 重合的部分(阴影部分)表示同时参加两个小组的人。图中 A 圆不含阴影的部分表示只参加语文兴趣小组未参加数学兴趣小组的人，有 28-12＝16(人)；图中 B 圆不含阴影的部分表示只参加数学兴趣小组未参加语文兴趣小组的人，有 29-12＝17(人)(见上页右下图)。

由此得到参加语文或数学兴趣小组的有

$$16+12+17=45(\text{人})。$$

根据包含排除法，直接可得

$$28+29-12=45(\text{人})。$$

例 3 某班共有 46 人，参加美术小组的有 12 人，参加音乐小组的有 23 人，有 5 人两个小组都参加了。这个班既没参加美术小组也没参加音乐小组的有多少人？

分析与解：与例 2 对比，本例已知全班总人数，如果能仿照例 2 求出参加了美术或音乐小组的人数，那么只需用全班总人数减去这个人数，就得到所求的人数。

根据包含排除法知，该班至少参加了一个小组的总人数为 12＋ 23- 5 ＝30(人)。所以，该班未参加美术或音乐小组的人数是 46-30=16(人)。综合列式为

$$46-(12+23-5)=16(\text{人})。$$

例 4 三年级科技活动组共有 63 人。在一次剪贴汽车模型和装配飞机模型的定时科技活动比赛中，老师到时清点发现：剪贴好一辆汽车模型的同学有 42 人，装配好一架飞机模型的同学有 34 人。每个同学都至少完成了一项活动。问：同时完成这两项活动的同学有多少人？

分析与解：因 42＋34＝76，76＞63，所以必有人同时完成了这两项活动。由于每个同学都至少完成了一项活动，根据包含排除法知，

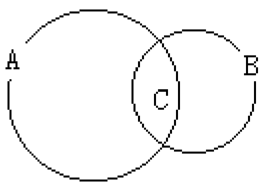
42＋34-(完成了两项活动的人数)=全组人数，即 76-(完成了两项活动的人数)＝63。

由减法运算法则知，完成两项活动的人数为

$$76-63=13(\text{人})。$$

例 5 在前 100 个自然数中，能被 2 或 3 整除的数有多少个？

分析与解：如右图所示，A 圆内是前 100 个自然数中所有能被 2 整除的数，B 圆内是前 100 个自然数中所有能被 3 整除的数，C 为前 100 个自然数中既能被 2 整除也能被 3 整除的数。



前 100 个自然数中能被 2 整除的数有 100÷2=50

(个)。由 100÷3＝ 33…… 1 知，前 100 个自然数中能被 3 整除的数有 33 个。由 100÷(2×3)＝ 16……4 知，前 100 个自然数中既能被 2 整除也能被 3 整除的数有 16 个。

所以 A 中有 50 个数，B 中有 33 个数，C 中有 16 个数。因为 A，B 都包含 C，根据包含排除法得到，能被 2 或 3 整除的数有

50＋ 33- 16＝ 67(个)。

练习 30

1.三年级四班组织了一次象棋和军棋的棋类比赛，参加象棋比赛的有 35 人，参加军棋比赛的有 24 人，有 16 人两项比赛都参加了。这个班参加棋类比赛的共有多少人？

2.某校一个歌舞表演队里，能表演独唱的有 10 人，能表演跳舞的有 18 人，两种都能表演的有 7 人。这个表演队共有多少人能登台表演歌舞？

3.一班有 45 人，其中 26 人参加了数学竞赛，22 人参加了作文比赛，12 人两项比赛都参加了。一班有多少人两项比赛都没有参加？

4.甲、乙两家合住在一套单元房里。甲家能够使用的面积(包括厨房、厕所、走廊等，下同)有 56 米^2，乙家能够使用的面积有 65 米^2，甲、乙两家都能使用的面积有 30 米^2。求这套单元的使用面积。

5.在自然数 1～100 中，能被 3 或 5 中任一个整除的数有多少个？

6.在自然数 1～100 中，不能被 2，3 中任一个整除的数有多少个？

答案与提示

练习 1

1.224。 2.300。 3. 1640。 4.15118
5.5287 6.400。 7. 4158。 8.815。
9.126。 10.1600。

练习 2

1.略。
2.□= 250，○=54，△= 50，☆=175。
3.□=50，○=0 或 2，△= 2。
4.1×3×5×8 或 1×4×5×6 或 2×3×4×5。
5.□=9，△=4。
6.(1)5-5÷5-5÷5= 3；(2)1×2＋3-4=1。
7.12÷4＋4=10-3 或 12＋4÷4=10＋3。
8.123-45-67＋89＝100；
123 ＋ 45－ 67＋ 8－ 9＝ 100；
123＋4－5＋67－89＝100；
123－4－5－6－7＋8－9＝100；
12＋3－4＋5＋67＋8＋ 9＝100；
1＋23－4＋56＋7＋8＋9=100；
12-3-4＋5-6＋7＋89＝100。

练习 3

1.（1）764＋265=1029； （2）981＋959=1940；

(3）99＋ 903＝1002； （4）98＋97＋ 923＝1118。
2.(1）28；(2）75。
3.(1）23004-18501＝4503； （2）1056-989＝67；
（3）24883-16789=8094； （4）9123-7684=1439。
4.987654321。
5.提示：先解上层数谜，再解下层数谜。

(1)
$$\begin{array}{rccc} & \boxed{1} & 8 & \boxed{7} \\ + & 3 & \boxed{0} & 4 \\ \hline & 4 & \boxed{9} & 1 \\ - & \boxed{3} & 9 & \boxed{6} \\ \hline & & \boxed{9} & 5 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rcccc} & \boxed{1} & \boxed{0} & 9 & \boxed{8} \\ - & & \boxed{9} & \boxed{9} & 9 \\ \hline & & & \boxed{9} & 9 \\ & & 8 & \boxed{9} & 2 \\ + & & & & \boxed{9} \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} \end{array}$$

练习 4

1.(1) 7865×7＝55055；

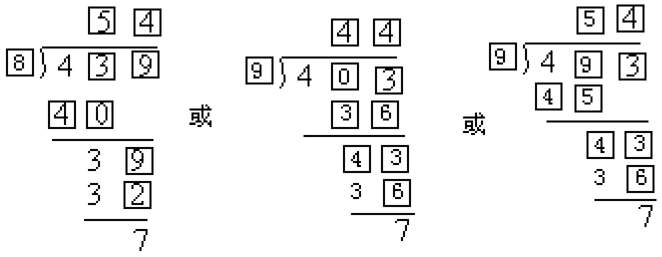
(2)2379 × 8= 19032 或 7379 × 8= 59032。

2.“我”＝5，“爱”=1，“数”=7，“学”=2。

3.“我”、“们”、“爱”、“祖”、“国”分别代表 8，7，9，1，2。

4.(1) 5607×7=801；(2) 822÷3=274。

5.



练习 5

1.28。 2.27。 3.48。

4.33。提示：“后项-前项”依次为 1，2， 4，8，16，…

5.18。提示：后项等于前两项之和。

6.31。提示：“后项-前项”依次为 2，4，6，8，10。

7.3，20。8.11，6。

9．37。 提示：$a_n = n^2 + 1$。

10．24，15。

提示：奇数项为 15，18，21，24；偶数项为 21，19，17，15。

11.(1)缺 9，在 7 与 11 之间；

(2)多 15，因为除 15 以外都不是合数。

练习 6

1.5。提示：中间数=两腰数之和÷底边数。

2.45；1。提示：中间数= 周围三数之和×3。

3.(1)13。提示：中间数等于两边数之和。

(2)20。提示：每行的三个数都成等差数列。

4.横行依次为 60，65，70，75，325；

竖行依次为 40， 65， 90， 115， 325。

5.14。提示：(23＋ 5) ÷ 2=14。

6.△。

7. 714285；857142。

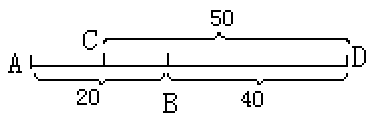
8. 8888886； 9876543×9。

9.36。提示：等于加式中心数的平方。

练习 7

1.甲 6 个，乙 10 个，丙 11 个。

2.517 米。
解：287＋(287＋ 85)- 142= 517(米)。
3.(1)54 块；(2)92 块。
解： (1)40- 10＋ 24= 54(块)；
(2)48＋18＋26=92(块)。
4.110 千克，10 千克。
解：柴油=(12－65) ×2＝ 110(千克)，
空桶=120-110=10(千克)。
5.390 厘米；321 厘米。
解：(110-40)× 4＋110=390(厘米)；
(110-40) × 3＋ 110＋1=321(厘米)。
6.A，C，B，D。



解：如右图所示。
7.(1)38；(2)26。
解： (1) 172- (32＋ 33＋ 34＋ 35)＝ 38；
(2)356-(68＋ 67＋ 66＋ 65＋ 64)＝ 26。

练习 8

1.72 天。解：3×(7×3＋3)=3×24＝72(天)。
2.42 只。解：(15-8)×6＝42(只)。
3.28 元 4 角。
解： 500－36－36×5＝284(角)＝28 元 4 角，
或 500－36×(5＋1)＝284(角)＝28 元 4 角。
4.1 时 50 分。
解：(60×2＋30)－(60＋20)÷2＝110(分)＝1 时 50 分。
5.20 千克。解：(8÷4)×10=20(千克)。
6.3 本。解：(24-18)÷2=3(本)。
7.6 角。解：24÷(12-8)=6(角)。
8.甲 80 千米/时，乙 40 千米/时。
解：乙 360÷3÷(2＋1)=40(千米/时)，
甲 40×2=80(千米/时)。
9.甲 120 吨，乙 30 吨。
解：乙库原有(150-40＋10)÷(2＋1)-10＝30(吨)，
甲库原有 150-30=120(吨)。

练习 9

1.一、二、三班分别转入 6，4，1 人。
提示：每班应有(40＋42＋45＋11)÷3＝46(人)。

2.6 道。解：(15＋9)÷4=6(道)。
3.129 厘米。
解：(123×2＋132×4)÷6=129(厘米)。
4.97 下。解：80×3－(67＋76)＝97(下)。
5.2 天。解：240÷［(960—240)÷6］＝2(天)。
6.9 页。解：［288－(8＋10＋11)×9］÷3＝9(页)。
7.97 分。解：(94×5－92×3)÷2＝97(分)。
8.41 米。解：25＋8×2＝41(米)。
9.172 厘米。

解：这名队员比平均身高矮的这 8 厘米，是由另四名队员给“补上”的，所以平均身高为 182－8÷4＝180(厘米)，这名队员身高 180－8＝172(厘米)。

练习 10

1.(1)21 棵；(2)19 棵；(3)20 棵。
2.132 棵。
解：(100＋3×2)×2＋(20＋3×2)×2＝264(米)，
264÷2＝132(棵)。
3.9 次。4.360 米。
5.34 米 80 厘米。
解：180÷6=30(行)，120×(30-1)=3480 厘米)。
6.200 个；100 个。
解：原有坑 1200÷6＋1=201(个)，
现有坑 1200÷4＋1=301(个)，

其中重复而不需要新挖的坑有 1200÷12＋1=101(个)，需要新挖的坑有 301－101=200(个)，需要填上的坑有 201-101=100(个)。

7.20 辆。
解：车队长 5×100-210=290(米)，
共有车(290-5)÷(5＋10)＋1=20(辆)。

练习 11

1.(1)28；(2)210。2.(1)36；(2)8。
3.(1)10；(2)15。
4.(1)9 个；(2)16 个；(3)21 个。
5.(1)60 个；(2)66 个。6.(1)12 个；(2)32 个。
7.(1)21 个；(2)62 个。
提示：4～7 题均采用按所含小块的个数分类(见下表)，表中空缺的为 0。

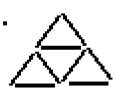
块数＼题号	1	2	3	4	5	6	8	9	10	15	合计
4(1)	5	2	2								9
4(2)	6	3	6			1					16
4(3)	4	6	5	2		3		1			21
5(1)	11	16	10	8	3	7		2	2	1	60
5(2)	14	19	11	11	2	5	2	1	1		66
6(1)	1	3	2	3		2	1				12

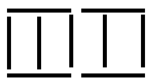
练习 12

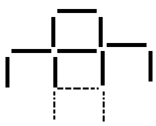
块数＼题号	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	合计
6(2)	1	4	3	6	1	6	4	2	2	2	1	32
7(1)	15			5				1				21
7(2)	14	18	11	10	2	5	1	1				62

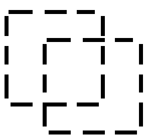
1.50 厘米。2.24 厘米。
3.188 米。解：(28＋16＋50)×2=188(米)。
4.76 厘米。
解：7 个长方形的周长之和，减去图中重叠(虚线)部分，
(5＋3)×2×7－3×2×6＝76(厘米)。
5.60 厘米。提示：每个小方格的边长为 3 厘米。
6.24 米。
解：三个长方形的周长等于正方形的 8 个边长，即等于正方形的两个周长，故正方形的周长为 16×3÷2＝24(米)。

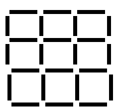
练习 13 2

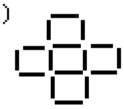
1. 

2. 

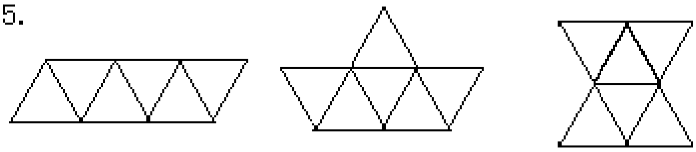
3. 

4. (1) 

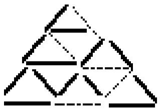
(2) 

(3) 

5.



6.



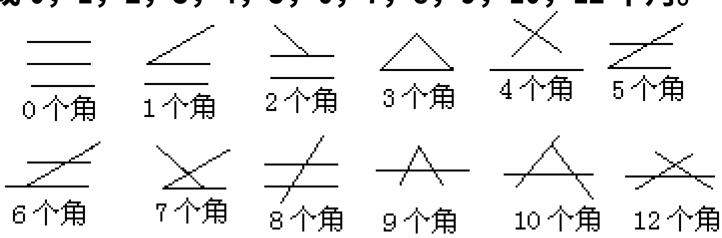
提示：有多种拿法，但至少要拿掉 6 根火柴。

练习 14

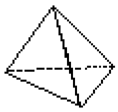
1.(1)12-2＝10；(2)14＋1＝15。
2.(1)7＋7=7＋7；(2)12-2＋1=11；
(3)14-7＋4=11。
3.4＋1＜7。
4.(1)2＋3=5；(2)19＋10＋9=38。
5.19×7＝133。6.86-63=23。
7.93-91＜32，93-31＜92，93＋31＞32，
33＋31＜92，53＋31＜92。

练习 15

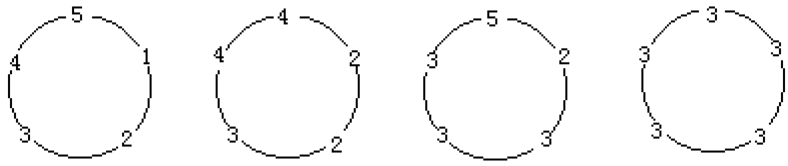
1.能构成 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，12 个角。



2.如右图的立体图形。



3.180 下。
4.2，4，5 环。
提示：［(1＋2＋4＋5＋7＋9)-6］÷2=11，
只有 2＋4＋5=11。
5.每人都是 3 个。
提示：初始及各圈结束后，每人的苹果数如下图：



初始　第1圈后　第2圈后　第3圈后

6.乙喝的是甲的，丙喝的是乙的。

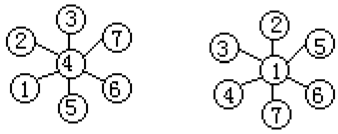
7.先甲、乙、丙合称，设重量为a千克；再甲、乙合称，设为b千克；再甲、丙合称，设为C千克。由此求出：

丙=a-b，乙=a-c，甲=b＋c-a。

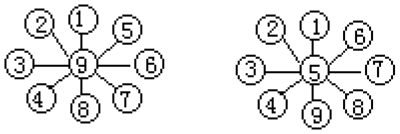
8.(1)18支；(2)9天。

练习16

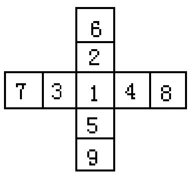
1.



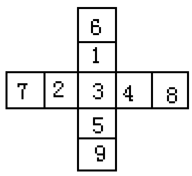
2.



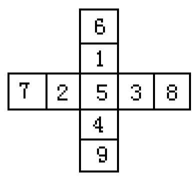
3.



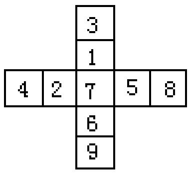
和为23



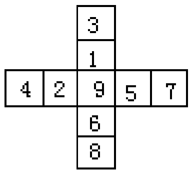
和为24



和为25

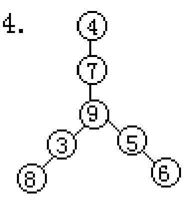


和为26



和为27

4.

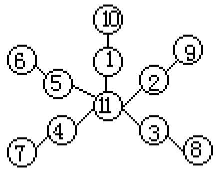


5.提示：中心数是重叠数，并且重叠4次。所以每条直线上的三数之和等于

$$[(1+2+\cdots+11)+重叠数\times4]\div5$$
$$=(66+重叠数\times4)\div5。$$

为使上式能整除，重叠数只能是1，6或11。显然，重叠数越大，每条

直线上的三数之和越大。所以重叠数是 11，每条直线上的三数之和是 22。填法见右图。

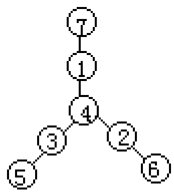


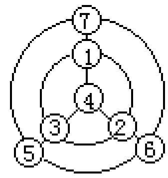
6.解：所有的数都是重叠数，中心数重叠两次，其它数重叠一次。所以三条边及两个圆周上的所有数之和为

$$(1+2+\cdots+7)\times 2+\text{中心数}=56+\text{中心数}。$$

因为每条边及每个圆周上的三数之和都相等，所以这个和应该是 5 的倍数，再由中心数在 1 至 7 之间，所以中心数是 4。每条边及每个圆周上的三数之和等于$(56+4)\div 5=12$。

中心数确定后，其余的数一下还不好直接确定。我们可以试着先从辐射型 3-3 图开始。中心数是 4，每边其余两数之和是 12-4=8，两数之和是 8 的有 1，7；2，6；3，5。于是得到左下图的填法。

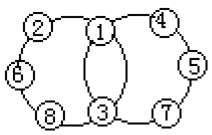




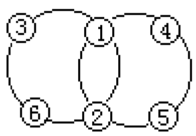
对于左上图，适当调整每条边上除中心数外的两个数的位置，便得到本题的解(见右上图)。

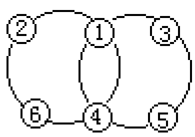
练习 17

1.

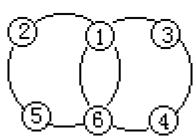


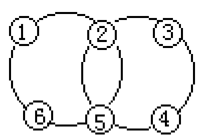
2.

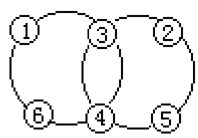




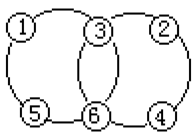
每个圆周的四数之和=12 每个圆周的四数之和=13

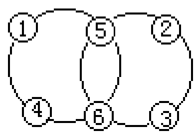






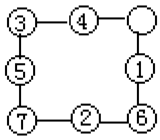
每个圆周的四数之和=14

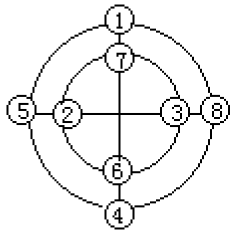




每个圆周的四数之和=15 每个圆周的四数之和=16

3.提示：四个顶点数之和为 15×4－(1＋2＋…＋8)=24，四个顶点数有 3，6，7，8 和 4，5，7，8 两种可能。经试验只有左下图一个解。





4.提示：每条直线或每个圆周上的四个数之和都等于

(1＋2＋…＋8)÷7＝18。

填法见右上图。(填法不唯一)

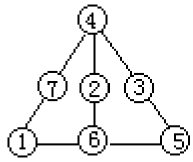
5.提示：顶上的数重叠 2 次，其它数都重叠 1 次。

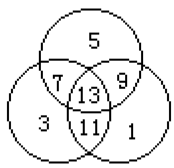
(1＋2＋…＋7)×2＋顶上数=每条线上的和×5，

56＋顶上数=每条线上的和×5。

由上式等号左端是 5 的倍数，推知“顶上数”=4。所以每条线上的三个数之和为

(56＋4)÷5＝12。





经试验填法如右图。(填法不唯一)

6.与例 5 类似(见右图)。

练习 18

1.解：偶数有(200-20)÷2＋1=91(个)，

奇数有(200-20)÷2＝90(个)，偶数之和比奇数之和大 1×90＋20=110。

2.(1)奇数；(2)偶数；(3)奇数；

(4)偶数；(5)奇数。

3.6 个。

提示：卡片 6 可以看成 9，能被 2 整除的有

564，654，594，954，456，546。

4.22。

解：13 为奇数，它必是一奇一偶之和。因为质数中唯一的偶数是 2，所

以这两个质数中的偶数是 2，奇数是 13-2＝11，乘积为 2×11=22。

5.9 个 0。

6.有 9 个能被 5 整除；有 13 个能被 2 整除；有 5 个能被 10 整除。

练习 19

1.不能；能。2.a=0，3，6，9。3.12 个。

4.(1)7；(2)17。5.30。6.990。

7.60 段。

提示：要使剪成尽量多的小段，2 厘米长的应尽量多。因为三种规格都要有，125 为奇数，剪去若干个 2 厘米长的小段后，剩下的长度仍是奇数，所以 3 厘米、5 厘米长的至少要 3 段，125=114＋3＋3＋5=2×57＋3×2＋5×1，所以 2 厘米的剪 57 段，3 厘米的剪 2 段，5 厘米的剪 1 段，此时剪成的小段最多，为

57＋2＋1=60(段)。

练习 20

1.(1)1200；(2)13000；(3)7000；(4)100000。2.(1)10500；(2)2300；(3)22500；(4)11000。3.(1)55；(2)56。

4.(1)152；(2)47；(3)9；(4)53。

5.(1)576；(2)42；(3)400；(4)1000；

(5)10；(6)3180；(7)56。

练习 21

1.(1)6868；(2)14874；(3)256512；(4)92554。2.(1)405；(2)45243；(3)761238；(4)3332。3.(1)2680；(2)2185；(3)9570；(4)11085。4.(1)800；(2)425；(3)3250；

(4)5100；(5)3675；(6)6525。

5.(1)7000；(2)9625；(3)24750；

(4)160000；(5)208125；(6)777000。6.(1)87025；(2)497025。

练习 22

1.5 ×$\boxed{50}$ =2$\boxed{50}$ ； (2)6 × $\boxed{60}$ =3 $\boxed{60}$ 。

2.(1) $\boxed{8}$ ÷ $\boxed{4}$ = $\boxed{6}$ ÷ $\boxed{3}$； (2) $\boxed{9}$ ÷ $\boxed{3}$ > $\boxed{8}$ ÷ $\boxed{4}$。

3.(1)448 ÷ $\boxed{5}\boxed{6}$ = 8 或 448 ÷ $\boxed{6}\boxed{4}$ = $\boxed{7}$；

(2)2822 ÷ $\boxed{3}\boxed{4}$ 或 2822 ÷ $\boxed{8}\boxed{3}$ = $\boxed{3}\boxed{4}$；

(3)13 × $\boxed{3}\boxed{2}$ =4$\boxed{1}$6 。

4.(1)287；(2)17；()65。

5.(1)342 ÷ $\boxed{5}\boxed{7}$ = $\boxed{6}$ ；

(2)$\boxed{3}$ × $\boxed{1}\boxed{8}\boxed{9}$ =567 。

6. $\boxed{4}\div\boxed{2}=\boxed{6}\div\boxed{3}=\boxed{1}\boxed{5}\boxed{8}\div\boxed{7}\boxed{9}$,
$\boxed{6}\div\boxed{2}=\boxed{9}\div\boxed{3}=\boxed{1}\boxed{7}\boxed{4}\div\boxed{5}\boxed{8}$。

提示：从前面两个商入手分析。在要求不重复的条件下，只能有如下三类情形：

商等于 2，此时有 2÷1 与 6÷3，4÷2 与 6÷3，2÷1 与 8÷4，8÷4 与 6÷3 四种情形；

商等于 3，此时有 6÷2 与 9÷3，3÷1 与 6÷2 两种情形；

商等于 4，此时只有 4÷1 与 8÷2 一种情形。

分这七种情形讨论，可得上述两种填法。

练习 23

1.(1)
$$\begin{array}{r} 8\,\boxed{8} \\ \times\ \boxed{1}\boxed{1} \\ \hline \boxed{8}\boxed{8} \\ \boxed{8}\boxed{8} \\ \hline \boxed{9}\boxed{6}\,8 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} 2\,\boxed{1}\,9 \\ \times\ \boxed{7}\boxed{3} \\ \hline 6\,5\,\boxed{7} \\ \boxed{1}\boxed{5}\boxed{3}\boxed{3} \\ \hline \boxed{1}\boxed{5}\,9\,8\,\boxed{7} \end{array}$$

提示：(1) 先确定乘数是 11。

(2) 先确定乘数的十位数是 7，再确定被乘数的十位数是 1，最后确定乘数的个位是 3。

2.(1) 庆=3，祝=9；

(2) 学=2，习=5，好=6。

提示：(2) 由右式①②③知，“好”＞“习”，故“习”＜9。再由②知“学”=2，“习”=4 或 5。若“习”＝4，则由“24 好×4”知①是三位数，不合题意，所以“习”=5。再由①②③知“好”=6。

$$\begin{array}{rl} \text{学习好} & \\ \times\quad \text{学习} & \\ \hline \square\,\text{学}\,\square\square & \cdots\cdots ① \\ \text{习}\,\square\square & \cdots\cdots ② \\ \hline \text{好}\,\square\square\square & \cdots\cdots ③ \end{array}$$

3.(1)
$$\begin{array}{r} 8\,\boxed{8} \\ \boxed{5}\,0\,\big)\overline{4\,\boxed{4}\boxed{0}\,0} \\ 4\,\boxed{0}\boxed{0} \\ \hline 4\,0\,0 \\ 4\,\boxed{0}\boxed{0} \\ \hline 0 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{r} \boxed{9}\boxed{1} \\ \boxed{3}\boxed{9}\,\big)\overline{3\,5\,4\,9} \\ \boxed{3}\boxed{5}\boxed{1} \\ \hline 3\,9 \\ \boxed{3}\boxed{9} \\ \hline 0 \end{array}$$

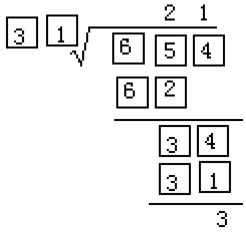
4.提示：由题意和竖式知，

被除数＋除数＝709－21－3＝685，再由竖式知，被除数＝除数×21＋3，所以，

除数×21＋3＋除数＝685，

除数×22＝685－3＝682，

除数＝682÷22＝31。



被除数为 31×21＋3＝654。填法如右式。

练习 24

1.16 岁，48 岁。2.448 千克，112 千克。

3.甲桶 48 千克，乙桶 36 千克。

解：乙桶原有 84÷(3＋1)＋15=36(千克)，

甲桶原有 84-36=48(千克)。

4.甲 33 个，乙 67 个。

解：甲=(100-2-5)÷(2＋1)＋2=33(个)，

乙=100-33=67(个)。

5.55 公顷。

解：170-(290＋170)÷(2＋1＋1)=55(公顷)。

6.故事书 160 本，科技书 480 本，连环画 960 本。

解：以故事书为“1 倍”数，则科技书为它的 3 倍，连环画书为它的 3×2=6(倍)。由和倍公式，得

故事书有 1600÷(1＋3＋6)＝160(本)，

科技书有 160×3=480(本)，

连环画有 160×6＝960(本)。

练习 25

1.381 吨，127 吨。2.123 只，492 只。

3.13 岁。解：(35-9)÷(3-1)＝13(岁)。

4.女工 6 人，男工 18 人。

解：女工(26-14)÷(3-1)=6(人)，

男工 6×3=18(人)。

5.62。解：(50＋34)÷(4-1)＋34＝62。

6.44 米。解：(37-16)÷(4-1)＋37＝44(米)。

7.560，56。

解：大数是小数的 10 倍。

小数=504÷(10-1)=56，

大数=56×10＝560。

练习 26

1.良种小麦 520 千克，非良小麦 364 千克。

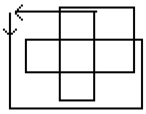
2.苹果 235 千克，梨 151 千克。
3.船速 50 千米/时，水速 20 千米/时。
4.姐姐 40 岁，弟弟 35 岁。
解：年龄差为 20-15＝5(岁)，
姐姐(75＋5)÷2＝40(岁)，
弟弟 40-5=35(岁)。
5.50 粒，34 粒。
解：(28×3＋16)÷2＝50(粒)，50-16＝34(粒)。
6.红红 36 本，兰兰 25 本。
解： 原来红红比兰兰多 5×2＋3-2＝11(本)，
原来红红有(61＋11)÷2＝36(本)，
兰兰有 61-36=25(本)。
7.4600 吨。
解：乙仓库比丙仓库少 300＋100=400(吨)。乙仓库有
(3000-400)÷2=1300(吨)，
三个仓库共有(1300＋300)＋3000＝4600(吨)。

练习 27

1.(1)2 倍；(2)3 倍。
2.(1)120 厘米^2；(2)60 厘米^2。
3.1400 米^2，60 米。
解： 60×50-40×40=1400(米^2)，
(60＋50)×2-40×4=6(米)。
4.24 米^2，20 米。
解：144÷6=24(米^2)。因为 144=12×12，所以正方形边长是 12 米。一个长方形的周长=(12÷2＋12÷3)×2=20(米)。
5.224 厘米^2；672 厘米^2。
提示：题图含有 14 个边长为 1 小棍的正方形；最大图形为长 8 小棍、宽 7 小棍的长方形。
6.56 厘米。
解：每个小方格的面积=52÷13=4=2×2(厘米^2)，所以每个小方格的边长为 2 厘米，题图周长为 56 厘米。
7.176 厘米^2。
解：周长由 24 个小正方形的边长组成，小正方形边长为 96÷24=4(厘米)。所以图形面积为
4×4×11=176(厘米^2)。

练习 28

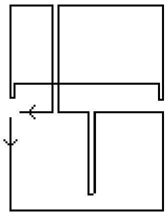
1.(1)(3)是一笔画，(2)是两笔画。
2.能，因为是一笔画。
3.见右图，走法不唯一。

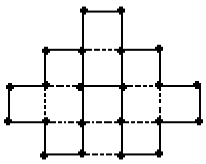


4.能。例如下图的走法。

练习 29

1.50 千米，走法见左下图。



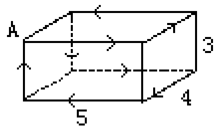


邮局

2.见右上图。

3.最多爬行 34 厘米。

提示：8 个点都是奇点，故至少要少爬 4 条棱。少爬 3 厘米的棱和 4 厘米的棱各两条是最合理的(见右图)。



练习 30

1.43 人。解：35＋24-16=43(人)。

2.21 人。解：10＋18-7=21(人)。

3.9 人。解：45-(26＋22-12)=9(人)。

4.91 米^2。解：56＋65-30=91(米^2)。

5.47 个。

解： 100÷3=33……1，100÷5=20，
100÷(3×5)＝6……10。
33＋20-6＝47。

6.33 个。

解： 100÷2=50，100÷3=33……1，
100÷6＝16……4。

$100-(50+33-16)=33$。