学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中小学生课堂故事博览

数学中的运动哲学

——函数的故事

BOOK

内部资料 非卖品

数学中的运动哲学
——函数的故事

永恒运动着的世界

天地之间的万物都在时间长河中流淌着，变化着。从过去变化到现在，又从现在变化到将来。静止是暂时的，运动却是永恒！

大概再没有什么能比闪烁在天空中的星星，更能引起远古人的遐想。他们想象在天庭上有一个如同人世间繁华的街市，那些本身发着亮光的星宿一直忠诚地守护在天宫的特定位置，永恒不动的。后来，这些星星便区别于月亮和行星，称之为恒星。其实，恒星的称呼是不确切的，只是由于它离我们太远了，以至于它们之间的任何运动，都慢得使人一辈子感觉不出来！

北斗七星，是北天最为明显的星座之一。在北天的夜空是很容易辨认的。

大概所有的人一辈子见到的北斗七星，总是如同上页图那般形状。人的生命太短暂了！几十年的时光，对于天文数字般的岁月，是几乎可以忽略不计的！然而有幸的是：现代科学的进展，使我们有可能从容地追溯过去和精确地预测将来。左图的（1）、（2）、（3）是经过测算，人类在十万年前、现在和十万年后应该看到和可以看到的北斗七星，它们的形状是大不一样的！

不仅天在动，而且地也在动。火山的喷发，地层的断裂，冰川的推移，泥石的奔流，这一切都还只是局部的现象。更令人不可思议的是；我们脚下站立着的大地，也像水面上的船只那样，在地幔上缓慢地漂移着！

由此可见，这个世界的一切量，都跟随着时间的变化而变化。时间是最原始的自行变化的量，其他量则是因变量。一般地说，如果在某一变化过程中有两个变量 X，y，对于变量 X 在研究范围内的每一个确定的值，变量 y 都有唯一确定的值和它对应，那么变量 X 就称为自变量，而变量 y 则称为因变量，或变量 X 的函数，记为：

$$y=f(x)$$

函数一语，起用于公元 1692 年，最早见自德国数学家莱布尼兹的著作。记号 f（x）则是由瑞士数学家欧拉于公元 1724 年首次使用的。上面我们所讲的函数定义，属于德国数学家黎曼（Riemann，1826～1866）。我国引进函数概念，始于 1859 年，首见于清代数学家李善兰（1811～1882）的译作。

一个量如果在所研究的问题中保持同一确定的数值，这样的量我们称为常量。常量并不是绝对的。如果某一变量在局部时空中，其变化是那样地微不足道，那么这样的量，在这一时空中便可以看成常量。例如读者所熟知的“三角形内角和为 180°”的定理，那只是在平面上才成立的。但绝对平的面是不存在的。即使是水平面，由于地心引力的关系，也是呈球面弯曲的。然而，这丝毫没有影响广大读者，去掌握和应用平几的这条定理！又如北斗七星，它前十万年与后十万年的位置是大不相同的。但在近几个世纪内，我们完全可以把它看成是恒定的，甚至可以利用它来精确判定其他星体的位置！

谈“守株待兔”

《守株待兔》这则寓言，出自先秦著作《韩非子》。家喻户晓，至今已经流传了二千二百多年。

两千年来，人们一直认为“待兔”不得，罪在“守株”！其实，抱怨“守株”是没有道理的。问题的关键在于兔子的运动规律。如果通往大树的路是兔子所必经的，那么‘守株”又将何妨？

然而世界是一个不断运动的世界。兔子的活动，在时空的长河中，划出一条千奇百怪的轨迹，希望这条轨迹能与树木在时空中的轨线再次相交，无疑是极为渺茫的，因此，这正是这位农人悲剧之所在！

下面一则更为精妙的例子，可以使人们生动地看到问题的症结。

意大利文艺复兴时期的艺术大师列奥纳多·达·芬奇（Le- onardo da Vinci， 1452～1519）曾提出过一个饶有趣味的“饿狼扑兔”问题：

一只兔子正在洞穴（C）南面 60 码的地方（o）觅食，一只饿狼此刻正在兔子正东 100 码的地方（A）游荡。兔子回首间猛然遇见了饿狼贪婪的目光，预感大难临头，于是急忙向自己的洞穴奔去。说时迟，那时快，恶狼见即将到口的美食就要失落，立即以一倍于兔于的速度紧盯着兔子追去。于是，狼与兔之间，展开了一场生与死的惊心动魄的追逐。

问：兔子能否逃脱厄运？

有人作过以下一番计算：

以 0 为原点，OA，OC 分别为 X，Y 轴，以 1 码为单位长。则 OA＝100，OC＝60。根据勾股定理，在 Rt△AOC 中

$$AC=\sqrt{OA^2+CO^2}=\sqrt{100^2+60^2}=116.6$$

这意味着；倘若饿狼沿 AC 方向直奔兔子洞穴，那么由于兔子速度只有狼速度的一半，当饿狼到达兔穴洞口时，兔子只跑了 116．6＋ 2＝ 58．3 码距离，离洞口尚差 1．7 码。这时先行到达洞口的饿狼，完全可以守在洞口，“坐等”美餐的到来！

以上计算似乎天衣无缝，结论只能是兔子厄运难逃。可实际上这是错误的！饿狼不可能未卜先知地直奔兔穴洞口去“坐守”，它的策略只能是死死盯住运动中的兔子，这样它本身也就运动成一条曲线，这条曲线可以用解析的方法推导出来：

$$y=\frac{1}{30}x^{\frac{3}{2}}-10x^{\frac{1}{2}}+\frac{200}{3}$$

当$x=0$时，代入上式得$y=66\frac{2}{3}$

这意味着，如若北边没有兔子洞，那么当兔子跑到离原点$66\frac{2}{3}$码的B点时，恰被饿狼逮住。然而有幸的是，兔子洞离原点仅有 60 码，此时此刻兔子早已安然进洞了！

随着“饿狼扑兔”谜底的解开，“守株待兔”问题似乎明朗了。不料，后来又有人提出异议，对《守株待兔》故事的真实性表示怀疑，机灵的兔子怎么会自己撞到偌大的树桩上去？它那两只精灵的大眼睛干什么去了？！

说得不无道理！不过，要说清这一点，还得从眼睛的功能谈起。

眼睛的视觉功能是有趣的：一只眼睛能够看清周围的物体，但却无法准确判断眼睛与物体之间的距离。下面的实验可以证实这一点。

两只手各拿一支削尖了的铅笔，然后，闭上一只眼睛，让两支笔的笔尖

从远到近，对准靠扰。这时，你令发现一种奇怪的现象：任你怎么集中注意力，两支笔尖总是交错而过！然而，如若你睁着双眼，要想对准笔尖，那是很容易做到的。

由此可见：用两只眼看，能准确判断物体的位置，而用一只眼看却不能！那么，为什么用两只眼睛便能判定物体的准确位置呢？

原来，同一物体在人的两眼中看出来的图象是不一样的！左图是一个隧道分别在两眼中的图象，它们之间的不同是很明显的。为了证明这两侧图形确是由你左右两眼分别看出的，你可以把图 a 摆在你的面前，然后两眼凝视图中央空隙的地方，如此集中精力几秒钟，并全神贯注于一种要看清图后更远的意念。这样，无须很久，你的眼前便会出现一种神奇的景象：图中左右两侧的形象逐渐靠近，并最终融合在一起，变成了一幅壮观的立体隧道图形！

现在我们回到“ 守株待兔 ”这个问题上来。

仔细观察一下便会发现，人眼与兔眼的位置是不相同的：人的两眼长在前方，相距很近，而兔的两眼却长在头的两侧。又根据测定，兔子每只眼睛可见视野为 189°30′，而人的每只眼睛可见视野约 166°。不过，由于人的两眼长在前面，因此两眼同时能看到的视野有 124°左右。在这一区域内的物体，人眼能精确判定其位置。而兔眼虽说能看到周围的任何东西但两眼重合视野只有 19°，其中前方 10°，后方 9°。因此兔子只有在很小的视区内才能准确判断物体的远近！

由图 b 还能看出；纵然兔子对来自四方的威胁都能敏锐地感觉，但对鼻子底下的东西（图中“ ？ ”号区域），却完全看不到！况且在惊慌失措的奔命中，说不定早已昏了头脑，撞树的事情也就难保不会发生。

对闭眼打转问题的探讨

公元 1896 年,挪威生理学家古德贝尔对闭眼打转的问题进行了深入的研究。他收集了大量事例后分析说：这一切都是由于人自身两条腿在作怪！长年累月养成的习惯，使每个人一只脚伸出的步子，要比另一只脚伸出的步子长一段微不足道的距离。而正是这一段很小的步差 X，导致了这个人走出一个半径为 y 的大圈子！

现在我们来研究一下 x 与 y 之间的函数关系：

假定某个两脚踏线间相隔为 d。很明显，当人在打圈子时，两只脚实际上走出了两个半径相差为 d 的同心圆。设该人平均步长为 1。那么，一方面这个人外脚比内脚多走路程

$$2\pi\left(y+\frac{d}{2}\right)-2\pi\left(y-\frac{d}{2}\right)=2\pi d$$

另一方面，这段路程又等于这个人走一圈的步数与步差的乘积，即：

$$2\pi d=\left(\frac{2\pi y}{21}\right)\cdot x$$

化简得 $$y=\frac{2dl}{x}$$

对一般的人，d＝0.1 米，1＝0.7 米，代入得（单位米）

$$y=\frac{0.14}{x}$$

这就是所求的迷路人打圈子的半径公式。今设迷路人两脚差为 0.1 毫米，仅此微小的差异，就足以使他在大约三公里的范围内绕圈子！

上述公式中变量 x，y 之间的关系，在数学上称为反比例函数关系。所谓反比例函数，就是形如$y=\frac{k}{x}$，（k为常量）这样的函数。它的图象是两条弯曲的曲线，数学上称为等边双曲线，在工业、国防、科技等领域都很有用场。

下面我们看一个有趣的游戏：

在世界著名的水都威尼斯，有个马尔克广场。广场的一端有一座宽 82 米的雄伟教堂。教堂的前面是一片开阔地。这片开阔地经常吸引着四方游人到这里做一种奇特的游戏：把眼睛蒙上，然后从广场的一端向另一端教堂走去，看谁能到达教堂的正前面！

奇怪的是，尽管这段距离只有 175 米，但却没有一名游客能幸运地做到这一点！全都走成了弧线，或左或右，偏斜到了一边！

为什么是这样呢？我们就先来计算一下，当人们闭起眼睛，从广场一端中央的 M 点抵达教堂 CD 的最小的弧半径是多少。如下图，注意到矩形 ABCD 边 BC=175（米），AM＝MB= 41（米）。那么上述问题，无疑相当于几何中的以下命题：已知 BC 与 MB 求 $\overset{\frown}{MC}$ 的半径 R 的大小。

$\because BC^2=R^2-(R-MB)^2=MB(2R-MB)$

$\therefore 175^2=41\times(2R-41)$

R=394 这就是说，游人要想成功，他所走的弧线半径必须不小于 394 米。那么就让我们再计算一下，要达到上述要求，游人的两脚的步差需要什么限制。根据公式：

$$y=\frac{0.14}{x}$$

$$\because y=R^1\geq 394$$

$$\therefore x\leq\frac{0.14}{394}=0.00035\text{（米）}$$

这表明游人的两只脚的步差必须小于 0.35 毫米，否则是不可能成功的！然而，在闭上眼睛的前提下，使两脚的步差这么小一般人是办不到的，这便是在游戏中为什么没有人能被蒙上眼睛走到教堂前面的道理。

“钟表定向”的科学原理

对于在沙漠，草原或雪野上迷了路的人，识别方向无疑是至关重要的。

我们设想一位迷失了方向的人，面临着一种艰难的境地，他在旅行中赖以辨认方向的罗盘，不幸丢失了！我们试图帮助他从这一困境中解脱出来。

倘若故事发生在晴天的夜晚，那是不用愁的，因为北天的那颗极星，可以准确地为你指示方向。

倘若故事发生在阴天，情况似乎比较棘手！不过，只要细心观察周围，还是有希望找到一些辨别方向的标志。如北半球树木的年轮一般是偏心的，靠北方向（N）年轮较密，而靠南方向（S）年轮较疏，这是由于树木向阳一

面生长较快的缘故。又如，有时在荒野中我们会看到一些残垣断壁、破寺败庙，按中国的习俗，这些建筑物一般是座北朝南的。

假如我们的主人公在一望无际的沙漠中迷失了方向。周围当然不可能奇迹般地出现庙宇和树桩。当空的烈日，正使他陷入一种茫然和绝望！此时，如果谁能告诉他，他手上戴着的手表，就是一只标准的“指北针”，那么他一定会为此而欣喜若狂！

也许你会疑虑重重，然而事实确是这样！钟表定向的方法是：把手表放平，以时针的时数（一天以 24 小时计）一半的位置对向太阳，则表面上“12 时”指的方向便是北方。例如表面上指的时间若是早上 8 时零 5 分，其时数一半的位置大约是“4.04 时”，以这个位置对向太阳，则“12 时”所指的方向即为北方。应当注意的是，对向必须准确。为了提高精度，我们可以用一根火柴立在“时数一半”的地方，让它的影子通过表面中心，这表明我们已经对准了太阳的方向！

我想你一定很想知道用钟表定向的科学道理，这是不难的！不过要彻底弄清它，还得先了解地球的自转。

众所周知，白天的出现和黑夜的降临，是由于地球的自转。然而，历史上有很长一段时间，人们对此半信半疑。迟至公元 1805 年，一位相当聪明的法兰西科学院院士梅西尔还这样写过：“天文学家要使我相信，我像一只烧鸡穿在铁棍上那样旋转，那真是用心枉然！”不过，这位学者的偏见，并没能阻止地球的旋转，从那时起地球又一如即往地转动了六万七千转！

公元 1851 年，法国科学家傅科在著名的巴黎国葬院，作了一个直接证明地球旋转的惊人表演：让一个大钟摆在地面的沙盘上不断划出纹道（左图）。虽说这个摆同其他自由摆一样，不停地在同一方向、同一平面上来回摆动。但地球及国葬院的地板，都在它底下极其缓慢地转动着，因此沙盘上划出的纹道，也一点点一点点由东向西缓慢而均匀地改变了方向。傅科摆的摆面旋转一周所用的时间与当地的纬度有关：在极点需要 24 小时时；在巴黎需 31 时 47 分；我国北京天文馆的傅科摆，摆面旋转一周约需 37 时 15 分。傅科的实验使我们亲眼见到了地球的均匀自转。地球自转一周，在人们的视觉假象中，太阳好像绕地球旋转了 360°。与此同时，手表面上的时针走了 24 小时，绕表心旋转了 720°。由于以上两者的转动都是均匀的，从而视觉中太阳绕地球旋转的角度 y，与表面上时针旋转的角度 x 的一半，应当是同步的。这表明，当选定各自计算的起始角后，应当有

$$y = \frac{1}{2}x + b$$

这是一个一次函数，它的图象是一条直线。上式右端x的系数$k = \frac{1}{2}$称为直线的斜率；b 称为截距，恰等于直线截 y 轴的有向距离。

将上述一次函数式变形得：

$y - \frac{1}{2}x = b$（常量）

这意味着，视觉中太阳旋转的角与时针旋转的半角之间，相差是一个常量。这一变量中的常量说明，将“时数的一半”对向太阳时，手表面的位置是恒定的，不因时间的推移和太阳的升落而变化。当早晨 6 点太阳升起在东方时，我们用“6”的一半“3”去对准东方，那么“12 时”所指的方向自然

就是北方了！而这一方向，在太阳与时针同时运动中，保持恒定。这就是“钟表定向”的科学原理。

揭示星期几的奥秘

公元 321 年 3 月 7 日，古罗马皇帝君士坦丁，正式宣布采用“星期制”，规定每一星期为七天，第一天为星期日，尔后星期一、星期二直至星期六，尔后再回到星期日，如此永远循环下去！君士坦丁大帝还规定，宣布的那天日子为星期一。

一星期为什么定为七天？这大约是出自月相变化的缘故。天空中再没有别的天象变化得如此明显，每隔七天便一改旧貌！另外，“七”这个数，恰与古代人已经知道的日、月、金、木、水、火、土七星的数目巧合，因此在古代神话中就用一颗星作为一日的保护神，“星期”的名称也因之而起。

我想读者一定很想知道历史上的某一天究竟是星期几的奥秘！为了揭开这个奥秘，我们先从闰年的设置讲起。

我们知道：一个回归年不是恰好 365 日，而是 365 日 5 小时 48 分 46 秒，或 365.2422 日。为了防止这多出的 0.2422 日积累起来，造成新年逐渐往后推移。因此我们每隔 4 年时间便设置一个闰年，这一年的二月从普通的 28 天改为 29 天。这样，闰年便有 366 天。不过，这样补来也不刚好，每百年差不多又多补了一天。因此又规定，遇到年数为“百年”的不设闰，扣它回来！这就是常说的“百年 24 闰”。但是，百年扣一天闰还是不刚好，又需要每四百年再补回来一天。因此又规定，公元年数为 400 倍数者设闰。就这么补来扣去，终于补得差不多刚好了！例如，1976、1988 这些年数被 4 整除的年份为闰年；而 1900、2100 这些年则不设闰；2000 年的年数恰能被 400 整除，又要设闰，如此等等。

闰年的设置，无疑增加了我们对星期几推算的难度。为了揭示关于星期几的奥秘，我们还要用到一个简单的数学工具——高斯函数。

公元 1800 年，德国数学家高斯（Gauss，1777～1855）在研究圆内整点问题时，引进了一个函数

$$y = [x]$$

后人称之为高斯函数。

[x]是表示数 X 的整数部分，如：

$$[\pi]=3$$
$$[-4.75]=-5$$
$$[\frac{\sqrt{5}-1}{2}]=0$$
$$[1988]=1988$$

高斯函数的图象如左图，像台阶般，不连续！

利用高斯函数，我们可以根据设闰的规律，推算出在公元 X 年第 y 天是星期几。这里变量 X 是公元的年数；变量 y 是从这一年的元旦，算到这一天为止（包含这一天）的天数。历法家已经为我们找到了这样的公式：

$$s = x-1+\left[\frac{x-1}{4}\right]-\left[\frac{x-1}{100}\right]+\left[\frac{x-1}{400}\right]+y$$

按上式求出 S 后，除以 7，如果恰能除尽，则这一天为星期天；否则余数为几，则为星期几！

例如，君士坦丁大帝宣布星期制开始的第一天为公元 321 年 3 月 7 日。容易算得：

$$\begin{cases} x-1=320 \\ y=66 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s &= 320+\left[\frac{320}{4}\right]-\left[\frac{320}{100}\right]+\left[\frac{320}{400}\right]+66 \\ &= 320+80-3+0+66 \\ &= 463 \equiv 1 \pmod 7 \end{aligned}$$

最后一个式子的符号表示 463 除以 7 余 1。也就是说，这一天为星期一。这是可以预料到的，因为当初就是这么规定的！

又如，我们共和国成立于 1949 年 10 月 1 日：

$$\begin{cases} x-1=1948 \\ y=274 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s &= 1948+\left[\frac{1948}{4}\right]-\left[\frac{1948}{100}\right]+\left[\frac{1948}{400}\right]+274 \\ &= 1948+487-19+4+274 \\ &= 2694 \equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

原来，这一普天同庆的日子为星期六。

公元 2000 年 1 月 1 日，人类跨进了高度文明的 21 世纪，那么这一天是星期几呢？

$$\begin{cases} x-1=1999 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} s &= 1999+\left[\frac{1999}{4}\right]-\left[\frac{1999}{100}\right]+\left[\frac{1999}{400}\right]+1 \\ &= 1999+499-19+4+1 \\ &= 2484 \equiv 6 \pmod 7 \end{aligned}$$

计算表明：这一天也是星期六！

指数函数的威力

美国著名的科学家，避雷针的发明人，本杰明·富兰克林（Franklin·B，1706～1790）。一生为科学和民主革命而工作，他死后留下的财产只有一千英镑。令人惊讶的是，他竟留下了一份分配几百万英镑财产的遗嘱！这份有趣的遗嘱是这样写的：

"……一千英镑赠给波士顿的居民，如果他们接受了这一千英镑，那么这笔钱应该托付给一些挑选出来的公民，他们得把这钱按每年 5%的利率借给一些年轻的手工业者去生息。这款子过了 100 年增加到 131000 英镑。我希望，那时候用 100000 英镑来建立一所公共建筑物，剩下的 31000 英镑拿去继续生息 100 年。在第二个 100 年末了，这笔款增加到 4061000 英镑，其中 1061000 英镑还是由波士顿的居民来支配，而其余的 3000000 英镑让马萨诸州的公众来管理。过此之后，我可不敢多作主张了！"

富兰克林，留下区区的 1000 英镑，竟立了百万富翁般的遗嘱，莫非昏了头脑？！让我们按照富兰克林非凡的设想实际计算一下。请看下表：

从而 $$b_n = \frac{A_n}{A_0} = (1+5\%)^n$$

上式显然是函数$y=a^x$当$a=1.05$时的特例。在数学上形如$y=a^x$的函数称为指数函数，其中 a 约定为大于 0 且不等于 1 的常量。

下图画出了指数函数$y=2^x$，$y=10^x$，$y=(\frac{1}{2})^x$的图象。从图象容易看出：当底 a 大于 1 时，指数函数是递增的，而且越增越快；反之，当底 a 小于 1 时，指数函数递减。让我们观察故事中 $b_n=1.05^n$ 值的变化，不难算得：

当 $x=1$时，$b_1=1.05$；

当 $x=2$时，$b_2=1.103$；

当 $x=3$时，$b_3=1.158$；

…… ……

当 $x=100$时，$b_{100}=131.501$。

这意味着，上面的故事中，在头一个 100 年末富兰克林的财产应当增加到

$A_{100}=1000\times1.05^{100}=131501$（英镑）

这比富兰克林遗嘱中写的还多出 501 英镑哩！在第二个 100 年末，他拥有的财产就更多了

$A'_{100}=131501\times1.05^{100}=4142421$（英镑）

可见富兰克林的遗嘱在科学上是站得住脚的！

由此可见，指数函数的威力。

历史上因此而吃了亏的，也不乏其人，大名鼎鼎的拿破仑就是其中的一位。

公元 1797 年，当拿破仑参观国立卢森堡小学的时候，赠送了一束价值三个金路易的玫瑰花，并许诺说，只要法兰西共和国存在一天，他将每年送一束价值相等的玫瑰花，以作两国友谊的象征。此后，由于火与剑的征战，拿破仑忘却了这一诺言！当时间的长河向前推进了近一个世纪之后，公元 1894 年，卢森堡王国郑重向法兰西共和国提出了"玫瑰花悬案"要求法国政府在

拿破仑的声誉和 1375596 法郎的债款中，二者选取其一。这笔高达百万法郎的巨款，就是三个金路易的本金，以 5%的年利率，在 97 年的指数效应下的产物。这一历史公案使法国政府陷入极为难堪的局面，因为只要法兰西共和国继续存在，此案将永无了结的一天！

不过，指数效应更多是积极的方面。

指数函数不仅在数学、物理、天文上应用极广，而且在其他自然科学甚至社会科学上也大有用场！以指数规律变化的自然现象和社会现象，有一种极为重要的特性：即量 A 的变化量△A，总是与量 A 本身及其变化时间△t 成正比

$$\triangle A \propto A\triangle t$$

事实上，令 $A=f(t)=a^t$，则

$$\triangle A=a^{t+\triangle t}-a^t=a^t(a^{\triangle t}-1)$$

$$=A\triangle t\left(\frac{a^{\triangle t}-1}{\triangle t}\right)$$

数学上可以证明，上式右端括号内的量，当变化时间很短时，趋向一个极限 K（实际上等于 lna），从而证得：

$$\triangle A\approx KA\triangle t$$

反过来，数学家也已经证明：如果量 A 的变化量与它本身及变化时间成正比（比例系数为 K），那么此时必有

$$A=A_0e^{kt}$$

这里 A_0 是变量 A 的初始值（t＝0），数 e＝2.718……则是一个与圆周率π一样重要的数学常量。

对数的发现过程

16 世纪的欧洲随着资本主义的迅速发展，科学和技术也一改中世纪停滞不前的局面。天文、航海、测绘、造船等行业不断向数学提出新的课题。有一个集中暴露出来令人头痛的问题是：在星体的轨道计算，船只的位置确定，大地的形貌测绘，船舶的结构设计等一系列课题中，人们所遇的数据越来越宠杂，所需的计算越来越繁难！无数的乘除、乘方、开方和其他运算，耗费了科学家们大量的极为宝贵的时间和精力。

面对这种局面，数学家们终于出来急其所难，各种门类的表格：平方表、立方表、平方根表、圆面积表等等，便应运而生，人类就这么在表格的海洋中茫然地行驶了半个多世纪，直至 16 世纪 40 年代，才迎来了希望的曙光。

公元 1544 年，著名的哥尼斯堡大学教授，德国数学家斯蒂费尔（Stiefel，1487～1567），在简化大数计算方面迈出了重要的一步。在《普通算术》一书中，斯蒂费尔宣布自己发现了一种有关整数的奇妙性质，他认为：“为此，人们甚至可以写出整本整本的书……”

那么，斯蒂费尔究竟发现了什么呢？原来他如同下表比较了两种数列：等比数列和等差数列。

斯蒂费尔把等比数列的各数称为“原数”，而把等差数列的对应数称为“代表者”（即后来的“指数”）。他惊奇地发现：等比数列中的两数相乘，其乘积的“代表者”，刚好等于等差数列中相应两个“代表者”之和；而等

比数列中的两数相除，其商的“代表者”，也恰等于等差数列中两个“代表者”之差。斯蒂费得出的结论是：可以通过如同上面那样的比较，把乘除运算化为加减运算！

可以说斯蒂费尔已经走到了一个重大发现的边缘。因为他所讲的“代表者”y，实际上就是现在以 2 为底 x 的对数

$$y=\log_2 x$$

而使斯蒂费尔惊喜万分的整数性质就是：

$$\log_2（M\cdot N） =\log_2 M+\log_2 N$$

$$\log_2（\frac{M}{N}） =\log_2 M-\log_2 N$$

历史常常惊人地重复着这样的人和事：当发现已经降临到眼皮底下，只缘一念之差，却被轻轻错过！斯蒂费尔大约就是其中令人惋惜的一个。他困惑于自己的表格为什么可以算出 16×256＝4096，却算不出更简单的 16×250=4000。他终于没能看出在离散中隐含着的连续，而是感叹于自己研究问题的“狭窄”。从而在伟大的发现面前，把脚缩了回去！

正当斯蒂费尔感慨于自己智穷力竭之际，在苏格兰的爱丁堡诞生了一位杰出人物，此人就是对数的发明人纳白尔（Napier， 1550～1617）。

纳白尔出身于贵族家庭，天资聪慧，才思敏捷，从小又受家庭的良好熏陶，十三岁便进入了圣安德鲁斯大学的一个学院学习。十六岁出国留学，学识因之大进。公元 1571 年，纳白尔抱志回国。先是从事于天文、机械和数学的研究，并深为复杂的计算所苦恼。公元 1590 年，纳白尔改弦更张，潜心于简化计算的工作。他匠心独运，终于在斯蒂费尔的足迹上，向前迈出了具有划时代意义的一步！

说来也算简单！纳白尔只不过是让任何数都找到了与它对应的“代表者”。这相当于在斯蒂费尔离散的表中，密麻麻地插进了许多的中间值，使人看去宛如无数的纬线穿行于经线之中，显示出布匹般的连续！

公元 1594 年，纳白尔开始精心编制可供实用的对数表。在经历了 7300 个日日夜夜之后，一本厚达 200 页的八位对数表终于诞生了！公元 1614 年，纳白尔发表了《关于奇妙的对数法则的说明》一书，书中论述了对数的性质，给出了有关对数表的使用规则和实例。纳白尔终于用自己 20 年的计算，换来了人世间无数寿命的延续！法国大数学家拉普拉斯说得好：“如果一个人的生命是拿他一生中的工作多少来衡量，那么对数的发明，等于延长了人类的寿命！”

不幸的是，纳白尔的工作虽然延长了他人的寿命，却没能使自己的生命得以延长。就在纳白尔著作发表后的第三个年头，公元 1617 年，这位永受后人缅怀的杰出数学家，终因劳累过度，不幸谢世。

纳白尔的对数发明颇具传奇性。当时的欧洲，代数学仍处于十分落后的状态，甚至连指数概念尚未建立。在这种情况下先提出对数概念，不能不说是一种奇迹！纳白尔的对数是从一个物理上的有趣例子引入的：两个质点 A、B 有相同的初速度 v。质点 A 在线段 OR 上作变速运动，其速度与它到 R 的距离成正比；质点 B 作匀速直线运动。今设 AR＝ X， O′B＝y，试求 X，y 之间的关系？

纳白尔经过仔细分析后发现；质点 A 的瞬时末速度是一个无穷递缩等比数列

$$v，v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1}，v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2}，v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{3}，\cdots v\left(1-\frac{1}{n}\right)^{i}，\cdots$$

从而量 x 在变化时也可以看成是一个无穷递缩等比数列；而 Y 在变化时显然可以看成是一个无穷递增的等差数列 0，v，2v，3v，4v，…，tv，…这样一来，在变量 y 与变量 X 之间便建立起了函数关系。纳白尔把 y 称为 X 的对数，用现在的式子来写就是：

$$y=\log_{\frac{1}{e}}x=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

这里符号“ ln ”表示“ 自然对数 ”，对数的底就是上一节故事中讲的 e。这与今天课本上讲的“ 常用对数 ”有所不同，后者是以 10 为底的。

在数学上，对数函数的一般表示式为

$$y=\log_{a}x$$

改写成指数形式便有

$x=a^{y}$

在上式中，如果把变量 X 看成变量 y 的函数，并改用常用的函数和自变量符号，则有

$y=a^{x}$

这样得到的函数，我们称为原函数的反函数。两个互为反函数的图象，在同一坐标系里，关于第Ⅰ、Ⅲ象限的角平分线为轴对称。反函数图象的这一特性，在上图中可以看得很明显。

对数是十七世纪人类最重大的发现之一。在数学史上，纳白尔的对数、笛卡儿的解析几何及牛顿莱布尼兹的微积分三者齐名，被誉为“ 历史上最重要的数学方法 ”！

对数于 1653 年传入我国。公元 1664 年，我国学者薛风祚（？～1680）编译了《天学会通》丛书。在国内，这是第一部介绍对数和对数表的著作。

不朽的功绩

斯蒂费尔的“ 指数 ”思想，实际上早在 2200 年前就已有过！公元前 3 世纪，古希腊数学家阿基米德（Archimedes，公元前 287～前 212），在他名著《计砂法》中，就曾研究过以下两个数列：

1， 10， 10^{2}， 10^{3}，10^{4}， 10^{5}，……；

0，1， 2， 3， 4， 5，……。

并发现了幂的运算与指数之间的联系。然而，在阿基米德死后，因后继无人而湮灭了！

在斯蒂费尔发现对数后不到 60 年，在英吉利海峡两边的不同国度里，却几乎同时出现两位新秀：一位是纳白尔，另一位是聪明绝顶的瑞士钟表匠标尔格。后者是著名天文学家开普勒的助手。出于天文计算的需要，他于公元 1611 年，制成了世界上第一张以 e 为底的四位对数表。

不过，纳白尔的工作是无与伦比的。他的非凡成果，惊动了一位住在伦敦的天文数学家，牛津大学教授布里格斯（Briggs，1561～1631）。布里格斯几乎陶醉于纳白尔奇特而精妙的对数理论，渴望能亲睹这位创造者的容颜！

公元 1616 年初夏，布里格斯去信给纳白尔，希望能有机会亲自拜访他。纳白尔久仰布里格斯大名，立即回信，欣然应允，并订下了相会的日期。不久，布里格斯便登上了前往爱丁堡的旅途。

伦敦与爱丁堡之间路遥千里，而当时最快的交通工具只有马车，虽然日夜兼程，也需要数天时间。而两位科学家却早已心驰神往，大家都极为盼望着这次会面时刻的到来！

俗话说得好：“佳期难得，好事多磨”，偏偏在这节骨眼上，布里格斯的马车中途因故抛锚。布里格斯心急如焚，却又无可奈何！此后虽则加速行程，但终因此番耽搁，以致没能如期抵达爱丁堡。

话说另一头，在约定的日子里，纳白尔左等右等，终不见布里格斯的身影，焦虑和不安使这位年近古稀的老人，似乎显得更加苍老！时间过去了一天，正当纳白尔望眼欲穿之际，突然门外响起了阵阵铃声。纳白尔喜出望外，急忙向大门奔去……。当风尘仆仆的布里格斯出现在纳白尔面前时，两位初次见面的数学家，像老朋友般紧紧地握住对方的双手，嘴唇颤动着，却久久说不出话来！

在很长一段时间之后，布里格斯终于先开了口：“此番我乐于奔命，唯一的目的是想见到您本人，并想知道，是什么样的天才使您第一次发现了这个对天文学妙不可言的方法。”

这次会面使两位数学家结成了莫逆之交。布里格斯根据自己在牛津大学的讲学经验，建议纳白尔把对数的底数改为 10，主张

$$\log_{10}l=\lg l=0$$

$$\log_{10}10=\lg 10=1$$

这样，一个数 N 的对数，便可明确地分成两个部分：一部分是对数首数，只与数 N 的整数位数有关；另一部分是对数尾数，则由数 N 的有效数字确定。这就是说，若

$$\mathrm{lo}N=\alpha．××××$$

$$则\begin{cases}\alpha=[\lg N]\\ 0．××××=\lg N-[\lg N]\end{cases}$$

有道是：“英雄所见略同。”纳白尔对布里格斯的建议大为赞赏，认为这种以 10 为底的对数，对于通常的计算更为实用！

就这样，纳白尔又以全部的精力投入了新对数表的制作，直至不幸逝世。

纳白尔的未竟事业，由布里格斯继承了下去。经历了艰难的八年之后，公元 1624 年，世界上第一本 14 位的常用对数表终于问世。不过，布里格斯的对数表实际上并不完全，只有 1～2000 及 90000～100000 各数的对数。这一对数表的空隙部分，四年后由荷兰数学家符拉克补齐。

随着对数应用的扩大，各类精密度更高的对数表，像雨后春笋般相继出现，蔚为壮观！其中有 20 位的；48 位的；61 位的；102 位的；而如今雄踞位数榜首的，是亚当斯的 260 位对数！

随着对数表位数的增加，表格的厚度也越来越厚：四位对数表只需 3 页；

5 位对数表就要 30 页；而 6 位对数表则需 182 页，……面对着这一本厚似一本的表格，人们终于引起了反思。实践使他们意识到，表的位数如果多于计算量的度量精度，那么表的位数越高，造成的时间和精力的浪费也就越大！于是，在实用的指导下，人们又逐渐从高位对数表，退回到低位对数表上来。目前全世界的教科书，采用的几乎都是四位对数表，这种表的使用，读者想必是很熟悉的！

对多位对数表反思的另一个结果，是更为快速计算工具的诞生。下图是一把常见的计算尺式样，标尺上的读数分为三级，因此可以读出三个有效数字（如下图）。对精度要求不太高的计算，计算尺是十分方便的！

计算尺的前身是纳白尔算筹，它是纳白尔于公元 1617 年发明的。那是在一些长方形的板片上刻写数码，对起来进行乘除、乘方、开方运算。纳白尔算筹于公元 1645 年由我国学者汤若望引进国内，当时国内学者对此兴趣颇高。这种算筹目前北京故宫博物馆仍然藏有数套。

对数表和计算尺源出同宗，但优劣各异：精度高的速度慢；速度快的精度低。是否存在得兼两者长处的计算工具呢？几个世纪来，科学家们用自己的聪明才智，进行着努力的探索！

公元 1642 年，法国数学家帕斯卡（Pascal，1623～1662）制造出了世界上第一台加法计算机，打响了攻坚的第一炮。

公元 1677 年，著名的德国数学家莱布尼兹发明了乘法计算机。

公元 1847 年,俄国工程师奥涅尔研制成了世界上第一部功能完善的手摇计算机。

我国人工计算机的研制工作起于清初康熙年间。公元 1685 年至公元 1722 年期间我国自行制造的原始手摇计算机，至今仍有十台，保存于故宫博物馆。

世界上第一台电子计算机，是公元 1946 年，在美籍匈牙利数学家冯·诺依曼（Von Neumann，1903～1957）领导下制成的。它标志着人类开始走进一个光辉的时代——电子时代！

今天，电子计算机已经更新了好几代，面目远非半个世纪前所能相比，各式各样先进的电子计算工具，也早已替代了计算尺和对数表。然而，对数表的发明和它在历史上的功绩，将永不磨灭！

并非危言耸听

公元 1972 年，尼克松被再次当选为美国总统后，建议美苏两国联合攻克癌症。建议立即被采纳。美方赠送了供研究的 23 种致癌病毒；苏方回赠了六名癌症患者的癌细胞标本。

翌年一月，美国国立癌采研究中心决定，将苏联的癌细胞标本分送给几位科学家研究。其中的一份，送到了加州细胞培养所长实验所所长尼尔森芮斯博士手上。

尼尔森芮斯经过几番周折，终于弄清了，所有苏方赠送的六各标本，全是二十多年前死去的美国黑人拉克丝的细胞。

原来拉克丝 1951 年 10 月死于一种罕见的子宫颈癌。这种特殊的癌细胞具有极强的繁殖力和生命力。拉克丝从发现第一个病灶到死亡，整个过程不足八个月。科学家们提取这种癌细胞加以培养，发现这些癌细胞竟以

$$y=A_0\cdot 2^x$$

这样的指数曲线疯狂地生长！每 24 小时便增加一倍（上式中 A_0 为原始数量，X 为天数）。就这样，这种新发现的癌细胞被命名“海拉”，并被严格控制于实验室。

“海拉”细胞在不足一个月时间内，便能增加数千万倍，这使过去一直认为的，健康细胞“自发”转变为癌细胞的神秘现象，得到了新的解释。原来所谓“自发”转变，只不过是“海拉”细胞消灭并占领了整个培养物！

然而事过二十多年，“海拉”细胞不仅没有死亡，而且还令人费解地流到国外，出现在莫斯科！于是，尼尔森芮斯博士撰文向全世界敲起了警钟：“如果听任‘海拉’细胞在最适宜的情况下毫无抑制地生长，那么到现在为止，它们很可能已经占领整个世界！”

这是危言耸听吗？不！这是科学的结论！

如果任其疯狂生长，那么按理论计算，一年后将达到

$$y=A_0\cdot 2^{365}$$

现在，我们已经有了对数工具，让我们计算一下，这个数字究竟有多大

$$\begin{aligned}\because\quad \lg y&=\lg A_0+\lg 2^{365}\\ &=\lg A_0+365\times\lg 2\\ &=\lg A_0+365\times 0.3010\end{aligned}$$

$$\therefore \lg\left(\frac{y}{A_0}\right)=109.865$$

从而　　$y=7.328\times 10^{109}A_0$

这样多的细胞，不必说占领整个地球，就是占领整个宇宙也不算过分！

好在人类已经学会了对生物的有效控制，才制止了这种有害生物指数般的繁殖和生长。

具有讽刺意味的是：人类虽然很早就注意控制生物，却迟迟才注意控制人类自己，世界人口依然按一条可怕的指数曲线在增长着！

公元初地球上的人口不足 2 亿 5 千万人，到公元 1650 年世界人口也才达到 5 亿，让我们计算一下这段期间世界人口的增长率 P：

$\because 5\times 10^8=2.5\times 10^8(1+P)^{1650}$

$\therefore\qquad 2=(1+P)^{1650}$

$\qquad \lg 2=1650\lg(1+P)$

$\because \lg(1+P)=0.3010\div 1650=0.0001824$

$\therefore 1+P=1.00042$

$\quad P=0.042\%$

这就是说，在公元后的 1600 年里，人类人口每年只平均增长万分之四多一些。然而，从公元 1650 年到公元 1800 年，仅一个半世纪，世界人口又翻了一番。可以算出这期间世界人口增长率为 0.46%，比前面高了十倍！而从 1800 年到 1930 年，世界人口再次翻番，达 20 亿。1960 年达 30 亿，1975 年达 40 亿，1987 年达 50 亿，……世界人口沿着一条越来越陡峭的曲线直指上方！

科学家们告诫说：我们这个赖以生存的地球，最多只能养活 80～100 亿人类。然而，按目前世界人口的增长速度，公元 2000 年，世界人口将达 65 亿，而公元 2025 年将突破 100 亿！再下去地球将无法承担这一负荷，人类将最终毁灭自己！

这是危言耸听吗？不！这是科学向人类提出的警告！

公元 1987 年 7 月 11 日，生活在这个星球上的第 50 亿个人，在南斯拉夫的萨格勒布市诞生了！这一天联合国人口活动基金会组织，向世界各国首脑，分别赠送一台特制的“ 人口钟 ”。这是一种奇异的计时器，除通常钟表功能外，还能显示该时刻该世界总人口的预测数，及每分钟各国人口的变化，它将随时提醒各国首脑重视人口问题。

追溯和预测

公元 1896 年，法国物理学家贝克勒尔发现，铀的化合物能放射出一种肉眼看不见的射线，这种射线可以使它在黑纸里的照相底片感光。这种现象引起了女科学家玛丽·居里的注意。居里夫人想，该不是只有铀才能发出射线吧！经她悉心研究，终于又发现了一些放射性更强的元素。

公元 1903 年，杰出的英国物理学家卢瑟福，设计了一个极为巧妙的实验，证实了放射性物质放出的射线有三种，而且在放出射线的同时，本身有一部分蜕变为其他物质。蜕变的速度不受冷热变化、化学反应及其他外界条件的影响。

经科学家们不懈努力，人们终于弄清了放射性蜕变的量的规律：即蜕变的变化量△m，与当时放射性物质的质量 m 及蜕变时间成正比。也就是说

$\triangle m \propto -m\triangle t$

右端的负号是因为蜕变后放射性物质减少的缘故。

上式写成等式便是：

$\triangle m=-km\triangle t$

其中 $m=m_0e^{-kt}$

下面我们计算一下，究竟需要多长时间，才能使放射性物质蜕变为原来的一半。为此，令$m=\frac{1}{2}m_0$，于是

$$\frac{1}{2}=e^{-kt}$$

$$\lg\frac{1}{2}=-kT\lg e$$

从而

$$T=\frac{\lg 2}{k\lg e}=0.693\times\frac{1}{k}$$

这是一个常量，这个常量只与放射性物质本身有关，称为该放射性物质的半衰期。右上图画的是镭的衰变情况：每隔 1620 年质量减为原来一半。下表列的是一些重要放射性物质的半衰期。

元素	同位素符号	半衰期
钍	Th 232	1.39×10^{10} 年
铀 I	U 238	4.56×10^{9} 年
镭	Ra 226	1620 年
钋 I	Po 210	138 天
钋 II	Po 214	1.5×10^{-4} 秒
钋III	Po 216	0.16 秒
铀 II	U 234	2.48×10^{5} 年

铀是最常见的一种放射性物质，由上表得知，它的半衰期为 45 亿 6000 万年。也就是说，过 45 亿 6000 万年之后，铀的质量剩下原来的一半。由于铀蜕变后，最后变成为铅，因此我们只要根据岩石中现在含多少铀和多少铅，便可以算出岩石的年龄。科学家们正是利用上述的办法，测得地球上最古老岩石的年龄要为 30 亿年。当然，地球年龄要比这更大一些，估计有 45～46 亿年！

应用上面的数学方法，不仅可以使我们科学地追溯过去，而且可以帮助我们科学地预测将来。在儒勒·凡尔纳的《马蒂斯·桑多尔夫》这部小说里，作者描述了一个精彩动人的故事：

“已经移去了两旁撑住船身的支持物，船准备下水了。只要把缆索解开，船就会滑下去。已经有五六个木工在船的龙骨底下忙着。观众满怀着好奇心注视着这件工作。这时候却有一艘快艇绕过岸边凸出的地方，出现在人们的眼前。原来这艘快艇要进港口，必须经过“特拉波科罗”号准备下水的船坞前面。所以一听见快艇发出信号，大船上的人为了避免发生意外，就停止了解缆下水的操作，让快艇先过去。假使这两条船，一条横着，另一条用极高的速度冲过去，快艇一定会被撞沉的。

工人们停止了锤击。所有的眼睛全都注视着这只华丽的船，船上的白色篷帆在斜阳下像镀了金一样。快艇很快就出现在船坞的正前面。船坞上成千的人都出神地看着它。突然听到一声惊呼，“特拉波科罗”号正当快艇的右舷对着它的时候，开始摇摆着滑下去了。两条船就要相撞了！已经没有时间、没有方法能够防止这场惨祸了。“特拉波科罗”号很快地斜着向下面滑去……船头上卷起了因摩擦而起的白雾，船尾已经没入了水。

突然出现了一个人，他抓住“特拉波科罗”号前部的缆索，用力地拉，几乎把身子弯得接近了地面。不到一分钟，他已经把缆索绕在钉在地里的铁桩上。他冒着被摔死的危险，用超人的气力，用手拉住缆索大约有 10 秒钟。最后，缆索断了。可是这 10 秒时间已经很足够：“特拉波科罗”号进水以后，只轻轻擦了一下快艇，就向前驶了开去！

快艇脱了险。

下面我们用数学的方法来分析一下“特拉波科罗”号事件：

公元 1748 年，瑞士数学家欧拉（Euler，1707～1783）在他的传世之作《无穷小分析引论》中研究了滚轮摩擦的问题（如左图）。欧拉发现：对于一个很小的转角△a，绳子的张力差的量值△T 与 T 及△a 成正比。即

$$\triangle T \propto \triangle \alpha$$

写成等式为$\triangle T=-kT\triangle\alpha$

式中 k 为摩擦系数，负号是因为问题中张力的值是减少的。

其中 $T=T_0e^{-ka}$

这就是著名的欧拉滚轮摩擦公式。

现在转到故事中来。假定"特拉波科罗"号船体重 50 吨，船台坡度为 1：10，那么船的下滑力约为 5 吨，即 5000 公斤；又假设马蒂夫来得及把缆绳在铁桩上绕了三圈，即

$$a=2\pi\times3=6\pi；$$

而绳索与铁桩之间的摩擦系数 k=0．33。

把上述数值代入欧拉公式，便可得到马蒂夫拉住绳子另一头所需要的气力 T（公斤）为：

$T=5000\times e^{-0.33\times6\pi}$

T 的值是很容易用对数的方法求出来的

$\lg T=\lg5000-0.33\times6\times3\times3.1416\lg e$

$=3.6990-0.33\times6\times3.1416\times0.4343$

$=0.9975$

T=9.943（公斤）

这就是说，儒勒·凡尔纳笔下那位力挽狂澜的"大力士"。实际上所用的力气不足 10 公斤。这是连一个少年都能做得到的！

变量中的常量

众所周知，目前的银行存款中，存 8 年期的利率，往往比存 1 年期或存 3 年期的利率高。读者可能以为这仅仅是为了鼓励人们去存较长期限的储蓄。实际上这是本该如此的！因为倘若存长期的利率没有比存短期的利率高出一定限度，那么甚至于存短期的储蓄对储户更加合算！

为说明上述的道理，我们假定所有存款的年利率均为 12.5%。让我们看一看究竟会出现什么毛病！

假设某甲，持本金 100 元存入银行，一存 8 年，容易算出，8 年后他连本带利恰好取回 200 元。

又设某乙，也持本金 100 元存入银行，存 4 年；4 年后取出，旋即又将本利再次存入，又存 4 年。容易算出，头尾 8 年某乙连本带利共可收回

$$a^2=100\times(1+\frac{1}{2})^2=225(\text{元})$$

瞧！某乙把一次 8 年期的存款，分为两次 4 年期存。本身只多办一道手续，结果竟多得了 25 元，这相当于本金的四分之一，可算是一笔不少的钱数！

再设某丙、某丁、某戊，把 8 年的期限分得更细，分别等分成 3 次存、4 次存和 5 次存。每次取出后又立即将款全数存入。这样，头尾 8 年，各人分别得款（单位元）：

$$a_3 = 100 \times (1+\frac{1}{3})^3 = 237.04$$

$$a_4 = 100 \times (1+\frac{1}{4})^4 = 244.14$$

$$a_5 = 100 \times (1+\frac{1}{5})^5 = 248.83$$

同样，某 N，也有本金 100 元，但把 8 年期限等分成 n 次存，每次取出后再度存入，则 8 年后可得（单位元）：

$$a_n = 100 \times (1+\frac{1}{n})^n$$

可以证明，当分划期限越短时，到期本利和越高。不过，当 n 无限增大时，变量 a_n 也不可能无限增大，它以一个常量为极限，这个常量为：

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}[100 \times (1+\frac{1}{n})^n]$$

$$= 100e = 271.83$$

这就是说，如果存 1 年期的利率为 12.5%，那么存 8 年期的年利率就必须不低于

$$P = \frac{\frac{a}{100} - 1}{8} = \frac{2.7183 - 1}{8} = 21.48\%$$

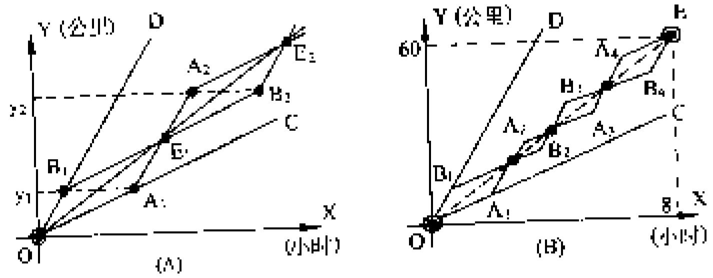
否则便会出现一种混乱的局面：储户为了谋求较高的利息，不惜花时间频繁地取出又存进！

变量中的常量，往往具有深刻的意义！

在柯尔詹姆斯基的《趣味数学》中，有一则关于旅行的别致故事：

甲、乙两人骑自行车旅行，某甲中途车坏，只好停下来修理，但最后因无法修复而决定舍弃坏车，继续前进。然而，此时两人只有一车，于是约定：一人骑车，一人步行。骑车的人到某一地方把车留下，改为步行；而后面步行的人，起到留车的地方换成骑车。骑一段时间后又改成步行，把车留给后者。如此这般，两人轮流骑车。问从某甲车坏时起，最少需要花多长时间，两人才能同时抵达目的地？假定车坏处（O）与目的地（E）之间的距离为 60 公里，自行车速度为 15 公里/小时，步行速度为 5 公里/小时。

下面让我们通过作图来探讨一下可能的解答：



以 O 为原点，时间为 X 轴，距离为 Y 轴，建立坐标系 XOY，由于人步行的速度和自行车速度都是变化过程中的常量，因此它们分别表现为坐标系 XOY 中的射线 OC 和 OD。

如上页图（A），令 E_1、E_2 分别为甲、乙两人车坏后第一次和第二次相遇的地点。此时，某甲先是步行到 A_1，然后骑车经过 E_1 抵达 A_2，又改成步行到 E_2；而某乙则先骑车到 B_1，然后由 B_1 步行经 E_1 到达 B_2，又改成骑车抵 E_2；当然，在 E_2 相遇后各人依然继续前行。由于车速和人速始终保持不变，所以表示骑车或表示步行的线段，应当各自平行。即四边形 $OA_1E_1B_1$ 及 $E_1B_2E_2A_2$ 均为平行四边形。又注意到甲改步行为骑车，与乙改骑车为步行，位于同一地点。因此线段 A_1B_1 及 A_2B_2 等都平行于 X 轴。假定两次换车的地点距 O 处分别为 y_1，y_2 公里。则因射线 OC、OD 的方程为

OC：　　　$y=5X$

OD：　　　$y=15x$

可得 A、B 两点的坐标如下：

$$A(\frac{y_1}{5},y_1);B(\frac{y_1}{15},y_1)$$

从而 E_1 点坐标（xE_1，y_{E1}）为：

$$\begin{cases} x_{E1}=x_A+x_B=\frac{y_1}{5}+\frac{y_1}{15}=\frac{4}{15}y_1 \\ y_{E1}=y_A+y_B=2y_1 \end{cases}$$

$$\Theta\ \frac{y_{E1}}{x_{E1}}=\frac{2y_1}{\frac{4}{15y_1}}=\frac{15}{2}$$

$$\therefore y_{E1}=(\frac{15}{2})x_{E1}$$

这表明 E_1 点位于由原点发出的斜率为 $\frac{15}{2}$ 的射线上。同理，E_2，E_3，……也应当都位于这条射线上。再由于 O 点离目的地 E 距离为 60 公里，因此到达的时间 X 应满足：

$$60=(\frac{15}{2})x$$

从而 X＝8（小时）

上述结果表明：不管甲乙两人在路途上骑车、步行怎样换来换去，只要是同时到达目的地，所用的时间总是 8 小时！这一类变量中的常量，并不是所有人一开始都能知道的。

有时某些变化的量中，总保持着某种特定的关系。一个最常见的例子，就是两个正数 x_1、x_2 的以下关系式

$$\frac{x_1+x_2}{2}\ge\sqrt{x_1x_2}$$

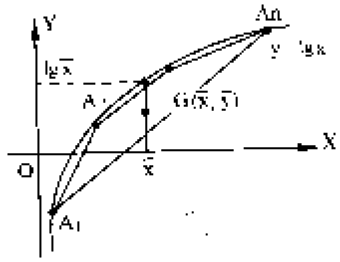
等式当且仅当 $x_1=x_2$ 时才成立。

上面的正数算术平均值与几何平均值的关系式，可以推广到 n 个数。即对于 n 个正数 x_1，$x_2\cdots$，x_n 有：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时才成立。

上述不等式的一个简单而巧妙的证明,是利用对数函数 y＝lgx 图象的凸性。所谓函数图象在某区间的凸性是指：在该区间函数图象上的任意两点所连成的线段，整个地位于函数图象的下方（或上方）。对数函数 y＝lgx 图象的凸性是很容易证明的，我们建议留给读者。



现设 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 为 n 个正数，已按从小到大排列。又 A_1 为相应于横坐标为 x_1 的、y＝lgx 图象上的点。易知，多边形 $A_1,A_2,\cdots A_n$ 为凸多边形，因此点系重心 $G(\bar{x},\bar{y})$ 必位于多边形内。即有

$$\lg\bar{x}\ge\bar{y}$$

$$\Theta\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}\\ \bar{y}=\dfrac{\lg x_1+\lg x_2+\cdots\lg x_n}{n}=\lg\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\end{cases}$$

$$\therefore\lg\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\lg\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

从而 $\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$

等号当且仅当 x_1，$x_2\cdots x_n$ 都相等时才成立。

上述不等式在数学的许多领域，有着广泛和有趣的应用。读者在本书的后面章节书中，将会不止一次地发现这一不等式的特殊价值！

出类拔萃的“建筑师”

生物的进化，积数亿年的优胜劣汰。仍能繁衍至今的，往往包含着“最经济原则”的启迪。出类拔萃的“建筑师”蜜蜂建造的蜂窝，大概是最使人心悦诚服的实例！

如果你细细的观察蜂窝的立体截面图，你可以清楚地看到：虽然蜂窝的横断面是由正六边形组成，但蜂房并非正六棱柱，房底系由三个菱形拼成。图 1 是一个蜂房的取样，底朝上是为了让读者看得更加清晰。对于图 1 的形成，我们甚至可以想象得更加具体一点：拿来一枝正六棱柱的铅笔，未削之前，铅笔一端的形状是如同图 2 的正六边形 ABCDEF，通过 AC，一刀切下一角，然后沿着 AC 把切下的那一角翻到顶面上去；过 AE、CD 各切同样一角，同 AC 一般翻转上去，便堆成了蜂房那样形状。而蜂窝则是由这样的蜂房底部和底部相接而成的。

图 1

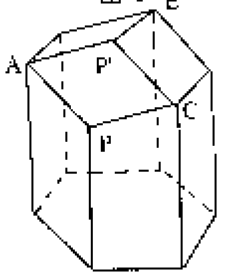
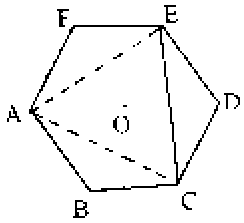


图 2



蜂房为什么是正六边形的？因为周长一定的所有图形中圆的面积最大，然而圆是不能铺满平面的，因此不得不让位给正多边形。那么，究竟有多少种正多边形能够铺满平面呢？读者只需注意到，这样的正多边形内角必能拼成一个周角，就容易明白：这样的正多边形只能有三个，即正三角形、正方形和正六边形。从下表可以看出，以上三种图形中正六边形是最经济的一种。

但是，蜂房底部的构造就不那么一目了然了。

18 世纪初，法国学者马拉尔琪曾实测了蜂房底部的菱形，得出一个令人惊异的有趣结论：拼成蜂房底部的每个菱形蜡板，钝角都等于 109°28′，锐角则等于 70°32′。

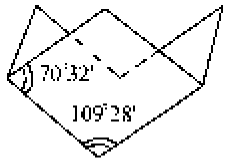


图 3

不久，马拉尔琪的发现传到了另一位法国人列奥缪拉的耳朵里。列奥缪拉是一名物理学家，他想，蜂房底部的结构，大概应该是最节省材料的！然而列奥缪拉却没有理出个头绪，只好去请教巴黎科学院院士，瑞士数学家克尼格。克尼格经过精心计算，得出了更加令人惊震的结果：根据理论上的计算，建造同样大小的容积，而用材料最少的蜂房，其底部菱形的两角应是 109°26′和 70°34′。这与实测的结果仅差 2′。

人们对克尼格的计算技巧和聪明才智倍加赞赏，同时认为蜜蜂在这样细小的构筑上仅仅误差 2′是不足为奇的！

然而，一个偶然的事故，证明了蜜蜂确实是出类拔萃的，建造的房穴是毫厘不差的。一艘船只应用克尼格用过的对数表确定方位，不幸遇难。在调查事件起因时，发现船上用过的那张对数表竟然有些地方印错了！这件事引起了一位著名的苏格兰数学家马克劳林（Maclaurin，1698～1746）的注意。公元 1743 年，马克劳林重新计算了最经济的蜂房结构，得出菱形钝角应为 109°28′，锐角为 70°32′，与马拉尔琪的实测结果丝毫不差！克尼格由于对数表的差误，算错了 2′。

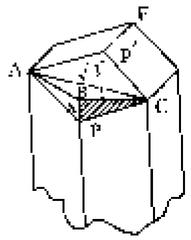


图 4

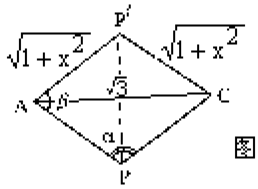


图 5

我想读者一定很想了解克尼格和马克劳林的计算。不过两个半世纪来，人们已经找到了许多有别于他们的更加简便的算法。

让我们把问题先作一番简化。本节开头讲过，蜂房底部的构造可以看成是把正六棱柱切去三个角，然后翻转到顶面堆砌而成。这样的图形显然没有改变原来正六棱柱的体积，现在问题的症结是：翻转后的表面积是增加呢还是减少？

如图 5，假定正六棱柱边长为 1，切去三个角的高为 X，很显然，经过切割翻转后的蜂房模型，比起原正六棱柱来说，表面积少了一个面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 的顶面和六个直角边长为1，X的小直角三角形（图中阴影部分为一个小直角三角形）；但却多了三个边长为$\sqrt{1+x^2}$，又一条对角线为$\sqrt{3}$的菱形面积。由于菱形面积$S_{\diamond}$不难算出为

$$S_{\diamond}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{(1+x^2)-\left(\frac{\sqrt{3^2}}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+4x^2}$$

这样，表面积的增加量，便可以表示为 x 的函数 f(x)

$$f(x)=3S_{\diamond}-6S_{\diamond}-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+4x^2}$$

$$-3x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

显然，使表面积增加量 f（X）达最小值的 X，便是最经济蜂房所要求的。让我们介绍一种，由南京师大附中学生找到的，求 f（X）的最小值的方法：

令$y=f(x)+\frac{3\sqrt{3}}{2}$

则$y+3x=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+4x^2}$

两边平方并加以整理得；

$x^2-(\frac{y}{3})x+(\frac{3}{8}-\frac{y^2}{18})\geq 0$

由于 X 必须为实数，从而上述二次方程的判别成

$\triangle=\frac{y^2}{9}-4\times(\frac{3}{8}-\frac{y^2}{18})\geq 0$

$\therefore \frac{y^2}{3}-\frac{3}{2}\geq 0$

$\Theta\ y\rangle 0$

$\therefore y_{\min}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

将上述 y 的最小值代入求 X 得

$x=\frac{\sqrt{2}}{4}$

所以菱形的边长为$\frac{3\sqrt{2}}{4}$，利用三角函数定义可以算出菱形的钝角α和锐角β：

$\mathrm{Sin}\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=0.8165$查反正弦函数表可得：

$\frac{\alpha}{2}=54°44'$

$\therefore\begin{cases}\alpha=109°28'\\ \beta=70°32'\end{cases}$

最小二乘法

下面是一道有趣的智力思考题。

给你一本书，你能否仅用普通的刻度尺，测出一张纸的厚度吗？答案是肯定的！我想聪明的读者都已猜到了：只需量出全书的厚度（如果书很薄，可以把相同的书叠它几本！），然后除以全书纸的张数，即得每张纸的厚度。

上述方法可以用于类似的场合。例如，为了测出细漆包线的直径大小，可以采用绕线的办法，在一根铅笔上，紧密地绕上 n 圈，如图测量出这 n 圈漆包线在铅笔上所占位置的长 L，则该漆包线的直径 d，显然应该满足

$$dn=L$$

$$d\approx\frac{L}{n}$$

然而，尽管很多人都懂得应该这样去做，但并非所有的人都知道其中的科学原理。假设某本书共 1128 页（除封页），测得厚 60㎜ ，各页的厚度（单位㎜）为：

a_1，a_2，a_3，……，a_{1128}

可得到：$\sum_{i-1}^{1128}a_i=a_1+a_2+\cdots\cdots a_{1128}=60$

而一张纸的厚度 0．0532（㎜），则是这 1128 个数的平均值。

现在需要证明的是：对于量 x 的 n 个观测值 a_1，a_2，……，a_n，它们的平均值

$$\frac{\sum_{a_i}}{n}=\frac{a_1，a_2，+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

是所要测定的量 X 的最理想取值。式中求和符号表示从 1 累加到 n。

事实上，最理想的取值 X，应当使它与 n 个观察值的差的总和为最小。但考虑到差（$x-a_1$）（i＝ 1，2，…，n）可能有正有负，如果直接地把它们相加，势必使某些差的值相抵消，影响了偏离的真实性，这显然是不合理的。于是，人们想到了用（$x-a_i$）^{2} 来替代相应的差。这样一来，最理想的取值 X 应当使函数

$y=(x-a_i)^2+(x-a_2)^2+\cdots\cdots+(x-a_n)^2$

$=nx^2-x(\Sigma a_i)x+\Sigma a_i^2$

取极小值。这是关于 X 的二次函数，易知当

$$x=\frac{\Sigma a_i}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$

时 y 取极小。这就是为什么平均值可以看成是观测量最理想取值的道理。

同样的原理可以用于二维的情形，只是计算要稍为复杂一些，我们将要得到的结果，在数学上非常有名，叫做最小二乘法。它是德国数学家高斯，于公元 1795 年创立的，那时他年仅 18 岁！

现在假定我们观察到 n 个经验点：

(x_1，y_1)，(x_2，y_2)，…，(x_n，y_n)

如果我们认定这 n 个经验点 M_i（i＝1，2，…， n）是对直线 y＝ A_x＋B 上的点在观测时的误差。那么，这些经验点 $M_i(x_i, y_i)$与直线上相应点 N (x_i，A_i+B）之间的以下量

$$y=\frac{2}{\Sigma M_iN_i}=\Sigma[y_i-(Ax_i+B)]^2$$

应当取极小值。“ 最小二乘法 ”的名称，大约就是由此而来！

函数 y 显然可以写成 A 的二次函数

$$y=(\Sigma x_i^2)A^2-2[\Sigma x_i(y_i-B)]A+\Sigma(y_i-B)^2$$

从而当 $A=\dfrac{(\Sigma x_i y_i)-B(\Sigma x_i)}{(\Sigma x_i^2)}$

时取极小值。整理得：

$(\Sigma x_i^2)A+(\Sigma x_i)B=\Sigma x_i y_i$

同理，函数 y 又可以写成 B 的二次函数，而当这一函数取极小值时，又得：

$(\Sigma x_i)A+(\Sigma x_i)B=\Sigma x_i y_i$

这样，由方程组

$$\begin{cases}(\Sigma x_i)A+nB=\Sigma y_1\\(\Sigma x_i^2)A+(\Sigma x_i)B=\Sigma x_i y_i\end{cases}$$

便可以确定参数 A、B 的值。从而得到一条最逼近 n 个经验点 M_i(I=1,2,…n)的直线最小二乘法在科学上有许多妙用，这里暂不介绍。

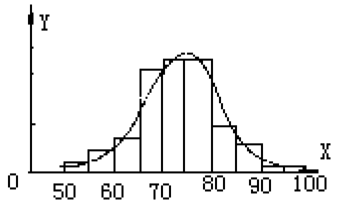
奇妙的钟型曲线

一位教师在统计自己所教的两个班级学生的成绩时，得到了以下数据表：

分数段	频数计算	频数	相对频数
95～100	一	1	0.01
90～95	𤴓	4	0.04
85～90	正丅	7	0.07
80～85	正正正正丅	22	0.22
75～80	正正正正 𤴓	24	0.24
70～75	正正正正 𤴓	24	0.24
65～70	正正	10	0.10
60～65	正一	6	0.06
55～60	一	1	0.01
50～55	一	1	0.01
合计		100	1.00

这位教师根据这张表画出了以下学生成绩分布直方图，这时他惊奇地发现：所得直方图很接近于一种两头低中间高的钟型曲线。钟型曲线，在许多地方都出现过！

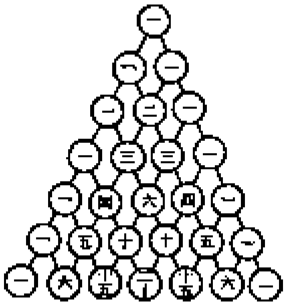
公元 1261 年，我国宋朝数学家杨辉，在《详解九章算法》一书中，记载了一幅图形（下页右图），这个图形被后人称为杨辉三角形或帕斯卡三角形。



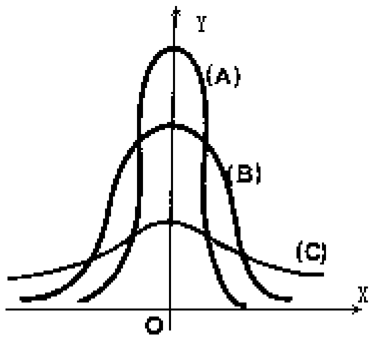
杨辉三角形的构造法则如下：三角形的两条斜边都由数字 1 组成，其余的数都等于它肩上的两数相加。下表是根据上述法则得到的，容易看出，每排数目的总和恰好都是一个 2 的方幂。

如果我们把这些数按列的分布画出坐标，我们可以连成一条相当规范的钟型曲线！

读者一定还记得 1984 年美国洛杉矶奥运会的那个振奋人心的时刻,中国选手许海峰，在射击比赛中为我国取得了历史上第一面奥运金牌。



可是读者不知是否想过，神枪手也不可能百发百中，只是他们命中红心机会较多，而偏离红心的机会较少罢了！左图画出了神枪手（A）、普通射手（B）和一般人（C）射击命中率的钟型曲→X 线，它们之间的区别几乎一目了然！

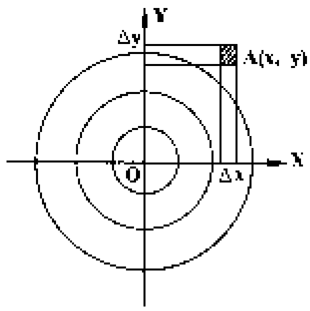


要揭示神秘钟型曲线的奥秘，我们还得借助于射击的例子。

当我们瞄准靶心（O）开枪射击时，离靶心越远的地方自然着弹可能性越少。今以靶心为原点，如下图建立直角坐标系 XOY，并令 y=ϕ（X）为沿 X 轴方向命中率的钟型曲线。由对称关系，显然可设

ϕ（x）=f（x^2）

如图，易知：在 n 次射击中，区间△x 内的着弹点应



正比于射击次数及命中区间的长度，即着弹数

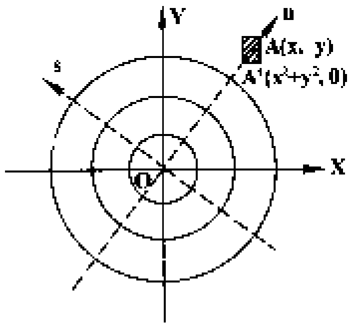
$\triangle n=nf(x^2)\triangle x$

从而，在区间△X 内命中的频率

$$\triangle p_x=\frac{\triangle n}{n}=f(x^2)\triangle x$$

同理 $\triangle p_y=f(y^2)\triangle y$

对于整个靶面来说，小阴影区△A 的着弹频率△p，显然可以写成



$\triangle p=\triangle p_x\cdot\triangle p_y$

$=f(x^2)f(y^2)\triangle A$

今在平面上，以 O 为原点另立 UOV 坐标系，使 U 轴恰过 A 点。由于着弹点的频率是与坐标轴选择没有关系的，从而又有：

$\triangle P=\triangle P_u\cdot\triangle P_v$

$=f(u^2)f(v^2)\triangle A$

注意到在 XOY 中的 A。

波浪曲线

有一个故事说：从前有座山，山上有座庙，庙里有个老和尚和一个小和尚。有一天，老和尚对小和尚说：“从前有座山，山上有座庙，庙里有一个老和尚和一个上和尚，有一天……”无须再写下去，我想读者都知道如何继续这个故事。

在文学家的笔下，对于循环模式的描述，往往是很精采的，但在数学家中，所有出现的事件 y，都是时间 X 的函数

$$y=f(x)$$

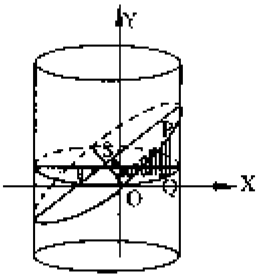
而循环模式则表示对于变量 X 的任何值，存在一个常量 T，使得：

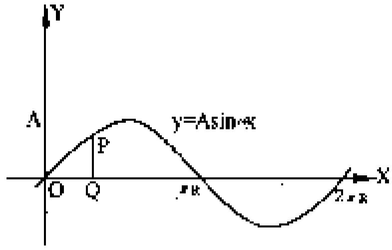
$f(x+T)=f(x)$

这里的 T 称为周期。上式表明，同样的事件，在经历了一个周期之后又回到了原先的状态，周而复始，如此而已！

拿一张纸，把它卷到一根蜡烛上，然后用刀斜着把它切断，再把卷起的纸展开，那么你将会看到一个波浪型曲线的截口。让我们看一看这是怎样的一条曲线？

如下图，设圆柱体为蜡烛的一段，底半径为 R，截口中心为 S。过 S 作垂直于圆柱轴线的截面，与原截口曲线交于两点。取其中一点 O 为原点，在过 O 且与圆柱相切的平面内建立直角坐标系 XOY，使 OY 为圆柱的一条母线。显然 OX 切于圆 S。





设想卷在圆柱上且已被切断的纸是慢慢展开的。令 P 为截口曲线上一点，Q 是它在圆 S 上的射影，又展开角∠OSQ=α。则

$$\begin{cases} x = OQ = \alpha R \\ y = PQ = (R\sin\alpha)tg\theta \end{cases}$$

式中 θ 为斜截面与圆 S 平面的夹角，为一常量。

把上述变量 y 表示为变量 X 的函数，即得

$$y = (Rtg\theta)\sin(\frac{1}{R})x$$

令$A = Rtg\theta, \omega = \frac{1}{R}$,立得

$$y = A\sin\omega x$$

原来得到的是振幅为 A，频率为ω的正弦曲线！容易明白，当纸张从 O 开始，展开一圈又回到 O 时，完成了一个循环，这一循环的周期 T，恰等于圆 S 的周长，即

$$T = 2\pi R = \frac{2\pi}{\omega}$$

后一个式子对于求一般正弦函数的周期是很有用的。

自然界里正弦曲线是很多的。往水池里扔一块石头，便会看到圆形的水波逐渐向四周扩展；拿一根长绳，抓住其中一头上下振动，你会看到一个个波浪传向前方，即使振动的那一头已经停止动作，已经形成的波形仍会继续传向远处！

在数学家眼里，上面的一系列现象称为波的传送。数学家们运用自己的智慧，巧妙地把这种运动用函数表示了出来！

下图是一个弦振动的例。弦起初静止，t=0 时，给它一个初位移。令初始位移函数为 f（x），图中

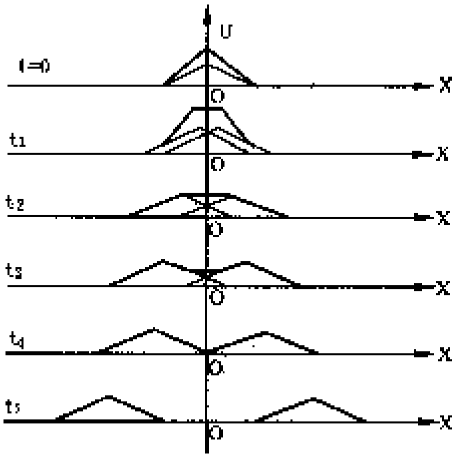
$$f(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| \le 1 \\ 0 & |x| \rangle 1 \end{cases}$$

而表示图中波传播的函数式可以写为

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+vt) + f(x-vt)]$$

式中 V 是波的传播速度。

值得注意的是，大多数的波未必就是正弦波。例如声波



就常常具有令人难以置信的复杂波形。

公元 1822 年，法国数学家傅立叶（Fourier，1763～1830）证明了任何曲线都可以由正弦曲线叠加而成，他甚至找到了构成叠加的方法。傅立叶的出色工作，使一门近代的数学分支，以他的光辉名字命名！

对称的启迪

二百多年前德国九岁的小高斯，以出乎老师意料的速度口算出 1＋ 2＋ 3＋ 4＋…＋ 97＋ 98＋ 99＋ 100＝ 5050。他采用的实际上是对称的方法。这种方法渊源古老，少说也有几千年！当人们第一次进行梯形面积计算时，所用的就是这种方法。

公元 1796 年，当高斯 19 岁时，他以其特有的关于对称的思考，一举推翻了两千年来人们关于“ 边数为大于 5 质数的正多边形，不可能用尺规作出 ”的猜想。确确实实地找到了正十七边形的作法。

下表列出了边数 n 不超过 100，而能用尺规作图的正多边形种类，总共 24 个：

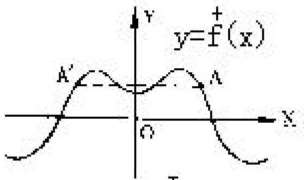
边数 n 的形状	能用尺规作的正 n 边形
2^m	4,8,16,32,64
2^m+1	3,5,17
$2^m P_1 P_2 \cdots P_k$ $(P_k=2^{2tk}+1)$	6,12,24,48,96 10,20,40,80 34,68 15,30,60 51 85

图形的对称，表现为数学的以下式子：

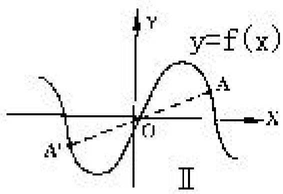
I: $f^+(-x)=f^+(x)$

II: $f^-(-x)=-f^-(x)$

满足 I 式的函数 $y=f^+(x)$，称为偶函数，它的图象对于 OY 轴为对称；满足II式的函数 $y=f^-(x)$称为奇函数，它的图象对于原点为对称。



Ⅰ



Ⅱ

事实上，任何一个图形都可以看成是一个轴对称图形和一个心对称图形的叠合！代数语言表述是：任何一个 X 的函数 f（x），都可以表示为一个偶函数 $f^{+}(x)$和一个奇函数 $f^{-}(x)$的和。即

$$f(x)=f^{+}(x)+f^{-}(x)$$

$$\because \begin{cases} f^{+}(-x)=f^{+}(x) \\ f^{-}(-x)=-f^{-}(x) \end{cases}$$

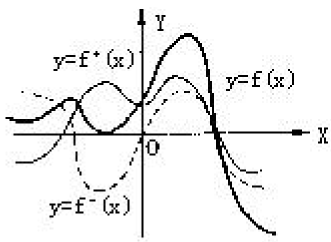
$\therefore f(-x)=f^{+}(-x)+f^{-}(-x)=f^{+}(x)-f^{-}(x)$

从而

$$\begin{cases} f^{+}(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)] \\ f^{-}(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)] \end{cases}$$

下图粗实线所代表的函数 f(x)是由虚线所代表的奇函数和细实线所代表的偶函数相加而得。

关于对称图形，对称中心或对称轴处于一种十分特殊的地位。这种位置在解题中往往起着关键的作用。



下面是一道精采的智力思考题：

A、B 是两根形状和重量都一样的条铁，其中有一根带有磁性。如果不用这两根条铁以外的东西，问怎样才能辨出哪根是磁铁？

两根条铁放成“T”字型。这种对称的放置，实际上已经给出了问题的解答。接下去的判定就留给读者了！

对称的启示，常常产生意想不到的效果。请看下面一例：

某食糖商店天平坏了，商店负责人决定不再零售食糖，不巧此时来了一位顾客，急需一公斤食糖，售货员急人所难，采用了通融的办法，把一公斤糖分成两份来称。第一次天平的右盘放 500 克砝码，左盘放食糖，取平衡；第二次右盘放食糖，左盘放 500 克砝码，也取平衡。售货员想，天平已经不准确了，它的左右臂长不相等，这样两次称出的糖一定有一次比 500 克多些，而另一次则少些，两次加在一起，取多补少，大约该是 1000 克，即 1 公斤吧！于是，他向顾客收了一公斤食糖的钱。

话说那位顾客可是个喜欢动脑筋的人，当他看到售货员的动作，心里便明白了三分，思考片刻后他发话了，说是售货员少收了钱，所称食糖不止一公斤！亲爱的读者，你知道这位忠诚的顾客是怎样作出判断的吗？

原来他是根据杠杆原理，由两次称量得出两个对称的关系式：

$$\begin{cases} W_1 a = 500b \\ W_2 b = 500a \end{cases}$$

$$\therefore W_1 + W_2 = 500\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$$

$$\geq 500 \times 2\sqrt{\frac{b}{a} \bullet \frac{a}{b}} = 1000$$

$$\because a \neq b$$

$$\therefore W_1 + W_2 > 1000$$

不过，读者如果动脑筋，还能找到更聪明的称糖办法。

漫谈选优

选优，在数学中颇具时代气息。选优学的历史，与数学发展史之间有着千丝万缕的关系。

早在二千多年前几何学发达的古希腊，人们就知道用图形的对称性质，去解决诸如“在河岸上取一点 C，使它到 A、B 两村路程之和最短”等一类最简单的选优问题。

极值是最重要的一种变量中的常量。

随着代数学的发展，不等式求极值的方法使用得更加普遍。

一个精彩的例子是：“体积为 V 的圆柱体，它的高 h 和底半径 r 应当采用怎样的比，才能使表面积 S 最小？”

易知$\begin{cases} S = 2\pi r^2 + 2\pi rh \\ V = \pi r^2 h \end{cases}$

从而$S = 2\pi r^2 + \frac{2v}{r}$

$$= 2\pi r^2 + \frac{V}{r} + \frac{V}{r}$$

$$\geq 3 \times \sqrt[3]{2\pi r^2 \times \frac{V}{r} \times \frac{V}{r}} = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

上式表明，当$2\pi r^2 = \frac{V}{r}$时S取极小值，由此可知

$$V = 2\pi r^3$$

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{2\pi r^3}{\pi r^3} = 2r$$

这就是说，体积一定的圆柱体，当高与底直径相等时，有最小的表面积。这也是为什么今天市场上的有盖牙罐总是设计得高与口径相等的道理。读者还可以用相同的方法证明：无盖的罐子，最节省材料的形状应当是，罐子的高等于口径大小的二分之一。

笛卡儿坐标的建立，使形数结合更加紧密。由牛顿和莱布尼兹创立的微积分学，为求函数的极值提供了一整套完整的算法。17 世纪，选优学在应用

方面呈现出一派勃勃生机！

客观现实在变化的量中，常常存在某种联系。这些联系在数学上表现为等式约束

$$F_i=0(I=1,2,\cdots\cdots,k)$$

对于附加了若干约束条件的选优问题，拉格朗日（Lagrange，1736～1813）提出了著名的“不定乘数法”：即引进 k 个参量 λ_i，把在 $F_i=0$ 约束下对 F 的条件选优问题，化为求

$$\phi = F + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \Lambda\,\Lambda\ \lambda_k F_k$$

的无条件选优问题。

随着生产和科学的发展，以函数为变数的选优问题突出了出来。这些问题中最古老和最有代表性的有三个：短程线问题最速降落问题和等周问题。这些古老而富有趣味的问题，经天才数学家欧拉和泊松等人富有创造性的工作，升华为一门瑰丽的数学分支——变分法。

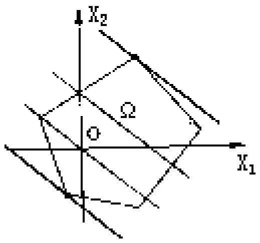
近代电子计算机的出现和使用，使原来并不引人注目的一次函数选优问题，又重新得以重视和发展。

一次函数选优问题的提法是：未知数 x_1 满足不等式组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1k}x_k + b_1 \geq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2k}x_k + b_2 \geq 0 \\ \Lambda\ \Lambda \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \Lambda + a_{nk}x_k + b_n \geq 0 \end{cases}$$

试求一次函数 $y = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + d$ 的最大值和最小值。

解决这类问题的一般方法是单纯形法。其基本思路可以通过下图加以介绍。不等式组相当于把未知量的取值限制在区域Ω内，而一次函数 $y = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j + d$ 对于不同的Y值是一组相互平行的“直线”，从而优值将在区域Ω的角点（顶点）上取得。

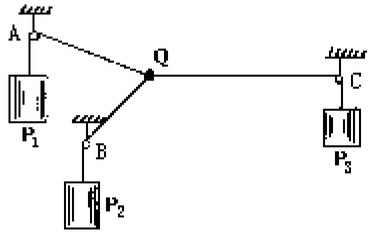


由于实践中提出的类似上述的线性规划问题都带特殊性。因此人们已经总结出许多诸如物资调动、合理装车等切实可行的好方法，使古老的一次函数选优问题，得以重新发放光辉！

自然科学其他分支的研究常常经选优学以提示。例如前面我们讲到的：蜂窝的底是由三个具有 70°32′角的菱形拼接而成，它启示我们这样的结构是最经济的。在深水中横放一根半径为 a 的圆柱，探索水的绕流导致了对儒可夫斯基函数

$$\omega = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right) \quad (z\text{为复数})$$

（Z 为复数）的研究，这个函数为各种优良机翼提供原型。



有时用力学上的模拟方法可以比数学方法更容易得到结果。例如应用橡皮筋拉力，可以轻而易举地找出主要矛盾线，从而解决了统筹方法中的重要课题。著名的三村建立小学问题，可以如图在平面上用三点模拟三村，用重物 P_1 模拟各村的学生数，并用细线通过滑轮连接于 Q 点，则平衡后 Q 点的位置就是建立小学的最好地点。可以证明，这时各村学生到校的总里程数最短。

迄今为止我们讲述的都是必然性问题，实际上更多的是我们甚至连变量间的依赖关系都不知道。为了探求它们之间的相互关系，我们常用一 n 次曲线。

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \Lambda + a_n x^n$$

去拟合 m 组试验数据（x_i, y_i）（i＝1，2，…，m），而反过来把这 m 组数据看成是对曲线的随机误差。自然，这种拟合要求

$$f = \sum_{i=1}^{m} (y_{xi} - y_i)^2$$

取最小值。根据上述要求，求出 n＋1 个待定系数 a_1，从而得出最优的 n 次拟合曲线。

因为统计方法是基于大数定律，从而得到的结果只能认为具有很大的，但不是绝对的把握。以下蒙特卡罗（MonteCarlo）方法便是一个极典型的例子。这个方法的要点是把试验区域分成 m 个等积的小方块，如果我们希望找到一个小方块其中心试验值优于全部 m 块中的 n 块，那么只要随机抽取 m 块中的 r 块，并在每个方块的中心做试验，而后取其中最好的一个结果就是。

事实上，从 m 个中随机抽 r 个，其中有一个优于 n 个的可能性为

$$P = 1 - \left(\frac{n}{m}\right)^r$$

当 r 增大时，P 很接近于 1，从而是十拿九稳的事。

最后还要提到另一类有趣的选优问题。这类问题区别于前述种种问题的特点，在于它不单是选取或比较某些量，而是在某些量的极小中去选取极大，或从极大中去选取极小。这是博奕论的课题。其基本思想用形象的语言来表达可以说成是：“往最好可能努力，作最坏估计打算。”我们这里不再进一步讲述它。

捷径的迷惑

有位地理老师提问一位学生：“请指出从上海到广州距离最短的路。”学生看了看摆在讲台上的地球仪，从容答道：

“是一条挖通广州与上海的直线隧道。”

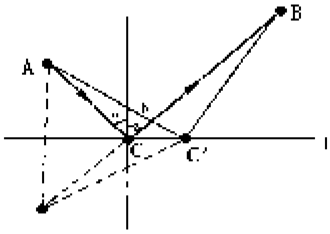
老师哭笑不得。的其实，从理论上讲这位学生说得并没有错。那是根据

平面几何里的一条公理：“两点间线段最短。”不过，生活是在地球上的人类，习惯于把自身的活动，限制在这个星球的表面考虑。这样，上海与广州之间的最短路程，很自然地被理解为过上海和广州之间的一段大圆的弧。这段大圆的弧约长 1200 公里。

球面上过两点的大圆的弧，可以用以下的办法直观地显示出来：在地球仪上拉紧过两点的一条细线，这条细线即可看为大圆的弧。

光沿直线前进的性质，这是物理学家早就注意到的。如图，由 A 点射出的光线，通过 1 上的点 C 反射到 B 点，则由入射角等于反射角推知，C 点即线段 A′B 与 1 的交点。这里 A′是 A 关于直线 1 的对称点。容易证明，对于 1 上的另一点 C′，必有

AC’+C’B>AC+CB



事实上，AC＋ CB＝ A′C＋ CB＝ A′B＜ A′C’′ C′B

＝AC′+ C′B

结论是很明显的！这表明光所走的折线 ACB，是比 A 经 1 到 B 最短的路线。

不过，严格地讲，光所走的是一条捷径。即走完全程所用的时间最短。右图的情景，想必许多读者都见过：本来看不见的东西，在水中变得看见了！光线产生这种折转的原因，是因为光在空气中和水中速度不相同。造成光沿一条折线走比光沿一条直线走所花的时间更少。

你不妨亲手做一做下面的试验：

在光滑桌面的另一半，铺上一层薄薄的绒布。让一颗铁球由光滑面斜着滚向绒布。这时你会看到一种奇特的现象：铁球在绒布的交界处突然折转了方向，如同光线的折射一般！

出现上述现象的原因：是铁球在光滑桌面和绒布上行进的速度不相同。铁球也像光线一样，走的是一条捷径！

下面是一个有趣的问题：

一只蜘蛛在一块长方体木块的一个顶点 A 处，一只苍蝇在这个长方体的对角顶点 G 处，问蜘蛛要沿怎样的路线爬行，才能最快抓到苍蝇？

我们可以把长方体（图 a）的上底面及右侧面展开成如同图 a′的平面图时，蜘蛛爬行的路必须是线段 AMG 或 ANG 中较短的一条。假令 AB=a，BC＝b，AE＝c，则由图知

$$\mathrm{AMG}=\sqrt{(\mathrm{b}+\mathrm{c})^{2}+\mathrm{a}^{2}}=\sqrt{\mathrm{a}^{2}+\mathrm{b}^{2}+\mathrm{c}^{2}+2\mathrm{bc}}$$

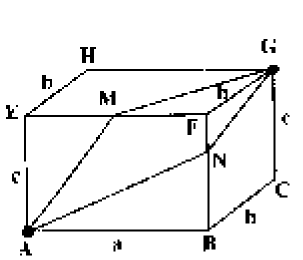


图 a

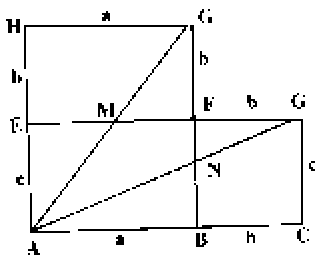


图 a′

$$ANG=\sqrt{(a+b)^2+c^2}=\sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab}$$

当 a＞c 时，ANC＞AMG，说明蜘蛛应当沿折线 AMG 爬行，才能最快抓到苍蝇；反之，则必须沿折线 ANG 爬行！

很明显，对于可以展成平面的曲面，曲面上的捷径问题，都可以用类似上面展开的方法加以解决。图 C 的圆锥曲面就是一个例子。

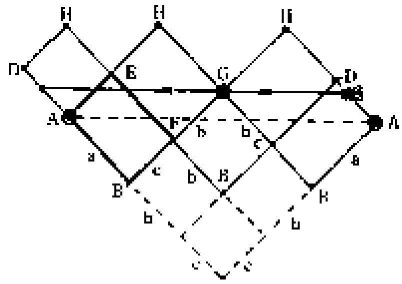


图 b

然而，并非所有的曲面都能展开成平面。我们最常见的球面，其任何一小部分，都不可能毫无重叠或破裂而展成平面。这就是无论哪一种地图，总不可避免地要产生变形的原因，没有一点畸变的地图根本不存在！这样，当你翻开一张地图细心观察时，你便会发现一个有趣的现象，图上画的航线几乎都是一条条弧线。这才是真正的球面短程线——大圆弧线。而图面上看起来是直的线，实际上只是保持与经线等角的斜航线。

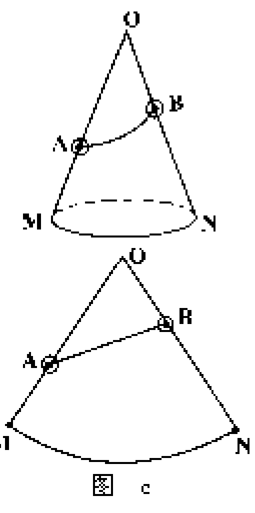


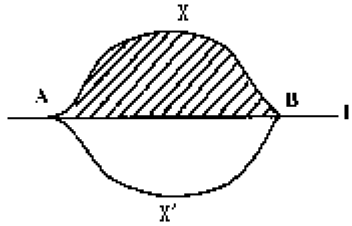
图 c

从狄多问题谈起

传说泰雅王（Tyrian king）的女儿狄多从他身边逃走之后，历尽艰险终于抵达非洲海岸。在那里她成了迦太基人的奠基者和传说中的第一位女王。

狄多到非洲后的第一个计策是：向当地土著购买依傍海岸的一块“不大

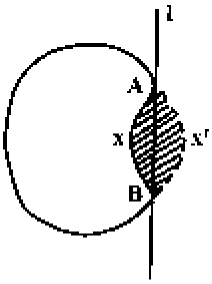
于一张犍牛皮所能围起来的”土地。她把犍牛皮割成又细又长的条子，又把这些长条连接成一根细长的绳子。她想利用这条绳子及海岸线，怎样才能围出最大的土地？



事实上，假定海岸线 1 为直线，而长度为α的弧线 AXB 已经围出最大的一块面积。那么，利用镜像的方法，由弧 AXB 和它关于海岸 1 的轴对称图形——弧线 AX’B，所组成的封闭图形，也一定是用 2a 长的周界所能围出的最大面积。那么，在周长一定的图形中，究竟怎样的图形才能包围最大的面积呢？下页表列出了周长为 4 厘米的各种图形的面积。

看了下页表，可能读者已经猜到，周长一定面积最大的图形是圆！事实果真如此！自然界和人工制品中，圆的形状更是比比皆是。这大概都是因为圆是“最经济”的图形：周长一定，面积最大；或面积一定，周长最短！

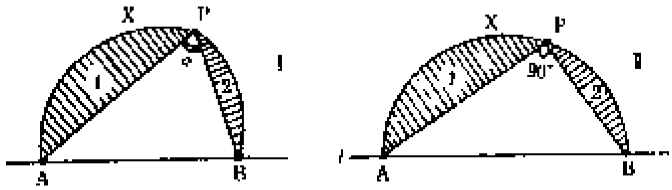
不过猜想毕竟不等于真理，从猜想到真理还需要严格的证明。



事实上，无论是狄多问题或是等周问题，解答的图形不可能是凹的。因为倘若图形中有一处是凹的，那么便可以把凹的部分，如同右图那样翻转出去，得到一个周长不变但面积增大了的新图形。

下面我们只讨论狄多问题，因为倘若能证明狄多问题的解答是半圆，那么等周问题的解答就是一个整圆！

等圆图形	相应面积(平方厘米)
等腰直角三角形	0.6863
矩形(3:1)	0.7500
等边三角形	0.7698
矩形(2:1)	0.8889
60°的圆扇形	0.9022
半圆	0.9022
矩形(3:2)	0.9600
四分之一圆	0.9856
正方形	1.0000
圆	1.2732



现在假定曲线弧 AXB 是狄多问题的解答。令 P 为弧线 AXB 上任意一点，我们说∠APB 一定是直角。因为如若∠APB＝ α≠90°，则我们可以把 AP、BP 连同它上面的一块阴影图形，如同上图从 I 到 II 那样，张开成 90°角。前后两个图形的曲线弧长显然没有改变，但两者的面积

$$\begin{cases} S_{I} = (S_1 + S_2) + \dfrac{1}{2}AP \bullet BP \bullet \sin\alpha \\ S_{II} = (S_1 + S_2) + \dfrac{1}{2}AP \bullet BP \end{cases}$$

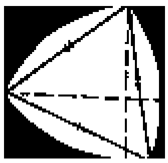
$$\because \alpha \neq 90°$$

$$\therefore S_{I} < S_{II}$$

这与图形 I 面积最大的假定矛盾，从而证明了曲线弧 AXB 上的点，立于线段 AB 上的角均为直角。即证明弧 AXB 为半圆弧。这也就解决了狄多问题和等周问题。

中世纪意大利诗人但丁说过：“圆是最完整的图形”。圆对于人类最深刻的印象，莫过于圆周上的点到圆心的距离相等。车轮正是由于它的等长的车辐，而使车轴处于一定的高度，从而才能平稳地水平运动。

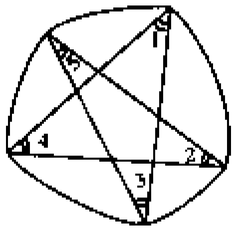
圆的任意两条平行切线之间距离都是相等的，都等于直径。四千年前的古埃及人，大概就是把一块又一块的巨石放在圆木棍上滚动着推到金字塔顶的！假如没有圆的这种“等宽度”的特性，我们这个星球的文明，不知要往后推迟多少年！

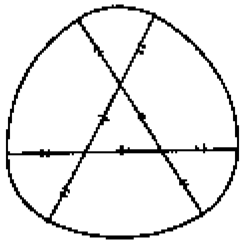


然而令人惊异的是，对于完成滚动来说，棍的横断面未必要是圆的！这一点大多数读者可能难以置信，但却是千真万确的事实。下图所示的曲边三角形就是最简单的具有“等宽度”性质的图形：三条曲边是相等的圆弧，而每个圆弧的中心，恰是它所对角的顶点。显然，这种曲边三角形的三段弧，具有共同的半径 r，而且整个曲边三角形可以在边长为 r 的正方形内，紧密自由地转动，用这种图形做断面的滚子，也能使载重物水平地移动，而不致于上下颠簸。这种具有奇特功能的曲边三角形，是由工艺学家鲁列斯首先发现的，所以叫做鲁列斯曲边三角形。

利用鲁列斯曲边三角形的原理，我们还可以构造出其他“等宽度”曲线。关键在于：让圆弧的中心是它所对角的角顶，从而画出一组具有等半径的圆弧。左下图就是这类型“等宽度”曲线。

等宽度曲线还有其他种类。下图是一种由六段圆弧连接而成的曲边多边形。它最明显不同于鲁列斯三角形的地方，是周边没有尖点！





等宽度曲线最惊人的性质是巴比尔（Barbier）发现的：有相同宽度 d 的等宽度曲线，具有相同的周长πd。希望读者自己用已见过的等宽度曲线去验证！

揭开“最速降落”问题的谜

把不在同一铅垂线上的两点 A、B，用怎样的一条曲线连接起来，才能使得在重力作用下，当质点沿着它由 A 滑至 B 时，所用的时间最少？

人们为了揭开它的谜底，曾经经历了相当漫长的时间。

16 世纪以前，几乎所有的人都认为：沿连接 AB 的线段滑落用时最少。理由是：在连接 A、B 的所有曲线中，线段 AB 最短。少走路，“自然”少花时间。

到了 17 世纪初，意大利比萨城的那位智者，大名鼎鼎的伽利略（Galilei，1564～1642），也对最速降落问题进行了思考。伽利略觉得此事没有那么简单！他认为最速降落曲线似乎应当是过 A、B 而切于过 A 点铅垂线的一段圆弧。理由是：质点开初是以接近自由落体的速度下滑的，虽然圆弧 AB 比弦 AB 要长一些，但在下滑路程中有很长一段路，质点是以很高的速度通过的。从总体上讲，用的时间比沿直线 AB 要更短些！

公元 1696 年，瑞士数学家约翰·贝努利（Bemoulli Johann，1667～1748）呼吁数学家们重新研究这个问题。他认为伽利略虽然提出了正确的思路，但伽利略没有讲清下滑曲线是圆弧的道理。为此，约翰·贝努利和他的哥哥雅各·贝努利，以及牛顿、罗必达等数学家，对此作了深刻的研究，终于发现连接 A、B 两点的最速降落曲线，即非直线也非圆弧，而是一条圆摆线！

比如：当一枚钱币在直线上滚动的时候，钱币上的一个固定点 P，在空间划出一条轨线，这条轨线便是圆摆线或称旋轮线。

设圆币的半径为 r，取圆币滚动所沿的直线为 X 轴，如图建立直角坐标系 XOY。假定初始状态时，圆币上的固定点 P 与原点 O 重合。则当圆币滚动φ角后，圆必滚动到 B 点，且圆与 X 轴相切于 A。作 PQ⊥AB，Q 为垂足。

很明显，弧 $\overset{\frown}{PA}$ 长等于 OA，从而 P 点的坐标（X，y）满足：

$$\begin{cases} x = OA - PQ = r\varphi - r\sin\varphi \\ y = AB + QB = r - r\cos\varphi \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = r(\varphi - \sin\varphi) \\ y = r(l - \cos\varphi) \end{cases}$$

这就是圆摆线的方程，它是以参数形式出现的。摆线上点的坐标都随着旋角φ的变化而改变！

现在，让我们回到 3 世纪前约翰·贝努利的、富有创造和想象的解答上

来。

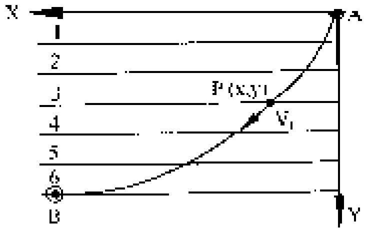
如图，把质点下降的平面分成许多间隔很小的等距离层。质点下降时，从 A 开始逐一地穿过这些层到达于 B。由于质点滑落到 P（X，y）处的动能，等于下落过程中势能的减少，即

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy$$

从而

$$v = \sqrt{2gy}$$

上式表明：此时此刻质点运动的速度只与它所在的层次有关。换句话说，下图中的质点，在各个分层中有着各自不同的运动速度。



就这样，约翰·贝努利靠着超人的天赋，立即联想起光的折射：从 A 点发出的光线，经一层又一层的折射，到达于 B_0 这条光线所走的路，肯定就是最速降落曲线！

妙极了！如此一个高深的问题，在一种巧妙的解析下，终于迎刃而解！

接下去的工作对于数学家来说是轻车熟路的了！假定光线在各层内的前进速度，恰等于质点在该层内的滑落速度，分别为 V_1，V_2，V_3…；进入各层时的入射角分别为 a_1，a_2，a_3…。由光的折射定律知：

$$\frac{\sin a_1}{v_1} = \frac{\sin a_2}{v_2} = \frac{\sin a_3}{v_3} = \Lambda$$

当层数分得无限多时，以上式子演化为

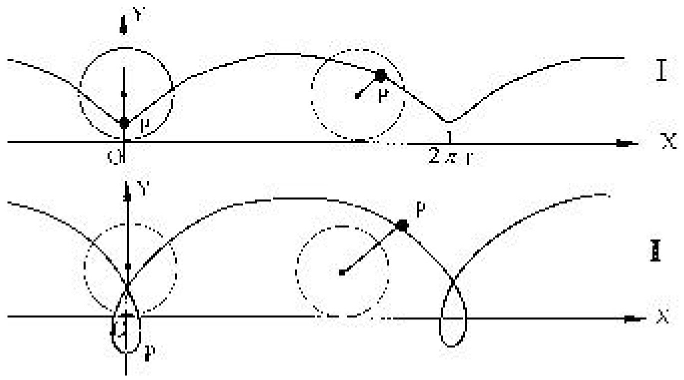
$$\frac{\sin a}{v} = \text{常量}$$

注意到曲线的切线的倾斜角β与入射角α之间存在着互余关系，从而

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}$$

$$\because v = \sqrt{2gy};\ \ tg\beta = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore y[1+(\frac{dy}{dx})^2] = \text{正常量}$$



后一式子在数学上称为微分方程。这个微分方程的解，正是前面介绍的圆摆线。

摆线的种类极多，当 P 点在动圆外或动圆内时，可分别得到如同上图的长幅摆线（II）和短幅摆线（I）。

如果动圆不是沿直线。而是沿定圆滚动时，也能得到形形色色的摆线，所有这些摆线家族的成员，全都非常美观。

从走迷宫到解题

“走迷宫”是智力游戏中一类颇具吸引力的题目，只要你有耐心，再凭着好一点的记忆，总是可以走得通的，可是要问你这里面有没有决窍，你就不一定知道了。这里是要向大家介绍的倒推法。

人们习惯于“顺推”，即从“入口”开始依次在各个叉口上来回探试，碰壁后再调整路线，这样反复试探，最终总可以找到“出口”；可是倒过来走，即从“出口”倒推到“入口”，则效果更佳。道理何在？

试想：迷宫的通路只有一条，但支叉很多，其中大多数是死胡同，这可以用图 1 来刻划，比如 A 是入口，E 是出口，你从 A 出发，中间经过许多叉口，如 B_k、C_k、D_k……这些叉口上分别又有新的支路通往下个叉口，此时你需要逐个去试探，不通再选择其它途径。可是反过来从 E 逆推到 A，问题就容易多了。下面我们来看个例子。

一个人质的双手被反绑着，把它关在一座楼房里。楼房的平面图图 2。楼房里的门都只能向一个方向开（有的可以拉开，有的可以推开），试问人质走怎样的路可以逃出？

从 A 到 B 顺着找出路固然可以（注意他双手被反绑着，只能推门不能拉门），但返过来从 B 找去 A 的路（当然这时的“推门”应变为“拉门”），似乎容易些，不信你试试看。

不知你想过没有：走迷宫是这样，解数学题有时也是如此，有些题目若用“倒推”法去解，将变得十分容易。

比如：有 37 个球队要进行单循环淘汰赛决定冠军，问一共要赛多少场？

我们可以用顺推办法算出来，但若用倒推法来解，便简单多了。因每一场可淘汰一个队，要决出冠军，当然要淘汰掉 36 个队显然共要赛 36 场。

下面来看几个题目：

一农妇提着一篮子鸡蛋去卖，第一次卖掉了全部鸡蛋的一半又多半个；第二次又卖掉剩下的一半又多半个；第三次又卖掉剩下的一半又多半个，最后农妇篮子里还剩一个鸡蛋。问农妇篮子里原来有多少鸡蛋：

第三次取后剩下一个鸡蛋；第二次取后剩下（1＋0.5）×2＝3 个鸡蛋；第一次取后剩下（3＋0.5）×2＝7 个鸡蛋，最初篮子里的鸡蛋数为（7＋ 0.5）× 2＝ 15 个。

一辆卡车以每小时 65 公里的速度在公路上行驶，距离它后面 5 公里处有一辆小轿车以每小时 80 公里速度同向行驶。不一会小轿车追上了卡车。请问在追上之前一分钟时，两车相距多远？

也许你要先求出小轿车多少时间可以追上卡车，然后再算算追上前一分钟时两车的距离，其实不必如此。我们仍用倒推法分析：在小轿车追上卡车前一分钟两车距离恰为小轿车与卡车一分钟内所走路程之差 250 米——显然，这个问题与两车开始的距离无关。

最后我们看一个抓牌游戏：

有 54 张牌，两个人轮流抓，每次每人可抓 1—4 张（但不能不抓），规定抓最后一张者为输。试问，怎样可以使你立于不败之地？

顺着推算，较难掌握规律与窍门，但若逆推，你会很快发现其中的奥妙。

你若想获胜，那么你最后一次抓牌后，应只剩下 1 张牌。

在这之前一轮，你应留给对手 6 张牌，无论对方抓几张，你总可以在你抓完牌后留给对手 1 张：

对手抓 1 张，你抓 4 张，最后剩 1 张；

对手抓 2 张，你抓 3 张，最后剩 1 张；

对手抓 3 张，你抓 2 张，最后剩 1 张；

对手抓 4 张，你抓 1 张，最后剩 1 张。

再往前一轮，你应留给对手 11 张牌……仿上倒推每次留给对手的牌数应是：

1→6→11→16→21……41→46→51。这样你可以立于不败之地。

好了，例子就举到这里。它给你留下什么印象？你不觉得“倒推”是一种十分有效的方法吗？

直觉不能解题

数学是严谨的，因而来不得半点马虎——大意了，就要出差错——即使是对大数学家而言也是如此（数学史上是不乏其例的）。

“四色定理”（球面或平面上的图形仅用四种颜色即可使得任何相邻的区域分辨开）是一个貌似简单的定理，直到 1978 年才有人借助于大型电子计算机的帮助将它证出（花了 1200 小时机上时间）。上个世纪末，德国的数学家闵可夫斯基在苏黎士大学给研究生们上课时，草率地谈起这个定理说：“它之所以没有证出来，是因为世界上第一流的数学家没有去考虑它。”说完他大笔一挥在黑板上演证起来。他本想一挥而就，轻松地拿下这个问题，但事与愿违，他写了满满几黑板，发现头绪越来越多——最后“挂”了黑板。

下面的几个小问题看上去十分容易，但请你仔细考虑后再回答，不然也会出错的。

还剩几个角

这个问题也许是“老生常谈”了：一个正方形的木板，锯下一个角，还

剩几个角？

当然答还剩三个角不对；还剩五个角对吗？其实也不对，不信请您看看下图，然后自己给出答案来。

请你再考虑：一个长方体木块锯去一个“角”后还剩几个“角”？（答案有四种）

平均速度

小华骑车进城买东西，他家离城 10 里。去时正赶顶风，每小时只能骑 10 里；回来时他想正好顺风快点骑。那么他每小时行多少里才能使他往返的平均速度达到每小时 20 里？

乍一看，似乎返程时他的速度达到每小时 30 里就行！又错了。那到底要骑多快才行？我们还是算算看。

设返程速度为每小时 V 里，依题意有：

$$20\times(\frac{10}{10}+\frac{10}{v})=10\times 2,$$

即$1+\frac{10}{v}=1$或$\frac{10}{v}=0,$

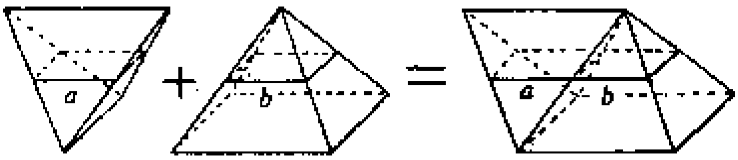
那么 V 应该等于多少？等于多少都不行，这是没法达到的平均！

还剩几个面

一个正四棱锥和一个正三棱锥的侧面形状全等，当把这两个几何体以侧面为基准粘合在一起后，还露出几个面？

七个，你当然会脱口说道，其实是五个。说起来这还有一段小故事呢！

这道题目是 1982 年美国“初等学术能力测验”的一个题目，全美有 83 万中学生参加。题目的标准答案是七个，然而 17 岁的丹尼尔·路文的答案是五个。过后路文自己动手做了模型，证实了自己的结论——主考机关最后只得宣布路文的答案是对的。道理在哪儿呢？请见下图。



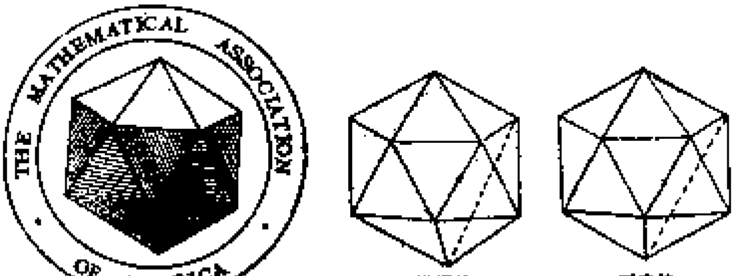
如图，对正三棱锥而言，凡与任意两条不相邻的棱平行的截面均为矩形；对正四棱锥而言，凡与其底面平行的截面均为正方形。现通过棱的中点分别取两个这样的截面。则当两个棱锥重合一个侧面后，这两个截面在重叠面上的两条边也恰好重合，而另两条边（如图中 a、b）都在原正四棱锥的底的平行平面内，且夹角为 180°，故 a、b 边所在同侧的两侧面是共面的。

同理可知与其相对的另两个同侧侧面也共面。

这样两棱锥重叠一个侧面后共消失了 2＋（4－2）＝4 个暴露面，只剩下 9－4＝5 个暴露面。

错了五十年的会徽

最后我们想讲一个小故事。美国数学会是一个在国际上甚有影响的数学组织，它有 19500 名会员。1942 年美国数学会所办杂志《美国数学月刊》上刊载了美国数学会会徽（见下图），圆圈里面是一个正 20 面体，对于它的权威性似乎无人怀疑。



错误的　　正确的

五十多年以后，美国华盛顿大学的 55 岁的布兰高·格林鲍华（南斯拉夫出生的美国人）从民主德国的邮票上发现其正 20 面体图案有误，在他进而想到美国数学会会徽图案时，他自己惊呆了——那也是一个错误的图案。

注意上图中的正三角形有箭头的那条边，应与图中虚线平行才正确，而会徽上的这两条线却不平行（如今此图案已改正）。