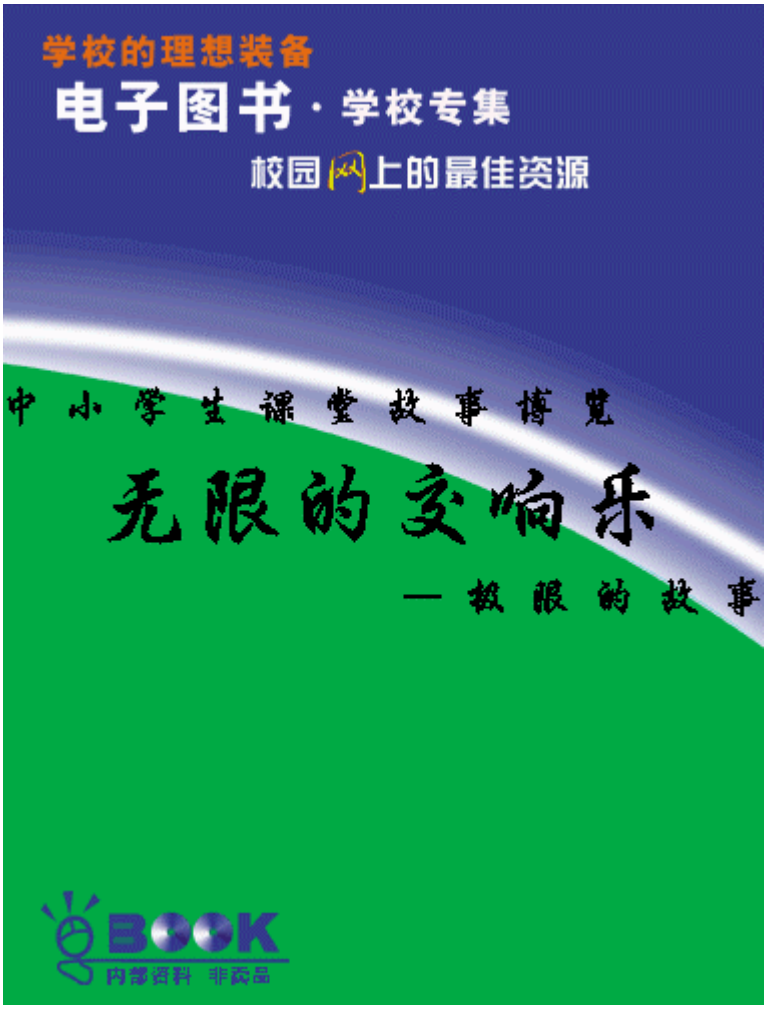

学校的理想装备
电子图书·学校专集
校园网上的最佳资源
中小学生课堂故事博览
无限的交响乐
——极限的故事
BOOK
内部资料 非卖品

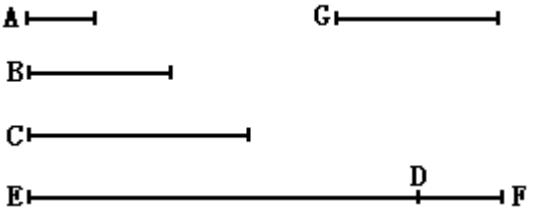
无限的交响乐

——极限的故事

“无限”的诞生

无限的思想诞生于何时何地，如今已难确切查考了。然而古希腊学者欧几里得（Euclid，公元前330～前275）的名著——《几何原本》第九卷中对质数无限性的认识十分精彩。

文中全部用几何的方式，表述了一个纯粹数的问题！其中“测量”一词，即算术中的“除尽”。



“质数比任何给定的一批质数都多。”

“假设A，B，C是指定的质数；我说除了A，B，C之外还有其他的质数。事实上，取A，B，C所能测量的最小数，设它为DE；把单位DF加到DE上。于是EF或者是质数或者不是。首先，假设EF是质数，那么我们已得到了质数A，B，C，EF，它比质数A，B，C要多。其次假设EF不是质数，从而它必能被某个质数所测量。假设它能被质数G测量。我说G和数A，B，C，都不相同。因为，如果可能的话，假定G和A，B，C中的某个数相同。那么由于A，B，C能测量DE，所以G也能测量DE。但G还能测量EF。所以G作为一个数，它就能测量余数，也就是单位DF；而这是荒谬的！所以，G与A，B，C当中的任何一个数都不相同。并且按照假设，G是质数。所以我们就找到了质数A，B，C，G，它比给定的一批质数A，B，C更多”。

这个证明可以推广到多个质数的情形，即若2，3，5，7，11……，P为所有不大于P的质数，则

$2\times3\times5\times7\times11\times\cdots\cdots\times P+1=N$

数N或者是质数，或者所有的质因子都大于P。

在他之前约200年,另一位古希腊学者芝诺(Zenon,公元前496～前429)曾提出一个著名的“追龟”诡辩题。从中，我们可以看到当时人类对“无限”的认识，及理解上的局限。大家知道，乌龟素以动作迟缓著称，阿基里斯则是古希腊传说中的英雄，善跑的神。芝诺断言：阿基里斯与龟赛跑，将永远追不上乌龟！

芝诺的理由是：如图所示假定阿基里斯现在A处，乌龟现在T处。为了赶上乌龟，阿基里斯先跑到乌龟的出发点T，当他到达T点时，乌龟已前进到T1点；当他到达T1点时，乌龟又已前进到T2点，如此等等。当阿基里斯到达乌龟前次到达过的地方，乌龟已又向前爬动了一段距离。因此，阿基里斯是永远追不上乌龟的！

芝诺的论断显然与常理相悖。由于当时人类只有粗糙的无限观念，数学家们曾经错误地认为：无限多个很小的量，其和必为无限大。芝诺正是巧妙地钻了这个空子：把有限长的线段分成无限多个很小线段的和；把有限的时间可以完成的运动，分成无限多段很短的时间来完成。芝诺的“追龟”问题，无疑是向当时错误的“无限”观念提出了挑战。数学家们感到数学面临着潜在的危机！

后来人们终于弄清楚，要克服上述危机，需要一场观念上的革命。即无

限多个很小的量的和，未必是无限大！“无限”地累加，也可能得出有限的结果！

让我们再看一看追龟问题。设阿基里斯的速度是乌龟的十倍，龟在前面100 洣。当阿基里斯跑了 100 洣时，龟已前进了 10 洣；当阿基里斯再追 10 洣时，

龟又前进了1洣；阿再追1洣；龟又进了 $\frac{1}{100}$ 洣，……。于是：阿基里斯追上乌龟所跑的路程 S：（单位洣）

$$S=100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots\cdots$$

上式右端是无限多个很小量的和，然而它却是有限的！为了让读者理解这一点，我们先从等比数列的知识讲起。

一个数列，如果从第二项起每项与前一项的比是个常数，我们把这个数列叫做等比数列，常数叫这个等比数列的公比，例如

①1，2，2^2，2^3，2^4，……2^{63}

②1，7，7^2，7^3，7^4……都是等比数列。

现在假定有一等比数列，第一项为 a，公比为 q：

a，aq，aq^2，……，aq^{n-1}

怎样去求它的前 n 项和 Sn 呢？一个颇为巧妙的办法是：把 Sn 乘以 q，然后错位相减，即：

$S_n=a+aq+aq^2+\cdots\cdots+aq^{n-1}$

$q\cdot S_n=aq+aq^2+aq^3+aq^n$

$S_n(1-q)=a-aq^n$

$$S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

这样，我们得出了一个很有用的公式。

当等比数列的公比 q 的绝对值小于 1 时，数列的项无穷递缩，越来越趋近于 0。此时，虽然项数有无限多个，但它们的和却是个有限的数。事实上，当 0＜｜q｜＜1 时：

$$\begin{aligned}S&=a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots\\&=\lim_{n\to\infty}S_n\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}\\&=\frac{a}{1-q}\end{aligned}$$

上式中符号“lim”，“是英语 limit（极限）一词的缩写”。表示“当 n 趋于无穷时某式的极限”。

应用上述公式可以算得追龟问题中阿基里斯的追及路程：

$$S = 100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{100}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1000}{9}(\text{涞})$$

与古希腊相比，我们的祖先对“无限”的概念可要明确得多。几乎与芝诺处于同一时代的墨子（公元前 468～前 367）就曾提出过“莫不容尺，无穷也”的见解。这就是说，有这样一种量，用任意长的线段去量它，它都能容纳得下。这是明显的“无限”的思想。稍后于墨子的《庄子》一书，更提到“至大无外，至小无内”。前半句讲的是无限大，后半句讲的是无限小。该书《天下篇》中还有一句名言：

“一尺之棰，日取其半，万世不竭！”意思是，把长一尺的木棒，每天取下前一天所剩下的一半，如此下去，永远也不会取完。

若$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}$

则$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$

分牛传说析疑

传说古代印度有一位老人，临终前留下遗嘱，要把 19 头牛分给三个儿子。

老大分总数的$\frac{1}{2}$；老二分总数的$\frac{1}{4}$；老三分总数的$\frac{1}{5}$。按印度的教规，牛被视为神灵，不能宰杀，只能整头分。先人的遗嘱更需无条件遵从。老人死后，三兄弟为分牛一事而绞尽脑汁，终于计无所出，最后决定诉诸官府。官府面对此事一筹莫展，便以“清官难断家务事”为由，一推了之！

话说邻村住着一位智叟。一天，他路过三兄弟家门，见三人愁眉不展，唉声叹气。动问之下，方知如此这般。但见老人沉思片刻说：“这好办！我有一头牛借给你们。这样，总共就有20头牛。老大分$\frac{1}{2}$可得10头；老二分$\frac{1}{4}$可得5头；老三分$\frac{1}{5}$可得4头。你等三人共分去19头牛。剩下的一头牛再还给我！”

真是妙绝了！一个曾经使人绞尽脑汁的难题，竟如此轻松巧妙地得以解决。这自然引起了当时人们的热议，并一时传为佳话，以至流传至今。

不过，后来人们在钦佩之余总带有一丝怀疑。老大似乎只该分 9.5 头，最后他怎么竟得了 10 头呢？

这件事终于惊动了数学家，他们决心对此弄个水落石出！数学家们进行了

如下计算：19头牛按老大$\frac{1}{2}$，老二$\frac{1}{4}$，老三$\frac{1}{5}$的份额去分，各人分别可得$\frac{19}{2}$头，$\frac{19}{4}$头和$\frac{19}{5}$头。这时显然没有分完，还剩下（$19-\frac{19}{2}-\frac{19}{4}-\frac{19}{5}$）$=\frac{19}{20}$头。

所剩的牛自然仍要按遗嘱分给各人。于是老大又得$\frac{1}{2}\times\frac{19}{20}$头；老二又得$\frac{1}{4}\times\frac{19}{20}$头；老三又得$\frac{1}{5}\times\frac{19}{20}$头。计算一下便知道，牛仍未被分完，还剩$\frac{19}{20^2}$头。于是还得再按遗嘱规定去分，如此等等。这个过程可以一直延续到无究，只是每次所剩越来越少罢了！

很明显，在上述过程中老大共分得牛数

$$S_1=\frac{19}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{19}{20}+\frac{1}{2}\times\frac{9}{20^2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{19}{2}}{1-\frac{1}{20}}=10$$

同理，老二、老三所分牛数

$$S_2=\frac{19}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{19}{20}+\frac{1}{4}\times\frac{19}{20^2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{19}{4}}{1-\frac{1}{20}}=5$$

$$S_3=\frac{19}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{19}{20}+\frac{1}{5}\times\frac{19}{20^2}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{19}{5}}{1-\frac{1}{20}}=4$$

数学家们终于用审慎的态度支持了智叟。他们宣告说：智叟的分牛结论是正确的！

没过多久，有人对智叟的“动机”提出了疑议，他们认为智叟的做法充其量只是“瞎猫碰上死老鼠”而已。他们举例说，倘若老人留下的只是 15 头牛

而不19头；遗嘱规定的是老大分$\frac{1}{2}$，老二分$\frac{1}{4}$头牛老三分$\frac{1}{8}$那么结果又将怎样呢？

设想智叟牵来一头牛，添成 16 头。按遗嘱：老大分 8 头，老二分 4 头，

老三分 2 头。三人共分去 14 头牛。那么，智叟是否要把剩下的两头牛都牵回去？谁敢保证智叟没有“渔利”之嫌？！

说的不无道理！于是一个即将偃旗息鼓的问题，又死灰复燃起来。经过几番争论，人们终于弄清楚，智叟的办法确实带有某种盲目性！问题的症结不在于智叟是否牵牛来，或牵几头牛来又牵几头回去，而在于按遗嘱三兄弟所获牛数的比：

$$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}=10:5:4$$

只要最后这个简单的整数比，能够将 19 整分，那么结果必然皆大欢喜，又何须再牵一头牛来？反之，如若遗嘱中的简单整数比，不能将牛数整分的话，那么纵然智叟有再高十倍的智商，也只能是一阵空忙！

上述结论为人们提出了分牛问题的最佳解答：

$$\begin{cases} S_1 = 19\times\dfrac{10}{10+5+4}=10 \\ S_2 = 19\times\dfrac{5}{10+5+4}=5 \\ S_3 = 19\times\dfrac{4}{10+5+4}=4 \end{cases}$$

神奇的质数序列

瑞士数学家列昂纳德·欧拉（leonhard Euler，1707～1783）

从 19 岁开始发表论文，直至 76 岁。半个多世纪期间，共写出论文、论著 868 篇，其中有近 400 篇是在他双目失明的 17 年间靠心算和口述写成的。在欧拉逝世后，彼德堡科学院为整理他的遗稿，足足忙了 47 年！他勤勉而光辉的一生，为人类智慧的宝库增添了巨大的财富！

欧拉关于质数无限性的精彩证明，绝非欧几里德证明所能相比！

大家知道，当 o＜X＜1 时，我们有：

$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots=\dfrac{1}{1-x}$，从而

$$1+x+x^2+\cdots\cdots x^n<\frac{1}{1-x}$$

若P为任一质数，则$x=\dfrac{1}{P}<1$，有：

$$1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{p^n}<\frac{p}{p-1}$$

另一方面，在非常著名的自然数倒数的求和式中

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$$

尽管后来的项越来越小，但其部分和却能无限地增大。事实上，令

$$A_m=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

则有$A_{m+1}-A_m=\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}$

$$>\frac{1}{2^{m+1}}\cdot 2^m=\frac{1}{2}$$

同理可得：$A_m-A_{m-1}>\frac{1}{2}$

$$A_{m-1}-A_{m-2}>\frac{1}{2}$$

$$\cdots\ \cdots\ \cdots$$

$$A_2-A_1>\frac{1}{2}$$

$$A_1-A_0\geq\frac{1}{2}$$

以上各式相加，并注意到 $A_0=1$ 则得：

$$A_{m-1}>\frac{1}{2}m$$

这证明了 A_m 当 m 增大时，能够无限地增大。

下面我们回到欧拉关于质数无限性的讨论上来。用反证法，假设质数序列是有限的，它们依序是

2，3，5，7，11，……，P

于是，我们有：

$$A_m=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^m}$$

$$<(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})\cdot(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n})$$

$$\cdot(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{5^n})\cdots\cdots(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^n})$$

这是因为左式分母的每一个数，都可以唯一地分解为若干质数的积，而这些积都对应着右式展开后的某一个项。当然，在 m 确定之后，我们的 n 必须选择得足够大。显然，右式对任何的 n 都小于 M_p

$$M_p=\frac{2}{2-1}\cdot\frac{3}{3-1}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot\cdots\cdot\frac{P}{P-1}$$

而 M_p 是一个固定的数。当 m 取很大时必有

$$M_p<1+\frac{m}{2}$$

这样一来，我们同时有一串矛盾的不等式

$$1+\frac{m}{2}<A_m<M_p<1+\frac{m}{2}$$

这表明原先假定质数序列有限是错误的。这便是欧拉关于质数无限性的证明！这个证明过程，充分体现了无限中有限的思想。

当然，欧几里得的证法，也因首次冲破质数无规律的障碍而载入史册。相同的方法可以用来证明质数序列中存在着很大的间隙。事文上，我们可以随心所欲地挑出一串足够长的连续合数，并把它插在两个质数的间隙之中！

例如，我们希望插入 1000 个连续合数。我们可以先找出第一个大于 1000 的质数 1009，那么以下的 1000 个数：

$$2\times3\times5\times\cdots\times1009+2$$
$$2\times3\times5\times\cdots\times1009+3$$
$$2\times3\times5\times\cdots\times1009+4$$
$$2\times3\times5\times\cdots\times1009+5$$
$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$
$$2\times3\times5\times\cdots\times1009+1001$$

显然便是连续的合数。这意味着我们在质数序列中，至少找到了 1000 个数的间隙！

虽然质数序列稀稀拉拉，但是，质数之间也不是个个都离得很开。人们也发现了不少紧挨在一起的质数，如：3，5；5，7；11，13；17，19；29，31；…；10016957，10016959；…；1000000007，1000000009；…。这使得质数序列显得更加神秘莫测。

公元 1830 年，法国数学家勒让德（Legendre，1752～1833）猜想，小于 N 的质数个数π（N）为

$$\pi(N)\sim\frac{N}{InN}$$

而号称“数学之王”的高斯（Gauss，1777～1855），也几乎同时独立地猜出了这一公式。勒让德和高斯的猜想，具有很高的精确度。

然而，在很长的一段时间里，勒让德和高斯的结论依然停留在猜想上。只是在 20 年之后，大约公元 1848 年，俄国数学家车比雪夫取得了一些积极成果，但此后又沉寂了半个世纪。直到上世纪末，公元 1896 年，智慧超群的法国数学家阿达玛（Hadamard，1865～1963）和比利时数学家布散（Poussin）同时独立地取得了这一猜想的严格证明，并称之为“质数定理”。

“质数定理”同时独立地被提出，又同时独立地被证明，这不能不成为数学史上的佳话！鉴于阿达玛的证明需要用到高深的知识，数学家们常常为此感到美中不足。人们为寻找更为简易的证明，又花去了半个世纪。公元 1949 年，质数定理的初等证明终于被找到。

大凡有关质数分布的命题，包括前面讲的质数定理，其证明大都使用到欧拉在证明质数无限性时所创造的方法，这大概就是数学家们为什么对欧拉的证明感到特别赞叹的原因！

“有限”的禁锢

有限，常常禁锢着人们的思想。大家习惯于把有限运算的法则，不知不觉地运用到运算中去。当人们为某些正确的成果而欢欣鼓舞的时候，往往忽略了思维中的潜在危险！

下面是一些十分有趣的循环算式计算：

如$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{\cdots\cdots}}}}}$，这类循环算式是可以直接加以计算的，事实上

$$x = 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots} \cdot 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\cdots}$$

$$= 3^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}} \cdot 5^{\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}}$$

$$= 3^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{45}$$

但如果注意到

$$x = \sqrt{3\sqrt{5x}}$$

则 $x^4 = 45x$

立得 $x = \sqrt[3]{45}$（**舍去** $x=0$），**这显然要简单得多。**

又如下面的无限分数

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2+O}}}$$

易知有 $x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{x}}$

从而 $2x^2 - 2x - 1 = 0$

$$x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} (x > 0)$$

读者中可能很少有人会对上面运算的正确性表示怀疑。其实，这些计算必须以“循环算式的值”存在为前提。倘若不是这样的话，我们甚至会得出荒谬的结果！下面的例子在历史上是颇为有名的：

三个学生用三种不同的方法，计算式子

1-1+1-1+1-1+……

竟然得出各不相同的结果！

某甲：原式＝（1-1）＋（1+1）＋（1-1）＋……

＝0＋0＋0＋……＝0；

某乙：原式＝1+（-1＋1）＋（-1＋1）＋（-1＋1）+……

＝1+0+0+0＋……＝1；

某丙：令 X＝1－1＋1－1＋1-1＋……

∵X＝1－（1－1＋1-1+1-1＋……）

＝1-X

∴2X＝1， $X = \frac{1}{2}$**。**

亲爱的读者，依你之见，他们三人谁是对的呢？

要跨越有限的栏栅，需要一种异乎寻常的思考，下面一道问题的最终结果，可能会大大出乎人们的意料！

公元 1799 年，德国数学家高斯证明了代数学的一个基本定理。即 n 次方程必有 n 个根。对于一个简单的方程

$$x^2 = x$$

我想读者都能准确无误地求出它的根来:$x_1=1$，$x_2=0$。倘若有人告诉你，你所求的只是有限根，还有两个“无限”解没求出哩！对此，你一定会大感惊讶，然而这是确实的！

显然，要使 $x_2=x$，x 的个位数字只能是 1，5，6 三个。如果同时考虑十位数的话，那么只有以下的两种可能：

$$\begin{cases} x_1=\cdots\cdots 25 \\ x_2=\cdots\cdots 76 \end{cases}$$

为求 x_1 的百位数字，可令（k_1 为 0 至 9 的数字）：

$x_1=\cdots\cdots k_1 25$

$$x_1^2=(\cdots\cdots k_1)^2\times 10^4+2\times(\cdots\cdots k_1)\times 10^2\times 25+25^2$$

$=\cdots\cdots 625$

$\because x_1^2=x_1$

$\therefore k_1=6$ 接下去再令 $x_1=\cdots\cdots 1_1 625$

$$x_1^2=(\cdots\cdots 1_1)^2\times 10^6+2\times(\cdots\cdots 1_1)\times 10^3\times 625+625^2$$

$=\cdots\cdots 0625$

又得 $1_1=0$

以上步骤可以一步一个脚印地做下去，得出一个满足“$x_1^2=x$”的无限长的“数”

$x_1=\cdots\cdots 2890625$

从推导的过程容易看出，这个无限长的“数”等于$(((5^2)^2)^2)^{2^N}$

求 x_2 的过程稍微复杂一些，但方法是一样的。令

$x_2=\cdots\cdots k_2 76$

$$x_2^2=(\cdots\cdots k_2)^2\times 10_4+2\times(\cdots\cdots k_2)\times 10^2\times 76+76^2$$

$$=(\cdots\cdots k_2)^2\times 10_4+15200\times(\cdots\cdots k_2)+5776$$

$\because x_2^2=x_2$

$\therefore 2k_2+7=K_2+10$，$k_2=3$

从而 $X_2=\cdots\cdots 376$

同样，我们可以求出 x_2 的后四位数为 9376；后五位数为 09376；再下去又有 109376；如此等等，一位一位数字地往前算，便得到另一个无限长的“数”

$X_2=\cdots\cdots 7109376$

至此，一个极为普通的二次方程“$x_2=x$”除通常的 X=0，x=1 两个解外，居然又找到了两个“无限”的解：

$$\begin{cases} x_1=\cdots\cdots 2890625 \\ x_2=\cdots\cdots 7109376 \end{cases}$$

对此有趣的结沦，聪明的读者难免感到意外，并对如今的方程理论，重作一番认真的思考。

由于 X_1 的右起各位数字，可以通过下面的计算求得：

5 5

5^2 25

$(5^2)^2$ 625

$((5^2)^2)^2$ $**0625$

$(((5^2)^2)^2)^2$ $*******90625$

… …

$(((5^2)^2)^2)^2$ …2890625

因此，我们完全不必一位接一位地推算。上表的右边便是直接得到的结果。“ ＊ ”是无效的数字。但求 X_2 却没有相应于上述的那种捷径。不过，下面的表却可以帮助你很快地通过 X_1 求得它！

右起位数	x_1 的右起数字	X_2 的右起数字	左两栏和
1	5	6	11
2	25	76	101
3	625	376	1001
4	0625	9376	10001
5	90625	09376	100001
M	M	M	M
n	…	…	(10^n+1)

康托的“ 无限理论 ”

倘若有人告诉你，一根头发丝上的点，和我们生活着的宇宙空间里的点一样多。对此，你可能感到不可思议！其实，只要挣脱“ 有限 ”观念的束缚，上面讲的一切都可能发生！

虽说人类早在二千年前就认识“ 无限 ”，但真正接触无限本质的却鲜有其人。第一个有意识触及“ 无限 ”实质的，大约要算意大利科学家伽俐略，他把全体自然数与它们的平方一个对一个对应起来：

1 2 3 4 5 6

β β β β β β ……

1^2 2^2 3^2 4^2 5^2 6^2……

它们谁也不多一个，谁也不少一个，一样多！然而，后者很明显只是前者的一部分。部分怎么能等于整体呢？伽俐略感到迷惑了，但他至死也没能理出一个头绪来！

真正从本质上认识“ 无限 ”的，是年轻的德国数学家，29 岁的伯林大学教授乔治·康托（G·Gantor，1845～1918）。他的出色的工作，起于公元 1874 年。

康托的研究是从计数开始的。他发现人们在计数时，实际上应用了一一对应的概念。譬如教室里有 50 个座位，老师走进教室，一看坐满了人，他再也无须张三李四地一个个点数，即知此时听课人数为 50。这是因为每个人都

占一个座位，而每个座位都坐着一个人，两者成一一对应。倘若此时空了一些座位，我们立即知道，听课学生少于 50，这是因为“ 部分小于整体 ”的缘故。然而这只是有限情形下的规律。对于无限的情形，就像前面讲到的伽俐略例子一样，部分可能等于整体！这，正是无限的本质！

经过深刻的思考，康托教授得出一个重要结论：即如果一个量等于它的一部分量，那么这个量必是无限量；反之，无限量必然可以等于它的某一部分量。

接着，康托教授又引进了无限集基数的概念。他把两个元素间能建立起一一对应的集合，称为有相同的基数。例如伽俐略的例子，自然数集与自然数平方的数集，有着相同的基数。康托教授正是从这些简单的概念出发，得出了许多惊人的结论。

例如，康托证明了在数轴上排得稀稀疏疏的自然数，能够与数轴上挤得密密麻麻的有理数全体，建立起一一对应。也就是说，自然数集与有理数集有相同的基数！

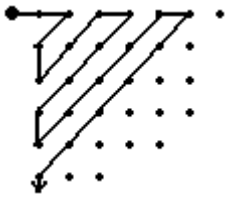
下面是康托的证明。

先把全体有理数按表 1 排列，表中的每一个数都对应着唯一的一个有理数。反之，任何一个有理数也都可以在下表中找到。表的构造细看自明：

现在我们把表中的数，按下页图箭号方向的顺序排成一串长队，删去与前面重复的数后，便得出已经排了队的全体有理数。

0，1，2，－1，$\frac{1}{2}$，－2，3，4，-3，……它显然可以与自然数建立一一对应。因此有理数集与自然数集基数相同。

由于自然数集的元素是可以从一开始逐个点数的，所以凡是与自然数集基数相同的集合，都具备可数的特性。显然，可数集基数是继有限数之后紧挨的一个超限数。为叙述方便，康托教授用希伯莱字母“ 阿列夫 ”卍，加上下标 0 来表示它。于是，我们有以下的基数序列：



1，2，3，4，5，……卍。

这一序列后面还有没有其他的超限基数？答案是肯定的。因为倘若所有的无限集基数都相同，那么康托教授的理论也就无足轻重了！

下面我们再看一些令人惊异的例子。

下图可能是读者所熟悉的，它建立了圆周与直线上点的一一对应。这表明一个有限长圆周上的点，可同无限长直线上的点一样多！

更为神奇的是，我们还能得出，单位线段内的点，能与单位正方形内的点建立起一一对应。这一点远不是人人都很清楚的。大约读者中也会有不少人对此表示诧异！

其实，道理也很简单。设单位正方形内点的坐标（α，β）其 K 中α，β写为十进小数是：

$$\begin{cases}\alpha=0.a_1a_2a_3a_4a_4\cdots\cdots\\ \beta=0.b_1b_2b_3b_4\cdots\cdots\end{cases}$$

令 $\gamma=0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots\cdots$

则 γ 必为（0，1）内的点。反过来，单位线段内部的任一点 γ^*：

$\gamma^*=0.c_1c_2c_3c_4c_5c_6c_7c_8\cdots\cdots$它对应着单位正方形内部的唯一一个点（$\alpha^*\beta^*$）。

$$\begin{cases}\alpha^*=0.c_1c_3c_5c_7\cdots\cdots\\ \beta^*=0.c_2c_4c_6c_8\cdots\cdots\end{cases}$$

这样，我们也就证明了一块具有一定面积的图形上的点，可同面积为零的线段上的点一样多！

瞧！康托的“无限理论”是多么地奇特，多么地与众不同，又多么地与传统观念格格不入？！难怪康托的理论从诞生的那一天起，便受到了习惯势力的抵制。有人甚至骂他是疯子。连他所敬重的老师，当时颇负盛名的数学家克朗涅克（Krone－cker，1823～1891），也宣布不承认康托是他的学生！精神上的巨大压抑，激烈论战的过度疲劳，终于超出康托所能忍受的限度。1884 年，康托的精神崩溃了！此后他时时发病，并于公元 1918 年 1 月 6 日逝世于萨克逊州的一所精神病医院。

然而，历史是公正的。康托的理论并没有因歧视和咒骂而泯灭！如今康托所创立的集合论，已成为数学发展的基础。康托使人类从本质上认识了“无限”。人们将永远缅怀他的不朽功绩！

奇妙的无限大算术

为 20 世纪数学的攻坚吹响进军号的德国数学家大卫·希尔伯特，曾经讲过一个关于无限的非常精彩的故事：

我们设想有一家旅店，内设有限个房间，而所有的房间都已客满。这时来了一位新客，想订一个房间。旅店老板会怎么说呢？他只好讲：

“对不起，房间都住满了，请另想办法吧！”

现在再设想另一家旅店，内设无限个房间，所有房间都住满客人。这时也有一位新客来临，想订个房间。这时却听到旅店老板说：

“不成问题！”

接着，他就把一号房间的旅客移到二号；二号房间的旅客移到三号；三号房间的旅客移到四号；如此等等。在经过一场大搬家之后，一号房终于被腾出来，新客就被安排在一号房里。

不久，突然来了无穷多位要求订房间的客人。怎么办呢？老板急中生智，又想了妙法：

“好的，先生们，请稍等一会”老板说。

接着，他通知一号房间的旅客搬到二号房；二号房间的旅客搬到四号房；三号房间的旅客搬到六号房；四号房间的旅客搬到八号房；如此等等。

现在，所有单号的房间都腾出来了！新来的无穷多位旅客，便可以安稳地住进去了！

希尔伯特的这个故事，把无限的特性刻划得维妙维肖！它说明了下面的

真理：即可数集加一个或几个元素仍是可数集；可数集加上可数个元素还是可数集。用符号表示就是：

卍$_0$+1=卍$_0$

卍$_0$+n=卍$_0$

卍$_0$+卍$_0$=卍$_0$

这便是无限大的加法。

下面我们再研究卍$_0$的乘法运算。

假定有两个无限集合

{○，△，▽，□，……}；

{白，重边，阴影，阴阳，黑}

它们的元素个数，分别等于已知的基数。那么很自然，两个基数的积，可以定义为由两个集合元素配合而得到的新集合的基数。下表列出了新集合的所有无素。这个新集合的基数

（○，白），（○，重边），（○，阴影），……

（△，白），（△，重边），（△，阴影），……

（▽，白），（▽，重边），（▽，阴影），……为卍$_0$，写成式子是：卍$_0$卍$_0$=卍$_0$。

由于 2×卍$_0$、3×卍$_0$。等等，不可能有比卍$_0$×卍$_0$更大的基数，从而也就意味着对于正整数 n 有：n×卍$_0$=卍$_0$

下面是一道明显的错题，它可以帮助人们弄清有限算术和无限算术的界限。

有人作了以下推理：

∵2 卍$_0$=卍$_0$

∴2=卍$_0$/卍$_0$=1

亲爱的读者，你知道错在哪里吗？

为了让读者一睹卍在应用上的风采，我们介绍一个数学史上的重大发现。

公元 1851 年，法国数学家刘维尔（Liouville，1809～1882）首次证明了“超越数”的存在。

什么是超越数？如果一个实数，满足形如

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$

的整系数代数方程（$a_n\neq0$）。那么，这个实数就叫“代数数”。实数中除代数数之外，其余的数都是超越数。代数数范围很广，像$\frac{3}{5}$，$\sqrt[3]{7}$，$\sqrt{2+\sqrt{2}}$，……都是代数数。超越数为人类所认识的第一个数，是刘维尔找到的，后来就叫刘维尔数。它是一个无限小数，其中的 1 分布在小数后第 1，2，6，24，120，720，5040，……等等处：

L＝0.11000100000000000000000001000……

刘维尔的论证是艰难的。不过，在一个半世纪后的今天，应用神奇的无限大算术，人们可以相当轻松地证明超越数的存在！事实上，在整系数代数方程

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0=0$，（$a_n\neq0$）

中（n＋1）个系数都只能取整数值，因此这样方程集合的基数当为：$卍_0^{n+1}$，（n＝1，2，3，……）

而对于全部的整系数代数方程，其集合的基数当为：

$$卍_0 + 卍_0^2 + 卍_0^3 + \cdots 卍_0^{n+1} + \cdots$$

$$= 卍_0 + 卍_0 + 卍_0 + \cdots + 卍_0 + \cdots$$

$$= 卍_0 \times 卍_0 = 卍_0$$

另一方面，每个 n 次方程最多只能有 n 个根。因而代数的基数，当不大于

$$卍_0 \times 卍_0 = 卍_0$$

也就是说，代数数是可数的！

超越数虽然很多很多，但具体的超越性判定，却很难很难！在中学中最常见的两个超越数是，自然对数的底 e 和圆周率π：

e＝2.71828182……

π＝3.14159265……

他们的超越性，是由法国数学家埃尔洙 Hermit，1822～1901）和德国数学家林德曼（Lindemann，1852～1939），分别于公元 1873 年和 1882 年证明的！

“连续统”之谜

在学习代数中都有体会，乘方运算要比加法和乘法运算有力得多，那么在集合中这种乘方是什么含义呢？

先让我们看看有限的情形吧！大家知道，一个单元素的集合，其子集共有两个，即空集φ和本身；一个双元素的集合，易知其子集有 4 个，即 2^2 个；而一个有三个元素的集合 {a，b，c} ，它的全部子集可以求得，共有 $8＝2^3$ 个，那么，一个具有 n 个元素的集合

$P＝ \{a_1，a_2，a_3，\cdots，a_n\}$

它的全部子集是否有 2^n 个呢？我们说：是的！事实上，可以这样来构造 P 的子集：

元素 a_1 要么取，要么不取；

元素 a_2 要么取，要么不取；

元素 a_3 要么取，要么不取；

元素 a_n 要么取，要么不取。

由于每个元素都有“取”与“不取”两种可能，因此它们之间共有 2^n 种不同的组合。每种元素的组合都构成了一个子集，所以集合 P 共有 2^n 个子集。以这 2^n 个子集为元素的大集合，我们称为集合 P 的幂集。显然，如果集合 P 的基数为有限数 n，则幂集的基数为 2^n。

现在我们把幂集的概念推广到无限集去，把无限集的全体子集构成的集合也称为幂集。假定某无限集的基数为 $卍_0$，那么它的幂集的基数也可以形式地写为 $2^{卍_0}$。问题在于 $2^{卍_0}$ 等于多少？它能比 $卍_0$ 更大吗？

公元 1874 年，康托论证了幂集的无穷大级别大于原集的无穷大级别。特别地：

$2^{卍_0} > 卍_0$

康托教授终于使我们跳出了卍$_0$的圈子。

这样一来，我们得到了一个比卍$_0$更大的数$2^{卍_0}$，康托把它记为卍$_1$。利用求幂集的手段，我们又可以得到比卍$_1$更大的超限基数卍$_2$，卍$_3$等等。

$$卍_2 = 2^{卍_1} = 2^{2^{卍_0}}$$

$$卍_3 = 2^{卍_2} = 2^{2^{卍_2}} = 2^{2^{2^{卍_0}}} \cdots\cdots 。$$

就这样，康托找到了一个“青出于蓝而胜于蓝”的无穷大家族：

卍$_0$，卍$_1$，卍$_2$，卍$_3$，卍$_4$，……

阿列夫家族的第一代卍$_0$，便是大家熟知的可数集基数；阿列夫家族的第二代卍$_1$表示什么呢？读者很快便会看到，卍$_1$相等于全体实数的数目。

因为：任何一个实数都可以写成二进制数。反之，任何一个二进制数都表示一个实数。特别，一个二进制小数，表示[0，1]区间内的一个数。例如：

0.1101001…（2）

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + 0 + \frac{1}{2^4} + 0 + 0 + \frac{1}{2^7} + \cdots\cdots$$

$$= 0.5 + 0.25 + 0.0625 + 0.0078125$$

$$= 0.82\cdots\cdots$$

很明显，在可数集

Q＝ {a_1，a_2，a_3，……}

的子集和二进制小数之间，我们能够建立起一一对应。办法是：如果某子集包含Q中的某个元素，则在与该元素对应的小数位上写“1”，否则写“0”。如Q的子集

{a_1，a_3，a_4，a_8，a_{10}…}

则与其对应的二进制小数为

0.1011000101……（2）

反过来，任一个二进制小数，也对应着一个确定的Q的子集。如0.1101001……（2）

它对应着Q的子集

{a_1，a_2，a_4，a_7，……}

以上表明：Q所有子集与二进制小数有相同的数目。这一结论，换成另一种表述即：[0，1]线段上的点的数目有$2^{卍_0}$=卍$_1$个卍$_0$。

我们将从不同的角度，重新证实这一结果。

新的证明依然用反证法。假定区间△＝[0，1]上的点是可数的，它们已按某种规则排成一列：

α_1，α_2，…，α_n，…

把△分为相等的三部分[0，$\frac{1}{3}$]、[$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$]、[$\frac{2}{3}$，1]。显然，这三部分中至少有一部分不含α_1点。我们选定一个不含α_1点的部分，记为△1。接下去我们又把$\triangle_1$分成三个小、部分，又取其中不含α_2的一小部分，记为$\triangle_2$。如此等等，这样的过程可以无限地延续下去，结果得出一串一个套着一

个，并在越来越小的区间序列

$$\triangle \supset \triangle_1 \supset \triangle_2 \supset \triangle_3 \supset \cdots\cdots$$

上述的区间序列，最终套缩为区间［0，1］上的某个确定点ε。这一点ε自然应当是集合{α_n}的一个元素，不妨令ε＝α_1。

这样，一方面根据△n的选取得知：$\alpha_k \notin \triangle_k$。另一方面由区间套的性质又有：$\alpha_k S \in \triangle^k$。上述矛盾表明：假令区间[0，1]上的点“可数”是错误的。这便是实数集不可数的又一种证明！

上述证明，我们还可以通过以下的方法，使它变得更为直观。令：

α_1＝0.245087……

α_2＝0.307762……

α_3＝0.955451……

α_4＝0.107078……

α_5＝0.202169……

α_6=0.893321……

……

现构造一个小数ε，使ε的相应数位上的数字，恰与上表对角线上的黑体数字，构成以下关系：凡ε黑体数字非零，则ε相应数位上的数字为“0”，凡黑体数字为零，则ε相应数位上的数字为“1”。即

0.2 0 5 0 6 1……

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

0.0 1 0 1 0 0……

从而ε＝0.010100……

显然，数ε不可能等同于{α_n}中的任何一个。事实上，ε与α_k之间至少小数点后第K位数字是不相同的。你非0，我则0；你为0，我则1。

由于{α_n} 包含了[0，1]间的任一实数，从而有ε∈{a_n}

这与前面的结论明显矛盾，从而证得[0，1]上实数“可数”的反设是错误的！

由于[0，1]上的实数代表着连续的点，因此历史上常用记号C表示这种无穷大的基数，称为连续统基数。这里C是“连续统”的英文词的第一个字母。

神奇的循环小数

大概所有的中学生都知道，任何一个分数都能化成小数。要么是有限的，要么是无限循环的。用除法便能得到需要的答案。反过来，一个循环小数一定可以化为有理分数。如：0.16＝0.16＋0.0016＋0.000016＋……

$$0.\dot{1}\dot{6} = 0.16 + 0.0016 + 0.000016 + \cdots\cdots$$

$$= \frac{0.16}{1 - 0.01} = \frac{16}{99}$$

$$1.4\dot{3} = 1.4 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \cdots\cdots$$

$$= \frac{14}{10} + \frac{0.03}{1-0.1}$$

$$= \frac{14}{10} + \frac{3}{90} = \frac{43}{30}$$

不过，我们还有更为巧妙的计算方法：

令 $x = 0.1\dot{6}$

则 $100x = 16.\dot{1}\dot{6}$

即 $100x = 16 + x$

$\therefore\ x = \frac{16}{99}$

“ $0.\dot{9} = 1$吗？ ”，这一问题往往引起初学者的疑虑。他们感到明明前面的数比 1 小，怎么可能等于 1 呢？其实，在他们的脑中是用有限数

$$\underbrace{a_n = 0.9999\cdots\cdots99}_{(n\text{个}9)}$$

去跟1作比较。殊不知，当n趋于无限时有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

有些循环小数具有奇妙的特性，例如：

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

循环节 142857 是个很有趣的数。当把后面的数码依次调到前头时，所得的数恰是原来的倍数：

$$714285 = 142857 \times 5$$
$$571428 = 142857 \times 4$$
$$857142 = 142857 \times 6$$
$$285714 = 142857 \times 2$$
$$428571 = 142857 \times 3$$

其中，最后一道算式，即 1956 年上海市第一届中学生数学竞赛题的答案。原题如下：“ 设有六位数 labcde，乘以 3 后，变成 abcdel，求这个数 ”。

由于上题中的位数是确定的，所以可以用代数的方法进行求解。令

$$x = \overline{abcde}$$

则依题意

$$(10^5 + x) \cdot 3 = 10x + 1$$

解得 $x = 42857$

不过，倘若所求数的位数不知道，便就有些困难。这类问题在数学游戏中称为“ 蜻蜓咬尾 ”。下面便是一道“ 蜻蜓咬尾 ”题：一个多位数，最高位是 7，要把头上这个 7 剪下来，接到这个数的尾巴，使得到的新数是原数的七分之一。

这道题可以用蚂蚁啃骨头“ 的办法，从上式步步推算出结果。所得的是一个长达 22 位的数目

7101449275362318840579

循环小数最为神奇的性质是：分母是质数的分数，若具有偶数循环节，则其相隔半个循环节长度上的两个数字之和为 9。

为什么呢？假定p**为质数，**$\frac{n}{p}$**的循环节长为**$2s$**，前半循环节为**A**，后半循环节为 B。于是**

$$\frac{n}{p}=0.ABABAB\cdots\cdots$$

$$=\frac{\frac{A}{10^s}+\frac{B}{10^{2s}}}{1-\frac{1}{10^{2s}}}=\frac{A\cdot 10^s+B}{(10^s+1)(10^s-1)}$$

很明显 10^s-1 **不能被 P 整除，因为如若不然有**

$10^s-1=kp$

则 $$\frac{n}{p}=\frac{kn}{10^s-1}=\frac{kn}{10^s}(1+\frac{1}{10^s}+\frac{1}{10^{2s}})$$

其循环节长只有 S，这与原来的假定的矛盾。这样，由前面式子知道，P 既不能整除 10^8-1**，则必整除** 10^8+1

$$\therefore\ \frac{n}{p}\cdot(10^s+1)=\frac{A(10^s-1)+A+B}{10^s-1}$$

$$=A+\frac{A+B}{10^s-1}$$

上式左端显然是整数，从而右端也必须是整数。再注意到 A、B 都不大于 10^8-1**，从而只能：**

$$A+B=10^s-1=\underbrace{999\cdots9}_{s\text{个}9}$$

斐波那契数列

公元 1202 年，商人出身的意大利数学家斐波那契（Fi－bonacci，1170～1250），完成了一部伟大的论著《算法之书》。在书中，提出以下有趣问题：

假定一对刚出生的小兔一个月后就能长成大兔，再过一个月便能生下一对小兔，并且此后每个月都生一对小兔。一年内没有发生死亡，问一对刚出生的兔子，一年内繁殖成多少对兔子？逐月推算，我们可以得到前面提过的数列：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233。这个数列后来便以斐波那契的名字命名。数列的每一项，则称为“斐波那契数。”第十三位的斐波那契数，即为一对刚出一的小兔，一年内所能繁殖成的兔子的对数，这个数字为 233。

从斐波那契数的构造明显看出：斐波那契数列从第三项起，每项都等于前面两项的和。假定第 n 项斐波那契数为 u_n**，于是我们有：**

$$\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \end{cases} (n \geq 2)$$

通过以上的递推关系式，我们可以算出任何的 u_n，不过，当 n 很大时递推是很费事的，我们必须找到更为科学的计算方法！

下面我们就从等比数列

$1, q, q^2, q^3, q^{n-1}, \cdots$

中寻求满足递推关系 $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ 的解答。

令　　$q^n = q^{n-1}q^{n-2}$ （$n \geq 2$）

因 $q \neq 0$ 解得：

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

现令 $\begin{cases} u_n = \alpha q_1^{n-1} + \beta q_2^{n-1} \\ u_1 = u_2 = 1 \end{cases}$

立知 $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \beta(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \\ \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) \end{cases}$

从而 $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$

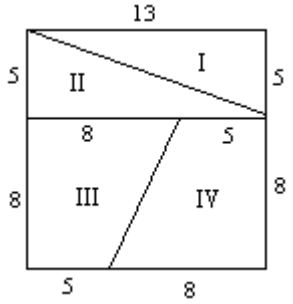
以上公式是法国数学家比内首先证明的，通称比内公式。令人惊奇的是，比内公式中的 u_n 是以无理数的幂表示的，然而这所得的结果完全是整数。不信，读者可以找几个 n 的值代进去试试看！

斐波那契数列有许多奇妙的性质，其中有一个性质是这样的：

$u_n^2 - u_{n+1} \cdot u_{n-1} = (-1)^{n+1}$ （$n > 1$）

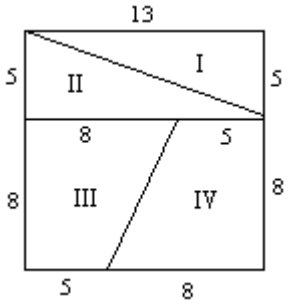
斐波那契数列的上述性质，常被用来构造一些极为有趣的智力游戏。美国《科学美国人》杂志就曾刊载过一则故事：

一位魔术师拿着一块边长为 13 英尺的正方形地毯，对他的地毯匠朋友说：“请您把这块地毯分成四小块，再把它们缝成一块长 21 英尺，宽 8 英尺的长方形地毯。”这位匠师对魔术师算术之差，深感惊异。因



为两者之间面积相差达一平方英尺哩！可是魔术师竟让匠师用右图和下图的

方法，达到了他的目的！这真是不可思议！亲爱的读者，你猜猜那神奇的一平方英尺跑到哪儿去呢？



黄金比值——0.618

上一世纪中叶，德国心理学家弗希纳曾经做过一次别出心裁的试验。他召开一次“矩形展览会”，会上展出了他精心制作的各种矩形。并要求参观者投票选择各自认为最美的矩形。

入选的四个距形的长与宽，正好都是上一节我们讲到的斐波那契数列中相邻的两个数。它们的比都接近于0.618。

0.618 这一再出现的神秘数字，终于引起人们的关注。数学家们开始探索这一神奇数字的真正含义！

假定C是线段AB的一个分点。为了使C满足“部分与部分及部分与整体之间的协调一致”，显然必须：

$$AB：AC=AC：CB$$

令 $AB=1$，$AC=x$

则 $1：x=x：(1-x)$

$$x^2+1x-1^2=0$$

解得 $$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\qquad (x>0)$$

$$\omega=\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.618$$

瞧！“美的密码”终于露面了！

由于美的密码有许多极为宝贵的性质，所以，人们称0.618为“黄金比值”；而导致这一比值的分割，便称为“黄金分割”；C点则称线段AB的“黄金分割点”。一个矩形，如果两边具有黄金比值，则称这样矩形为“黄金矩形”。

黄金矩形的性质也很奇特，它是由一个正方形和另一个小黄金矩形组成。事实上，如果设大黄金矩形的两边 $a：b=\omega$，分出一个正方形后，所余小矩形的两边分别为（b-a）和a，它们的比：

$$(b-a)：a=\frac{b}{a}-1=\frac{1}{\omega}-1$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\omega$$

这表明小的矩形也是黄金矩形。

黄金矩形的上述性质，允许我们把一个黄金距形分解为无限个正方形的和！下页图表明了这种分解的过程。有趣的是，这个过程可以用下面的算式表示出来：

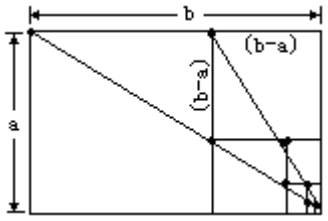
$$\omega = \frac{a}{b} = \frac{a}{a+(a+b)}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{b-a}{a}} = \frac{1}{1+\frac{a}{b}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{a}{b}}}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}}$$

所得的是最为简单的连分数。



容易看出，图中大矩形中各正方形的角点形成两条直线。一条是大矩形的对角线，另一条是小矩形的对角线。这表明这一系列正方形，构成了无穷递缩等比数列！

“黄金比值”这一美的密码，一经被人类掌握，立即成为服务于人类的法宝。艺术家们应用它，创造出更加令人神驰的艺术珍品；设计师们利用它设计出巧夺天工的建筑；科学家们则在科学的海洋尽情地欢奏 0.618 这一美的旋律。

黄金比值，这一造福人类的数字，诚如 17 世纪德国天文学家开普勒所评价的那样：“是几何学的一大宝藏”！

圆周率 π 的算法

人类对于圆周率 π 的研究，可以追溯到极为久远的年代！

古代的希伯来人，在描述所罗门庙宇中的“熔池”时曾经这样写道：“池为圆形，对径为十腕尺，池高为五腕尺，其周长为三十腕尺。”可见，古希伯来人认为圆周率等于 3。不过，那时的建筑师们，都明白，圆周长与直径的比要比 3 大一些。

早在公元前 3 世纪，古希腊的阿基米德已经想到用“逼近”的办法来计算 π。为说明阿基米德超越时代的天才构思，我们先从一个半径为 1 的圆的内接和外切正三角形讲起。为叙述方便，我们用 ak 和 ak′分别表示单位圆

内接和外切正 k 边形的边长，和 p_k 和 p_k^1 表示相应的周长。易知：

$$\begin{cases} P_k = k \cdot a_k \\ P_k' = k \cdot a_k' \end{cases}$$

显然，把圆内接正 k 边形各顶点间的弧二等分，便可得到圆内接正 2k 边形，并由此得

$$\begin{cases} a_k < 2a_{2k} \\ P_k < p_{2k} \end{cases}$$

这样，我们从圆内接正三角形出发，推出

$$p_3 < p_6 < P_{12} < p_{24} < \cdots < p_{3\text{-}2^{k-1}} < \cdots$$

上述无限递增序列{p3·2k-1}，明显地以圆周长为上界。

同理，我们有

$P'_3 > P'_6 > p'_{12} > p'_{24} > \cdots > p'_{3\cdot 2^{k-1}} > \cdots$ 这一递减序列{$p'_{3\cdot 2^{k-1}}$}，也明显地以圆周长为下界。

很明显，以上两个一升一降的无限序列，当 k 增大时越来越靠近，从而有

$$\lim_{k\to\infty} p'3 \cdot 2^{k-1} = 2\pi$$

阿基洙德正是利用上面的办法，一直计算到 p_{96} 和 p'_{96}，得出：

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

阿基洙德的这一出色工作，载于他的著作《圆的度量》一书。

继阿基洙德之后，在计算圆周率的方法上有重大突破的，是我国魏晋时期的数学家刘徽和他的割圆术！

公元 263 年，刘徽在对我国古籍算书《九章算术》的注释中，提出了计算圆周长的“割圆”思想：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体，而无所失矣！”

刘徽创立的割圆术，有四个要点，用现代方式表述如下：

（1）圆内接正 3×2^k 边形，当 k 增加时，其面积与圆面积的差越来越小。当 k 无限增大时，正多边形面积 Sk 与圆面积 A 几乎相等；

（2）$S_{2k} < A < S_{2k} + (S_{2k} - S_k)$

（3）$S_{2k} = \frac{K}{2} a_k R$

（4）$a_{2k} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_k^2}}$

上述第一个要点，是刘徽思想的核心。他把圆看作是边数无限的正多边形。读者从这里可以看到极限思想的光辉！

第二点是刘徽的一个重要发现。在计算圆面积的时候，只要考虑圆内接正多边形，而无须同时考虑圆外切正多边形。这是刘徽方法与阿基洙德方法之间本质的区别，也是割圆术先进之所在！这一重要公式证明如下：

如下图，设 A、B 是圆内接正 k 边形两个相邻的顶点，C 是 AB 中点，则 AC 为圆内接正 2k 边形的一边。已知 AB 与 OC 交于 D 点，又 ABFE 为矩形，其一边 EF 切圆 O 于 C 点，易知：

$S_{2k} - S_k = k \cdot S_{\triangle ABC}$

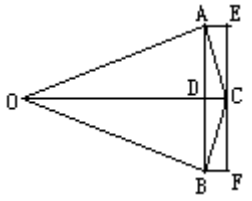
0＜ $A-S_{2k}＜2_K \cdot S_{\triangle ABC}$

$=K \cdot S_{\triangle ABC}$

$\therefore 0＜A-S_{2k}＜S_{2k}-S_k$

即 $S_{2k}＜A＜S_{2k}+（S_{2k}-S_k）$ 由此可得 $\lim\limits_{K\to\infty} S_{2k} = A$

割圆术的第三个要点，刘徽建立了一个面积 S_{2k} 与边长 a_k 之间的计算联系。事实上



$S_{2k}=K \cdot S_{四边形AOBC}$

$= k \cdot \frac{1}{2} AB \cdot OC = \frac{K}{2} a_k R$

这里 C 是圆的周长，$C＝2\pi R$。

$\therefore \quad A＝\frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$

特别，当 $R＝1$ 时有

$$A＝\pi$$

着眼于面积计算π，这是刘徽与阿基米德方法的又一不同。

第四个要点，刘徽建立了 a_k 与 a_{2k} 之间的递推关系式。这一式子基于勾股定理，事实上

$$\because \quad OD = \sqrt{R^2 - (\frac{a_k}{2})^2}$$

又 $a_{2k}^2＝2R \cdot DC$

$＝2R（R－OD）$

$\therefore a_{2k}^2 = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_k^2}$

即

$$a_{2k} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - a_k^2}}$$

刘徽就是利用上面的递推式子及公式

$$S_{2k} = \frac{k}{2} a_k$$

如同下表，一直算到了圆内接正 192 边形：

再根据 $S_{2k}＜A＜S_{2k}+（S_{2k}-S_k）$，当 $k＝96$ 时有

$$3.141024＜\pi＜3.142704$$

取相同的两位小数，即得：$\pi \approx 3.14$

k	a_k	p_k	s_{2k}	$(s_{2k}-s_k)$
6	1	6		
12	0.517638	6.211656	3	
24	0.261052	6.265248	3.105828	0.105828
48	0.130806	6.278688	3.132624	0.026796
96	0.065438	6.282048	3.139344	0.006720
192	0.032723	6.282889	3.141024	0.001680
…	…	…	…	…

刘徽的割圆术，其意义不仅在于计算出了π的近似值，而且还在于提供了一种研究数学的方法。这种方法相当于今天的“求积分”，后者经17世纪英国的牛顿和德国的莱布尼兹作系统总结而得名。鉴于刘徽的巨大贡献，所以不少书上把他称作“中国数学史上的牛顿”，并把他所创造的割圆术称为“徽术”。

实数的最佳逼近

阿基洙德曾用“逼近”的思想，求出圆周率π满足：

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

其中$3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}$只比π的真值大0.04%，因此用$\frac{22}{7}$代替π对于人类的日常生活是足够了！所以历史上称$\frac{22}{7}$为π的“约率”。

但约率并不是最接近π的分数。不过，在分母小于100的分数中，再也找不到第二个比它更接近π了！比$\frac{22}{7}$更接近π的下一个分数是$\frac{333}{106}$；而分母小于三万的数中，最接近π的是$\frac{355}{113}$。

$$\frac{355}{113}=3.14159292\cdots\cdots$$

它只比π的真值大亿分之八。这个值是由我国南北朝时期的伟大数学家祖冲之（429～500）找到的，通称“密率”。

实际上，还有比密率更接近π的分数，只是分母要更大，它们形成了一串逼近π的分数理，π便是它们的极限！

3，$\frac{22}{7}$，$\frac{333}{106}$，$\frac{355}{113}$，$\frac{103993}{33102}$，……

为了弄清这些渐近分数的规律，我们先介绍一些连分数的知识。

因为任何一个实数都可以通过辗转相除的方法，表为连分数的形式，例如

$$\frac{87}{32}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}$$

$$\sqrt{2}=1.414213562\cdots\cdots$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+O}}}}$$

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+O}}}}$$

同理，我们能够算得

$$\pi=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+O}}}}}$$

连分数其实是特殊的繁分数。很明显，一个有限的连分数代表着一个有理数；反过来，一个有理数也一定能通过辗转相除，化为有限连分数。因而无理数只能表示为无限连分数的形式。公元 1761 年，德国数学家兰伯特（Lambert，1728～1777）证明了π是个无理数。从而，把π展成连分数，它一定也是无限的！

为节省篇幅，我们简记连分数为：

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+O+\cfrac{1}{a_n}}}=[a_0;a_1,a_2,\cdots;a_n]$$

例如 $\frac{87}{32}=[2;1,2,1,1,4]$

$\sqrt{2}=[1;2,2,2,\cdots\cdots]$

$\pi=[3;7,15,1,292,1,\cdots\cdots]$

连分数的截断部分，我们称为渐近分数，简记

$$[a_0;a_1,a_2,\cdots,a_k]=\frac{P_k}{Q_k}$$

一个连分数的渐近分数，可以根据定义加以计算。例如π的各渐近分数，可以依次算得如下：

$$[3；7] = 3+\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

$$[3；7，15] = 3+\frac{1}{7\frac{1}{15}} = \frac{333}{106}$$

$$[3；7，15，1] = 3+\frac{1}{7+\frac{1}{15+\frac{1}{1}}} = \frac{335}{113}$$

$$[3；7，15，1，292] = 3+\frac{1}{15+\frac{1}{1+\frac{1}{292}}} = \frac{103993}{33102}$$

…… ……

其中第二、第四个渐近分数，就是我们前面讲过的约率和密率。

假如我们设想 $P_{-1}=1$，$Q_{-1}=0$，那么我们便有递推关系式；

$$\begin{cases} P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2} \\ Q_k = a_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \end{cases}$$

按上述规律，我们可以列表计算如下：

k	-1	0	1	2	3	…	n	…
a_k		a_0	a_1	a_2	a_3	…	a_n	…
r_k	1	a_0	p_1	p_2	p_3	…	p_n	…
Q_k	0	1	Q_1	Q_2	Q_3	…	Q_n	…

如求 $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的各渐近分数；

ω=[0；1，1，1，1…]

k	-1	0	1	2	3	4	5	6	…
ak		0	1	1	1	1	1	1	…
Pk	1	0	1	1	2	3	5	8	…
Qk	0	1	1	2	3	5	8	13	…

所得 $\{P_k\}$、$\{Q_k\}$ 都是一串斐波那契数。

对于熟悉电脑的读者，还可以设计出求任一实数的渐近分数的程序，那可就“一劳永逸”了！

实数 a 的渐近分数的最重要性质是：它一大一小交错着向 a 逼近！即

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \frac{P_6}{Q_6} \cdots \leq a$$

$$\frac{P_1}{Q_1} > \frac{P_3}{Q_3} > \frac{P_5}{Q_5} > \frac{P_7}{Q_7} > \cdots a$$

而且我们还不难证明

$$\left|a-\frac{P_n}{Q_n}\right|<\left|a-\frac{P_{n-1}}{Q_n-1}\right|\text{及}\left|a-\frac{P_n}{Q_n}\right|\leq\frac{1}{Q_2^n}$$

这表明α的渐近分数，一个比一个更加接近于α，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{Q_n}=a$$

渐近分数的逼近是最佳的！意思是说，对α的某一渐近分数$\frac{P}{Q}$，我们再也找不到分母比它小而又更接近α的分数了。

漫谈日月蚀

日蚀和月蚀是两种重要的天体现象。可能有不少读者对此感到神秘。

古人由于不了解日蚀和月蚀这些自然现象，误把它当成灾难的预兆。所以当这些现象出现时，就表现得惊慌失措，惶恐不安！

据史书记载：大约公元前 6 世纪，希腊的吕底亚和麦底亚两国，兵连祸结，双方恶战五载，胜负未分。到了第六个年头的一天，双方正在猛烈激战。忽然天昏地暗，黑夜骤临！战士们以为冒犯神灵，触怒苍天，于是顿然醒悟。双方即刻抛下武器，握手言和！后来天文学家帮助历史学家准确地确定了那次战事发生的时间：公元前 585 年 5 月 28 日午后。

另一个传说是：航海家哥伦布在牙买加的时候，当地的加勒比人企图将他和他的随从饿死。哥伦布则对他们说，如果他们不给他食物，他那夜就不给他们月光！结果那一夜月蚀一开始，加勒比人便投降了！现在，已经查证到故事发生的时间是：公元 1504 年 5 月 1 日。

其实日蚀、月蚀只是由于“日、月、地”三种天体运动合成的结果。月亮绕地球转，地球又绕太阳转，当月球转到了地球和太阳的中间，且这三个天体处于一条直线时，月球挡住了太阳光，就发生日蚀；当月球转到地球背着太阳的一面，且这三个天体处于一直线时，地球挡住了太阳光，就发生月蚀。

但是，由于月球的轨道平面并不在地球绕太阳转动的平面上，因此月球每次从地球轨道平面的一侧穿到平面的另一侧去，便与这个平面有一个交点。这样交点有一个在地球轨道内，称内交点；另一个在地球轨道外，称外交点。月球从内交点出发又回到内交点的周期称交点月，为 27.2123 天。

很明显，日、月蚀的发生必须同时具备两个条件，缺一不可：一是月亮恰在内外交点处；二是日、月、地三者共线，即必须是新月或满月。以上条件表明，如果某日恰好发生日蚀或月蚀，那么隔一段周期之后，日蚀和月蚀的情景又会重演，这段周期恰好是交点月和朔望月的倍数。

为了求朔望月和交点月的最小公倍数，我们把它们的比展成连分数

$$\frac{29.5306}{27.2123}=1+\cfrac{1}{11+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+O}}}}}$$

考虑渐近分数

$$[1,11,1,2,1,4]=\frac{242}{223}$$

它表明：过 242 个交点月或 223 个朔望月之后，“ 日、月、地 ”三者又差不多回到了原先的相对位置，这一段时间相当于

242×27.2123＝6585.3766（天）

即相当于 18 年 11 天又 8 小时。这就是著名的沙罗周期！有了这个周期，你就可以当一个小小的预测家了！

微积分学的诞生

17 世纪的欧洲，数学界群星璀璨，英雄辈出！数学家们冲出了古希腊人严格证明的圣殿，以直观推断的思维方式，在无穷小演算和极限理论的基础上，创立了被恩格斯誉为“ 人类精神的最高胜利 ”的微积分学。

英雄世纪的英雄谱上的第一个显赫人物，当推意大利的伽利略（Galilei，G 1564～1642）。伽利略作为物理学家比作为数学家更为有名，他因发现运动的惯性原理、摆振动的等时性及自由落体定律而名垂青史！

他作为数学家的功绩在于：他使阿基洣德的“ 穷竭法 ”思想，在淹没了 2000 年后，重新焕发光辉！

古希腊阿基洣德的“ 穷竭法 ”，类同于我国数学家刘徽的割圆术。方法中用到的无穷小分析及“ 以直代曲 ”的极限思想，孕育着微积分的珠胎！

公元 1609 年，德国天文学家开普勒创造性地应用无穷小量求和的方法，确定曲边图形的面积和体积。公元 1615 年，开普勒发表了《测量酒桶体积的新方法》一文，一举求出了 392 种不同旋成体的体积。开普勒卓有成效的工作，对微积分的先驱者卡瓦列利、瓦里斯等人，产生了直接的影响。

公元 1635 年，意大利数学家卡瓦列利提出了确定面积和体积的新方法：即把一条曲线，看成是由无数个点构成的图形，就像项链是由珠子穿成的一样；一个平面是由无数条平行线构成的图形，就像布是由线织成的一样；一个立体是由无数个平面构成的图形，就像书籍是由书页组成的一样。卡瓦列利的新颖构思，为微积分提供了雏形。

公元 1637 年，号称“ 怪杰 ”的法国数学家费尔马，创造了求切线斜率的新方法。费尔马把曲线上某一点切线的斜率，看成为该点坐标的两个增量比的极限。也就是说，曲线 y=f（x）上横坐标为 a 的点处的切线斜率 k：

$$k=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(a+\triangle_x)-f(a)}{\triangle_x}$$

这实际上就是以后牛顿“流数”的定义！

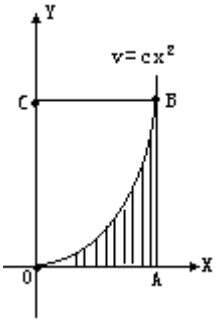
微积分创立道路上的一个重要的里程碑，是解析几何的诞生。公元 1637 年，法国数学家笛卡儿（Descartes，1596～1650）建立了平面坐标系，从而使古典的几何学与代数学发生联系，并能用代数的方法解法。变数的出现，使运动进入了数学，从而为微积分的研究，提供了最重要的工具！

笛卡儿的成就，使微积分创立的前驱工作加速了！公元 1655 年，英国数学家瓦里斯，运用代数的形式，分析学的方法及函数极限的理论，实际上提出了定积分的概念。下面让我们通过求抛物线所围图形的面积，一览瓦里斯这一出色的工作：

如图，设抛物线弧的方程为 $y=cx^2$，曲边三角形的三个顶点是：

O（o，o）；A（a，o）；B（a，ca^2）。

把 OA 分为 n 等分，过分点作垂直于 OA 的直线与曲线相交，构成 n 个窄长方形。很明显，当等分数 n 无限增大时，图中窄长方形的面积之和，趋向一个有限值，这便是曲边三角形的面积 A。对于第 k 个窄长方



形而言（图中涂黑部分），易知其宽为 $\frac{a}{n}$，高为 $c(\frac{k_a}{n})^2$，从而这一小长方形的面积 Sk 为：

$$s_k=\frac{a}{n}\cdot c(\frac{k_a}{n})^2=\frac{ca^3}{n^3}\cdot k^2$$

所有窄长方形面积之和

$s_1+s_2+s_3+\cdots+s_k+\cdots+s_n$

$$=\frac{ca^3}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{ca^3}{n^3}\cdot\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{ca^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

当 n 无限增大时，便得

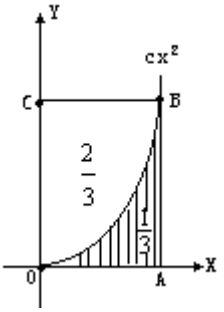
$$A=\lim_{n\to\infty}(s_1+s_2+\cdots+s_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}[\frac{ca^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})]=\frac{ca^3}{3}$$

注意到矩形 OABC 的面积为 ca^3，从而抛物线弧恰好三等分矩形 OABC 的面积！

瓦里斯之后，英国青年数学家格雷戈里，进一步完善了极限运算的方法。格雷戈里对于无穷级数的深入研究，使他成为微积分发展的又一重要先驱者。

在两位微积分的创始人，英国的牛顿和德国的莱布尼兹出场之前，还要提到一个饮誉数坛的人物，英国数学家巴罗（Barrow，1630～1677）。巴罗是牛顿的老师，他的《几何学讲义》一书，使他的学生深受影响。巴罗对数学造诣颇深，他不仅发现了积、商和隐函数的微分法，而且第一个认识到微分与积分之间的互逆关系。



巴罗之所以名垂史册，还在于他的远见卓识。公元 1669 年 10 月 29 日，巴罗突然提出辞去“卢卡斯教授”的席位，并推荐自己的学生，27 岁的牛顿继任。“卢卡斯教授”是英国剑桥大学授予最为卓越的自然科学家的荣誉席位。牛顿果然没有辜负他老师的厚望，在人类科学史上，成为一代宗师！

公元 1666 年 5 月 20 日，在牛顿的手稿上第一次出现了“流数术”一词。标志着英雄世纪英雄业绩的微积分学，终于正式宣告诞生了！

争论与挑战

在世界科学史上，大概很难找到比牛顿（Newton 1642～1727）更加伟大的科学家了！他那从“苹果落地”联想到“万有引力”的动人故事，已经成为千古美谈。然而牛顿的幼年，并不具有超人的智商。他的奋起和成功，对于那些怀疑自身大脑功能的人，是个极好的榜样！

牛顿出生在英国的一个农村，父亲在他出生前便去世了。悲伤过度的母亲不足月便生下了他。

牛顿三岁的时候母亲改了嫁，他由外祖母抚养。上学以后，他不仅体弱多病，而且学习成绩很差，常常被一些同学瞧不起。13 岁时，在学校受一个大同学的欺侮，一脚踢在他的肚子上。牛顿痛苦之下，奋力抗争，竟然获胜！于是他悟出了学问之道，从此发愤读书，成绩一举跃居班级前茅！

公元 1661 年，牛顿考入剑桥大学。在巴罗教授的悉心指导下，他钻研了笛卡儿的《几何学》和瓦里斯的《无穷算术》，奠定了坚实的数学基础。

公元 1669 年至 1676 年牛顿写下了三篇重要论文。在这些文章中，他给出了求瞬时变化率的普遍方法，证明了面积可由变化率的逆过程求得。在文章中，牛顿把运动引进了数学，他把曲线看成是由几何的点运动而产生。他称变量为“流”，变化率为“流数”，并为他的“流数术”划定了一个中心范围：

（1）已知连续运动的路程求瞬时速度；

（2）已知运动的速度，求某时间经过的路程；

（3）求曲线的长度、面积、曲率和极值。

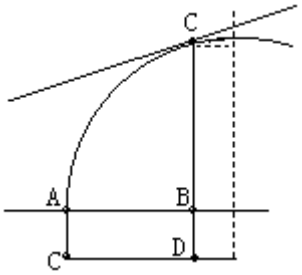
公元 1687 年，牛顿发表了划时代的科学巨著《自然哲学的数学原理》。这部不朽的名著，把他所创造的方法与自然科学的研究，紧密地结合在一起，从而使微积分学在实践的土壤中深深地扎下了根。《原理》一书，也因之成为人类科学史上的一个光彩夺目的里程碑！

与此同时，在英吉利海峡另一侧的欧洲大陆，出现了另一位微积分学的奠基者，他就是德国的数学家莱布尼兹（Leib－niz，1646～1716）。比起牛顿，莱布尼兹的幼年显得聪慧而早熟！15 岁即进入莱比锡大学，17 岁获学士学位，20 岁获博士学位。公元 1672 年，莱布尼兹访问法国，认识了著名的荷兰科学家惠更斯（Huygens，1629～1695），在惠更斯的鼓励下，莱布尼兹致力于寻求获得知识和创造发明的新方法。他思绪奔放，才华横溢，数学的天才得以尽情地发挥！

公元 1684 年，莱布尼兹发表了第一篇微分学论文《一种求极值和切线的新方法》，两年后他又发表了另一篇关于积分学的论文。

莱布尼兹的微积分与牛顿的微积分有着明显的不同。牛顿是用几何的形式来表述他的成果的，而莱布尼兹的理论则散发着代数的芳香。尽管在与物理的结合上莱布尼兹不如牛顿，但莱布尼兹方法的想象力之丰富，符号之先进，也是牛顿方法所无法比拟的。下面的内容，可以使人看到这种区别：

公元 1704 年，牛顿在他《曲线求积论》一文中，对积分学的基本定理作了如下描述：如下图

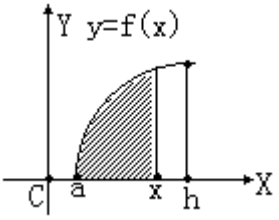


“假设面积 ABC 和 ABDG 是由纵坐标 BC 和 BD 在基线 AB 上以相同的匀速运动所生成的。则这些面积的流数之比与纵坐标 BC 和 BD 之比相同。

而我们可以把它们看成由这些纵坐标表示，因为这些纵坐标之比正好等于面积的初始增量之比牛顿的这一段话，对于不十分熟悉几何的人来说，甚至是艰辛的！然而，同一个内容在莱布尼兹著作中，却表成一个式子：

$$\frac{d}{dx}[\int_a^x f(t)dt] = f(x)$$

式中定积分$\int_a^x f(t)dt$，表示曲线$y=f(x)$、x轴及横坐标为X的直线所围成的图形（下图阴影区）的面积。其符号之简洁，跃然纸上！



尽管从后人看来，牛顿和莱布尼兹确是各自独立地创立了微积分学，但由于牛顿提出“流数”的时间比莱布尼兹要早十年，而莱布尼兹论文公开发表的时间又比牛顿早三年，因此围绕微积分的发明权，历史上曾出现过长达一个

世纪之久的无聊争论！

争论是由瑞士的丢里埃挑起的。公元 1699 年，丢里埃在著文中断言：莱布尼兹抄袭了牛顿的成果！莱当即予以反驳。公元 1714 年，莱布尼兹在《微分法的历史和起源》一书中写道；“ 在莱布尼兹建立这种新运算的专用观念之前，它肯定并没有进入任何其他人的心灵！ ”这篇文章暗示牛顿剽窃了他的成果。这一来，关于微积分发明权的争论，激起了两个民族情感的轩然大波。英、德两国各执一端，双方追随者固执已见，使争论绵延了整整一个世纪。

微积分在面临内部争论的同时，也面临着外部的严峻挑战。一些唯心主义者，抓住微积分基础理论当时尚不稳固，大做文章，极尽攻击漫骂。

公元 1734 年，英国神学家贝克莱著书攻击微积分，并将推导过程中对无穷小量的忽略，说成是：“ 分明的诡辩 ”，“ 把人引入歧途的招摇撞骗 ”等等。在贝克莱的挑动下，一些颇有成就的数学家，也说了一些缺乏深思熟虑的话。这就造成了数学史上的“ 第二次危机 ”。一场关于微积分奠基问题的大论战的序幕拉开了！

面对着严峻的挑战，大批训练有素的数学家，为捍卫真理，终于奋起反击了！英国的麦克劳林、泰勒；法国的达朗贝尔、拉格朗日等著名数学家，对微积分的基础理论建设，做了大量卓有成效的工作。另一方面，微积分在实践和应用上节节胜利。事实雄辩地表明了微积分的强大生命力。连贝克莱本人后来也不得不承认：“ 流数术是一把万能的钥匙，借助于它，近代数学家打开了几何以至大自然的秘密大门。 ”

今天，谁也不会对微积分抱有怀疑了！这一人类杰出的科学成果，在经历了严峻的挑战之后，越发显示出真理的光辉！

两个重要的极限

公元 1748 年，大数学家欧拉，在他的传世之作《无穷小分析引论》中，用到数 e。e 的定义，在微积分中有第二个重要极限之称，其精确值是：

e＝2.718281828459045……

为弄清数 e 的来龙去脉，我们还得从图形的压缩讲起。

数学家对于一个图形向直线压缩的概念，远比漫画家精确。漫画家似乎把“ 压缩 ”理解为“ 压扁 ”即在垂直方向缩短的同时，水平方向莫名其妙地膨大起来！

数学家说的“ 图形向直线压缩 ”是指这样一种变换：平面上的每一个点 A，变为直线 L 的垂线 PA 上的另一个点 A′，且满足

PA′：PA=K

常数 K 称为压缩系数。若 K＞1，则 PA′＞PA。这时的变换，名为“ 压缩 ”，实则拉伸，很明显直线 L 上的点，在“ 向直线压缩下 ”，变为本身。

倘若一个图形连续施行两次压缩。先是以系数 K，向 X 轴压缩，继而以系数 K 向 Y 轴压缩，那么情况将会怎么样呢？

例子，△ABC先向X轴压缩，K＝$\frac{1}{2}$，变换为△A′B′C′；再向Y轴压缩，K′=2，变换为△A″B″C″。

很明显，如果一个图形Ω，经 X 轴、Y 轴两次压缩，而且如同上例那样有

$k' = \frac{1}{K}$。那么，变换前与变换后的图形面积将相等。这是因为

$$S'_n = K_s n$$

$$S''_n = K' S'_n$$

从而 $S_n = \frac{1}{K} S'_n = K' S_n' = S''_n$

现在提一个有趣的问题：请你找一个图形，当它分别以系数K和$\frac{1}{K}$，依次向 X 轴和 Y 轴压缩后，结果仍是原来的图形。

可能有人对此感到不可思议，因为他们认为：一个点 P 经双向压缩后，只要压缩系数 K≠1，则必然变换为另一个点 P″。而绝不可能重合！其实，这是一种错觉。事实上，它上面的点经双向压缩后，位置都起了变化，但图形却是同一个！反比例函数$y = \frac{1}{x}$的图象就是一个例子。它是一组双曲线，左图只画出它在第一象限的那一枝。

假定 M 为双曲线上的任一点，当它以系数 K 向 X 轴压缩时，变换为点 I；而当点I以系数$\frac{1}{K}$向Y轴压缩时，又变换为另一点为M'，上面曾经提过，经两次压缩后有

$$S_{\square OPMQ} = S_{\square OPMQ}$$

从而，M 点与 M′ 的坐标间满足以下关系：

$$X_{M'} \cdot Y_{M'} = X_M \cdot Y_M = 1$$

这表明 M′，点也在双曲线上。也就是说，所有双曲线上的点变换后只是在双曲线上挪动了一个位置。对这种特殊的双向压缩变换，我们叫做“双曲旋转”。

双曲旋转有一个非常奇妙的特性：即一个曲边梯形 PQNM 的面积 S_{PQNM}，只跟 P、Q 两点的横坐标比 $X_Q : X_P = \lambda$ 有关。

这是因为经过双曲旋转，不仅曲边梯形面积没有改变，而且对应点的横坐标比值也没有改变。这样，曲边梯形的面积 S_{PQNM}，便可以看成是 P、Q 两点横坐标比值λ的函数

$$S_{PQNM} = S(\frac{X}{X_p}) = S(\lambda)$$

特别，当 P、Q 重合时λ＝1，从而

S（1）＝0

可以看出 S（2）一定小于黑框正方形的面积；而 S（3）则一定大于以 PQ 为中位线的梯形 ABCD 的面积。这意味着 S（2）＜1；S（3）＞1 从而，在 2 与 3 之间必可找到一点 e，使得

S（e）＝1

这个 e，就是欧拉当初引进的数！下面我们想办法把数 e 估计得精确一点。

考察下图的曲边梯形APMN，其中A点，P点的横坐标分别为1和（$1+\frac{1}{n}$），

可以看出，曲边梯形的面积为S（$1+\frac{1}{n}$），它介于两个矩形的面积之间

，这两个矩形面积容易算得是

$\frac{1}{n+1}$和$\frac{1}{n}$，即$\frac{1}{n+1}<S(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

另一方面，我们很容易得知，对于λ的函数S（λ）有

$$S(\lambda_1)+S(\lambda_2)=S(\lambda_1\cdot\lambda_2)$$

事实上，$S(\lambda_1)$表示横坐标从1到λ^1的双曲线曲边梯形面积； 而

$S(\lambda_2)=S(\frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1})$表示横坐标从$\lambda_1$到$\lambda_1\lambda_2$的曲边梯形面积。两者相加即为横坐标从1到$\lambda_1\lambda_2$的曲边梯形面积。这就是$S(\lambda_1\lambda_2)$。

读者学过对数的知识，想必知道只有对数才具备上述性质。注意到S（e）=1，所以不妨令

$$S(\lambda)=\log_e\lambda$$

于是，我们有

$$\frac{1}{n+1}<\log_e(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$$

$$(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

上式表明，当n→∞有时

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

这就是今天大多数书中采用的定义。这一定义的不足是：接近e的速度不够快。例如，n取1000时也才算得：

$$2.7169239<e<2.7196409$$

另一个接近速度更快的式子为

$$e-1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots$$

这里n！=1×2×3×…×n，读作“n阶乘”，是数学中一个很常用的符号。用后一式子只要取18项，就可以得到e的头15位小数！

极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$$

在微积分学中被称为第二个重要极限。

号称“第一”的重要极限是$\lim_{x\to0}\frac{simx}{x}=1$。实际上，这个极限的重要性和

应用的广泛性，都有逊于第二个重要极限。也许是由于历史因素所致，才使数e这个重要的极限屈居第二了！

鉴别质数的方法

质数的存在是一回事，鉴别质数又是另外一回事。鉴别质数是十分令人头痛的问题。一个人人皆知的办法，是把所有可能的质因子，一一拿去试除。不过，这里也有窍门：假定 N 是一个合数，数 A 是它的最小质因子。令 N＝A·B，则

$$\because N = A \cdot B \geq A^2$$

$$\therefore \sqrt{N} \geq A$$

这表明我们只要对不大于$\sqrt{N}$的质因子逐一试除就行了！

即使这样，试除工作也是繁重而费事的。举例说，要鉴定以下的数是否质数：

N＝10000000000000001

需要试除$\sqrt{N} \approx 10^8$以内的质数，这样的质数共有5761455个，倘若一一试过，则不知要试到何年何月？更不用说要判定位数更大的数了！因此，如何快速鉴别质数，便成为向人类智慧挑战的最简单同时又最困难的一个数学问题！

数世纪以来，许多数学家为寻求快速鉴定质数的方法绞尽了脑汁。

公元 1640 年，法国著名数学家费尔马（Fermat，1601～1665）在给他朋友的一封信中，声称发现了一个定理：即若 P 为质数，则对任何正整数 a，（a^p－a）一定能被 p 整除。不过当时费尔马没有给出证明，这一命题的证明，是由一个世纪之后瑞士数学家欧拉作出的。

下面是这个定理的一些简单例子：

2^{13}-2＝8190＝13×630

3^{11}-3＝177144=11×16104

5^7-5＝78120＝7×11160

…… ……

这里似乎需要提到一段历史上的公案。本世纪 20 年代欧洲的一些学者，例如迪克森等人，在论述数的历史的时候，曾经说道：早在孔丘时代（春秋时期，距今约 2500 年）中国人就知道“若 P 为质数，则 2^P-2 能为 P 整除”的规律，众所周知，这是上述费尔马定理的特例。后来，人们查证了这种说法的出处，原来均来源于公元 1897 年，一位名叫琼斯的大学生的一篇短文。在这篇短文的末尾，有一则奇怪的附注。附注说：“威妥玛爵士的一篇论文认为，早在孔丘时代就已有过这个定理，并且（错误地）说，如果 P 不是质数，则此定理不成立。

那么，威妥玛爵士的文章又是依据什么呢？原来是依据中国古代数学名著《九章算术》中的一段论述：

“可半者半之，不可半者副置分母分子之数，以少减多，更加减损，求其等也！”

这一段令人迷惑难懂的文言文，实际上说的是辗转相除。这一方法曾以古希腊数学家欧几里得名字命名，然而由于西方的汉学家，对于中国古文理解的艰难，致使出现了理解上的差错！不过，中国的数学史家，对此始终抱着实事求是的态度。他们在论述《九章算术》时，从来没有提到如同威妥玛

爵士所讲的那种“辉煌成就”！

可是，近来有些非数学史的书上，以讹传讹，又从国外一些文献中，把迪克森等人的观点捡了回来，并作为我们国家的“世界之最”加以宣扬。作为炎黄子孙，我们自然希望，早在2500年前，我们的某位祖先，已经显示出如伺17世纪的费尔马那样的数学才华。但是，对史实的牵强附会，无疑是与科学相违背的！

现在回到前面讨论的课题上来。我们讲过，若P为质数，则（a^P-a）必能整除P。那么，反过来，若a^P-a能被P整除，P是质数吗？对这个费尔马定理的逆命题，在做了许多尝试，并没有发现它是不成立的之后，人们倾向于认为这是一条真理！

不料，到了公元1830年，一位不愿意公开自己姓名的德国作者，撰文对此命题予以否定！他举出了一个反例：

当n＝341时

$2^{341}-2=2\times(2^{340}-1)$

$=2\times(2^{10}-1)\quad(2^{330}+2^{320}+2^{310}+\cdots+1)$

$=2\times3\times341\times(2^{330}+2^{320}+2^{310}+\cdots+1)$

而341＝11×31，它不是质数！

不过，应当指出，能整除2^n-2的n，几乎都是质数。像341那样混迹其中的合数是极少的。

公元1909年，巴拉切维兹证明了在2000之内，诸如341那样鱼目混珠的合数（通称假质数）只有5个，占0.25%，它们是：

$341=11\times31$；　$561=3\times11\times17$

$1387=19\times73$；　$1729=7\times13\times19$

$1905=3\times5\times127$

随后，人们又陆续找到了一些超过2000的假质数，例如：

$2407=23\times89$；　$2701=37\times73$

$4369=17\times257$；　$4681=31\times151$

$10261=31\times331$；……

假质数比起真质数来，真是凤毛麟角，少得可怜！在一百亿之内的质数有455052512个，而假质数只有14884年。这表明，在百亿之内，且（2^n-2）能被n整除的那数中，质数占99.9967%，只有不足0.004%的数是合数。一般地，假质数与质数的比约为三万分之一。

这样一来，2^n-2能否被n整除，便可作为鉴定数n是否是质数的相当可靠的办法。如果2^n-2不能被n整除，那么n一定是合数；否则n要么是质数，要么是假质数。剔除为数极少的假质数，所剩的便是真质数了！

公元1980年，两位欧洲数学家，根据上面的思路，终于找到了一种最新的质数鉴定法。应用这种方法，一个一百位质数的鉴定，过去需要几万年，现在只需几秒种！

有趣的是，在假质数中还有这样的一类，它们不仅能够整除2^n-2，而且还能整除

3^n-3；4^n-4；5^n-5；　……

这样的假质数，我们称为“绝对假质数”，其中最小的一个是

$561=3\times11\times17$

目前已知最大的一个是：

44365633789344559360905600 1

它在绝对假质数中排行第 685，是 1978 年发现的！

破译密码的奥妙

世上万物总是相生相克。既然有人研究密码，也就有人研究破译密码的办法。

密码之所以会被破译，是因为它有一个致命的弱点，即“设密”与“解密”使用的是同一个“密钥”。这样，密钥的得与失，便事关着大局。

本世纪 70 年代，许多研究密码的专家发现，把一些正向容易逆向困难的数学问题用来设密，可以收到极好的效果！例如，把两个 50 位的质数相乘，这是一件容易的事；但要从它们的乘积分解出这两个质数来，即使用电子计算机也需用 100 万年。后者看起来似乎是个有限的时间，但实际上可以看成是无限的！上述问题寓难于易，寓无限于有限，这正是构造一切密码的规律！

现在我们就利用上面的例子来设置密码。令合数 n＝pq，P、p 为质数。加密时，先选一个既不能整除 p－1，又不能整除 q－1 的质数 r；然后，将需要加密的明码 a 乘方 r 次，再除以 n 得到余数 a′，则 a′便是密码。从明码求密码的过程是很容易的，两者的关系用式子可以写成：

$$a^r \equiv a' \pmod{n}$$

以上算式的意思是：a^r 和 a′除以 n，余数相同。

解密时，关键是要找一个 s，使它满足

$s_r \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ 数学上可以证明，此时必有：

$$(a')^s \equiv a \pmod{n}$$

其实，这一点是不难验证的。上一节说过，公元 1736 年，欧拉证明了费尔马小定理。过了 24 年，公元 1760 年，欧拉又将这个定理推广为更一般的。即若 C 与 n 互质，则

$$C^{\Phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

式中 $\Phi(n) = n(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})\cdots(1-\frac{1}{t})$

其中 p，q…，t 是 n 的质因子。

由于我们加密时选取 n＝pq（p、q 为质数），因而

$$\Phi(n) = pq(1-\frac{1}{p})(1-\frac{1}{q})$$

$$= (P-1)(q-1)$$

这样，根据欧拉定理，便有：

$$(a')^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \pmod{n}$$

$\because\ S_r \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$

$\therefore\ S_r \equiv 1 + k(p-1)(q-1),\ (k \in N)$

从而 $(a')^s \equiv a' \cdot (a')^{k(p-1)(q-1)} \pmod{n}$

$$\equiv a' \cdot 1^k \pmod{n}$$

$$\equiv a' \pmod{n}$$

$\because\ a_r \equiv a' \pmod{n}$

$\therefore\ (a')s_r \equiv a^r \pmod{n}$

这与解密中的算式（a'）s≡a（mod n），没有矛盾！

现在我们回到密码的设置上面来。很明显，无论是加密时由 a 求 a'，或解密时由 a' 求 a，对于知道 p、q 的人都是很容易的。举例说，设

$$p=5，q=7，n=35；a=9$$

选 r＝5，它显然既不整除 p－1＝4，也不整除 q－1＝6

$$a^r=9^5\equiv 4\ (\mathrm{mod}35)$$

从而 a'＝4 即为相应于 a＝9 的密码。

解密时，算得（p－1）（q－1）＝4×6＝24。显然可以取 S＝5，（sr＝25＝1＋24），由

$$(a')^s=4^5\equiv 9\ (\mathrm{mod}35)$$

可以还原出明码 a＝9

上述密码几乎可以是公开的，即使把 n 和 r 告诉对方也无妨！关键在于 n 的分解。选取的质数 p、q 越大则 n 的分解越难。

自从快速鉴别质数的方法出现之后，有人甚至用 100 位的质数来构造密码。

通过有限认识无限

有限和无限是一对哲学范畴，也是各门科学中经常要碰到的一对矛盾。

恩格斯曾经明确指出：“无限性是一个矛盾，而且充满种种矛盾。无限纯粹是由有限组成的，这已经是矛盾，可是事情就是这样。”因此，人们对于无限的认识，只能处于有限与无限对立统一的矛盾之中，只能在揭露矛盾中去认识无限，在解决矛盾中去把握无限。也就是说，有限组成无限，无限离不开有限，只能通过有限去认识无限。

无疑，“通过有限去认识无限”，是马克思主义的方法论，是符合唯物辩证法的，它是我们在认识世界和改造世界的革命实践中一个必须遵循的原则。但是，客观事物是无限复杂多样的，它具有无限丰富的内容。它要求我们在认识事物的过程中，不但要注意普遍性，而且要注意特殊性。在不同的情况下，有限组成无限的形式、内容、方法、手段是各不相同的，其表现也是各有其特点的，不可能千篇一律。我们不应满足于背诵“有限组成无限”、“通过有限去认识无限”的基本原理（或原则），而应运用辩证唯物主义的科学方法，在一般原则的指导下，对各种不同的情况和表现作出实事求是的、有说服力的辩证分析。

人们对现实世界的认识，首先是认识多种事物之间的质的差异。而任何具有特定质的事物，都离不开一定的量。没有一定质的量和没有一定量的质的事物，实际上都是不存在的。数学是关于现实世界的空间形式和数量关系的科学，质数是我们所知道的最纯粹的量的规定。”但是，即使这种“最纯粹的量”和量的关系，也充满了质的差异。而我们对它的认识，就是从量中质的差异开始的。

数学史告诉我们，数学中最早是出现的数是整数 1、2、3……，这是人们计算事物时最初的认识，它反映了事物的整体性，后来，由于实践的发展，使人们认识到事物不但有整体性，而且有可分性，数量关系也不仅仅局限于整数，于是产生了分数。分数与整数相比，既有联系但又有质的差异。例如

$\frac{2}{3}$，它是整数2和3在比率中所规定的一个新的数——分数。在$\frac{2}{3}$这个分数中，可以用无限多的数如 4 和 6、6 与 9、8 与 12 等等来代替 2 和 3，而分数值并不改变，由于这种替代是无穷的，因此，分数相对整数就具有了无限性。展开来说，即由成对大小相当的整数组成的具有某一特定分数值的分数可以有无穷多，这也就是黑格尔所讲的“真正的无限”。

另一方面，我们也可以看到，在坐标轴上，整数的排列是稀疏的，而分数的排列则是稠密的。这种稠密性，本身就意味着在分数系统中不存在什么最小的间隔，即使任何两个分数之间也一定还存在别的分数，如$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{3}$之间就有一个$\frac{5}{12}$，它比$\frac{1}{2}$小，比$\frac{1}{3}$大，居于两者中间。实际上，任何两个分数之间不只有一个分数，而是有无限多个。既然如此，一有限整数（即使是 1）包含着无限多个分数则更是无可怀疑的事实。

然而，数和形是紧密联系的，实践的进一步发展告诉我们，当我们说分数相对于整数具有无限性时，并不能说明任何两条线段之比都可以用两个整数之比来表达。当古希腊毕达哥拉斯学派为他们发现勾股定理而陶醉之时，却又发现边长为 1 的正方形对角线和它的一边尽管都是非常明确的几何对象，但用整数和分数却不能把它们的比表达出来，即对角线$\sqrt{2}=1.414\cdots\cdots$是无限不循环小数，不可能用任何整数和分数精确地表达。因此，$\sqrt{2}$在分数范围内是无法确定的。所以表现出无限性；同时，在别的关系如圆周长与直径之比中，也发现了这种无限性，这就是π＝3.1415926……；还有自然对数的底数e(2倒)＝2.718281828459045……等，它们都叫做无理数，从直观上看，它们（$\sqrt{2}$、π、）都是有限的，但与它们相应的具体数值 1.414…；3.1415926…；2.718…却是无限不循环小数，表现出其内在的无限性。

由上可知，整数、分数、无理数一开始就存在质的差异，具有各自不同的特定意义。而当它们在量上进行比较时，其差别则显现为无限性。正如恩格斯所说：“只要数学上谈到无限大和无限小，它就导入一个质的差异，这个差异甚至表现为不可克服的质的对立：量的相互差别太大了，甚至它们之间的每一种合理的关系，每一种比较都失效了，甚至它们变成在量上不可通约的了。”恩格斯并举例说明：“圆和直线的不可通约性也是辩证的质的差异；但是在这里，正是同一类数量的量的差异把质的差异提高到不可通约性”。恩格斯这里所说的“圆和直线”不可通约，实际上就是指圆的周长和直径之比除有量的差异（有限的曲线和线段）之外，也有表现为不可通约性（不可能用整数和分数表示的无限不循环小数）的辩证的质的差异。而这一辩证的质的差异就是从量的差异中认识到的，即通过有限的曲线与线段之长的比中所把握和认识到的。

数学，总要从有限开始，因为在数学上，“为了达到不确定的、无限的东西，必须从确定的、有限的东西出发”。离开了有限，数学上就无从计算。

自然数是无限序列，它总要从 1、2、3、4、5……开始计数，向无限推移，而决不可能像杜林那样，试图把无限序列 1、2、3、4……倒过来数；实数轴是无限的，是可以向正负两个方向无限延伸的，但人们实际描绘出来的实数轴却总是有限长的，而且总是可以从任意确定的原点出发，向终端不确定的正

负方向无穷推移的；$\frac{1}{3}$是一个具有确定数值的整数比，但用小数来表示却是

位数无穷的 0.333……。当我们两相比较并细心研究时，还可发现 0.333……

不可能把$\frac{1}{3}$的无限性完全表达出来，因我们实际上只能写出它的有限位。可

见，正如这个有限的、确定的形式将无穷多的实数包罗无遗一样，$\frac{1}{3}$这个有

限的，确定的形式也把 0.333……包罗无遗。即把它们各自能够表现出来的和不能表现出来的都包罗无遗。于是，达到了有限与无限的统一。

在微分学中，这种统一表现得更为复杂。我们知道，增量△x 和△y 是确定的、有限的量，但其有限差值比$\frac{\triangle y}{\triangle x}$取极限即有时 $\lim\limits_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$，亦即$\frac{\triangle y}{\triangle x}$

$\frac{dy}{dx}$的接近中，却是一个不确定的，无限趋近于零却又不等于零的量，表现为

一个无限的过程，这就是所谓潜无限，潜无限是从有限出发的，但它并不停留

在任何有限上，而是超越一个又一个的有限，向着$\frac{dy}{dx}$永远止境的逼近过程。

在许多情况下，确定的、有限的东西还可以用无穷级数来展开。谁都知道，1 是个最简单的、确定的、有限的数，但它也可以展开为一个无穷级数的形式。

即$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots$，右边无限项之和等于左边的1，按常识说，这是荒谬的，但却是不容怀疑的事实。用我国古代哲学家庄子的话来说，这一等式的含义可形象地表述为；“一尺之棰，日取其半，万世不竭”。

在数学中，很多问题都需要把确定的、有限的东西展开为无穷级数来解决，而二项式定理就是一个十分有用的方法。在二项式定理的一般展开式

$(a+x)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3+\cdots\cdots$中，当 n 不是自然数的时候，给它减去任何自然数永远不会等于零，所以这个展开式的项数就有无穷多，就是说，当 n 不是自然数时，（a＋x）^{n}的展开式是一个无穷级数。从此式中，我们可以清楚地看到，从总体上说，等式的左边是有限的、确定的东西，而等式的右边则是不确定的、无限的东西——

无限的过程和无限的层次。确定的、有限的东西等于不确定的、无限的东西，从形而上学的观点看，这是不可思议的，因为“把某个确定的数，例如把一个二项式化为无穷级数，即化为某种不确定的东西，从常识上来说，这是荒谬的举动”。然而，在有限与无限、确定与不确定的对立统一中，“计算方法的一切固定差别都消失了，一切都可以用相反的形式表示出来”，这恰恰就是辩证法。而且更深一步的研究，我们还可以发现，等式右边在总体上虽是不确定的，具有无限的过程、层次和推移，但其中的每一过程，每一层次，每一推移，则又是确定的、有限的，可以根据人们的需要任意地选取。

以上事实说明，有限和无限这对矛盾是互相依存的，它们在一定条件下各自向其对立面转化，具有自己特定的性质、意义和活动范围，“而这种从一个形式到另一个相反的形式的转变，并不是一种无聊的游戏，它是数学科学的最有力的杠杆，如果没有它，今天就几乎无法去进行一个比较困难的计算”。应该说，用有限的形式，表达无限的过程、层次和内容，用确定的东西去表现不确定的东西，可以作为数学中“通过有限认识无限”的一个重要的方法和途径。

恩格斯曾提出：“物质是按质量的相对的大小分成一系列较大的，容易分清的组，使每一组的各个组成部分互相间在质量方面都具有确定的、有限的比值，但对于邻近的组的各个组成部分则具有在数学意义下的无限大或无限小的比值”

这段话，首先应理解为整个物质世界具有无限多的层次。如果以地球作为出发点，向下有物体，分子，原子，原子核，质子，中子，基本粒子……；向上有太阳系，银河系，总星系……，在无限的宇宙整体中，这一个系列的两个方向的发展都是无止境的，在时间上无始无终，在空间上“至大无外，至小无内”这是第一层含义，它是理解和说明第二层含义的基础和前提。

第二层含义是这段话的主要含义，它是说，在无限层次和序列中，其中任一层次中的诸事物之间在质量方面是有边有际，有大有小的，具有确定的，有限的比值。然而，一旦我们超越这一特定的层次和界限，而去考察该层次与相邻层次的数量关系，那么，在衡量二者差异的天平上，一切砝码都将失去它应有的作用，一切都是不确定的，一切都只具有了相对的意义。……太阳系相对于地球是无限大，地球相对于地面上的物体是无限大，地面上的物体相对于原子是无限大，原子相对于原子核是无限大……，依此类推，未有穷尽，反之，……原子核相对于原子，原子相对于地面物体，地面上的物体相对于地球……，则均为无限小，而且，两个层次之间相距愈远，无限大或无限小的等级愈高。地面物体相对原子是一阶无穷大，相对于原子核则是二阶无穷大，而地球相对于原子核就成为三阶无穷大了……。宇宙层次无限，物质无限可分，无限就可以有无限个等级。所以，无限都是相对而言的，都是在现实世界的一定的关系中才存在的。而数学中的有限和无限只不过是现实世界的客观内容在人们思想中的反映。

将以上两层含义综合起来，我们还不难发现，层次与层次之间，虽然存在着不同等级的无限大或无限小比值，它们是相对无限的数量关系。然而，将它们与整个宇宙相比，则不论是某一层次或某几个层次的总和，实际上都是有限的。只有宇宙本身是无限的，宇宙的层次是无限的，这才是真正的无限，绝对的无限。这一真正的无限，绝对的无限，人们是无法直接从总体上把握的，而是通过对一系列相对无限的数量关系的认识，向着绝对无限的王

国不断靠近的，这种靠近本身也是一个绝对无限的过程。

一切科学和知识都来自于人类认识世界和改造世界的客观实践。但在这一实践中产生的认识却不是一次完成的。它经过了从实践到认识，又由认识刻实践的多次循环往复的过程。在认识中，又经历着由感性到理性，由具体到抽象，由简单到复杂，由低级到高级的一系列辩证的过程。“我们在思想中把个别的东西从个别性提高到特殊性，然后再由特殊性提高到普遍性：我们从有限中找到无限，从暂时中找到永久，并且使之确定起来。然而普遍性的形式是自我完成的形式，因而是无限性的形式；它是把许多有限的东西综合为无限的东西。”

这里的“普遍性的形式”是什么意思呢？在自然界中，普遍性的形式是规律，是事物发展过程中内在的、本质的必然联系。而自然界中纷繁复杂，无限多样的事物和现象不过是客观规律的外在表现。人们认识世界，也首先就是认识各种各样的事物和现象，在此基础上，将已认识到的有限的感性材料经过去粗取精，去伪存真，由此及彼，由表及里的一系列改造制作过程，产生飞跃，上升为理性认识，概括成为规律。可见，规律是从许多有限的材料中综合出来的，同时，规律既然是大量感性材料的综合，它必然具有普遍性和重复性的特点。所以一旦认识了规律，掌握了规律，就可以帮助我们更深刻，更全面地认识一切事物和现象，其表现为在条件具备的情况下可以无限次地起作用。这就是规律所具有的无限性。

在某种意义上，自然界所具有的普遍性的形式，反映到数学上，就是各种公式，定理和定义。例如，什么是圆？最初，人们只知道太阳，月亮，大树的横断面等具体的圆，并认为圆是世界上最完满，最完善的东西，是十全十美的，但却并没有从本质上给圆下出确切的定义。由于对具体的圆多次反复的认识和研究，人们才概括出。“圆是平面上一定直线（线段）绕自己固定的一个端点旋转所构成的图形”。这就把人们对个别的、特殊的、具体的、有限的圆的认识，上升到了一般性的意义上，具有了必然性和普遍性的特点。这种普遍性的形式，能把所有具体圆的本质和特点包罗无遗，因而具有了无限的意义。这就正如毛泽东同志所指出的，“感觉到的东西，我们不能马上理解它，只有理解了的东西，才能更深刻地感觉它”。因此，在这个意义上理解“通过有限认识无限”，也就是从个别到特殊，又由特殊上升到普遍和一般的认识过程。认识了这个一般和普遍，我们也就在全体上把握住了具体的，特殊的个别，也就是通过有限认识到了无限。

又如，人们在初等数学中，开始接触的是有限的、具体的、特殊的一元二次方程：$x^2-3=0$，$2x^2+3X-1=0$，……。后来才在认识具体方程的基础上，总结出一元二次方程的一般形式：

$$ax^2+bx+c=0$$

而在解具体方程中，又进一步总结出一元二次方程的一般求根公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

这样的情况，在数学中俯拾皆是，不胜枚举，这种从个别到特殊，又从特殊上升到普遍和一般，即从有限认识无限的方法，不但在数学科学中十分重要，而且在任何具体科学的研究中，都是不可缺少的。

由探讨，我们就可以清楚地看到，“通过有限认识无限”有着十分丰富的内容，它包括认识的途径、方法、手段、过程、范围、性质……各个方面。

它们在不同的事物中，在同一事物的不同过程中，其表现都是风格迥然相异，特点各有不同的。同时，这四个方面或说是这四个特点，在客观事物的实际发展中并不是互相分离、各自单独地起作用而表现出来的。实际上，在很多情况下，它们是紧密结合，相互渗透，互为补充的，是不能任意割裂开来的。只是人们在认识的过程中，往往从不同的角度、层次和方面对其进行研究和抽象，才使它们在人们的思维中互相区别开来。因此，我们在学习、理解和运用这一原理时，应根据具体情况具体分析，在辩证唯物主义一般原则的指导下，对不同的事物，不同的学科，不同的情况和表现进行深入细致的研究，在深入细致研究的基础上，再作出实事求是的有说服力的概括和论证，而决不能用一两句空洞的原则话，去抽象地笼统地说明和搬用。

话说递推

递推是数学中常用的解题手法之一，有些中学生对此或许有些陌生，本文想通过几个有趣的例子谈谈它。

握　手

有五个人，若其中每两个人都握一次手，问他们总共握多少次手？

这是一个组合问题，在高中有现成的公式好算。对于初中同学来讲有无办法可解；我们只须简单分析一下，答案不难得到。

我们来看下列图例：用“点”代表人，“连线”代表握手这件事。

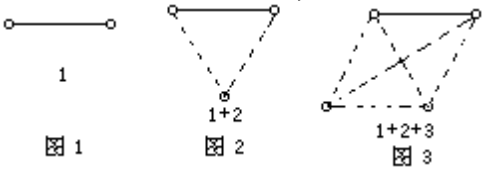


图 1　图 2　图 3

若只有两人，则握 1 次手（图 1）；

若有三人，可看成在两人基础上又添一人，此人和原来两人每人握手一次，这时共握 1＋2 次手（图 2）；

若有四人，则又可视为三人基础上再加一人，此人和原来三人各握手一次，这时共握 1+2＋3 次手（图 3）；

……

如此分析下去，若有 k 人，则共握 1＋2＋3＋…＋（k－1）次手。

当然，1+2＋3＋…＋（k-1）=k（k-1）/2，这里正是利用了递推方法。

显然我们开头问题的答案是 1+2＋3＋4＝10 次。

数 三 角

请你数一数图 4 中一共有多少个三角形？

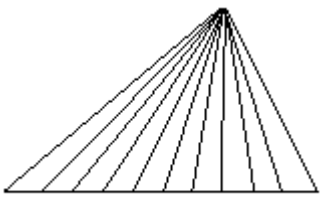


图 4

“这还不容易！”他也许会说，可是你动手一数就知道它并不那么简单了，但是利用递推办法，你会很容易地算出三角形的个数来。我们还是先从简单的图形分析起，从图 5～7 你会看出：

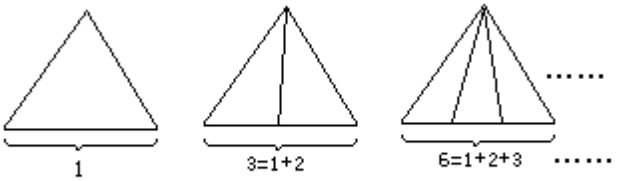


图5　　图6　　图7

这里图形下面的数字表示该图中三角形的个数，它们分别是1，1＋2，1＋2＋3，……往下你只须注意到再添一个小三角形后（图中阴影三角形），则整个图形较前一个图形多出4个三角形，它们分别为图8～11。

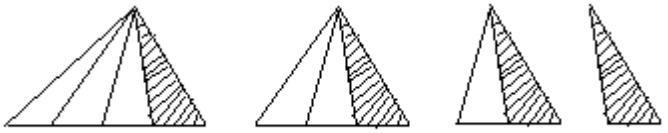


图8　　图9　　图10　　图11

这时三角形总数为1＋2＋3＋4。仿此分析下去我们可以得到：

由k个并列小三角形组成的图形中，共含有1＋2＋3＋…＋（k－1）个不同的三角形。

其实，它与握手问题分析的思路是一样的。

分　饼

一张饼切一刀可以把它分成两块（图12、13）；

切两刀至多可把饼分成4块（图14）；

今问：切k刀至多可把饼分成多少块？

直接回答并非那么轻快，我们仍用递推的办法来分析。

先来看切两刀时，第二刀与第一刀有一个交点，同时这点把第二刀切痕直线分成两段，每一段都把原来的半张饼分成了两部分，这时共切成 2＋2块（可以写成1＋1＋2）；

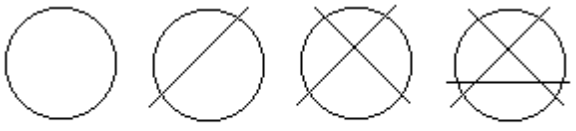


图12　　图13　　图14　　图15

再切一刀，若它与原来两刀都相交，则与原切痕有两个交点而把其自身分成三段（图15）每一段都将所在部分分成两块，这样共可切成2＋2＋3块（它较前多了3块，它可写成1＋1＋2＋3）；

递推地分析，切 k刀至多可分成1＋1＋2＋3＋…＋k块，即1＋k（k＋1）/2块。