学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中 学 物 理 解 题 辞 典

（ 上 ）

学物理初步

测　量

填充题

1．测量长度所能达到的准确程度是由刻度尺的最小刻度决定的。测量需要达到的准确程度跟测量的要求有关。如果要制作窗帘而测量窗户的长度准确到厘米就足够了，但要安装玻璃而测量窗户的长度，就要准确到毫米。

2．有一把刻度尺，最小刻度是厘米，用它测量能准确到厘米，如果用分米作单位记录测量结果，测量值的小数点后面应有 2 位数字，末位是估计出来的。

3．千米/秒、米/秒、千米/分、米/分、千米/小时。速度单位按单位速度大小，由小到大地排列起来应是：米/分、千米/小时、米/秒、千米/分、千米/秒。

4．我们把物体的真实长度叫做该物体长度的真实值。测量值和真实值之间总会有些差异，这个差异叫做误差。误差和错误不同，错误是应该而且可以避免的，而误差是不能避免的。误差的产生跟工具有关系，还跟测量的人有关系。做物理实验时，一定要认真细致，不要出错误，同时还应注意分析误差产生的原因，想办法来减小它。

5．在测一个正立方体时，测量结果每个边的长度是 20.05 厘米。如果它的边长的真实值为 20.00 厘米，则每边的长度误差是 0.05 厘米，每个面的面积误差是 2 厘米^2，它的体积误差是 6×10 厘米^3。

6．物体含有物质的多少叫做质量，质量是物体本身的一种属性。因它不随物体的形状、温度、状态、位置而改变。在国际单位制里，质量的单位是千克。测量质量的工具很多。例如，仓库、火车站用的磅秤，菜场里用的杆秤。物理实验室里，质量是用天平来测量的。

7．天平横梁上游码具有代替以某一质量为单位的小砝码的作用。当游码在横梁上的位置如下图所示时，其读数是 0.640 克。如果游码处于标尺的中间位置仍要把横梁调成水平，必须重新正确调节应移动游码对准横梁标尺的零刻度线，然后旋转横梁两端的螺母向右移动，直到重新平衡时为止。

8．天平是比较精密的仪器，使用时要注意以下几点：

(1)为了防止生锈或腐蚀，使用时不要用手摸天平盘，更不准把潮湿的东西或化学药品直接放在天平盘里，砝码只准用镊子夹取，不准用手拿。用后要及时放回砝码盒里，不要任意放到别处。(2)在天平盘里取放物体，加减砝码和调节螺母、螺钉时，都要旋转止动旋钮，让中央刀口离开浅槽，使横梁止动。在天平盘里放物体和加减砝码时，要轻拿、轻放。防止天平震动过大，损坏刀口。

9．天平的测量范围，即允许测量的最大质量叫做天平的称量。如果超过这个质量去使用天平，会损伤刀口，使天平损坏。天平的感量是指称量时，天平能区分的最小质量。一般中学实验室中的天平称量为 500 克，感量为 0.02 克。

选择题

10．当两个点之间的距离小于 0.1 毫米时，正常人的眼睛一般就不

能分清这两个点了。0.1 毫米相当于 [ ]

A．0.01 米； B．0.01 厘米；

C．1 微米； D．10 微米。

答：B

11．一支新铅笔的长度大约为 [ ]

A．0.18 毫米； B．0.18 厘米；

C．0.18 米； D．0.18 千米。

答：C

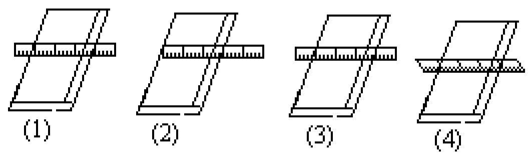
12．下面哪个物体的长短接近 6 厘米？ [ ]

A．教科书的长度； B．墨水瓶的高度；

C．钢笔的长度； D．铅笔芯的直径。

答：B

13．用毫米刻度尺量度木块的宽度时，如图中四种放置刻度尺的做法，哪一种最好？ [ ]



A．如图(1)所示；B．如图(2)所示；

C．如图(3)所示；D．如图(4)所示。

答：A

14．用刻度尺测量一根竹竿的长度，所得结果是 5.84 米，这把刻度尺的最小刻度是 [ ]

A．米； B．分米；

C．厘米；D．毫米。

答：B

15．使用螺旋测微器来测量一张铝箔的厚度（约 0.02 毫米）。可以用（甲）在这片铝箔的不同部位直接重复地测，也可以（乙）把这片箔折成 10 层，然后一次测量这 10 层的厚度。和方法（甲）相比，方法（乙）的优缺点是 [ ]

A．方法（甲）仅给出铝箔厚度的一位有效数字，而方法（乙）给出二位有效数字；

B．倘使在箔的不同部位它的厚度有变化，方法（乙）不能显示，而方法（甲）能够觉察这样的变化；

C．因为铝箔的各层之间有空气，所以方法（乙）测出的厚度比真值大；

D．方法（乙）比方法（甲）精密，方法（甲）较方法（乙）准确。

答：B、D

16．一个直径约 1～2 厘米的钢球，要测量出它的直径，精确到毫米，只需要选用下列哪一组测量工具就行（指最简单而又能满足要求）。

[ ]

A．外卡钳和皮尺； B．外卡钳和毫米刻度尺；

C．游标尺； D．千分尺。

答：B

17．如图用内卡钳和毫米刻度尺测量轴承的内径。四次测量的结果不相同，说明：　[　　]

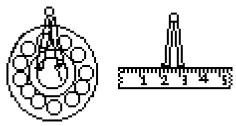
A．测量有误差，数据无效；

B．不可避免地有误差存在；

C．只有一次测量是可靠的，其他三次不可靠；

D．不能用内卡钳来测量内径。

答：B



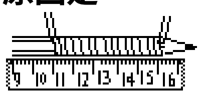
上图中测出轴承的内径应是　[　　]

A．13.3 毫米；　B．23.3 毫米；

C．13 毫米；　D．1.3 毫米。

答：A

18．用如图所示的方法测量铜丝的直径。测量三次，每次都将铜丝重绕过，并放在直尺不同的部位读数。结果三次测得的铜丝的直径都不相同，产生误差的原因是　[　　]



A．铜丝的本身不很圆，且粗细不均匀；

B．三次绕法松紧程度不同；

C．测量时，所读的估计值不同；

D．上述三个因素都存在。

答：D

19．用毫米刻度尺先后四次测量同一个圆柱体的高，各次测得的数值分别是：$h_1=2.144\times10^2$ 毫米、$h_2=2.140\times10^2$ 毫米、$h_3=2.139\times10^2$ 毫米、$h_4=2.147\times10^2$ 毫米，则　[　　]

A．四次测量的平均值 $h=2.1425\times10^2$ 毫米；

B．四次测量的平均值 $h=2.142\times10^2$ 毫米；

C．四次测量中 h_1 最准确；

D．多次测量的平均值会更接近真实值。

答：B、D

20．一位中学生的质量约为　[　　]

A．4.5×10^4 毫克；B．4.5×10^4 克；

C．4.5×10^4 千克；D．4.5×10^4 吨。

答：B

21．下面哪个物体的质量最接近 1 千克？　[　　]

A．一支铅笔的质量；　B．1 分米 3 水的质量；

C．一本书的质量；D．一张课桌的质量。

答：B

22．能用来测量物体质量的工具有　[　　]

A．弹簧秤；　B．杆秤；

C．弹簧磅秤；　D．天平。

答：B、D

23．把一滴水银盛入一只容器内称它的质量，然后单独称容器的质量，就可以测定这一滴水银的质量。要用一只较小容器的理由是 [ ]

A．天平的指针可迅速静止；

B．在较小的负载下天平较灵敏；

C．可以使用较少的砝码；

D．可以使称得的水银质量有较多的有效数字。

答：D

24．在使用天平时，要进行调节，第一步调节天平的底板水平，使垂线所挂的小锤尖端跟底板上小锥体的尖端对准。应调节 [ ]

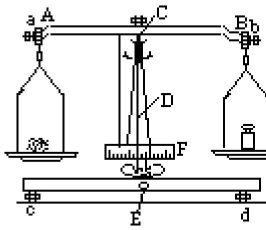
A．螺旋 a 和 b；

B．螺旋 a、b、c 和 d；

C．螺旋 c、d 和 E；

D．螺旋 c、d。

答：D



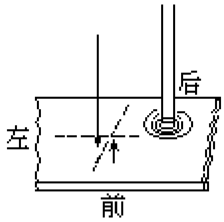
天平调节第二步是调节空载时天平横梁平衡，使横梁指针 D 指在标尺 F 的中央。操作时，应调节

A.螺旋 a、b 和 c； B.螺旋 c 和 d；

C.螺旋 a、b、c 和 d； D.螺旋 a 和 b。

答：D

25．在使用天平之前，发现天平立柱旁的重垂线下端小锤的尖端没有对准底板上的小锥体的尖端，而偏在其左前方，如图，由此可知天平底板 [ ]



A．前方比后方高，左方比右方高；

B．前方比后方低，左方比右方低；

C．前方比后方低，左方比右方高；

D．前方比后方高，左方比右方低。

答：B

26．使用天平测量物体质量的过程中，在增减砝码时必须先将 [ ]

A．砝码的秤盘从刀口上移下；

B．底板下的螺旋放低；

C．旋转横梁两端螺旋，使横梁水平；
D．旋转止动旋钮，使横梁止动。

答：D

27．使用天平时，取放砝码必须用镊子，其原因主要是 [ ]
A．传统的习惯；
B．可轻轻地将砝码放在秤盘上，天平不易损坏；
C．砝码不易弄脏生锈，保证天平的精确度；
D．上述三条都不是。

答：C

28．下面哪一个过程经历的时间差不多是 1 秒？ [ ]
A．眼睛一眨； B．快摆手表摆轮摆动一次；
C．人体心脏跳动一次； D．人呼吸一次。

答：C

29．上海牌快摆手表，1 小时摆动 2.16×10^{4} 次（按钟表行业的习惯，摆轮往返摆动一次说成摆动两次），摆轮的周期是 [ ]
A．0.170 秒；B．0.333 秒；
C．1.00 秒； D．2.00 秒。

答：B

30．用一只能读到 0.1 秒的停表，记录一个单摆摆动若干次数的时间，就能测定这个约为 2 秒的单摆周期。要记录若干摆动次数的时间的目的是 [ ]
A．减少由实验者反应时间中出现的个人误差；
B．得到不同振幅的平均摆动周期；
C．得到超过两位有效数字的周期；
D．保证摆动是单一的简谐振动。

答：A、B、C

31．下面关于偶然误差的话，哪句是正确的？ [ ]
A．实验中产生的错误，叫偶然误差；
B．认真测量可以避免偶然误差；
C．偶然误差是由于测量时，没有遵守某一操作规则而引起的；
D．选用准确的测量仪器，改进实验方法，可以减小误差。

答：D

计算题

32．把地球赤道大圆的 1/60 度的弧的长度叫做 1 海里，而地球直径约等于 1.27×10^{4} 千米，问 1 海里等于多少米？

[解答] 地球赤道大圆的周长约罚πD，

$$1\text{海里}=\pi D\times\frac{1}{360}\times\frac{1}{60}=\frac{3.14\times1.27\times10^{7}}{360\times60}\text{米}=1.85\times10^{3}\text{米。}$$

33．标准状况下，1.0 厘米^{3}体积的氢气里含有氢的分子数约为 27×10^{18} 个，假设每个分子的直径等于 0.20 纳米，问排列起来，这条线长多少？

[解答] 这条线的长度 $l=27\times10^{18}\times0.20\times10^{-9}$ 米$=5.4\times10^{9}$ 米。

34．一根金属线长 5.0 米，质量为 80 克，现在要把它做成 1.0 克、2.0 克、5.0 克、10.0 克的小砝码，问应将它切成多长的线段？

［解答］1.0克砝码的长度为 $\frac{5.0}{80}$ 米 $=0.062$ 米 $=6.2$ 厘米，所以2.0克砝码长为 2.0×6.2 厘米=12.4 厘米，

5.0 克砝码长为 5.0×6.2 厘米=31 厘米，

10.0 克砝码长为 10.0×6.2 厘米=62 厘米。

35．给金属表面喷漆，每喷 1.0 米 ^{2} 用 50 厘米 ^{3} 的油漆，求漆层的厚度。

［解答］设漆层厚度为 d，则

$$S\cdot d=V,$$

所以 $d=\frac{V}{S}=\frac{50\times10^{-6}}{1.0}$ 米 $=0.050$ 毫米。

36．工人师傅急需一个直径 D_2 为 200 毫米，高 d'为 80 毫米的圆柱体。手头有直径 D_2 为 10 厘米的钢材，他想用这种钢材锻打成所需规格，那么下料时，至少要下多厚？

［解答］设所需钢材厚度为 d，则

$$\frac{\pi}{4}D_1^2\cdot d=\frac{\pi}{4}D_2^2\cdot d'。$$

所以 $d=(\frac{D_2}{D_1})^2\cdot d'=\left(\frac{200\times10^{-3}}{10\times10^{-2}}\right)^2\times80\times10^{-3}$ 米

$=32\times10^{-2}$ 米=320 毫米。

37．有一个单摆，测得它摆动 30 次的时间是 60 秒，问在半分钟内摆动多少次？某人跑完 200 米，单摆正好摆动 11 次，问这个人跑完 200 米所用的时间是多少？

［解答］半分钟即30秒摆动次数 $n=\frac{30\text{次}}{60\text{秒}}\times30\text{秒}=15$ 次。跑完200米的时间 $t=\frac{60\text{秒}}{30\text{次}}\times$ 次 $=22$ 秒。

说理和论证题

38．什么叫有效数字？应用有效数字必须遵守哪些规则？

［解答］有效数字是表示测量精确度的一种方法。一个数中可靠的数字加上一位不完全可靠的数字就是该数的有效数字。有效数字的规则是：

(1)一切非零的数字都是有效数字。例如 112.6℃具有四位有效数字。

(2)一切在两个非零数字之间的零都是有效数字。

(3)在一个非零数字右边，用来表示个位、十位、百位等等的零，除特别说明者外不是有效数字。

(4)在小数点右边、但在非零数字左边的零不是有效数字。例如 0.00478 千克具有三位有效数字。

(5)在小数点右边、且在非零数字右边的零是有效数字。例如 0.05070 厘米和 20.00 厘米，都具有四位有效数字。

39．为了用刻度尺量出一枚硬币的厚度，采用先量出叠起来的十枚硬币的厚度，再除以 10 得到平均值的方法，比只测定一枚厚度的方法更准确，为什么？

［解答］因为用刻有毫米刻度的尺来量硬币的厚度时，毫米的下一位

数是估计出来的，估计数和真实值间有差异，也就是说存在误差。假设在分别测定一枚的厚度和十枚叠起来的厚度时，由于估计产生的误差相等，那么对叠起来的每一枚硬币来说，产生的误差只有单独测定一枚的误差的十分之一，所以会更准确些。

40．试设想出两种方法，在地图上测上海到北京的铁路线长度？

[解答] 一种方法是用一个小轮子在地图上沿着上海到北京经过的路线滚动，记下滚过的圈数，再测出轮子的周长。用轮子的周长乘以圈数，就可以得到地图上上海到北京的铁路线长度。根据地图上的比例尺就可以算出上海到北京间铁路线实际的长度。另一种方法是利用一条弹性不大的软棉丝来测量，先把棉线放在地图上，让它跟上海到北京的铁路线完全重合，在棉线上标出上海和北京的两个位置，然后把棉线放直，量出棉线上两点间距离，这就是地图上上海到北京间铁路线的长度。根据地图上的比例尺，就可算出所估测的长度。

实验题

41．不用量筒，只用弹簧秤，利用阿基米德定律测一块软木块的密度。(1)写出实验所需器材。(2)列出应测实验数据。(3)写出实验步骤。(4)根据实验数据列出求软木密度的计算式。

[参考解答] (1)弹簧秤一把，足够重的金属块一块，细线一根，装有水的水槽一只。

(2)木块在空气中的重量 G_0，金属块浸没在水中时弹簧秤的示数 F_1，木块和金属块扎在一起浸没在水中时弹簧秤的示数 F_2。

(3)先测 G_0 然后测 F_1，最后测 F_2。

(4) $\rho = \dfrac{G_0}{G_0 + F_1 - F_2}\rho_水$。

压力　压强　密度　浮力

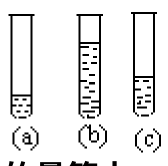
填充题

42．三种不同的液体，其密度 $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$，某一容器恰能盛下第二种液体。则它必能盛下相同质量的第三种液体。必盛不下相同质量的第一种液体。

43．一根均匀的金属棒质量为 81 克，体积为 30 厘米^3，组成此物体的物质的密度是 2.7×10^3 千克/米^3。这种物质是铝。将金属棒截一去一半，则剩下部分的质量为 40.5 克，体积为 15 厘米^3，密度为 2.7×10^3 千克/米^3。

44．把质量相同的水银和水同时装入粗细均匀的玻璃管中，水银将在下层，这时水柱高度和水银柱高度的比是 13.6:1。

45．质量相等的水、硫酸、酒精分别装在同样规格的三个试管中，如图所示。不用嗅觉鉴别，(a)试管中装的是硫酸，(b)试管中装的是酒精，(c)试管中装的是水。（ρ硫酸$=1.8\times10^3$ 千克/米^3，ρ酒精$=0.8\times10^3$ 千克/米^3）



46．在三个同样的量筒中，分别倒入等量的水，将同样质量的铜块、

铝块，玻璃块分别依次放入三个量筒中，三个量筒水位由高到低的次序是玻璃、铝块、铜块。如把同样体积的铜块、铝块、玻璃分别放入量筒中，则水位高低一样高。

选择题

47．自来水笔吸水时，把笔上的弹簧片按几下后松开，墨水就吸到橡皮管里去了，根本原因是 [ ]

A．弹簧片有弹力； B．橡皮管有吸力；

C．手对弹簧片有压力；D．管外墨水面上有大气压。

答:D

48．关于压力，下列说法正确的是 [ ]

A．压力的方向总是竖直向下的；

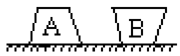
B．压力的大小总是等于物体的重量；

C．压力的方向总是垂直于物体相互接触的表面；

D．压力的方向有时垂直于物体相互接触的表面，有时不垂直于物体的表面。

答:C

49．有两个形状、大小、材料完全相同的物体 A、B，以不同方式放在水平地面上如图，这时它们对地面产生的压强和压力的关系是 [ ]



A．$\rho_A>\rho_B$， $F_A=F_B$；

B．$\rho_A<\rho_B$， $F_A=F_B$；

C．$\rho_A=\rho_B$， $F_A>F_B$；

D．$\rho_A=\rho_B$， $F_A<F_B$。

答:B

50．体积相同的实心铝块和铁块，它们质量的比是（铝的密度为 2.7×10^3 千克/米^3，铁的密度为 7.8×10^3 千克/米^3） [ ]

A．1:1; B．26:9;

C．2.7:1; D．1:7.8;

E．以上答案都不对。

答:E

51．一般情况下，下列哪种说法是正确的 [ ]

A．铁比木头重；

B．铝块不一定比铁块轻；

C．相同质量的冰和水，水的体积一定大；

D．相同体积的冰和水，冰的质量一定比水的质量小。

答:B、D

52．用两种不同材料制成的小球 A 和 B，在天平左盘中放 2 个 A 球，在右盘中放 3 个 B 球，天平刚好平衡，则 [ ]

A．A 球的质量等于 B 球的 1.5 倍；

B．A 球的密度等于 B 球的 1.5 倍；

C．B 球的密度等于 A 球的 1.5 倍；

D．A 球和 B 球的密度相等。

答:A

53．在天平的两边托盘上分别放两个体积相同的实心物体 A 和 B，结

果天平不能平衡，B 盘比 A 盘高。这说明 [ ]

A．A 和 B 密度相等，质量不相等；

B．A 和 B 质量相等，密度不相等；

C．A 的密度比 B 的大；

D．B 的密度比 A 的大；

E．什么都不能说明。

答:C

54．两个实心球，木球的质量是铁球的 1/2，木球的半径是铁球的两倍，那么木球的密度是铁球的 [ ]

A．1/16； B．1/8；

C．1/4； D．1/2。

答:A

55．已知铝的密度小于铁的密度，分别用铝和铁各做成一个实心球，下面四种情况，哪一种情况是不可能的？ [ ]

A．铝球的体积和质量都比铁球小；

B．铝球的体积和质量都比铁球大；

C．铝球的体积大于铁球，但质量小于铁球；

D．铝球的体积小于铁球，但质量大于铁球。

答:D

56．某物体的密度是 8×10^3 千克/米^3，如果将这物体去掉一半，则剩下部分的密度是 [ ]

A．1×10^3 千克/米^3； B．4×10^3 千克/米^3；

C．16×10^3 千克/米^3；D．8×10^3 千克/米^3。

答:D

57．用铜和铝两种材料制成的导线。如果它们的质量和横截面积都相同，则这两条导线的长度的比等于（铜的密度为 8.9×10^3 千克/米^3，铝的密度为 2.7×10^3 千克/米^3） [ ]

A．1:1； B．89:27；

C．27:89； D．无法确定。

答:C

58．有实心的木球和铁球各一个，在空气中称时重力相等。如果将它们放到真空中去称，则 [ ]

A．木球比铁球重；

B．铁球比木球重；

C．木球和铁球一样重；

D．重力都等于零。

答:A

59．有一个固体的密度是某种液体密度的 3/4，如果把这个固体放在此液体中时，露出液面外的体积和浸没部分的体积的比为 [ ]

A．1:4； B．3:4；

C．4:3； D．1:3。

答:D

60．三个不同单位的密度：1.5 吨/米^3；1.5 千克/分米^3；1.5 克/厘米^3，哪一个大？ [ ]

A．1.5 吨/米^3； B．1.5 千克/分米^3；

C．1.5 克/厘米^3； D．三个一样大。

答:D

61．对于一种均匀的物质来说，在关系式$\rho=\frac{M}{V}$中：ρ表示密度；M表示质量；V表示体积。下列哪种说法正确？[　　]

A．ρ和M成正比；

B．ρ和V成反比；

C．V相同时ρ和M成正比；M相同时ρ和V成反比；

D．前面三种说法都不对。

答:D

62．用金、铜、铝三种不同物质制成质量相同的实心球，体积最大的是哪个？[　　]

A．金球；B．铜球；

C．铝球；D．都一样。

答:C

63．用金、铜、铝三种不同物质制成质量相同的空心球，哪个体积最大？[　　]

A．金球；B．铜球；

C．铝球；D．不能确定。

答：A

65．500克的冰块（密度为0.9×10^3千克/米^3），完全熔解成同温度的水后，水的体积是[　　]

A．250厘米^3；B．500厘米^3；

C．550厘米^3；D．450厘米^3。

答:B

66．有甲、乙两块金属，甲的密度为乙的2/5倍，乙的质量是甲的2倍。那么甲的体积为乙的[　　]

A．0.2倍；　B．0.8倍；

C．5/4倍；　D．5倍。

答:C

67．已知金属甲、乙的密度分别为ρ_1、ρ_2，由相等质量的金属甲和乙制成合金，那么此合金的密度为[　　]

A．$\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$；B．$\sqrt{\rho_1\rho_2}$；

C．$\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$;D．$\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$.

答:D

68．已知金属甲、乙的密度分别为ρ_1、ρ_2。由相等体积的金属甲和乙制成合金，此合金的密度为[　　]

A．$\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$；B．$\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$；

C．$\sqrt{\rho_1\rho_2}$;D．$\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$。

答:A

69．1×10^{-3}米^{3}的冰和1×10^{-3}米^{3}的水相比较[　　]

A．冰和水体积相同，水的质量比冰小；
B．冰密度比水小，冰的体积比水大；
C．冰的密度比水小，水的质量比冰大；
D．冰和水体积相同，因而质量也相等。

答:C

70．三架天平的左盘上分别放着体积相同的铜块、铁块和铝块，在右盘上分别加砝码使天平平衡，所加的砝码是 [ ]

A．放铜块的天平大；B．放铁块的天平大；
C．放铝块的天平大；D．一样大。

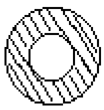
答:A

71．甲、乙两物体质量的比是 1:2，体积的比是 2:1，那末甲、乙密度的比是 [ ]

A．1:2; B．2:1;
C．1:4 D．4:1;
E．1:1。

答:C

72．一只空心球，其截面如图所示，球的体积为 V，球腔的容积为 $\frac{V}{2}$。当它漂浮在水面时，有一半露出水面。如果在球腔内注满水，则 [ ]



A．球仍漂浮在水面，但露出水面部分小于一半；
B．球仍漂浮在水面，露出水面部分仍为一半；
C．球可以停留在水中任何深度的地方；
D．球将下沉。

答:C

计算题

73．水银的密度为 13.6×10^3 千克/米^3。问：(1)12.2 厘米^{3}水银的质量等于多少？(2)472 克水银将占据多大体积？

[解答] (1)m=ρV=13.6×10^3×12.2×10^{-6}千克=0.166 千克。

$$(2)V=\frac{m}{\rho}=\frac{472\times10^{-3}}{13.6\times10^{3}}\text{米}^3=3.47\times10^{-5}\text{米}^3。$$

74．能装 10 千克的水的容器，最多能装密度是 0.8×10^3 千克/米^{3}的酒精多少千克？

[解答] 这个容器的容积等于 10 千克水的体积。即

$$V=\frac{m_{水}}{\rho_{水}}=\frac{10}{1\times10^{3}}\text{米}^3。$$

这些体积的酒精质量为

$$m=\rho_{酒}V=0.8\times10^{3}\times\frac{10}{10^{3}}\text{千克}=8\text{千克}。$$

75．把一块质量为 50 克的金块，投入盛水为 125 厘米^{3}的量筒中，水面升高到 128 厘米^{3}的地方，问这块金块是不是纯金？

[解答] m=50 克=5×10^{-2}千克

$V=(128-125)$厘米$^3=3\times10^{-6}$米^3，

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{5\times10^{-2}}{3\times10^{-6}}\text{千克/米}^3=16.7\times10^3\text{千克/米}^3。$$

查表知金的密度为 19.3×10^3 千克/米^3，可以知道这金块不是纯金。

76．为了测量一块木块的密度，将另一块体积为 10 厘米^{3}的铁块挂在木块下端，使木块全部浸没在量筒的水中，此时量筒中的水面由刻度 50 毫升上升到 90 毫升处。已知木块质量是 21 克，求木块的密度？

［解答］$V_{铁}=10$ 厘米$^3=10\times10^{-6}$米^3，

$V_1=50$ 毫升$=50\times10^{-6}$米^3，

$V_2=90$ 毫升$=90\times10^{-6}$米^3，

$m_{木}=21$ 克$=2.1\times10^{-2}$千克。

铁块和木块的体积 $V'=V_2-V_1=(90\times10^{-6}-50\times10^{-6})$米$^3=40\times10^{-6}$米^3。

木块的体积 $V=V'-V_{铁}=(40\times10^{-6}-10\times10^{-6})$米$^3=30\times10^{-6}$米^3。

所以 $\rho_{木}=\frac{m_{木}}{V}=\frac{2.1\times10^{-2}}{30\times10^{-6}}\text{千克/米}^3=0.7\times10^3\text{千克/米}^3$。

77．一辆汽车最大运载量是 30 吨，容积是 40 米^3。现要运输钢材和木材两种材料，钢材密度是 7.8×10^3 千克/米^3，木材密度是 0.5×10^3 千克/米^3，问这两种材料应怎样搭配才能使这辆车厢得到充分利用？

［解答］$m=3.0\times10^4$ 千克，$V=40$ 米^3，

$\rho_{木}=0.5\times10^3$ 千克/米^3，$\rho_{钢}=7.8\times10^3$ 千克/米^3。

$V=V_{木}+V_{钢}=40$ 米^3　　(1)

$\rho_{木}\cdot V_{木}+\rho_{钢}\cdot V_{钢}=m=3.0\times10^4$ 千克　　(2)

由(1)式得 $V_{木}=V-V_{钢}$，

代入(2)式

0.5×10^3 千克/米$^3\times(40$ 米$^3-V_{钢})+7.8\times10^3$ 千克/米$^3\times V_{钢}=3.0\times10^4$ 千克，

解得 $V_{钢}=1.4$ 米^3，$V_{木}=40$ 米$^3-1.4$ 米$^3=38.6$ 米^3。

78．修建一座能贮藏 2400 吨石油的圆筒形的油库，库底内直径为 20.4 米，求油库的高度至少多高（ρ石油$=0.9\times10^3$ 千克/米^3）。

［解答］石油的体积 $V=\frac{m}{\rho}=\frac{\pi}{4}d^2\cdot h$,

所以 $h=\frac{4m}{\rho\pi d^2}=\frac{4\times2.4\times10^6}{0.9\times10^3\times3.14\times20.4^2}\text{米}=8.16\text{米}$。

79．用盐水选种，需用密度是 1.1×10^3 千克/米^{3}的盐水，现配制了 500 厘米^{3}的盐水，称得它的质量为 0.6 千克，这样的盐水是否合乎要求？如果不合乎要求，应该加盐还是加水？加多少？

［解答］配制的盐水密度 $\rho_1=\frac{m}{V}=\frac{0.6}{500\times10^{-6}}\text{千克/米}^3=1.2\times10^3$ 千克/米^3。1.2×10^3 千克/米$^3>1.1\times10^3$ 千克/米^3，太浓，应加水。

设要加的水的体积为 $V_{水}$，则所加水的质量 $m_{水}=\rho_{水}V_{水}$。

此时密度 $\rho=\frac{m+m_{水}}{V+V_{水}}=\frac{m+\rho_{水}V_{水}}{V+V_{水}}$，

解得 $V_{水}=\frac{m-\rho V}{\rho-\rho_{水}}=\frac{0.6-1.1\times10^3\times500\times10^{-6}}{1.1\times10^3-1.0\times10^3}$米^3

$=0.5\times10^{-3}$米^3=500厘米^3。

80．石油可以用油罐车来运输，石油的密度是0.85×10^3千克/米^3。如果每节油罐车的容量是80米^3，运输2000吨石油需要多少节油罐车？

[解答] 石油总体积 $V=\frac{m}{\rho}=nV_1$，

节数 $n=\frac{m}{\rho V_1}=\frac{2000\times10^3}{0.85\times10^3\times80}$节$=29.4$节$\approx30$节。

81．一个瓶子装满水时质量是520克，装满牛奶时质量是535克，牛奶的密度是$1.0^3\times10^{-3}$千克/米^3，求瓶子本身的质量？

[解答] 设瓶子容积为V，则由于$m_1=m_{水}+m_{瓶}=520\times10^{-3}$千克，$m^2=m_{牛}+m_{瓶}=535\times10^{-3}$千克，$m_2-m_1=m_{牛}-m_{水}=(\rho_{牛}-\rho_{水})V$。

所以 $V=\frac{m_2-m_1}{\rho_{牛}-\rho_{水}}=\frac{535\times10^{-3}-520\times10^{-3}}{1.03\times10^3-1.0\times10^3}$米$^3=500\times10^{-6}$米^3，

$m_{瓶}=m_1-m_{水}=520\times10^{-3}$千克$-1.0\times10^3\times500\times10^{-6}$千克

$=20\times10^{-3}$千克=20克。

82．有一个铜铸件，它铸造时所用的实心木模质量是12千克，木模的密度是0.6×10^3千克/米^3，称出这个铸件质量是175千克，根据这些数据判断这个铜铸件有没有气孔？

[解法一] 木模体积 $V_{木}=\frac{m}{\rho}=\frac{12}{0.6\times10^3}$米$^3=20\times10^{-3}$米^3。

铸件密度 $\rho=\frac{m_{铸}}{V_{铸}}=\frac{m_{铸}}{V_{木}}=\frac{175}{20\times10^{-3}}$千克/米^3

$=8.75\times10^3$千克/米^3。

8.75×10^3千克/米$^3<=8.9\times10^3$千克/米^3,有气孔。

[解法二] 实心的铸件质量应为

$m_{铸}=\rho_{铜}V=8.9\times10^3\times20\times10^{-3}$千克=178千克。

178千克＞175千克，有气孔。

83．铁块（密度7.8×10^3千克/米^3）和铝块（密度2.7×10^3千克/米^3）体积相等，同时放在一个桌面上产生的压强也相同，求铁块和铝块和桌子接触的底面面积的比？

[解答] 体积 $V=\frac{m}{\rho}$，压强 $p=\frac{mg}{S}$，面积 $S=\frac{mg}{p}=\frac{\rho Vg}{p}$。

底面积的比 $\frac{S_{铁}}{S_{铝}}=\frac{\rho_{铁}}{\rho_{铝}}=\frac{7.8\times10^3}{2.7\times10^3}=\frac{26}{9}$。

84．工厂浇铸一个铁铸件，已知木模质量为5.6千克，木料和铸铁的密度分别为0.7×10^3千克/米^3、7.8×10^3千克/米^3，求至少要用多少铸铁？

[解答] 木模体积$V_{木}=\dfrac{m_{木}}{\rho_{木}}$，铸铁体积$V_{铁}=V_{木}$，

铸铁质量 $m_{铁}=\rho_{铁}V_{铁}=\rho_{铁}V_{木}=\dfrac{\rho_{铁}}{\rho_{木}}m_{木}$

$$=\frac{7.8\times10^{3}\times5.6}{0.7\times10^{3}}\text{千克}=62.4\text{千克。}$$

85．一块碑石体积为 25 米^3，为了计算它的重力，取一小块和碑石质料相同的岩石作为样品。测得它的质量为 140 克，将它浸没在装有 100 毫升水的量筒中，水面升高到 150 毫升刻度处。试计算这碑石重力。

[解答] 样品体积 $V'=(150-100)$毫升$=50\times10^{-6}$米^3

$$\text{样品密度}\ \rho=\frac{m'}{V'}=\frac{140\times10^{-3}}{50\times10^{-6}}\text{千克/米}^{3}$$

$=2.8\times10^{3}$千克/米^3，

碑石质量 $M=\rho V=2.8\times10^{3}\times25$ 千克$=70\times10^{3}$千克，

碑石重力 $G=Mg=70\times10^{3}\times9.8$ 牛$=6.86\times10^{5}$牛。

86.一块长方体的月球岩石标本具有下列尺寸 1.52 厘米×2.63 厘米×2.15 厘米。它的质量为 28.8 克，月球的体积是 2.20×10^{19}米^3。假定月球的平均密度等于该岩石标本的密度，计算月球的质量。

[解答] 月球的质量 $m_{月}=\rho_{月}V_{月}$，

由题意 $\rho_{月}=\rho_{岩}$，$\rho_{岩}=\dfrac{m_{岩}}{V_{岩}}=\dfrac{m}{(l\times b\times h)_{岩}}$。

得 $m_{月}=\dfrac{m_{岩}V_{月}}{(l\times b\times h)_{岩}}$

$$=\frac{28.8\times10^{-3}\times2.20\times10^{19}}{1.52\times2.63\times2.15\times10^{-6}}\text{千克}$$

$=7.37\times10^{22}$千克。

87．一尊大理石的人像，高度等于 50 千克的人的高度 2 倍，设大理石的密度为 2.7×10^{3}千克/米^3，人的密度接近于 1.0×10^{3}千克/米^3，试估计这尊石像质量约为多少？

[解答] 由于像和人的外形要相似，像的长、宽、高都是人的 2 倍，所以体积约为人体积的 2^3倍，即 8 倍。

所以 $V_{石}=8V_{人}$， $\dfrac{m_{石}}{m_{人}}=\dfrac{\rho_{石}V_{石}}{\rho_{人}V_{人}}$，

石像质量 $m_{石}=\dfrac{\rho_{石}V_{石}}{\rho_{人}V_{人}}m_{人}=\dfrac{2.7\times10^{3}\times8\times50}{1.0\times10^{3}\times1}$千克$=1080$千克。

88．一个体积 $V=1.5$ 分米^{3}的铁球，重 $G=76.44$ 牛。这个铁球是实心的还是空心的？假如是空心的，把空心部分灌满铅，那么这个球重多少？

[分析] 判断是实心还是空心，可以用比较法。先求出球的密度，再和铁的密度比较，如铁球是实心则应相等，如是空心，则球的密度必小于铁的密度。

也可以比较质量，假定铁球是实心的，由体积和铁的密度求出铁球应有的质量，一定和球的质量相等。如果是空心的，球的质量必小于铁球应有质量。

也可用比较体积的方法：按实心计算出球应的有的体积，跟实际铁球的体积相比较，如果是空心的，它的体积必大于应有的体积。

[解答] 铁球所占体积 $V_1=\frac{m_1}{\rho_1}=\frac{G_1}{g\rho_1}$

$$=\frac{76.44}{9.8\times7.8\times10^3}\text{米}^3$$

$$=1.0\times10^{-3}\text{米}^3=1.0\text{分米}^3,$$

因为 $V_1<V$，所以球是空心的。

空心的部分体积　$V_2=V-V_1=(1.5-1.0)$分米^3=0.5 分米^3。

灌满铅后，铅的质量

$m_2=\rho_2V_2=11.3\times10^3\times0.5\times10^{-3}$千克=5.65 千克。

铅重 G_2．$=m_2g=5.65\times9.8$ 牛=55．37 牛。

球总重 $G=G_1+G_2=(76.44+55.37)$牛=131．8 牛

静力学

力的概念　重力 弹力 摩擦力

填充题

89．质量 m=2.5 千克的物体，其重力 G=24.5 牛。重力 G=29.4 牛的物体，其质量 m=3 千克。

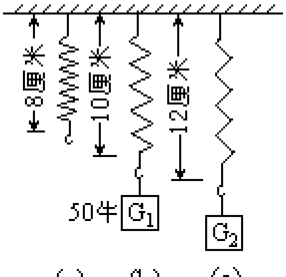
90．运动员把手榴弹扔出后，手榴弹受到重力作用。这个力的受力物体是手榴弹，施力物体是地球。

91．力的图示可以把力的三要素都表示出来，(1)带箭头的线段（有向线段）的起点（或终点）表示力的作用点，(2)按一定比例画出的带箭头线段的长度表示力的大小，(3)箭头所指方向表示力的方向。

92．弹簧秤是根据在弹性限度内，弹簧的伸长跟受到的拉力成正比原理制成的。在一弹簧下端挂 3 牛重的物体时弹簧伸长 4.5 厘米，如果改挂 5 牛重的物体，则弹簧伸长 7.5 厘米。

93．一根弹簧原长 10 厘米，在 5 牛拉力下伸长了 1 厘米。如果把弹簧剪为 5 厘米长，拉力仍为 5 牛，则弹簧伸长 0.5 厘米，这 5 厘米长的弹簧倔强系数 $k=10^3$ 牛/米。

94．如图，用同一根弹簧做实验。图(a)指出弹簧原长 l_0=8.0 厘米；在图(b)中弹簧伸长△l=2.0 厘米；在图(c)中弹簧伸长△l'=4.0 厘米；物体重 G_2=100 牛。实验时，不能在弹簧下面无限制地加砝码，因为太重会超过弹簧的弹性限度而损坏弹簧。



(a)　(b)　(c)

95．一根弹簧的倔强系数 k=1000 牛/米。在弹簧两端有两人沿着弹簧的轴线向相反方向各用 20 牛的力拉弹簧，那么弹簧的伸长量是 2 厘米。

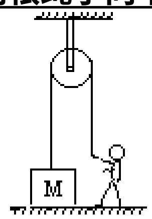
96．在一条弹簧的两端，各有 9 牛的外力向外拉伸，它伸长了 6 厘米。要使它再伸长 4 厘米，弹簧两端的外力应为 15 牛。这条弹簧的倔强系数是 150 牛/米。

97．弹簧下挂 0.5 牛重物时，弹簧伸长 2 厘米，挂 0.75 牛重物时，弹簧长度是 10 厘米，则弹簧原长是 7 厘米。

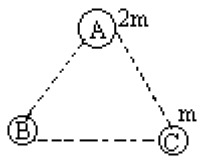
98．弹簧原长 10 厘米，如果它的下端挂 4 牛重物时弹簧长度变为 12 厘米（未超过弹性限度）。如果把重物取去 1 牛，则弹簧长度应为 11.5 厘米。

99．有两根相同材料的金属丝 A 和 B，上端固定，下端各吊一 100 牛的重物时，A、B 长分别 21.3 厘米和 7.1 厘米。各吊一 200 牛的重物时，A、B 分别长 21.6 厘米和 7.2 厘米。如果把 A 的上端固定，吊以重物 50 牛，在这 50 牛重物下系住 B，B 再吊重物 150 牛，则 AB 长的总和应为 28.75 厘米。

100．如图所示，一个重 500 牛的人，用 200 牛的力通过绳子和定滑轮拉一个静止在地面上重 500 牛的物体 M，则人受到重力、弹力和拉力的作用，其大小分别为 500 牛、300 牛和 200 牛。物体 M 受到重力、弹力和拉力的作用，其大小分别为 500 牛、300 牛、200 牛，如果滑轮的质量不计，则滑轮受到两根绳子向下的拉力和轮轴给它的向上弹力的作用。



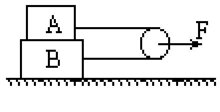
101．有一个等边三角形 ABC。在 B、C 两点各放一个质量是 m 的小球，在 A 点放一个质量是 2m 的小球，则这个球组的重心在角 A 的角平分线的中点上。



102．水平面上放一物体，质量=10 千克，静摩擦系数 μ_s=0.3，滑动摩擦系数 μ=0.2。要使物体从静止开始运动，水平拉力至少应为 29.4 牛。如果想使已经运动了的这个物体保持匀速直线运动，则水平拉力应为 19.6 牛。

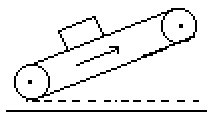
103．在和水平面成某一角度的斜向上的拉力 F 作用下，物体恰能沿粗糙水平面作匀速运动。如果物体重力增为原来的 3 倍，则用同样方向的力 F’作用在物体上使物体仍能作匀速运动，F’=3F。

104．如图所示，物体 A、B 的质量 $m_A=m_B$=6 千克，A 和 B，B 和桌面间的摩擦系数都等于 0.3，水平力 F=30 牛。那么 A 对 B 的摩擦力为 15 牛，方向向右，桌面对 B 的摩擦力是 30 牛，方向向左。



105．质量 60 千克的物体在水平面上作匀速运动受到大小为 120 牛的滑动摩擦力作用。如果在物体上加放质量为 120 千克的重物时，滑动摩察力为 360 牛，滑动摩擦系数为 0.2。如果物体负着重物加速前进，则滑动摩擦力为 360 牛。

106．如图所示，用传送带传送货物。如果货物和传送带之间的摩擦系数为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$，那么，传送带和水平方向夹角要小于30°才能把物体送上去。



选择题

107．一只杯子放在水平桌面上，这杯子受到哪些力的作用？ [ ]

A．重力；
B．重力和杯对桌面的压力；
C．重力和桌面对杯的支持力；
D．重力、杯对桌面的压力和桌面对杯的支持力。

答：C

108．把一个小球用线系着拴在手上，小球所受重力的反作用力作用在 [ ]

A．线上； B．手上；
C．地球上； D．小球上。

答：C

109．一个物体静止在水平桌上，下列说法哪种是正确的？ [ ]

A．物体所受的重力和桌面对它的支持力是一对作用力和反作用力；
B．物体对桌面的压力就是物体的重力，这两个力实质上是一个力；
C．物体所受的重力的反作用力作用在桌面上；
D．桌面对物体支持力的大小等于物体的重力，这两个力是一对相互平衡的力。

答：D

110．某人想用力 F 竖直向上提起地面上的重物，重物没有被提起，则下列说法中哪些是正确的？ [ ]

A．由于力 F 小于物体的重力，所以物体所受合力不等于零；
B．地面所受的压力大小是物体重力和拉力 F 的差值；
C．物体所受重力和地面对物体的弹力是相互平衡的力；
D．力 F 和地面所受的压力互相平衡。

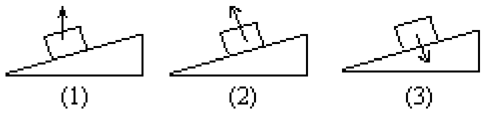
答：B

111．下列关于力的叙述，哪些是正确的。 [ ]

A．施力物体同时一定是受力物体；
B．作用力和反作用力是一对相互平衡的力；
C．一对相互平衡的力一定是同一种性质的力；
D．作用力和反作用力可以是不同性质的力。

答：A

112．长方体静止在斜面上，斜面对长方体的作用力应如图中 [ ]



A．如图(1)；B．如图(2)；
C．如图(3)；D．如图(4)

答：A

113．使原来静止的木箱开始运动所用的水平力要比维持这一木箱做匀速运动所用的水平力大，这一现象说明 [ ]

A．力是产生运动和维持运动的原因；
B．力是使物体运动状态发生变化的原因；
C．在相同接触面和相同压力下，物体受到的最大静摩擦力大于滑动摩擦力；
D．力是维持物体运动速度大小不变的原因。

答：C

114．关于物体的重心，下列说法中正确的是 [ ]

A．重心就是物体内最重的一点；
B．任何有规则形状的物体，它的几何中心必然与重心重合；
C．重心是物体各部分所受重力的合力的作用点；
D．重心是重力的作用点，所以重心总是在物体上，不可能在物体之外。

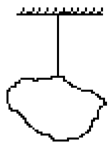
答：C

115．关于物体的重心的叙述，下列说法中正确的是 [ ]

A．物体升高或降低时，重心在物体上的位置也要升高或降低；
B．物体的形状改变时，其重心的位置必定改变；
C．物体的重心也可能不在物体上，而在物体的外部空间；
D．物体的重心随着物体放置的方法不同，重心在物体内的位置也会变化。

答：C

116．挂在细线下面的物体处于力的平衡状态。那么 [ ]



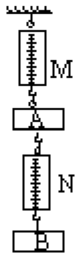
A．物体的重心一定在沿着细线方向上；
B．当这个物体支靠在墙上时，它既受到地面的作用力又受到墙的作用力，其重心在物体内的相对位置将要发生变化；
C．物体受到撞击，即使形状发生变化。但由于它的重力不变，其重心在物体内部的相对位置也不会改变；
D．如果物体是空心的，其重心有可能在空隙部分。

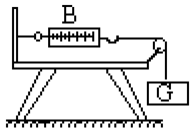
答 A、D

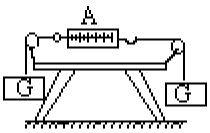
117．左下图中两个物体 A 和 B 重力都是 5 牛，测力计重力不计，那么测力计 M 和 N 的读数分别是 [ ]

A．5 牛、5 牛；　　B．10 牛、10 牛；
C．10 牛、5 牛；　　D．10 牛、0。

答：C







118．如右上图所示，弹簧秤和细线重力不计，一切摩擦也都不计，重物 G=1 牛，弹簧秤 A 和 B 的读数分别是 [ ]

A．1 牛、0； B．0.1 牛；
C．2 牛、1 牛 D．1 牛、1 牛。

答：D

119．有三条 10 厘米长的弹簧，本身重量都不计。如果在每条弹簧上分别挂上重物 G 后，弹簧伸长都是 1 厘米。现将三条弹簧依次串接成一条长弹簧，再挂上同一重力 G，则三条弹簧的总长是 [ ]

A．31 厘米； B．33 厘米；

C．36厘米；D．$30\frac{1}{3}$厘米。

答：B

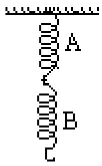
120．两根轻弹簧 A、B 的倔强系数分别为 k_1k_2。把它们串联起来作为一整根弹簧，这根弹簧的倔强系数为 k,那么 [ ]

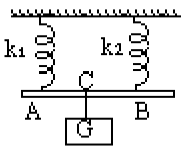
A．$k=k_1$； B．$k=k_2$；

C．$k = k_1k_2$；D．$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$

E．$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$。

答：E





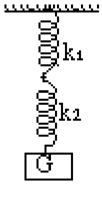
121．有两根轻弹簧，倔强系数分别为 k_1、k_2,串联后下端挂一个重力为 G 的物体，则两根弹簧的伸长量的比为 [ ]

A．$k_1:k_2$； B．$k_2:k_1$；

C．$\sqrt{k_1}:\sqrt{k_2}$；D．$\sqrt{k_2}:\sqrt{k_1}$；

E.$k_1:(k_1+k_2)$

答:B



122．两根等长的弹簧，其倔强系数分别为 k_1 和 k_2，它们分别钩住一根细棒的两端，细棒重力不计。一个重力为 G 的重物，悬于 C 点后，AB 棒仍能保持水平，如右上图所示。因此，AC:CB 等于 [ ]

A．$k_1:k_2$； B．$k_2:k_1$；

C．$\sqrt{k_1}:\sqrt{k_2}$；D．$\sqrt{k_2}:\sqrt{k_1}$。

答：B

123．两个相互紧紧压着的物体间发生相对滑动时，滑动摩擦系数

$\mu=\frac{f}{N}$，由此可见 [ ]

A．μ和摩擦力 f 成正比：f 越大，μ值越大；

B．μ和正压力 N 成反比：N 越大，μ值越小；

C．μ和摩擦力 f 成正比，和压力 N 成反比；

D．μ值由接触物体的材料决定，材料一定，μ值也一定。

答：D

124．关于滑动摩擦力的以下几种说示，你认为哪一种正确？

[ ]

A．摩擦力不可能是动力；

B．摩擦力总是和物体的运动方向相反；

C．摩擦力总是阻碍着物体间的相对运动；

D．摩擦力跟物体的重力成正比。

答：C

125．一物体在桌布滑行，受到摩擦力作用，其大小为 f，则

[ ]

A．桌子也受到摩擦力作用，大小为 f，方向和物体运动方向一致；

B．桌子也受到摩擦力作用，大小为 f,方向和物体动动方向相反；

C．桌子也受到摩擦力作用，大小不等于 f;

D．桌子不受到摩擦力作用。

答：A

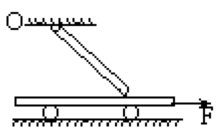
126．某工厂的生产流水线上用水平放置的皮带传送装置传送工件。当工件随皮带作减速运动时，工件受到的静摩擦力的方向是 [ ]

A．跟速度方向相反； B．跟速度方向相同；

C．跟速度方向无关； D．不能确定。

答：A

127．如图重为 G 的木棒，可绕光滑轴 O 自由转动，现将棒搁在表面粗糙的小车上。小车原来静止，如果用水平力 F 拉动小车，则棒受到的摩擦力方向 [ ]

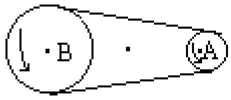


A．向右； B．向左；

C．等于零； D．都有可能。

答：A

128．在图示的皮带传动装置中，A 轮为主动轮，B 轮为从动轮，箭头表示两轮旋转的方向。关于 A、B 两轮所受的摩擦力方向，下述说法哪个正确？ [　　]



A．两轮受到的摩擦力的方向和两轮转动方向相同；

B．两轮受到的摩擦力的方向和两轮转动方向相反；

C．A 轮受到的摩擦力的方向和 A 轮的转动方向相同，B 轮受到的摩擦力的方向和 B 轮的转动方向相反；

D．A 轮受到的摩擦力的方向和 A 轮的转动方向相反，B 轮受到的摩擦力的方向和 B 轮的转动方向相同。

答：D

129．汽车的发动机通过变速器和后轮相连，当汽车由静止开始向前开动时，前轮和后轮所受的摩擦力的方向 [　　]

A．前轮受到的摩擦力向前、后轮向后；

B．前轮受到的摩擦力向后、后轮向前；

C．前、后轮受到的摩擦力方向都向后；

D．前、后轮受到的摩擦力方向都向前。

答：B

130．小车上放着一个物体在下列叙述中，哪条是不正确的？

[　　]

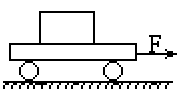
A．当小车开始运动时，小车对物体有静摩擦力，这个静摩擦力使物体跟随小车一起运动；

B．当小车开始运动时，小车对物体的支持力不发生变化；

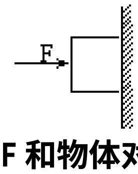
C．当小车和物体一起作匀速运动时，小车对物体的静摩擦力等于零；

D．当小车和物体一起作匀速运动时，小车对物体的静摩擦力不等于零；物体受到一个和运动方向一致的静摩擦力。

答：D



131．力 F 把一个物体紧压在竖直的墙壁上静止不动，下列有关力的相互关系的叙述中，哪条正确？ [　　]



A．作用力 F 和物体对墙壁的正压力平衡；

B．物体的重力和墙壁对物体的静摩擦力大小相等、方向相反；

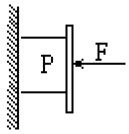
C．作用力 F 愈大，墙壁对物体的静摩擦力愈大；

D．作用力 F 跟墙壁对物体的弹力是一对作用力和反作用力。

答：B

132．重物 P 夹在木板和木板壁之间。在木板上用水平力 F 紧压木板，

使 P 不致下滑，如果重物和木板及木板壁间的静摩擦系数都等于 0.25，则力 F 至少应大于 [ ]



A．$\frac{P}{2}$；B．P；

C．2P； D．4P。

答：C

133．于摩擦力的叙述，下面哪条是错误的？ [ ]

A．机车的车轮和钢轨之间的摩擦有时是有利的；

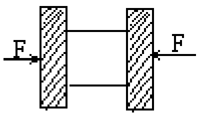
B．增大摩擦的主要方法是增大压力和把接触面弄得粗糙些；

C．人走路时，脚和地面之间的摩擦是有害的，毫无益处；

D．减少摩擦的主要方法是以滚动代替滑动和加润滑油。

答：C

134．如图所示,左右两边对木板所加压力都等于 F 时，夹在板中间的木块静止不动。现在使两边用的力都加到 2F，那么木块所受的摩擦力将 [ ]



A．和原来相等；B．是原来的 2 倍；

C．是原来的 4 倍； 无法确定。D．

答：A

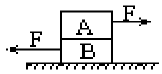
135．位水平地面上物体，在水平方向的拉力作用下向前运动。当拉力增大时，物体所受的滑动摩擦力将 [ ]

A．增大； B．减小；

C．不变； D．无法确定是否变化。

答：C

136．如图所示，A、B 两个物体重力都等于 10 牛，各接触面间摩擦系数都等于 0.3。同时有 F=1 牛的两个水平力分别作用于 A 和 B 上，则地面对 B、B 物体对物体 A 的摩擦力分别等于 [ ]

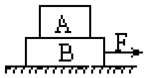


A．6 牛、3 牛； B．1 牛、1 牛；

C．0 牛、1 牛； D．0 牛、2 牛。

答：C

137．粗糙的水平面上叠放着物体 A 和 B。A 和 B 间的接触面也是粗糙的。如果用力 F 拉 B，而 B 仍保持静止，则此时 [ ]



A.B 和地面间的静摩擦力等于 F,B 和 A 间的静摩擦力也等于 F；

B．B 和地面的静摩擦力等于 F，B 和 A 间的静摩擦力等于零；

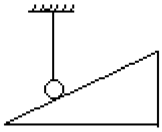
C．B 和地面间的静摩擦力等于零，B 和 A 间的静摩擦力也等于

零；

D．B 和地面间的静摩擦力等于零，B 和 A 间的静摩擦力等于 F。

答：B

138．如图所示，细绳竖直拉紧，小球和光滑斜面接触，并处于平衡状态，则小球受到的力是　　　　[　　]



A．重力、绳的拉力；

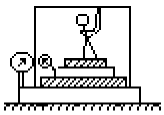
B．重力、绳的拉力、斜面的弹力；

C．重力、斜面的弹力；

D．绳的拉力、斜面的弹力。

答：A

139．一个 400 牛重的木箱放在大磅秤上，木箱内有一个质量为 60 千克的人，站在小磅秤上，如图所示。如果人用力推木箱顶板，此时小磅秤和大磅秤上的读数分别是　　　　[　　]



A．小磅秤的示数增加，大磅秤的示数减少；

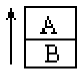
B．小磅秤的示数减小，大磅秤的示数不变；

C．小磅秤的示数增加，大磅秤的示数增加；

D．小磅秤的示数增加，大磅秤的示数不变。

答：D

140．物体 A 的质量等于物体 B 的两倍，把 A 叠放在 B 上面。如果使它们一起做竖直上抛运动，不计空气阻力，则在运动过程中关于 B 的受力情况。下面说法中哪个是正确的？　　　　[　　]



A．只受到重力；

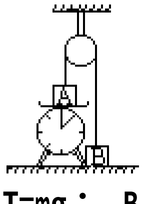
B．受到重力、压力；

C．受到重力、压力、摩擦力；

D．上升过程受到重、压力，下降过程受到重力。

答：A

141．A、B 两物体质量都是 m，A 放在台秤上，如图所示。轻绳和滑轮之间的摩擦不计，那末台秤的读数 N 和悬点 O 所受到的拉力 T 可能的值分别为　　　　[　　]

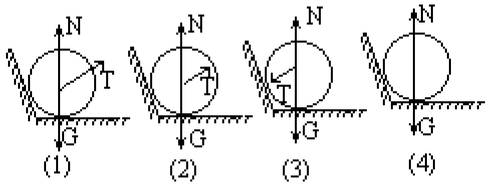


A．N=0，T=mg；　B．N=mg，T=mg；

C．N=0；T=2mg;　D．N=mg，T=2mg。

答：C

142．一圆球和两块光滑的板接触，底下的一块板水平。则下列画出的球的受力图，哪幅是正确的？　　　　　　　　　　　　[　　]



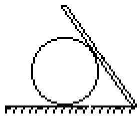
A．如图(1)；　　B．如图(2)；

C．如图(3)；　　D．如图(4)。

答：D

143．一根匀质木棒，靠在固定的光滑圆球上处于静止状态，如图所示。木棒和地面间的静摩擦系数为μ。这时木棒受到的作用力是

[　　]



A．重力、地面和球给它的弹力；

B．重力、地面给它的摩擦力；

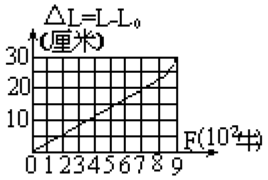
C．重力、地面给它的摩擦力和球对它的弹力；

D．重力、地面和球给它的弹力及地面对它的摩擦力。

答：D

计算题

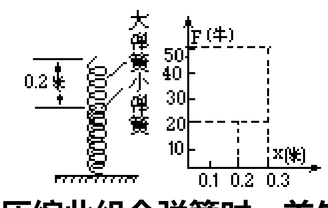
144．一根弹簧的伸长(△L)和所受的外力(F)之间的关系如图所示。试就图线回答：(1)若弹簧原长 L_0 为 50 厘米，要使弹簧伸长到 60 厘米，需要多大的拉力？(2)如果用 900 牛的拉力时（仍在弹性限度内），弹簧长度变为多少？



[解答] (1)弹簧的伸长 $\triangle L=L-L_0=(60-50)$ 厘米=10 厘米。从图线可知：$F_1=3\times10^2$。

(2)由图中可知 $\triangle L_2=30$ 厘米，$L_2=L_0+\triangle L_2=(50+30)$ 厘米=80 厘米。

145．一根大弹簧内套一根小弹簧，大弹簧比小弹簧长 0.2 米，它们一端固定，另一端自由，如图(a)所示。当加力压缩此组合弹簧时，测得力和压缩距离之间的关系如图(b)的图线所示。求这两根弹簧的倔强系数 k_1 和 k_2 分别是多少？



[解答] 开始压缩此组合弹簧时，首先大弹簧产生弹力。由胡克定律可知：$F_1=k_1x$，从图线得 x=0.2 米时，F=20 牛。

所以$k_1=\frac{F_1}{x}=\frac{20}{0.2}$牛/米$=100$牛/米。弹簧继续缩短时，小弹簧也被压缩了，此时弹力为两个弹簧弹力的和。

$F=F_1+F_2=k_1x+k_2(x-0.2)$。

由图线得 x=0.3 米时，F=50 牛，

所以$k_2=\frac{F-k_1x}{x-0.2}=\frac{50-100\times0.3}{0.3-0.2}$牛/米$=200$牛/米。

说理和论证题

146．施力物体同时也一定是受力物体吗？

[解答] 对于一个给定的力来说，施力物体和受力物体是两个不同的物体，施出该力的物体不能同时是受该力作用的物体。例如放在桌上的杯子，受到桌面的支持力 N 作用，受力物体是杯子，施力物体是桌面。对于物体间相互作用来说，给出作用力的物体同时是接受反作用力的物体，给出反作用力的物体则同时是接受作用力的物体。例如杯子受到桌面的作用力 N，这个力的施力物体是桌面，而杯子对桌面的压力 N’，这个力的受力物体是桌面。所以桌面是 N 的施力物体，同时也是 N’的受力物体。杯子是 N 的受力物体，同时也是 N′的施力物体。

147．挂着的电灯能够静止不动，是因为灯对绳子的作用力和绳子对灯的反作用力互相平衡。这种说法对吗？

[解答] 不对。因为作用力和反作用力是作用在两个不同的物体上的，决不能平衡。挂着的电灯所以能静止不动，是因为灯受到地球对它的重力作用和绳对灯的弹力作用，由于这两个力平衡，所以电灯静止不动。

148．用手竖直向下掷一石子，石子的速度越来越大，而用脚踢球，球向前滚去，球的速度越来越小，为什么？

[解答] 用手掷石子或用脚踢球都是使它们从原来静止状态变到运动状态，是石子或球获得一个初速度的过程，说明力的作用可以改变物体的运动状态。石子离开手后，它受到和初速度方向一致的重力作用，使物体作加速运动，所以速度越来越大。被踢出去的球在竖直方向受到重力和地面的支持力作用，这两个力相互平衡，但在水平方向上它受到摩擦等阻力的作用，阻力的方向和初速度方向相反，使球作减速运动，所以速度越来越小。这些也都说明力的作用可以改变物体的运动状态。

149．下列各组物体间的摩擦各属于哪种摩擦？

(a)步行中的人的鞋底和地面之间；

(b)用粉笔擦擦粉笔字，粉笔擦和黑板之间；

(c)高速行进中列车的车轮和钢轨之间；

(d)用滑轮吊起重物匀速上升时，绳子和滑轮、滑轮和轴之间；

(e)石碾和碾盘之间；

(f)石磨的动盘和定盘之间。

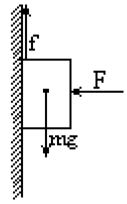
[解答] (a)静摩擦；(b)滑动摩擦；(c)滚动摩擦；(d)绳子和滑轮间静摩擦，滑轮和轴间滑动摩擦；(e)滚动摩擦；(f)滑动摩擦。

150．手握玻璃瓶时，为什么瓶越重，手要握得越紧才不会滑落？

[解答] 手握玻璃瓶，玻璃瓶受到重力，和两手对它的静摩擦力的作用。只有这两个力大小相等、方向相反才能使玻璃瓶处于平衡状态。瓶

越重，则所需摩擦力越大。因为摩擦系数不变，手握得越紧，手和瓶间的正压力增大，可以得到较大的摩擦力。所以瓶越重，手要握得越紧。

151．用一外力 F 水平压在质量为 m 的物体上，如图所示，由于物和墙之间有静摩擦力，此时物体保持静止，其静摩擦力为 f，如果外力增加一倍为 2F，则此时静摩擦力是否也增加一倍为 2f？



[解答] 此时静摩擦力仍为 f，而不是 2f。因为物体保持静止，在垂直方向上静摩擦力 f 和重力 mg 相等。即使外力 F 增加，垂直方向上静摩擦力仍和重力相等。

当外力变为 2F，物体和墙壁间的压力 N 也增大，但静摩擦力 f 并不增大，这和公式 $f=\mu N$ 是不矛盾的，因为该公式是物体受到的最大静摩擦力的公式，式中的μ是静摩擦系数。本题中，静摩擦力并未达到最大值，静摩擦力的计算应由平衡条件中外力的大小来考虑，不能应用该公式。

152．一匹马拉一辆车，根据牛顿第三定律，马拉车的力（向前）和车拉马的力（向后）是一样大的。但有人说：“既然马能够拉动车，就说明马拉车的力大于车拉的马的力”。你看这种说法对吗？如果不对，为什么马把车拉动了呢？

[解答] 马拉车的作用力等于车拉马的反作用力，这是完全正确的。但是车不仅受到马的拉力，当然马也不仅受到车的反作用力，马或车的运动是由作用于马或车的所有的作用力的合力决定的。

对车来说，即以车为的隔离体，只要马的拉力大于车受到地面的摩擦力，车子就会前进。对于马来说，即以马为隔离体，它必须用蹄向后蹬地，从而使地面对马提供一个向前的摩擦力，但只要摩擦力大于车对马的拉力，马就能前进。所以认为马拉车的力大于车拉马的力的看法是错误的。

153．甲、乙两队拔河比赛，既然甲拉乙的力等于乙拉甲的力，怎么能分出胜负呢？

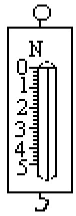
[解答] 要从甲、乙两队人受力情况分析来看。甲队作为研究对象，受重力 G，地面弹力 Q，地面对甲的静摩擦力 f 和乙对甲的拉力 F。乙队作为研究对象受到重力 G’，地面弹力 Q’，地面对乙的静摩擦力 f’和甲对乙的拉力 F’。其中 F 和 F’是一对作用力和反作用力，它们通过绳子分别作用在甲、乙两队队员身上，大小相等、方向相反。若甲、乙两队和绳子作为一个系统来看，则这一对拉力是内力，并不会改变这一系统的质心位置。

拔河的胜负是指甲、乙两队拉绳，使绳的中点相对地面发生位置改变，超过某一范围，就决定胜负。设甲胜乙负，分析乙在水平方向受力，只要甲对乙的拉力大于地面对乙的最大静摩擦力，就可以使乙向甲方发生位置改变。因此拔河实际上不是比拉力的大小，而是要看地面对他们的静摩擦力，最大静摩擦力越大，就越有获胜可能。

要使地面的摩擦力大首先队员的体重要大。但实际上还要由足蹬地，身体倾斜，脚底和地面间的摩擦系数以及队员间用力的方向和时间一致性等多种因素来决定。

实验题

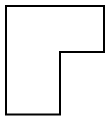
154．给你一个弹簧秤和一把有刻度的尺，怎样能够知道这个弹簧秤中弹簧的倔强系数。



[参考解答] 用刻度尺量出弹簧秤上某两刻度值读数间的长度。例如图中 0～4 牛间刻度的长度为 6.5 厘米，则可算出倔强系数

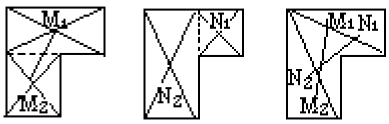
$$k=\frac{F}{x}=\frac{4.00}{0.065}\text{牛}/\text{米}=61.5\text{牛}/\text{米}。$$

155．只有一把没有刻度的尺，怎样测定一块均匀薄板（如图）的重心位置？薄板各个角都是直角。



[参考解答] 设把薄板分成两个矩形，则每个矩形的重心在它的两对角线的交点上，即在 M_1 和 M_2 上。因此整块薄板的重心应在直线 M_1M_2 上[如图(a)]。

如果把薄板按图(b)的分法，用同样的方法可以判断重心在直线 N_1N_2 上。故整块薄板的重心应在两直线 M_1M_2 和 N_1N_2 的交点 C 上，如图(c)所示。



(a)　(b)　(c)

156．有一块木板、一个小木块和一块橡皮，要测定一下木块和木板间、橡皮和木板间的静摩擦系数，如果只有一把刻度尺，应该怎样完成这个实验？

[参考解答] 把木块在木板上，将木板一端逐渐抬高，木块开始滑动时量出木板的长 l 和一端离水平面的高度 h。由于使木块沿斜面方向运动的力 F_1 等于 Gsinα（G 为木块的重力），而木块和木板间的最大静摩擦力和速度不太大时的滑动摩擦力 f=kGcosα（k 即待求的摩擦系数）。

$$G\sin\alpha=kG\cos\alpha$$

由此可得摩擦系数 $k=\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{h}{l}$。

同样的方法，可以测橡皮和木板间的摩擦系数。

请思考：(1)要准确地测木板和水平面间的倾角α，应怎样才能 h 和 l？

(2)实验过程中慢慢抬起木板的一端时，木块对木板的正压力如何变化？木块所受的静摩擦力如何变化？木块和木板间最大静摩擦力是否变

化？

(3)通过这个实验，你能说出静摩擦系数由哪些因素决定吗？

157．用一个测力计，怎样测定木块和一个倾角不能改变的固定斜面之间的摩擦系数？设斜面倾角不大，不加拉力时，木块不会沿着斜面滑动。

[参考解答] 用测力计拉动木块沿斜面向上和向下作匀速运动，记下测力计读数。由于

$F_{向上}=kG\cos\alpha+G\sin\alpha$，

$F_{向下}=kG\cos\alpha-G\sin\alpha$。

两式相减得 $\sin\alpha=\dfrac{F_{向上}-F_{向下}}{2G}$，

两式相加得 $\cos\alpha=\dfrac{F_{向上}+F_{向下}}{2kG}$，

把最后两个式子平方相加即得

$$1=\left(\frac{F_{向上}-F_{向下}}{2G}\right)^2+\left(\frac{F_{向上}+F_{向下}}{2kG}\right)^2，$$

摩擦系数 $k=\dfrac{F_{向上}+F_{向下}}{\sqrt{4G^2-(F_{向上}-F_{向下})^2}}$。

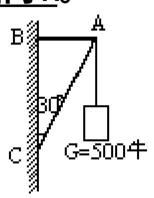
木块的重力 G 也可由测力计测得，由此可求出木块和斜面间的摩擦系数。

力的合成、分解　共点力平衡

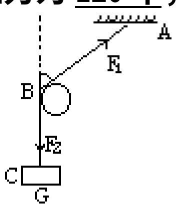
填充题

158．一个物体在两个力的作用下，如果保持<u>静止或匀速直线运动</u>状态，我们说这两上力是平衡力。二力平衡的条件是：作用在物体上的两个力<u>大小相等，方向相反，作用在一直线上</u>。

159．如图所示的直角支架，它们的受力情况是（杆的重力不计），杆AC受力$F_{AC}=\underline{\dfrac{1000\sqrt{3}}{3}}$牛，方向沿AC指向C，杆AB受力$F_{AB}=\underline{\dfrac{500\sqrt{3}}{3}}$牛，方向由<u>B 指向 A</u>。

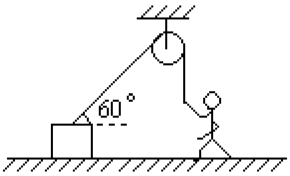


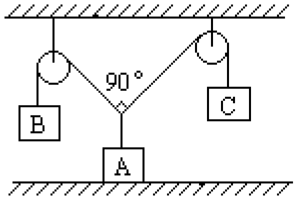
160．如图所示，绳子上端固定于 A，下端挂一重 120 牛的重物，B 是光滑的木栓，则 F_1 和 F_2 的大小为 <u>120 牛</u>，夹角 <u>120</u>°。因此木栓 B 所受的绳子对它的压力为 <u>120 牛</u>，方向和竖直面成 <u>60</u>°角。



161．如下页左上图所示，人重 300 牛，物体重 200 牛，地面粗糙，

无水平方向滑动。当人用 100 牛的力向下拉绳子时，地面对人的弹力是 200 牛，地面对物

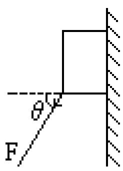


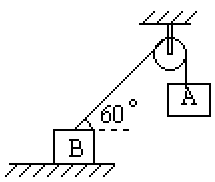


体的弹力是$50(4-\sqrt{3})$牛。

162．右上图中 B 物体重 40 牛，C 物体重 30 牛，A 物体重 80 牛，物体 A 对地面的压力为 30 牛。

163．重力为 G 的物体紧靠在竖直的墙壁上，如左下图所示。用一个跟水平方向成θ角的力 F 作用于物体上，如物体和墙壁间摩擦系数为μ，要使物体保持静止状态则F的最小值为$\dfrac{G}{\sin\theta+\mu\cos\theta}$，最大值为$\dfrac{G}{\sin\theta-\mu\cos\theta}$。

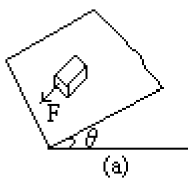




164．右上图中，物体 A、B 的质量分别为 4 千克和 10 千克，B 和地面间的静摩擦系数μ=0.4，滑轮的摩擦及绳的质量都不计，如果整个系统处于平衡，则地面对 B 的摩擦力大小等于 19.6 牛，方向向左，B 对地面的压力是 64 牛。当 A 的质量增加 0.73 千克时，B 开始滑动。

165．质量为 m 的一个物体，静止地放在和水平面成θ角的粗糙斜面上。设静摩擦系数为μ，重力加速度为 g。

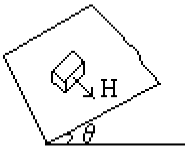
(1)如图(a)所示，把大小为 F、沿着斜面向下的力加在这个物体上，F 相当小时，物体一直静止不动。这时作用于物体上的摩擦力沿斜面向上，大小为 mgsinθ+F。把 F 逐渐增加，当它的大小等于 mg(μcosθ－sinθ)时，物体开始向下运动。



(a)

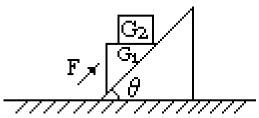
(2)如图(b)所示，让我们考虑加一个大小为 H 的横向力的情况。当 H 相当小时，物体处于静止状态。这时，物体所受摩擦力的大小为$\sqrt{H^2+(mg\sin\theta)^2}$，沿斜面向上的分量为$mg\sin\theta$。如果在这种状态下，再加一个方向沿斜面向下，大小为 K 的力，则要使物体开始运动，K 必须等于$\sqrt{(\mu mg\cos\theta)^2-H^2}-mg\sin\theta$。如果比这个值小时，物体仍处于静止状态。使物体开始运动的 K 值比前一种情况所对应的 F 值要小。(填：

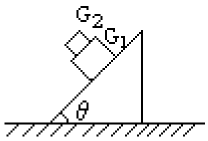
大、小或相等）



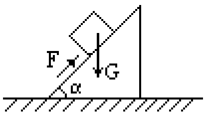
(a)

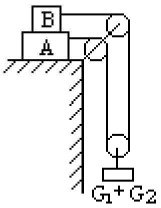
166．重力分别为 G_1、G_2 的物体，叠放在一起并放在倾角为 θ 的斜面上（左下图）。G_1 在平行于斜面的 F 力作用下匀速向上滑动，G_1、G_2 保持相对静止，它们间的静摩擦系数为 μ_s。则此时 G_1 和 G_2 之间的静摩擦力为 0。





167．重力分别为 G_1 和 G_2 的两个物体叠放在一起，在倾角为 θ 的斜面上一起匀速滑下（右上图）。G_1、G_2 保持相对静止，则 G_2 所受到的摩擦力大小为 $G_2\sin\theta$，方向沿斜面向上。





168．在倾角为 α 的斜面上，放一个重力为 G 的物体（左下图）。已知物体和斜面间的静摩擦系数为 μ，且 $G\sin\alpha > \mu G\cos\alpha$，为使物体在斜面上保持静止时，物体所受的和斜面平行力 F 最小值为 $G(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$，最大值为 $G(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$。

169．如右下图用细线通过光滑的滑轮，连接三个物体。三个物体处于平衡状态，桌面对 A 的静摩擦力是 G_1+G_2。

170．在水平地面上放置质量为 1 千克的物体，用水平推力 5 牛能使物体开始滑动，用水平推力 4 牛能使物体保持匀速运动。当用跟水平成 45°角向上的拉力去拉物体时，要使物体开始滑动的拉力是 4.71 牛，要使物体保持匀速运动的拉力是 4.04 牛。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

171．一物体沿倾角为 30°的斜面匀速滑下，则斜面和物体间的滑动摩擦系数大小为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$。

172．质量为 10 千克的滑块恰能沿倾角为 37°的斜面匀速滑下，则滑块所受到的摩擦力为 60 牛。如果此斜面倾角为 53°，要使滑块能沿斜面匀速上滑，则应对滑块施加一个大小为 125 牛的平行于斜面方向向上的外力。（取 sin37°=cos53°=0.6，cos37°=sin53°=0.8，g=10 米/秒 ^{2}）

173．物体放在斜面上，受到一个平行于斜面向上的力 F_1=100 牛的作用、或平行于斜面向下的力 F_2=20 牛的作用，物体能都作匀速运动。则物体受到的滑动摩擦力是 60 牛。

174．一个质量为 20 千克的物体放在长 10 米、高 6 米的斜面上静止不动，则物体受到的摩擦力是 117.6 牛，物体对斜面的压力是 156.8 牛，物体受到的合力是 0 牛。

选择题

175．弹簧秤两端各拴一绳，用大小都等于 F、方向相反的两个力分别拉住两绳，则弹簧秤的秤的读数 F_1 和弹簧秤受到的合力 F_2 分别为： [ ]

A．$F_1=2F$，$F_2=2F$；

B．$F_1=F$，$F_2=2F$；

C．$F_1=2F$，$F_2=0$；

D．$F_1=F$，$F_2=0$。

答 D

176．木块质量为 M，在跟水平方向斜向上成θ角的拉力 F 作用下，沿地面作匀速直线运动，地面对木块的支持力大小是 [ ]

A．Mg； B．Mg－Fcosθ；

C．Fsinθ； D．Mg－Fsinθ；

E．Mg+Fsinθ。

答 D

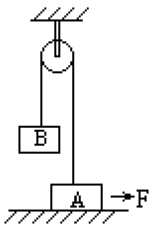
地面和木块间的摩擦力大小是 [ ]

A．Fcosθ； B．F；

C．0； D．μMg；

E．μFcosθ。

答 A



177．如图所示，在拉力 F 的作用下物体 A 向右运动过程中，物体 B 匀速上升。如果 A 对地面的压力为 N，A 所受摩擦力为 f，绳子对 A 的拉力为 T，那么在运动过程中，N、f、T 的变化情况，下面哪种说法是正确的？ [ ]

A．N 增大，f 增大，T 增大；

B．N 增大，f 增大，T 不变；

C．N 减小，f 减小，T 减小；

D．N 增大，f 减小，T 不变。

答 B

178．跳伞运动员在匀速下降过程中，下列哪一种说法是正确的？ [ ]

A．没有受到外力的作用；

B．受到重力和空气阻力的作用，并且重力大于空气阻力；

C．只受到重力的作用，才下降；

D．受到重力和空气阻力的作用，重力等于空气阻力；

E．受到重力和空气阻力的作用，重力小于空气阻力。

答 D

179．有两个共点力，F_1=5 牛，F_2=8 牛，那么它们的合力只能是 [ ]

A．不小于 5 牛；

B．不大于 8 牛；

C．等于 13 牛；

D．在 5 牛到 8 牛之间；

E．以上都不是。

答 E

180．作用在同一点的两个力，大小分别为 5 牛和 4 牛，则它们的合力不可能是 [ ]

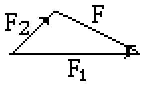
A．5 牛； B．4 牛；

C．2 牛； D．9 牛；

E．10 牛。

答 E

181．如图所示，F_1 和 F_2 表示已知的两力的大小和方向，则 F 表示它们的 [ ]



A．合力； B．分力；

C．矢量差 F_1-F_2； D．矢量差 F_2-F_1。

答 C

182．有两个大小相等的共点力 F_1 和 F_2，当它们间的夹角为 90°时合力为 F，则当它们间的夹角为 120°时，合力的大小为 [ ]

A．2F； B．$\frac{\sqrt{2}}{2}$F；

C．$\sqrt{2}$F； D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$F。

答 B

183．互成角度的两个大小一定的共点力，有关它们的合力和分力的关系，下列说法哪个正确？ [ ]

A．合力的数值一定大于小的分力而小于大的分力；

B．合力的数值随分力夹角的增大而增大；

C．合力的数值一定大于任意一个分力的数值；

D．合力的数值可能大于大的分力，也可能小于小的分力。

答 D

184．几个共点力作用在一个质点上，使质点处于平衡状态。当其中一个力 F_1 停止作用时，质点将 [ ]

A．改变运动状态，所受合力方向和 F_1 相同；

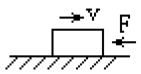
B．改变运动状态，所受合力方向和 F_1 相反；

C．保持原来运动状态不变；

D．由于共点力的个数不知，无法确定。

答 B

185．重力为 100 牛的物体在水平面上向右运动，物体和平面间的摩擦系数为 0.2，与此同时，物体受到一个水平向左的力 F=20 牛的作用，则物体受到的合力是 [ ]



A．0；　　B．40 牛，水平向左；

C．20 牛，水平向左；　　D．20 牛，水平向右。

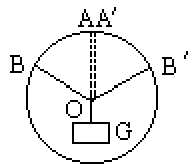
答 B

186．一根细绳能承受的最大拉力是 G，现把一重量为 G 的物体拴在绳的中点，两手靠拢分别握住绳的两端，然后慢慢地向左、右分开，当绳子断时，两段绳子间的夹角应稍大于 [ ]

A．30°；　　B．60°；

C．90°；　　D．120°。

答 D



187．图中的 BOB′为橡皮绳，∠BOB′=120°，在点 O 挂重力为 G 的重物，点 O 为圆心。现将 BB′两端分别移到同一圆周上非常接近的两点 A、A′，如果要使结点 O 的位置不变，则重物的重力应改为

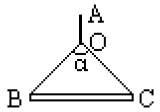
[ ]

A．G；　　B．G/2；

C．G/4；　　D．2G。

答 D

188．图中 AO、BO、CO 是完全相同的三条绳子，将一条均匀的钢梁吊起如图所示。当纲梁足够重时，结果 AO 先断。则 [ ]

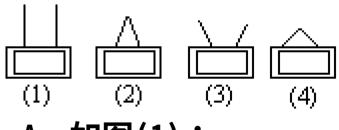


A．α=120°；　　B．α＜120°

C．α＞120°；　　D．不能确定。

答 B

189．用两条细线把一个镜框悬挂墙上，如图所示的四种挂法中，哪一种挂法细绳所受张力最大？ [ ]

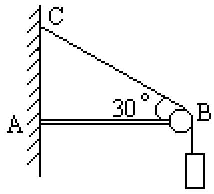


A．如图(1)；　　B．如图(2)；

C．如图(3)；　　D．如图(4)。

答 D

190．横梁 AB 插在墙内，它的 B 端有一个光滑的定滑轮。绳子一端固定于 C 点，跨过定滑轮，另一端悬挂一个 10 牛的物体，绳和横梁的夹角为 30°，如图所示，那么横梁 B 端受到的力应等于 [　　]

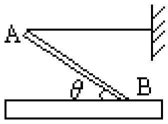


A．$5\sqrt{3}$牛；　　B．$10\sqrt{3}$；

C．5牛；　　D．10牛。

答 D

191．木棒 AB 的重量为 G，它的上端被一水平绳子拉住，下端置于水平木板上，处于静止状态，如图所示，如果保持绳子水平，把木板的一端抬高使θ角变小时，则绳子拉力 [　　]

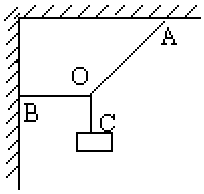


A．减小；　　B．不变；

C．增大；　　D．等于零。

答 C

192．如图所示，OA、OB、OC 是抗拉程度完全一样的绳子。如果物体重力超过某一程度时，则绳子 [　　]

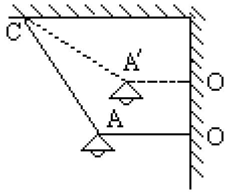


A．OA 段先断；　　B．OB 段先断；

C．OC 段先断；　　D．一起断。

答 A

193．用一根细绳，沿水平方向把电灯拉至如图中实线位置 A，细绳的一端固定在墙上 O 点，这时电线 CA 上所受拉力 T_1；绳 OA 上所受拉力为 T_2。如果把电灯拉到如图中虚线位置 A′，水平细绳的一端固定在墙上 O′点。则 T_1 和 T_2 的大小变化是 [　　]



A．T_1、T_2 都增大；

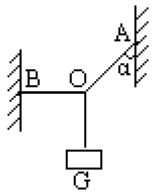
B．T_1 增大、T_2 不变；

C．T_1、T_2 都减小；

D．T_1 减小、T_2 不变。

答 A

194．如图所示，细绳 AO 和 BO 受到的拉力分别为 F_A、F_B。当改变悬点 A 的位置使角 α 增大时　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]



A．F_A、F_B 都增加，且 $F_A>F_B$；

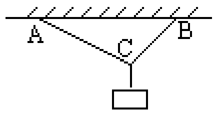
B．F_A、F_B 都增加，且 $F_A<F_B$；

C．F_A 增加、F_B 减小，且 $F_A>F_B$；

D．F_A 减小、F_B 增加，且 $F_A<F_B$。

答 A

195．一根长为 L 的易断的均匀细绳，两端固定在天花板上的 A、B 两点。若在细绳上 C 处悬一重物，已知 AC＞CB，如图所示，则下面哪几句话正确？　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]



A．增加重物的重力，BC 段先断；

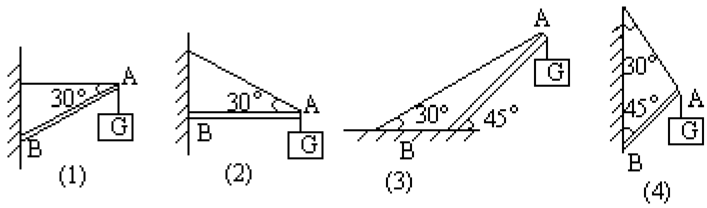
B．增加重物的重力，AC 段先断；

C．将 A 端往左移比往右移时绳子容易断；

D．将 A 端往右移时绳子容易断。

答 A、C

196．支杆 AB 的长度都一样，杆重不计，悬挂的都是重物 G，那么图中支杆 AB 受力最大的是　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

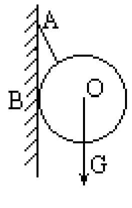


A．如图(1)；　　　B．如图(2)；

C．如图(3)；　　　D．如图(4)。

答 C

197．一个半径为 r 的重球，用长度等于 r 的绳子挂在竖直的墙壁 A 处，墙是光滑的。绳子的张力和墙壁的弹力分别是　　　　[　　]



A．G，$\frac{1}{2}$G；

B．2G，G；

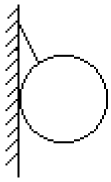
C．$\sqrt{3}$G，$\frac{\sqrt{3}}{2}$G；

D．$\frac{2\sqrt{3}}{3}$G，$\frac{\sqrt{3}}{3}$G；

E．$\frac{\sqrt{3}}{3}$G，$\frac{1}{2}$G。

答 C

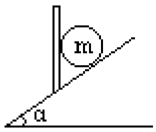
198．图中的球和墙壁无摩擦，绳的拉力为 T，墙对球的弹力为 Q。如果绳的长度缩短。则 [ ]



A．T、Q 都不变；
B．T 减小，Q 增大；
C．T 增大，Q 减小；
D．T、Q 都增大。

答 D

199．如图所示，在倾角为α的斜面上，放一质量为 m 的小球，小球被竖直的木板挡住。如果球和斜面以及球和木板间的摩擦都可忽略不计，则球对斜面的正压力是 [ ]

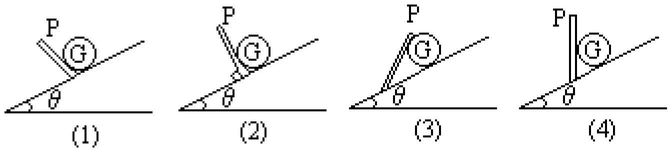


A．mgcosα； B．mgtgα；

C．$\frac{mg}{\cos\alpha}$； D．mg。

答 C

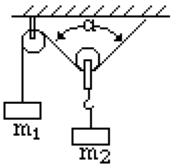
200．倾角为θ的光滑斜面上放一个均匀的圆柱体 G，由一块光滑平板 P 将 G 挡住，使 G 在斜面上保持静止。由于 P 板的位置有如图所示的四种情况（P 板和斜面间夹角大于 90°、等于 90°、小于 90°、和地面垂直），则圆柱体 G 对平板 P 的压力最小的应是 [ ]



A．如图(1)； B．如图(2)；
C．如图(3)； D．如图(4)。

答 B

201．如图所示，绳子质量、滑轮质量和摩擦都可忽略，两个物体的质量分别为 m_1 和 m_2，已处于平衡状态。下列叙述哪几句正确？



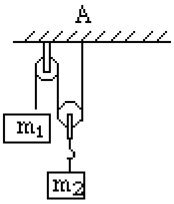
[　　]

A．$m_1 > \frac{1}{2}m_2$；　　B．$m_1 = \frac{1}{2}m_2$；

C．当 m_1 增加稍许，如绳子间的夹角 α 适当增大，仍可保持平衡；

D．当 m_2 增加稍许，如绳子间的夹角 α 适当减小，仍可保持平衡。

202．图中的绳子质量、滑轮质量和摩擦都可不计，系统处于平衡状态。将绳子上端的悬点 A 向右移，仍要保持系统平衡，必须采取下列哪几种办法？



A．适当增加 m_1，或减小 m_2；

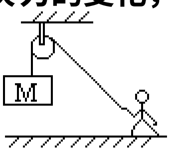
B．适当减小 m_1，或增加 m_2；

C．A 点向右移得越多，m_2 减小得越多；

D．A 点向右移得越多，m_1 减小得越多。

答 A、C

203．如图所示，一人用绳子通过定滑轮拉一质量为 M 的重物。如果不计滑轮摩擦和绳子质量，当人拉着绳子往右走动时，人继续保持平衡，则有关力的变化，下列哪句话是不正确的？　　[　　]



A．人对地面的压力增加；

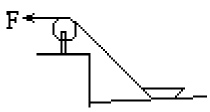
B．人对地面的压力不变；

C．地对人的摩擦力增加；

D．地对人的最大静摩擦力增加。

答 B

204．小船用绳索牵引靠岸，设水中阻力不变，在拉小船匀速靠岸的过程中，下列哪几句话是正确的？　　[　　]



A．绳子拉力不断增大；

B．绳子的张力不变；

C．船的浮力减小；

D．船的重力减小。

答 A、C

205．工人将一只木箱沿着有摩擦的斜面匀速地推上去，在这过程中，木箱中所受到的合力是 [ ]

A．等于工人的推力；

B．等于斜面对木箱的摩擦力；

C．等于零；

D．等于木箱的重力。

答 C

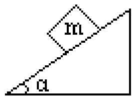
206．一个静止在斜面上的物体，它受力情况是： [ ]

A．重力、弹力、下滑力和摩擦力的作用；

B．弹力、下滑力和摩擦力的作用；

C．重力、弹力和下滑力的作用。

D．重力、弹力和摩擦力的作用。



上题中各力的大小相互关系是 [ ]

A．重力和弹力的大小相等；

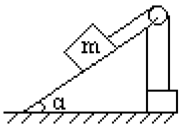
B．下滑力是重力、弹力和摩擦力的平衡力；

C．重力是弹力和摩擦力的平衡力；

D．重力为 mg，弹力 N=mgcosα，摩擦力 f＜mgsinα。

答 C

207．如图所示，质量为 m 的物体静止在光滑斜面上，此物体所受各力大小为 [ ]



A．重力 mg，斜面弹力 mgcosα，摩擦力μmgcosα；

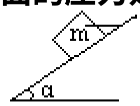
B．下滑力 mgsinα，绳子拉力(mgsinα－μmgcosα)，正压力 mgcosα；

C．重力 mg，斜面弹力 mgcosα，绳子拉力 mgsinα；

D．重力 mg，下滑力 mgsinα，正压力 mgcosα，绳子拉力 mgsinα。

答 C

208．质量为 m 的木块用水平细绳拉住，静止在光滑的斜面上。木块对斜面的压力是 [ ]



A．$mg\cos\alpha$；　　B．$mg\sin\alpha$；

C．$\dfrac{mg}{\cos\alpha}$；　　D．$\dfrac{mg}{\sin\alpha}$。

答 C

209．物体 A 静止在倾角为 θ 的斜面上，当 θ 逐渐减小时，物体 A 对斜面的压力 N 和物体 A 所受的摩擦力 f 的变化是 [ ]

A．N 增大，f 也增大；

B．N 增大，f 减小；

C．N 减小，f 增大；

D．N 增大，f 不变。

答 B

210．斜面上放一重力为 G 的物体，在斜面倾角为 θ 时，物体恰能沿斜面匀速下滑，当斜面倾角变大时，正确的说法是 [ ]

A．摩擦力不变、正压力变小、摩擦系数变大；

B．摩擦力变大、正压力变小、摩擦系数变大；

C．摩擦力变小、正压力变小、摩擦系数不变；

D．摩擦力变小、正压力变大、摩擦系数变小。

E．摩擦力不变、正压力不变、摩擦系数不变。

答 C

211．欲使静止在粗糙斜面上的物体 M 开始下滑，可以采用下列哪些办法？ [ ]

A．增加物体 M 的质量；

B．在物体 M 上面叠加一个重物；

C．在物体 M 后面放一块相同的物体 M 来“推”它；

D．增加斜面的倾角 α。

答 D

212．一个物体 M 放在粗糙的斜面上，保持静止。现用水平的外力 F 推物体。当 F 由零增加稍许，而 M 仍保持静止时，则 [ ]

A．物体 M 受到的静摩擦力增加；

B．物体和斜面间的最大静摩擦力增加；

C．物体所受合力增加；

D．物体受到斜面的支持力增加。

答 B、D

213．在平行斜面向上拉力 F 作用下，物体恰能沿粗糙斜面向上作匀速直线运动。如果物体的质量变为原来的 3 倍。则要使这物体继续沿斜面向上作匀速运动所需平行斜面向上的拉力 [ ]

A．也是 3F；

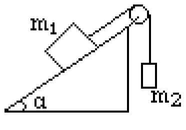
B．由于下滑力变为 3 倍再加摩擦力，所以为 4F；

C．由于下滑力、摩擦力都变为原来的 3 倍所以为 6F；

D．由于斜面倾角 θ 和摩擦系数 μ 未知，所以不能确定。

答 A

214．图中 m_1、m_2 两物体通过定滑轮和细绳联结起来，斜面和滑轮都是光滑的，且 $m_1>m_2$，那么 m_1 将从静止开始 [ ]



A．沿斜面向上滑动；

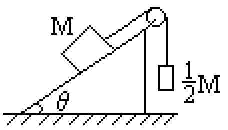
B．沿斜面向下滑动；

C．仍保持静止；

D．出现以上三种情况都有可能。

答 D

215．如图所示，斜面倾角θ=45°，绳子质量、滑轮摩擦都不计。当θ增大而物体M仍保持静止，则 [ ]



A．绳子的张力增大；

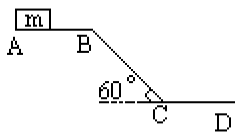
B．物体M对斜面的正压力减小；

C．物体M受到的静摩擦力增大；

D．物体M受到的静摩擦力减小。

答 B、C

216．把一块木板做成ABCD形状的轨道。一个质量为m的物体，以初速度v_0从水平面的A点运动到水平面D点停止。设物体和轨道的滑动摩擦系数始终不变，且运动中未离开轨道，它跟平面AB的摩擦力为f_1，跟斜面BC的摩擦力为f_2，跟平面CD的摩擦力为f_3。则f_1：f_2：f_3等于 [ ]



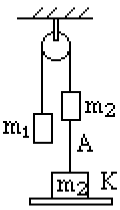
A．1：2：2；　　B．2：$\sqrt{3}$：2；

C．2：1：2；　　D．不能确定。

答 C

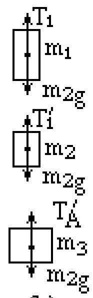
计算题

217．如下页图(a)所示，已知m_1＞m_2，但m_1＜m_2+m_2、K为磅秤的平台。求磅秤的读数和绳A的张力。



(a)

[解答]　先隔离m_1为研究对象[图(b)]，它受重力m_1g和绳的张力T_1而平衡，



(b)

$$T_1=m_1g。$$

以m_2为研究对象它受到的绳子的张力T_1'、T_A以及重力m_2g，处于平衡状态。

$T_1' = m_2g + T_A'$，$T_1 = T_1$，

所以 $$T_A=m_1g-m_2g。$$

以m_3为研究对象，它受绳子张力T_A'、磅秤对重物m_3的支持力N以及重力 m_3g 的作用而处于平衡状态。

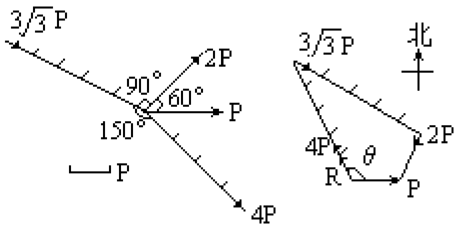
$$T'_A+N=m_3g，T'_A=T_A，$$

所以 $$N=m_3g-T_A=(m_2+m_3-m_1)g。$$

m_3对磅秤的压力为 $N'=N=(m_2+m_3-m_1)g$，即磅秤的读数。

218．P、2P、$3\sqrt{3}$P和4P为四个共点力，它们之间的夹角依次为60°、90°和150°，第一个力向正东，求它们的合力。

[解法一]　作各力的矢量图，利用力的多边形法则图解求得合力R=P，方向跟第一个力 P 的夹角 θ=120°，即北偏西 30°。



[解法二]　利用正交分解法，设正东方向为 x 轴的正方向。找出各力和 x 轴的夹角分别为 0°、60°、150°、300°。

$$\sum F_x = P\cos0° + 2P\cos60° + 3\sqrt{3}P\cos150° + 4P\cos300°$$

$$= -\frac{P}{2}，$$

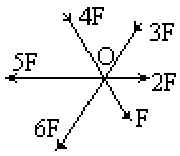
$$\sum F_y = P\sin0° + 2P\sin60° + 3\sqrt{3}P\sin150° + 4P\sin300°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}P，$$

合力$R=\sqrt{(\sum F_x)^2+(\sum F_y)^2}=\sqrt{(-\frac{P}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}P)^2}=P$。

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{\sum F_y}{\sum F_x}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}P}{-\frac{1}{2}P}=120°。$$

219．六个共点力的大小依次为 F、2F、3F、4F、5F、6F，方向恰好依次和正六边形的六边平行，求合力的大小和方向。



[解法一]　由于各力间夹角都等于 60°，由正交分解法求得合力

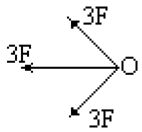
ΣF_x=2F+(3F+F)cos60°+(4F+6F)cos120°－5F=－6F，

ΣF_y=3Fsin60°+4Fsin120°+6Fsin240°+Fsin300°

=(3F+4F)sin60°－(F+6F)sin60°=0，

合力$R=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=6F$。方向和5F力相同。

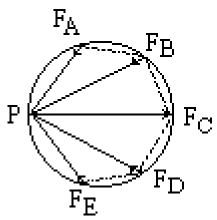
[解法二]　先分别求出 F 和 4F，2F 和 5F，3F 和 6F 合力。由于在一直线上，这三个合力都是 3F，方向如图所示，它们的合力为 6F，方向水平向左，即和 5F 方向相同。



220．设平面上有五个力作用在一点 P。连接作用点 P 和各力矢量的终端，正好组成一个正六边形，如果 F_A=1 牛，求这五个力的合力。

[解法一]　由于各力矢量终端是正六边形，所以

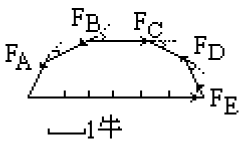
$F_A=F_E=1$牛，$F_B=\sqrt{3}$牛，$F_C=2$牛。



先求 F_A 和 F_E 的合力 F_{AE}=1 牛，F_B 和 F_D 的合力 F_{BD}=3 牛。由于 F_{AE} 和 F_{BD} 方向都跟 F_C 一致，所以总的合力为 R=6 牛。

[解法二]　按顺序将每个力的矢量首尾相连，每个力间夹角都是 30°，作图可得合力 R=6 牛。

[解法三]　由于五个力矢量的终端正好组成正六边形，则 F_B=F_D=$\sqrt{3}$牛，$F_C=2$牛。



由正交分解法$\Sigma F_x=2(F_A \cdot \cos 60° + F_B \cdot \cos 30°)+F_C$

$=2(1\times\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2})$牛$+2$牛$=6$牛。

$\sum F_y=0$，所以$R=6$牛。

221．设两共点力F_A和F_B的合力为F_C，当把F_A增大一倍时，其合力F_C也大一倍。如果力F_A大小不变，方向相反，其合力F_C也大一倍。求三力大小的比。

[分析]　设F_A、F_B两力的夹角为θ，则根据合力计算的公式可求得其大小，$F_C^2=F_A^2+F_B^2+2F_AF_B\cos\theta$，再根据题意得：

$(2F_C)^2=(2F_A)^2+F_B^2+4F_AF_B\cos\theta$

$(2F_C)^2=F_A^2+F_B^2+2F_AF_B\cos(\pi-\theta)$

[解答]

$F_C^2=F_A^2+F_B^2+2F_AF_B\cos\theta$　　(1)

$4F_C^2=4F_A^2+F_B^2+4F_AF_B\cos\theta$　　(2)

$4F_C^2=F^2{}_A+F_B^2-2F_AF_B\cos\theta$　　(3)

(1)式$\times 2-2$(2)式　　$-2F_C^2=-2F^2+F_B^2$　　(4)

(2)式$+$(3)式$\times 2$　　$12F_C^2=6F_A^2+3F_B^2$　　(5)

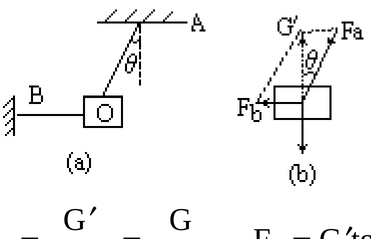
(4)式$\times 3+$(5)式　　$6F_C^2=6F_B^2$，则$F_B=F_C$。

代入(4)式得$F_A=\sqrt{\frac{3}{2}}F_B$，即$F_A:F_B=\sqrt{3}:\sqrt{2}$，

三力大小的比　　$F_A:F_B:F_C=\sqrt{3}:\sqrt{2}:\sqrt{2}$。

222．用两根绳子把一重力为G的物体挂起来，绳子OB是水平的，绳子OA跟竖直方向间夹角为θ，求两根绳子对物体的拉力分别为多大？

[解法一]　物体受力分析如图(b)所示：重力G竖直向下，因此拉绳OA伸长，绳OA产生弹力F_a作用在物体上。但这两力不能使物体平衡，合力向右，所以对绳OB产生拉力使绳OB伸长而产生弹力F_b作用在物体上。物体在G、F_a和F_b三个力作用下处于平衡，这要求其中任意两个力的合力必须和第三个力大小相等、方向相反、作用在一直线上。由图根据几何知识，

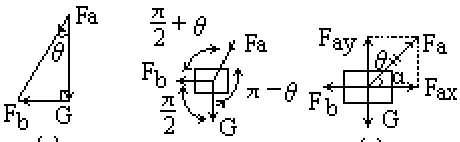


$F_a=\frac{G'}{\cos\theta}=\frac{G}{\cos\theta}$，$F_b=G'\text{tg}\theta=G\text{tg}\theta$。

［解法二］ 物体受力分析如前：物体上三个作用力平衡，合力为零。如果用三角形法求矢量和，则这三个力的矢量应组成一个封闭三角形。根据几何知识由图(c)可知

$$F_a=\frac{G}{\cos\theta}，F_b=G\mathrm{tg}\theta。$$

［解法三］ 物体上三个力平衡，找出各力之间的角度[图(d)]。由拉密定理知



(c) (d) (e)

$$\frac{F_a}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{F_b}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{G}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}。$$

所以 $F_a=\frac{G}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=\frac{G}{\cos\theta}$，$F_b=G\cdot\frac{\sin(\pi-\theta)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\theta)}=G\mathrm{tg}\theta$。

［解法四］ 物体上三个力平衡。选定坐标如图(e)。

$\Sigma F_x=F_{ax}-F_b=F_a\cos\alpha-F_b=0$ (1)

$\Sigma F_y=F_{ay}-G=F_a\sin\alpha-G=0$ (2)

由(2)式 $Fa=\frac{G}{\sin\alpha}=\frac{G}{\cos\theta}$ 代入(1)式，

$$F_b=F_a\cos\alpha=G\mathrm{ctg}\alpha=G\mathrm{tg}\theta。$$

223．重 30 牛的物体由 OA 和 OB 两条绳子拉住。OB 始终处于水平方向，OA 和竖直方向间成θ角，如果 OA 和 OB 能承受的最大拉力分别为 $20\sqrt{3}$ 牛和 30 牛，问为了保持绳不被拉断，θ的最大值等于多少？

［解答］ 由上题可得绳 OA 和 OB 受力分别为 F_a 他 F_b，

则 $$F_a=\frac{G}{\cos\theta}，F_b=G\mathrm{tg}\theta。$$

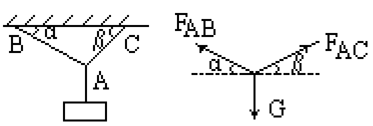
将数据代入分别计算可得

$\cos\theta=\frac{G}{F_a}=\frac{30}{20\sqrt{3}}$，$\theta=30°$，

$\mathrm{tg}\theta=\frac{F_b}{G}=\frac{30}{30}$，$\theta=45°$。

由于θ=30°时 F_a 受力已经达到绳 OA 所能承受的最大拉力，如果θ再大，则 $F_a>20\sqrt{3}$ 牛。绳 OA 将先断，所以θ最大值为 30°。

224．用两根细绳 AB 和 AC 系一重物，两绳和水平线的夹角分别为α和β，求两绳的张力，并讨论张力和角度的关系。



(a) (b)

［解法一］ 分析 A 点受力，悬挂重物的绳子对 A 作用力为 T，大小

和重物重力 G 相等，方向竖直向下，还有两根绳子的拉力 F_{AB} 和 F_{AC}，这三个共点力平衡。由拉密定理

得 $$\frac{G}{\sin[180°-(\alpha+\beta)]}=\frac{F_{AB}}{\sin(90°+\beta)}=\frac{F}{\sin(90°+\alpha)},$$

所以 $F_{AB}=\dfrac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}G$，$F_{AC}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}G$。

因为 $\alpha<\beta$，AC＜AB，由上式可得 $F_{AC}>F_{AB}$ 即绳子越短，受力越大。

[解法二]　A 点受悬挂重物的绳子的作用力 T（大小等于 G）和两根绳子的张力 F_{AB} 和 F_{AC}，三力平衡，由正交分解法

得 $$F_{AC}\cos\beta-F_{AB}\cos\alpha=0\quad(1)$$

$$F_{AC}\sin\beta+F_{AB}\sin\alpha-G=0\quad(2)$$

(1)式×$\sin\alpha$+(2)式×$\cos\alpha$，

$F_{AC}(\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha)=G\cos\alpha$，

$$F_{AC}=\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}G,$$

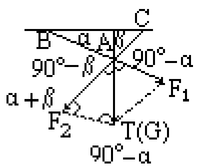
再代入(1)式得　$F_{AB}=\dfrac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}G'$。

[解法三]　如图(b)所示，T(G)跟 F_{AC}、F_{AB} 平衡。也可以把 T 沿 BA 和 CA 方向分解[图(c)]，得 F_1 和 F_2，它们分别跟 F_{AB}、F_{AC} 平衡。从△

TAF_2，$\dfrac{F_1}{\sin(90°-\beta)}=\dfrac{F_2}{\sin(90°-\alpha)}=\dfrac{G}{\sin(\alpha+\beta)}$。

$$F_1=F_{AB}=\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}G,$$

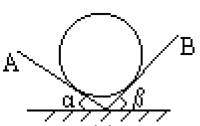
$$F_2=F_{AC}=\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}G。$$



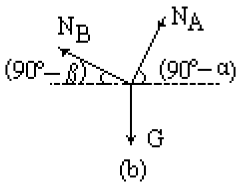
(c)

225．一只球重力为 G，静止于两光滑斜面相交的沟槽内，跟两斜面相交的直线为水平线。如果两斜面的倾角分别为 α 和 β，求球对每一斜面的压力？

[解答]　分析小球受重力 G 和两斜面对它的弹力 N_A 和 N_B 作用，三力平衡，它们之间的夹角如图(b)所示。利用上题结论，



(a)

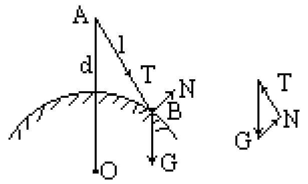


(b)

$$\frac{N_B}{\sin(180°-\alpha)}=\frac{N_A}{\sin(180°-\beta)}=\frac{G}{\sin(\alpha+\beta)}$$，于是斜面OA受力

$N_A=\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}G$，斜面OB受力$N_B=\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}G$。

226．重力为 G 的小球吊在长为 l 的绳上。绳上端固定在 A 点，小球放在半径为 r 的光滑的球面上，球面的球心为 O，AO 为铅直线，并且 AO=r+d 如图所示。求绳的张力 T 和球面的弹力 N。



[解答]　分析小球（作为质点看）受力情况，因为是平衡力系，因此 G、N、T 构成一个三角形，由于它和三角形 AOB 相似。可得

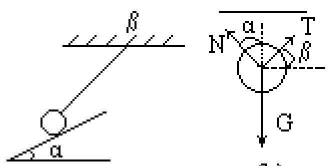
$$\frac{G}{d+r}=\frac{T}{l}=\frac{N}{r}。$$

$$T=\frac{Gl}{d+r}，\qquad N=\frac{Gr}{d+r}。$$

227．在光滑的斜面上用细绳吊着一个重力为 G 的小球。当小球处于如图(a)所示的情况时，小球受到几个力作用？各等于多少？（α=30°；β=60°，G=10 牛。）

[解答]　小球受重力 G，竖直向下，小球对斜面有一个压力，斜面发生形变产生弹力，即对小球有一个垂直斜面斜向上的支持力 N[图(b)]。由于这两个力不在一直线上不能平衡，要沿斜面下滑，所以对绳子有一拉力，绳子发生形变后产生弹力，即沿绳子收缩方向对小球作用一个拉力 T。小球共受 G、N、T 三个力的作用。由于 N 和斜面垂直，斜面和水平之间夹角为α，则 N 和竖直方向之间夹角为α，T 和水平间夹角为β。

把 T 和 N 都沿水平方向竖直方向分解，根据共点力的平衡条件，



(a)　　(b)

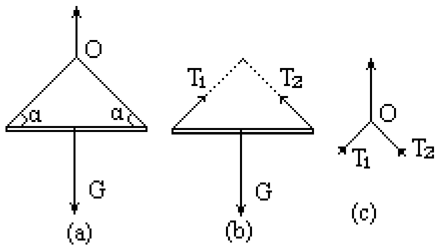
得　$\Sigma F_x=0$，$T\cos\beta-N\sin\alpha=0$(1)

$\Sigma F_y=0$，$T\sin\beta+N\cos\alpha-G=0$(2)

解(1)和(2)式，将已知的α、β、G 的值代入，

得　T=N=5.77 牛。

228．匀速起吊重力为 G 的水泥梁时[图(a)]，如果要求绳索的拉力不大于 3G/4，试问绳索和水泥梁间的夹角α应不小于几度？



［解法一］　水泥梁的重力 G 和两绳的弹力 T_1、T_2 相平衡[图(b)]。在结点 O，弹力 T_1、T_2 和拉力 F，三力平衡[图(c)]。由平衡条件知：

$T_1\cos\alpha - T_2\cos\alpha = 0$，

$T_1\sin\alpha + T_2\sin\alpha = F$，

$T_1\sin\alpha + T_2\sin\alpha = G$，

所以　$T_1 = T_2 = \dfrac{G}{2\sin\alpha}$，

由题意 $T \le \dfrac{3}{4}G$　即　$\dfrac{G}{2\sin\alpha} \le \dfrac{3}{4}G$。$\sin\alpha \ge \dfrac{2}{3}$，

$\alpha \ge 41°49'$。

［解法二］　若把水泥梁和绳索作为一个系统来考虑，则系统受到外力 G 和 F，而绳索间的张力 T 是内力可不必考虑，平衡时 F=－G。而在结点则三个力平衡，$F=T_1+T_2$。

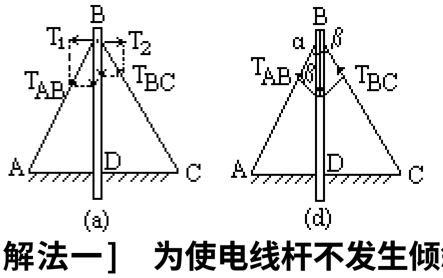
由拉密定律得　$\dfrac{T}{\sin(90°+\alpha)} = \dfrac{F}{\sin(180°-2\alpha)}$，

$T = \dfrac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha} = F = \dfrac{G}{2\sin\alpha}$。

同样可解得　$\dfrac{G}{2\sin\alpha} \le \dfrac{3}{4}G$，$\sin\alpha \ge \dfrac{2}{3}$，

$\alpha \ge 41°49'$

229．用两根钢丝绳 AB 和 BC 将一根电线杆 DB 垂直固定在地面上，且它们在一个平面内，如图(a)所示。设 AD=5 米，DC=9 米，DB=12 米。为使电线杆不发生倾斜，两根绳上张力的比值应是多少？



［解法一］　为使电线杆不发生倾斜，即两绳张力的水平分量应相等，即 $T_1=T_2$。

由相似三角得　$\dfrac{T_{AB}}{T_1} = \dfrac{AB}{AD}$，$\dfrac{T_{BC}}{T_2} = \dfrac{BC}{DC}$，

$T_1 = T_2$，$T_{AB}\dfrac{AD}{AB} = T_{BC}\dfrac{DC}{BC}$，

所以张力的比应为 $\frac{T_{AB}}{T_{BC}}=\frac{DC}{AD}\cdot\frac{AB}{BC}=\frac{DC\cdot\sqrt{AD^2+DB^2}}{AD\cdot\sqrt{BD^2+DC^2}}$

$=\frac{9\cdot\sqrt{5^2+12^2}}{5\cdot\sqrt{12^2+9^2}}=\frac{39}{25}$。

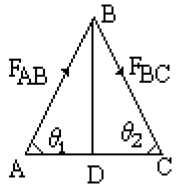
[解法二] 要使电杆不发生倾斜，两绳的张力的合力必须沿电杆向下[图(b)]。设两绳和竖直间夹角分别为α和β，由正弦定理得

$\frac{T_{AB}}{\sin\beta}=\frac{T_{BC}}{\sin\alpha}$。

因为 $\sin\beta=\frac{DC}{BC}=\frac{DC}{\sqrt{DC^2+BD^2}}=\frac{9}{\sqrt{9^2+12^2}}=\frac{9}{15}$，

$\sin\alpha=\frac{AD}{AB}=\frac{AD}{\sqrt{BD^2+AD^2}}=\frac{5}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{5}{13}$，

所以 $\frac{T_{AB}}{T_{BC}}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{(\frac{9}{15})}{(\frac{5}{13})}=\frac{39}{25}$。



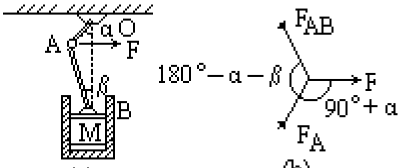
(c)

[解法三] 两绳的张力分别为 F_{AB} 和 F_{AC}，由直角分解法[图(c)]可得平衡条件为

$$F_{AB}\cos\theta_1=F_{BC}\cos\theta_2，$$

所以 $\frac{F_{AB}}{F_{BC}}=\frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}=\frac{(\frac{CD}{BC})}{(\frac{AD}{AB})}=\frac{39}{25}$。

230．图(a)为一曲柄压榨机的示意图。在压榨机铰链A处作用的水平力为F，OB是铅垂线。如果杆和活塞重力忽略不计，在已知角α和β的情况下，求活塞作用在物体M上的压力，并说明为什么角α、β越小，物体M所受的压力越大。



(a) (b)

[解答] 铰链A处受到三个力而平衡，根据拉密定律

$$\frac{F}{\sin(180°-\alpha-\beta)}=\frac{F}{\sin(90°+\alpha)}，$$

所以 $F_{AB}=\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}F$。

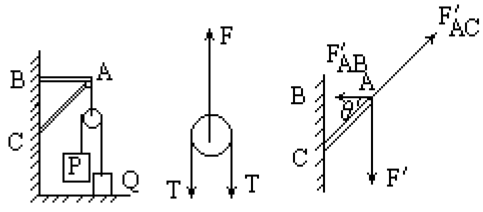
AB 杆受到的作用力为 F_{AB}，由牛顿第三定律可知 AB 杆对活塞的作用力 $N_{AB}=F_{AB}$。

活塞对M的压力$N = N_{AB}\cdot\cos\beta = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}F$。

因为 $\alpha+\beta<90°$。当α、β越小，cosα、cosβ越大，sin(α+β)越小，所以 N 越大。

231.如图(a)所示,已知 P 和 Q 的重力分别是 400 牛和 700 牛,AB=1.5 米，BC=2 米，∠ABC=90°，求 AB 和 AC 杆上所受的力。（杆、滑轮、细绳重力忽略不计）

[解答] 分析滑轮受力:T 是两根绳子对滑轮向下的拉力,F 是支架拉滑轮的力。由于物体 P 处于平衡状态[图(b)],



(a) (b) (c)

T=P=400 牛，F=2T=800 牛，

F′是滑轮拉支架的力，由牛顿第三定律知，F′=F=800 牛。

A 点受 F′和杆 AB，AC 的作用力 F'_{AC} 和 F'_{AB} 三力平衡如图(c)所示。

$$F'_{AC}\cos\theta = F'_{AB} \qquad (1)$$

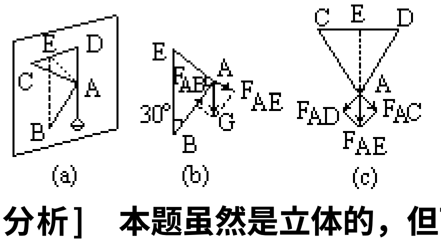
$$F'_{AC}\sin\theta = F' \qquad (2)$$

解得$F'_{AC} = \dfrac{F'}{\sin\theta} = F'(\dfrac{AC}{BC}) = 800\times\dfrac{\sqrt{2^2+(1.5)^2}}{2}$牛$=1000$牛，

$F'_{AB} = F'_{AC}\cos\theta = F'\text{ctg}\theta = F'(\dfrac{AB}{BC}) = 800\times\dfrac{1.5}{2}$牛$=600$牛。

杆 AB、AC 受力 F_{AB} 和 F_{AC} 分别是 F'_{AB}、F'_{AC} 的反作用力，所以杆 AB 受拉力 $F_{AB}=600$ 牛，杆 AC 受压力 $F_{AC}=1000$ 牛。

232．一盏灯挂在由三根棒所组成的支架上，如图(a)所示。上面的两根棒 AC 和 AD 和棒在墙上支点间的连线 CD 构成一个等边三角形，这三角形的平面跟第三根棒 AB 垂直。AB 棒跟墙面成 30°角。三棒的重力不计，灯和罩重力为 G。这三根棒各受力多少？



(a) (b) (c)

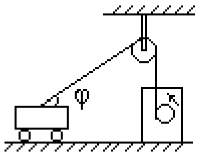
[分析] 本题虽然是立体的，但可先将重力分解成两个分力：一个作用在杆 AB 上，另一个在△ACD 组成的平面内。然后再将后一个分力分解成杆 AC 和 AD 两个方向的分力，即可解得。

[解答]

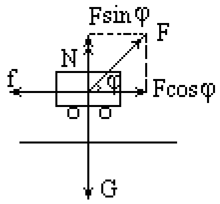
由图(b)可知，$F_{AB}=G\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}G$。$F_{AB}=G\sin 30°=\frac{G}{2}$。再将$F_{AE}$分解[图(c)]得 $F_{AC}=F_{AD}=\frac{F_{AE}}{2\cos 30°}=\frac{\sqrt{3}}{6}G$。

所以棒AB受压力为$\frac{\sqrt{3}}{2}G$，棒AC和AD受拉力为$\frac{\sqrt{3}}{6}G$。

233．重 G 的小车在地面上，卷扬机通过定滑轮牵引着它[图(a)]，小车和地面间的摩擦系数为μ。问牵引角φ等于多大时用力最小？



(a)



(b)

［分析］ 小车受四个力作用：重力 G、拉力 F、地面弹力 N 和摩擦力 f。把拉力分成水平分量 Fcosφ和垂直分量 Fsinφ，如图(b)所示。由于摩擦力 f=μN。当φ角较小时，使小车前进的力 Fcosφ就较大。但小车对地面的压力 N（等于 G－Fsinφ）也大，所以摩擦力也大。也就是说 F 不一定小。当φ角大时，虽然可使 N（等于 G－Fsinφ）减小，摩擦力 f 减小，可是使小车前进的力 Fcosφ也小，F 也不一定小。如果要匀速牵小车，φ角由小变大过程中，拉力 F 将会由大变小，再小变大。其中有一个极小值，即力最小的位置，此时的φ角即所求值。

［解答］ 以水平方向为 x 轴方向，竖直方向为 y 轴方向。由平衡条件得

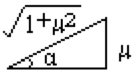
$\Sigma F_X=F\cos\varphi-f=0$　　(1)

$\Sigma F_y=N+F\sin\varphi-G=0$　　(2)

$f=\mu N$　　(3)

解得 $F=\frac{\mu G}{\cos\varphi+\mu\sin\varphi}$　　(4)

为了求F的最小值，可设有一直角三有形，三边分别为1，μ和$\sqrt{1+\mu^2}$[图(c)]。



(c)

则 $\sin a=\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$，$\cos a=\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$。

代入(4)式可得 $F=\frac{\mu G}{\cos\varphi+\mathrm{tg}a\sin\varphi}=\frac{\mu G}{\cos\varphi+\frac{\sin a\sin\varphi}{\cos a}}$

$$=\frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}[\cos a\cos\varphi+\sin a\sin\varphi]}=\frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}\cdot\cos(a-\mu)},$$

要使 F 最小，分母应最大，即 cso(a－φ)=1，

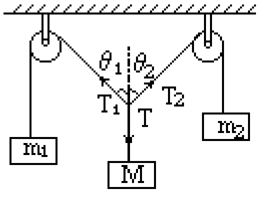
a－φ=0，a=φ，由上述三角形知

tga=μ，tgφ=μ，即φ=arctgμ。

此时 F 最小，其值为

$$F_{min}=\frac{\mu G}{\sqrt{1+\mu^2}}=G\cdot\sin a=G\cdot\sin\varphi。$$

234．一条轻绳跨过同一高度上的两个轻定滑轮，两端分别挂上质量为 m_1=4 千克和 m_2=2 千克的物体，如图(a)所示。在定滑轮之间的一段绳上悬挂第三个物体 M。如果不考虑滑轮的大小和摩擦，为使三个物体保持平衡，M 的质量必须大于多少？



(a)

[解法一]　设 T_1 和 T_2 和 T 分别表示联结三个物体的三段绳上的张力。且 T_1、T_2 和竖直方向间夹解分别为 θ_1 和 θ_2。由共点力系的平衡条件有

$T_1\sin\theta_1=T_2\sin\theta_2$，$T_1\cos\theta_1+T_2\cos\theta_2=T$。

$T_1=m_1g$，$T_2=m_2g$，$T=Mg$，

所以 $2\sin\theta_1=\sin\theta_2$　　(1)

$4\cos\theta_1+2\cos\theta_2=M$　　(2)

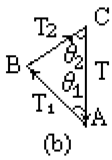
由(1)式知：$\theta_2>\theta_1$，由于滑轮等高，所以 $\theta_2<90°$。

由(1)、(2)联立消去 θ_1，求得

$$4\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2\theta_2}+2\cos\theta_2=M \qquad (3)$$

当 θ_2 最小值接近于零，可得 M 最大值接近 6 千克，即绳子很长，两个滑轮相距极近，M 的重力和 m_1、m_2 的重力的和近乎相等。

当 θ_2 增加时，由(3)式知 M 减小，如果 $\theta_2\approx90°$ 时，M 的最小值为 $2\sqrt{3}$ 千克。

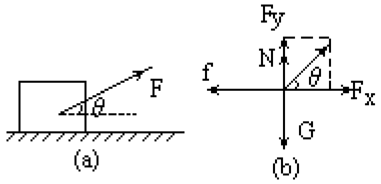


(b)

[解法二]　绳上张力 T_1、T_2 和 T 平衡的条件为三力矢量形成封闭三角形[图(b)]。因为 $T_1=m_1g$、$T_2=m_2g$ 已经确定不变，而 T=Mg 可改变。即△ABC 中的 C 点可沿竖直方向上下移动。当 C 点向上移动到 ABC 接近于在一直线上时，M 为最大值，$T\approx T_1+T_2$ 即 M≈6 千克。当 C 点向下移动时，θ_2 随着增大，M 减小。但由于两个滑轮高度相同，$\theta_2<90°$，当 $\theta_2\approx$ 90°时，M 有极小值即

$T\approx\sqrt{T_1^2-T_2^2}$，$M\approx\sqrt{m_1^2-m_2^2}=2\sqrt{3}$ 千克。

235．拉力 F 作用在重为 G 的物体上，使它沿水平地面匀速前进，物体和地面的摩擦系数为μ，当拉力为最小时，力和地面的夹角θ为多大？



[解答]　根据图(b)

$\Sigma F_x=F\cos\theta-f=0$　　(1)

$\Sigma F_y=F\sin\theta+N-G=0$　　(2)

$f=\mu N$　　(3)

解得　$F=\dfrac{\mu G}{\cos\theta+\mu\sin\theta}$

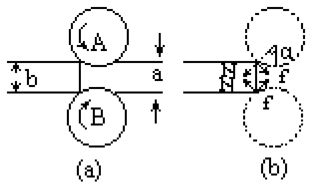
设$\mu=\mathrm{tg}\varphi$，则$\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$，代入上式

得　$F=\dfrac{\mu G}{\cos\theta+\mathrm{tg}\varphi\sin\theta}=\dfrac{\mu G\cos\varphi}{\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi}=\dfrac{\mu G}{\cos(\theta-\varphi)\sqrt{1+\mu^2}}$。

要使 F 为最小，分母最大，即$\theta=\varphi$时，$\cos(\theta-\varphi)=1$，

$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\mu$，即拉力 F 和水平地面间的夹角。

236．一台轧钢机的两个滚子，直径各为 d=50 厘米，以相反方向旋转，如图(a)所示。滚子间距离为 a=0.5 厘米，如果滚子和热钢间的摩擦系数为μ=0.1，试求进入滚子前钢板的最小厚度 b=？



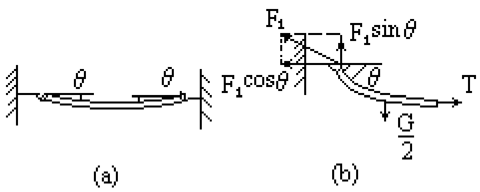
[解答]　钢板在 A、B 两点受到的力为：滚子对它的法向压力 N 和摩擦力 f[图(b)]。由于 f 的作用把钢板带入辗滚。由$\Sigma F_x=0$可知 $f\cos\alpha-N\sin\alpha=0$。

因为$f=\mu N$，所以$\mathrm{tg}a=\mu$，$\cos a=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2a}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$。

厚度　$b=a+2R(1-\cos a)=a+2R(1-\dfrac{1}{\sqrt{1+\mu^2}})$

$$=0.5\text{厘米}+50(1-\frac{1}{\sqrt{1.01}})\text{厘米}=0.75\text{厘米}。$$

237．有一条重为 G 的绳子，它的两端挂在同一高度的两个挂钩上，如图(a)所示。绳的两端和水平线夹角为θ。求：(1)绳的一端对挂钩的作用力 F 多大？(2)绳子最低点的张力 T 多大？



[解答]　(1)由牛顿第三定律知：绳对挂钩的作用力 F 和挂钩对绳的作用力大小相等、方向相反。所以以绳子为研究对象，绳子两端所受的力为 F_1 和 F_2，重力 G 可看为作用于绳子中点。把 F_1、F_2 分解成水平方向和铅直方向两个分量，由力的平衡，

$F_1\sin\theta+F_2\sin\theta=G$，

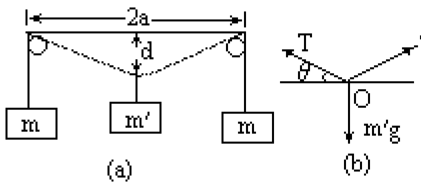
$F_1\cos\theta=F_2\cos\theta$。

解得　$F=F_1=F_2=\dfrac{G}{2\sin\theta}$。

(2)为了求绳子最低点的张力 T，隔离取一半绳子作为研究对象，受力分析如图(b)所示。在水平方向

$$T=F_1\cos\theta=\frac{G}{2\sin\theta}\cdot\cos\theta=\frac{G}{2\mathrm{tg}\theta}。$$

238．两质点质量都为 m，系于细线两端，细线跨过同一高度的两个光滑钉子，两钉间距离为 2a。如果另用一个质量为 m′的砝码，悬于两钉间线段的中点。问 m′落到什么位置时系统能处于平衡状态？



[解答]设挂上 m′后，线的中点移到 O 点，下落距离为 d。O 点受到的三个力相互平衡，由于对称关系可知，绳两边的张力 T 相等。由平衡关系可知，

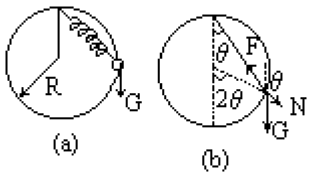
$$2T\sin\theta=m'g。$$

由于 m 平衡，所以 T=mg。

$\sin\theta=\dfrac{m'g}{2T}=\dfrac{m'}{2m}$，$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-(\dfrac{m'}{2m})^2}$，

$\mathrm{tg}\theta=\dfrac{d}{a}$。$d=a\mathrm{tg}\theta=a\cdot\dfrac{(\dfrac{m'}{2m})}{\sqrt{1-(\dfrac{m'}{2m})^2}}=\dfrac{m'a}{\sqrt{4m^2-m'^2}}$。

239．一个重力为 G 的小圆环套在一个竖直放置的半径为 R 的光滑圆环上。小圆环由一根倔强系数为 k、自然长度为 l(l＜2R)的弹簧系着，弹簧的另一端固定在大圆环的最高点，如图(a)所示。当小环静止时，忽略弹簧的重力，弹簧和竖直方向的夹角为多大？



[分析]小圆环受到三个力作用：重力 G 方向竖直向下，弹簧的弹力 F，方向和竖直线成 θ 角，斜向上指向环的最高点，还有一个是大圆环作用于它的弹力 N。大环光滑，N 方向沿半径向外，和竖直线间夹角为 2θ，如图(b)所示。

[解答]根据小圆环受力平衡条件，用正交分解法，列出方程

$\Sigma F_x=N\sin 2\theta-F\sin\theta=0$ (1)

$\Sigma F_y=F\cos\theta-N\cos 2\theta-G=0$ (2)

由胡克定律知 $F=k(2R\cos\theta-l)$ (3)

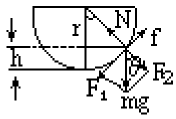
利用 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$，解(1)(2)式，得到 $F-2G\cos\theta=0$ (4)

以(3)式代入(4)式解得 $\cos\theta=\dfrac{lk}{2(Rk-G)}$，

所以弹簧和竖直方向间夹角为

$$\theta=\cos^{-1}\frac{lk}{2(Rk-G)}。$$

240．一只小虫欲从半圆形碗内底部爬上碗口，碗的半径为 r，虫和碗面间静摩擦系数为 μ，问该小虫只能爬到多高？



[分析]小虫爬到一定高度后由于重力沿碗壁的分力将使它下滑，越高下滑力越大，而小虫的爬动必须依赖摩擦力，摩擦力和正压力有关，相反爬得越高，小虫和碗壁间的正压力也即重力的法向分量越小，所以当达到一定高度时，下滑力和摩擦力相等，使小虫无法再爬上去了。

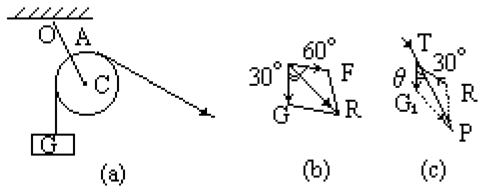
[解答]设爬到离碗底高度为 h，则重力 mg 可分解成垂直于碗的压力 F_2，和切向的下滑力 F_1，

$F_1=mg\sin\theta$，$F_2=mg\cos\theta$，$f=\mu N_2$。

因为 $F=f=\mu F_2$，所以 $\mu=tg\theta$，$F_2-N=0$。

$$h=r(1-\cos\theta)=r(1-\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}})=r(1-\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}})。$$

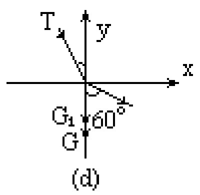
241．一人以跟竖直方向成 60°角的力 F 拉动细绳，使重物 G 匀速上升[图(a)]，如果滑轮的重力为 G′，绳的重力和滑轮轴上的摩擦都不计，当滑轮平衡时，绳 OA 的张力是多少？已知轮的圆心 C 为滑轮的重心，且 OAC 在一起直线上。



[解法一]　因为滑轮匀速转动，且摩擦不计，F=G。已知 F 和 G 间夹角为 60°。绳子 OA 的张力 T 和滑轮的重力 G_1 都通过 C 点为共点力，所以F和G的合力R的方向也通过C点。$R=2G\cos 30°=\sqrt{3}G$，方向和竖直方向成 30°解[图(b)]。

由R和滑轮重量G_1求合力P，由平行四边形法则求得$P=\sqrt{G_1^2+3G^2+3GG_1}$，和$G_1$间夹角$tg\theta=\dfrac{R\sin 30°}{G_1+R\cos 30°}=\dfrac{\sqrt{3}}{2G_1+3G}$。绳子 OA 的张力 T 和 P 大小相等方向相反[图(c)]。

[解法二]拉力 F 和 G 的合力通过滑轮的重心 C，所以滑轮所受各力都可看成作用在重心 C 处的共点力。取座标 xOy，如图(d)所示，利用正交分解法得



$\Sigma F_x=F\sin 60°-T\sin\theta=0$，

$\Sigma F_y=T\cos\theta-F\cos 60°-G-G_1=0$。

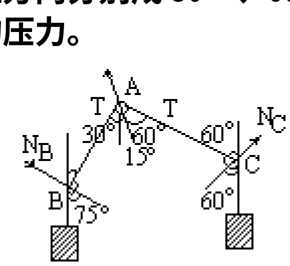
由于$F=G$，代入数据$T\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}G$，

$$T\cos\theta=\frac{3}{2}G+G_1。$$

解得　$T=\sqrt{3G^2+G_1^2+3GG_1}$，

$$tg\theta=\frac{\sqrt{3}G}{2G_1+3G}。$$

242．如图，A、B、C 为墙上的三个木栓，A 最高，一根细绳跨过木栓，在绳两端各挂一个 G=12 牛的重物处于平衡状态。如果绳 BA、AC 和竖直方向分别成 30°、60°角。线和木栓之间摩擦不计。求各个木栓受到的压力。



[解答]　因绳和木栓间摩擦不计，所以绳内各部分的张力都相等，以 T 表示。由于重物平衡，T=G=12 牛。每个木栓都受到两边绳子张力 T，和支持力的作用处于平衡状态，所以木栓上所受压力的方向和两绳张力

的合力方向相反，必定在两细绳夹角的角平分线上。

先考虑 C 点：三个力相互平衡，两力间夹角都等于 120°，所以三个力的大小相等，N_C=T=G=12 牛，方向和竖直间成 60°角。

考虑 B 点：两绳间夹角为 180°－30°=150°，所以 N_B 方向和竖直方向间成 75°角。

$\Sigma F_y=T\cos30°+N_B\cos75°-G=0$。

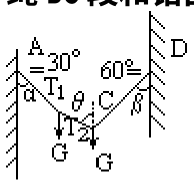
解得 $N_B=\dfrac{G-T\cos30°}{\cos75°}=\dfrac{12-12\times0.866}{0.259}$ 牛 $=6.21$ 牛。

考虑 A 点：两绳间夹角为 90°，所以 N_A 和竖直方向夹角为 15°。

$\Sigma Fx=T\sin60°-T\sin30°-N_A\sin15°=0$。

解得 $N_A=\dfrac{T(\sin60°-\sin30°)}{\sin15°}=\dfrac{12\times(0.866-0.5)}{0.259}$ 牛 $=16.96$ 牛。

243．一根长绳系于 A、D 两点，绳上 B、C 两点处各悬挂 G=10 牛的重物，AB、CD 和铅直线分别成 30°和 60°角，求三段绳中的张力各为多少？绳 BC 段和铅直线间的夹角为多少？



[解答]　设三段绳中张力分别为 T_1、T_2 和 T_3，如图所示，绳 BC 段与铅直线间之夹角为θ。

当 B 点平衡时

$\Sigma F_x=T_2\sin\theta-T_1\sin\alpha=0$　　(1)

$\Sigma F_y=T_1\cos\alpha-T_2\cos\theta-G=0$　　(2)

当 C 点平衡时

$\Sigma F_x=T_3\sin\beta-T_2\sin\theta=0$　　(3)

$\Sigma F_y=T_3\cos\beta+T_2\cos\theta-G=0$　　(4)

由(1)式得 $T_1=\dfrac{T_2\sin\theta}{\sin\alpha}$ 代入(2)式，

$T_2(\mathrm{ctga}\sin\theta-\cos\theta)=G$　　(5)

由(3)式得 $T_3=\dfrac{T_2\sin\theta}{\sin\beta}$ 代入(4)式，

$$T_2(\mathrm{ctg}\beta\sin\theta+\cos\theta)=G \qquad (6)$$

(5)、(6)式相等 $T_2(\mathrm{ctga}\sin\theta-\cos\theta)=T_2(\mathrm{ctg}\beta\sin\theta+\cos\theta)$，

将α=30°、β=60°代入可得

$$\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\cos\theta,$$

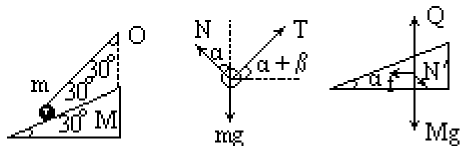
$$2\sin\theta=2\sqrt{3}\cos\theta,\ \mathrm{tg}\theta=\sqrt{3},\ \theta=60°。$$

将θ、α、β、代入(5)式 $T_2=(\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2})=10$ 牛，

代入(1)式 $\quad T_1 = T_2 \times \dfrac{\sin 60°}{\sin 30°} = 10\sqrt{3}$牛，

代入(3)式 $\quad T_3 = T_2 \times \dfrac{\sin 60°}{\sin 60°} = 10$牛。

244．把一个质量为 M 的楔形体放在粗糙的水平面上，楔形体的斜面是光滑的，跟水平面成α=30°倾角[图(a)]。用一根轻细绳吊一个质量为 m 的小球，放在斜面上，细绳和斜面间交角β=30°。求：(1)当楔形体不动时，绳上张力多大？(2)为使图(a)中整个系统静止不动，楔形体和水平面间静摩擦系数应为多少？(3)如果绳被轻轻剪断而又要使楔形体不动，此时摩擦系数又要多大？



(a) (b) (c)

[解答] (1)小球受力[图(b)]：重力 mg、绳子拉力 T，和斜面的弹力 N°由于三力平衡得

$\Sigma F_x = T\cos(\alpha+\beta) - N\sin\alpha = 0$，

$\Sigma F_y = T\sin(\alpha+\beta) + N\cos\alpha - mg = 0$。

$\alpha+\beta = 60°$，$\cos(\alpha+\beta) = \sin\alpha$，$\sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha$。

代入得 $\quad T = N = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$。

(2)楔形体受力[图(c)]：重力 Mg，地面弹力 Q，静摩擦力 f，和小球对它的压力 N′。

由平衡条件得

$\Sigma F_x = N'\sin\alpha - f = 0$，

$\Sigma F_y = Q - Mg - N'\cos\alpha = 0$。

得 $\quad f = N'\sin\alpha = N\sin\alpha = \dfrac{N}{2} = \dfrac{mg}{2\sqrt{3}}$，

$$Q = Mg + N'\cos\alpha = (M + \frac{m}{2})g。$$

楔形体不动的条件应为 $f < \mu Q$，

$$\mu > \frac{f}{Q} = \frac{\sqrt{3}m}{6M + 3m}。$$

(3)绳剪断后，绳子拉力 T 不存在，小球仅受重力 mg 和弹力 N，这两个力不平衡，小球将沿斜面加速下滑，N 变为 $mg\cos\alpha$。由楔形体平衡条件同样得

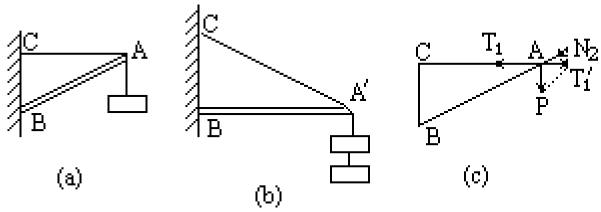
$f = N\sin\alpha = mg\cos\alpha\sin\alpha$，

$$Q = Mg + N\cos\alpha = (M + m\cos^2\alpha)g。$$

由 $f < \mu Q$ 条件得 $\quad \mu > \dfrac{f}{Q} = \dfrac{m\cos\alpha\sin\alpha}{M + m\cos^2\alpha}$，

得 $\mu > \frac{\sqrt{3}m}{4M+3m}$。

245．如图(a)装置中，硬杆AB的长$L=\sqrt{2}$米。B端套在铰链上，A端连一橡皮绳，橡皮绳的另一端固定在墙上C点，BC为铅直线，BC间距d=1米。当A点挂一个砝码时，绳AC适成水平，当挂上两个砝码时，AB杆适成水平[图(b)]。



如果两个砝码重力相等，不计杆和橡皮绳的重力，且橡皮绳受力在弹性限度内，求橡皮绳原长 l_0。

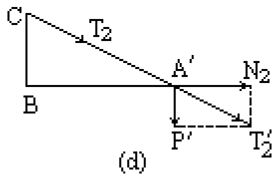
[分析]设每个砝码重G，在第一种情况，A点受绳子拉力P，和硬杆弹力N_1及橡皮绳弹力T_1[图(c)]，绳子拉力P大小等于砝码重G。因为三力平衡，P和N_1的合T_1'一定和T_1大小相等方向相反。

由相似三角形关系得

$$\frac{T_1}{G}=\frac{CA}{CB}=\frac{\sqrt{AB^2-CB^2}}{CB}=\frac{\sqrt{L^2-d^2}}{d} \qquad (1)$$

同理，在第二种情况：A′点受拉力P′和硬杆弹力N_2，橡皮绳弹力T_2而平衡[图(d)]。P′ = 2G。由平衡条件得：P和N_2的合力T_2'必定和T_2大小相等，方向相反

$$\frac{T_2}{2G}=\frac{CA'}{CB}=\frac{\sqrt{A'B^2+CB^2}}{CB}=\frac{\sqrt{L^2+d^2}}{d} \qquad (2)$$



由胡克定律可知 $T_1=k(CA-l_0)$ (3)

$T_2=k(CA'-l_0)$ (4)

由(1)、(2)式得 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{CA}{2CA'}$ (5)

由(3)、(4)式得 $\frac{T_1}{T_2}=\frac{CA-l_0}{CA'-l_0}$ (6)

由(5)、(6)式解得 $l_0=\frac{CA\cdot CA'}{2CA'-CA}$，

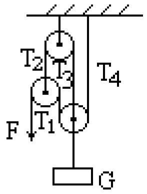
[解答]将数据代入

$CA=\sqrt{AB^2-CB^2}=\sqrt{L^2-d^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2-1}$米$=1$米，

$CA'=\sqrt{A'B^2+CB^2}=\sqrt{L^2+d^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1}$米$=\sqrt{3}$米，

所以 $l_0=\frac{CA\cdot CA'}{2CA'-CA}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$米$=0.7$米。

246．如图所示的滑轮组，悬挂重物为 G，如果滑轮重力不计，求平衡时所用力 F 的大小。如果每只滑轮重力都为 G_1，则结果又将如何？



[解答]设各绳张力为 T_1、T_2、T_3、T_4如图所示，

则 $F=T_1$，

$T_2=2T_1=2F=T_3$，

$T_4=T_1=F$。

重力 $G=T_1+T_3+T_4=F+2F+F=4F$，

$F=\frac{G}{4}$。

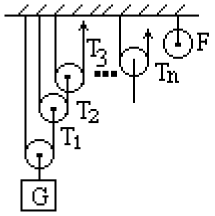
如果每个滑轮重为 G_1，则

$$F=T_1=T_4,$$

$$T_2=2T_1+G_1=T_3。$$

重物加滑轮重为 $G+G_1=T_1+T_3+T_4=F+(2F+G_1)+F$，所以 $F=G/4$。不论滑轮重力计或不计，结果相同。

247．设多级滑轮组由 n 个动滑轮组成，如图所示。下悬重物 G，每个滑轮重为 G_1。摩擦力不计，重物静止不动，求所用力 F。



[解答]设每根绳中张力分别为 T_1、T_2、T_3…，则

$2T_1=G+G_1$，$T_1=\frac{1}{2}(G+G_1)$，

$2T_2=T_1+G_2$，$T_2=\frac{T_1}{2}+\frac{G_2}{2}=\frac{G}{2^2}+\frac{G_1}{2^2}+\frac{G_2}{2}$，

$2T_3=T_2+G_3$，$T_3=\frac{T_2}{2}+\frac{G_3}{2}=\frac{G}{2^3}+\frac{G_1}{2^3}+\frac{G_2}{2^2}+\frac{G_3}{2}$，

……

$2T_n=T_{n-1}+G_n$，

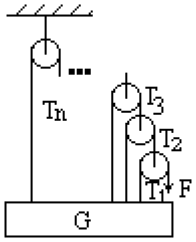
所以 $F=T_n=\frac{T_{n-1}}{2}+\frac{G_n}{2}=\frac{G}{2^n}+\frac{G_1}{2^n}+\frac{G_2}{2^{n-1}}+\frac{G_3}{2^{n-2}}+\cdots\cdots\frac{G_n}{2}$。

由于每个滑轮重力相等 $G_1=G_2=G_3=\cdots=G_n=G_1$，则

$2^nF=G+G_1(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})=G+G_1(2^n-1)$，

$$F=\frac{G+G_1(2^n-1)}{2^n}$$。

248．设多级滑轮组由 n 个定滑轮组成，如图所示。下悬重物 G，每个滑轮重为 G_1，求所用力 F。



[解答]　设每个滑轮由下至上各重 G_1、G_2、G_3…，则

$T_1=F$，

$T_2=2T_1+G_1=2F+G_1$，

$T_3=2T_2+G_2=2^2F+2G_1+G_2$，

$T_4=2T_3+G_3=2^3F+2^2G1+2G_2+G_3$，

……

$T_n=2T_{n-1}+G_{n-1}=2^{n-1}F+2^{n-2}G_1+2^{n-3}G_2+\cdots\cdots+G_{n-1}$，

$G=T_1+T_2+T_3+\cdots\cdots+T_n=(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+1)F+(2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots\cdots+1)G_1+(2^{n-3}+2^{n-4}+\cdots\cdots+1)G_2+\cdots\cdots+(2+1)_nG_{n-2}+G_{n-1}$

$$=\frac{2^n-1}{2-1}F=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}G_1+\frac{2^{n-2}-1}{2-1}G_2+\cdots\cdots+\frac{2^2-1}{2-1}G_{n-2}+G_{n-1}$$

$$=(2^n-1)F+(2^{n-1}-1)G_1+(2^{n-2}-1)G_2+\cdots\cdots+(2^2-1)G_{n-2}$$

$$+(2-1)G_{n-1}$$。

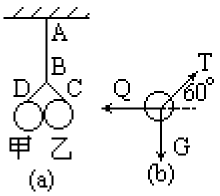
因 $G_1=G_2+\cdots=G_n$，

$G=(2^n-1)F+G_1[2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots\cdots+2-(n-1)]$

$=(2^n-1)F+G(2^n-n-1)$，

$$F=\frac{G-G_1(2^n-n-1)}{2^n-1}$$。

249．甲乙两球半径都为 R，质量相等，用绳悬挂起来如图(a)所示。已知绳 AB 拉力 F=120 牛。绳 BD 和 BC 长都是 R，求绳 BD 和 BC 上的拉力和甲、乙两球间的相互作用力。



[解答]将甲、乙两球一起作为一个系统，则绳 AB 拉力为 F，应等于两球的重力，小球重力$G=\frac{F}{2}=60$牛。

再分析一个小球受力：重力 G、绳子拉力 T 和另一小球对它的弹力 Q。由于绳 BD=R，即两球球心和 B 组成的三角形为正三角形。所以 $T_{BD}=T_{BC}=T$

和水平间夹角为 60°。

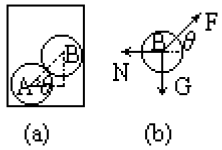
$$\Sigma F_x = T\cos60° - Q = 0,$$

$$\Sigma f_y = \sin60° - G = 0。$$

解得 $T = \dfrac{G}{\sin60°} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}G = 40\sqrt{3}$牛（和水平成 60°角），

$$Q = T\cos60° = 20\sqrt{3}\text{牛（方向水平）。}$$

250．两个半径为 r、重力为 G 的光滑小球，放在光滑的圆柱形筒内，圆筒的半径为 R，而 r＜R＜2r[图(a)]，求小球间的相互作用力。



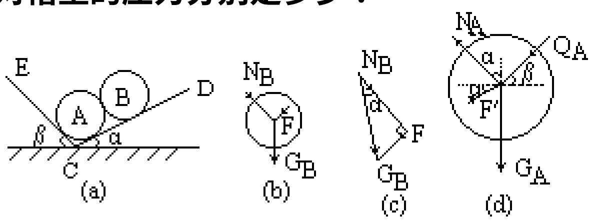
[解答]设两球间作用力为 F，分析上面的小球 B 受力[图(b)]，由

$$\Sigma F_y = F\sin\theta - G = 0。$$

但因 $\cos\theta = \dfrac{2R-2r}{2r} = \dfrac{R-r}{r}$，所以 $\sin\theta = \sqrt{1-(\dfrac{R-r}{r})^2} = \dfrac{\sqrt{R(2r-R)}}{r}$。

得 $F = \dfrac{G}{\sin\theta} = \dfrac{r}{\sqrt{R(2r-R)}}G$。

251．一个重力为 5 牛的圆柱 A 和同样大小但重力为 4 牛的圆柱 B，并放在光滑的 V 形槽里的 CD 平面上，∠α=30°、∠β=45°[图(a)]。求球对槽壁的压力分别是多少？



[解答]B 球受力为 G_B、N_B 和 F[图(b)]。由于两球半径相同，所以球 A 对球 B 的作用力方向平行于 CD 平面，而弹力 N_B 垂直于 CD 平面，三力平衡组成封闭三角形[图(c)]，

$F = G_B \cdot \sin\alpha = 2$ 牛，$N_B = G_B \cdot \cos\alpha = 3.46$ 牛。

A 球受力 G_A、N_A、F′和 CE 面对它的作用力 Q_A[图(d)]。

$\Sigma F_x = Q_A\sin\beta - N_A\sin\alpha - F'\cos\alpha = 0$，

$\Sigma F_y = Q_A\cos\beta + N_A\cos\alpha - F'\sin\alpha - G_A = 0$。

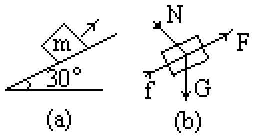
代入数值得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}Q_A - \dfrac{1}{2}N_A = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$牛，

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}Q_A + \dfrac{\sqrt{3}}{2}N_A = 5\text{牛} + 2 \times \dfrac{1}{2} = 6$牛。

解得 $N_A = 3.12$ 牛，$Q_A = 4.66$ 牛。

252．质量 m=20 千克的物体放在倾角为 30°的固定斜面上，物体和斜面间的静摩系数为 μ=0.5，现用绳子以力 F=150 牛沿斜面向上拉物体，问物体受到几个力的作用[图(a)]？其大小方向如何？它们的反作用力

作用在什么物体上？画出受力图。



(a) (b)

［解答］ 物体受四个力作用，如图(b)所示。

(1)重力 G=mg=20×9.8 牛=196 牛，方向竖直向下，反作用力作用在地球上。

(2)绳子拉力 F=150 牛，

方向沿斜面向上，反作用力作用在绳子上。

(3)支持力 N 方向垂直斜面向上，由于物体沿斜面方向运动，垂直斜面方向上合力为零，

$$N - G\cos\theta = 0。$$

所以$N = G\cos\theta = 196 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$牛$= 170$牛，反作用力作用在斜面上。

(4)摩擦力 f 重力沿斜面向下的分力 Gsinθ=98 牛，小于 F，所以物体有沿斜面向上运动的趋势。但物体和斜面间的最大静摩擦力 $f_{max}=\mu N=0.5\times170$ 牛=85 牛，沿斜面向下，而 $G\sin\theta+f_{max}=(98+85)$牛=183＞F，所以 F 不足以克服下滑力和最大静摩擦力使物体沿斜面向上运动。所以物体只有向上运动的趋势，但仍保持原来的静止状态，此时静摩擦力为 f，由力的平衡可知，$f+G\sin\theta-F=0$，解得

$f=F-G\sin\theta=(150-98)$牛=52 牛，方向沿斜面向下，它的反作用力作用在斜面上。

253．质量为 m=10 千克的物体放在倾角θ=37°的斜面上，物体和斜面间的静摩擦系数μ=0.2，要使物体静止在斜面上，作用在物体上的水平推力 F 应多大？

［解答］ 物体虽然静止在斜面上，相对于斜面可以有运动趋势，如果水平推力较小时，物体有向下运动趋势，静摩擦力沿斜面向上，如果水平推力较大时，物体有向上运动趋势，静摩擦力沿斜面向下，所以 F 的大小可以在一个最小值和最大值的范围内。

(a) (b)

设 F 最小值为 F_{min}。物体受力：重力 mg、弹力 N_1、推力 F_{min}、静摩擦力 $f_1=\mu N_1$ 方向沿斜面向上[图(a)]。取平行斜面和垂直斜面作为两个正交方向。根据平衡条件

$$\Sigma F_x=F_{min}\cos\theta+\mu N_1-mg\sin\theta=0,$$

$$\Sigma F_y=N_1-F_{min}\sin\theta-mg\cos\theta=0。$$

解得 $F_{min}=\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}mg=46.87$牛。

设 F 最大为 F_{max}，物体受重力 mg，弹力 N_2，推力 F_{max}，静摩擦力 $f_2=\mu N_2$ 方向沿斜面向下[上页图(b)]，根据平衡条件

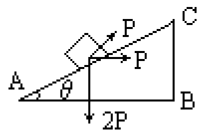
$\Sigma F_x=F_{max}\cos\theta-\mu N_2-mg\sin\theta=0$，

$\Sigma F_y=N_2-F_{max}\sin\theta-mg\cos\theta=0$。

解得 $F_{max}=\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}mg=109.5$牛，

水平推力 F 的大小在 46.87 牛和 109.5 牛之间。

254．在光滑的斜面上有一个重为 2P 的物体。当沿斜面向上和沿水平方向向右各加一个大小都等于 P 的力作用于这个物体时，物体正好处于平衡状态。求斜面的底和高的比以及斜面所受的压力。



[分析] 物体除受两个 P 的作用力外，还受重力 2P 和斜面的弹力 N 作用，根据物体受力平衡条件可为 $\Sigma F_x=0$，$\Sigma F_y=0$，如果选取坐标为水平和竖直方向，则有三个力 2P，N，P 要分解。而现在选取坐标为平行于斜面和垂直于斜面两个方向，则只需把 2P 和 P 分解，可使解法简便。

[解答] 平行于斜面方向 $P+P\cos\theta-2P\sin\theta=0$ (1)

垂直于斜面方向 $N-P\sin\theta-2P\cos\theta=0$ (2)

由(1)式得 $\dfrac{1}{\cos\theta}+1=2\text{tg}\theta$，$\sqrt{1+\text{tg}^2\theta}=2\text{tg}\theta-1$，

$\text{tg}\theta(3\text{tg}\theta-4)=0$。解得 $\text{tg}\theta=\dfrac{4}{3}$。

即斜面的底和高的比为 3/4。

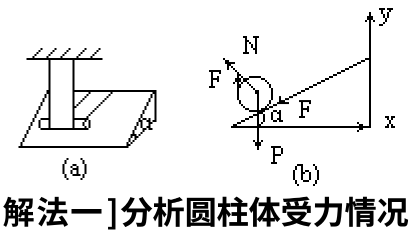
所以 $\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=\dfrac{3}{5}$。

代入(2)式得 $N-\dfrac{4}{5}P-2P\dfrac{3}{5}=0$。

解得 N=2P。

斜面所受到的压力为 N 的反作用力，大小也是 2P。

255．有一重力为 G 的圆柱体，被一条带子卷住停在倾角为α的斜面上不动。带子的一端固定在斜面上，另一端固定在竖直方向的上方。当圆柱体处于平衡状态时，求带子中的张力[图(a)]。



[解法一]分析圆柱体受力情况，选定坐标轴[图(b)]列出方程

$\Sigma F_x=F\cos\alpha-N\sin\alpha=0$，

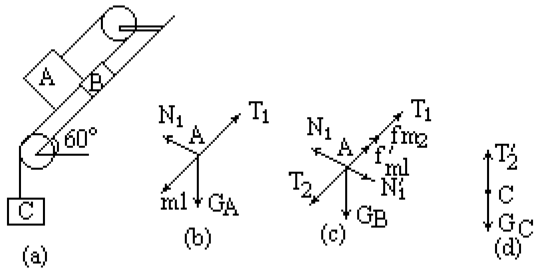
$\Sigma F_y=N\cos\alpha+F\sin\alpha+F-G=0$。

解得 $F=\dfrac{G\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$。

[解法二] 设圆柱体和斜面的接触处为轴，根据圆柱体平衡条件，合力矩为零。

$\Sigma M=0$，$F(R+R\sin\alpha)-GR\sin\alpha=0$． $F=\dfrac{G\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$．

256．如图(a)所示，物体A重10牛，物体B重5牛，A、B间以及B和斜面间的静摩擦系数都等于0.1，绳的质量、滑轮和绳间摩擦都忽略不计。求物体C在什么范围内时A、B、C三物体组成的连接体可处在平衡状态。



[解答] 求出两个临界状态下物体C的重力。

设A恰好不上滑，分析A受力情况如图(b)，建立直角坐标为平行斜面和垂直斜面两个方向，由平衡条件可得

$N_1=G_A\cos60°=10\times0.5$牛$=5$牛，$f_{m1}=\mu_0N_1=0.1\times5$牛$=0.5$牛，

$T_1=G_A\sin60°+f_{m1}=10\times0.866$牛$+0.5$牛$=9.16$牛。

分析B受力情况[图(c)]，f_{m1}'是A对B的静摩擦力，方向和f_{m1}相反，斜面对B的摩擦力f_{ml}，沿斜面向上。建立直角坐标，由平衡条件得

$N_2=G_B\cos60°+N_1'=5\times0.5$牛$+5$牛$=7.5$牛，

$f_{m2}=\mu_0N_2=0.4\times7.5$牛$=0.75$牛。

所以$T_2=T_1'-G_B\sin60°+f_{m1}+f_{m2}$

$=(9.16-5\times0.866+0.5+0.75)$牛$=6.08$牛。

物体C[图(d)]只受G_C和T_2'的作用，且处于平衡。

所以$G_C=T_2'=T_2=6.08$牛。

如果考虑A恰好不下滑，fm_1和fm_2都要改变方向，同理可解得$T_1=G_A\sin60°-f_{m1}=G_A\sin60°-\mu_0N_1=(10\times0.866-0.1\times5)$牛$=8.16$牛。

$T_2=T_1'-G_B\sin60°-f_{m1}-f_{m2}$

$=(8.16-5\times0.866-0.5-0.75)$牛$=2.58$牛，

$G_C=T_C'=T_2=2.58$牛。

要使三物体组成的连接体处于平衡，物体C的重量应满足条件2.58牛$<G_C<$6.08牛。

说理和论证题

257．“两个力合成一个力，因此合力将比组成此合力的任一个力都大。”这句话对不对，为什么？

[解答] 不对，因为力的合成分解是服从平行四边形法则的，合力是平行四边形相邻两条边中间的对角线，而分力是相邻接的两条边。由于分力间的夹角变大，分力可以比合力大，而合力比分力小。所以分力和合力的大小关系并不能理解为代数加法的大小关系。二力共面共点

时，其合力的大小不仅决定于两分力的大小，并且和两个分力间夹角有关。当夹角为 180°时，合力最小；当夹角为 0°时，其合力最大，比任一分力都要大。

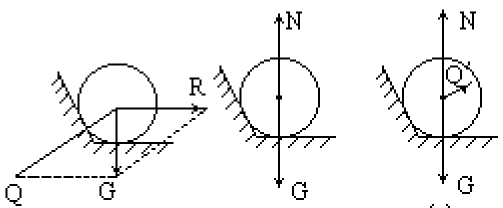
258．为什么两个力的合力只有一个，而把一个力分成两个分力却有无数种可能性？

［解答］ 因为已知两邻边，求平行四边形的对角线的解是唯一的，也就是说，只可以作一个平行四边形。而已知平行四边形的对角线，求两条邻边时，可以作无数个不同的平行四边形，因此有无穷多个可能性。实际上力的分解一般可根据力作用的实际效果来分解，才能得出一种正确的分解方法。

259．如图用较细的绳子结在水桶上来担水，绳子愈短就愈容易断，为什么？

［解答］ 水桶的重力由两边绳子来平衡，绳子受到的拉力大小等于重力沿绳子的两个分力。由于绳子越短，这两个分力之间的夹角越大。由合力和分力间关系的公式：$F_{合}{}^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$及$F_1 = F_2 = F$，则得 $F_{合}{}^2=2F^2(1+\cos\alpha)$。在 $F_{合}$不变的情况下，α越大，则分力 F_1 和 F 就相应要增大。所以绳子上受力就越大，也就容易被拉断。

260．一个球体，静止在水平面上。且又和一个跟地面斜交成钝角的墙接触[下页图(a)]。某学生应用平行四边形法则，把重力 G 分解成一个垂直于墙的分力 Q，另一个是平行于地面的分力 R。因此他认为分力 Q 被墙对它的弹力所平衡，剩下分力 R 就要使球向右运动。但是实际上球并未向右运动，由此，他怀疑平行四边形法则有问题，试指出这位学生错在哪里？



(a) (b) (c)

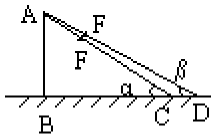
［解答］ 描绘力图，主要是描绘受力图。力的分解，是为了解题方便而采取的措施。只能依照力的效果来分解。

小球原来静止，它的受力图只能如图(b)所示，不可能是图(c)。

在图(c)中，$\Sigma F_x \neq 0$，小球会发生运动，不可能静止在平面上。

如果小球以速度 v 向左运动，撞击了斜的木板。小球将受到 Q′方向的弹力，将出现类似于图(c)的力图，弹力 Q′是个变量，这时，可能出现原题中的力的分解图中的情况。

261．把绳子拴在一棵枯树的最高点，用力拉绳子使枯树倾倒。有的同学说要用较长的绳子来拉，有的同学说要用较短的绳子来拉。度明哪个方案好？

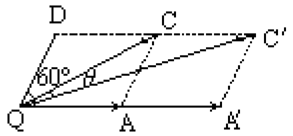


［解答］ 设 AB 为枯树，较长的绳子为 AD，和地面夹角为β。较短的绳子为 AC，和地面夹角为α。所用的力都是 F。由于要把枯树拉倒有效的分力为水平分量。长绳的有效力为 Fcosβ，较短的绳子有效力为 Fcosα。由于α＞β所以 cosα＞cosβ。所以用长一些的绳子来拉，比较有利。

262．为什么重力能使光滑斜面上的物体向下运动，而不能使在光滑水平面上的物体发生运动？

［解答］ 因为物体在光滑斜面上受到的重力竖直向下，使物体对斜面有力的作用而使斜面发生形变，而斜面对物体产生弹力作用在物体上，方向垂直斜面向上。作用在物体上的重力和斜面的弹力不能平衡，它们的合力使物体沿斜面向下运动。在光滑水平面上，物体的重力和平面对物体的弹力的作用线在一直线上，且大小相等、方向相反，能够平衡。物体受到的合力为零，将不改变原来的运动状态而保持静止。

263．两共点力大小相等、夹角为 60°。如果保持两力的方向不变，将其中一力大小改为原来的 2 倍时，求证其合力方向和改变的角度为 $\mathrm{arctg}\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$。



［证明］ 设两力为 OA=OB=F 其合力为 OC=R。当 A 增大为 OA′=2F 时，其合力为 OC′=R′。

由力的平行四边形法则可得

$R^2=F^2+F^2+2FF\cos°=3F^2$，$R=\sqrt{3}F$，

$R'^2=F^2+(2F)^2+2F(2F)\cos60°=7F^2$，$R'=\sqrt{7}F$。

在$\triangle OCC'$中，由余弦定理$\overline{CC}'^2=\overline{OC}'^2-2\overline{OC}\cdot\overline{OC}'\cos\theta$，

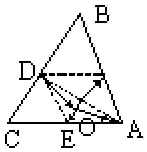
即$F^2=3F^2+7F^2-2\sqrt{3}F\cdot\sqrt{7}F\cos\theta=10F^2-2\sqrt{21}F^2\cos\theta$。

解得 $\cos\theta=\dfrac{9}{2\sqrt{21}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$，

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{1-(\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}})^2}}{\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}}=\frac{1}{3\sqrt{3}},$$

$$\theta=\mathrm{arctg}\frac{1}{3\sqrt{3}}。$$

264．三角形 ABC 三边中点分别为 D、E、F。在三角形中取任一点 O。如果以 OE、OF、DO 三个矢量代表力，求证三力的合力必为 OA 矢量。



［证明］　按题意作矢量 OE、OF、DO 及 OA。连接 DA、DE、DF。则矢量 OE 可分解为 OA 和 AE 两个分量。

OF 可分解为 OA 和 AF 两个分量，

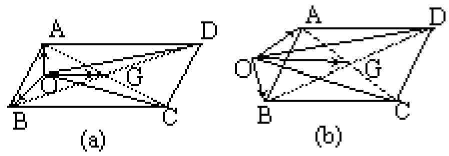
DO 可分解为 DA 和 AO 两个分量，

OE+OF+DO=OA+AE+OA+AF+DA+AO=OA+AF+AE+DA。

由于 DF∥CA，DE∥AB，所以 DEAF 为平行四边形，AE 和 AF 的合力为此平行四边形的对角线 AD。也就是一 DA。代入上式便得

OE+OF+DO=OA+AD+DA=OA。

265．平行四边形 ABCD，两对角线交点为 G，在四边形所在平面上任取一点 O[图(a)]，矢量 OA、OB、OC、OD 所代表的四个共点力的合力必等于 4OG。



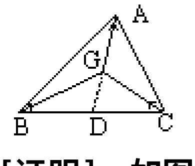
［分析］　在平行四边形所在平面上任取的一点 O，O 可以在平行四边形内，也可以在平行四边形外[图(b)]。作图画出 OA、OB、OC、OD 和 OG 五个矢量，再利用矢量的合成分解，找出它们间的关系。

［证明］　由于平行四边形对角线交点互相平分，即 GA=GC，GB=GD。将矢量 OA 分解成 OG 和 GA 两个分量，将 OC 分解成 OG 和 GC 两个分量。因 GA 和 GC 大小相等、方向相反，所以 OA 和 OC 的合力应等于 2OG。

同理可证 OB 和 OD 的合力也等于 2OG，

所以 OA+OB+OC+OD=4OG。

266．设 G 为△ABC 的重心，试证明以矢量 GA、GB、GC 所代表的三个力互相平衡。



［证明］　如图，设 G 为△ABC 的重心，因重心为中线的交点，所以

$DB = DC$，$GD = \frac{1}{3}AD$，$GA = 2GD$。

现将力 GC 分解成 GD 和 DC 两个分力。

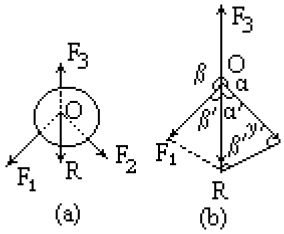
将力 GB 分解成 GD 和 DB 两个分力。

由于 DC 和 DB 两个力大小相等、方向相反，所以 GB+GC=2GD=－GA，

GB+GC+GA=－GA+GA=0，即三力互相平衡。

267．试证明物体在三个不平行的共面力作用下保持平衡状态的条件是(1)这三个力必须是共点力。(2)三个平衡力，其中 F_1、F_2 的夹角为 γ，F_2、F_3 的夹解为 α，F_2、F_1 的夹角为 β，则

$$\frac{F_1}{\sin\alpha}=\frac{F_2}{\sin\beta}=\frac{F_3}{\sin\gamma}。$$

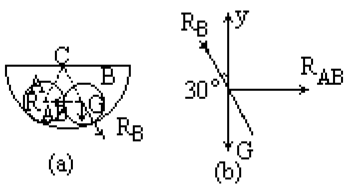


［证明］ (1)力的作用点可以沿作用线移动而不改变效果。现将 F_1、F 作用线延长，交于一点 O[图(a)]。则 F_1、F_2 可看作共同作用于 O 点的力，其合力为 R。由于三力平衡，则合力 R 必须和 F_3 大小相等、方向相反，作用线在一直线上，F_3 的作用线必定通过 O 点。所以 F_1、F_2、F_3 作用线交于 O 点即共点力。(2)由于三力共点设α、β、γ的补角分别为α′、β′、γ′[图(b)]，则在△ORF$_2$ 中由正弦定理得

$\frac{F_1}{\sin\alpha'}=\frac{F_2}{\sin\beta'}=\frac{F_3}{\sin\gamma'}$，即

$$\frac{F_1}{\sin\alpha}=\frac{F_2}{\sin\beta}=\frac{F_3}{\sin\gamma}。$$（拉密定理）

268．两半径为 r 的光滑球，放置在半径为 3r 的光滑半球形杯内。试证明：球和杯之间的作用力 R_B 等于两球间作用力 R_{AB} 的两倍。



［证明］ 设半球形杯的球心为 C，A、B 分别为半径为 r 的两球之球心。由于两球相切，切点在球心 AB 连接线上，AB=2r，球和杯相切，切点必在 AC 或 BC 联心线上，

AC=BC=3r－r=2r=AB，

△ABC 必为等边三角形。

B 球受力：重力 G，杯的弹力 R_B，A 球的作用力 R_{AB}。

$\sum F_y=0$，$R_B\cos30°-G=0$，$R_B=\frac{G}{\cos30°}=\frac{2G}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}G$。

$\sum F_x=0$，$R_{AB}-R_B\sin30°=0$，$R_{AB}=R_B\sin30°=\frac{2G}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{G}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}G$。

由此可得 $R_B:R_{AB}=\frac{2G}{\sqrt{3}}:\frac{G}{\sqrt{3}}=2$。

实验题

269．有一块固定在地上的铁板，一根木棍和一把直尺，怎样利用上述器材来测定木棍和铁板间的摩擦系数。

［参考解答］　先让木棍直立在铁板上，然后压住它的顶端逐渐倾斜（如图）当倾角？为某一值时，木棍开始沿铁板滑动，在即将产生滑动的情况下，量出 a、b 的尺寸。

由于作用在木棍顶端沿着木棍的长度方向的力 F，它的水平分量 Fcos？略大于或等于静摩擦力的最大值时木棍开始滑动。而静摩擦力的最大值

$F_{静}$=k(mg+Fsin？)、式中 m 为木棍质量、k 为所求的摩擦系数。

$$F\cos？=F_{静}=k(mg+F\sin？),$$

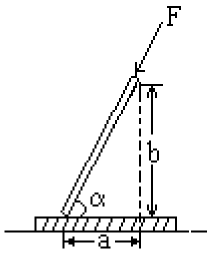
所以

$$k=\frac{F\cos\alpha}{mg+F\sin\alpha}。$$

如果所加力 F 较大，而木棍质量较小，即 mg<<F 时，mg 可略去。

那么
$$k=\frac{F\cos\alpha}{F\sin\alpha}=\mathrm{ctg}\alpha=\frac{a}{b}。$$

因此利用直尺量出 a、b 便可求出摩擦系数 k。

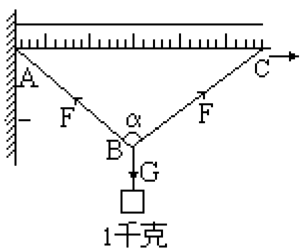


270．用一个质量为 1 千克的砝码和一把米尺，能否设法测定尼龙钓丝的极限负荷？

［参考解答］　把钓丝一端固定，砝码挂在钓丝中点，使钓丝端点 A、C 在同一水平面上，沿箭头的方向移动 C 端逐渐增大 AC 的距离，量出钓丝断裂时的 AC 的长度，由于力 F 和 G 之间有关系

$$G=2F\cos\frac{\alpha}{2},$$

所以
$$F=\frac{G}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{mg}{2\sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{mg}{2\sqrt{1-\left(\frac{AC/2}{AB}\right)^2}}。$$



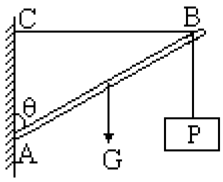
力矩　力矩平衡

填充题

271．三角支架 BC 部分是水平放置的绳子，AB 是重力为 G 的均匀直杆，杆和墙夹角为θ，重物为 P，则平衡时，绳的张力为

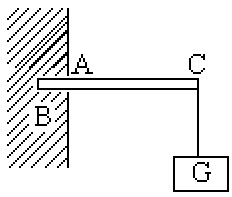
$T = \mathrm{tg}\theta\left(P+\frac{G}{2}\right)$，A点对杆的作用力大小为

$$F_A = \sqrt{(P+G)^2 + \mathrm{tg}^2\theta\left(P+\frac{G}{2}\right)^2}$$。

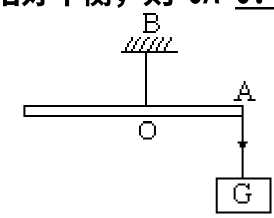


272．把一根粗细均匀的米尺放在水平的桌面上，将其一端伸出桌外 1/4 米。在伸出的一端挂一个 3 牛的物体，米尺仅对桌边有压力，则米尺的重力是 3 牛。如果把此米尺一端伸出桌外 1/8 米，则在伸出端最多可以挂 9 牛的重物，尺还不会掉下。

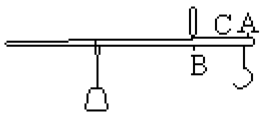
273．如图所示，一根均匀木棒重 25 牛，将棒的一端水平插入墙内，在另一端挂一个 75 牛的物体，如 CA=1.5 米，AB=0.5 米，那么 A 点所受的压力为 350 牛。B 点所受的压力为 250 牛。（设墙对木棒的作用力集中在 A、B 两点。）



274．一根粗细均匀的重 10 牛、长 1.2 米的木棒，A 端挂一个 5 牛的重物 G，O 点用绳子吊起，恰好平衡，则 OA=0.4 米，绳子 OB 的拉力=15 牛。

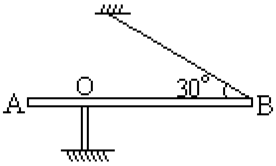


275.图中的秤杆全长为 60 厘米,秤锤重 10 牛。当秤纽安在 B 点,AB=10 厘米时，此秤能称的最大重力为 50 牛。当秤纽安在 C 点，AC=5 厘米时，此秤能称的最大重力为 11.5 牛，则此秤杆（包括秤纽和秤钩）的重力为 5 牛，重心离 A 端 10 厘米。

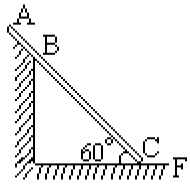


276．一根粗细不均匀的木材全长 4 米，当支点在距离粗端 1.4 米时，木材刚好水平平衡。如果在细端挂上 80 牛的重物，支点就必须向细端移动 0.40 米，才能使木材恢复水平平衡。这根木材的重力是 440 牛。

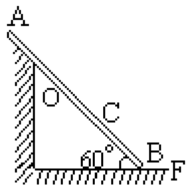
277．一块均匀木板 AB，长为 12 厘米，重 200 牛，距 A 端 3 米处有一固定转动轴 O，另一端 B 以绳悬住，使板呈水平状态，绳和木板的夹角为 30°如图所示。如果绳能承受的最大拉力为 200 牛。如果使一个重 600 牛的人在该板上安全行走，则人距 A 点的活动范围为 2 米~3.5 米。



278．将一架长梯搁在矮墙上，梯和地面成 60°角。梯和墙壁、地面都是光滑的，梯子质量均匀，重为G。若$AB=\frac{1}{3}BC$，则为了不让梯子滑倒，在C点处必须加一水平力F为$\underline{\frac{\sqrt{3}}{6}G}$。这时墙壁对梯子B点的作用力为$\underline{\frac{1}{3}G}$。



279．如图所示，一架梯子重 150 牛，长 4 米，靠在光滑的墙壁上，倾角为 60°。梯子重心 C 离梯子下端 1.4 米，在梯子中央 O 点用水平力F拉它，要使梯子以下端为支点上端离开墙壁，则F至少应$\underline{35\sqrt{3}}$牛。



选择题

280．如图所示，小球在光滑的墙和装有铰链的薄板 OA 之间，当墙和薄板之间的夹角？增大时

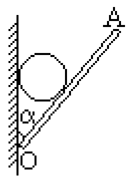
(a)小球施于木板的正压力增大；

(b)墙施于小球的弹力减小；

(c)小球施于木板的正压力对转轴 O 的力矩增大；

(d)木板施于小球的弹力不可能小于小球的重力。

答(b)、(d)



281．一架梯子靠在光滑的墙壁上（如图）。如果增大梯子和地面的夹角？时，下面哪几句话是正确的？

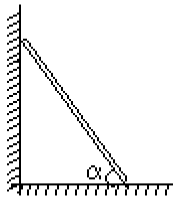
(a)梯子对墙的压力减小；

(b)梯子受到地面的摩擦力增加；

(c)梯子对地面的正压力增加；

(d)梯子与地面间的最大静摩擦力不变。

答(a)、(d)



282．下列物理量的量纲中，哪个是力矩的量纲？

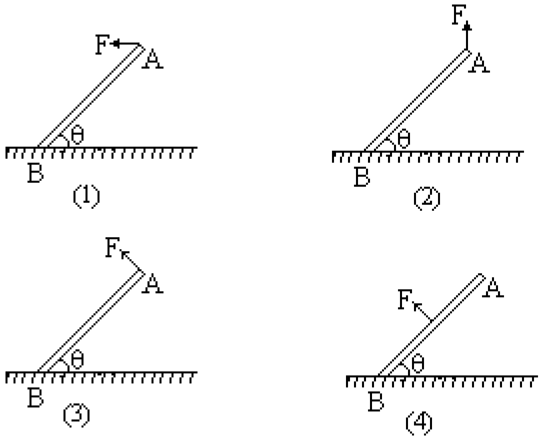
(a)$ML^{-2}T^{-1}$；　　(b)$ML^{-1}T^{-2}$；

(c)MLT^{-1}；　　(d)$ML^{2}T^{-2}$；

(e)$ML^{2}T^{0}$。

答(d)

283．长为 l 的木直 AB，和地面成θ角。用力 F 作用在它上面使处于平衡状态。在下列哪种情况中 F 最小。



(a)如图(1)；　　(b)如图(2)

(c)如图(3)；　　(d)如图(4)

答(c)

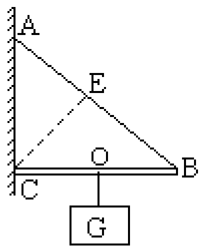
284．轻横梁 BC 的 C 端固定在墙上，B 点用绳子拉紧，在 BC 中点 O 挂重物 G。则如以 C 点为轴，绳子拉力 T 的力臂是

(a)OB；　　(b)BC；

(c)AC；　　(d)CE；

(e)AB。

答(d)



285．两个小孩在跷跷板上处于平衡时

(a)他们的重心等高；　　(b)他们的重力相等；

(c)他们距支点的距离相等；　　(d)他们的力矩大小相等；

(e)他们的质量相等。

答(d)．

286．如图是“研究有固定转动轴物体的平衡条件”实验的示意图。M

是转盘，O 为固定转轴。图中转盘已平衡，弹簧秤显示一定读数。如果将 A 点悬挂在钩码拿掉，那末

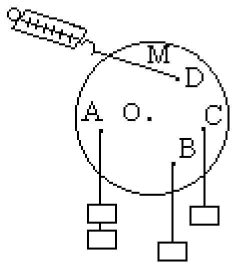
(a)转盘失去平衡，沿顺时针方向转动，弹簧秤读数不变；

(b)转盘沿顺时针方向转动一些，然后重新平衡，弹簧秤读数变大；

(c)转盘失去平衡，沿逆时针方向转动；

(d)无法断定。

答(b)

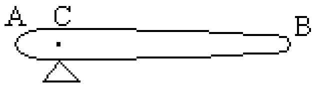


287．粗细不均匀的木棒在 C 点支起来刚好水平如图所示。如果在两端 A、B 处各挂一个重力相等的物体，则木棒将

(a)A 端下垂　　(b)B 端下垂

(c)仍保持水平　　(d)无法断定

答(b)

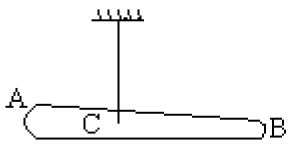


288．一根由粗到细均匀变化的匀质木材，于 C 处悬挂时恰好平衡。今将木材在 C 处沿挂线锯断，比较 A 和 B 两段所受重力

(a)两段重力相等　　(b)A 段重些

(c)B 段重些　　(d)无法确定

答(b)

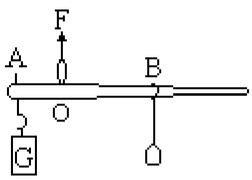


289．用杆秤称物。物重 20 牛，平衡时 OA∶OB=1∶2。如果杆秤本身重力不计，则手作用在秤纽上的力 F 是

(a)80 牛　　(b)60 牛

(c)40 牛　　(d)30 牛

答(d)



290．一架可以调好的物理天平，在称量物体前调整时发现右边老是往上翘，其原因可能是

(a)由于左右对调秤盘，以致秤盘悬架的号码，和天平横梁两端的号码不一致；

(b)横梁上的游码未拨到零点；

(c)秤盘悬架未置于横梁的刀口上；

(d)指针上的重物固定得太高

答(a)、(c)

291．为什么在用天平测定物体质量时，一定要对这物体的质量先作大概的估计。其理由是

(a)预防天平受损害；

(b)检验天平的可靠性；

(c)在用天平测定质量时节省时间；

(d)可得到两个质量值的平均数。

答(a)、(c)

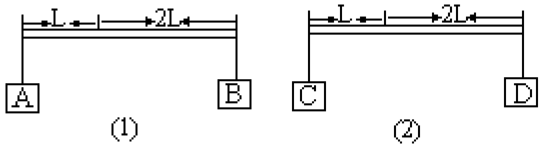
292．用一架不等臂的天平称一个物体，当物体放在天平左盘时，称得其质量为 G_1。当物体放在右盘时称得其质量为 G_2。则该物体的真实质量为

(a)$\frac{G_1+G_2}{2}$；　　(b)$\sqrt{G_1G_2}$；

(c)$\frac{G_1G_2}{G_1+G_2}$；　　(d)$\sqrt{G_1+G_2}$。

答(b)

293．图中的 A 和 B 是同种材料的两物体，C 和 D 是体积相等的两物体。保持 O 的位置不变，把 A、B、C 和 D 都浸没水中，则仍能保持平衡的是

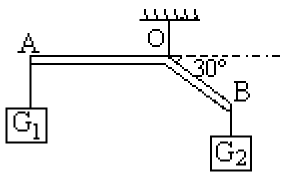


(a)如图(1)；　　(b)如图(2)

(c)如图(1)和如图(2)；　　(d)都不是。

答(?)

294．图中的曲杆 AOB 保持静止，$G_2=2G_1$（曲杆重力不计），则 OB 长度为



(a)$\sqrt{3}$OA；　　(b)$\frac{\sqrt{3}}{3}$OA；

(c)OA；　　(d)$\frac{OA}{2}$。

答(b)

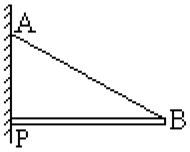
295．物体在一组力的作用下，保持静止状态，必须满足的条件是

(a)$\sum F=0$；　　(b)$\sum M=0$；

(c)$\sum F=0$，$\sum M=0$；　　(d)以上都可以。

答(c)

296．一根粗细均匀、重 G 的横梁通过绳子和铰链固定在墙上。则横梁对铰链 P 的作用力的竖直分量必为

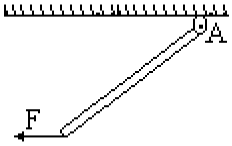


(a)竖直向上不为零；　　　　(b)竖直向下不为零；

(c)竖直分量为零；　　　　　(d)竖直向下且等于重力 G。

答(?)

297．如下图所示，将木棒用方向不变的水平力 F 缓慢拉起，A 为转动轴。则在拉起过程中



(a)力变小，力矩变大；　　　(b)力变大，力矩变小；

(c)力变小，力矩不变；　　　(d)力变大，力矩变大。

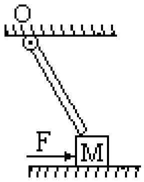
答(d)

298．均匀木棒质量为 m，可绕 O 点转动。另一端搁在质量为 M、放在光滑水平桌面上的物体上，如图所示。如果 M 在一个水平推力 F 作用下仍保持静止，则 m 和 M 间的弹力变化是

(a)增加；　　　　　　(b)不变；

(c)减小；　　　　　　(d)无法确定。

答(c)

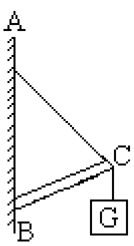


299．如图△ABC 为等边三角形。AC 为细绳，均匀杆 BC 的质量为重物 G 的质量的 1/2，当平衡时，AC 上的张力为

(a)$\frac{5}{4}$G；　　　　(b)$\frac{3}{2}$G；

(c)$\frac{\sqrt{3}}{2}$G；　　　　(d)G。

答(a)

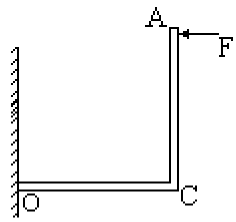


300．有一把重为 G 的均匀等边直角尺 ACO，O 端用不计摩擦的铰链和墙连接，如图所示，要使直角尺平衡，应在 A 点加一个水平力 F，则 F 的大小应为

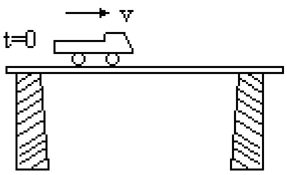
(a) $\frac{1}{4}$G；　　(b) $\frac{1}{2}$G；

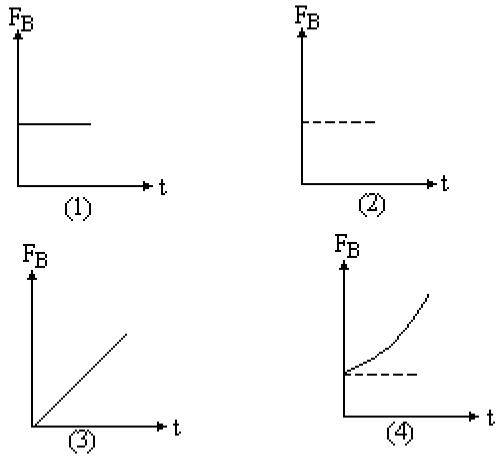
(c) $\frac{3}{4}$G；　　(d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$G。

答(c)



301．一辆质量为 m 的卡车，以恒定的速度 v 通过重力为 G、长为 l 的平板长桥，如图所示。设汽车开上 A 端桥墩为初始时刻(t=0)。下面哪一个图正确地表示了 B 端桥墩所受压力 F_B 和时间 t 的函数关系？





(a)如图(1)；　　(b)如图(2)；

(c)如图(3)；　　(d)如图(4)。

答(b)

302．长为 L 的三块相同的木板按图示方式堆积起来。依次使木板 A 和 B 沿水平方向向左移动，直到它们到达将倾未倾的位置为止。在到达这种位置时，关于它们重心的位置，试判断下列叙述哪些是正确的。

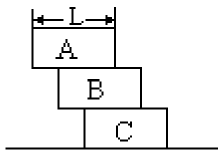
(a)木块 A 的重心在木块 B 边缘正上方；

(b)木块 B 的重心在木块 C 左边缘的右面；

(c)木块B的重心在离C左边缘 $\frac{1}{4}$L距离处；

(d)木块 A 和 B 的共同重心在 C 边缘的正上方。

答(a)、(b)、(c)、(d)



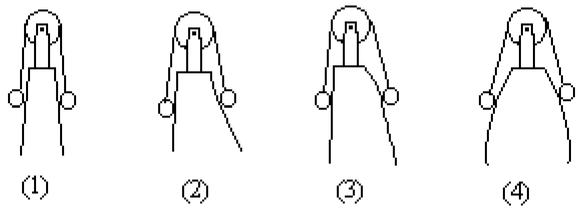
303．为了改进比赛车辆的稳度，在设计时可以设法

(a)降低重心；　　(b)加宽车身；

(c)有流线型的车身；　　(d)加高车身。

答(a)、(b)

304．图中的八个完全相同的小球，由四条轻绳结成四组连接体，轻绳都跨过定滑轮。它们都处于平衡状态。不计摩擦，试问哪个连接体处于稳定平衡状态？



(a)如图(1)；　　(b)如图(2)；

(c)如图(3)；　　(d)如图(4)。

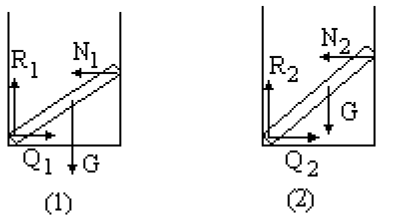
答(b)

305．有两根重力相同、长短不同的玻璃棒，搁在光滑的杯中，杯底的直径相同，如图所示。每根棒的上、下端都受到三个力的作用，下列哪些关系是正确的？

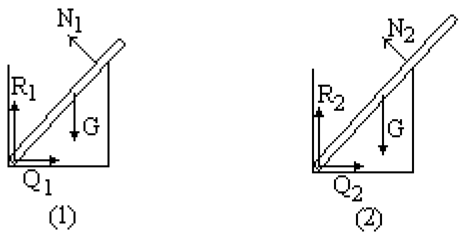
(a)$N_1>N_2$；　　(b)$Q_1<Q_2$；

(c)$R_1=R_2$；　　(d)$R_1>R_1$。

答(？)、(c)



306．有两根重力相同、长短不同的玻璃棒，搁在光滑的玻璃杯上，杯底直径相同，如图所示。每根棒的上、下端都受到三个力的作用，下列哪些关系是正确的？



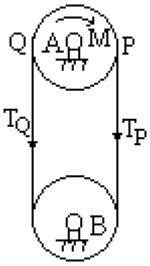
(a)$N_1>N_2$；　　(b)$Q_1<Q_2$；

(c)$R_1=R_2$；　　(d)$R_1>R_2$。

答(b)、(d)

计算题

307．图中皮带轮传动装置的主动轮 A 的动力矩为 M（顺时针方向），半径为 R，带动皮带和被动轮 B 及负载匀速转动。在皮带不打滑的情况下，计算皮带和主动轮切点 P、Q 处，皮带中张力 T_P 和 T_Q 的差值。



［解答］　由于主动轮顺时针转动，则 $T_Q > T_P$。根据有固定轴的物体平衡条件得

$$\Sigma M = T_Q \cdot R - T_P \cdot R - M = 0,$$

解得 $$T_Q - T_P = \frac{M}{R}。$$

308．一个重力可以忽略、长为 L 的杆。杆的下端和半径为 R、重力为 G_2 的球相连于 C 点，上端可绕 O 点转动。在 O 点吊一根绳子，绳的下端悬一个重力为 G_1 的物体。问整个系统达到平衡状态时，杆和竖直间夹角多大？

［分析］　将 G_1、G_2 看做一个整体，系统平衡时其重心必定在通过悬点 O 的竖直线上，以 O 点为转动轴取力矩即可解得。

［解答］　$\Sigma M_0 = G_1 \cdot AO' - G_2 \cdot BO' = 0$，

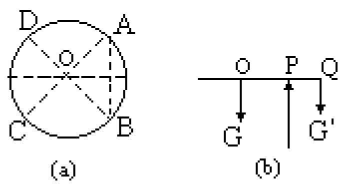
$BO' = OB \cdot \sin?$，$AO' = R - BO'$，

而 $OB = L + R$。

代入上式　$G_1 R - (G_1 + G_2)(L + R)\sin? = 0$，

解得 $$\alpha = \arcsin\frac{G_1 \cdot R}{(L+R)(G_1+G_2)}。$$

309．圆桌重 G，以四足支起，问在桌边放置重物 G′多重才能保证圆桌不翻倒，则



(a)　(b)

$$OP = \frac{D}{2}\cos 45°,$$

$$PQ = \frac{D}{2} - \frac{D}{2}\cos 45° = \frac{D}{2}(1 - \cos 45°),$$

于 P 点求力矩，$\Sigma M_P = 0$，

$$G \times \frac{D}{2}\cos 45° - G' \times \frac{D}{2}(1 - \cos 45°) = 0,$$

解得 $$G' \frac{\cos 45°}{1 - \cos 45°} G = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = 2.414G。$$

310．蒸气锅炉的安全阀门 D 的面积为 S=25 厘米²，用杆 AC 和一根长 l=60 厘米，重 P=10 牛的粗细均匀的杠杆 AD 相联，杠杆可绕支点 O 转动，

如图(a)所示。已知 OA=5 厘米，在杠杆上某处 B 点挂一个重 W=225 牛的物体，要使气门 C 在锅炉内蒸气超过 1.013×10^5 帕的压强时能自行开启，则 OB 距离应多大？

[解答] 当压强 $p=1.013\times10^5$ 帕时，杆 AC 对杠杆的作用力

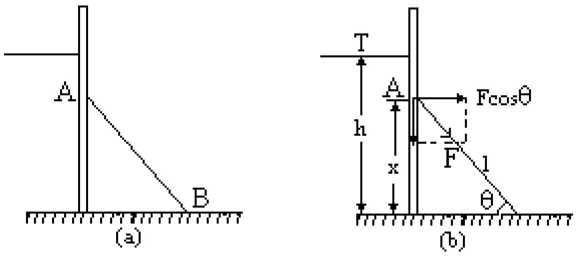
$F_A=p\cdot S=10\times1.013\times10^5\times25\times10^{-4}$ 牛=2532.5 牛。

由固定转动轴平衡条件[图(b)]得

$$\sum M_0 = F_A\cdot OA - P\cdot\frac{l}{2} - W\cdot x = 0,$$

$$x=\frac{F_A\cdot OA-P\cdot\frac{1}{2}}{W}=\frac{253205\times5-10\times30}{225}\text{厘米}=54.9\text{厘米。}$$

311．如图(a)所示用一根长 l=4 米的绳子拉住一根 4 米高的铅直电线杆，绳子一端系在电线杆的 A 点，另一端系于地面木桩 B，电线杆上拉有水平的电线。问 A 点多高时，绳子所受拉力最小。



[解答] 设绳子与地面间夹角为θ,电线杆受电线拉力 T 和绳子拉力 F 以及地面的作用力[图(b)]。取和地面接触处为传动轴，则地面的作用力对转轴的力矩为零，设 A 点离地高为 x，则由力矩平衡可得

$$T\cdot h-F\cos\theta\cdot x=0,$$

由于 $x=l\sin\theta$，代入可得

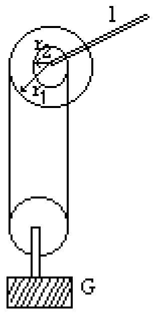
$$F\cdot\cos\theta\cdot l\sin\theta=F\cdot\frac{l}{2}\sin2\theta=T\cdot h,$$

$T\cdot h$ 是一个定值，l 也一定，所以要使 F 最小，$\sin2\theta$ 为最大，即 $\theta=45°$。

则

$$x=l\sin\theta=4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\text{米}=2.83\text{米。}$$

312．要在差动滑轮把手的末端加多大的力，才能支持住重物 G？设把手长 l=1 米，大轮半径 r_1=20 厘米，小轮半径 r_2=10 厘米。



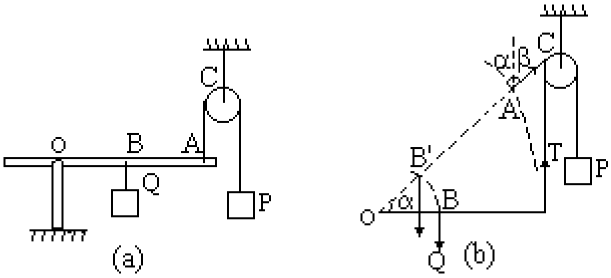
［解答］ 设重力为 G_1，使差动滑轮处在平衡状态所需的力为 F（F 跟 l 垂直）。力矩平衡时：

$$\frac{G}{2}\cdot r_2+Fl=\frac{G}{2}\cdot r_1$$

由此解得

$$F=\frac{G(r_1-r_2)}{2l}=\frac{G}{20}。$$

313．一根很轻的棒，一端固定在 O 点，可以在竖直面内转动，如图(a)所示。在棒的另一端 A 点系一根绳子，绳子跨过一个定滑轮，在绳子的另一端挂一个重物 P，在棒的 B 点挂一个重物 Q。棒的长度是 l，OB=l/3。当棒处在水平位置而绳子 AC 处在竖直位置时，这个系统呈平衡状态。假定 P=30 牛，l=30 厘米，求重物 Q 的值。假定 A 端稍许向上或向下移动而离开了平衡位置，那么，这时棒将怎样运动？棒、滑轮和绳子的质量以及摩擦力都不计。



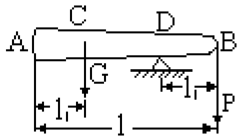
［解答］ 系统处在平衡状态时，力 T(T=P)和 Q 对 O 点的力矩相等。即$M_1=Pl$，$M_2=Q\cdot\frac{l}{3}$，且$M_1=M_2$。可得$Q=3P$。假如棒稍稍向上转动一些，跟平衡位置有一个很小交角?［图(b)］，那么 Q 和 T 的力矩的改变不同。Q的力矩是$M_2'=Q\cdot\frac{l}{3}\cos\alpha$，$M_2'<M_2$。力矩$M_2$的变化由棒的方向改变决定。

当棒转过? 角，力 T 的方向改变了β角，所以转动后，力 T 的力矩变为 $M_1'=Pl\cos(?+\beta)$。所以力矩 M_1 的改变除同时受到了棒的转动和绳子的转动的影响。M_1 总比 M_2 减小得快，力矩的和 $M_2'M_1'\neq0$，使棒沿顺时针方向转动，即使棒转回到稳定平衡的水平位置。

同样可以证明：当棒稍微向下转动时，从力矩 M_1 和 M_2 的变化不等可知棒也要回到平衡位置。

314．一长度为 l 的粗细不均匀的木棒，在距 A 端 l_l 处把它支起时恰

能平衡，如果距 B 端 l_1 处把它支起，则需在这一端加一重物 P 才能平衡。求此木棒有多重。



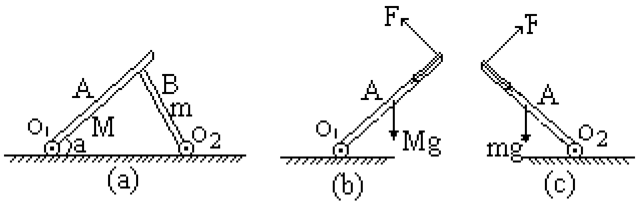
［解答］　距木棒 A 端 l_1 处能平衡，说明木棒的重心在此点 C，即 $AC=l_1$。设木棒重 G，木棒支在 D 点，以 D 点为转轴，由力矩平衡条件得

$G\cdot CD=P\cdot BD$，即 $G(l-2l_1)=Pl_1$，

由此得木棒重

$$G=\frac{Pl_1}{l-2l_1}。$$

315．两根细的均匀短棒 A 和 B 可以绕下端固定的轴 O_1 和 O_2 无摩擦地转动。A 棒放在 B 棒的上面，棒的顶端呈圆弧形。如果两棒互成直角，A 棒质量为 M 和水平面成? 角，B 棒质量为 m[图(a)]。如果组成系统平衡，问两棒间的摩擦系数至少应该多少？



［解答］　分析棒 A 受力情况，取 O_1 点为传动轴，得

$$\sum M_1=F\cdot l_A-Mg\cdot\frac{l_A}{2}\cos\alpha=0\qquad(1)$$

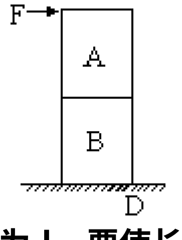
分析棒 B 受力情况，顶端受到棒 A 的摩擦力 f′和弹力 F′。取 O_2 点为转动轴，得

$$\sum M_2=mg\frac{l_B}{2}\cos(90°-\alpha)-\mu Fl_B=0\qquad(2)$$

由(1)式解得 F，代入(2)式，解得

$$\mu=\frac{mg}{2F}\cos(90°-\alpha)=\frac{m}{M}\text{tg}\alpha。$$

316．一个重 G 的立方体 A，叠在一个重为 3G 体积相同的立方体 B 上，形成一个长方体。B 放在粗糙桌面上。用一个水平力 F 作用在 A 的上端。要使长方体无滑动地翻倒，问力 F 的最小值为多少？两立方体之间、立方体和地面间的静摩擦系数最小各为多少？如果 A 在下面 B 在上，答案又将如何？



［解答］　设立方体的边长为 l，要使长方体翻倒，以 D 为传动轴，由力矩平衡可得

$$(G+3G)\cdot\frac{l}{2}=F\cdot 2l,$$

F=G。

B 和桌面间的摩擦力 $f_2=F$，

所以 B 和桌面间的摩擦系数

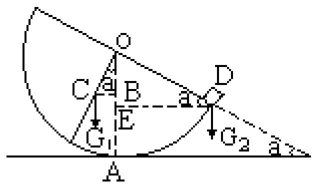
$$\mu_2=\frac{f_2}{N}=\frac{F}{4G}=\frac{1}{4}。$$

A 和 B 间摩擦系数

$$\mu_1=\frac{f_1}{N_1}=\frac{F}{G}=1。$$

如果 A 在下面 B 在上，则从力矩平衡式可知 F=G，B 和桌面摩擦系数$\mu_2=\frac{1}{4}$不变，A、B间摩擦系数$\mu_1{}'=\frac{F}{3G}=\frac{1}{3}$。

317．如图所示有一个质量等于 m_1，半径为 r 的均匀半球，它的球形面位于水平面上。如果在半球的边缘处放一块质量为 m_2 的小物，整个系统处于平衡状态求半球的平面和水平的倾角？为多少？已知半球的重心和圆心的距离为$\frac{3}{8}r$。



［解答］　半球受到作用力为 G1 和 G_2，还有 A 点的支持力。由于整个系统平衡，对于 A 点的力矩代数和为零，

$$G_1BC=G_2ED,$$

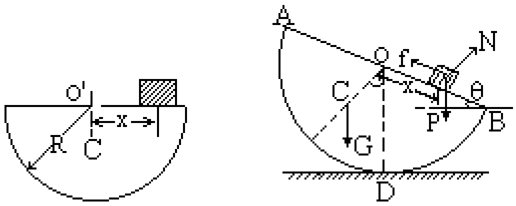
即

$$m_1g\cdot\frac{3}{8}r\sin\alpha=m_2g\cdot r\cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{8m_2}{3m_1},\ \alpha=\mathrm{tg}^{-1}\frac{8m_2}{3m_1}。$$

318．如图(？)所示，一个半径为 R、重为 G 的匀质半球体，球面放在桌面上。在半球的平面上放一个小体积的物体P，$P=\frac{G}{8}$，它和半球平面之间的静摩擦系数μ=0.2。要保证半球体倾斜后小物块不下滑，则小物块的位置离开半球中心的最大距离为多少？

（半球的重心位置在O点下$CO=\frac{3}{8}R$处）



(a)　　　　　　(b)

［解答］　设小物块离半球中心的最大距离为 x，半球体倾斜后使平面 AB 和水平是角度为θ。分析小物块受力不滑下的条件可知：f>μN，即 Psinθ<μPcosθ，

$$\mathrm{tg}\theta<\mu \qquad (1)$$

再由半球体平衡，取对于 D 点的力矩得

$$G\cdot\frac{3}{8}R\cdot\sin\theta=P\cdot x\cdot\cos\theta \qquad (2)$$

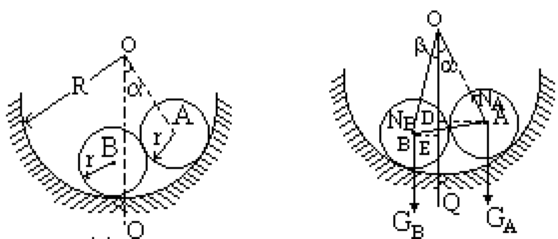
解(1)、(2)式可得

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{Px}{G\cdot\frac{3}{8}R}<\mu,$$

所以

$$x<\frac{\mu\cdot G\cdot\frac{3}{8}R}{P}=0.6R，即x最大值为0.6R。$$

319．有一个水平放置的半径为 R 的圆柱形光滑槽面，上面放着两个半径为 r 的光滑圆柱体 A 和 B，其横截面如图(a)所示。O 为圆柱槽面轴线和截面的交点。A、B重分别为G_A和G_B，且$r=\frac{R}{3}$，求两个小圆柱体平衡时，OA 线和竖直线 OQ 的夹角？是多少？



(a)　　　　　　(b)

［解答］　取圆集体 A 和 B 一起作为研究对象，它们共受力：重力（G_A 和 G_B）；圆柱槽面支持力 N_A 和 N_B，因为圆柱面光滑，所以 N_A 和 N_B 通过圆柱轴线上 O 点。对 O 点取力矩。

$$\Sigma M_O=G_B\cdot BE-G_A\cdot AD=G_B\cdot BO\cdot \sin?=0。$$

由于

$$AO=BO=R-r=\frac{2}{3}R,\ AB=2r=\frac{2R}{3},$$

所以△ABO 为等边三角形，？+β=60°。

代入上式得

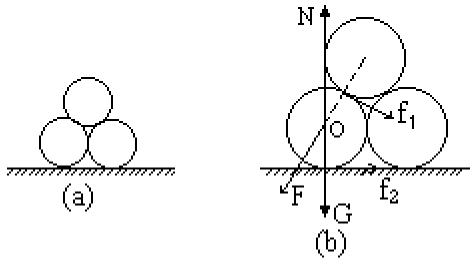
$$G_B\cdot(\sin60°\cos?-\cos60°\sin?)-G_A\cdot\sin?=0。$$

解得

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{G_B\sin 60°}{G_A+G_B\cos 60°}=\frac{\sqrt{3}G_B}{2G_A+G_B},$$

$$\alpha=\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}G_B}{2G_A+G_B}。$$

320．三个直径和重力都相同的圆木柱垛在一起，如图(a)所示。问圆木之间摩擦系数μ最小为何值时，它们才不会滚散？



(a) (b)

［解答］ 左下方的一个圆木受到五个作用力[图(b)]：重力 G，上面的圆木对它的压力 F 和摩擦力 f_1，地面对它的弹力 N 和摩擦力 f_2。下面两个圆木没有压力的作用，所以只是接触着，没有摩擦力的作用。

要使圆木柱保持平衡必须满足条件：

对于 O 点的力矩为零，即

$$\Sigma M_0=f_2\cdot r-f_1\cdot r=0 \qquad (1)$$

水平方向各力投影的和为零，即

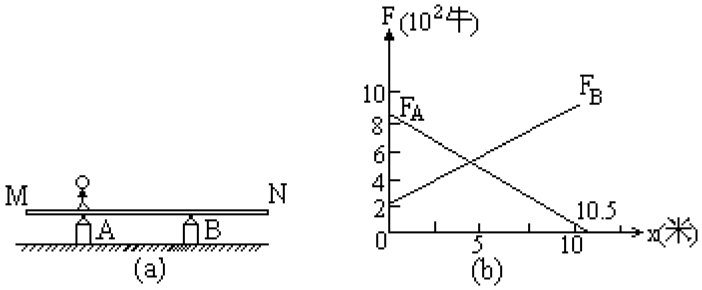
$$\Sigma F_x=f_2+f_2\cos 30°-F\cos 60°=0 \qquad (2)$$

$$f_1=\mu F \qquad (3)$$

解(1)、(2)、(3)式得

$$\mu=\frac{\cos 60°}{1+\cos 30°}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}=0.268。$$

321．一块均匀木板 MN 长 l=15 米，重 400 牛，搁在相距 d=8 米的两个支架 A、B 上，MA=NB。重 G_1=640 牛的人从 A 点向 B 点方向走去[图(a)]。设 A、B 两支点对木板的支持力为 F_A 和 F_B，(1)作一图线表示 F_A、FB 和人位置的函数关系图，(2)人走过 B 点多远，木板会翘起来？(3)为了不致使板翘起来，人要正好到达板的右端，支架 B 应放在离板的右端多远处？



(a) (b)

［解答］ (1)分析均匀木板受力情况，当人站在 A 点时，木板受重力 G，人对木板压力 P=G_1、和两支架对木板的支持力 F_A 和 F_B 的作用。在人走向 B 时，F_A 逐渐减小，F_B 逐渐增加。设 A 点为坐标原点，人离 A 距离为 x 米，则以 B 为传动轴时，

$$\Sigma M_B = G \cdot \frac{d}{2} + G_1(d-x) - F_A d = 0,$$

$$F_A = \left(\frac{G}{2} + G_1\right) - \frac{x}{d} G_1 = (840 - 80x)\text{牛} \qquad (1)$$

同理，以 A 为传动轴。

$$\Sigma M_A = F_B \cdot d - G \cdot \frac{d}{2} - G_1 \cdot x = 0,$$

得

$$F_B = \frac{G}{2} + \frac{x}{d} G_1 = (200 + 80x)\text{牛} \qquad (2)$$

取 F_A、F_B 为纵坐标，x 为横坐标作图线，如图(b)所示。

(2)当人走到 B 点处时，A 支架对木板的支持力 F_A 继续减小。当 F_A 减小为零时，这时木板和 A 支架间虽有接触，但已无相互作用力，此时如果人再向前移动，木板就要翘起来。由(1)式 $F_A=0$ 解得

x=10.5 米，即离 A 点 10.5 米或离 B 点为 2.5 米。

(3)要使人越出 B 点木板仍不翘起，则必须把 B 支架往右移，设支架 B 移到离右端 y 米处人正好到达右端，A 支架和木板虽有接触而无作用，则以 B 的转动轴得

$$\Sigma M_{B'} = G \cdot \left(\frac{l}{2} - y\right) - G_1 y = 0,$$

代入数据解得

$$y = \frac{Gl}{2(G + G_1)} = \frac{400 \times 15}{2 \cdot (400 + 640)}\text{米} \approx 2.88\text{米}。$$

322．图(a)中 A、B 为两个支座，A 固定不动，B 能自由滑动。现将一根粗细相同，质量均匀的梁水平地支承在 A 和 B 支座上，并使它的重心恰好处于 AB 的中点。如用一适当的水平力去推支座 B 使它慢慢移向 A。起初梁保持静止状态，当 B 接近 A 点到达某一距离位置时，梁将随 B 一起移动。设开始时 AB 间距离为 2l=90 厘米，A、B 支座和梁间的静摩擦系数 μ_8=0.3，动摩擦系数 μ=0.2。求梁开始称动时 A、B 间的距离。

［解答］ 设支点 A 对梁的作用力为 N_A，支点 B 对梁的作用力为 N_B，开始移动时支点 B 距梁重心的距离为 x，梁重为 G，支点 A 对梁的静摩擦力为 R[图(b)]。则

$$\Sigma F_x = R - \mu N_B = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma E_V = N_A + N_B - G = 0 \qquad (2)$$

以梁的重心为转轴，力矩平衡：

$$\Sigma M = N_B x - N_A l = 0 \qquad (3)$$

由(3)式得

$$N_B = \frac{l}{x} N_A,$$

代入(2)式

$$N_A\left(1+\frac{l}{x}\right)=G，\qquad N_A=\frac{x}{l+x}G，$$

$$N_B=\frac{l}{l+x}G。$$

将 N_B 值代入(1)式得

$$R=\frac{\mu l}{l+x}G，$$

支座 A 对梁相对静止不滑动，必须 $R<\mu_8 NA$，

也即

$$\frac{\mu l}{l+x}G<\frac{\mu_8 x}{l+x}G，$$

$$x>\frac{\mu}{\mu_8}l。$$

当$x=\frac{\mu}{\mu_8}l$时，即梁和支座A间静摩擦力达到最大值要开始发生移动。此时 AB 间距离

$$l+x=\left(\frac{\mu}{\mu_8}+1\right)l，$$

将数值代入得 $AB=\left(\frac{\mu}{\mu_8}+1\right)l=\left(\frac{0.2}{0.3}+1\right)45$厘米$=75$厘米。

323．如图所示的起重机，重 $G=6\times10^5$ 牛，重心在 C 点，起重的货物 $P=3\times10^5$ 牛。问为了保证起重机不论在吊重物或不吊重物时都不致翻倒并且稳度最大，配重 W 应是多少？

［解答］ 设未吊货物时，配重的最大值为 W_1，为了不致向左翻倒，以 A 为传动轴

$$\Sigma M_A=W_1\cdot 3-G\cdot(2+3)=0，$$

解得

$$W_1=\frac{5}{3}G=1\times10^6\text{牛。}$$

如果起吊货物时，配重的最小值为 W_2，为了不致向右翻倒，以 B 为传动轴

$$\Sigma M_B=W_2(3+3)-G\cdot 2-P\cdot 10=0$$

解得

$$W_2=\frac{2G+10P}{6}=7\times10^5\text{牛。}$$

平衡重物的重力应在 W_1 和 W_2 之间。设最恰当的重力为 W 牛。要使稳度最大，起重机货物和不起吊货物时，整个起重机的合力作用线最好通过底面的中央部分，设该部分范围离 A 和 B 的距离都为 x，即离底脚内侧 x 处（AA′=BB′=x）。

当起重机未吊货物时，合力作用线通过 A′，则

$$\Sigma M_{A'}=W\cdot(3+x)-G[2+(3-x)]=0 \qquad (1)$$

解得

$$G=\frac{42\times2-2\times3}{6}\times10^4\text{牛}=1.3\times10^5\text{牛}。$$

但这是能提起的极限重力，实际工作中考虑安全要小于 1.3×10^5 牛。

325．一根杠杆的每单位长重 b=30 牛/米，今以其一端 A 为支点，施力于另一端 B，以举一个重物 P=300 牛，此重物到支点 A 的距离 a=0.2 米。问杠杆长多少时，在 B 端所用的力 F 最小？

［解法一］　设杆长为 l，则杠杆重 G=bl，以 A 点为传轴。

$$\sum M_A=F\cdot l-P\cdot a-bl\cdot\frac{l}{2}=0,$$

$$F=\frac{Pa}{l}+\frac{bl}{2}。$$

设 $A=\frac{Pa}{l}$，$B=\frac{bl}{2}$，则 $A\cdot B=\frac{Pa}{l}\cdot\frac{bl}{2}=\frac{abP}{2}$ 为一恒量。因 $A+B\geq 2\sqrt{AB}$，且 $A=B$ 时，$A+B$ 为最小，所以 F 有极小值时应为：$\frac{Pa}{l}=\frac{bl}{2}$，

$$l=\sqrt{\frac{2Pa}{b}}=\sqrt{\frac{2\times300\times0.2}{30}}\text{米}=2\text{米},$$

$$F=60\text{牛}。$$

［解法二］　以 A 为转轴，由力矩平衡条件，

$$F\cdot l=P\cdot a+(bl)\cdot\frac{l}{2},$$

将已知数据代入得

$$Fl=300\times(0.2)+30\cdot\frac{l^2}{2},$$

$$15l^2-Fl+60=0。$$

当 $\triangle=F^2-4\times15\times60\geq0$，才有解，或 $F\geq60$ 牛，$F\leq-60$ 牛（舍去），所以最小的力　　　　　　F=60 牛。

代入上式可得　$15l^2-60l+60=0$，即 $(l-2)^2=0$。

解得　　　　　　$l=2$。

［解法三］　由力矩平衡得

$$Fl=Pa+(bl)\cdot\frac{l}{2},\text{即}F=\frac{Pa}{l}+\frac{bl}{2}=\left(\sqrt{\frac{Pa}{l}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{bl}{2}}\right)^2$$

$$=\left(\sqrt{\frac{Pa}{l}}-\sqrt{\frac{bl}{2}}\right)^2+2\sqrt{\frac{Pab}{2}}。$$

欲使 F 为最小，

$$\sqrt{\frac{Pa}{l}}-\sqrt{\frac{bl}{2}}=0,$$

得

$$l=\sqrt{\frac{2Pa}{b}},\text{其最小力为}\sqrt{2Pab},$$

代入数值得 $l=2$ 米，$F_{min}=60$ 牛。

326．一个车轮重 G，半径为 R，要超过高为 h 的障碍物，问：(1)加在

轴上所需水平力F应等于多大？(2)要使加在轴上的力F和水平方向成多大角度时最省力？这个力多大？(3)F不一定加在轴上，但要求最小的力，它的数值应多大、向什么方向、作用点在哪里/

［解答］ (1)车轮受重力G，水平拉力F和障碍物对车轮的弹力(如选C点为传动轴，该弹力的力矩等于零，图中不画此力）。

由图(a)可知：OC=R，BC=OA=R-h，

$$AC=\sqrt{R^2-(R-h)^2}=\sqrt{h(2R-h)}\text{。}$$

由力矩平衡条件，车轮要越过障碍物必须

$$F\cdot BC\geq G\cdot AC\text{，即}F\geq\frac{AC}{BC}\cdot G=\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h}G\text{。}$$

(2)设所加力F′和水平方向间夹角为θ时[图(b)]，F′的最量值最小。

由平衡条件知F′·OCsin(? +θ)≥G·AC，

即

$$F'\geq\frac{AC}{OC\sin(\alpha+\theta)}\cdot G=\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\theta)}\cdot G\text{，}$$

其中? 、G都是常量，所以当sin(? +θ)=1时，即? =θ=90°时最省力，此时

F′=cos? ·G，

由于

$$\cos\alpha=\frac{AC}{OC}=\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R}\text{，}\sin\alpha=\frac{BC}{OC}=\frac{R-h}{R}\text{，}$$

所以当 $\theta=\left[90°-\arcsin\frac{R-h}{R}\right]$ 时最省力，

$$F'=\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R}\cdot G\text{。}$$

(3)由上知重力矩为G·AC不变，所以，如果动力臂最大，可最省力。连接C点和轴心O点，延长CO和车轮边相交于D点处。F″作用于D点，方向应和圆相切，使θ+? =90°，此时力臂等于2R为最大[图(c)]。

$$F''\geq\frac{AC}{CD}G=\frac{\sqrt{h(2R-h)}}{2R}\cdot G\text{，}$$

F″和水平面的角度 $\theta=[90°-\arcsin\frac{R-h}{R}]$，作用点为D点。

327．求如图所示的均匀薄铁板的重心。

［解答］ 将薄铁板分成重心为G_1和重心为G_2的两块矩形板。

则$G_1G_2=\frac{1}{2}(6+2)$厘米$=4$厘米。

设薄铁板的重心为G，因为两块矩形板面积相等，所以重力也相等。根据$P_1\times G_1G=P_2\times GG_2$，$GG_1=GG_2=2$厘米，

薄铁板的重心在其对称轴线上距左端5厘米、在一半厚度处。

328．求如图所示的均匀薄板的重心。

［解答］　设在空处填补一小矩形薄板，重心在 C 点，重心为 P_C。填补后的大矩形薄板重心在 G′点，重力为 P′。所求薄板的重心为 G 点，重量为 P。则 G′C=（15-5）厘米=10 厘米。

根据　$P \times GG' = P_C \times G'G$，

得
$$GG' = \frac{P_C}{P} \times G'G$$
$$= \frac{10 \times (20-4-4)}{20 \times 30 - 10 \times (20-4-4)} \times 10\text{厘米}$$
$$= 2.5\text{厘米。}$$

所以所求重心在均匀薄板的对称轴线上距左端 12.5 厘米、一半厚度处。

329.从半径为 R=30 厘米的厚度均匀圆板上挖出一个半径是 r=15 厘米的内切圆板，如图所示，求剩下薄板的重心。

［解答］　采用填补法，设填补的小圆板的重心为 C，重心为 PC，填补后大圆板的重心为 G′、重力为 P′。剩下的薄板的重心为 G、重量为 P。则 G′G=r=15 厘米，根据 $P \times G'G = P_C \times G'C$，

得
$$GG' = \frac{P_C}{P} \times G'C = \frac{\pi r^2}{\pi(R^2 - r^2)} \cdot r = \frac{r}{3} = \frac{15}{3}\text{厘米} = 5\text{厘米。}$$

所以重心在薄板的对称轴线上，离右端边缘 10 厘米处。

330．自一个三角形 ABC 中割去一小三角形 AB′C′，而 B′C′∥BC，且△AB′C′的面积为原三角形的 1/4，求余下部分 BCC′B′的重心。

［分析］　被割去的小三角形 AB′C′面积为原三角形的 1/4 且 B′C′∥BC，则 B′C′必为 AB 和 AC 两边中点的连线。因为此时 $B'C' = \frac{1}{2}BC$，且三角形的高 $AD' = \frac{1}{2}AD$，此时才符合题意。设 E 为△AB′C′的重心，则 $AE = \frac{2}{3}AM' = \frac{1}{3}AM$。又设△ABC 的重心为 G′，则 $G'M = \frac{1}{3}AM$。$EG' = AM - AE - G'M = \frac{1}{3}AM$。

［解答］　采用填补法，设剩余部分 BCC′B′重 P，重心为 G，被割去的小三角形重 P_E，重心为 E，原来三角形重 P′，重心为 G′，则由于△AB′C′面积为△ABC 的 $1/4$，所以 $P_E = P' \cdot \frac{1}{4}$，$P = \frac{3}{4}P'$。因 $P_E \cdot EG' = P \cdot GG'$，得到 $GG' = \frac{1}{9}AM$。或 $GM = G'M - G'G = \frac{2}{9}AM$，所以剩余部分的重心在中线 AM 上，离底边中点 M 的距离为中线长的 $\frac{2}{9}$。

331．两根长度都是 L 的金属丝，一根重是另一根的两倍，用它们来围

成边长为 2：1 的长方形框架，求这个框架的重心。

［解答］ 建立坐标系如图，设它的重心坐标为（x，y）。框架每边重心的坐标为$x_1=0$，$y_1=\frac{L}{6}$；$x_2=\frac{2}{3}L$，$y_2=\frac{L}{6}$；$x_3=\frac{L}{3}$，$y_3=0$；$x_4=\frac{L}{3}$，$y_4=\frac{L}{3}$，设各边的重为P_1、P_2、P_3、P_4，如果$P_1=P$，则$P_2=2P$，P_3=2P，P_4=4P。

$$x=\frac{x_1P_1+x_2P_2+x_3P_3+x_4P_4}{P_1+P_2+P_3+P_4}=\frac{0+\frac{2}{3}L\times 2P+\frac{L}{3}\times 2P+\frac{L}{3}\times 4P}{9P}=\frac{10}{27}L，$$

$$y=\frac{y_1P_1+y_2P_2+y_3P_3+y_4P_4}{P_1+P_2+P_3+P_4}=\frac{\frac{L}{6}\times P+\frac{L}{6}\times 2P+0+\frac{L}{3}\times 4P}{9P}=\frac{11}{54}L。$$

332．平面衍架由 7 根杆件构成，各杆的长度如左下图所示。如果各杆每米长的质量相等，求该衍架的重心位置。

［解答］ 设杆件每米长重ω牛/米。取直角顶点为坐标原点，则

$$\bar{x}=\frac{(2\times 1+2.5\times 1+2.5\times 1+1.5\times 1+2\times 3+2.5\times 3+3\times 0)\omega}{(2+2.5+2.5+1.5+2+2.5+3)\omega}\text{米}$$

$$=\frac{23.5}{16}\text{米，}$$

$$\bar{y}=\frac{[(2+2)\times 0+3\times 1.5+(2.5+1.5+2.5)\times 0.75+2.5\times 2.25]\omega}{(2+2+3+2.5+1.5+2.5+2.5)\omega}\text{米}$$

$$=\frac{15}{16}\text{米。}$$

333．有一串珍珠，每颗珍珠间距都等于 a，共有 n 颗，但它们的质量依次为 m、2m、3m…nm，求它的重心离悬挂点的距离。

［解答］ 设悬挂点为坐标原点，x 轴垂直向下，如右上图所示，则

$$\bar{x}=\frac{m\cdot a+2m\cdot 2a+\cdots+nm\cdot na}{m+2m+\cdots+nm}=\frac{m(a+2\cdot 2a+\cdots+n\cdot na)}{m(1+2+\cdots+n)}$$

$$=\frac{a(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{1+2+\cdots+n}=\frac{an(n+1)(2n+1)}{6}\cdot\frac{2}{n(n+1)}$$

$$=\frac{a(2n+1)}{3}。$$

334．质量为 m 的金属丝，由中点弯成直角，它的一端吊在铰链 O 上。求在平衡位置时上半段和竖直线之间的夹角？。

［解答］ 列出以 O 点为转动轴的力距平衡方程

$$\frac{mg}{2}\cdot\frac{l}{4}\sin\alpha=\frac{mg}{2}\left(\frac{l}{2}\cos\alpha-\frac{l}{4}\cos\alpha-\frac{l}{2}\sin\alpha\right)$$

可得

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{3}，\ \alpha=\mathrm{arctg}\frac{1}{3}。$$

335．将一根粗细均匀的金属丝 AC 在 B 处弯成直角，然后在 A 点用线悬挂起来，测得 AB 跟竖直方向夹角θ=45°，求 AB 和 BC 的长度的比值。

［解答］ 设 AB 段受重力 G_1、BC 段受重力 G_2，取悬点 A 为转动轴，A点悬线金属丝的拉力对转动轴的力距为零，则$G_1 \cdot \frac{AB}{2}\sin\theta - G_2 \left(\frac{BC}{2}\cos\theta - AB\sin\theta\right) = 0$，因金属丝质地均匀，所以$G_1 : G_2 = AB : BC$。将θ=45°代入，

可得 $\frac{AB^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{BC^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + AB \cdot BC \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$，

$AB^2 - BC^2 + 2AB \cdot BC = 0$，

$$AB = \frac{-2BC \pm \sqrt{4BC^2 + 4BC^2}}{2} = \frac{-2BC \pm 2\sqrt{2}BC}{2}$$
$$= (\sqrt{2} - 1)BC，$$

所以 AB 和 BC 的长度比值为 0.41。

336．一个等边三角形本身重力不计，以绳悬一个角顶于 A 点，在另两个角顶 B、C 各挂重物 G_1 和 G_2（$G_1 > G_2$）。求 AB 边和铅垂线间所成的角θ。

［解答］ 设三角形边长为 l，平衡时，以 A 点为转动轴 G_1 和 G_2 的力矩平衡，即

$\Sigma M_A = G_1 l in\theta - G_2 l\sin(60° - \theta) = 0$，

$$\frac{G_1}{G_2}\sin\theta = \sin(60° - \theta) = \sin 60° \cos\theta$$
$$-\cos 60° \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta，$$
$$\left(\frac{G_1}{G_2} + \frac{1}{2}\right)\sin\theta = \frac{2G_1 + G_2}{2G_2}\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta，$$

所以

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}G_2}{2G_1 + G_2}，得\theta = \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}G_2}{2G_1 + G_2}。$$

337．有一块厚薄均匀正方形板 ABCD，其重为 G_1。今在 C、D 两角顶各悬重物 G_2 和 G_3（$G_2 > G_3$）。如果用线系住 AB 边中点 E，悬挂起来。求平衡时 BC 边和重垂线间夹角。

［解答］ 设正方形边长为 l，由于

$$JF = l\mathrm{tg}\theta，CF = \frac{l}{2} - JF = l\left(\frac{1}{2} - \mathrm{tg}\theta\right)，$$

$CK = l\cos\theta$，

得

$$CH = CF\cos\theta l\left(\frac{1}{2} - tg\theta\right)\cos\theta,$$

$$HK = CK - CH = l\cos\theta - l\left(\frac{1}{2} - tg\theta\right)\cos\theta$$

$$= l\left(\frac{1}{2} - tg\theta\right)\cos\theta,$$

$$ON = \frac{l}{2}\sin\theta。$$

以 E 为转动轴，求各力的力矩得 $G_2 \times CH = G_1 \times ON + G_2 \times HK$，

$$G_1 l\left(\frac{1}{2} - tg\theta\right)\cos\theta = G_1 \cdot \frac{l}{2}\sin\theta + G_3 \cdot l\left(\frac{1}{2} + tg\theta\right)\cos\theta,$$

$$G_2\left(\frac{1}{2} - tg\theta\right) = \frac{G_1}{2}tg\theta + G_3\left(\frac{1}{2} + tg\theta\right),$$

$$\frac{1}{2}(G_2 - G_2) = \left(\frac{G_1}{2} + G_2 + G_3\right)tg\theta,$$

$$tg\theta = \frac{G_2 - G_3}{G_1 + 2G_2 + 2G_3}, \qquad \theta = arctg\frac{G_2 - G_3}{G_1 + 2G_2 + 2G_3}。$$

338．一块厚薄均匀平板，由半径为 R 的半圆和底等于半圆直径、高等于 h 的矩形组成（如图）。如果整个板的重心和半圆的圆心重合，求 h/R 的比值。已知半圆的重心 C_1 和圆心 C 间相距 $4R/3\pi$。

［解答］　设半圆重心为 C_1，矩形重心为 C_2。由于

$C_1G = \frac{4R}{3\pi}$，$CC_2 = \frac{h}{2}$。半圆面积为 $\frac{\pi R^2}{2}$，矩形面积为 $2hR$。要使两部分重心合起来在 C 点。则

$$\frac{\pi R^2}{2} \cdot \frac{4R}{3\pi} = 2hR \cdot \frac{h}{2}$$

得

$$\frac{h}{R} = \frac{\sqrt{6}}{3}。$$

339．在两根长度都为 l 的直的细棒 CA、CB，把它们和质量为 m 的球连接在 C 点。两棒的一端 A 和 B 各连接一质量为 M 的小球。在∠ACB 的角等分线方向装有一根长度为 a 的细棒。如果在它的下端 O 把整个系统支撑起来成为一个“三叉架”而处于平衡状态。三根细棒的质量都很轻，可以略去不计。求：(1)这个三叉架的重心位置。(2)在 O 点能把三叉稳定地支撑住，半顶角? 的值应符合什么条件？

［解答］　由于三叉架左右对称，所以静止时 CO 为竖直方向。设 C 点为坐标原点，x 轴为水平方向，CO 方向为 y 轴。则 A、B、C 的坐标分别为

(-lsin? ，lcos?)、(lsin? ，lcos?)、(0，0)。

设所求重心坐标为(x_G，y_G)，则

$$x_G=\frac{M(-l\sin\alpha)+M(l\sin\alpha)+m\cdot 0}{M+M+m}=0,$$
$$y_G=\frac{Ml\cos\alpha+Ml\cos\alpha+m\cdot 0}{M+M+m}=\frac{2Ml\cos\alpha}{2M+m}。$$

所以，重心位置在CO线上，离C点距离$\frac{2Ml\cos\alpha}{2M+m}$处。

要使系统处于稳定平衡状态，重心位置应该在 O 点以下。即 y_G>? ，

$$\frac{2Ml\cos\alpha}{2M+m}>\alpha,$$
$$\cos\alpha>\frac{(2M+m)\alpha}{2Ml}。$$

340．在水平桌面上有一半圆柱体 A，其顶面为长方形，长 5a，宽 2a，半圆柱体的半径 r=a，在半圆柱体 A 顶面的中间固定一同材料的圆柱体 B，即圆柱体 B 的中心轴线通过半圆柱体 A 的重心。直径为 a，要使整个系统处于随遇平衡，问 B 应多少高？（已知 A 的重心在顶面中心下 4r/3π处）

［分析］ 要使整个系统处于随遇平衡状态，即 A 和 B 的重心必须在半圆柱体 A 的顶面中心 O 处，这样才可使整个系统即使倾斜，其重心位置不升高也不降低。

［解答］设B高为h，$OG_A=\frac{4r}{3\pi}$，$OG_B=\frac{h}{2}$，

由于材料相同，两部分重力与体积成正比。以 O 为转动轴，

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}(2a)^2\cdot(5a)\cdot\frac{4a}{3\pi}=\frac{\pi}{4}a^2\cdot h\cdot\frac{h}{2}$，

得

$$h^2=\frac{80a^2}{3\pi},\ h=4a\sqrt{\frac{5}{3\pi}}。$$

341．一辆拖拉机上坡，拖拉机前后轮的轮距是 L，重心的高度是 h，重心至前轮的距离是 l。(1)为了使上坡不致向后翻倒，坡面的最大倾角是θ_1应满足什么条件？(2)若拖拉机下坡时不致向前翻倒,最大倾角θ_2应满足什么条件？(3)根据上述条件讨论,重心太高、太靠前、太靠后有什么缺点？

［解答］ (1)拖拉机上坡，拖拉机受力：重力 G 和地面对两轮的弹力 F_A、F_B 以及摩擦力 f_A、f_B。为了不致向后翻倒，以 B 点为转动轴。

$\Sigma M_B=F_AL+G\cdot\sin\theta_1\cdot h-G\cos\theta_1\cdot(L-l)=0$。

当 FA=0 时，即将翻倒时的极限值，前轮和地面接触而没有相互作用，稍有扰动便会翻倒。所以$\text{tg}\theta_1\le\frac{L-l}{h}$，最大倾角$\theta_1=\text{arctg}\frac{L-l}{h}$。

(2)拖拉机下坡，同理可以前轮和地面的接触点 A 为 劝轴，

$\Sigma M_A=F_B\cdot L+G\sin\theta_2\cdot h-G\cos\theta_2\cdot l=0$。

如果$FB=0$时为极限值，所以θ_2应满足条件$\text{tg}\theta_2\le\frac{l}{h}$，

最大倾角 $$\theta_2 = \mathrm{arcg}\frac{l}{h}。$$

(3)如重心太高即 h 大，由上面讨论可知 tgθ就小，即上坡、下坡时斜坡的倾角都不能太大，拖拉机容易翻倒。如果重心太靠前时，由(2)的结论中可知 l 小，θ_2小，所以拖拉机下坡时容易翻倒。如果重心太靠后，即 l 大，由(1)的结论中可知θ_1小，所以拖拉机上坡时坡的倾角不能太大，否则，拖拉机容易向后翻倒。

342．现有一个正圆锥体重 G，其顶角为 2? ，其底面静置于粗糙的水平地面上，现在顶点作用一个和地面平行的渐增力 F，问要使圆锥体翻倒或滑动，外力 F 要具备什么条件/

［解答］ 以 A 点为转动轴，从各力力矩关系可知当 Flcos? >Glsin? 时，

圆锥体将倾倒，即$\mathrm{tg}\alpha < \frac{F}{G}$，但不产生滑动条件是$F < f_{max}$即$F\mu_8 G$，得$\mathrm{tg}\alpha < \mu_8$。设$\mathrm{tg}\varphi = \mu_8$，则$\mathrm{tg}\alpha < \mathrm{tg}\varphi$($\varphi$为摩擦角)。

如果 Flcos? <Glsin? 时正圆锥体将开始滑动，但是如果 F 增大，当 F=$f_{m?x}$时正圆锥体将开始滑动，其条件为

$$\mathrm{tg}\alpha > \frac{F}{G}，即\mathrm{tg}\alpha > \mu或\mathrm{tg}\alpha > \mathrm{tg}\varphi。$$

所以，圆锥体和地面间摩擦系数为μ_8，圆锥体顶角为 2? 时，则 tg? <μ_8，? <φ时圆锥体先倾倒，如果? >φ时圆锥体先滑动。

343．如图(a)所示，一块重 G 的正立方体木块，放在倾角为? 的斜面上，木块和斜面间的摩擦力很大。拉木块的细线沿水平方向，线跨过斜面顶端的定滑轮下端悬一个重物 P。P 至少要多重才能使木块翻转？

［解法一］ 将木块的重力 G 分解成两个分量[图(b)]，沿斜面的 Gsin? 和垂直于斜面的 Gcos? 。由于摩擦力很大，木块不能滑动。但是，当 P 相当大时，木块能绕 B 点转动而翻倒。设正立方体每边长 l，则

$$Fl\cos\alpha = Pl\cos\alpha > G\sin\alpha \cdot \frac{l}{2} + G\cos\alpha \cdot \frac{l}{2}，$$

所以

$$P > \frac{G}{2}(\mathrm{tg}\alpha + 1)。$$

［解法二］ 要使木块绕 B 点翻倒[图(c)]，必须

F · AB · cos? >G · BE。

因为

$$BE = OB \cdot \cos(45° - a) = \frac{\sqrt{2}}{2}l[\cos 45° \cos\alpha + \sin 45° \sin\alpha]$$
$$= \frac{l}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)，$$

得

$$F > \frac{G}{2}(1+\mathrm{tg}\alpha)，\qquad 即 P > \frac{G}{2}(1+\mathrm{tg}\alpha)。$$

344．在质量为 M 的一个圆板的边缘上，固定一个质量为 m 的小物。设圆板静止在倾角为? 的斜面上，连接圆板中心和重物的半径，它跟铅垂方向间的夹角为θ[图(a)]。求 sinθ的值，并说明它能静止在斜面上的条件。

［解答］ 设圆板半径为 r，它受四个力作用[图(b)]；板身重力 Mg，小物的作用力等于 mg，垂直于斜面方向的弹力 N 和平行于斜面方向的摩擦力 f。取坐标系的 x 轴平行斜面，y 轴垂直于斜面。据平衡条件

ΣF_x=f-Mgsin? -mgsin? =0 (1)

ΣF_y=N-Mgcos? -mgcos? =0 (2)

以 O 为转动轴， ΣM=fr-mgrsinθ=0 (3)

由(1)、(3)式解得 $\sin\theta = \frac{M+m}{m}\sin\alpha$ (4)

为了使圆板能够静止在斜面上，圆板所受的摩擦力应小于最大静摩擦力即

f<μN (5)

将此式代入(1)、(2)式解得 tg? <μ。

由于 sinθ≤1，所以从(4)式可得

$$\sin\alpha \le \frac{m}{M+m}。$$

345．用一根长为 l_2、重为 G_2 的均匀撬棒 CD 把一块长为 l_1、重为 G_1 的均匀预制板 AB 支起，并达到平衡，如图所示。问垂直作用于撬棒上端点的作用力 F 是多大？假定预制板和撬棒的接触处是光滑的，地面是粗糙的，已知角? 和角β。

［解答］ 因为撬棒和预制板间无摩擦，撬棒对预制板的作用力跟撬棒垂直，设为 F_1，并设预制板和撬棒的接触点到撬棒底端的距离为 d。

由于预制板处于平衡状态，取 A 点为转动轴

$$\Sigma M_A = F_1 l_1\cos(\alpha-\beta) - G_1 \cdot \frac{l_1}{2}\cos\beta = 0，$$

得

$$F_1 = \frac{\cos\beta}{2\cos(\alpha-\beta)}G_1 \qquad (1)$$

由于撬棒处于平衡状态，取 C 点为转动轴

$$\Sigma M_C = Fl_2 - G_2 \cdot \frac{l_2}{2}\cos\alpha - F_1' \cdot d = 0 \qquad (2)$$

F_1' 是 F_1 的反作用力，是预制板对撬棒的作用力。

在△ABC 中，由正弦定理得

$$\frac{l_1}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{d}{\sin\beta}，即 d = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}l_1 \qquad (3)$$

将(1)、(3)式代入(2)式，解得

$$F=\frac{1}{2}\left(G_2\cos\alpha+\frac{L_1\cos\alpha\beta\sin\beta}{l_2\cos(\alpha-\beta)\sin\alpha}G_1\right)。$$

346．两块相同的金属板，上端光滑的圆形边缘靠在一起，下端放在水平面上。每块金属板和竖直平面间成？角。要使金属板不倒下，它和水平面间的摩擦系数应多大？

［解答］ 金属板受力如图，设金属板长为 l，重力为 G。由平衡条件得

$\Sigma F_y=N-g=0$，$\Sigma F_x=R-f=0$，

以 A 为转动轴

$$\Sigma M_A=G\cdot\frac{l}{2}\sin\alpha+fl\cos\alpha-Nl\sin\alpha=0，$$

解得

$$f=\left(N-\frac{1}{2}G\right)tg\alpha=\frac{1}{2}Ntg\alpha。$$

同时应满足条件 $f<\mu_8 N$，

得

$$\mu_8>\frac{1}{2}tg\alpha。$$

347．重 G=20 牛的小门，长 AB=0.6 米，宽 BC=0.3 米，门的底边一角用铰链抵住，上边一角用绳拉住，使门平衡[图(a)]。试作出小门的受力图，并求出铰链上的垂直分力和水平分力以及绳上的张力。

［解答］ 小门受四个力的人用：重力 G，绳子拉力 T，以及铰链对门的水平分力 N_x 和垂直分力 N_y。受力图如图(b)所示。平衡时

$$\Sigma M_D=T\cdot AD-G\cdot\frac{AB}{2}=0，T=20牛，$$

由 $\Sigma F_x=N_x-T=0$，$N_x=20$ 牛，

$\Sigma F_y=N_y-G=0$，$N_y=20$ 牛。

由牛顿第三定律知，铰链上的水平分力和垂直分力以及绳上张力，即上述三个力的反作用力，都等于 20 牛。

348．有两个短脚的木板放在斜面上[图(a)]，短脚 A 和 B 高 h，它们和斜面的静摩擦系数分别为μ_1和μ_2。木板质量为 m，长为 l。试问斜面和水平的夹角？的最小值等于多少时，木板开始沿斜面滑下。(木板厚度不计)

［解答］ 木反受五个力的作用：N_1 和 N_2 是支持力，f_1 和 f_2 是静摩擦力，mg 是重力。

由平衡条件知

$$\Sigma F_x=f_1+f_2-m\sin?=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=N_1+N_2-mg\cos? =0 \qquad (2)$$

以木板重心为转动轴

$$\Sigma M = N_2 \cdot \frac{l}{2} + (f_1+f_2) \cdot \frac{h}{2} - N_1 \cdot \frac{l}{2} = 0 \qquad (3)$$

$$f_1 \le \mu_1 N_1，f_2 \le \mu_2 N_2。$$

? 增大到某值时，木板开始沿斜面滑动，摩擦力为最大静摩擦力。由(3)

式得$N_1\left(\frac{l}{2}-\mu_1 \cdot \frac{h}{2}\right)=N_2\left(\frac{l}{2}+\frac{\mu_2 h}{2}\right)$，和(2)式联立解是

$$N_1=\frac{l+\mu_2 h}{2l+(\mu_2-\mu_1)h}mg\cos\alpha，$$

$$N_2=\frac{l-\mu_1 h}{2l+(\mu_2-\mu_1)h}mg\cos\alpha。$$

由(1)式 $\mu_1 N_1=\mu_2 N_2=mg\sin?$，

解得

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\mu_1(l+\mu_2 h)+\mu_2(l-\mu_1 h)}{2l+(\mu_2+\mu_1)h}$$

$$=\frac{(\mu_1+\mu_2)l}{2l+(\mu_2-\mu_1)h}。$$

当 $h\le l$ 时，得 $N_1=N_2$。

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\mu_1+\mu_2}{2}。$$

349．质量为 m_1 和 m_2 的两物体，用细杆相连放在斜面上，细杆质量可不计。两物体对于斜面的静摩擦系数分别为μ_1和μ_2。现逐渐增加斜面的倾斜角度? 。求：(1)开始滑下时? 值应为多大？(2)讨论细杆中受张力或压力的条件。

［解答］ (1)把 m_1 和 m_2 看作一个系统进行受力分析。把重力分成平行斜面和垂直斜面两个方向上的分量。可得分量 $m_1g\sin?+m_2g\sin?$ 。当 $m_1g\sin?+m_2g\sin?\ge\mu_1m_1g\cos?+\mu_2m_2g\cos?$ 时，即可沿斜面向下滑动。所以开始滑动的条件为

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\mu_1 m_1+\mu_2 m_2}{m_1+m_2}。$$

(2)设细杆未连接时，m_1 发生滑动的条件为

$$m_1g\sin?\ge\mu_1m_1g\cos?，即\ \mathrm{tg}?\ge\mu_1。$$

同样 m_2 发生滑动的条件为 $\mathrm{tg}?\le\mu_2$，当$\mu_1>\mu_2$时，m_1 先有滑动趋势，所以增大到? 角符合上述条件时，细杆中受到的是张力。当$\mu_1<\mu_2$时，m_2 先有滑动趋势，细杆中将受到压力。当$\mu_1=\mu_2$且? 增大时，直到两物体滑动，细杆将不受压力，也不受张力。

350．均匀细杆 AB 的下端用铰链固定，杆的上端用细绳 CA 系住，使杆

保持平衡[图(a)]。杆的重力为 G，且∠ABC=∠BCA=∠? ，C 点和 B 点在同一竖直线上，求绳的张力。

［解答］　如果 2? >90°[图(b)]，则∠BAC=（180°-2? ）。设 T 为绳子的张力，L 为杆的长度。则以 B 点为转动轴，由力矩平衡得

$$G\sin\alpha\cdot\frac{L}{2}=T\cdot BD=TL\sin(180°-2\alpha)。$$

如果 2? <90°[图(c)]，则以 B 点为转动轴，由力矩平衡得

$$G\sin\alpha\cdot\frac{L}{2}=T\cdot BD=TL\sin2\alpha,$$

根据上面两种情况都可解得$T=\frac{G}{4\cos\alpha}$。

351．如图(a)滑轮及绳子质量和摩擦都不计，人重 G_1，平板重 G_2，要使木板处于平衡状态，问：(1)人用多大的力拉绳子？(2)人应站在何处？(3)人对板的压力多大？

［解答］　(1)设人拉绳的力为 T，把人和平板当作一个整体，受五个力作用如图(b)所示。由平衡条件，得

$$2T+T+T=G_1+G_2$$

$$T=\frac{1}{4}(G_1+G_2)。$$

(2)设木板 AB 为 L，人站的位置和 A 点相距 x。以 A 为转动轴得

$$\Sigma M_A=T\cdot L+T\cdot x-G_2\cdot\frac{L}{2}-G_1x=0,$$

$$x=\frac{G_1-G_2}{3G_1-G_2}\cdot L。$$

(3)选平板为研究对象，人对平板压力为 N[图(c)]，得

$$2T+T-N-G_2=0,$$

$$N=\frac{1}{4}(3G_1-G_2)。$$

如果 $G_2=3G_1$ 时，N=0，即人将脱离平板，此时 $T=G_1$，人的重力完全由绳子的张力平衡。$G_2>3G_1$ 时，人将加速向上，平板将向下加速。

352．如图所示的连杆滑轮系统中，重物 G 处于平衡状态，如不计连杆和滑轮的重力及摩擦力，求连杆 OO′和竖直方向的夹角? 是多少？

［解答］　设连杆长度为 L，上方的滑轮直径为 d，下方的滑轮下径则为$\frac{d}{2}$，当连杆和定滑轮系统平衡时，对于悬点O的力矩的和为零。

$$\sum M_0=\frac{G}{2}L\sin\alpha+\frac{G}{2}\left(L\sin\alpha-\frac{d}{2}\right)-\frac{G}{2}\left(L\cos\alpha-\frac{d}{2}\right)=0,$$

解得 tg? =0.5，? =26.6°。

353．图(a)中一个半径 R=20 厘米，重 G=5.0 牛的光滑球，搁在两块砖上，每块砖重 P=1.0 牛，厚 b=5.0 厘米，高 h=20 厘米。问要使两块砖保持

平衡，不翻倒，它们间的最大距离应多少？

［解答］ 设两块砖不致翻倒的最大距离为 x。先考虑光滑球受重力 G，和两块砖的弹力 F 平衡，由于球光滑，力 F 通过球心，设两弹力和竖直方向间夹角分别为θ，如图(b)。由三力平衡条件可得

$$\cos\theta=\frac{G}{2F} \qquad (1)$$

再考虑左侧砖受力：球对砖的作用力 F′=F，砖本身重力 P 和地面对砖的作用力。由于考虑砖不翻倒的极限状态，故砖块不是底面全部压在地上，只有 A 点有作用力 N。砖不翻倒的条件，可取 A 点力矩平衡

$$\Sigma M_A=P\cdot\frac{b}{2}+F\cos\theta\cdot b-F\sin\theta\cdot h=0 \qquad (2)$$

由(1)式得 $F=\frac{G}{2\cos\theta}$ 代入(2)式，

解得

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{(P+G)b}{Gh}=\frac{(1+5)\times0.05}{5\times0.20}=0.3， \qquad (3)$$

由于 $\mathrm{tg}\theta=\frac{x}{2\cdot\sqrt{R^2-\left(\frac{x^2}{2}\right)}}$，

所以 $x=\frac{2\mathrm{tg}\theta\cdot R}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}=\frac{2\times0.3\times0.2}{\sqrt{1+(0.3)^2}}$米$=0.115$米$=11.5$厘米。

354．图(a)中的椅子椅高 80 厘米，重 80 牛。假设椅子重心距前后腿都是 20 厘米。求：(1)在椅背中间离地 40 厘米处加一个 20 牛的水平推力，使椅子匀速滑动，则椅子前后腿（指两前腿和两后腿）对地面的压力和受到的摩擦力分别多大？(2)如用 20 牛的水平拉力加在椅背离地板 20 厘米处，使椅子仍作匀速滑动，前后腿对地面的压力和受到的摩擦力又分别是多大？(3)水平拉力 F=20 牛作用在椅背中间离地多高处，椅子将要倾倒？

［解答］ (1)椅子受到的力有重力 G=80 牛，推力 F=20 牛，地面对前后腿的弹力和摩擦力分别为 N_A、N_B 和 f_A、f_B[图(b)]。由平衡条件得

$$\Sigma F_x=f_A+f_B-F=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=N_A+N_B-G=0 \qquad (2)$$

以 B 点为转动轴，

$$\Sigma M_B=G\cdot CD+F\cdot BD-NA\cdot AB=0 \qquad (3)$$

由(3)式得 $N_A=\frac{1}{AB}(G\cdot CD+F\cdot BD)=\frac{G}{2}+F=60$牛。代入(2)式得 N_B=20 牛。前后腿对地面的压力分别为 N_A、N_B 的反作用力。它们大小相等，方向相反。

因 $f_A=\mu N_A$，$f_B=\mu N_B$，所以 $f_A:f_B=N_A:N_B=3:1$，和(1)式联立，解得 f_A=15 牛，f_B=5 牛。

(2)受水平拉力时，椅子受力分析如图(c)所示，

$$\Sigma F_x=F-f_A-f_B=0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y=N_A+N_B-G=0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_B=G\cdot CD-F\cdot BE-NA\cdot AB=0 \quad (3)$$

解得 $N_A=\frac{1}{2}（G-F）=30$牛，

N_B=50 牛，f_A=7.5 牛，f_B=12.5 牛。

(3)设拉力作用在椅背离地 x 厘米处，则

$$\Sigma M_B=G\cdot CD-N_A\cdot AB-F\cdot x=0,$$

当 N_A=0 时，前腿和地面虽有接触，但无作用力，即椅子处在将要倾倒的位置。代入数据解得 x=80 厘米，即力应加在椅背顶端。

355．图(a)为某一施工的起重装置，支杆 AB 和 CD 都是 8 米，CE 为 2 米，铁索一端固定在 C 点，另一端通过 O 点的动滑轮和 A 点的定滑轮把 1.5×10^4 牛的重物提升。当∠AOC=120°时，问：(1)如果要保持支杆 CD 竖直，这时拉线 EG 所受的力多大？(2)已知 CD 支杆重 $P=4\times10^3$ 牛，这时它对地面的压力多大？

［解答］ 由于 O 点是动滑轮，AO=CO，G 在 CO 和 AO 方向上的分力分别是 F_1 和 F_2，由于 G 和 F_1、F_2 之间的夹角都是 60°，$F_1=F_2=G=1.5\times10^4$ 牛。CD 杆受四个力作用：F_1 和拉线的拉力 T，重力 P_1 和地面的作用力 N。根据平衡条件

$$\Sigma F_x=T\sin30°-F_1\sin60°-Nx=0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y=N_y-F_1\cos60°-T\cos30°-P=0 \quad (2)$$

$$\Sigma M_D=F_1\sin60°\times CD-T\sin30°\times ED=0 \quad (3)$$

由(3)式解得

$$T=\frac{F_1\sin60°\times CD}{\sin30°\times ED}=\frac{1.5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times8}{\frac{1}{2}\times8}\times10^4\text{牛}=2\sqrt{3}\times10^4\text{牛},$$

由(1)、(2)式解得

$$N_x=T\sin30°-F_1\sin60°=\left(2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}-1.5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times10^4\text{牛}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times10^4\text{牛}=0.433\times10^4\text{牛}$$

$$N_y=F_1\cos60°+T\cos30°+P=\left(1.5\times\frac{1}{2}=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+0.4\right)\times10^4\text{牛}$$

$$=4.15\times10^4\text{牛},$$

$$N=\sqrt{N_x^2+N_y^2}=4.17\times10^4\text{牛。}$$

和水平面夹角 $\theta=\text{arctg}\frac{N_y}{N_x}=\text{arctg}9.58=84°3'$。

356．AB 为均匀横杆，重 G=25 牛，A 端挂一盏重 W=10 牛的灯，B 端固定在竖直墙上，轻质斜杆CD拉住横杆，夹角$\alpha=30°$，$AC=\frac{AB}{4}$。求横杆在 C 点和 B 点所受的力。

［解答］ 以横杆 AB 为研究对象，它受重力 G，在 A 端受悬绳的拉力 F，F 的大小等于灯重 W，方向沿悬绳即铅直方向，在 C 点受轻杆的拉力 T，方向沿轻杆，B 点连接在墙上，墙对杆的作用力 N 不一定垂直墙壁，设和水平方向成β角。AB 长为 L，对转轴 B 点列力矩方程得

$$\sum M_B=W\times L+G\times\frac{L}{2}-T\sin\alpha\times\frac{3}{4}L=0，$$

$$T=\frac{4W+2G}{3\sin\alpha}=\frac{4\times10+2\times25}{3\times\frac{1}{2}}\text{牛}=60\text{牛。}$$

$$\Sigma F_x=T\cos?\ -N\cos\beta=0，$$

$$\Sigma F_y=T\sin?\ +N\sin\beta-G-W=0，$$

代入数值得 N=522.2 牛，β=5°30′。

357．粗细均匀的木杆，重力为 G，一端靠在直角墙角上，力 F 和木杆垂直作用于木直的另一端，使木杆在竖直位置匀速转动。求力 F 和墙角的弹力 Q 的变化规律。

［分析］ 设杆长为 l，并选定坐标系。由于杆是匀速转动，所以可运用平衡条件。

$$\sum M_0=\frac{Gl}{2}\cos\alpha-Fl=0，$$

解得 $F=\frac{G\cos\alpha}{2}$。

力在水平方向和竖直方向的投影的和等于零。

$$\Sigma F_x=Q_x-F\sin?\ =0，$$

$$\Sigma F_y=Q_y-G+F\cos?\ =0。$$

解得 $Q_x=\frac{G\sin2\alpha}{4}$，

$$Q_y=G\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{2}\right)=\frac{G(3-\cos2\alpha)}{4}，$$

$$Q=\sqrt{Q_x^2+Q_y^2}=\frac{G}{2}\sqrt{1+3\sin^2\alpha}。$$

［解答］随着α从0增大到$\frac{\pi}{2}$、力F则由$\frac{G}{2}$减少到，0弹力Q由$\frac{G}{2}$增加到 G。

$$Q\text{对}x\text{轴交角}\theta，\text{则}\mathrm{tg}\theta=\frac{Q_y}{Q_x}=\frac{3-\cos2\alpha}{\sin2\varepsilon}。$$

358．重为 G 的匀质球，半径为 R，放在墙和板 AB 之间。板的 A 端由铰链连接，B 用水平绳索 BC 拉住。板长为 l，和墙的交角为?，重力不计。

求绳索的拉力 T，并问? 为何值时，绳的拉力为最小，最小值是多少？

［解答］ 把斜板隔离，进行受力分析，并以 A 为转动轴，得$\Sigma M_A=F_2\cdot AD-T\cdot AC=0$

$$AK=(AD+DE)\cos?,$$

$$DE=R\mathrm{tg}\alpha，AK=AD，AD=R\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{R\sin\alpha}{1-\cos\alpha},$$

$$F_2=\frac{G}{\sin\alpha}，AC=l\cos\alpha。$$

将 AD 和 AC，F_2代入上式便得

$$T=\frac{GR}{l\cos\alpha-(1-\cos\alpha)},$$

要使 T 最小，必须 cos?（1-cos?）为最大，

令 y=cos?（1-cos?），即 cos²? -cos? +y=0。

要使 cos? 为实数根，判别式△=1-4y≥，

即 $y\leq\frac{1}{4}$，所以y最大值为$\frac{1}{4}$。

$$\cos^2\alpha a-\cos\alpha+\frac{1}{4}=0，\quad \cos\alpha-\frac{1}{2}=0,$$

$$\alpha=60°。$$

将$\alpha=60°$代入T式，得T最小为$T=\frac{4GR}{l}$。

359．均匀直棒 AB，长 L=1 米，重力 G=5 牛，两端用细线悬挂于同一点 O，悬绳和棒的夹角分别为? =30°、β=60°。要使棒保持水平方向必须在离 B 端 x 处悬挂一个重物 F=10 牛。求：(1)重物悬挂的位置，(2)两绳对棒的作用力各为多少？

［解法一］ 直棒受力有：重力 G，拉力 F，和两绳的作用力 T_1和 T_2[图(a)]。

$$\Sigma F_x=T_1\cos?-T_2\cos\beta=0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y=T_1\sin?-T_2\sin\beta-G-F=0 \quad (2)$$

以 B 点为转动轴，

$$\Sigma M_B=T_1\sin\alpha\cdot L-G\cdot\frac{L}{2}-F\cdot x=0 \quad (3)$$

代入数据

$$T_1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-T_2\cdot\frac{1}{2}=0,$$

$$T_1\frac{1}{2}+T_2\frac{\sqrt{3}}{2}-5-10=0,$$

$$T_1\frac{1}{2}-5\cdot\frac{1}{2}-10\cdot x=0。$$

解得 T_1=7.5 牛，T_2=13 牛，x=0.125 米。

［解法二］ 取固定转动轴 O 为支点，T_1、T_2的力矩为零，可得

$\Sigma M_0 = F(DB - x) - G\left(\frac{AB}{2} - DB\right) = 0$。$AB = L$，由于$\angle\alpha = 30°$，$\angle\beta = 60°$，得$OB = \frac{L}{2}$，$DB = \frac{L}{4}$。

代入上式 $F\left(\frac{L}{4} - x\right) - G\left(\frac{L}{2} - \frac{L}{4}\right) = 0$，

解得 $x = \frac{L}{8} = 0.125$米。

取 A 为转动轴，由力矩平衡可得

$$\sum M_A = G \cdot \frac{AB}{2} + F \cdot (AB - x) - T_2 AB \sin\beta = 0。$$

将数据代入得 T_2=13 牛。

由ΣF_x=0，$T_1\cos$? =$T_1\cos\beta$，可得 T_1=7.5 牛。

［解法三］ 设将直棒和两绳作为整体来研究，则绳对棒的拉力为内力，悬点 O 对系统的作用力 N[上页图(b)]。

由ΣF_y=0，可知 N=G+F，

由ΣF_x=0，可知 N 必须竖直方向，取棒重心 C 为转动轴，由力矩平衡得

$$F\left(\frac{AB}{2} - x\right) - N \cdot CD = 0。$$

$CD = \frac{AB}{2} - DB = \frac{L}{4}$，将数据代入得

$x = \frac{L}{8} = 0.125$米。

求 T_1、T_2 应以棒为研究对象，分别如前面的计算方法求得。

360．长为 l、重为 P 的梯子，一端靠在光滑墙壁上。梯子和地面之间夹角为? ，和地面间静摩擦系数为μ。问重为 G 的人沿梯子能向上攀登的最大高度是多少？

［解答］ 作出梯子受力图，由于梯子有滑倒的趋势，所以 A 点摩擦力 f 的方向向左。设人攀登梯子离底端最大距离为 x，则

$$\Sigma F_x = N_B - f = N_B - \mu N_A = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = N_A - G - P = 0 \quad (2)$$

以 A 为转动轴，

$$\Sigma M_A = N_B l\sin\alpha - G \cdot x\cos\alpha - P\frac{l\cos\alpha}{2} = 0 \quad (3)$$

解(1)、(2)式求出 N_B，代入(3)式得

$$\mu(G + P)l\sin\alpha - Gx\cos\alpha - P\frac{l\cos\alpha}{2} = 0，$$

$$x = \frac{\mu(G + P)l\sin\alpha - P\frac{l\cos\alpha}{2}}{G\cos\alpha}，$$

最大高度 h=csin? 。

361．长为 l、质量为 m 的梯子，其上端靠在竖直光滑的墙上，下端和粗糙的地面成?角。离梯子上端 s 的地方站着一个质量为 M 的人。求阻止梯子滑动的摩擦力的大小。

［解答］　作梯子受力图，并列出以 A 点为转动轴的力矩平衡方程

$mgAO\cos? + MgAC\cos? - N_B AB\sin? = 0$，

由水平方向合力为零，得 $f=N_B$，

$$f = N_B = \frac{mg\cdot\dfrac{l}{2}\cos\alpha + Mg(l-2)\cos\alpha}{l\sin\alpha} = \frac{mgl + 2Mgl - 2Mgs}{2l}\mathrm{ctg}\alpha。$$

362．长为 l、重为 P 的梯子 AB 靠在墙上，和水平面成?角。梯子和地面间的静摩擦系数为μ_1，梯子和墙之间的静摩擦系数为μ_2。设梯子的重心在梯的中点。求梯子可以保持平衡的最小角?以及地面和墙对梯子的作用力。

［解答］　梯子受到的力为重力 P、A 点弹力 N_1、摩擦力 f_1 和 B 点的弹力 N_2、静摩擦力 f_2。由于梯子有滑倒的趋势，所以 f_2 方向向上。

$$\Sigma F_x = N_2 - f_1 = N_2 - \mu_1 N_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = N_2 + f_2 - P = N_1 + \mu_2 N_2 - P = 0 \qquad (2)$$

以 A 为转动轴，

$$\Sigma M_A = f_2 l\cos\alpha + N_2 l\sin\alpha - P\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

由(3)式得　　$\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{P/2 - \mu_2 N_2}{N_2}$，

由(1)、(2)式解得

$$N_1 = \frac{P}{1+\mu_1\mu_2}，\qquad N_2 = \frac{\mu_1 P}{1+\mu_1\mu_2}，$$

代入上式可得

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}。$$

363．一架 A 字形的扶梯，它的顶端用铰链连接在一起，如图所示。CD 是一根用来防止梯子滑动的绳子，系在梯子的中部。梯子重不计，两个单梯间的夹角$2\alpha = 2\mathrm{arctg}0.5$。地面光滑，有一个重G的人站在E处，$EB = \dfrac{2}{3}BO$。求：(1)地面对每一单梯上的作用力；(2)绳上张力；(3)铰链对一个单梯上作用力的水平分量和竖直分量。

[解答]对整个梯子进行受力分析：由于地面光滑，A、B 两处的支承力 N_A 和 N_B 垂直于地面方向向上，还有人对梯子的压力 P，其大小为 G。

$$\sum F_y = N_A + N_B - G = 0 \qquad (1)$$

以 B 为转动轴，

$$\sum M_B = N_A \cdot AB - G \cdot \frac{AB}{3} = 0 \qquad (2)$$

解得 $N_A = \frac{G}{3}$，$N_B = \frac{2G}{3}$。

分析左边单梯，以 O 为转动轴，

$$\sum M_O = T \cdot \frac{OA}{2}\cos\alpha - N_A \cdot OA\sin\alpha = 0，$$

$$T = 2N_A \mathrm{tg}\alpha = \frac{G}{3}。$$

铰链在 O 点对左梯的作用力水平分量 F_x 为

$F_x = -T = -\frac{G}{3}$，竖直分量 $F_y = -N_A = -\frac{G}{3}$。

如果分析右边的单梯[图(c)]，则

$$\sum M_O = N_B \cdot OB \cdot \sin\alpha - T \cdot \frac{OB}{2}\cos\alpha - G \cdot \frac{AB}{3} \cdot \sin\alpha = 0，$$

解得 $T = \frac{G}{3}$。

$$\sum F_y = N_B + F_y' - G = 0，得 F_y' = \frac{G}{3}。$$

$F_x' = -T = \frac{G}{3}$。可见铰链对右梯和左梯的作用力恰好大小相等方向相反。

364．如图(a)所示，重为 G 的箱子 M 被钳形工具提起，依靠接触面 D 和 E 处摩擦力维护平衡。如果 DE=2a，H=4a，AB=BC=2a，∠OAB=∠OCB=90°，∠ABC=60°，钳形工具重力忽略不计。求钳形工具在 D 和 E 处对箱子的压力和使箱子维持平衡所需的最小摩擦系数。

[解答]整个系统只有箱子计重，所以细绳 PO 中的张力。选 O 点为研究对象，O 点受 T 和 T_1、T_2 三个拉力作用而平衡[图(b)]，由于三力之间的夹角都为 120°，所以 $T_1=T_2=T=G$。选箱子为研究对象，箱子共受到重力 G，钳对它的压力 N_D、N_E，工具对箱子的最大静摩擦力 f_D 和 f_E[图(c)]，由平衡条件，得

$$f_D = f_E = f_S，\ 2f_S - G = 0，\ f_S = \frac{G}{2}，\ f_S = \mu_0 N，$$

所以 $N = \frac{f_S}{\mu_0} = \frac{G}{2\mu_0}$。

选钳臂的一边 AE 为研究对象，B 为固定转动轴，作用于 B 点的力的力

矩为零。A点受力T_1'，E点受N'和f_E'[图(d)]。它们的大小牛顿第三定律可判断。

$$\sum M_B = T_1' \cdot 2a + f_E' \cdot a - N' \cdot 4a = 0,$$

$$N' = N = \frac{G}{2\mu_0},\ T' = T_1 = G,\ f_E' = f_E = \frac{G}{2}。$$

解得 $$\mu_0 = 0.8,\ N = \frac{5}{8}G。$$

365．长度为 L 的长方形木块平堆在水平地面上，压在另一个木块上面的木块都伸出木块长的 1/4。问最多可以堆几块同样的木块刚好不翻倒？

[分析]设堆块木块，由于每块都伸出$\frac{L}{4}$，所以总长度为$(n-1)\frac{L}{4}+L$。因为所有木块都相同，其总的重心正好在总长度的中间，重力的作用线不能超出最下面一块的支面，所以。

$$\frac{1}{2}\left[(n-1)\frac{L}{4}+L\right] \leq L。$$

[解答] $2L \geq L + (n-1)\frac{L}{4}$，

$(n-1) \leq 4$，

$n \leq 5$。

最多可堆 5 块。

366．把 4 个密度均匀、体积、形状都相同，但质料不同的长方形木块 A、B、C、D，依次在长度一半的地方胶合起来[图(a)]。如果 A、B的重量都为G，C的重力为$\frac{G}{2}$，放在水平桌面上，为了不使倾倒，则 D 的重力最多只能是多少？

[分析]要使这个粘合体不倾倒，这四块木块合起来的重力作用线不能超出木块 A 的底面范围，最多落在木块 A 的边缘上。

[解答]设木块重分别为 G_A、G_B、G_C 和 G_D 木块的长度为 L。由于每块木块依次长度伸出一半，粘合体各部分受到的重力如图(b)所示。要不超出 A 块的边缘，即合起来的重心不得在 B 木块的重心的右侧。就以 B 点为转动轴，由力矩平衡可得$G_A \cdot \frac{L}{2} = G_C \cdot \frac{L}{2} + G_D \cdot L$。

由于 $G_A = G$，$G_C = \frac{G}{2}$，代入可得 $\frac{GL}{2} = \frac{G}{2} \cdot \frac{L}{2} + G_D \cdot L$，

解得 $$G_D = \frac{G}{4}。$$

367．建筑工人用 4 块砖砌成屋顶的边缘，使每一块砖压着下面的砖并伸出一部分。如果砖不用水泥粘紧而处于平衡。问各砖能伸出的最大长度分别为多少？

[解答]第一块砖能处于平衡状态，它的重力作用线不能超出第二块

砖

的边线，所以第一块砖能伸出的最大长度为$\frac{L}{2}$（L为每块砖的长度）。

第一块砖和第二块砖合在一起重心为B，显然在离第二块的边缘$\frac{L}{4}$处，

所以第二块砖放在第三块砖上面时，最多只能伸出$\frac{L}{4}$。

第一、二两块砖重心在 B，重为 2G，第三块砖重心在 C，重为 G。这三块砖合起来的重心在 AC 连线上的 D 点。以 D 点为转动轴，由力矩平衡求得$2G\cdot x=G\left(\frac{L}{2}-x\right)$，解得$x=\frac{L}{6}$，所以第三块砖只能伸出本身长度的$\frac{1}{6}$。 同理可得 $3G\cdot x'=G\left(\frac{L}{2}-x\right)$，解得$x'=\frac{1}{8}$，即第四块只能伸长本身长度的$\frac{1}{8}$。

368．立方体的一个棱放在地板上，另一棱靠在墙上，设棱和墙跟地面的静摩擦系数分别为μ_1和μ_2。试问此两棱之间的立方体表面和地面成多大的角度时，立方体才能恰巧处于平衡状态而不致滑倒？

[分析]立方体受力有：重力 G，墙和地面上 A、B 两点对立方体的作用力 Q_1、Q_2及摩擦力 f_1和 f_2。$f_1=\mu_1Q_1$；$f_2=\mu_2Q_2$。

$$\Sigma F_y=Q_2+f_1-G=Q_2+\mu_1Q_1-G=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_x=Q_1-f_2=Q_1-\mu_2Q_2=0 \qquad (2)$$

解(1)、(2)式得$Q_1=\frac{\mu_2}{1+\mu_1\mu_2}G$，$Q_2=\frac{1}{1+\mu_1\mu_2}G$。

以B点为转动轴，由力矩平衡得

$$\sum MB=f_1\cdot a\cos\alpha-G\cdot\frac{\sqrt{2}a}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+Q_1\cdot a\sin\alpha=0 \qquad (3)$$

$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$，

代入(3)式，整理后得$\left(\frac{G}{2}+Q_1\right)\sin\alpha-\left(\frac{G}{2}-\mu_1Q_1\right)\cos\alpha=0$，

将Q_1值代入解得 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{G-2\mu_1Q_1}{G+2Q_1}=\frac{G(1-\mu_1\mu_2)}{G(1+2\mu_2+\mu_1\mu_2)}$

$$=\frac{1-\mu_1\mu_2}{1+2\mu_2+\mu_1\mu_2}。$$

[解答]由图可知，当$a〉\frac{\pi}{4}$时，立方体将绕B点作顺时针转动，不可能保持平衡，而$a=\frac{\pi}{4}$时，立方体处于不稳平衡状态，所以立方体保持稳定平衡的条件是

$$1\rangle\ \text{tg}\alpha \geq \frac{1-\mu_1\mu_2}{1+2\mu_2+\mu_1\mu_2}。$$

369．图(a)中的圆柱体重 G=200 牛，圆柱体和θ_1=30°斜面间的静摩擦系数μ_1=0.1，θ_2=60°，斜面间的静摩擦系数μ_2=0..2。问：欲使圆柱体以 O 为轴转动,作用在圆柱体边缘垂直向上的最小拉力 F 应为多大？

[解答]对圆柱体进行受力分析[图(b)]：由于θ_1=θ_2=90°，可将重力 G 和拉力 F 分成垂直于两个斜面的两个分量。圆柱体和θ_1斜面间的摩擦力

$$f_1=\mu_1(G\cos\theta_1-F\cos\theta_2) \qquad (1)$$

圆柱体和斜面间的摩擦力

$$f_2=\mu_2(G\cos\theta_2-F\cos\theta_1) \qquad (2)$$

设圆柱体的半径为 R，以 O 为转动轴，由力矩平衡得

$$FR=(f_1+f_2)R \qquad (3)$$

解(1)、(2)、(3)式，可得

$$F=\frac{\mu_1 G\cos\theta_1+\mu_2 F\cos\theta_2}{\mu_1\cos\theta_1+\mu_2\cos\theta_2+1},$$

将数据代入上式可得 F=31.5 牛。

370．一个球放在底部粗糙的平面盘内，盘底和水平成某一角度α[图(a)]。有一平行于盘底的线拉住球的上端，使球保持。如果球和盘的静摩擦系数等于μ，要使球保持平衡，盘底倾斜的最大角度α是多少？

[解答]球受到的力有：重力 G，盘底对球的弹力 N，绳的拉力 T；由于球有沿盘底向下滑动的趋势，所以盘底对球有静摩擦力 f，方向沿盘底向上。选球心 O 为坐标原点，x 轴沿盘底向上。则由平衡条件得

$$\Sigma F_x=T+f-mg\sin\alpha=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=N-mg\cos\alpha=0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_0=fR-TR=0 \qquad (3)$$

由(1)、(3)式解得，$T=f=\frac{1}{2}mg\sin\alpha$，

由(2)式得 $N=mg\cos\alpha$。

由于静摩擦力 $f\leq\mu N$，

即 $\frac{1}{2}mg\sin\alpha\leq\mu mg\cos\alpha$，

得 $\text{tg}\alpha\leq 2\mu$，即最大角度 $\alpha=\text{arctg}2\mu$。

371．有一根重为 G 的杆 AB，下端 B 用铰链固定，上端 A 拴在一条水平的绳子上，杆和水平面构成α角。求铰链对杆的作用力和绳的张力。

[解答]设铰链对 B 端作用力以分量和来表示。杆还受到重力 G 和绳的张力 T。

$$\Sigma F_x=Q_x-T=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=Q_y-G=0 \qquad (2)$$

以B点为转动轴，

$$\Sigma M = Tl\sin\alpha - \frac{Gl}{2}\cos\alpha = 0 \qquad (3)$$

由方程解得 $Q_x = T = \frac{G}{2}\mathrm{ctg}\alpha$，$Q_y = G$。

铰链对B的作用力 $Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = G\sqrt{1 + \frac{1}{4}\mathrm{ctg}^2\alpha}$，

方向 $\mathrm{tg}\beta = \frac{Q_y}{Q_x} = \frac{G\mathrm{tg}\alpha}{G/2} = 2\mathrm{tg}\alpha$。

372．图(a)中粗细均匀的棒 AB 的 A 端靠在光滑的墙上，B 端用重力不计的轻绳系住，绳的另一端 C 固定在墙上。棒长 ι=2 米，要使棒和竖直方向夹角 α=45°角。问：绳的 C 端应固定在高于 A 点多少的地方？

[解答]棒受力：重力 G、墙的弹力 N、绳的拉力 T。设绳和水平夹角为 θ。

$$\Sigma F_x = N - T\cos\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = T\sin\theta - G = 0 \qquad (2)$$

以 B 点为转动轴，

$$\Sigma M_B = G\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha - Nl\cdot\sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

$a = 45°$，代入(3)式 $\frac{G}{2} = N$，

由(1)、(2)式得 $\mathrm{tg}\theta = \frac{G}{N} = 2$。

由直角△CDB中 $\mathrm{tg}\theta = \frac{CD}{DB} = \frac{CA + AD}{DB}$，$DB = AD = \frac{l}{\sqrt{2}}$，

$$CA = \mathrm{tg}\theta\cdot DB - AD = 2\cdot\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\text{米}$$

$= 1.414$米。

373．粗细均匀的棒 AB，重 16 牛，B 端搁在地面上，A 端用绳子系住，绳的另一端固定在天花板上[图(a)]。移动棒的 B 端，平衡时绳子和竖直方向之间能够达到的最大张角 θ=22°，棒和地面的夹角 α=15°。求棒和地面间的静摩擦系数。

[解答]作棒 AB 的受力图[上页图(b)]。设棒 AB 长为 ι，则根据平衡条件：

$$\Sigma M_B = G \cdot \frac{l}{2}\cos\alpha - T \cdot l\cos(\theta+\alpha) = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = f - T\sin\theta = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = N + T\cos\theta - G = 0 \quad (3)$$

由(1)式 $T = \dfrac{G\cos\alpha}{2\cos(\theta+\alpha)}$，

由(2)式 $f = T\sin\theta$，

由(3)式 $N = G - T\cos\theta$。

静摩擦系数

$$\mu = \frac{f}{N} = \frac{T\sin\theta}{G - T\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{G}{T} - \cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\frac{2\cos37°}{\cos15°} - \cos22°} = \frac{0.375}{\frac{2\times0.799}{0.966} - 0.927} = 0.516。$$

374．有一长为 l、重为 G_0 的粗细均匀杆 AB，A 端顶在竖直的粗糙墙壁上，杆端和墙面间的静摩擦系数为，B 端用一强度足够而不可伸长的绳悬挂，绳的另一端固定在墙壁 C 点。木杆处在水平位置，绳和杆的夹角为[图(a)]。(1)求杆能保持水平时和应满足的条件，(2(杆保持平衡时，在杆上某一范围内，悬挂任意重量的重物，都不能破坏杆的平衡状态，而在这个范围以外，则当重物的重 G 足够大时总可以把平衡破坏。求出这个范围来。

[解答](1)杆受四个力作用：重力，绳拉力 T，在墙壁处有弹力 N 和摩擦力 f[上页图(b)]。由平衡条件

$$\Sigma F_x = N - T\cos\theta = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma F_y = f + T\sin\theta - G_0 = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma M_A = T\sin\theta - G_0 \cdot \frac{l}{2} = 0 \qquad (3)$$

由(3)式 $T = \dfrac{G_0}{2\sin\theta}$，

代入(1)式 $N = T\cos\theta = \dfrac{G_0}{2}\mathrm{ctg}\,\theta$，

代入(2)式 $f = G_0 - \left(\dfrac{G_0}{2\sin\theta} \cdot \sin\theta\right) = \dfrac{G_0}{2}$，

当$f < f_{max}$时，即$\dfrac{G_0}{2} < \mu N$时，杆呈水平状态，保持平衡。所以平衡条件是$\mu > \dfrac{G_0}{2N} = \mathrm{tg}\,\theta$。

(2)设杆上有一 P 点，距离 A 为 x。在 P 点悬挂一个重物 G，杆仍保持平衡，则

$$\Sigma F_x = N - T\cos\theta = 0 \qquad (4)$$
$$\Sigma F_y = T\sin\theta + f - G - G_0 = 0 \qquad (5)$$
$$\Sigma M_A = Tl\sin\theta - G_0\frac{l}{2} - Gx = 0 \qquad (6)$$

当 G 为最大值时，f 即 $f_{max}=\mu N$。由(4)式得 $f_{max}=\mu T\cos\theta$，代入(5)式得

$$T = \frac{G + G_0}{\sin\theta + \mu\cos\theta} \qquad (7)$$

由(6)、(7)式得，

$$\frac{\sin\theta(G+G_0)}{\sin\theta + \mu\cos\theta}l = \frac{G_0}{2}l + Gx,$$
$$x = \frac{\sin\theta(G+G_0)l}{(\sin\theta + \mu\cos\theta)G} - \frac{G_0}{2G}l$$
$$= \left[\frac{\sin\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta} + \left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta} - \frac{l}{2}\right)\frac{G_0}{G}\right]l$$
$$= \left[\frac{\sin\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta} + \frac{\sin\theta - \mu\cos\theta}{2(\sin\theta + \mu\cos\theta)} \cdot \frac{G_0}{G}\right]l。$$

当 G 越大，后一项越小，即 AP 间距离越小。假如 G→∞时，则 AP 有一个极小值，$x_{min} = \dfrac{\sin\theta}{\sin\theta + \mu\cos\theta}l = \dfrac{l}{1 + \mu\,\mathrm{ctg}\,\theta}$。在A到P点的范围内挂任何重物都不能把平衡破坏。

375．图(a)中的 A 和 B 是钉在竖直墙上的两个光滑的钉子，一根粗细均匀的直棒插在两钉之间（质量不计），正好保持水平位置。在棒的 C 端挂一个重 100 牛的物体 G。已知 AB=0.3 米，AC=1.2 米。(1)求钉 A 和 B

对棒的作用力。(2)如果要把 A 钉稍降低一些，棒还能保持平衡吗？为什么？(3)如果钉不光滑，它和棒的静摩擦系数是 $\mu_g=0.1$，棒可以斜到什么程度而不滑动？这时钉作用在棒上的力各多大？

[解答]棒受力：钉 A 对棒作用力 F_A 竖直向下，钉 B 对棒作用力 F_B 竖直向上，还有 C 点竖直向下的力 $F_C=G$。$\Sigma F_y=F_B+F_A-G=0$。

以 A 点为转动轴，

$\Sigma M_A=FB\cdot AB-G\cdot AC=0.3F_B-1.2G=0$。

得 $F_B=400$ 牛，$F_A=300$ 牛。

(2)如果把 A 钉销降低一些，由于钉子光滑，沿棒长方向的合力向左，因此棒将向左滑动不平衡。

(3)设棒倾斜，和水平面之间的夹角为[图(b)]，则

$\Sigma F_x=\mu F_A+\mu F_B-G\sin\theta=0$。

以 B 点为转动轴，

$\Sigma M_B=F_A\cdot AB-G\cos\theta\cdot BC=0$，

$\Sigma M_C=F_A\cdot AC-F_B\cdot BC=0$。

得 FA=246 牛，FB=328 牛，$\theta\approx35°$。

376．内表面光滑的半球形碗，半径为 R，一根重为 G、长为 $\iota=\frac{4}{\sqrt{3}}$的均匀直棒AB，B端搁在碗里，A端露出碗外[下页图(a)]，求碗对棒的作用力大小各为多少？

[解法一]分析直棒受力：重力 G，碗是光滑的，碗底对棒的弹力通过碗的球心 O，碗边对棒的弹力和棒垂直为 N。设棒和水平面的夹角为θ。选取坐标轴方向为平行棒和垂直棒的 x、y 方向。∠OBC=∠OCB=∠θ。

$$\Sigma F_x=Q\cos\theta-G\sin\theta=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=N+Q\sin\theta-G\cos\theta=0 \qquad (2)$$

以 B 点为转动轴，

$$\Sigma M_B=N\cdot 2R\cos\theta-G\cos\theta\cdot\frac{\iota}{2}=0 \quad (3)$$

由(3)式， $\iota=\frac{4}{\sqrt{3}}R$，可得$N=\frac{G\iota}{4R}=\frac{G}{\sqrt{3}}$。

还可得

$$\frac{Q\cos\theta}{Q\sin\theta}=\frac{G\sin\theta}{G\left(\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{G\sqrt{3}\sin\theta}{G(\sqrt{3}\cos\theta-1)},$$

$$2\sqrt{3}\cos^2\theta-\cos\theta-\sqrt{3}=0,$$

$$(2\cos\theta-\sqrt{3})(\sqrt{3}\cos\theta+1)=0。$$

解得　$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，即 $\theta=30°$。$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，舍去。

将θ值代入(1)式得　$Q=\frac{G}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}G}{3}$。

碗边和碗底对棒的弹力大小都是 $\frac{\sqrt{3}G}{3}$。

[解法二]由于棒受三力平衡。这三个力不是平行力，而是共点力，它们相交于 D 点[图(b)]，且三力矢量必组成封闭三角形。由 B 点作水平线交 DG 于 E，为直角，BD 即直径。因 OB、OC 为半径，

∠DBC=∠OCB=∠CBE=∠θ。

直角中　$\cos2\theta=\frac{BE}{2R}$　(1)

直角△BEM中　$\cos\theta=\frac{BE}{BM}=\frac{BE}{\left(\frac{1}{2}\right)}$　(2)

由(1)、(2)式得，　$\cos2\theta=\frac{\frac{1}{2}\cdot\cos\theta}{2R}=\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}}$，

$\cos2\theta=2\cos^2\theta-1$，得$2\sqrt{3}\cos^2\theta-\cos\theta-\sqrt{3}=0$，

得　$\theta=30°$。

由力的闭合三角形找出矢量间的角度，由拉密定理得

$$\frac{G}{\sin\left(\frac{x}{2}+\theta\right)}=\frac{Q}{\sin\theta}=\frac{N}{\sin(\frac{x}{2}-2\theta)},$$

$$Q=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}G=\frac{G}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}G}{3},$$

$$N=\frac{\cos2\theta}{\cos\theta}G=\frac{G}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}G}{3}。$$

377．粗细均匀的直棒 AB 放在一固定的空心圆柱体内，圆柱体轴线和水平面平行。棒所对的圆心角为 2α，棒和圆柱体间静摩擦系数为μ。求棒平衡时和水平衡间的角度。（设棒平衡时，棒两端的静摩擦都达最大值）

[解答]设棒长为 ι，棒重为 G，棒平衡时和水平面之间角度为θ。棒在 A 点受圆柱体弹力 N_1 和最大摩擦力μN_1，在 B 点受弹力 N_2 和最大摩擦力μN_2。由于棒所对圆心角为 2α，OC 垂直于棒。OA=OB=半径，所以∠AOC=

∠BOC=∠α。棒和 A、B 两点的切线都成∠α。取坐标轴为平行于棒和垂直于棒，得，

$\Sigma F_x = G\sin\theta + N_1\sin\alpha - N_2\sin\alpha - \mu N_2\cos\alpha - \mu N_1\cos\alpha = 0$，

$\Sigma F_y = G\cos\theta + \mu N_2\sin\alpha - N_1\cos\alpha - N_2\cos\alpha - \mu N_1\sin\alpha = 0$。

两式相除，得

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{\cos\alpha(N_1+N_2)+\mu\sin\alpha(N_1-N_2)}{\sin\alpha(N_2-N_1)+\mu\cos\alpha(N_1+N_2)}$$

以B点为转动轴，得

$$\Sigma M_B = (N_1\cos\alpha + \mu N_1\sin\alpha)\,\iota - \frac{1}{2}\,\iota\cdot G\cos\theta = 0$$

$$N_1 = \frac{\frac{G}{2}\cos\theta}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

以 A 点为转动轴，得，

$$\Sigma M_A = (N_2\cos\alpha - \mu N_2\sin\alpha)\,\iota - \frac{1}{2}\,\iota\cdot G\cos\theta = 0，$$

$$N_2 = \frac{\frac{G}{2}\cos\theta}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

由(2)、(3)式得　$N_1 + N_2 = \frac{G}{2}\cos\theta$，$\frac{2\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \mu^2\sin^2\alpha}$。

代入(1)式得

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{2\cos^2\alpha - 2\mu\sin^2\alpha}{2\mu\sin^2\alpha + 2\mu\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \mu^2\sin^2\alpha}{\mu(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha}{\mu} - \mu\sin^2\alpha，$$

$$\theta = \operatorname{ctg}^{-1}\left[\frac{\cos^2\alpha}{\mu} - \mu\sin^2\alpha\right]。$$

378．一个圆球半径为 r，置于两块互相垂直的板间球和板的摩擦系数μ都等于 1/3。如果在球上加一垂直向下的力 F，其大小为球重的两部。问：应加于离球心水平距离多大处，才能使球作逆时针转动？

[解答]小球除受重力 G、作用力 F 外，在 A、B 两点分别受弹力 N_A、N_B和摩擦力 F_A、F_B。

$\Sigma F_x = N_A - f_B = 0$　　(1)

$\Sigma F_y = N_B + f_A - G - F = 0$　　(2)

以 O 点为转动轴，

$\Sigma M = (f_A + f_B)\cdot r - Fs = 0$　　(3)

$f_A = \mu N_A$　　(4)

$f_B = \mu N_B$　　(5)

由(1)、(5)式　　$N_A = \mu NB$　　(6)

由(2)、(4)式　　　$N_B+\mu N_A=F+G$　　　(7)

将(4)、(5)式代入(3)式

$\mu(N_A+N_B)\cdot=Fs$　　(8)

由(6)式代入(7)式　　$(1+\mu^2)N_B=F+G$　　(9)

(6)式代入(8)式　　$\mu(1+\mu)N_B\cdot r=Fs$　　(10)

从(9)式和(10)式$N_B=\dfrac{F\cdot s}{\mu(1+\mu)\cdot r}=\dfrac{F+G}{1+\mu^2}$，

$$s=\frac{(F+G)\mu(1+\mu)\cdot r}{F(1+\mu^2)}。$$

如果　$F=2G$，$\mu=\dfrac{1}{3}$，代入可得$s=\dfrac{3}{5}r$，

$$N_B=\frac{F\cdot s}{\mu(1+\mu)r}=2.7G，N_A=\mu N_B=\frac{N_B}{3}=0.9G，$$

$$f_A=\mu N_A=\frac{N_A}{3}=0.3G，f_B=N_A=0.9G。$$

379．球A和长方体B都是重为50牛的均匀物体。A球光滑，半径为R，离水平地面距离$b=\dfrac{R}{2}$[图(a)]。长方体B和地面间静摩擦系数，$\mu=0.4$，厚度$h=R$。用一个水平力F作用在B物上，要使系统保持静止。问F应为多大？球对竖直板的压力为多大？

[分析]设A、B物体间弹力为Q和水平间夹角为α，由于A球是光滑的，Q必然在半径方向。设F为最大值时，摩擦力f必为最大静摩擦力，以B为研究对象，受力分析如图(b)，可得

$\Sigma F_x=F-Q\cos\alpha-f=0$　　(1)

$\Sigma F_y=N_B-G_B-Q\sin\alpha=0$　　(2)

$f=\mu N_B=\mu(G_B+Q\sin\alpha)$　　(3)

取A为研究对象受力分析，可得

$\Sigma Fx=Q'\cos\alpha-NA=0$　　(4)

$\Sigma Fy=Q'\sin\alpha-GA=0$　　(5)

由(5)式得　　$Q'=\dfrac{G_A}{\sin\alpha}=Q$　　(6)

将(3)、(6)式代入(1)式可得　$F=Q\cos\alpha+f=\dfrac{G}{tg\alpha}+\mu(G_B+G_A)$

但当F值最小时，摩擦力方向为水平向右，同理可得

$$F=\frac{G_A}{tg\alpha}-\mu(G_B+G_A)$$

[解答]由题意可得AD=R+b，DE=h=R，CE平行地面，

则 $AE=AD-DE=(R+b)-R=b=\frac{R}{2}$。

所以$\alpha=30°$。

$$F_{max}=\frac{G_A}{tg\alpha}+\mu(G_B+G_A)=50\sqrt{3}牛+0.4(50+50)牛=126.6牛，$$

$$F_{min}=\frac{G_A}{tg\alpha}-\mu(G_B+G_A)=50\sqrt{3}牛-0.4(50+50)牛=46.6牛。$$

球A对竖直板间压力由(4)、(5)式得

$N_A=Q'\cos\alpha G=G_A/tg\alpha=50\sqrt{3}牛=86.6牛$，方向水平向右。

380．如图(a)所示，欲使重 150 牛的木块 B 运动，光滑圆柱体 A 的重力最小应为多少？已知木块 B 和地面间的静摩擦系数$\mu=0.2$，角$\theta=60°$。

[解答]设圆柱体重为 G_A，重力的两个分力，一个垂直于墙壁，另一个垂直于物体 B 的斜面为 F[图(b)]，则

F 等于圆柱体 A 对 B 的压力，这个压力的水平分量为

$F_x=F\sin\theta$ (2)

垂直分量

$F_y=F\cos\theta=G_A$ (3)

因此，木块 B 在水平方向受到的最大摩擦力

$f=\mu(F_y+G_B)$ (4)

G_B为木块 B 的重力。

据题意 $f=F_x$，即$\mu(F_y+G_B)=F\sin\theta$。

将(1)、(3)式代入，得 $G_A=\frac{\mu G_B}{tg\theta-\mu}$。

$$G_A=\frac{0.2\times150}{\sqrt{3}-0.2}牛=19.6牛。$$

要使木块 B 能滑动的基本条件为 $tg\theta>\mu$。

381．如图(a)所示，斜劈 A 可以在水平面上无摩擦地滑动，其倾角为θ。顶柱 B 压在 A 上，只能沿竖直方向无摩擦地上下运动。B 上放有重物 G。F 为水平向左施加在 A 上的推力。A、B 的重力可以忽略不计，它们之间的静摩擦系数为μ。求：

(1)使重物刚好不致下降，F 的数值为多少？

(2)使重物刚好不致上升，F 的数值为多少？

(3)分析当 $1>\mu>tg\theta$ 时，以上两个 F 值的正负，并说明其意义。

[解答](1)B 受力[图(b)]：重物对 B 的作用力大小等于 G，A 对 B 的弹力 N 和最大静摩擦力μN，还有挡板对顶柱的作用力 Q_1和 Q_2。

$\Sigma F_y=N\cos\theta+\mu N\sin\theta-G=0$ (1)

分析 A 受力[图(c)]：水平向左推力 F_1和地面弹力 R 以及 B 对 A 的作用 N′和$\mu N'$，数值上等于 N 和μN。

$\Sigma F_x=N\sin\theta-F_1-\mu N\cos\theta=0$ (2)

解(1)、(2)式得$F_1=\dfrac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}G$ (3)

(2)B 和 A 受力同上（水平推力用 F_2 表示），就是静摩擦力的方向相反。B 受五个力平衡[图(d)]

$\Sigma F_y=N\cos\theta-\mu N\sin\theta-G=0$ (4)

A 受四个力平衡[图(e)]

$\Sigma Fx=N\sin\theta-F_2+\mu N\cos\theta=0$ (5)

解(4)、(5)式得 $F_2=\dfrac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}G$ (6)

(3)当$\mu>tg\theta$时，即有$\mu\cos\theta>\sin\theta$，由(3)式可看出 $F_1<0$，表示要使重物处于刚要下降的状态，即要使顶柱和斜劈间的摩擦力达到最大静摩擦力，则必须给斜壁施加一个向右的力，其数值

$$F_1'=\frac{\mu\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}G \qquad (7)$$

如果所施的向右力F'小于F_1'，甚至不施力重物也不会下降，此时静摩擦力 f 足以阻止顶柱和斜劈间发生相对运动，不过其数值要小于最大静摩擦力μN。证明如下：由平稳条件

对 B $f\sin\theta+N\cos\theta=G$ (8)

对 A $f\cos\theta-N\sin\theta=F'$ (9)

当 $F'<F_1'$时，由(7)、(8)、(9)式得

$$f\cos\theta-N\sin\theta<\frac{\mu\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}G=\frac{\mu\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}(f\sin\theta+N\cos\theta),$$

化简上式即可求得 $f<\mu N$。

当 $1>\mu>tg\theta$时，$\cos\theta>\mu\cos\theta>\sin\theta>\mu\sin\theta$，

由(6)式可以看出 $F_2>0$。要使重物上升，必须施加一个向左的力 F，其数值应大于 F_2。

如果 $tg\theta>1/\mu$，即$\mu\sin\theta>\cos\theta$，由(6)式可看出 $F_2<0$ 也即要使重物上升，反而要给斜一个向右的力，这显然是不合理的。实际情况是，在$\mu\sin\theta>\cos\theta$的条件下，不管你施多大的力都不能使重物上升。证明如下：要使重物上升，顶柱一定相对于斜面向上滑动，摩擦力 f 一定是沿斜面向下。刚要滑动时，$f=\mu N$。f 在竖直方向的分量

$$f_y=-f\sin\theta=-\mu N\sin\theta。$$

负号表示其方向向下。使重物上升的力是 N 在竖直方向的分力。其数值为 $N_y=N\cos\theta$。显然，在$\mu\sin\theta>\cos\theta$的条件下，N_y 永远小于$|f_y|$，也就是说，随着 F 的增大，N_y 增加，$|f_y|$也增加，而 N_y 总不能克服$|f_y|$，因而重物永远不可能上升。

那么，$F_2<0$ 是什么意思？由前面(5)式可知相当于向右的力使 N 变成负值，因而 $f=\mu N$ 也变成负值，即沿斜面向上，在 f 向上的竖直分量使重物上升，显然是不可能。

说理和论证题

382．为什么用小螺丝刀无法旋动螺丝刀就行了？

[解答]设人用力不变都是 F，大螺丝刀的力臂（即半径 R）比小螺丝刀的力臂（即半径 r）大。F·R＞F·r，因此用大螺丝刀就比较容易旋动螺丝了。

383．用力推火车车厢和用力推车轮的上部边缘，哪一种情形下容易使车厢离开原地？

[解答]第一种情况是作用在轮轴上，以车轮和地面接触为转动轴，这个力的力臂是车轮的半径。在第二种情况中，力臂是车轮的直径。所以在第二种情况中所用的力可以较小，是第一种情形的二分之一，也就是容易使车离开原地。

384．为什么背负重物的人，身体要向前倾？

[解答]背负重物的人，人和物的总重心已移向后背，其重心的重垂线可能不再通过两脚支持的底面，这样人会摔倒。为了避免跌倒，所以人向前弯曲，使总重心往前挪动，重力的作用线（即重心的重垂线）能够通过两脚决定的支面，这样才符合平衡的条件。

385．人持手杖走路不易跌倒，为什么？

[解答]这样使人和地面有三个接触点，加大了支持面，增加了称度，所以就不易跌倒。

386．用一架不等臂的天平称一个物体，为了准确地称得这个物体的质量，应该怎样称法？如果一架等臂的天平，由于盘子的重量不等而无法调平衡，为了准确地称得一个物体的质量，又该怎样做？

[解答]在第一种情况里，设 $\iota_{左}$和 $\iota_{右}$为天平两臂的长度。第一次称量时把物体放在左盘，右盘放砝码，平衡后得 $M_xg\iota_{左}=m_1g\iota_{右}$。第二次称量时，把物体放在右盘，左盘放砝码，平衡后得 $m_2g\iota_{左}=M_xg\iota_{右}$。

由两次称量结果解得$M_x=\sqrt{m_1m_2}$。即两次称量数值的几何平均值。

在第二种情况里，设 $m_{左}$和 $m_{右}$为天平两盘的质量。

第一次称量时，把物体放在左盘，得

$$(M_x+m_{左})g\iota=(m_1+m_{右})g\iota。$$

第二次称量时，把物体放在右盘，得$(m_2+m_{左})g\iota=(M_x+m_{右})g\iota$。

解上列两式，得 $M_x=m_1+m_{右}-m_{左}$，$M_x=m_2+m_{左}-m_{右}$。

两式相加， $M_x=\frac{m_1+m_2}{2}$，即两次称量数值的算术平均值。

387．匀质杆 AB 长为 ι，可绕中点 O 转动。A、B 两端固定着两只盘子，盘子不能绕 A、B 点转动。右盘上站着一个重为 G 的人，左盘里放着重为 G 的物块。开始时，系统平衡，当站在右盘上的人用力拉系在 OB 中点 C 的绳子时，系统还能平衡吗？（不计绳的自重）

[解答]以O点为轴，左盘内重物的力矩$M=G\frac{1}{2}$，人拉绳用力F的力矩$M_1=F\frac{1}{4}\cos\alpha$，人对右盘压力的力矩$M_2=(G-F\cos\alpha)\iota/2$，人对有盘静摩擦力的力矩$M_3=Fh\sin\alpha$（h是B点到盘间的距离）。

所以，作用在右盘上的力矩和 $M'=M_1+M_2+M_3$。

由图(b)可见，$h=\frac{l}{4}\cdot ctg\alpha$。

将 h 代入 $M'=M_1+M_2+M_3$，可得 $M'=G\cdot l/2$。

即 $M'=M$，系统仍处于平衡状态。

388．A、B 两球质量都为 m，直径都为 d，用一个质量为 M 的圆罩罩在光滑的水平桌上[图(a)]，圆罩的直径为 D。已知 d＜D＜2d。求证要使圆罩对桌面无压力，且圆罩和小球都保持平衡的条件为$M=\frac{2(D-d)m}{D}$。

[证明]分析 A、B 球受力如图(b)，

A 球平衡　$\Sigma F_x=F\cos\alpha-N_A=0$，

$\Sigma F_y=F\sin\alpha-G_A=0$。

B 球平衡　$\Sigma F_x=N_B-F'\cos\alpha=0$，

$\Sigma F_y=Q_B-F'\sin\alpha-G_B=0$。

F 和 F′是作用力和反作用力，大小相等。

由上式解得　$N_A=N_B=\frac{mg}{tg\alpha}$。

分析圆罩受力如图(c)。以E点为转动轴得力矩平衡式

$$\Sigma M_E=N_B'\cdot\frac{d}{2}-Mg\cdot\frac{D}{2}-N_A'(O_1C+\frac{d}{2})=0。$$

由于$O_1O_2=d$，$O_2C=D-d$，所以$O_1C=(D-d)tg\alpha$，

且　$N_A'=N_B'=N_A=N_B=\frac{mg}{tg\alpha}$，代入得

$$Mg\cdot\frac{D}{2}=N_A\cdot O_1C=\frac{mg}{tg\alpha}(D-d)tg\alpha,$$

$$M=\frac{2(D-d)m}{D}。$$

389．三人搬一块金属板，板的形状是不等边三角形，板的厚薄及材料均匀，每人都支持着三角形的一顶点。证明三人所受到的力都相同。

[证明]设三顶角 A、B、C 三点上人所受的力为 F_A、F_B 和 F_C。观将三角板的重力按平行力的分解方法，使分成两个分力，恰好在 AD 联线上。一个分力是 F_A，另一个是 F_D，则

$F_A\times AO=F_D\times OD$。

根据三角形重心的特性，可知$AO:OD=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$，所以$F_D=2F_A$。

而F_D恰在BC边的中点，所以F_D再按平行力分解法可得$F_B=F_C=\frac{1}{2}F_D$。

$F_A=F_B=F_C$　　即三个人各负担板重的 1/3。

390．一匀质的铁丝折成等臂的“V”形[图(a)]，其悬点 E 可自由转动。在E挂一重锤，铅垂线交下臂AE于D。求证：$AD=\frac{1}{3}AF$。

[证明]设上臂 AE 重心为 G，下臂 AF 重心为 C，两臂各重 P[图(b)]。由于 AG=GE，GB∥ED。

AB=BD (1)

对于 D 点力矩平衡，P·DBcosα=P·DCcosα (2)

BD=DC

由(1)、(3)式 $AD=\frac{2}{3}AC=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}AF\right]=\frac{1}{3}AF$。

391．在等腰直角三角形ABC（C为直角）上，切去等腰三角形ABP，如果剩余部分的重心在P点。试证明：△ABP的腰长跟底边长的比为$\sqrt{5}$：4。

[证明]直角等腰三角形 ABC 中，C 为直角，AC=BC，所以∠A=∠B=45°，设 AB 边长为 2a，则

$AD=CD=DB=a$，$AC=BC=\sqrt{2}a$。

△ABC面积为$\frac{1}{2}(2a)\cdot a$，重心离D点为$\frac{1}{3}DC$。设DP为x，则△ABP面积为$\frac{1}{2}(2a)\cdot x$，重心离D点为$\frac{1}{3}DP$。据题意

$$\frac{1}{2}(2a)a\cdot\left(\frac{1}{3}DC\right)-\frac{1}{2}(2a)x\cdot\left(\frac{1}{3}DP\right)=\left[\frac{1}{2}(2a)\cdot a-\frac{1}{2}(2a)\cdot x\right](DP),$$

$$a^2\left(\frac{a}{3}\right)-ax\cdot\frac{x}{3}=(a^2-ax)\cdot x,\quad 2x^2-3ax+a^2=0。$$

解得 $x=\frac{a}{2}$，$x=a$（舍去）。

$$BP=\sqrt{DP^2+BD^2}=\sqrt{x^2+a^2}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

腰长跟底边长的比 $BP:AB=\frac{\sqrt{5}}{2}a:2a=\sqrt{5}:4$。

392．一块厚薄均匀的直角三角板 ABC，重力为 G。如果将它悬挂在直角顶点 C，要使斜边水平必须在 60°角的顶点 A 挂一个重物 P[图(a)]。试证明重力$P=\frac{2}{3}G$。

[证明]作三角板的受力图[见图(b)]，O 为三角板的重心，T 为绳子对板的拉力以 C 为转动轴，由力矩平衡得

$\Sigma M_C=G\cdot FE-P\cdot AF=0$ (1)

由于O为重心，$CO=\frac{2}{3}CD$，又因CF垂直AB，所以在AB上的投影

$$FE=\frac{2}{3}FD \qquad (2)$$

由于△ACD为等边三角形 $AF=FD$ (3)

将(2)、(3)式代入(1)式便得 $P=\frac{2}{3}G$。

393．如图均匀木棒 AB 重 G，用细绳 AC、BC 悬挂起来，∠ACB=90°，要使 AB 棒保持水平应在 A 端挂一个重物 P，如果∠ABC=α，试证：

$$P=\frac{G}{2}(\mathrm{ctg}^2\alpha-1)。$$

[证明]设棒 AB 长为 ι，由悬点 C 作竖直方向线交 AB 于 D 点。由于棒水平方向，故∠ACD=α，且 CD⊥AB。设 AD 长为 d，由平衡条件以 C 点为转动轴，由力矩平衡可得

$$P\cdot d=G\left(\frac{\iota}{2}-d\right),$$

在直角△ACB 中：AC=ιsinα。

由直角△ADC 中：d=AD=AC·sinα=ι$\sin^2\alpha$。

代入上式得 $$P=\left(\frac{\iota}{2d}-1\right)G=\left(\frac{1}{2\sin^2\alpha}-1\right)G=\frac{1-2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}G$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-2\sin^2\alpha}{2\sin^2\alpha}G=\frac{G}{2}(\mathrm{ctg}^2\alpha-1)。$$

394．在均匀木棒 AB 的两端各系一绳，系 A 端的绳的另一端固定在天花板上，再将系于 B 端的绳拉到水平状态，绳和棒跟水平方向的夹角如图(a)所示。试证明： tgα=2tgθ。

[证明]木棒受力：重力 G，水平绳的拉力 F 和 A 端绳子拉力 T。作受力图(b)，由木棒平衡条件得

$\Sigma F_x=F-T\cos\alpha=0$ (1)

$\Sigma F_y=T\sin\alpha-G=0$ (2)

$$\Sigma MA=F\cdot\iota\sin\theta-G\cdot\frac{\iota}{2}\cos\theta=0 \quad (3)$$

由(3)式得 $$F=\frac{G}{2\mathrm{tg}\theta} \quad (4)$$

由(2)式得 $$T=\frac{G}{\sin\alpha} \quad (5)$$

代入(1)式得 $$F=T\cos\alpha=\frac{G}{\mathrm{tg}\alpha} \quad (6)$$

由(4)式和(6)式可得 tgα=2tgθ。

395．粗细均匀的棒 AB 两端用两线悬于一定点 E。两线长和杆长的比为 2∶3∶4。试证明线内的张力和杆重的比为 2∶3∶$\sqrt{10}$。

[证明]杆 AB 受重力 G 和两线拉力 T_1 和 T_2 处于平衡状态。设 x 轴沿 AB 方向，由平衡条件得

$$T_1\sin\alpha+T_2\sin\beta=G\sin\varphi \quad (1)$$

$$T_1\cos\alpha-T_2\cos\beta=-G\cos\varphi \quad (2)$$

以C点为转动轴，

$$T_1\frac{1}{2}AB\sin\alpha-T_2\frac{1}{2}AB\sin\beta=0 \quad (3)$$

解得 $T1=\frac{G}{2}\quad\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ (4)

$T2=\frac{G}{2}\quad\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ (5)

AE：BE：AB=2：3：4，

根据余弦定律，

$$\cos\alpha=\frac{2^2+4^2-3^2}{2\times2\times4}=\frac{11}{16}，\ \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{3}{16}\sqrt{15}，$$

$$\cos\beta=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\times3\times4}=\frac{7}{8}，\ \sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{15}}{8}。$$

$$EC=\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2+3^2-2\times2\times3\times\frac{7}{8}}=\sqrt{\frac{5}{2}}。$$

由正弦定律 $\sin\theta=\frac{\frac{4}{2}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\sin\beta=2\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{10}}{4}，\qquad \varphi=\theta+\beta。$$

$$\sin\varphi=\sin(\theta+\beta)=\sin\theta\cos\beta+\cos\theta\sin\beta$$

$$=\frac{6}{4}\times\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{10}}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{8}=\frac{7\sqrt{6}+\sqrt{150}}{32}，$$

将各角度的三角函数值代入(4)、(5)式中得

$$T_1=\frac{G}{2}\cdot\frac{\left(\frac{7\sqrt{6}+\sqrt{150}}{32}\right)}{\frac{3}{16}\sqrt{15}}=\frac{7\sqrt{6}+\sqrt{150}}{12\sqrt{15}}G$$

$$=\left(\frac{7}{12}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{\sqrt{10}}{12}\right)G=\frac{\sqrt{10}}{12}\left(\frac{7}{5}+1\right)G=\frac{\sqrt{10}}{12}\times\frac{12}{5}G$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{5}G=\frac{2}{\sqrt{10}}G，$$

$$T_2=\frac{G}{2}\cdot\frac{\left(\frac{7\sqrt{6}+\sqrt{150}}{32}\right)}{\frac{\sqrt{15}}{8}}=\frac{7\sqrt{6}+\sqrt{150}}{8\sqrt{15}}G=\left(\frac{7}{8}\sqrt{\frac{2}{5}}+\frac{\sqrt{10}}{8}\right)\Gamma$$

$$=\left(\frac{7}{40}\sqrt{10}+\frac{\sqrt{10}}{8}\right)G=\frac{3}{10}\sqrt{10}G=\frac{3}{\sqrt{10}}G。$$

$$T_1：T_2：G=\frac{2}{\sqrt{10}}G：\frac{3}{\sqrt{10}}G：G=2：3：\sqrt{10}。$$

396．粗细均匀的棒 AB，重为 G。A 端系于钩上，B 端以绳牵引。如

果在 B 端、绳子和水平方向所夹的角都是θ，在 A 端钩子的绳和水平方向成α角，求证：钩对棒的作用力$F=\frac{G}{4}\sqrt{8+\csc^2\theta}$。

[证明]设棒 AB 长为 L，B 点绳对棒的拉力为 T，A 点钩对棒的作用力为 F。由平衡条件得

$$\Sigma F_x=T\cos\theta-F\cos\alpha=0,$$

$$F\cos\alpha=T\cos\theta。$$

$$\Sigma F_y=T\sin\theta+F\sin\alpha-G=0,\quad F\sin\alpha=G-T\sin\theta。$$

$$\Sigma M_A=T\cdot L\sin2\theta-G\frac{L}{2}\cos\theta=0,$$

得
$$T=\frac{G\cos\theta}{2\sin2\theta}=\frac{G\cos\theta}{4\sin\theta\cos\theta}=\frac{G}{4\sin\theta}。$$

解得
$$\begin{aligned}F&=\sqrt{T^2\cos^2\theta+G^2-2GT\sin\theta+T^2\sin^2\theta}\\&=\sqrt{T^2+G^2-2GT\sin\theta}\\&=\sqrt{\left(\frac{G}{4\sin\theta}\right)^2+G^2-2G\left(\frac{G}{4\sin\theta}\right)\sin\theta}\\&=\sqrt{\left(\frac{G}{4\sin\theta}\right)^2+\frac{G^2}{2}}\\&=\frac{G}{4}\sqrt{8+\frac{1}{\sin^2\theta}}\\&=\frac{G}{4}\sqrt{8+\csc^2\theta}。\end{aligned}$$

397．如图(a)，A、B 为相距 2 的两根木桩，有一根棒置于 A 上、B 下，棒和两木桩的静摩系数为μ，现由两木桩的摩擦作用使棒恰好不能下滑，试证该棒的重心和A的距离必定等于$\alpha\left(\frac{ctg\theta}{\mu}-1\right)$。（θ为棒和竖直方向的夹角。）

[证明]设棒重心为 C，重力为 G。棒受力[图(b)]：A 点弹力为 N_1 和摩擦力 f_1，B 点弹力为 N_2 和摩擦力为 f_2。

沿棒方向上合力$\Sigma F=f_1+f_2-G\cos\theta=0$，可得

$$G\cos\theta=\mu(N_1+N_2)$$

以 A 点为转动轴，由力矩平衡，$\Sigma M_A=G\cdot x\cdot\sin\theta-N_2\cdot 2a=0$，

以 B 点为转动轴，由力矩平衡，$\Sigma M_B=G(x+2a)\sin\theta-N_1\cdot 2a=0$，

解得
$$N_1+N_2=\left(\frac{x+a}{a}\right)\sin\theta\cdot G,$$

$$G\cos\theta=\mu\left(\frac{x+a}{a}\right)\sin\theta\cdot G,$$

$$x=a\left(\frac{ctg\theta}{\mu}-1\right)。$$

398．粗细均匀的直棒长 2a，重 G，置于半径为 r 的光滑半球形杯内。棒的一端露出杯外，平衡时棒和水平间夹角为 θ。求证：2rcos2θ=acosθ。

[证明]由于杯光滑无摩擦，杯内壁对棒的作用力 R_A 和内壁垂直且通过球心 O。杯边对棒的作用力 R_B 和棒垂直。这两个作用力和棒的重力 G 合力为零，使棒处于平衡状态。三个非平行力平衡必须相交一点，如图中 P。因 AP 通过球心，∠ABP 为直角，所以 P 点必相交在圆周上。AP 为直径。同理，PG 为竖直方向。自 A 作 PC 之垂线和 PC 交于 E。AE 为水平方向，∠AEP 为直角，AP 为直径，E 点必定在圆周上。∠OBA=∠OAB=∠θ(OA=OB 为半径，△OAB 为等腰三角形)。在直角△AED 中，AE=APcos2θ=2rcos2θ。在直角△CEA 中 AE=ACcosθ=acosθ。2rcos2θ=acosθ。

399．一线系于正方形均匀平板的一顶点，线和板的一边等长，其一端系在光滑铅直的墙上，如图(a)所示。如果板面垂直墙面，求证在平衡时，除了跟墙接解的 A 点外，B 点、C 点、D 点距离墙的比为 1∶4∶3。

[证明]通过 B、C、D 分别作墙的垂直线，其垂足分别为 B′、C′和 D′。平板受到三个力[图(b)]：重力 P、线的拉力 F 和墙的弹力 N。由于墙壁光滑，N 和墙垂直。三个非平行力平衡其作用线必相交于一点如图中 O。G 为平板据题意线长和边长相等，即 KB=AB。

△KBB′≌△ABB′。得 KB′=AB′，

由于　　BB′∥AO，AO=2BB′　　(1)

由于G在对角线中点，$\frac{AO}{OA'}=\frac{AG}{GC}=1$。

CC′=A′A=2AO=4BB′　　(2)

由于△ABB′≌△CDD″，DD″=BB″，

所以 DD′=D′D″－DD″=CC′－BB′=3BB′　　(3)

根据(1)、(2)、(3)式可得，平衡时 B、C、D 点距离墙的比为 1∶4∶3。

实验题

400．要是不用任何工具，怎样确定一根不均匀木棒的重心？

[参考解答]把木棒搭在分开而且侧立着的两手掌上边，然后缓慢地移动两手，逐渐靠近，最后两手就会移动到重心处。理由是，当一只手移近重心时，它所受到的压力比离重心较远的另一只手所受到的压力来得大。而滑动摩擦力是随着压力的增大而增大的。当这个摩擦力超过木棒跟另一只手之间的静摩擦力时，木棒相对于第一只手相静止，而相对于第二只手则开始运动。所以，当两手靠拢时，也就是木棒的重心位置。

401．台秤的最大刻度为 500 克，要称一本质量大约 1 千克的书，另外还有一个可以利用的线团，怎样才能完成任务？

[参考解答]先取一段线，使它的长度等于书的一边的长度，把线对折

再对折，量出书长的$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{8}$的长度，用铅笔标在书边上。

将书的一边搁在台秤上，在标出的那些点中选一点，用手指将书支起（如图）。注意使秤的指针不超过最大刻度。

设书质量为 M，秤的读数为 m，以手指处作为支点，书要保持平衡，

必须使顺时针力矩和逆时针力矩相等，则

$$mg\iota = Mg\left(\iota - \frac{L}{2}\right),$$

由此得 $$M = \frac{2\iota}{2\iota - L}m。$$

如果 $$\iota = \frac{7}{8}L，则M = \frac{7}{3}m。$$

402．有一块长方形木料，它的高比长、宽大得多，现在只有一把直尺，如何确定该长方体跟室内地板之间的摩擦系数？

[参考解答]如果在离木块底部为 h 处，作用一个水平的力 F，当这个力大于最大静摩擦力时，木块将移动。把这个力向上移动（增大 h）使木块不再移动而在原地翻转，这时力 F 相对于 A 点的力矩大于重力 G 相对于 A 点的力矩。

如果力 F 找到这样一个作用点，当力作用在该点时刚好木块由第一种情况过渡到第二种情况，则由下两式

$$F=kG \quad (1)$$

$$Fh = G \cdot \frac{a}{2} \quad (2)$$

解得摩擦系数 $$k = \frac{a}{2h}。$$

显然木块的高度应满足 $$b > \frac{a}{2k}。$$

403．实际观察一下杆秤（如图所示）并回答(1)杆秤为什么要装两个提纽？如何选用这两个提纽？(2)观察杆秤的刻度起点（又称定盘星）在什么位置？是怎样确定的？(3)用杆秤称一个物体的重力，你能根据称量的结果，推算出秤砣的重力吗？

[参考解答](1)杆秤的提纽即杠杆的支点，装有两个提纽时，即可以选用不同的支点，靠近被称物体的提纽是称量范围较大的一个。

(2)秤的刻度起点表秤砣挂在这里时挂钩上未挂物体，示数为零。实际上就是以提纽为支点，而秤杆的重力作用在它的重心，秤砣所悬细绳的拉力作用在刻度起点，两力的力矩取得平衡。因此一般情况盘星是 在提纽的左边，如图中 A 点，即

$$OA \cdot G_{砣}=OC \cdot G_{杆}$$

(3)设被称物体为 $G_{物}$时，秤砣要移到 M 点才能平衡，则

$$OB \cdot G_{物}=OC \cdot G_{杆}+OM \cdot G_{砣}。$$

将上式代入

$$OB \cdot G_{物}=OA \cdot G_{砣}+OM \cdot G_{砣},$$

秤砣重 $$G_{砣} = \frac{OB}{OA+OM}G_{物} = \frac{OB}{AM}G_{物}。$$

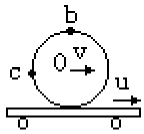
而物重由秤杆上的刻度能够读出，所以可推算出秤砣的重力。

填充题

404.一列长 300 米的队伍以 2 米/秒的速度匀速前进，通讯员从排尾以 3 米/秒的速度走到排头传令后，立即以原速度返回。则通讯员所用的时间是

360 秒。如果通讯员传令后就地休息，那末，从通讯员出发到排尾走到通讯员身旁所需要的时间是 450 秒。

405.如图所示，小车以速度 u 向前方运动，半径为 R 的圆盘在车上滚动，盘心 O 相对于小车速度是 v 向前，则盘上 b 点相对小车的速度大小是 2v，方向是水平向前；相对地面速度大小是 u+2v，方向是水平向前。盘上 c 点相对小车速度大小是 $\sqrt{2}v$，方向是与水平成 45°；相对地面的速度大小是 $\sqrt{v^2+(v+u)^2}$ 方向是和水平成 $\mathrm{arc\ tg}\dfrac{v}{v+u}$。



406.甲、乙、丙三个物体在同一方向上作匀变速直线运动。通过 A 点时甲的速度是 6 米/秒，加速度是 1 米/秒 ^{2}。乙的速度是 2 米/秒，加速度是 6 米/秒 ^{2}；丙的速度-4 米/秒，加速度是 2 米/秒 ^{2}。下列时刻，哪一个运动最快？哪一个运动最慢。通过 A 点时甲最快，乙最慢；通过 A 点前 1 秒时丙最快，乙最慢；通过 A 点后 1 秒时乙最快，丙最慢。

407.一辆汽车在行驶过程中经历了三个运动阶段：第一阶段由静止开始逐渐达到某一速度；第二阶段以这一速度匀速行驶；第三阶段紧急刹车很快停止。在第二阶段，汽车的平均速度最大；第三阶段，汽车的加速度最大；在第二阶段，汽车的加速度最小。

408.物体由静止作匀加速直线运动，它在最初一分钟内走了 540 米，那末它在最初一分钟的后半分钟走了 405 米。

409.做匀变速直线运动的物体，在第 2 秒内走了 6 米，第 5 秒钟内走的位移和是零，那末它的初速度是 9 米/秒，加速度大小是-2 米/秒 ^{2}。

410.作匀加速直线运动的物体，初速度是 50 厘米/秒，加速度是 10 厘米/秒 ^{2}，那末第 4 秒末的即时速度 v_4=90 厘米/秒，头 4 秒内的平均速度 $\bar{v}_4$=70 厘米/秒，4 秒内通过的位移 S_4=280 厘米，第 4 秒内通过的位移 S_{IV}=85 厘米。

411.某物体以加速度 a=-1 米/秒 ^{2} 做匀变速直线运动，经过 A 点时刻的速度 v_A=30 米/秒，再过 10 秒钟经过 B 点，则即时速度 v_B=20 米/秒；AB 两点间距离 s_{AB}=250 米。经过 A 点前 10 秒钟在 O 点，则即时速度 v_0=40 米/秒，距离 s_{0A}=350 米。

412.飞机起飞的速度相对于静止空气是 60 米/秒。航空母舰以 20 米/秒的速度向东航行，停在航空母舰上的飞机也向东起飞，飞机的加速度是 4 米/秒 ^{2}。则起飞时间需要 10 秒，起飞的跑道至少需 200 米长。

413.一架飞机沿仰角 30°方向向上作匀加速直线运动，初速度 100 米/秒，加速度 10 米/秒 ^{2}，经过 4 秒，飞机发生的位移是 480 米，飞机在竖直方向上升了 240 米。

414.以速度为 10 米/秒作匀速直线行驶的汽车，在第 2 秒末关闭发动机，第 3 秒内的平均速度为 9.0 米/秒，则汽车的加速度是-2 米/秒 ^{2}，汽车在 10 秒钟内的位移是 45 米。

415.一个作匀加速运动的物体，它在第 1 秒内通过的位移是 3 米，在第 2 秒内通过的位移是 5 米，则它的初速度为 2 米/秒，加速度是 2 米/秒 ^{2}。在

第 3 秒内通过的位移是 7 米，在第 4 秒末的速度为 10 米/秒，在第 4 秒内的平均速度 9 米/秒，3 秒内的平均速度是 5 米/秒。

416.一个做匀加速运动的物体，它在开始计时连续两个 4 秒钟的时间间隔内所通过的位移分别是 24 米和 64 米，则这个物体的初速度是 v_0=1 米/秒，加速度是 a=2.5 米/秒 ^{2}。

417.火车以速率 v_1 向前行驶，司机突然发现在前方同一轨道上距车为 s 处有另一辆火车，它正沿相同的方向以较小的速率 v_2 作匀速运动。于是司机立即使车作匀减速运动，加速度的大小为 a。要使两车不致相撞，则 a 应满足关系式 $a \geq \frac{(v_1 - v_2)^2}{2s}$。

418.以一定加速度 a 运动的物体，当它速度减到初速度 v_0 的一半时，需要经过 $t = \frac{v_0}{2a}$ 时间，在这段时间内物体通过的位移 $s = \frac{3v_0^2}{8a}$。

419.在匀变速直线运动中，如果加速度 a 和初速度 v_0 方向相反时，则当 $t = \frac{2v_0}{a}$ 时，位移 s 和初速度 v_0 同向。当 $t = \frac{2v_0}{a}$ 时 s 和 v_0 反向；当时 $t = \frac{v_0}{a}$ 时，即时速度 v_t 和 v_0 同向。当 $t = \frac{v_0}{a}$ 时，v_t 和 v_0 反向。

420.自由落体落到 A 点时的速度为 20 米/秒,这物体在 A 点上方 10 米处的速度 v_1=14 米/秒，在 A 点下方 10 米处的速度 v_2=24.5 米/秒。（g≈10 米/秒 ^{2}）

421.自由落下的物体，在第 n 秒内和第（n-1）秒内落下的路程差是 9.8 米。

422.物体从 180 米高处自由落下，（g=10 米/秒 ^{2}）如果把 180 米分成三段，使物体经过每段的时间都相等，则每段长度自上而下依次为 20 米，60 米，100 米。物体通过每段长度的末速度依次为 20 米/秒，40 米/秒，60 米/秒。

423.竖直上抛的物体在上升阶段的平均速度是 9.8 米/秒,物体上抛的初速度是 19.6 米/秒，物体从抛出到落回原处所需时间是 4 秒。

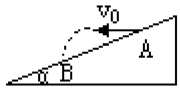
424.一个以初速度 v_0（以 v_0 为正方向）竖直上抛的物体，它的加速度是 $-g$。在 $t = \frac{v_0}{g}$ 时刻位移最大，它的值是 $\frac{v_0^2}{2g}$；回到原点所需的时间是 $\frac{2v_0}{g}$，速度是 $-v_0$。

425.小球从离地 5 米高、离竖直墙 4 米远处以 8 米/秒的速度向墙水平抛出，不计空气阻力，则小球碰墙点离地高度为 3.75 米，要使小球不碰到墙，它的初速度必须小于 4 米/秒。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

426.在以 18 千米/小时速度向前开行的火车上有一个乘客相对于火车用 5 米/秒的速度水平向后抛出第一块石子，竖直向上抛出第二块石子，让第三块石子放手自由落下。那么站在铁路边的人看到：第一块石子作自由落体运动；第二块石子作斜上抛运动；第三块石子作平抛运动。

427.离地面h高处，以初速度v_0水平抛出一个物体，空气阻力不计，测得它落地时间为t，落地点距抛出点的水平距离为s。如果h不变，初速度为$8v_0$，则落地所需时间为 <u>t，</u>落地点的水平距离为 <u>8s</u>。如果 v_0 不变，抛出点离地面高8h，则落地所需时间为$\underline{2\sqrt{2}t}$，落地点的水平距离为$2\sqrt{2}s$。

428.如图所示，在倾角为α的斜面上A点，以初速度v_0平抛出一个物体，落在B点，则AB间的距离为$\underline{\dfrac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha}}$，物体在空中飞行的时间为$\underline{\dfrac{2v_0}{g}\operatorname{tg}\alpha}$。



429.用初速度v_0、投射角为30°，斜向上踢出一只足球。如果不计空气阻力，则足球升到最高点时的速度值为$\underline{\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0}$，球落回到地时的竖直分速度值为$\underline{\dfrac{1}{2}v_0}$。

430.用相同初速斜向上抛出两个物体，抛射角分别为θ_1和θ_2。已知$\theta_1+\theta_2=90°$，但$\theta_1\neq\theta_2$。当两个物体落到和抛出点在同一水平面上的位置时，两物体的飞行时间<u>不等</u>，射高<u>不等</u>，水平射程<u>相等</u>。（空格内填等或者填不等）

选择题

431.下列情况中的物体，哪几种情况可看作质点

a．地面上放一只木箱，在上面箱角处用水平力F推它，当研究它是先滑动还是先翻转的时候；

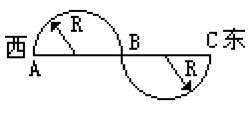
b．上述木箱，在外力作用下沿地面作匀速运动时；

c．汽车的后轮，在研究牵引力来源的时候

d．人造卫星，在研究它绕地球转动的时候。

答 (b、d)

432.物体沿两个半径为R的半圆弧由A到C，则它的位移和路程分别是



a．0,0；

b．4R向东,2πR向东；

c．4πR向东,4R；

d．4R向东，2πR；

e．4R,2πR。

答 (d)

433.两辆汽车在平直的公路上并排行驶，甲车内一个人看见窗外树木向东移动，乙车内一个人发现甲车没有运动。如果以大地为参照物，上述事实说明

a．甲车向西运动，乙车不动；

b．乙车向西运动，甲车不动；

c．甲车向西运动，乙车向东运动；

d．甲乙两车以相同速度同时向西运动。

答　(d)

434.坐在行驶着的列车里的乘客，看到铁轨两旁的树木迅速后退，这位乘客选取的参照物是

a．树木；

b．地面；

c．迎面驶来的列车；

d．乘客乘坐的列车。

答　(d)

435.甲、乙、丙三个观察者，同时观察一个物体的运动。甲说：“它在作匀速运动”，乙说：“它是静止的”，丙说：“它在作加速运动”。正确判断这三个人的说法是

a．在任何情况下都不对；

b．三人中总有一人或两人是讲错的；

c．如果选定同一参照物，那末三人的说法就都对了；

d．如果各自选择自己的参照物，那末三人的说法就都对了。

答　(d)

436.两辆汽车从同一车站出发，由于出发时间有先后，它们一前一后在公路上行驶，当后面的车追上前面的车时，两车

a．速度一样；

b．驶过的路程一样；

c．受的力一样；

d．速度、驶过的路程、受的力都可能不一样。

答　(b)

437.下列关于速度和加速度的说法中，哪些是正确的？

a．速度是描速运动物体位置变化大小的物理量，而加速度是描述运动物体速度变化大小的物理量；

b．速度是描速运动物体位置变化快慢的物理量，而加速度是描述运动物体速度变化快慢的物理量；

c．运动物体的速度变化的大小跟速度变化的快慢实质上是同一个意义；

d．速度的变化率表示速度变化的快慢，而不表示速度变化的大小。

答　(b)、(d)

438.一个运动物体经过△t 时间后又回到原处。回到原处时的速率和初速率大小相等，都是 v；但运动方向相反，则物体在△t 的时间内的平均加速度 a的大小是

a．$\frac{v}{\Delta t}$；　　b．0；

c．$\frac{2v}{\Delta t}$；　　d．无法确定。

答　(c)

439.物体由 A 沿直线运动到 B，前一半时间是速度 v_1 的匀速运动；后一

半时间是速度 v_2 的匀速运动，则整个运动的平均速度是

a．$\frac{v_1+v_2}{2}$；　　b．$\frac{v_1v_2}{v_1+v_2}$；

c．$\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$；　　d．$\frac{v_1+v_2}{v_1v_2}$。

答　(a)

440.一个物体作匀速直线运动，前一半路程的速度是 v_1，后一半路程的速度是 v_2，则全程的平均速度是

a．$\frac{v_1+v_2}{2}$；　　b．$\frac{v_1 \cdot v_2}{v_1+v_2}$；

c．$\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$；　　d．$\frac{v_1+v_2}{v_1 \cdot v_2}$。

答　(c)

441.船在静水中的速度为 v_1，水流速度为 v_2，河宽 s。当船头垂直向河岸航行时，则

a．实际行程最短；

b．过河时间最短；

c．水流速度增大时，渡河时间不变；

d．当船速不变时，水流速度增大，渡河时间也增长。

答　(b、c)

442.在东西向航线上的甲乙两地，无风天气，以速率 v 飞行的飞机往返一次所需时间是 t。现正值刮由东向西的大风，如果飞机相对于风的速率总保持为 v，则往返两地一次所需时间

a．大于 t；　　b．等于 t；

c．小于 t；　　d．不能确定。

答　(a)

443.某人在车厢内用同样的力跳远：(1)车停着，向前跳；(2)车匀速行驶，在车内朝车前进方向跳；(3)车匀速行驶，在车内逆着前进方向跳。这三种情况对车厢地板来说，跳过的距离是

a．第二次最大，第一次其次，第三次最小；

b．第一次最大，第二、三次由于车运动都要小；

c．第三次最大，第二次其次，第一次最小；

d．一样大。

答　(d)

444.一个已知的速度，要分解成为两个大小和方向都是唯一的分速度，至少应该知道

a．两个分速度的大小；

b．两个分速度的方向；

c．一个分速度的大小和方向；

d．一个分速度的大小和另一个分速度的方向。

答　(a、b、c、d)

445.做匀变速直线运动的物体，在某一段时间△t 内经过的位移是△s，

则△s/△t 表示

a．物体在△t 这段时间内的平均速度；

b．物体在△t 这段时间末的即时速度；

c．物体在△t 这段时间内速度的增加量；

d．物体在△s 这段位移中点时的即时速度。

答　(a)

446.质点做匀变速直线运动时

a．相等的时间内的位移变化相等；

b．相等的时间内的速度变化相等；

c．即时速度的大小不断改变，但方向一定是不变的；

d．加速度是恒量。

答　(b、d)

447.关于速度和加速度的叙述中，下面的结论中哪个正确？

a．匀变速直线运动中$\bar{v}=\frac{v_t}{2}$；

b．物体的速度越大，它的加速度也一定越大；

c．物体运动的加速度为零，它的速度也为零；

d．物体运动的速度改变越大，它的加速度也一定越大；

e．加速度的大小是表示物体速度随时间变化率的大小。

答　(e)

448.关于速度和加速度的叙述，下面说法哪种是不可能的？

a．加速度减小，但速度在增加；

b．加速度方向始终和速度方向垂直，但速度却在变化；

c．加速度一直不变，但速度的大小不变、方向时刻在改变；

d．加速度和速度的大小一直在变；但加速度最大时，速度最小。加速度最小时，速度最大。

答　(c)

449.下列是关于物体运动的一些说法，哪种是不可能的？

a．物体的速率在增大，而位移在减小；

b．物体的加速度的大小不变，速率也不变；

c．物体的速度为零，而加速度最大；

d.物体的加速度跟速度方向相同,当加速度减小时,速度也随之减小。

答　(d)

450.物体作匀加速直线运动，在给定的时间间隔 t 秒内

a．它的加速度愈大，它的位移一定愈长；

b．它的初速度愈大，它的位移一定愈长；

c．它的末速度愈大，它的位移一定愈长；

d．它的平均速度愈大，它的位移一定愈长。

答　(d)

451.物体从静止开始作匀加速直线运动，已知第 2 秒内位移为 s，则物体运动的加速度大小为

a．$\frac{2}{s}$;　　　　b．$\frac{s}{2}$;

c．$\frac{3}{2}s$;　　　　d．$\frac{2}{3}s$.

答　(d)

452.物体作匀加速直线运动，已知加速度为 2 米/秒^2，那末任意一种时间内

a．物体的末速度一定等于初速度的 2 倍；

b．物体的末速度一定比初速度大 2 米/秒；

c．第 n 秒的初速度一定比第（n-1）秒的末速度大 2 米/秒；

d．第 n 秒的初速度一定比第（n-1）秒的初速度大 2 米/秒。

答　(b、d)

453.作匀变速直线运动的物体,它的加速度是 a,在时间 t 内的位移是 s，末速度是 v，则 a、t、s、v 之间的关系为

a．$s=vt+\frac{1}{2}at^2$；　　　　b．$s=-vt+\frac{1}{2}at^2$；

c．$s=-vt-\frac{1}{2}at^2$；　　　　d．$s=vt-\frac{1}{2}at^2$。

答　(d)

454.物体的初速度为 v_0，以不变的加速度 a 作直线运动，如果要使速度增加到初速的 n 倍，则经过的位移是

a．$\frac{v_0^2}{2a}(n^2-1)$；　　　　b．$\frac{v_0^2}{2a}(n-1)$；

c．$\frac{v_0^2}{2a}n^2$；　　　　d．$\frac{v_0^2}{2a}(n-1)^2$。

答　(a)

455.有一个作匀加速直线运动的物体通过 A 点和 B 点时的速度分别为 v_A 和 v_B,(1)通过 AB 中点 C 时的速度是

a．$\frac{v_A+v_B}{2}$；　　　　b．$\sqrt{v_A+v_B}$；

c．$\sqrt{\frac{v_A^2+v_B^2}{2}}$；　　　　d．以上答案都不对。

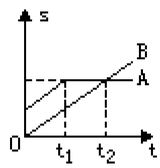
答　(c)

(2)通过 AB 的时间为 t,则在 t/2 时刻的速度为

[可供选择的答案同(1)小题。]

答　(a)

456.如图是 A 和 B 两个质点的 s-t 图线，由图可见



a．开始时（即 t=0）A 在 B 前面；

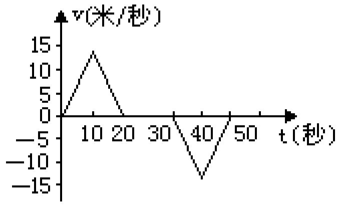
b．B 运动时的速度比 A 运动时的速度大；

c．B 在 t_2 秒时追上 A，然后跑到 A 的前面；

d．B 开始运动时的速度比 A 小，t_2 秒后 B 速度才超过 A。

答　(a、c)

457.物体运动状况如图所示，则



a．物体作变速运动；

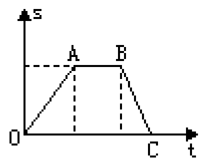
b．物体作匀速运动；

c．物体作匀变速运动；

d．物体通过的路程为零。

答　(a)

458.图是某运动质点的 s-t 图线，从图象中判断下列说法中正确的是



a．质点在 OA 段作匀加速直线运动，AB 段作匀速直线运动，BC 段作匀减速直线运动；

b．质点在 OA 段作匀速直线运动，AB 段静止不动，BC 段作匀速反回；

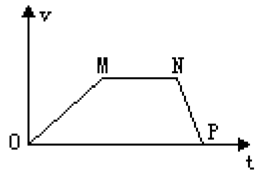
c．质点在 OA 段通过的距离大于质点在 BC 段通过的距离；

d.质点在 OA 段作匀速运动的速度大小是小于质点在 BC 段作匀速运动的速度大小；

e．质点在 OA 段的加速度大小是小于质点在 BC 段的加速度大小。

答　(b、d)

459.一个物体运动的速度图线如图所示，下列哪些结论可以由此推出？



a．O 到 M 的加速度数值小于 N 到 P 的加速度数值；

b．在加速期间的位移大于减速期间的位移；

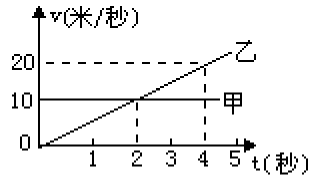
c．梯形 OMNP 的面积表示在时间 OP 中移动的位移；

d．M 到 N 的加速度是负的；

e．M 到 N 这段时间内是静止的。

答　(a、b、c)

460.两个质点甲和乙，同时由同一地点沿同一方向作直线运动，它们的 r-t 图线如图所示，则



a．甲做匀速运动，乙做匀加速运动；

b．2 秒前甲比乙速度快，2 秒后乙比甲速度快；

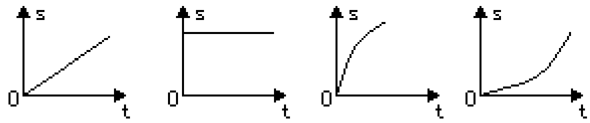
c．在 4 秒时刻，乙追上甲；

d．在第 2 秒内，甲的平均速度大于乙的平均速度。

答　（a、b、c、d）

461.一个物体沿斜面从静止开始向下作匀加速运动，下列图象中正确的是哪个？

（1）s-t 图



a．如图（1）所示；

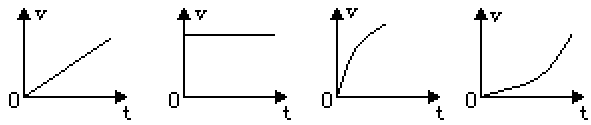
b．如图（2）所示；

c．如图（3）所示；

d．如图（4）所示；

答　（d）

（2）v-t 图



a．如图（1）所示；

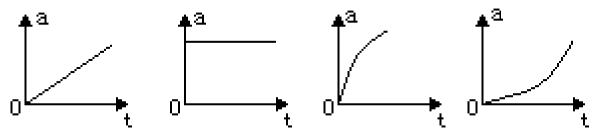
b．如图（2）所示；

c．如图（3）所示；

d．如图（4）所示；

答　（a）

（3）a-t 图



a．如图（1）所示；

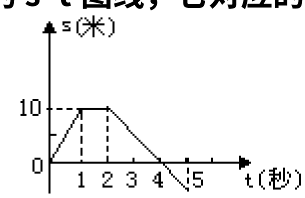
b．如图（2）所示；

c．如图（3）所示；

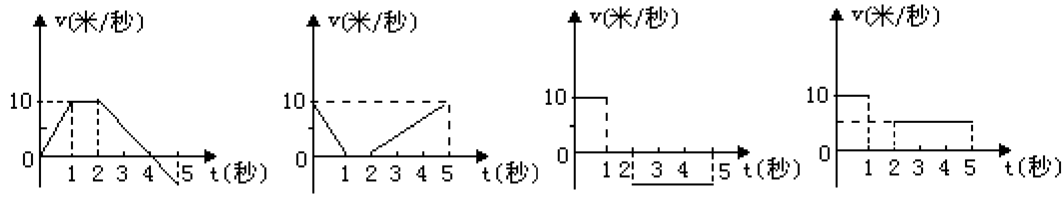
d．如图（4）所示；

答　（b）

462.如图为一个质点的 s-t 图线，它对应的 v-t 图线应为



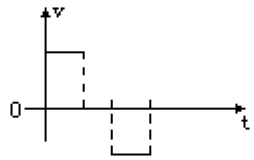
a．如图（1）所示；
b．如图（2）所示；
c．如图（3）所示；
d．如图（4）所示；



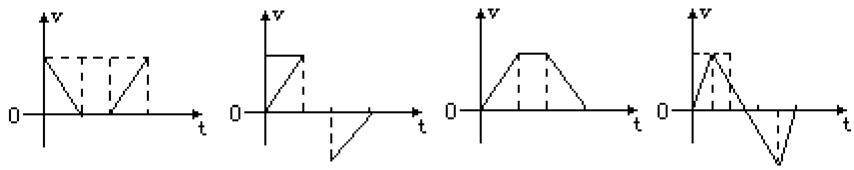
(1)　(2)　(3)　(4)

答　(c)

463.一个质点运动的 v-t 图线如图所示，则相对应的 s-t 图线是



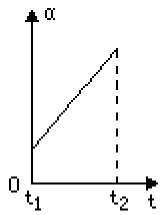
a．如图（1）所示；
b．如图（2）所示；
c．如图（3）所示；
d．如图（4）所示；



(1)　(2)　(3)　(4)

答　(c)

464.下页的图是表示一个物体沿一条直线移动的加速度随时间变化的图线，则图线下面的面积可以表示为



a．从时间 t_1 到 t_2 所移动的距离；
b．所考虑时间内的平均加速度；
c．所考虑时间内的平均速度；
d．时刻 t_2 时的速度；
e．从时间 t_1 到 t_2 内速度的增量。

答　(e)

465.已知长为 L 的光滑斜面，物体从斜面顶端由静止开始下滑。当物体的速度是到达斜面底端速度的一半时，它沿斜面滑下的距离是

a．$\frac{L}{2}$；　　　　b．$\frac{\sqrt{2}L}{2}$；

c．$\frac{L}{4}$；　　　　d．$(\sqrt{2}-1)L$。

答　(c)

466.物体从长为 L 的光滑斜面顶端静止开始下滑，滑到底端的速度是 v，如果物体以$v_0=\frac{1}{2}v$的初速度从斜面的底端沿斜面上滑，则可以达到的最大距离为

a．$\frac{L}{2}$；　　　　b．$\frac{L}{4}$；

c．$\frac{3}{4}L$；　　　　d．$\frac{\sqrt{2}}{2}L$。

答　(b)

467.物体从离地 100 米的空中自由落下，不计空气阻力且 g 取 10 米/秒^2。如果把 100 米分成 5 段，第一种分法是经过每段的时间相同，第二段的距离为 h；第二种分法是每段的距离相同，经过第二段的时间为 t，则 h 和 t 的值应是

a．h=4 米，t=2 秒；

b．h=4 米，t=0.41 秒；

c．h=12 米，t=0.83 秒；

d．h=20 米，t=2 秒；

答　(c)

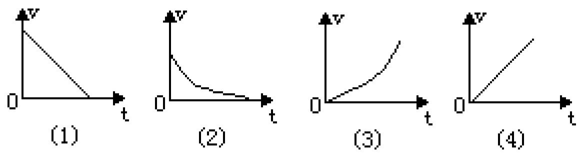
468.一个物体作自由落体运动，这物体的下落速度 v 跟时间 t 的关系可以用图表示为

a．如图（1）所示；

b．如图（2）所示；

c．如图（3）所示；

d．如图（4）所示；



答　(d)

469.物体作自由落体运动，把下落的距离分成相等的两段，则物体通过上半段距离的时间和通过下半段距离的时间的比为

a．$1:1$；　　　　b．$1:\sqrt{2}$；

c．$1:(\sqrt{2}-1)$；　　　　d．$1:(\sqrt{2}+1)$；

e．$1:(\sqrt{3}-\sqrt{2})$.

答　(c)

470.物体从高 H 处自由下落，经过 H/2 高度处的速度为

a．$\sqrt{2gH}$；　　　　b．$\frac{1}{2}\sqrt{gH}$；

c．$\sqrt{gH}$；　　　　d．$\sqrt{\frac{gH}{2}}$。

答　(c)

471.把自由落体运动下落的总距离分成长度相等的三段。按从上到下的顺序，经过这三段路程的平均速度的比是

a．1:3:5；　　　　b．1:4:9；

c．$1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$；　　　　d．$1:(\sqrt{2}+1):(\sqrt{3}+\sqrt{2})$。

答　(d)

472.一个物体从火车窗口自由落下，窗口相对地面的高度是 h，当甲车厢不动，乙车厢以速度 v 匀速前进，丙车厢以加速度 a 前进。在上述三种情况下，物体下落情况是

a．甲最快；　　　　b．乙最快；

c．丙最快；　　　　d．一样快

答　(d)

473.一个物体从匀速直线运动的汽车窗口落下，不计空气阻力和风的影响。则对于路旁的观察者来说，物体作

a．自由落体运动；

b．匀速运动；

c．平抛运动；

d．减速运动；

答　(c)

对于车上的观察者来说，物体作

a．自由落体运动；

b．匀速运动；

c．平抛运动；

d．减速运动；

答　(a)

474.从加速上升着的气球上落下一个物体，物体离开气球的瞬间是

a．有向上的加速度和向下的速度；

b．有向下的加速度和向上的速度；

c．没有加速度也没有速度；

d．没有加速度，但有向上的速度。

答　(b)

475.将一只小球竖直上抛，当它达到最高点时速度为零，加速度的方向是

a．方向从向下变为向下；

b．方向从向下变为向上；

c．方向向上；

d．方向向下。

答　(d)

476.一个竖直上抛的物体，在上升过程和下落过程中所受的空气阻力数

值相等。则

a．上升时间大于下落时间；

b．上升时间等于下落时间；

c．上升时间小于下落时间；

d．不能确定。

答　(c)

477.对竖直上抛物体运动的描述，下面哪几句是正确的？

a.竖直上抛物体运动可以看作向上的匀速运动和向下的自由落体运动的合成；

b．当向上的匀速运动速度还大于自由落体运动的速度时，合速度向上；且物体向上运动。当两个速度相等时，合速度为零。物体不再向上运动，达到最高点；

c．当向上匀速运动的位移还大于自由落体运动的位移时，合位移向上，物体在抛出点上面。当两个位移相等时，合位移为零，物体回到抛出点；

d．当向上匀速运动的速度小于自由落体运动的速度时，物体就在抛出点下面。

答　(a、b、c)

478.一只气球下系一重物，匀速上升。当它升到 100 米高处时，系绳忽然断开、重物下落。这一物体从绳断开始到落到地面的下落运动和从 100 米高处自由下落物体的运动相比

a．下降的时间相同；

b．下降的路程相同；

c．下降的位移相同；

d．落地时的速度相同；

e．上述答案都不对。

答　(c)

479.在楼房阳台边缘外侧同时以相同的初速率抛出两个小球，甲球竖直上抛；乙球竖直下抛。则两球着地时的速度

a．$v_{甲}>v_{乙}$；

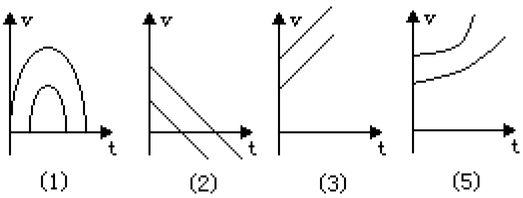
b．$v_{甲}<v_{乙}$；

c．$v_{甲}=v_{乙}$；

d．要看甲、乙两球的质量哪个大，哪个速度就大。

答　(c)

480.两个物体从同一地点、同一时刻竖直上抛。甲的初速度是乙的初速度的两倍，则它们的速度图线是下图中哪一个（设向上速度为正）



a．如图（1）所示；

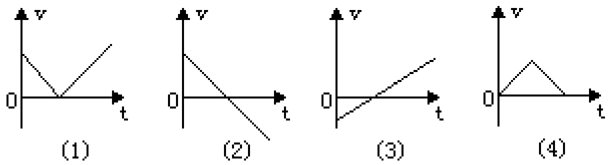
b．如图（2）所示；

c．如图（3）所示；

d．如图（4）所示；

答　(b)

481.设向上的速度为正，竖直上抛的物体在整个运动过程中的速度 v 和时间 t 的关系是



a．如图（1）所示；

b．如图（2）所示；

c．如图（3）所示；

d．如图（4）所示；

答　(b)

482.从地面竖直向上抛出一个物体 A，同时在离地某一高度处另有一个物体 B 自由落下。两物体在空中到达同一高度时速率都是 v，则下列说法正确的是

a．物体 A 上抛初速和物体 B 落地的速率都是 2v；

b．物体 A 和物体 B 落地时间相等；

c．物体 A 能上升的最大高度和物体 B 开始下落时的高度相同；

d．两物体在空中到达同一高度处一定是 B 物体开始下落时高度的中点。

答　(a、c)

483.物体以某一初速度作竖直下抛运动，在运动过程中应有

a．第二秒内速度的变化量应比第一秒内速度的变化量大；

b．第二秒内通过的位移和第一秒内通过的位移的比是 3:1；

c．第二秒内通过的位移和第一秒内通过的位移的比是 4:1；

d．第二秒内速度的变化量和第一秒内速度的变化量相同。

答　(d)

484.一个物体以初速度 v_0 米/秒水平抛出，经过 t 秒时水平速度大小和竖直速度大小相等。那末，t 等于

a．1秒；　　b．$\frac{v_0}{g}$秒；

c．$\frac{v_0}{2g}$秒；　　d．$\frac{2v_0}{g}$秒。

答　(b)

485.一个物体从某一确定的高度以 v_0 的初速度水平抛出，已知它落地时的速度为 v_t，那么它的运动时间是

a．$\frac{v_t - v_0}{g}$；　　b．$\frac{v_t - v_0}{2g}$；

c．$\frac{v_t^2 - v_0^2}{2g}$；　　d．$\frac{\sqrt{v_t^2 - v_0^2}}{g}$。

答　(d)

486.位于同一地区、同一高度的两个物体，一个沿水平方向抛出的同时，

另一个自由落下。则它们在运动过程中

a．加速度不同、相同时刻速度不同；

b．加速度相同、相同时刻速度相同；

c．加速度不同、相同时刻速度相同；

d．加速度相同、相同时刻速度不同；

答　(d)

487.在高度为 h 的同一位置上向水平方向同时抛出两个小球 A 和 B。如果 A 球的初速 v_A 大于 B 球的初速 v_B，则下列说法正确的是

a．A 球落地时间小于 B 球落地时间；

b．A 球的射程大于 B 球的射程；

c．如果两球在飞行中遇到一堵竖直的墙，A 球击中墙的高度总是大于 B 球击中墙的高度；

d．在空中飞行的任意时刻，A 球的速率总是大于 B 球的速率；

e．由于两个小球质量大小末知，以上比较都无法确定。

答　(b、c、d)

488.从高度 h 的楼顶上，以水平速度 v_0 抛出一物体（空气阻力不计），则物体从抛出到着地的时间

a．只和 v_0 有关。v_0 越大，所需时间越长；

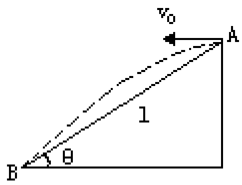
b．只和 h 有关。h 越高，所需时间越长；

c．和 v_0、h 两者都有关。

d．和 v_0、h 都没有关系。

答　(b)

489.倾角为 θ 的斜面长为 l，在顶端 A 点水平抛出一石子，它刚好落在这个斜面底端的 B 点。则抛出石子的初速度 v_0 为



a． $\cos\theta\sqrt{\frac{gl}{2\sin\theta}}$；　　b． $\cos\theta\sqrt{\frac{gl}{\sin\theta}}$；

c． $\sin\theta\sqrt{\frac{gl}{2\cos\theta}}$；　　d． $\cos\theta\sqrt{\frac{2gl}{\sin\theta}}$。

答　(a)

490.在水平匀速飞行的飞机上，相隔 1 秒钟先后落下物体 A 和 B。在落地前，A 物体将

a．在 B 物之前；

b．在 B 物之后；

c．在 B 物正下方；

d．在 B 物前下方。

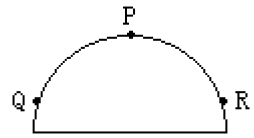
答　(c)

491.具有最大水平射程的斜上抛的物体，它的抛射角 θ，水平射程 s 和最高点的高度 H 有如下的结果

a． $\theta=30°, s=2\sqrt{3}H$；
b． θ=45°，s=4H；
c． θ=45°，s=2H；
d． θ=60°，s=2H

答　(b)

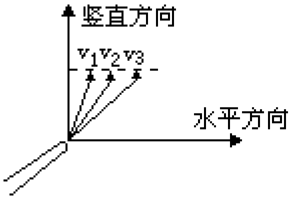
492.如图是斜向上抛出物体的轨迹。P 点是物体达到最高点，Q 点和 R 点是轨道上在同一水平线上的两个点。下列叙述中哪些说法是正确的（不计空气阻力）？



a．物体在 P 点的速度为零；
b．物体在 Q 点的速率等于在 R 点的速率；
c．物体在 R 点的水平分速度和 Q 点的水平分速度不一定相等；
d．轨道相对于通过 P 点的竖直线对称。

答　(b、d)

493.有一架高射炮先后以不同的初速度 v_1、v_2、v_3 射出三颗炮弹。它们速度的大小和方向如图所示，则三颗炮弹



a．到达最高点的高度、时间都不同；
b．到达最高点的高度、时间都相同；
c．到达最高点的高度相同、时间不同；
d．落回地面的速度大小和各自的发射速度大小相同。

答　(b、d)

494.有两个斜抛物体，它们的初速度大小相同，方向倾斜向上，和水平地面间所成角度分别为 45°+α和 45°-α。在空气阻力可以忽略不计的情况下，它们的水平射程的比是

a．（cosα- sinα）:（cosα+sinα）；
b．（cosα+sinα）:（cosα- sinα）；
c．1:1；
d．sin2α:cos2α。

答　(c)

495.宇航员在人造卫星的实验室内沿水平方向抛出一弹性球，这球的运动情况是

a．沿抛物线落在地板上；
b．在实验室两竖直的内壁之间来回不停地碰撞下去；
c．在实验室两竖直的内壁之间碰撞后停留在空中某一点；
d．离开手后不久就停留在空中某一点。

答　(b)

496.在离地高为 h 的地方，以 v_0 的初速同时使三个小球作平抛、斜上抛、斜下抛运动，如果不计空气阻力，则三球

a．飞行时间相同；

b．水平方向位移相同；

c．落地速度大小相同；

d．以上都不正确。

答 (c)

497.有一个气球静止在空中，气球下悬一个物体作为目标，如果在地面上用枪射击这个目标。在击发的同时，目标离开气球作自由落体运动（在子弹射程内，不计空气阻力）要使子弹击中目标，则瞄准时必须

a．对准目标；

b．对准目标下方；

c．对准目标上方；

d．条件不足无法瞄准。

答 (a)

498.在水平地面上用仰角为θ，初速为 v_0，斜抛一个物体，则在飞行的整个时间内，物体速率的最大值 v_{max} 和最小值 v_{min} 是

a．$v_{max}=v_0$，$v_{min}=0$；

b．$v_{max}=v_0\sin\theta$，$v_{min}=0$；

c．$v_{max}=v_0$，$v_{min}=v_0\cos\theta$；

d．$v_{max}=v_0\sin\theta$，$v_{min}=v_0\cos\theta$。

答 (c)

499.对于自由落体、竖直上抛、平抛和斜抛这四种不同形式的运动，以下说法中哪些是正确的？

a．它们都是匀变速运动；

b．它们的加速度大小相等、方向不同；

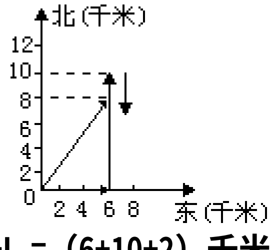
c．它们的加速度大小相等、方向相同；

d．它们的加速度大小不等、方向相同。

答 (a、c)

计算题

500.某人向东行 6 千米，再向北行 10 千米，又向南行 2 千米，试计算他的路程和位移。



[解答] 路程 $L=L_1+L_2+L_3=(6+10+2)$ 千米=18 千米。

位移 $s_x=6$ 千米，$s_y=(10-2)$ 千米。

$$s=\sqrt{s_x^2+s_y^2}=\sqrt{6^2+(10-2)^2}\text{ 千米}$$

$$=10\text{千米}.$$

位移方向东偏北，偏角α。

$$\alpha = tg^{-1}\frac{8}{6} = tg^{-1}1.33 = 53°\ 8'。$$

501.骑车人从A沿直线运动到B。他以15千米/小时的速度通过了一半位移，剩下的时间内，一半以12千米/小时的速度；一半以6千米/小时的速度到达终点。求他在整个位移中的平均速度。

［解答］ 把整个运动过程分为三段。

设第一段的位移为 s_1，速度为 v_1，时间为 t_1；

第二段的位移为 s_2，速度为 v_2，时间为 t_2；

第三段的位移为 s_3，速度为 v_3，时间为 t_3；

由题意可知 $s_1=s_2+s_3$，$t_2=t_3$。

整个位移中的平均速度 $\bar{v} = \frac{s_1+s_2+s_3}{t_1+t_2+t_3}$。

$$\bar{v} = \frac{2s_1}{\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_2}{v_2}+\frac{s_3}{v_3}} = \frac{2s_1}{\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_1}{\frac{v_2+v_3}{2}}},$$

$$= \frac{2v_1(v_2+v_3)}{2v_1+v_2+v_3} = \frac{2\times15\times(12+6)}{2\times15+12+6}\text{千米/小时},$$

$$= 11.25\text{千米/小时}.$$

502.一辆汽车先以速度 v_1 通过前三分之一位移，再以速度 v_2=50 千米/小时通过其余三分之二位移。如果整个位移的平均速度 $\bar{v}$=37.5 千米/小时，求第一段位移的速度。

［解答］ 设整个路程为s，通过第一段位移所用时间为 t_1；通过第二段位移所用时间为 t_2。则

$$t_1+t_2 = \frac{s}{3v_1}+\frac{2s}{3v_2} = \frac{s}{\bar{v}},$$

由此得出 $$v_1 = \frac{\bar{v}v_2}{3v_2-2\bar{v}} = \frac{37.5\times50}{3\times50-2\times37.5}\text{千米/小时} = 25\text{千米/小时}。$$

503.一个质点按照在直角坐标轴上的投影方程x=a+bt,y=c+dt所确定的规律运动。求质点的速度v的大小和方向。

［解答］ 这个质点沿x轴方向上为匀速直线运动，速度为 v_x=b。y轴方向上也是匀速直线运动，速度为 v_y=d。它的合运动也是一个匀速直线运动。

$$v = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{b^2+d^2}\text{。方向和}x\text{轴夹角}\phi\text{。}$$

$$tg\phi = \frac{v_y}{v_x} = \frac{d}{b}\text{。当}t=0\text{时，就是起始位置的坐标}(a,c)\text{。}$$

504.电台转播音乐会的实况演出，一位坐在剧院里的观众和一位远离剧院坐在收音机旁的收听者在听同一节目。（已知扩音器装在舞台上，声音在空气中的传播速度是340米/秒，无线电波的传播速度是 3×10^8 米/秒）试求：

（1）在7500千米远处一位无线电收听者，和剧院里离舞台30米处的观

众来说，谁先听到歌唱家的声音？

（2）要使剧院里的观众和无线电收听者同时听到前奏曲的第一个声音，他应当坐在离舞台多远的地方？

（3）要使无线电收听者和坐在剧院里离舞台 30 米远的观众同时听到同一声音，他应当坐在离收音机多远的地方？

[解答]（1）设剧院里的观众用 1 表示，收音机的听者用 2 表示。由匀速运动公式

$$t_1=\frac{s_1}{v_1}=\frac{30}{340}\text{秒}=8.8\times10^{-2}\text{秒}。$$

$$t_2=\frac{s_2}{v_2}=\frac{7500\times10^2}{3\times10^8}\text{秒}=2.5\times10^{-2}\text{秒}。$$

所以收音机前的听者先听到声音。

（2）要使他们同时听到，则$t_1=t_2$，即$\frac{s_1'}{v_1}=\frac{s_2}{v_2}$。

所以 $$s_1'=s_2\frac{v_1}{v_2}=\frac{7500\times10^3\times340}{3\times10^8}\text{米}=8.5\text{米}.$$

（3）无线电波传播到收音机放声这段时间内，声音从舞台只能传到剧院中 8.5 米处。如果要使收音机的听者和剧院中 30 米处观众同时听到，则收音机前的听者要远离收音机 s'_2，即

$$s'_2=s_1-s'_1=(30-8.5)\text{米}=21.5\text{米}。$$

505.火车铁路的钢轨每根长 12.5 米，如果火车内旅客在 1 分 20 秒钟内听到火车轮撞击钢轨接头处的声音 100 次。那末火车的速度是多少？

[解答]

$$v=\frac{s}{t}=\frac{12.5\times100}{80}\text{米/秒}=15.6\text{米/秒}。$$

506.列车的技术速度是 50 千米/小时，如果列车在各站停留所用的时间一共是 2 小时，因此使它的运转速度等于 40 千米/小时。求列车所经过的距离是多少千米？[技术速度等于列车从甲地到乙地所用的时间(不包括停车时间）去除两地的距离。运转速度等于列车所用的总时间（包括停车时间）去除两地间的距离]

[解答]设列车从甲地到乙地开行的总时间为 t 小时，甲、乙两地间的距离为 s 千米。则

$$s=v_{\text{转}}\cdot t=v_{\text{运}}(t+t_{\text{停}})。$$

$$t=\frac{v_{\text{运}}t_{\text{停}}}{v_{\text{技}}-v_{\text{运}}}=\frac{40\times2}{50-40}\text{小时}=8\text{小时}。$$

所以 $$s=v_{\text{技}}t=50\times8\text{千米}=400\text{千米}。$$

507.一艘巡洋舰用 30 节（海里/小时）的速度追赶在它前面 60 海里处的一艘战斗舰。如果巡洋舰追了 120 海里才赶上，问战斗舰的速度多大？

[解答] 巡洋舰追上战斗舰所用的时间

$$t=\frac{s}{v}=\frac{120}{30}\text{小时}=4\text{小时}。$$

战斗舰在被追的4小时内的位移

s'=（120-60）海里=60海里

战斗舰的速度 $v' = \frac{s'}{t} = \frac{60}{4}$海里/小时$= 15$海里/小时。

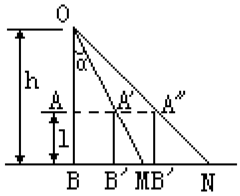
508.一门反坦克炮直接瞄准所要射击的一辆坦克。射击后，经过 t_1=0.6 秒，在炮台上看到炮弹爆炸。经过 t_2=2.1 秒，才听到爆炸的声音。问坦克离炮台的距离多远？炮弹飞行的水平速度多大？（声音在空气中的速度是 340 米/秒，空气阻力不计。）

[解答]　因为光速比声音速度大很多，所以可以认为 t_1 即是炮弹飞行的时间。t_2 即是炮弹飞行的时间跟声音从炮弹爆炸地点传到大炮所在地的时间的和。因此声音传播的时间是 t_2-t_1。炮弹的射程就是坦克离炮台的距离 s，则

$$s = v(t_2 - t_1) = 340\times(2.1-0.6)\text{米} = 510\text{米}。$$

炮弹飞行的速度 $u, u = \frac{s}{t_1} = \frac{510}{0.6}$米/秒$= 850$米/秒。

509.当 t=0 时身高为 l 的人站在灯的正下方，灯离地高 h，在人以水平速度 v 匀速前进过程中，问人头顶的影子作什么运动？



[解答]设人身高 l=AB，经过时间 t 人走到 A'B'处，头顶的影子由 B 移到 M。AA'=vt，则

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{vt}{h-l}。$$

影子的位移 $BM = BB' + B'M = vt + l\operatorname{tg}\alpha$，

$$= vt + l\cdot\left(\frac{vt}{h-l}\right) = \left(1 + \frac{l}{h-l}\right)vt，$$

$$= \frac{hv}{h-l}t。$$

因为 h、l、v 均为已知值，所以位移和时间成正比。影子是作匀速运动，它的速度等于

$$\frac{h}{h-l}v。$$

510.有一位乘客坐在一辆速度为 v_1 为 54 千米/小时的火车的窗口旁边。迎面开来一列火车，它的速度 v_2 为 36 千米/小时，它的长度 l 为 150 米。那么，这位乘客看见这列火车沿着他旁边开过所需时间是多少？

[解法一]　设经过的时间为 t，则 $v_1t+v_2t=l$，

所以 $t = \frac{l}{v_1 + v_2} = \frac{150}{15+10}$秒$= 6$秒。

[解法二]　第二列火车对于乘客的运动速度为 $v=v_1+v_2$（以乘客为参照

物）。运动的路程等于这列火车本身的长度。所以火车走完这段路程所需时间

$$t=\frac{1}{v_1+v_2}=\frac{150}{15+10}\text{秒}=6\text{秒。}$$

511.列车长 l_1 为 150 米，以 v_1 为 54 千米/小时匀速前进。同方向有一支 v_2 为 1 米/秒前进的队伍，长 l_2 为 130 米，从车头在队尾时算起，要使车全部越过队伍，需要多少时间？

［解答］ 列车相对于队伍的速度为 v_1-v_2，所以要使车全部越过队伍时所需时间

$$t=\frac{l_1+l_2}{v_1-v_2}=\frac{150+130}{15-1}\text{秒}$$

$$=20\text{秒。}$$

512.地下铁道出口处的自动扶梯在时间 t_1 为 1 分钟内可以把一个静止地立在梯上的人送上去。如果自动扶梯不动，这个人沿着自动扶梯走上去需要的时间 t_2 为 3 分钟。问这个人沿着开动的自动扶梯走上去，需要多少时间？

［解答］设自动扶梯的长度为 s，自动扶梯开动时速度为 v_1，人沿静止的扶梯走上去的速度为 v_2。则

$$s=v_1t_1=v_2t_2=(v_1+v_2)t\text{。}$$

解得 $v_1=\frac{s}{t_1}$；$v_2=\frac{s}{t_2}$；$s=(v_1+v_2)t=\left(\frac{s}{t_1}+\frac{s}{t_2}\right)t$；

所以 $t=\frac{t_1\cdot t_2}{t_1+t_2}=\frac{1\times 3}{1+3}\text{分}=45\text{秒。}$

513.河岸上有甲、乙两地，一汽艇顺着河流由甲地到乙地需要时间 $t_1=3$ 小时，逆流返回需要时间 $t_2=6$ 小时。如果汽艇不用发动机，顺流由甲地漂行到乙地需要时间 t_r 为多少？

［解答］设汽艇在静水中速度为 u，水流速度为 v，则有 $(u+v)t_1=(u-v)t_2=vt_r$，

$$\frac{u}{v}=\frac{t_r}{t_1}-1=\frac{t_r}{t_2}+1,$$

$$\frac{t_r}{t_1}-\frac{t_r}{t_2}=2,$$

所以 $t_r=\frac{2t_1t_2}{t_2-t_1}=\frac{2\times 3\times 6}{6-3}\text{小时}$

$$=12\text{小时。}$$

514.一艘汽艇先在水流速度 $v_1=2$ 千米/小时的河水中，在相距 $s=1$ 千米的两点间往返航行一次。然后又在平静的湖中也是 $s=1$ 千米的两点间往返航行一次。如果这两次情形中，汽艇相对水的速度都是 $v_2=8$ 千米/小时，求：（1）两次航行所需时间是否相同？求出它们的比值并作图。（2）在两种情况下，汽艇相对水来说通过的路程是否相同？等于多少？

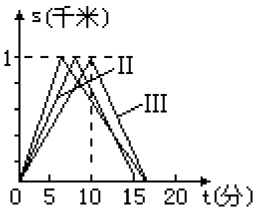
[解答]（1）在河水中逆流航行的时间

$$t_1=\frac{s}{v_2-v_1}。$$

顺流航行的时间 $t_2=\frac{s}{v_2+v_1}$。

往返一次的总时间 $t=t_1+t_2=\frac{2sv_2}{v_2^2-v_1^2}$。

在平静的湖水中往返一次所需时间 $t'=\frac{2s}{v_2}$。所以两次航行时间的比值



$$\frac{t}{t'}=\frac{v_2^2}{v_2^2-v_1^2}=\frac{8^2}{8^2-2^2}=1.07。$$

$$t_1=\frac{s}{v_2-v_1}=\frac{1}{8-2}\text{小时}=10\text{分钟，}$$

$$t_2=\frac{s}{v_2+v_1}=\frac{1}{8+2}\text{小时}=6\text{分钟，}$$

$$t'=\frac{2s}{v_2}=\frac{2\times1}{8}\text{小时}=15\text{分钟。}$$

作 s-t 图线（如图）。

图中 I：在河水中先顺流后逆流。

II：在平静的湖水中。

III：在河水中先逆流后顺流。

（2）逆流航行，汽艇对水所走路程为 v_2t_1，顺流航行汽艇对水所走路程为 v_2t_2。所以总路程为

$$s_1=v_2(t_1+t_2)=v_2t=\frac{2sv_2^2}{v_2^2-v_1^2}=\frac{2\times1\times8^2}{8^2-2^2}\text{千米}\approx2.13\text{千米。}$$

汽艇对湖水所通过的路程为 $s_2=v_2t'=2s=2.0$ 千米。

所以，在两种情况下，汽艇对水来说通过的路程是不相同的。

515.一扎木排通过码头时，有一艘摩托艇正经过码头驶向下游距码头 s_1 为 15 千米处的村庄。摩托艇在时间 t 为 0.75 小时内到达村庄；然后折回。在距村庄 s_2 为 9 千米处遇到木排。求水流的速度 u 和摩托艇相对水的速度 v。

[解法一] 选择参考系为木排，则河流相对于木排是静止的。摩托艇相对于木排是以同样的速度作来回运动。也就是摩托艇离开水排到达村庄和由村庄回到木排每次都是在相等的时间 3/4 小时内进行的。即共运动了 2t=1.5 小时。在这个时间内，摩托艇驶过 $s_1+s_2=24$ 千米。由此得出摩托艇相对于水的速度

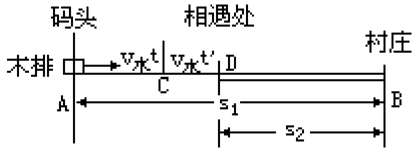
$$v=\frac{s_1+s_2}{2t}=\frac{24}{1.5}\text{千米/小时}=16\text{千米/小时。}$$

在同样时间内，木排驶过 s_1-s_2=6 千米。

因此水流速度 $$u=\frac{s_1-s_2}{2t}=\frac{6}{1.5}\text{千米/小时}=4\text{千米/小时。}$$

［解法二］设以地面为参考系，摩托艇在码头遇到木排后顺下游驶向村庄则 $s_1=(v_{艇}+v_{水})t$ (1)

当摩托艇到达村庄时，木排已顺流漂至 C 点（AC=$v_{水}\cdot t$）。当摩托艇从村庄返回逆流行驶，经过时间 t'在 D 处和木排相遇，则



$s_2=(v_{艇}+v_{水})t'$ (2)

木排由 C 漂到 D 点（CD=$v_{水}\cdot t'$），因为木排无动力，所以漂流速度即水速。得

$s_1-s_2=v_{水}(t+t')$ (3)

由（1）、（2）式得 $$v_{水}=\frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{t}-\frac{s_2}{t'}\right)$$ （4）

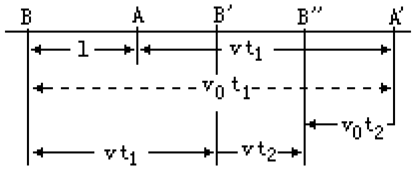
代入（3）式得 $s_1t'^2-(s_1-s_2)t\cdot t'-s_2t^2=0$。

代入数值 $240t'^2-72t'-81=0$。解得 t'=0.75 小时。

由（1）、（2）式解得 $$v_{艇}=\frac{s_1+s_2}{t+t'}=16\text{千米/小时。}$$

代入（4）式得 $v_{水}$=2 千米/小时。

516.两艘潜艇相距 l，以相同速度 v 成单纵队航行。后艇的水声定位器发出信号到达前艇并被反射回来。声音在水中的速度等于 v_0。求发出信号和收到回声两时刻之间的时间。



［解答］设前艇为 A，后艇为 B；当发出声音信号传到前艇经过时间 t_1 时，两艇位置已分别在 A'和 B'。由于两艇航行速度为 v，所以 AA'=BB'=ut_1。此时声音传播距离为 BA'=v_0t_1。

设 t_2 为经反射传到后艇所经历的时间。这时后艇位置在 B''，所以 B'B''=vt_2，A'B''=v_0t_2。由此得

$v_0t_1=l+vt_1$ (1)

$v_0t_1=v_0t_2+v(t_1+t_2)$ (2)

由(1)式解得 $$t_1=\frac{l}{v_0-v},$$

代入(2)式解得 $$t_2=\frac{l}{v_0+v}.$$

总时间 $$t_1+t_2=\frac{l}{v_0-v}+\frac{l}{v_0+v}=\frac{2lv_0}{v_0^2-v_2}.$$

517.一艘汽艇以恒定速度沿河逆流航行，在某一确定的地点丢失一只救生圈。经过时间 t 后发现丢失，汽艇便调转头航行去找，在距丢失地点下游 s 处追上救生圈。求水流速度。

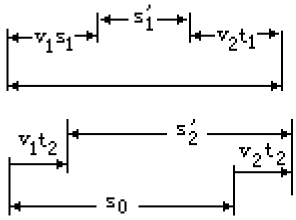
［解答］假设河水为参考坐标系，则河水静止不动，因而救生圈仍留在河水的丢失地。起初汽艇在 t 时间内离开该地，然后调头返回，追上救生圈时，整个航程花费时间为 2t。如果以地为参照系，则在 2t 时间内水流把救生圈从丢失地点冲下距离 s。因此，水流速度应等于 $\frac{s}{2t}$。

518.有两艘汽艇，以不同的速度向同一方向顺流航行。当它们相遇时，从一艘汽艇中抛出一个救生圈，经过一些时间后这两艘汽艇同时向抛救生圈的地方返回；汽艇对水的速度仍然跟原来的速度量值一样，只是方向相反。那么，哪一艘汽艇先遇到救身圈？如果在汽艇相遇前它们是逆流航行的，情况又是怎样？如果相遇前它们是相向航行的，情况又是怎样？

［解答］ 由于水流的速度对两艘汽艇和救生圈的影响完全一样，并不能改变它们之间的位置，如果以水为参考系，则水流的速度为零，而只研究汽艇和救生圈对水的运动。在返回前，两艘汽艇对水来说，在 t 秒内所通过的路程分别是 $s_1=v_1t$ 和 $s_2=v_2t$。显然，汽艇以原来的速度 v_1 和 v_2 返回救生圈时，应该在相同时间走完路程 s_1 和 s_2。

所以，两种情况下，两艘汽艇都是同时遇到救生圈的。

519.以水为参考系，两个物体相向做匀速运动，每隔时间 t_1 为 10 秒钟，它们间距离减少 s_1 为 16 米。如果这两个物体用和原来的量值相等的速度向着同一个方向运动。那么每隔时间 t_2 为 5 秒钟，它们之间的距离就增大 s_2 为 3 米。问这两个物体速度各等于多少？



［解法一］ 设两个物体初始距离 s_0 相向运动时间 t_1 后距离为 s'_1，则它们之间距离的减少是

$$s_1=s_0-s'_1=v_1t_1+v_2t_1 \qquad (1)$$

同向运动时间 t_2 后距离为 s'_2，则它们间距离增大为

$$s_2=s'_2-s_0=v_2t_2-v_1t_2 \qquad (2)$$

解（1）、（2）式得

$$v_2=\frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{t_1}+\frac{s_2}{t_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{10}+\frac{3}{5}\right)\text{米/秒}=1.1\text{米/秒},$$

$$v_1=\frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{t_1}-\frac{s_2}{t_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{16}{10}-\frac{3}{5}\right)\text{米/秒}=0.5\text{米/秒}。$$

如果同方向为 v_1 在前 v_2 在后，则应该 $v_1=1.1$ 米/秒，$v_2=0.5$ 米/秒。

[解法二] 第一种情况作相向运动时，两个物体之间的相对速度是

$$u_1=v_1+v_2=\frac{s_1}{t_1}.$$

在第二种情况作同向运动时，两物体间的相对速度是

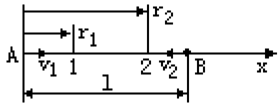
$$u_1=v_2-v_1=\frac{s_2}{t}。\quad（因为是增加，即 v_2＞v_1）$$

解得

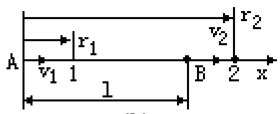
$$v_2=\frac{u_1+u_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{t_1}+\frac{s_2}{t_2}\right)=1.1\text{米/秒},$$

$$v_1=\frac{u_1-u_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{s_1}{t_1}-\frac{s_2}{t_2}\right)=0.5\text{米/秒}。$$

520.A 和 B 两点距离等于 l，在开始计时起，物体 1 以恒定速度 v_1 由 A 点沿直线 AB 开始向 B 运动，经过时间 τ 后，物体 2 以速度 $v_2(v_1＞v_2)$沿同一直线由 B 点开始运动。求两物体相遇的时间 t 和相遇地点。



(a)



(b)

[解法一] 分两种情况讨论：

（1）设物体 1 和物体 2 相向运动图（a）。物体的相对位移

$$r＝r_2-r_1。$$

因为 $r_2=l-v_2(t-τ)$，$r_1=v_1t$，相对速度 $v=v_1+v_2$，

相遇时 $r=0$，即 $r_1=r_2=r_0=v_1t=l-v_2(t-τ)$。

解得

$$t=\frac{l+v_2τ}{v_1+v_2},\qquad r_0=\frac{l+v_2τ}{v_1-v_2}\cdot v_1。$$

（2）设物体 1 和 2 同向运动图（b），这时相对位移仍为

$$r=r_2-r_1,$$

$$r_2=l+v_2(t'-τ),\ r_1=v_1t',$$

相对速度等于 $v=v_1-v_2$。

相遇点 $r_1=r_2=r_0=v_1t'=l+v_2(t'-τ)$

解得 $$t' = \tau + \frac{l - v_1\tau}{v_1 - v_2} = \frac{l - v_2\tau}{v_1 - v_2},$$

$$r_0' = \frac{l - v_2\tau}{v_1 - v_2} v_1。$$

[解法二] （1）由图所示，$l=v_1\tau+v_1(t-\tau)+v_2(t-\tau)$，

可解得 $t = \frac{l + v_2\tau}{v_1 + v_2}$。相遇地点离A点距离为

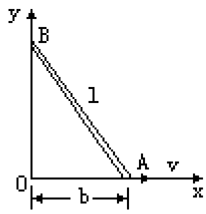
$$r_0 = \frac{l + v_2\tau}{v_1 + v_2} \cdot v_1。$$

（2）由图所示，如果同向运动，则

$$l= v_1\tau+ v_1(t'-\tau)- v_2(t'-\tau),$$

解得 $t' = \frac{l - v_2\tau}{v_1 - v_2}$。相遇点离A点 $r_0 = \frac{l - v_2\tau}{v_1 - v_2} v_1$。

521.杆 AB 的长为 l，它的两端分别靠在地板和墙上，如果 A 端从图示位置以速度 v 作匀速直线运动时，求 B 端的坐标 y 和时间 t 的关系。



[解答] A 端的运动规律是

$$x_A=b+vt，y_A=0，则$$

$$y_B = \sqrt{l^2 - (b + vt)^2}。$$

522.一个从静止开始作匀加速直线运动的物体，第 10 秒内的位移比第 9 秒内通过的位移多 10 米，求：（1）它在第 10 秒内通过的位移是多少？（2）第 10 秒末的速度是多少？（3）前 10 秒内通过的位移是多少？

[解法一] （1）由初速为零的匀加速运动特性可知

$$s_{I}:s_{II}:s_{III}:\cdots:s_N=1:3:5:\cdots:(2n-1),$$

第 10 秒内的位移和第 9 秒内的位移的比是

$$s_X:s_{IX}=19:17。$$

$$\frac{s_X}{s_X - s_{IX}} = \frac{19}{19 - 17} = \frac{s_X}{10\text{米}}，s_X = 95\text{米}。$$

（2）第9秒末的速度 $v_9 = \frac{s_{IX} + s_X}{2 \times 1} = \frac{85 + 95}{2}$米/秒$= 90$米/秒。

$$v_{10}:v_9=10:9,$$

$$v_{10}=100\text{米/秒}。$$

（3）前 10 秒内的位移 $s_{10}=s_I+s_{II}+s_{III}+\cdots+s_X$，

$$\frac{s_{10}}{s_X} = \frac{1 + 3 + 5 + \cdots + 19}{19}$$

$$\frac{s_{10}}{95\text{米}}=\frac{100}{19}，s_{10}=500\text{米}。$$

[解法二]（1）由于是$a=\frac{4s}{t^2}=\frac{10}{1^2}\text{米/秒}^2=10\text{米/秒}^2$，

所以 $$s_N=\frac{a}{2}(2n-1)=\frac{10}{2}(2\times10-1)\text{米}=95\text{米}。$$

（2）v_{10}=at=10×10 米/秒=10 米/秒。

（3）$s_{10}=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times10\times(10)^2\text{米}=500\text{米}。$

523.作匀加速直线运动的物体，某一段时间 t 内经过的路程为 s，而且这段路程的末速度为初速的 n 倍。求加速度的大小。

[解答] 设初速为 v_0，则

$$nv_0=v_0+at，$$

$$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2，$$

两式中消去v_0得 $$a=\frac{2(n-1)s}{(n+1)t^2}。$$

524.一辆小汽车进行刹车试验。在时间 t 为 1 秒钟时间内，速度由 8 米/秒减到零。按规定速度 8 米/秒的小汽车刹车后滑行距离不得超过 5.9 米。假定刹车时，汽车作匀减速运动，问这辆小汽车刹车性能是否符合要求？

[解答] $s=\bar{v}t=\frac{1}{2}(v_t+v_0)\cdot t=\frac{1}{2}\times(0+8)\times1\text{米}=4\text{米}。$

所以汽车刹车性能符合要求。

525.火车从 A 地行驶到 B 地需要时间 t。在这段时间内的平均速度是$\bar{v}$。现在火车先以恒定的速度 v_0 由 A 出发，中途急刹车停止后，又立刻加速到 v_0。从开始刹车到又加速到 v_0 所需要的时间是 t_0，火车在这两段运动中都是作匀变速运动。如果火车仍要在 t 时间内从 A 地到 B 地，则火车开始时的恒定速度 v_0 应多大？

[解答] A地到B地的位移为$\bar{v}t$，

火车刹车前经过的位移为 $v_0(t-t_0)$，

从刹车到停止这段位移为$\frac{v_0}{2}t_1$，

从停止对加速到v_0这段位移为$\frac{v_0}{2}t_2$，

根据题意 $$t_1+t_2=t_0，$$

则 $$\bar{v}t=v_0(t-t_0)+\frac{v_0}{2}t_1+\frac{v_0}{2}t_2，$$

$$=v_0(t-t_0)+\frac{v_0}{2}t_0，$$

解得 $$v_0=\frac{2\bar{v}t}{2t-t_0}。$$

526.一个质点从静止开始作匀变速直线运动，它在第 4 秒内的平均速度

为 14 米/秒。求：（1）加速度；（2）第一秒末的即时速度；（3）第 2 秒钟内的平均速度。

［解法一］由题意可知$\bar{v}_{IV}$=14 米/秒，$v_0=0$，第 4 秒内的平均速度为 14 米/秒，也就是第 4 秒内的位移为 14 米。

由于初速为零的匀变速直线运动第 1 秒、第 2 秒、……第 t 秒内的位移的比为

$s_I:s_{II}:s_{III}:s_{IV}:\cdots:s_T=1:3:5:7\cdots:(2t-1)$，

所以第1秒内的位移为 $s_1=s_1=\frac{1}{7}\times14\text{米}=2\text{米}$。

因为 $s_1=\frac{1}{2}at_1^2, a=\frac{2s_1}{t_1^2}=\frac{2\times2}{1}\text{米/秒}^2=4\text{米/秒}^2$。

第 1 秒末速度 $v_1=at_1=4\times1$ 米/秒=4 米/秒。

第2秒内的位移$s_{II}=\frac{3}{7}\times14\text{米}=6\text{米}$。

所以第2秒内的平均速度是$\bar{v}_{II}=\frac{s_{II}}{1}=6\text{米/秒}$。

［解法二］因为是匀变速直线运动，所以第 4 秒内的平均速度也是第 4 秒初和第4秒末的速度的算术平均值。即$\bar{v}_{IV}=\frac{1}{2}=(v_3+v_4)$。

由于 $v_3=at_3$，$v_4=at_4$，

所以

$$\bar{v}_{IV}=\frac{a}{2}(t_3+t_4)。$$

$$a=\frac{2\bar{v}_{IV}}{t_3+t_4}=\frac{2\times14}{3+4}\text{米/秒}^2=4\text{米/秒}^2。$$

第 1 秒末速度 $v_1=at_1=4\times1$ 米/秒=4 米/秒。

第2秒内的位移 $s_{II}=s_2-s_1=\frac{a}{2}(t_2^2-t_1^2)$

$$=\frac{4}{2}\times(2^2-1^2)\text{米}=6\text{米}。$$

第2秒内平均速度$\bar{v}_{II}=\frac{s_{II}}{1}=6\text{米/秒}$。

［解法三］第 4 秒内的平均速度即第 4 秒的中间时刻的即时速度，也就是 3.5 秒的即时速度。

所以 $v_{3.5}=at_{3.5}$，$a=\frac{v_{3.5}}{t_{3.5}}=\frac{\bar{v}_{IV}}{t_{3.5}}=\frac{14}{3.5}\text{米/秒}^2=4\text{米/秒}^2$。

其余同上。

527.滚珠沿光滑斜面向上作匀减速运动，已知第 2 秒钟内滚上 30 厘米，第 4 秒末停止。求：（1）滚珠的初速度；（2）滚珠的加速度；（3）滚珠滚到位移为 72 厘米处的速度。

[解答]（1）$s_{II}=s_2-s_1=\left(v_0t_2+\frac{1}{2}at_2^2\right)-\left(v_0t_1+\frac{1}{2}at_1^2\right)$，

$$=v_0(t_2-t_1)+\frac{1}{2}a(t_2^2-t_1^2)，$$

将
$$a=\frac{v_t-v_0}{t}$$

代入
$$s_{II}=v_0(t_2-t_1)+\frac{-v_0}{2t}(t_2^2-t_1^2)。$$

解得 $v_0=\dfrac{s_{II}}{(t_2-t_1)-\dfrac{(t_2^2-t_1^2)}{2t}}=\dfrac{0.3}{(2-1)-\dfrac{(2^2-1^2)}{2\times 4}}$米/秒

$=0.48$米/秒。

（2）加速度$a=\dfrac{v_t-v_0}{t}=\dfrac{0-0.48}{4}$米/秒^2= -0.12米/秒^2 。

负号表示加速度方向和初速度方向相反。

（3）设 s 为 72 厘米处的速度 v'，则

$$v'^2=v_0^2+2as'，$$

$$v'=\pm\sqrt{v_0^2+2as'}=\pm\sqrt{(0.48)^2+2\times(-0.12)\times 0.72}\text{米/秒}$$

$$=\pm 0.24\text{米/秒。}$$

正号表示方向向上，和 v_0 同向，负号表示滚珠滚回来经过该处的速度，方向向下，和 v_0 反向。

528.一个质点作直线运动，第一秒内通过位移 s_1 为 10 米，加速度为 a 米/秒^2。第二秒内加速度为-a 米/秒^2，第三秒、第四秒内又重复以上情况。如此不断运动下去，问当 T=100 秒时，这个质点的位移是多少？

[解答] 设运动的初速度为 v_0，时间 t 为 1 秒。

则
$$s_1=v_0t+\frac{1}{2}at^2=10\text{米，}$$

第一秒末速度 $v_1=v_0+at$。即第 2 秒的初速度。

第二秒内位移$s_2=v_1t-\frac{1}{2}at^2=(v_0+at)t-\frac{1}{2}at^2$

$$=v_0t+\frac{1}{2}at^2=s_1。$$

第 2 秒末速度 $v_2=v_1-at=v_0$

如此重复 $s_3=s_4=\cdots=s_1$

所以时间 T 内的总位移

$$s=s_1+s_2+\cdots+s_{100}=100s_1=1000\text{ 米。}$$

529.物体由某一位置以某初速度作匀加速直线运动。已知时刻 t_1、t_2、t_3 时物体在运动直线上的位置对某原点的坐标分别为 x_1、x_2、x_3。求物体的加速度。

[解答] 根据题意和匀加速运动的方程得。

$$x_2-x_1=v_1(t_2-t_1)+\frac{a}{2}(t_2-t_1)^2。$$

$$x_3-x_1=v_1(t_3-t_1)+\frac{a}{2}(t_3-t_1)^2。$$

式中 v_1 是在 x_1 处的速度，解方程得

$$a=\frac{2[(x_3-x_2)t_1+(x_1-x_3)t_2+(x_2-x_1)t_3]}{(t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_1-t_3)}。$$

530.打点计时器每秒钟打点 50 次,用它来测定一个作匀变速直线运动小车的加速度和即时速度。实验中量得纸带上 P 点和 P 点前一点间的距离是 4.0 厘米；P 点与 P 点后一点间的距离是 4.3 厘米。求小车的加速度和小车经过 P 点时的速度。

[解答] 小车经过两点间时间间隔 $t=\frac{1}{50}$ 秒，P 点前和 P 点后两段距离差 $\triangle s$ =（0.043-0.040）米=0.003 米。

所以加速度

$$a=\frac{\Delta s}{t^2}=\frac{0.003}{\left(\frac{1}{50}\right)^2}\text{米/秒}^2=7.5\text{米/秒}^2。$$

根据一段时间内的平均速度等于这段时间的中间时刻的即时速度，则有

$$v_p=\frac{s_1+s_2}{2t}=\frac{0.040+0.043}{2\times\frac{1}{50}}\text{米/秒}=2.1\text{米/秒}。$$

531.列车从车站出发作匀加速直线运动，一位观察者在月台上，位置正对列车车厢的最前端，他看到第一节车厢在他旁边通过需要时间 t_1 为 4 秒钟。问第三节和第 n 节车厢在他旁边驶过需要用多少时间？

[解答]设 $\triangle l$ 为一节车厢的长度，n 节车厢长度 $s_n=n\cdot\triangle l$。由运动学方程推得

$$t=\sqrt{\frac{2s}{a}},\qquad t\propto\sqrt{s}。$$

所以 $\frac{t_n}{t_1}=\sqrt{\frac{s_n}{s_1}}=\sqrt{\frac{n\cdot\Delta l}{\Delta l}}=\sqrt{n}$。（$t_n$ 为 n 节车厢驶过时总共需要的时间）

第 n 节车厢驶过所需时间为

$$t_n-t_{n-1}=t_1(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}),$$

如果 n=3，第三节车厢驶过所需要时间为

$$t_3-t_2=t_1(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1.27\text{秒}。$$

532.以 54 千米/小时的速度行驶的火车，因故需要在中途停车。如果停留的时间是 1 分钟，刹车引起的加速度大小是 30 厘米/秒 ²，起动产生的加速度大小是 50 厘米/秒 ²。求火车因临时停车所延误的时间。

[解答] 火车速度 v=54 千米/小时=15 米/秒，

从刹车到停止作匀减速运动

所用的时间 $t=\frac{u}{a}=\frac{15}{0.3}\text{秒}=50\text{秒}$，

所经过的位移 $s=\frac{v^2}{2a}=\frac{15^2}{2\times 0.3}$米$=375$米。

从起动到达到速度 v 作匀加速运动

所用的时间 $t'=\frac{u}{a'}=\frac{15}{0.5}$秒$=30$秒，

所经过的位移 $s'=\frac{v^2}{2a'}=\frac{15^2}{2\times 0.5}$米$=255$米。

火车停留时间 t_0=60 秒。

火车以速度 v 通过上述两段位移所需的时间

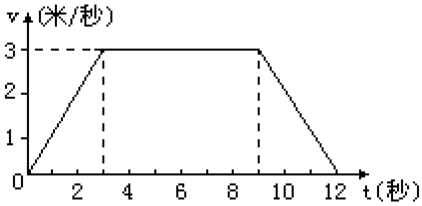
$$T=\frac{s+s'}{v}=\frac{375+255}{15}\text{秒}=40\text{秒}。$$

火车因临时停车延误的时间

$$\triangle t=t+t'+t_0-T$$

$$=100\text{ 秒}。$$

533.矿井里的升降机从静止开始作匀加速运动，经过 3 秒钟，它的速度达到 3 米/秒；然后作匀速运动，经过 6 秒钟后，作匀减速运动，3 秒钟停止。求升降机上升的高度，并画出它的速度图线。



［解答］ 匀加速运动 t_1=3 秒，v_0=0，v_1=3 米/秒。

$a_1=\frac{v_1}{t_1}=1$米/秒^2，$s_1=\frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}\times 1\times 3^2$米$=4.5$米。

匀速运动 t_2=6 秒，$v_2=v_1$=3 米/秒，

$s_2=v_2t_2=3\times 6$ 米=18 米。

匀减速运动 t_3=3 秒，v_t=0，

$a_2=\frac{v_t-v_2}{t_3}=\frac{0-3}{3}$米/秒^2

$=-1$米/秒^2。

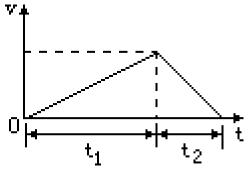
$s_3=v_2t_3+\frac{1}{2}a_3t_3^2=3\times 3$米$+\frac{1}{2}\times(-1)\times 3^2$米

$=4.5$米。

所以 $H=s_1+s_2+s_3=(4.5+18+4.5)$米=27 米。

速度图线如图所示。

534.火车自甲站出发，先以匀加速前进 t_1，后以匀减速前进 t_2 正好到达乙站停止。如果甲、乙两站间相距为 s。求火车的最大速度。



[解法一] 设匀加速运动通过的路程为 s_1，匀减速运动通过路程为 s_2，火车最大速度为 v。则

$$v=at_1。$$

$$v_2=v-a't_2=0$$

$$at_1=v=a't_2 \qquad (1)$$

$$s_1=\frac{1}{2}at_1^2=\frac{1}{2}vt_1 \qquad (2)$$

$$s_2=vt_2-\frac{1}{2}a't_2^2=\frac{1}{2}vt_2 \qquad (3)$$

由于$s_1+s_2=s$，所以$s=\frac{vt_1}{2}+\frac{vt_2}{2}=\frac{1}{2}v(t_1+t_2)$。

解得
$$v=\frac{2s}{t_1+t_2}。$$

[解法二] 由速度图线可知，图线下的面积数值上代表通过的路程，

$$s=\frac{v}{2}(t_1+t_2)，\quad v=\frac{2s}{t_1+t_2}。$$

535．一列客车以 v_1 的速度前进，司机发现前面在同一轨道上有列货车正以速度 v_2 匀速前进（$v_2<v_1$）货车车尾距客车距离为 s_0，客车立即作紧急刹车，使客车以加速度 a 作匀减速运动，而货车仍保持原速度前进。问：（1）客车的加速度符合什么条件，客车和货车不会相撞？（2）如果货车和客车开始时相距 s_0=200 米，客车速度 v_1=30 米/秒，货车速度 v_2=10 米/秒，客车加速度 a=-0.8 米/秒^2，两车是否相撞？如果相撞，则在何处？（3）当客车以加速度 a=0.2 米/秒^{2}减速时，货车的速度 v'_2 应多大，才能使客车始终赶不上货车。

[解答]（1）设客车发现货车的那一时刻为计时起点，对应的客车在轨

解得 t_1=8 秒，t_1=200 秒（t_1>T 舍去）。

$v=a_1t_1$=1.6×8 米/秒=12.8 米/秒。

(2)如果位移各加速度均不变，则得

$$t_1^2-1.6Tt_1+1600=0。$$

方程式有实数解的条件是$(1.6T)^2-4\times1600\geq0$。

所以最短时间 T_{min}=50 秒。

$$t_1^2-80t_1+1600=0,\text{解得}t_1=40\text{秒。}$$

这情况下最大速度 $v'=a_1t_1$=1.6×4.0 米/秒=6.4 米/秒。

538．一个质点以加速度 a 从静止出发作直线运动，在时刻 t、加速度变为 2a；在时刻 2t，加速度变为 3a……。在时刻(n−1)t，加速度变为 na。求在时刻 nt 质点的速度为多少？经过的位移是多少？

[解答]设 v_1、v_2、v_3……v_n 为相继时间间隔 t 末的速度，则有

$$v_1=at，$$

$$v_2=v_1+2at，$$

$$v_3=v_2+3at\cdots,$$
$$v_n=v_{n-11}+nat。$$
所以 $v_n=at(1+2+3+\cdots+n)=\frac{n(n+1)}{2}at$。

又设 s_1、s_2、s_3……s_n 为相应的距离。

$$s_1=\frac{1}{2}at^2,$$
$$s_2=v_1t+\frac{1}{2}\cdot 2at^2,$$
$$s_3=v_2t+\frac{1}{2}\cdot 3at^2\Lambda,$$
$$s_n=v_{n-1}t+\frac{1}{2}nat^2。$$

即
$$s_1=\frac{1}{2}at^2,$$
$$s^2=\frac{1}{2}\cdot 4at^2=\frac{1}{2}\cdot 2^2at^2,$$
……
$$s_n=\frac{1}{2}n^2at^2。$$

总位移
$$s=\sum_{i=1}^{n}s_i=\frac{1}{2}at^2(1^2+2^2+3^2+\Lambda+n^2)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}at^2。$$

539．为拍摄重为 1.5×10^4 牛的汽车从山崖上坠落的情景，拟用一辆按实际比为 1/25 的模型汽车来代拍，山崖也以 1/25 的比例的模型代替。设电影放映每秒钟的张数为一定，为了能把汽车坠落时的情景映得恰似拍摄实景一样，问每秒种拍照的胶卷张数，以及模型汽车在山崖上坠落前的行驶速度应为实际的几倍？

[解答]设自由落体的 t 秒内下落距离为 h，则有
$$h=\frac{1}{2}gt^2。$$
由于实物和模型汽车的策略加速度都相同，所以不论实物还是模型，下落距离和下落时间的关系相同，即 $h\propto t^2$。已知崖高比例为 1/25，所以下落时间比例应为 1/5。为了使坠落情景逼真，所以每秒钟拍照的胶卷张数是原张数的 5 倍。

设模型汽车在山崖上的水平方向距离为 x,崖上水平速度为 v，则有 x=vt。

在水平方向模型运动的距离为实物运行距离的 1/25，汽车下落时间的比为 1/5，所以模型的速度和实物速度的比为 1/5。

540．罗蒙诺索夫的实验记录中，记载了关于量度自由落体所通过的位移的数据：“……落体的第一秒钟所通过的位移是 15.5 莱因尺，二秒钟是 62 莱因尺，三秒钟是 139.5 莱因尺，四秒钟是 248 莱因尺，五秒钟是 387.5 莱因尺”（1 莱因尺=31.39 厘米）。根据罗蒙诺索夫的数据，计算重力加速度的量值。

[解法一]

时间t（秒）	位移s		每秒钟的位移s（厘米）	位移差△s（厘米）	重力加速度 $g=\dfrac{\Delta s}{T^2}$（厘米/秒²）
	莱因尺	厘米			
1	15.5	486.5			
2	62.0	1946	1459.5		
3	139.5	4378.9	2433	973.5	
4	248.0	7784.7	3406	973	973
5	387.5	12164	4379	973	

[**解法二**]**由**$g=\dfrac{2h}{t^2}$**分别计算可得**$g=973$**厘米**/**米**^{2}。

541．一只球自屋檐自由下落，在△t为0.25秒内通过窗口，窗高2米。问窗顶距屋檐多少米？（g=10米/秒²）

[解法一]通过窗口中间对刻的速度，就是通过窗口的平均速度

$$v=\frac{2}{0.25}\text{米/秒}=8\text{米/秒}。$$

由屋檐自由落下需要时间

$$t_{max}=\frac{v}{g}=\frac{8}{10}\text{秒}=0.8\text{秒}。$$

落到窗顶需要时间

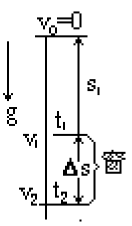
$$t_1=t_{max}-\frac{\Delta t}{2}=(0.8-\frac{0.25}{2})\text{秒}=0.675\text{秒}，$$

窗顶距屋檐距离

$$s_1=\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{1}{2}\times10（0.675）^2\text{米}=2.28\text{米}。$$

[解法二]设窗顶离屋檐距离为s_1球落到窗顶处速度为v_1，落到窗底时速度为v_2，

则由自由落体运动规律可知



$$v_1=gt_1 \quad (1)$$

$$v_2=g(t_1+\Delta t) \quad (2)$$

$$v_2^2=v_1^2+2g\cdot(\Delta s) \quad (3)$$

将(1)、(2)式平方代入(3)式得

$$g^2(t_1+\Delta t)^2 = g^2t_1^2 + 2g\cdot(\Delta s)$$

解得 $t_1 = \dfrac{\dfrac{2(\Delta s)}{g}-(\Delta t)^2}{2\cdot(\Delta t)} = \dfrac{\dfrac{2\times 2}{10}-(0.25)^2}{2\times 0.25}$秒 $=0.675$秒，

所以 $s_1 = \dfrac{1}{2}gt_1^2 = \dfrac{1}{2}\times 10\times(0.675)^2$米 $=2.28$米。

542．一只小球从竖立的厘米刻度尺零点处无初速度落下。如果给这只小球照相，那末底片上留有从第 n_1 到第 n_2 标度的痕迹。求照相机快开启时间。

[解答]设 t_1 表示小球经过刻度 n_1 的时刻，t_2 表示小球经过刻度 n_2 的时刻，τ表示由 n_1 落到 n_2 所需的时间、即照相机快门开启时间。由于小球是从标尺零点开始落下，所以刻度 n_1、n_2 就可表示在 t_1 和 t_2 时间内落下的距离。则有

$$n_1 = \frac{gt_1^2}{2};\quad n_2 = \frac{gt_2^2}{2};\quad t_2 - t_1 = \tau。$$

解得 $t_2 = \sqrt{\dfrac{2n_1}{g}}$；　$t_2 = \sqrt{\dfrac{2n_2}{g}}$。

$$\tau = \sqrt{\frac{2}{g}}(\sqrt{n_2}-\sqrt{n_1})。$$

543．小球从高处自由落下，着地时速度在数值上和它下落的距离数值相等。求：(1)物体下落一半高度处的速度；(2)下落的一半时间离抛出点的距离；(3)速度是落地速度一半所需的时间。

[解答]由自由落体运动

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$

$$v = gt \qquad (2)$$

解得 $t = \dfrac{2h}{v} = 2$秒，$h = \dfrac{1}{2}gt^2 = 20$米，$v_t = gt = 20$米/秒。

(1) $\dfrac{v'}{v_t} = \sqrt{\dfrac{h'}{h}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，所以 $v' = \dfrac{20}{\sqrt{2}}$米/秒 $=10\sqrt{2}$米/秒。

(2) $\dfrac{h'}{h} = (\dfrac{t'}{t})^2 = \dfrac{1}{4}$，所以 $h' = 20/4$米 $=5$米。

(3) $\dfrac{t'}{t} = \dfrac{v'}{v_t} = \dfrac{1}{2}$,　所以 $t' = 2\times\dfrac{1}{2}$秒 $=1$秒。

544．一个物体从 h 高处自由落下，经过最后 196 米所用的时间是 4 秒钟。求物体下落高所用的总时间 T 和高度 h 上是多少？(g 取 9.8 米/秒^2,空气阻力不计。)

[解法一]设物体通过最后 196 米时的初速为 v_0,则末速度应为 $v_t=v_0+$

$gt=(v_0+9.8.\times 4)$米/秒，最后4秒钟里的平均速度为$\frac{2v_0+9.8\times 4}{2}=$

$\frac{196}{4}$米/秒，解得$v_0=29.4$米/秒。

自由落下速度达到v_0时已经下落的时间$t_0=\frac{v_0}{g}=3$秒。

所以物体下落的总时间T是7秒钟。

高度$h=\frac{1}{2}gT^2=\frac{1}{2}\times 9.8\times 7^2$米$=240$米。

[解法二]最后 4 秒内的平均速度就是这 4 秒内的中间时刻的即时速度

$v=\frac{196}{4}$米/秒$=49$米/秒。

物体下落速度要达到v需时间$t_{max}=\frac{v_{max}}{g}=\frac{49}{9.8}$秒$=5$秒。

所以下落的总时间是7秒，高度$h=\frac{1}{2}gt^2=240$米。

545．一个作自由落体运动的物体，它下落的最后τ秒内通过的位移是整个位移的 1/n。求全部时间和整个时间 t 和整个下落高度 h。

[解答]由题意可知$h-\frac{1}{n}h=\frac{1}{2}g(t-\tau)^2$。

因为 $h=\frac{1}{2}gt^2$，

所以 $\frac{1}{2}gt^2-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}g(t-\tau)^2$。

$(t-\tau)^2=t^2(1-\frac{1}{n})$。

由于$t-\tau\geq 0$，

$t=\tau[n+\sqrt{n(n-1)}]$秒

$h=\frac{1}{2}gt^2=\frac{g}{2}\tau^2[n+\sqrt{n(n-1)}]^2$米。

546．一条铁链 AB 长 0.49 米，系于 A 端使它竖直下垂，然后让它自由落下，求整条铁链通过悬点下 2.45 米处的小孔 O 点时需要的时间。

[解法一]研究铁链最低点 B 点的运动，当它落下并通过 O 点后再达到 B′时，整条铁链便通过 O 点（OB′=0.49 米）。

从B点到达O点和到达B'点自由落下的时间分别为$\sqrt{\frac{2BO}{g}}$及$\sqrt{\frac{2BB'}{g}}$，所以整条铁链通过O点的时间为

$$t=\sqrt{\frac{2BB'}{g}}-\sqrt{\frac{2BO}{g}}=\sqrt{\frac{2\times(2.45)}{9.8}}\text{秒}-\sqrt{\frac{2\ (2.45-0.49)}{9.8}}\text{秒}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{0.4}\right)\text{秒}=0.075\text{秒}。$$

[解法二]设铁链B端到达O点时（即计时开始）速度为v_0，则$v_0=\sqrt{2gOB}$。

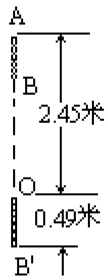
当铁链A端到达O点时（即计时结束）速度为v_t，则$v_t=\sqrt{2gOA}$。

由于自由落体运动是匀速运动，设铁链长为h，则$h=\frac{1}{2}(v_0+v_t)\cdot t$。

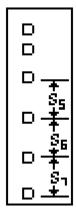
所以运动的时间　$t=\frac{2h}{v_0+v_t}=\frac{2h}{\sqrt{2gOB}+\sqrt{2gOA}}$，

$$t=\frac{2\times0.49}{\sqrt{2\times9.8\times1.96}+\sqrt{2\times9.8\times2.45}}\text{秒}$$

$$=\frac{2\times0.49}{9.8\sqrt{0.4}+4.9\sqrt{2}}\text{秒}=\frac{1}{10\sqrt{0.4}+5\sqrt{2}}\text{秒}=0.075\text{秒}。$$



547．如图所示，是某一物体自由落体运动的频闪照片图，两次闪光的时间间隔是 1/30 秒。如果测得 s_5=6.60 厘米，s_6=7.68 厘米，s_7=8.75 厘米。则可用 s_5 和 s_6 以及时间间隔的有关数据计算重力加速度 g_1，也可以用 s_6 和 s_7 以及时间间隔的有关数据计算重力加速度 g_2。求出重力加速度的平均值(要求三位有效数字)。



[解答] $g=\frac{s_6-s_5}{(t)^2}=\frac{7.68-6.60}{(\frac{1}{30})^2}$厘米/秒^2

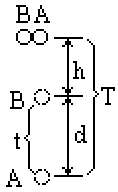
$=972$厘米/秒^2 $=9.72$米/秒^2。

$g'=\frac{s_7-s_6}{t^2}=\frac{8.75-7.68}{(\frac{1}{30})^2}$厘米/秒^2 $=963$厘米/秒^2

$=9.63$米/秒^2，

$\bar{g}=\frac{g+g'}{2}=\frac{9.72+9.63}{2}$米/秒^2 $=9.68$米/秒^2。

548．两个物体从同一高度自由落下，但在 A 物下落 t 秒后，B 物才下落，问在 A 物体下落多长时间，两个物体的距离为 d？



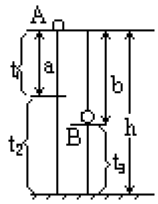
[解答]设 A 物体落下 T 秒后，两物体相距为 d，此时 B 物体落下距离为 h，则

对B物 $h=\frac{1}{2}g(T-t)^2$ (1)

对A物 $h+d=\frac{1}{2}gT^2$ (2)

由(1)、(2)式解得$T=(\frac{t}{2}+\frac{d}{gt})$秒。

549．A 球由塔顶自由落下，当落下 a 时，B 球在离塔顶 b 处开始自由落下。两球同时落地，求塔高 h。



[解答]设 A 球落下所经历的时间为 t_1，B 球落下到地面所需时间为 t_2。则

A球 $\qquad a=\frac{g}{2}t_1^2 \qquad (1)$

$$h=\frac{g}{2}(t_1+t_2)^2 \qquad (2)$$

B球 $\qquad (h-b)=\frac{g}{2}t_2^2 \qquad (3)$

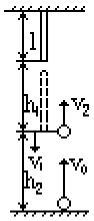
将(1)、(3)**式代入**(2)**式，消去**t_1、t_2**得**

$$h=a+(h-b)+g\sqrt{\frac{4a(h-b)}{g^2}}\text{，}$$

$$(b-a)^2=4a(h-b),$$

$$h=\frac{(b-a)^2}{4a}+b=\frac{(b+a)^2}{4a}\text{。}$$

550．天花板上吊一根 l 为 1 米的棍子，当它开始自由落下的同时，地面上有一只小球竖直上抛，隔 t_1 为 0.5 秒钟后小球和棍的下端在同一高度。小球经过棍长的时间△t 为 0.1 秒。求：(1)小球上抛的初速度；(2)天花板离地的高度；(3)小球落地比棍子落地时间落后多少？



[**解法一**]（1）**经过时间**t_1**，棍子落下高度**

$h_1=\frac{1}{2}gt_1^2=\frac{1}{2}$×10×（0.5）^{2}**米**$=1.25$**米。**

此时棍子落速度$v_1=gt_1$**。**

小球上抛此时速度为$v^2=v_0-gt_1$**。**

两者相对速度为$v_1+v_2=v_0$**。**

可见两者的相对速度在任一时刻都是v_0。所以

$$l = v_0 \cdot \Delta t，v_0 = \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{0.1}米/秒 = 10米/秒。$$

（2）小球在t_1时间内上升高度

$$h_2 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = 10 \times 0.5米 - \frac{1}{2} \times 10 \times （0.5）^2米$$

$$= 3.75米。$$

天花板高度$H = l + h_1 + h_2 = (1 + 1.25 + 3.75)米 = 6米。$

（3）棍子落地共需时间$t_{棍} = \sqrt{\frac{2（h_1 + h_2）}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 5}{10}}秒 = 1秒。$

小球落地共需时间 $t_{球} = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \times 10}{10}秒 = 2秒。$

所以两者落地时间相差 $t_{球} - t_{棍} = 1秒。$

[解法二](1)由题意经过时间 t_1 后小球和棍子的下端相遇，此时棍的速度为 $v_1=gt_1$，小球的速度为 $v_2=v_0-gt_1$。

由于棍子作匀速运动，棍的上端在△t 时间内通过路程

$$s_1 = v_1(\Delta t) + \frac{1}{2} g (\Delta t)^2 = (gt) \cdot \Delta t + \frac{1}{2} g \cdot （\Delta t)^2。$$

小球在Δt时间内通过的路程

$$s_2 = v_2(\Delta t) - \frac{1}{2} g \cdot (\Delta t)^2 = (v_0 - gt_1) \cdot \Delta t - \frac{1}{2} g (\Delta t)^2。$$

两者路程的总和是棍子的长度

$$l = s_1 + s_2 = (gt_1)\Delta t + (v_0 - gt_1)\Delta t = v_0 \cdot \Delta t，$$

由此得 $v_0 = \frac{l}{\Delta t} = \frac{1}{0.1}米/秒 = 10米/秒。$

(2)、(3)解法同上。

551．将两个小石块同时坚直上抛。A 上升的最大高度比 B 上升的最大高度高出 35 米。返回地面的时间比 B 迟 2 秒钟。试求：(1)A 和 B 的初速度；(2)A 和 B 分别达达到的最大高度。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解答]设 v_1、v_2 分别为 A、B 的初速度，h_1、h_2 分别为 A、B 上升的最大高度，t_1，t_2 分别表示 A、B 从抛出到抛回地面所经历的时间。则

$t_1=\frac{2v_1}{g}$，$t_2=\frac{2v_2}{g}$；$h_1=\frac{v_1^2}{2g}$，$h_2=\frac{v_2^2}{2g}$。

由题意可知 $h_1-h_2=\frac{v_1^2-v_2^2}{2g}=35$米 （1）

$t_1-t_2=\frac{2(v_1-v_2)}{g}=2$秒 （2）

(1)式÷(2)式解得 $v_1+v_2=70$米/秒 （3）

解(2)、(3)式方程

$$v_1=\frac{70+g}{2}\text{米/秒}=40\text{米/秒。}$$

$$v_2=(70-40)\text{米/秒}=30\text{米/秒。}$$

$$h_3=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{40^2}{2\times10}\text{米}=80\text{米。}$$

$$h_4=\frac{v_2^2}{2g}=\frac{30^2}{2\times10}\text{米}=45\text{米。}$$

552．杂技演员表演一手抛三球的游戏。在抛球过程中，使两个球在空中、一个球留在手中。如果每只球达到的最大高度都为 1.25 米。求：(1)连续两次抛出所隔的时间；(2)如果每秒钟抛出三个球，那么小球应达到什么高度？

［分析］演员在抛出的第一个球达到最高点时立即抛出第二个球；当第二个球达最高点时抛出第三个球，这时刻第一个球恰好落回手中。这样连续抛出和接回，连续两次抛出所隔的时间也就是任意一球从抛出到达最高点所需要时间，也就是自由落体通过 1.25 米所经历的时间。

[解答](1)$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times1.25}{10}}\text{秒}=\sqrt{\frac{1}{4}}\text{秒}=0.5\text{秒}$。

(2)每个球上升到最高点需要时间$1/3$秒。

$$h=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times9.8\times(\frac{1}{3})^2\text{米}=0.54\text{米。}$$

553．一个人以 30 米/秒的初速度将小球上抛，每隔 1 秒抛出一球。假设空气阻力可以忽略，而且升、降的球并不相碰（取 g=10 米/秒 2）。问：

(1)最多能有几个小球在空中？(2)设 t=0 在时将第 1 个小球抛出，在哪些时刻它和以后抛出的小球在空中相遇而过？

[解答](1)$v_0=30$米/秒，小球在空中经过的时间为

$$t=\frac{2v_0}{g}=6\text{秒。}$$

t=0 时将第 1 个小球抛出，它于第 6 秒末回到原处；同时第 7 个球即将抛出。在第 6 个小球抛后第 1 个小球尚未返回原处时，空中共有 6 个球；第 7 个球抛出时第 1 个球已落地，所以空中最多只有 6 个球。

(2)第 1 个球于 t=0 时抛出，而第 n 个球于△t 秒后抛出，则在某一时刻 t 这两个球位移分别为

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2，$$

$$s' = v_0\left(t - \Delta t\right) - \frac{1}{2}g(t - \Delta t)^2。$$

两个小球在空中相遇而过的条件是它们的位移相等，即

$$v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0(t - \Delta t) - \frac{1}{2}g(t - \Delta t)^2。$$

化简得 $$t = \frac{1}{2}\Delta t + \frac{v_0}{g}。$$

上式中的t表示第1个小球和Δt秒后抛出的小球在空中相遇而过的时刻。由题给条件，可知$\Delta t = 1$秒、2秒、3秒、……。

当$\Delta t = 1$秒，$t = (\frac{1}{2} \times 1 + \frac{30}{10})$秒$= 3.5$秒，这是和第2个球相遇而过的时刻。

当$\Delta t = 2$秒，$t = (\frac{1}{2} \times 2 + \frac{30}{10})$秒$= 4$秒，这是和第3个小球相遇而过的时刻。

当$\Delta t = 3$秒，$t = (\frac{1}{2} \times 3 + \frac{30}{10})$秒$= 4.5$秒，这是和第4个小球相遇而过的时刻。

当$\Delta t = 4$秒，$t = (\frac{1}{2} \times 4 + \frac{30}{10})$秒$= 5$秒，这是和第5个小球相遇而过的时刻。

当$\Delta t = 5$秒，$t = (\frac{1}{2} \times 5 + \frac{30}{10})$秒＝5.5秒，这是和第6个小球相遇而过的时刻。

554．竖直向上抛出一个物体，物体上升和落下两次经过高度为 h 处的时间间隔为△t，问：(1)抛出的初速度是多少？(2)抛出至落回原处需时多少？

[解答](1)竖直上抛物体抛出到最高点和从最高点落到地面所需时间相等。设抛出时初速度为 v_0，上抛到 h 高处末速度（也就是下落时速度）为 v_t。则有

$$v_t^2 = v_0^2 - 2gh \qquad (1)$$

从最高点自由落下

$$v_t = g \cdot \frac{\Delta t}{2} \qquad (2)$$

(2)式代(1)式 $v_0 = \sqrt{(2h + \frac{1}{4}g\Delta t^2)g}$。

(2)抛出到落回原来位置需要时间

$$t = \frac{2v_0}{g},$$

以v_0值代入得 $t = 2\sqrt{\frac{2h}{g} + \frac{(\Delta t)^2}{4}}$。

555．一气球以 v_0 匀速上升，气球下用绳挂一重物，当重物到达高度 H_0 时，挂重物的绳子断了，经过多少时间重物落到地面？落地速度是多少？

[解法一]绳子断时，重物在高度 H_0 并具有向上的初速度 v_0 作竖直上抛运动，它自绳断时刻开始到最高点需要时间

$t_1 = \frac{v_0}{g}$。重物上升的最大高度$H = \frac{v_0^2}{2g}$。

物体在最高点离地（$H + H_0$）作自由落体运动落回地面需要时间

$$t_2 = \sqrt{\frac{2(H + H_0)}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}[\frac{v_0^2}{2g} + H_0]} = \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 + 2H_0 g}。$$

所以自绳子断到落回地面共需时间

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 + 2H_0 g}。$$

落地速度 $v_t = gt_2 = \sqrt{v_0^2 + 2H_0 g}$。

[解法二]物体上抛运动$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$。

当位移$h = -H_0$时，物体落回地面。$-H_0 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$。

$$t^2 - \frac{2v_0}{g}t - \frac{2H_0}{g} = 0,$$

解得$t = \dfrac{\frac{2v_0}{g} \pm \sqrt{(\frac{2v_0}{g})^2 + 4(\frac{2H_0}{g})}}{2} = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{g}\sqrt{v_0^2 + 2H_0 g}$，

由于根号内数值大于$\frac{2v_0}{g}$，又因为$t \rangle 0$,所以负根舍去。

由速度公式 $v_t = v_0 - gt$，

将t值代入得 $v_t = -\sqrt{v_0^2 + 2H_0 g}$。

556．一个物体从高 2.5 米的升降机的顶上落下，在下列情况下，分别求它落到

升降机底面所需要的时间。(1)升降机静止；(2)升降机以 5 米/秒的速度匀速下降；(3)物体开始下落时，升降机开始以 5 米/秒的加速度下降；(4)物体开始下落时，升降机也开始以 5 米/秒物加速度匀速上升。(g 取 10 米/秒 ^{2})

[解答](1)物体在升降机自由下落$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times 2.25}{10}}$秒$=0.7$秒。

(2)升降机匀速运动时，物体落下的初速度就是升降机的下降速度，所以相对于地面来说，物体作下抛运动；但相对于升降机是自由落体运动，下落时间 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=0.7$秒。

(3)物体相对于升降机的加速度为$a_{相}=g-a=5$米/秒^2，

所以下降的时间$t=\sqrt{\frac{2h}{a_{相}}}=\sqrt{\frac{2\times 2.5}{5}}$秒$=1$秒。

(4)升降机匀加速上升时，物体对升降机的加速度为$a'_{相}=g+a$

$=15$米/秒^2。

所以下落时间$t=\sqrt{\frac{2h}{a'_{相}}}=\frac{\sqrt{2\times 2.5}}{15}$秒$=\frac{\sqrt{3}}{3}$秒$=0.577$秒。

557．在速度 v 为 2 米/秒匀速上升的升降机中，竖直上抛一个物体，经过 t 为 0.5 秒钟时达到最高点。求：(1)在升降机上升过程中升降机中的人所见物体抛出时的速度；(2)相对于地面静止的人所见物体的初速度；(3)上升中升降机中的人所见物体达到最高点的高度，从抛出点测定是多少；(4)相对于地静止的人观察，物体从抛出时到达最高点要经过几秒；(5)假使升降机处于静止状态，升降机中的人看此物体的运动和升降机匀速上升时看是相同还是不同？并简单叙述一下理由。

[分析]以作匀速运动的升降机为参考系，升降机的速度为牵边速度；物体对升降机的速度为相对速度；物体对地的速度为绝对速度。相对于升降机来说，在上抛过程是，当物体相对于升降机的速度，上对速度为零时，升降机中的人观察到物体已到达最高点。而地面上的人观察时，绝对速度不为零，等于牵连速度，所以物体还在上升。地面上的人观察到物体到达最高点对应于绝对速度为零，但这时相对速度不为零。

[解答](1)$v=v_0-gt=0, v_0=gt=10\times 0.5$米/秒$=5$米/秒。

(2)$v_{0地}=v_0+v=(5+2)$米/秒$=7$米/秒。

(3)$H=\frac{v_0^2}{2g}=\frac{5^2}{2\times 10}$米$=1.25$米。

(4)$v_{地}=v_{0地}-gT=0$，$T=\frac{v_{0地}}{g}=\frac{7}{10}$秒$=0.7$秒。

(5)所见相同。因为在两种情形中，抛出物相对升降机的初速度和加速度都相同。

558．一只球离地面 H 高处自由落下，同时有一颗子弹从球的正下方的地面竖直向上射击。要使球落下全程的 1/n 处被子弹击中，问子弹的初速度应多大？

[解答]设子弹的初速度是v_0，t秒后击中球。则小球落下距离s_1和子弹上升的距离s_2分别为

$$s_1 = \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$

$$s_2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

(1)式+(2)式　　$s_1 + s_2 = H = v_0 t, t = \frac{H}{v_0}$。

据题意　　$\frac{1}{n}H = s_1 = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(\frac{H}{v_0})^2$，

解得　　$v_0 = \sqrt{\frac{ngH}{2}}$。

559．把两个物体先后竖直向上抛出，上抛的初速度都为 v_0,相隔时间为 t'。求：(1)任何时刻第二个物体相对第一个物体的运动速度为多大？指出这个相对运动的速度的量值和方向；(2)两物体间的距离按什么关系变化？经过多少时间，两物体相遇？

[解答]设第一个物体抛出t秒后$(t \rangle t')$两物体的速度分别为v_1、v_2；离出发点的高度分别为h_1、h_2。并设向上方向为正。

(1)相对速度$v = v_2 - v_1 = [v_0 - g(t - t')] - [v_0 - gt] = gt'$。

相对速度v的量值为gt'，是一个恒量。无论在两物体上升或下降过程中方向都是向上的。

(2)上升时两物体间距离

$$\Delta h = h_1 - h_2 = [v_0 t - \frac{1}{2}gt^2] - \left[v_0(t - t') - \frac{1}{2.}g(t - t')^2\right]$$

$$= v_0 t' + \frac{1}{2}gt'^2 - (gt')t，$$

从含有变数t的项$+(gt')t$分析可知，上升时，在两物体相遇前，它们间的距离随时间均匀地减少。

下降时，$\Delta h = h_2 - h_1 = \left[v_0(t - t') - \frac{1}{2}g(t - t')^2\right] - \left[v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right]$

$$= -v_0 t' - \frac{1}{2}gt'^2 + (gt')t，$$

从含有变数t的项$+(gt')t$分析可知，下降时，两物体相遇后，它们间的距离随时间均匀地增加。

(3)两物体相遇时，$\Delta h = 0$。

所以　　$t = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{2}t'$。

560．甲球以初速度v_1，乙球以以初速度v_2在同一竖直上抛。乙球迟t'抛出，求两球相遇的时刻t是多少？

[解答]$h_1=v_1t-\frac{1}{2}gt^2, h_2=v_2(t-t')-\frac{1}{2}g(t-t')^2$。

相遇$h_1=h_2$，解得$t=\dfrac{\frac{1}{2}gt'^2+v_2t'}{gt'+v_2-v_1}$。

(1)当$gt'+v_2=v_1$，则$t\to\infty$(空中不相遇）；

(2)当$gt'+v_2\rangle v_1$，则$t\rangle 0$(能相遇）；

(3)当$gt'+v_2<v_1$，则$t<0$(相遇于抛出前即在t秒前两球同在地面上，无意义）；

(4)如果$v_2=v_1$，则$t=\frac{v_2}{g}+\frac{t'}{2}$(相遇时刻）。

561．以 v 为 200 米/秒物速度沿水平方向匀速飞行的飞机上，每隔△t 时间为 2 秒钟放下一个物体（不计空气阻力）。当第 6 个物体离开飞机时，第 1 个物体刚好着地。求此时第 3 个和第 5 个物体在空间的位置。（g 取 10 米/秒 ²）
[解答]由题意，第 1 个物体落地需要地时间

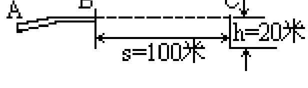
$$t-(6-1)\Delta t=10\text{秒。}$$

所以飞机离地面高度

$$H=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}\times10\times10^2\text{米}=500\text{米。}$$

第3个物体离开飞机时间$t_3=(6-3)\Delta t=6$秒。离地高为$H-h_3=H-\frac{1}{2}gt_3^2=(500-180)$米$=320$米。第5个物体离开飞机时间$t_5=(6-5)\Delta t=2$秒。离地高为$H-h_5=H-\frac{1}{2}g\cdot t_5^2=(500-20)$米$=480$米。他们都在第1个物体的正上方。

562．如图所示，枪管 AB 对准小球 C，ABC 在同一水平线上。子弹射出枪口时，C 球正好自由落下，已知 BC 距离 s 为 100 米，求：(1)如果小球 C 落到 h=20 米处被击中，那末子弹离开枪中时的速度多大？(2)如果子弹离开枪口的速度大于所求数值，那末子弹能否击中这个小球？为什么？(3)如果小球 C 不是自由落下，而是和子弹同时以 10 米/秒的初速度沿子弹初速方向水平抛出，子弹速度仍为原来数值，那末子弹能否击中小球？在何处击中？（取 g=10 米/秒 ²）



[解答](1)$s = v_0 t$，$h = \frac{1}{2} g t^2$，

所以 $$v_0 = \frac{s}{t} = s\sqrt{\frac{g}{2h}} = 100\sqrt{\frac{10}{2\times 20}}\text{米/秒} = 50\text{米/秒}。$$

(2)仍能击中。因为平抛运动竖直方向的分运动是自由落体运动，如果v_0大于50米/秒时，击中小球位置小于20米。

(3)子弹和小球同时作平抛运动，由水平方向运动可知$v_{子} t - v_{弹} t = s$，

所以 $$t = \frac{s}{v_{子} - v_{球}} = \frac{100}{50-10}\text{秒} = 2.5\text{秒}。$$

击中点竖直方向落下距离$h' = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (2.5)^2$米 $= 31.25$米。离B点水平距离$s' = v_{子} \cdot t = 50 \times 2.5$米 $= 125$米。击中的条件$v_{球} < v_{子}$，同时C点离地高度$H > \frac{g}{2}\left(\frac{s}{v_{子} - v_{球}}\right)^2$，不然球已落地，子弹也落地而未击中小球。

563．一艘轮船以速度 v_0 作直线运动，一架飞机在距海面高 h 处以速度 v_1 水平飞行，假定飞机与船的水平距离为 l，在此距离飞机能将筒空投到轮船甲板上。通信筒所受空气阻力不计。求飞机和轮船同向航得或者反向航行这两种情况下的 l 值。

[解答]通信筒落下时间和自由落体运动相同，则

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}。$$

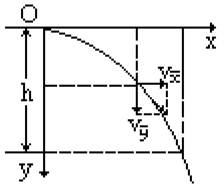
在同向航行时，相对速度为$v' = v_1 - v_0$，

所以 $$l = v' t = (v_1 - v_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}。$$

在反向航行时，相对速度为$v'' = v_1 + v_0$，

所以 $$l = v'' t = (v_1 + v_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}。$$

564．离地面高度 h 为 1470 米处，一架飞机 v_x 为 360 千米/小时的速度水平飞行。已知投下物体在离开飞机 10 秒钟后降落伞张开，即作匀速运动。为了将一个物体投到地面某处，求应该在离开该地水平距离多远处开始投下？（假定水平方向运动不受降落伞影响）



[解答] 降落伞张开后，重力被平衡，物体作匀速直线运动。水平方向分速度为v_χ，竖直方向以v_y为速度作匀速运动。设第一阶段平抛运动时间为t_1，第二个阶段匀速运动时间为t_2。则

$x_1 = v_x t_1$，　　$x_2 = v_x t_2$，

$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2$，　　$y_2 = v_y t_2$，　　$v_y = g t_1$。

落地时间由竖直方向的分运动状态。

$$h = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} g t_1^2 (g t_1) \cdot t_2$$

所以$t_2 = \frac{h - \frac{1}{2} g t_1^2}{g t_1} = \frac{h}{g t_1} - \frac{t_1}{2} = \left(\frac{1470}{9.8 \times 10} - \frac{10}{2} \right)$秒$= 10$秒，

水平距离　$s = x_1 + x_2 = v_x t_1 + v_x t_2 = v_x (t_1 + t_2)$

$= 100(10 + 10)$米$= 2000$米。

565．石块从屋顶上以 v_0 为 15 米/秒物速度水平抛出，这落地时和水平方向成 60°角，房屋的高等于多少？

[解答]平抛运动落地速度和水平夹角为β。则

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{v_y}{v_\chi} = \frac{gt}{v_0}。$$

落地时间t由高度决定$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$，

代入上式化简得　$h = \frac{v_0^2 \mathrm{tg}^2 a}{2g} = \frac{15^2 \times (\sqrt{3})^2}{2 \times 10}$米$\approx 34$米。

566．一个物体从第一高度处水平抛出，1 秒末的速度和水平方向成 45°角，2 秒末落地。求这物体扫出时的初速度和落地处地水平距离。

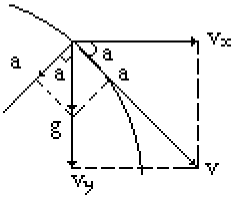
[解答]速度和水平方向成 45°角即

$$\mathrm{tg} a = \frac{v_y}{v_\chi} = 1。$$

所以　$v_0 = v_\chi = v_y = gt = 10 \times 1$米/秒$= 10$米/秒。

$s_\chi = v_0 t' = 10 \times 2$米$= 20$米。

567．物体以 v_0 为 15 米/秒的速度水平抛出。求物体抛出后经过时间 t 为 1 秒时的法向加速度 a_n 和切向加速度 a_t。



[解答]平抛运动的加速度为g，它的法向分量和切向分量分别为

$$a_n = g\cos a，\quad a_t = t\sin a。$$

角度a由平抛速度决定

$$\cos a = \frac{v_\chi}{v}；\qquad \sin a = \frac{v_y}{v}。$$

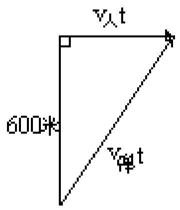
它们和时间t的关系：

$$a_n = g\frac{v_\chi}{v} = \frac{gv_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{9.8\times 15}{\sqrt{15^2+(9.8\times 1)^2}}米/秒^2$$

$$= 8.2米/秒^2，$$

$$a_t = g\cdot\frac{v_y}{v} = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2+g^2t^2}} = \frac{9.8^2\times 1}{\sqrt{15^2+(9.8\times 1)^2}}米/秒^2 = 5.4米/秒^2。$$

568．在战壕上前方 l 为 600 米处，有一敌兵沿平行战壕的方向奔跑，速度 v 为 3 米/秒。如果子弹的出口速度 $v_弹$为 750 米/秒，且子弹初速是水平的，求瞄准目标应在敌人前方几米？从发射到击中敌人时，子弹竖直落下几米？



[解答]子弹作平抛运动，它在水平方向的分运动为匀速运动。则有

$$(v_弹\cdot t)^2 - (v_入 t)^2 = l^2。$$

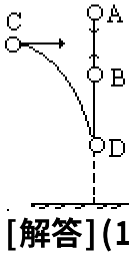
解得

$$t = l\cdot\frac{1}{\sqrt{v_绊{}^2 - v_入{}^2}} = \frac{600}{\sqrt{750^2-3^2}}秒 = 0.8秒。$$

应瞄准敌人前方$s = v_入 t = 3\times 0.8米 = 2.4米$。

子弹落下距离$h = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\times 10\times(0.8)^2米 = 3.2米$。

569．如图所示，A、B 和 C 三球同时以相同大小的速度开始运动，A 和 B 相距 l 为 10 米，且在同一竖直线上，A 做竖直下抛运动。B 做竖直上抛运动。C 向 AB 的竖直线做平抛运动。在 t 为 5 秒钟后三球相遇，不考虑空气阻力。求：(1)三球的初速度；(2)第一秒末 B 球的位移；(3)开始运动时，B 和 C 的水平距离和竖直距离；(4)设三球相遇点为 D，BD 距离是什么？



[解答](1)设三球抛出的初速度 v_0，根据 A、B 球相遇条件得

$$\left(v_0 t+\frac{1}{2}gt^2\right)+\left(v_0 t-\frac{1}{2}gt^2\right)=l。$$

解得$v_0=1$米/秒。

$(2)s_B=v_0t'-\frac{1}{2}gt'^2=\left(1\times1-\frac{1}{2}\times10\times1^2\right)$米$=-4$米。(在BD之间)

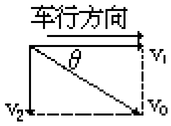
$(3)s_{水平}=v_0t=1\times5$米$=5$米。

$s_{竖直}=\frac{1}{2}gt^2+\left(v_0t-\frac{1}{2}gt^2\right)=\frac{1}{2}\times10\times5^2$米$+\left(1\times5-\frac{1}{2}\times10\times5^2\right)$米

$=5$米。

$(4)s_{BD}=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=\left(1\times5-\frac{1}{2}\times10\times5^2\right)$米$=-120$米。（负号表示在B下面）

570．以 v_1 为 20 米/秒的速度前进的车厢中，和车行方向成直角的方向上以 v_2 为 10 米/秒的初速水平抛出一石块。设抛出点离地面的高度 h 为 2.5 米，求：(1)石块抛出后石块运动方向各车行方向间的夹角；(2)石块着地和抛出点的水平距离。



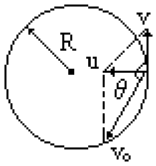
［解答］石块平抛出时对地的初速度v_0为

$$v_0=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=\sqrt{20^2+10^2}\text{米/秒}=22.4\text{米/秒}。$$

它的方向各车行方向间夹角θ。$tg\theta=\frac{v_2}{v_1}=\frac{10}{20}=\frac{1}{2},\theta=26°34'$。

石块落地的水平距离$s=v_0t=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{500}\cdot\sqrt{\frac{2\times2.5}{9.8}}$米$\approx16$米。

571．有一座圆形水池，它的半径为 R。有人绕池以线速度 v 奔跑，同时从距水面高 h 处水平抛出一块小石块，使石子恰好落在池的中心。试求抛出石子的初速度 v_0 和方向。



[解答]要使石块落在地中心，抛出的初速度 v_0 和奔跑速度 v 的合速度 u 必须沿半径方向。

$$u=v_0+v。$$

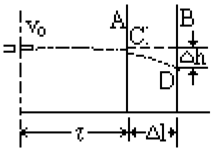
要落在池中心，u 的大小必须使平抛运动的水平距离等于池半径 R，所以

$$R = u \cdot t = u \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}，u^2 = \frac{gR^2}{2h}。$$

石子初速度 $v_0 = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{\frac{gR^2}{2h} + v^2}$，

初速度的方向 $\cos\theta = -\frac{v}{v_0} = -\frac{v}{\sqrt{\frac{gR^2}{2g} + v^2}}$。

572．如图所示，子弹子枪中水平射出，在子弹飞行的竖有两块相互平行的竖直挡板 A 和 B。第一块档板距枪口的水平距离为 s，两块挡板相距为△l，子弹击穿两块挡板上留下弹孔 C 和 D，C、D 的高度差为△h，如果挡板和空气阻力不计，求用 s、△t 和△h 来表示子弹枪中速度 v_0。



[解法一]设子弹枪口速度为 v_0，子弹飞到第一块挡板的时间

$$t_1 = \frac{s}{v_0}。$$

子弹在C处的竖直分速度

$$v_c = gt_1 = \frac{gs}{v_0}。$$

子弹从 C 飞到 D 处的时间

$$t^2 = \frac{\Delta l}{v_0}。$$

$$\Delta h = v_c t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 = \frac{gs}{v_0} \cdot \frac{\Delta l}{v_0} + \frac{1}{2}g\frac{\Delta l^2}{v_0^2} = \frac{g\Delta l}{v_0^2}\left(s + \frac{\Delta l}{2}\right)，$$

所以 $v_0 = \sqrt{\frac{g\Delta l}{\Delta h}\left(s + \frac{\Delta l}{2}\right)}$。

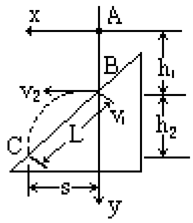
[**解法二**] $t_1 = \frac{s}{v_0}$， $t_2 = \frac{s + \Delta l}{v_0}$。

$$\frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \Delta h。$$

$$\Delta h = \frac{1}{2}g\left(\frac{s + \Delta l}{v_0}\right)^2 - \frac{1}{2}g\left(\frac{s}{v_0}\right)^2 = \frac{g(2s\Delta l + \Delta l^2)}{2v_0^2}，$$

所以 $v_0 = \sqrt{\frac{g\Delta l}{\Delta h}\left(s + \frac{\Delta l}{2}\right)}$。

573．一只球自 h_1 为 10 米高处自由落下，落到一个倾角为 45°的斜坡上。球被斜坡沿水平方弹出，弹出时的速率和落到斜坡时速率相同，求小球从斜坡弹出后再落到斜面上时，离被弹出时的距离。



[解答]x、y 轴正方向如图所示，A 到 B 是自由落体运动

$$v_1=\sqrt{2gh_1} \qquad (1)$$

球被弹出时$v_2=v_1$，BC为平抛运动，

$$h_2=\frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

$$s=v_2t \qquad (3)$$

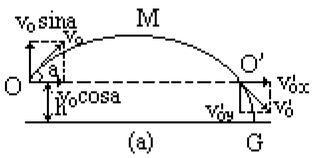
由于斜坡倾角为$45°$时，　$s=h_2$　(4)

解得　$s=v_2t=v_2\cdot\frac{2v_2}{g}=\frac{2v_2^2}{g}=\frac{2v_1^2}{g}=\frac{2\cdot 2gh_1}{g}=4h_1=40$米。

$L=\sqrt{2}s=56.56$米。

574．石块从高出地面 h 为 4.9 米处抛出，抛出的方向和水平面成 a 为 45°角度。求石块在空间的飞行时间以及落地点到抛出处的水平距离。已知抛出时的速度 v_0=19.6 米/秒。

[解法一]石块在空间飞行轨道知图(a)所示。设施出点为 O，落地点为 G，最高点为 M。设石块在空间的飞行时间为 t，落地点 G 到抛出点 O 的水平距离为 s。



(a)

把运动分成一个水平的匀速直线运动和一个铅直的匀变直线运动。铅直运动以可分成 OM，MO′和 O′G 三部分：

(1)O 到 M 的运动是匀速运动，初速度为 $v_0$sina，经历时间为 t_1，位移为 H，加速度为 g，则有

$$v_0 = v_0 \sin a - gt_1 = 0 \qquad (1)$$

$$H = v_0 \sin at_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 \qquad (2)$$

由(1)式得

$$t_1 = \frac{v_0 \sin a}{g} \qquad (3)$$

代入(2)式得

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 a}{2g} \qquad (4)$$

(2)M到O′的运动是自由落体，位移为H，经过时间为t_2,则有

$$H = \frac{1}{2}gt_2^2 \qquad (5)$$

$$v_y = gt_2 \qquad (6)$$

由(5)及(4)式得

$$t:_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \frac{v_0 \sin a}{g} \qquad (7)$$

$$v_y = v_0 \sin a \qquad (8)$$

(3)O′到G运动的初速度就是上一步的末的速度，即(8)式的v_y，经历的时间为t_3，则有

$$h = v_0 \sin a \cdot t_3 + \frac{1}{2}gt_3^2 \qquad (9)$$

解(9)式得

$$t_3 = -\frac{v_0 \sin a}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 a}{g^2} + \frac{2h}{g}} \qquad (10)$$

综合上述各步，石块在空间飞行的时间

$$\tau = t_1 + t_2 + t_3$$

$$= \frac{v_0 \sin a}{g} + \frac{v_0 \sin a}{g} - \frac{v_0 \sin a}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 a}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

$$= \frac{v_0 \sin a}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 a}{g^2} + \frac{2h}{g}}$$

$$= \frac{19.6 \times \frac{1}{2}\sqrt{2}}{9.8}\text{秒} + \sqrt{\frac{\left(19.6 \times \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2}{9.8^2} + \frac{2 \times 4.9}{9.8}}\text{秒}$$

＝（$\sqrt{2} + \sqrt{3}$）秒 $= 3.15$秒

$$s = v_0 \cos a \cdot \tau = 19.6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 3.15\text{米} = 43.7\text{米。}$$

[解法二]把铅直运动分成 OM 和 MO′G 两部分

(1)O 到 M 的运动和解决一中的第(1)小题相同。

(2)M经过O′到G的运动是自由落体运动，位移为H+h，经历的时间为t_2，则有

$$H+h=\frac{1}{2}gt_2^2 \qquad (11)$$

(4)**代入**(11)**式，解得**

$$t_2=\sqrt{\frac{v_0^2\sin^2 a}{g^2}+\frac{2h}{g}}。$$

$$\tau=t_1+t_2=\frac{v_0\sin a}{g}+\sqrt{\frac{v_0^2\sin^2 a}{g^2}+\frac{2h}{g}},$$

$$s=v_0\cos a\cdot\tau。$$

[**解法三**]**如果落地点和抛出点在同一水平面上，如图中**O'**，则石块沿铅直方向的运动**OMO'**所经历的时间**t_1**可由已知公式求得**

$$t_1=\frac{2v_0\sin a}{g} \qquad (12)$$

而O'**到**G**的运动是一个初速度为**v'_0 （τ'_0 **大小等于**v_0）**，和水平方向成**a**角的向下抛运动。它铅直方向运动的路程为**h**，经历的时间为**t_2**，则有**

$$h=v_0\sin a\cdot t_2+\frac{1}{2}gt_2^2 \qquad (13)$$

解得

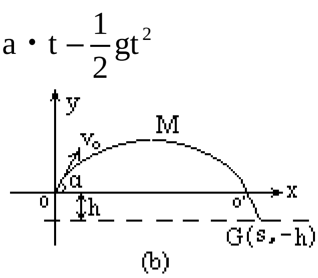
$$t_2=-\frac{v_0\sin a}{g}+\sqrt{\frac{v_0^2\sin^2 a}{g^2}+\frac{2h}{g}},$$

$$\tau=t_1+t_2=\frac{v_0\sin a}{g}+\sqrt{\frac{v_0^2\sin^2 a}{g^2}+\frac{2h}{g}}。$$

[**解法四**]**利用坐标解水平和竖直方向的运动，以**O**点为坐标原点，作一垂直向上的**y**轴和水平向右的**χ**轴，如图**(b)**所示。在任何时刻**t。**石块所处的坐标为**

$$\chi=v_0\cos a\cdot t \qquad (14)$$

$$y=v_0\sin a\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (15)$$



(b)

当石块在空间飞行的时间为τ时，x=s，y=–h，代入(14)、(15)两式得

$$s = v_0 \cos a \cdot \tau \qquad (16)$$

$$-h = v_0 \sin a\tau - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (17)$$

解(17)式得

$$\tau = \frac{v_0 \sin a}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 a}{g^2} + \frac{2h}{g}}。$$

代入(16)式便可求得s。

［解法五］把运动分成以速度v_0的直线运动和加速度为g的直线运动两部分，在τ时间内，由于v_0产生的位移为r，它的终点为A。由于加速度g产生的位移为AG，它的终点为G，如图(c)所示。

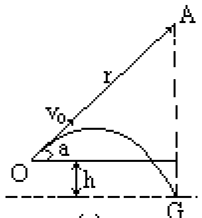
$$r = v_0 \cdot \tau，$$

$$r \sin a + h = \frac{1}{2} g\tau^2。$$

解得

$$\tau = \frac{v_0 \sin a}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 a}{g^2} + \frac{2h}{g}}，$$

$$s = r \cos a = v_0 \cos a \cdot \tau。$$



(c)

575．某人以仰角 45°的方向投一块石子，使它击中墙上的目标。这目标距投射点的水平距离是 s，竖直高度是 h。试求投射的初速度是多少？

［解答］由斜抛运动得

$$s = v_0 \cos\theta \cdot t \qquad (1)$$

$$h = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (2)$$

解(1)和(2)式得

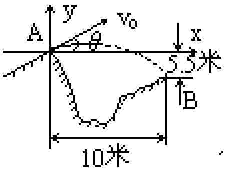
$$h = s\mathrm{tg}\theta - \frac{gs^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}。$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{gs^2}{2\cos^2\theta(s\mathrm{tg}\theta - h)}}。$$

以$\theta = 45°$代入，得

$$v_0 = \sqrt{\frac{gs^2}{s-h}}。$$

576．一个人骑摩托车，冲上θ为 15°的斜坡后越过一条沟，具体数据见图所示。试计算他离开 A 点时的最小速度。



[解答]斜抛物体的运动方程为

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t。$$

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2。$$

消去t**得**$y = tg\theta \cdot x - \dfrac{y}{2v_0 \cos^2\theta} x^2$**。以**$A$**点作直角坐标**$O_{xy}$**，摩托车离开**$A$**点时速度为**$v_0$**，抛射角**$\theta = 15°$**，沿抛物线轨道到达**$B$**点。**$B$**处坐标为**$x = 10$**米，**$y = -5.5$**米。在抛物线上的点均满足上述方程，所以代入数据计算得**

$$v_0 = \sqrt{\frac{gx^2}{2\cos^2\theta(tg\theta \cdot x - y)}} = \sqrt{\frac{9.8 \times 10^2}{2 \times (0.9659)^2 [0.2679 \times 10 + 5.5]}} \text{米/秒}$$

$$= 8.0 \text{米/秒。}$$

577．一个物体以初速 v_0，抛射角 θ 作斜上抛运动时，射高和在同一水平面上的射程恰好相等，当物体以相同的初速 v_0，另一个抛射角（90°－θ）作斜上抛运动时，求射高和同一水平面上的射程的比。

[解答]**当落地点和抛出点在同一个水平面上时，则有飞行时间**

$T = \dfrac{2v_{0.} \sin\theta}{g}$**，射高**$H = \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$**，射程**$L = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$。

初速为v_0**、抛射角为**θ**时，射高和射程相等，则**

$$\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}\text{，解得 } tg\theta = 4。$$

初速为v_0**、抛射角为（**$90 - \theta°$**）时，则**

$$\frac{H}{L} = \frac{v_0^2 \sin^2(90° - \theta) / 2g}{v_0^2 \sin^2(180° - 2\theta) / g} = \frac{\cos^2\theta}{2\sin 2\theta} = \frac{1}{4tg\theta} = \frac{1}{16}。$$

578．物体以 7 米/秒速度各水平方向成 $tg^{-1}2$ 的夹角抛射，试求：（1）抛射高度；（2）当高度为 0.5 米时运动方向各水平间夹角；（3）从抛出到落到同一水平面的飞行时间。

[解答]（1）$\theta=\mathrm{tg}^{-1}2$，由三角函数解得

$$\sin^2\theta=\frac{\mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}=\frac{2^2}{1+2^2}=\frac{4}{5};$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}。$$

抛射的高度为

$$H=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}=\frac{7^2\times\frac{4}{5}}{2\times9.8}\text{米}=2\text{米}。$$

(2)设φ为到达高h为0.5米时运动方向和水平间的夹角，这时运动的速度为v。把速度分解为竖直方向和水平方向，则

水平方向上　　$v\cos\varphi=v_0\cos\theta$。

竖直方向上　　$(v\sin\varphi)^2=(v_0\sin\theta)^2-2gh$。

所以　$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{v\sin\varphi}{v\cos\varphi}=\frac{\sqrt{v_0^2\sin\theta-2gh}}{v_0\cos\theta}=\frac{\sqrt{7^2\times\frac{4}{5}-2\times9.8\times0.5}}{7\times\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{3}。$$

所以　　$\varphi=60°$。

(3)飞行时间$$T=\frac{2v_0\sin\theta}{g}=\frac{2\times7\times\sqrt{\frac{4}{5}}}{9.8}\text{秒}=1.28\text{秒}。$$

579．从高为 13g/2 米的塔顶斜上抛一个物体，它的初速度的竖直量为 6g 米/秒、水平分量为 8g 米/秒。求飞行时间和落地的水平射程。

[解法一]物体到达最高点所需时间，由竖直方向运动决定。

$$t_1=\frac{v_{0y}}{g}=\frac{6g}{g}\text{秒}=6\text{秒}。$$

由最高点落回塔顶同一水平面时间$t_2=6$秒。

物体由$13g/2$高处落到地面需要时间t_3，则

$$s=v_yt_3+\frac{1}{2}gt_3^2,$$

$$\frac{13}{2}g=6g\cdot t_3+\frac{1}{2}gt_3^2。$$

$$t_3^2+12t_3-13=0。(t_3-1)(t_3+13)=0。$$

所以　　$t_3=1$秒。

飞行时间　　$T=t_1+t_2+t_3=(6+6+1)\text{秒}=13\text{秒}$；

水平射程　　$s=v_{0\chi}\cdot T=8g\times13\text{米}=104g\text{米}$。

[解法二]由斜抛运动公式

$$h = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2,$$

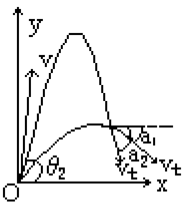
$$-\frac{13}{2}g = 6gt - \frac{1}{2}gt^2。$$

$t^2 - 12t - 13 = 0$。

$t = 13$秒，$t = -1$秒（不合题意，舍去）。

$s = v_{0\chi}t = 8g \times 13$米 $= 104g$米。

580．篮球架上的篮球圈离地 3.0 米，运动员的手在离地面 2.0 米、离球圈中心水平距离为3.0米处以v为$3\sqrt{5}$米/秒的初速度投篮命中。求：(1) 运动员投篮时初速度方向各地面所成的角度；(2)球从离手到篮圈所经历的时间；(3)球进篮时的速度；(4)如投篮角度可以不止一个，那么用哪一个投篮角度比较好？为什么？（g 取 10 米/秒 ²）



[解答]（1）设抛出点为坐标原点，由斜抛运动的公式

$$x = v_0 \cos\theta t。$$

$$y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2。$$

解得 $y = x\mathrm{tg}\theta - \left(\dfrac{g}{2v^2\cos^2\theta}\right)x^2$。

代入数值计算

$$3 - 2 = 3\mathrm{tg}\theta - \frac{10}{2(3\sqrt{5})^2\cos^2\theta} \times 3^2。$$

解得 $(\mathrm{tg}\theta - 1)(\mathrm{tg}\theta - 2) = 0$，

所以 $\theta_1 = 45°$；$\theta_2 = 63°26'$。

(2)飞行时间$t_1 = \dfrac{x}{v\cos\theta_1} = \dfrac{3}{3\sqrt{5}\cos 45°}$秒 $= 0.63$秒。

$$t_2 = \frac{x}{v\cos\theta_2} = \frac{3}{3\sqrt{5}\cos 63°26'}\text{秒} = 1\text{秒}。$$

(3)篮球到篮圈中心时，则

$$v_x = v\cos\theta,$$

$$v_y^2 = (v\sin\theta)^2 - 2gy。$$

$$v_t = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v^2 - 2gy} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 2 \times 10 \times 1}\text{米/秒}$$

$$= 5\text{米/秒}。$$

v_t的大小和θ无关，但方向和θ的大小有关。设和水平间夹角为a，则

$$a_1=\cos^{-1}\frac{v\cos\theta_1}{v_t}=\cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{5}\cos45°}{5}\right)=18°33'，$$

$$a_2=\cos^{-1}\frac{v\cos\theta_2}{v_t}=\cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{5}\cos63°26'}{5}\right)=53°8'。$$

(4)a_1比a_2小，容易碰到篮圈，所以要用和a_2相应的投球角度θ_2。

581．用炸弹射击一个目标，当射击的仰角是 a 时射程离目标不到 a；当射击的仰角是β时，射程超过目标 b。如果速度不变，空气阻力不计，要击中目标，射击的仰角应为多少？

[解答]设射击的仰角为θ时正好击中目标，则目标离射击处的水平射程

$$s=\frac{v_0^2\sin2\theta}{g}。$$

据题意

$$s-a=\frac{v_0^2\sin2a}{g}\qquad(1)$$

$$s+b=\frac{v_0^2\sin2\beta}{g}\qquad(2)$$

(1)式×b+(2)式×a

$$s(a+b)=\frac{v_0^2(a\sin2\beta+b\sin2a)}{g}。$$

以s代入解得

$$\sin2\theta=\frac{a\sin2\beta+b\sin2a}{(a+b)}，$$

$$\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{a\sin2\beta+b\sin2a}{a+b}。$$

582．一架轰炸机和水平面成 a 角的方向以速度 v 俯冲。如果俯冲时，飞机在高度 H 处扔出炸弹并希望炸弹准确地击中目标，问在离目标水平距离为多少时扔出炸弹？（空气阻力忽略不计）

[解答]炸弹下落时间，可由方程解得

$$H=v\sin a\cdot t+\frac{1}{2}gt^2。$$

炸弹在水平方向上路程L

$$L=v\cos a\cdot t。$$

两式消去t解得

$$L=\frac{v\cos a}{g}\left(\sqrt{v^2\sin^2a-2gH}-v\sin a\right)。$$

583．一个人以仰角 a、速度 v 向空中抛出一石头，在同一地点又以仰角 a′、速度 v′再抛出一块石头。如果要使第二块石头击中第一块石头，问两次抛射的时间间隔应多少？（假设两块石头的初速在同一竖直平面内）

[解答]设两个石块抛出的时间间隔为 T，第一块石块抛出时间 t 后被第二块石头

击中。那末，在 t 时刻第一块石块所通过的水平距离和竖直距离必等于第二块石头在时刻（t−T)所通过的水平距离和竖直距离。

$$v\cos a \cdot t = v'\cos a'(t-T) \qquad (1)$$

$$v\sin a \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = v'\sin a'(t-T) - \frac{1}{2}g(t-T)^2 \qquad (2)$$

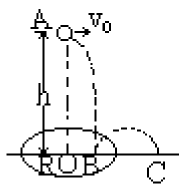
由(2)式÷(1)式

解得 $v'\cos a'\mathrm{tg}a - \frac{1}{2}gt\frac{v'\cos a'}{v\cos a'} = v'\sin a' - \frac{1}{2}g(t-T)$，

$$v'\frac{\sin(a-a')}{\cos a} = \frac{1}{2}gt\frac{v'\cos a' - v\cos a}{v\cos a} + \frac{1}{2}gT。$$

$$T = \frac{2vv'\sin(\alpha-\alpha')}{g(v\cos\alpha + v^1\cos\alpha')}。$$

584．在半径为 R 的水平圆板中心正上方高 h 处，沿水平抛出一只球。要使球只和板面碰撞一次，求抛出速度的量值范围。（设球和板面碰撞后水平方向的分速度不变，竖直方向的分速度量值是碰撞前的 1/2。）



[解答]　　设球从 A 点抛出时的水平速度为 v_0，从抛出到和板碰撞的时间（下落时间）为 t，第一次碰撞点为 B。因为小球的这一段运动是平抛运动，则有

$$h = \frac{1}{2}gt^2，t = \sqrt{\frac{2h}{g}}。$$

与板碰撞的竖直速度为 $gt = \sqrt{2gh}$。

B点和O点的距离为 $OB = v_0t = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$。

为使小球能和板碰撞，OB 必须小于等于 R，所以 v_0 必须满足

$$v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \le R，v_0 \le R\sqrt{\frac{g}{2h}}。$$

据题意，第一次着板后，反跳的竖直速度 v_y 应为碰撞前速度的 1/2，而反跳后的水平速度为 v_0。所以反跳后小球作斜抛运动，它从 B 点反跳到 C 点的飞行时间为

$$T = 2\cdot\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}。$$

斜抛运动的水平距离BC为 $BC = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$，

显然 OB+BC 必须大于 R，第二次落点才会落到圆板外面，从而避免第二次碰撞。所以 v_0 还必须满足

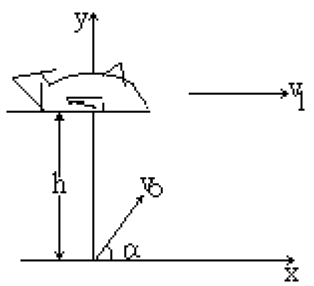
$$v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}+v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}>R,$$

$$v_0>\frac{R}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}。$$

抛出速度 v_0 应满足下面的条件，才能使球和板碰撞、而且只碰撞一次。

$$\frac{R}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}<v_0\leq R\sqrt{\frac{g}{2h}}。$$

585．如图所示，一架飞机距地面高为 h，以匀速 v_1 作水平飞行。今有一座高射炮要击中飞机。设高射炮炮弹的初速为 v_0，和水平所成的夹角为α。并设发射时飞机在高射炮的正上方，空气阻力可不计。那么要击中飞机，v_0 必须满足什么条件？并讨论 v_0 和α的关系。



[解答]　　　炮弹击中飞机必须满足的第一个条件

$$v_0\cos\alpha=v_1 \qquad (1)$$

即在同一时刻炮弹和飞机的横坐标相等。炮弹所能达到的最大高度为 H，则

$$H=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g},$$

H≥h 是炮弹击中飞机的第二个条件，即

$$v_0^2\sin^2\alpha\geq 2gh \qquad (2)$$

(1)式平方后和(2)式相加

解得　　　$v_0^2\geq v_1^2+2gh$。

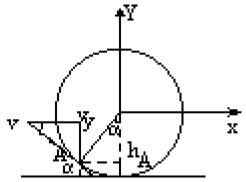
所以击中条件是

$v_0\cos\alpha=v1$（子弹的水平速度和飞机的水平速度相等），

$v_0\sin\alpha\geq\sqrt{2gh}$（达到h高度时的速度大于等于零），

v0 可以不同，α也可以不同，但是 v0cosα,v0sinα要满足一定条件。

586．一辆汽车沿水平公路以速度 v 无滑动地运动，如果车轮半径为 R，试求车轮抛出的水滴上升的最大高度和抛出点的位置。



[解答]　　　汽车以速度 v 前进，车轮轴的速度也就是 v，这是相对地面来说的。如果将坐标轴选在车轮的轴上，则车轮边缘的线速度相对轮轴来讲就是 v，而相对地面来讲，要和轮轴对地的水平速度 v 矢量相加。

设水滴自 A 点抛出，则抛出速度的竖直分量为

$$v_y = v\sin\alpha。$$

水平分量为

$$v_x = v（1-\cos\alpha）。$$

抛出点 A 离地的高度为

$$h_A = R（1-\cos\alpha）$$

水滴上升的高度和垂直方向的分运动有关，水滴上升的最大高度为

$$H = h_A + \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$$

$$= R - R\cos\alpha + \frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}$$

$$= R - R\cos\alpha + \frac{v^2}{2g}（1-\cos^2\alpha)。$$

由此可见，水滴上升达到的最大高度和α有关；也就是和水滴抛出时在轮边缘上的位置有关。轮边缘上不同位置的水滴，抛出后，可能达到的最大高度是不同的。

整理上式得 $\frac{v^2}{2g}\cos^2\alpha + R\cos\alpha + （H-R-\frac{v^2}{2g}） = 0$

解出 cosα和 H 的关系

$$\cos\alpha = -\frac{Rg}{v^2} \pm \sqrt{（1+\frac{Rg}{v^2}）^2 - \frac{2gH}{v^2}(}，$$

要保证 cosα有意义,得满足两个条件。第一个条件是根式应是实数，即 $（1+\frac{Rg}{v^2}）^2 - \frac{2gH}{v^2} \geq 0$，也就是$H$不可能过大，最大高度应满足

$$H \leq \frac{v^2}{2g}（1+\frac{Rg}{v^2}）^2，$$

说明不论水滴的位置如何，H 的最大可能值由上式决定。

第二个条件是｜cosα｜≤1，要满足这一条件，分几种情况进行讨论。

(1) $\frac{Rg}{v^2} > 1$，在这种情况下只有

$\cos\alpha = -\frac{Rg}{v^2} + \sqrt{（1+\frac{Rg}{v^2}）^2 - \frac{2gH}{v^2}}$才可能有意义；

但根式等于零，

即$H = \frac{v^2}{2g}（1+\frac{Rg}{v^2}）^2$是没有意义的。

H最大，只有取$\sqrt{（1+\frac{Rg}{v^2}）^2 - \frac{2gH}{v^2}}$足够小，小到$\cos\alpha = -1$，

得 $H_{max}=2R$，α=π。

H最小，只有取$\sqrt{（1+\frac{Rg}{v^2}）^2 - \frac{2gH}{v^2}}$足够大，大到$\cos\alpha = 1$，

得 $H_{max}=0$，α=0

(2) $\frac{Rg}{v^2}<1$，在这种情况下，$\cos\alpha=-\frac{Rg}{v^2}\pm\sqrt{\left(1+\frac{Rg}{v^2}\right)^2-\frac{2gH}{V^2}}$

是可能有意义。

取正号解得H的最大值是使$\sqrt{\left(1+\frac{Rg}{v^2}\right)^2-\frac{2gH}{v^2}}=0$，$\cos\alpha=-\frac{Rg}{v^2}$，而

$$H_{\max}=\frac{v^2}{2g}\left(1+\frac{Rg}{v^2}\right)^2;$$

取负号解得H的最大值也是使$\sqrt{\left(1+\frac{Rg}{v^2}\right)^2-\frac{2gH}{v^2}}=0$，$\cos\alpha=-\frac{Rg}{v^2}$。而

$$H_{\max}=\frac{v^2}{2g}\left(1+\frac{Rg}{v^2}\right)^2。$$

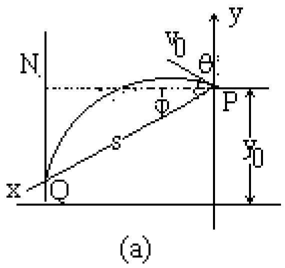
将$\cos\alpha=-\frac{Rq}{v^2}$代入h和α的关系式，即可求得抛出点A的坐标，即

$$h_A=R-R\cos\alpha=-R\sqrt{1-\cos^2\alpha}=R+R\cdot\frac{Rq}{v^2}=R+\frac{R^2q}{v^2},$$

坐标为$x_A=-R\sin\alpha=-R\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{R}{v^2}\sqrt{v^4-R^2g^2}$，

$$y_a=R-h_A=R\cos\alpha=-\frac{R^2g}{v^2}。$$

587．斜面与水平面成φ角，在斜面底端以初速 v_0，抛射角θ（即跟水平面间成角θ，θ＞φ）向上抛出一物体。求：(1)物体在空中的飞行时间；(2)在斜面上的射程；(3)当斜面倾角φ=45°时，抛射角等于多少可得到最大的射程；(4)如果在斜面顶端以初速 v_0 和水平成θ角向斜面底端斜向上抛射，在斜面上的射程又是多少？



(a)

[解答]　(1)设物体在斜面上的射程 PQ 为 s，抛体垂直于斜面的初速度为 $v_0\sin(\theta-\varphi)$，垂直于斜面的加速度为-gcosφ，飞行时间为 T[图(a)]。取 x 轴平行于斜面，y 轴垂直于斜面。则在时间 T 内，该物体落在斜面上时，y=0。由位移公式有

$$v_0\sin(\theta-\varphi)\cdot T-\frac{1}{2}(g\cos\varphi)\cdot T^2=0。$$

飞行时间　$T=\frac{2v_0\sin(\theta-\varphi)}{g\cos\varphi}$。

(2)由于在 T 时间内水平方向的分速度 $v_0\cos\theta$ 保持不变，因此水平方向位移为

$$PN=v_0\cos\theta\cdot T。$$

斜面上的射程$s=\dfrac{PN}{\cos\phi}=\dfrac{v_0\cos\theta}{\cos\phi}\cdot T=\dfrac{2v_0^2\cos\theta\sin(\theta-\phi)}{g\cos 2\phi}$。

(3)**最大射程**$s=\dfrac{2v_0^2}{g}\dfrac{\cos\theta\sin(\theta-\phi)}{\cos^2\phi}=\dfrac{v_0^2}{g\cos^2\phi}[\sin(2\theta-\phi)-\sin\phi]$，

在 v_0、φ一定的情况下，要使 s 最大，应使 sin(2θ-φ)最大，即 sin(2θ-φ)=1。

所以 $\theta=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\pi}{2}+\phi\right]=\dfrac{1}{2}(90°+45°)=67.5°$。[[

$$S_{max}=\frac{v_0^2(1-\sin\phi)}{g\cos^2\phi}=\frac{v_0^2}{g(1+\sin\phi)}。$$

(4)同上分析，可求得

飞行时间$T=\dfrac{2v_0}{g}\dfrac{\sin(\theta+\phi)}{\cos\phi}$。

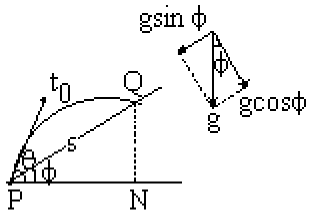
射程$s=\dfrac{2v_0^2\cos\theta\sin(\theta+\phi)}{g\cos^2\phi}$

$$=\frac{v_0^2}{g\cos^2\phi}[\sin(\theta+\phi)-\sin\phi]。$$

当 sin（2θ+φ)=1 时，s 有极大值

$$s_{max}=\frac{v_0^2}{g(1-\sin^2\phi)}。$$

也可以把抛物线的运动分解成沿水平方向的竖直方向两个分运动来考虑[见图(b)]。



(b)

$$x=v_0\cos\theta\cdot t。$$

$$y=y_0+v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2。$$

在落点 Q 有 $x=s\cos\phi$；$y=y_0-s\cdot\sin\phi$

所以 $s\cdot\cos\phi=v_0t\cos\theta$，

$$y_0-s\cdot\sin\phi=y_0+v_0t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2,$$

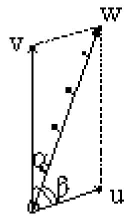
消去t得 $s=\dfrac{2v_0^2\cos\theta\sin(\theta+\phi)}{g\cos^2\phi}$。

如果所给条件中的角不是对水平线的，而是对斜面的。则可设角为β，β=θ+φ。则

$$s=\frac{v_0^2\sin 2\beta}{g\cos\phi}(1+\mathrm{tg}\phi\,\mathrm{tg}\beta)。$$

要使抛物体落到斜面上，s≤L。其中 L 为斜面的长度。

588．一只小船在静水中速度为 v，现船头和水流成α角方向渡河，水流速度等于 u。求小船相对于岸的速度 w 及 t 时刻的位移。



[分析] 小船在船桨作用下划向河对岸，同时又受到水流的冲力。$v_{船岸}=v_{船水}+v_{水岸}$

[解答] w=v+u

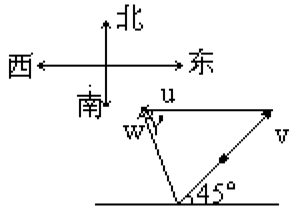
由矢量图解得$w=\sqrt{v^2+u^2-2uv\cos(180°-\alpha)}$

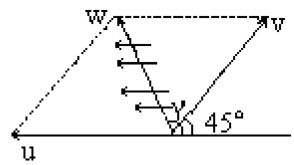
$$=\sqrt{v^2+u^2+2uv\cos\alpha}。$$

因为$\frac{\sin(180°-\alpha)}{w}=\frac{\sin\beta}{v}$，得$\sin\beta=\frac{v\sin\alpha}{\sqrt{v^2+u^2+2uv\cos\alpha}}$。

小船的位移的大小 $r=wt=t\sqrt{v^2+u^2+27v\cos\alpha}$。它的方向和河岸成β角。

589．甲船以速度 v 向东北方向航行，船上领航员测得附近乙船以速度 u 向西运动。求乙船相对于地的速度。





[解答] 设乙船相对于地的速度为 w，则=u+v，即 $v_{乙地}=v_{乙甲}+v_{甲地}$。由速度矢量图解得

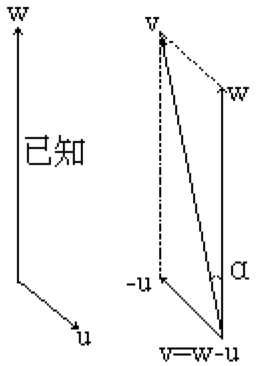
$$w=\sqrt{v^2+u^2-2vu\cos 45°}$$

$$=\sqrt{v^2+u^2-\sqrt{2}vu}，$$

矢量 w 的方向和地球纬线间夹角为 r，则有

$$\frac{\sin r}{v}=\frac{\sin 45°}{w},\sin r=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{v}{w}。$$

590．一架飞机要求在时间 t 为 2 小时内往正北飞行 300 千米，如果在飞行时有速度 u 为 27 千米/时、和经线成 30°角的西北风，问飞机应以多大速度和什么航向飞行？



[解答]　　　飞机飞行速度是指对空气而言，即相对速度 $v_{飞风}$，风速 u 即空气相对于地的速度。要使飞机相对地的速度 w 沿正北方向，则

w=v+u，($v_{飞地}=v_{飞风}+v_{风地}$)

v=w+(-u)。

$$v=\sqrt{w^2+u^2-2wu\cos(180°-30°}$$

$$=\sqrt{w^2+u^2+\sqrt{3}wu}$$

$$=\sqrt{(\frac{300}{2})^2+27^2+1.73\times150\times27}\text{千米/小时}$$

$$=174\text{千米/小时。}$$

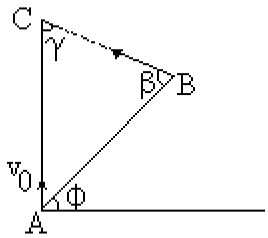
$$\frac{\sin\alpha}{u}=\frac{\sin(180°-30°)}{v},$$

$$\sin\alpha=\frac{u}{2v}=\frac{27}{2\times174}\approx0.078,\ \alpha=4°27'\text{。}$$

591．一艘军舰正以恒定速度 v_0 向正北方向航行。当它经过 A 点时，在东偏北φ角方向上的 B 点有一艘汽艇以恒定速度 v_1 出发，准备和军舰相遇。

问：(1)汽艇航行和直线 AB 成β角度为多少？

(2)汽艇和军舰相遇时间 t 为多少？(已知 AB 为 l)。



[解答](1)设汽艇和军舰相遇于 C 点，由匀速运动可知

$BC=v_1t$；　　　　　$AC=v_0t$。

由正弦定律　　$$\frac{v_1t}{\sin(90°-\varphi)}=\frac{v_0t}{\sin\beta},$$

所以　　$$\sin\beta=\frac{v_0}{v_1}\cos\varphi\text{。}$$

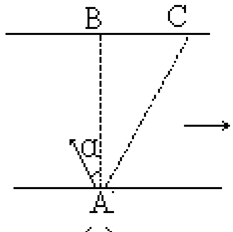
(2)由矢量三角形 ABC 得

$$r=90°+\varphi-\beta\text{。}$$

$$\frac{l}{\sin r}=\frac{v_1 t}{\cos\phi}=\frac{v_0 t}{\sin\beta}。$$

$$t=\frac{l\cos\phi}{v_1\cos(\phi-\beta)}=\frac{l\sin\beta}{v_0\cos(\phi-\beta)}。$$

592．某人坐船从 A 点出发渡河。如果船保持和河岸垂直的方向行驶，那么在他出发后 t_1 为 10 分钟到达 C 点，C 点在 B 点下游 s 为 120 米的地方。如果船保持和河岸垂直的直线 AB 成α角的方向逆流航行，那么经过 t_2 为 12.5 分钟到达河正对岸的 B 点[图(a)]。设河水流动速度和船速的量值在这两种情况中保持不变，求河的宽度 l，船速 v 和水流速度 u。

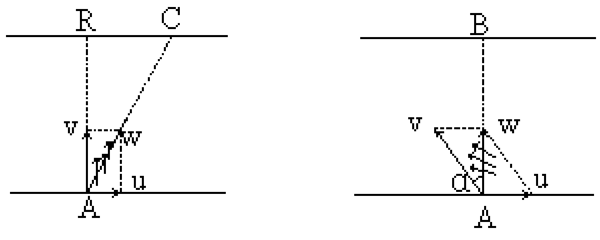


(a)

[分析]　　船对岸的速度应为船对水的速度（即船速 v）和水对岸的速度（即水速 u）的矢量和

w=v+u。

也可把船对岸的运动看成船对水和水对岸两个分运动的合运动。在第一种情况，即在时间 t_1 内，假定河水不流船由 A 到达 B，船不开而水流动，则船顺流冲向下游的路程相当于 s。在第二种情况，合运动的路程是由 A 到 B：正好和河岸垂直，作速度合成的矢量图如图(c)。



(b)　　(c)

[解答]　　可列方程式

$$l=vt_1 \quad (1)$$

$$s=ut_1 \quad (2)$$

$$v\sin\alpha=u \quad (3)$$

$$l=v\cos\alpha\cdot t_2 \quad (4)$$

(3)**式平方**+(4)**式平方**　　$v^2=u^2+\left(\frac{l}{t_2}\right)^2$　　(5)

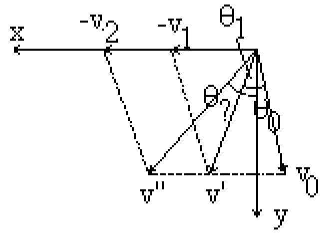
将(1)、(2)式入(5)式

得　　$l=\frac{t_2 s}{\sqrt{t_2^2-t_1^2}}=\frac{12.5\times120}{\sqrt{12.5^2-10^2}}$**米**$=200$**米。**

由(1)、(2)式可得　　**v=20 米/分，u=12 米/分。**

由(3)式得　　　　　　　　　$\alpha=36°50'$。

593．火车停止时，车窗上雨痕向前倾斜θ_0角。当火车以某速度v_1匀速前进时，窗上雨痕向后倾斜θ_1角。火车以较大速度v_2匀速前进时，窗上雨痕向后倾斜θ_2角。设雨滴落下方向对地来说是不变的，求火车速度v_1与v_2的比。



[解答]　　火车静止时，雨滴方向和竖直间成θ_0角，即雨滴对地的速度v_0的方向和竖直线成θ_0角。火车开动时，雨滴在车窗上的雨痕给出了雨滴相对于火车的相对速度v'或v''的方向。

$v_{雨车}=v_{雨地}+v_{地车}=v_{雨地}+(-v_{车地})$

作矢量图取坐标x轴水平向左，y轴竖直向下。由分量计算数值间关系如下

$$v'\sin\theta_1=v_1-v_0\sin\theta_0 \quad (1)$$

$$v'\cos\theta_1=v_0\cos\theta_0 \quad (2)$$

两式中消去v'

$$\mathrm{tg}\,\theta_1=\frac{v_1-v_0\sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0}。$$

$$v_1=v_0(\cos\theta_0\,\mathrm{tg}\,\theta_1+\sin\theta_0) \quad (3)$$

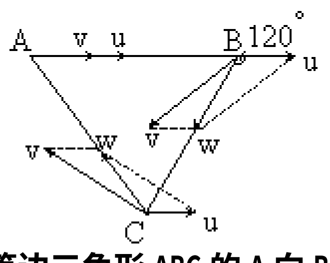
火车加速后，同理可得

$$v_2=v_0(\cos\theta_0\,\mathrm{tg}_2+\sin\theta_0) \quad (4)$$

火车前后两次速度的比为

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{\cos\theta_0\,\mathrm{tg}\,\theta_1+\sin\theta_0}{\cos\theta_0\,\mathrm{tg}\,\theta_2+\sin\theta_0}=\frac{\mathrm{tg}\,\theta_1+\mathrm{tg}\,\theta_0}{\mathrm{tg}\,\theta_2+\mathrm{tg}\,\theta_0}。$$

594.飞机以v=39千米/小时的速度绕一个边长l为2千米的等边三角形飞行。设风速u为21千米/小时，方向和三角形的一边平行、并和飞机起飞方向相同，求飞机绕三角形一周需要时间多少？



[解答]　　设飞机由等边三角形ABC的A向B起飞。由A到B需时间

$$t_1=\frac{l}{v+u}=\frac{2}{(\frac{39}{60}+\frac{21}{60})}\text{分}$$

$$=\frac{2}{(\frac{13}{20}+\frac{7}{20})}\text{分}=2\text{分钟。}$$

飞机由 B 至 C，相对于地的速度 w=v+u。

在作图中 w 的方向 u 的方向已知，但 v 的方向未知（大小已知），由 v=w-u 可定出 v 的方向，由于 u、w 间夹角已知为 120°，由余弦定理

$$v^2=u^2+w^2-2uw\cos 120°=u^2+w^2+2uw\cos 60°$$

代入数据得 $w^2+\frac{7}{20}w-\frac{3}{10}=0$，$(w-\frac{2}{5})(w+\frac{3}{4})=0$，

解得 $w=\frac{2}{5}$ 千米/分。 （$w=-\frac{3}{4}$ 舍去）

飞机由B至C需时间 $t_2=\frac{1}{w}=\frac{2}{2/5}$ 分 $=5$ 分钟，

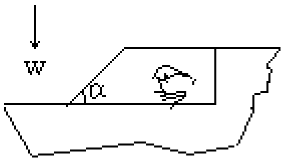
自 C 到 A 速度 w 大小跟前面相同。时间 $t_3=t_2=5$ 分钟。

飞机绕三角形一周共需时间

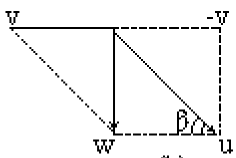
$$t=t_1+t_2+t_3=12\text{ 分钟。}$$

595．雨滴以速度 w 竖直落下。以速度 v 水平飞行的飞机驾驶室的舱盖有两块玻璃窗；顶窗是水平的，前面窗和水平成α角，每块玻璃窗的面积都是 S。求落在前面和顶面两块玻璃窗上的水量的比。

[分析]　　由题意可知，w 为雨滴相对地面的速度，方向垂直向下。v 是飞机相对地面的速度，方向水平。雨打在窗上的情况取决于雨相对飞机窗口的速度。如果以地面为静止参考系，根据以上分析得 w=v+u（$v_{雨地}=v_{机地}+v_{雨机}$）或 u=w-v。可作图(b)所示。



(a)

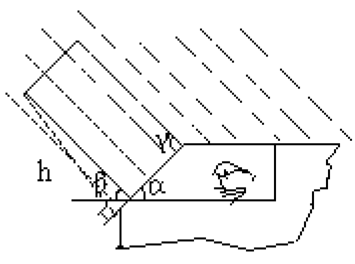


(b)

[解答]　　由上分析知

$u=\sqrt{w^2+v^2}$，方向和水平间夹角为β。

$$\sin\beta=\frac{w}{u}\text{；}\cos\beta=\frac{v}{u}\text{。}$$



(c)

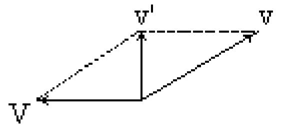
在单位时间内落到斜玻璃窗上的雨滴，就在棱 u、底面 S 和高 h（=usinγ）的斜柱体面。这里 $\gamma=\alpha+\beta$，斜柱体的体积 $V=S\cdot u\cdot \sin(\alpha+\beta)$。如果单位体积内的雨滴数为 n，则斜柱体内的雨滴数就是单位时间内落到前面玻璃窗上的雨量

$$N_1=nV=Snu\sin(\alpha+\beta)=S\cdot n\cdot u(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)$$
$$=S\cdot n\cdot(v\sin\alpha+w\cos\alpha)。$$

如果上式中 $\alpha=0$，即单位时间内落到上面玻璃窗上的雨水量 $N_2=Snw$，则

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{v\sin\alpha+w\cos\alpha}{w}。$$

596．某人在静水中游泳，速率为 v，如果他在流速为 V 的河中逆流和顺流往返一段距离 l 所需的时间为 t_1。横渡该河时，往返一段距离 l 所需的时间为 t_2。试问：t_1 和 t_2 哪个时间长，相差多少？



[解答]　　　沿河逆流而上和顺流而下的时间为 t_1 则

$$t_1=\frac{l}{v-V}+\frac{l}{v+V}=\frac{2vl}{v_2-V_2}$$

横渡河时，人对水的速度应和河岸成某一角度斜向上游，河水对岸的速度为 V，所以人对岸的相对速度为 v′。矢量图如右图所示。

设横渡河的速度为v'，则$v'=\sqrt{v^2-V^2}$。

则　　　$t_2=\frac{2l}{v'}=\frac{2l}{\sqrt{v^2-V^2}}$。

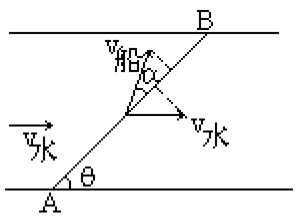
时间差　　$t_1-t_2=\frac{2vl}{v^2-V^2}-\frac{2vl}{\sqrt{v^2-V^2}}$。

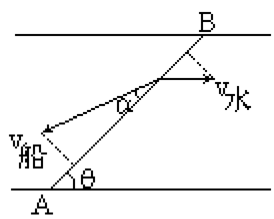
$$=\frac{2l}{\sqrt{v^2-V^2}}\left[\frac{v}{\sqrt{v^2-V^2}}-1\right]>0$$

$$t_1>t_2。$$

597．河两岸相距 s 为 1200 米处有 A、B 两码头，AB 连线和河岸成 $\theta=60°$角、且 B 在 A 的下游。水流速度 $v_水$为 1.9 米/秒。一艘渡船要想在最短时间 t 为 5 分钟往返两码头间，问船应取怎样的方向航行？船速多大？

[解答]　　　设以地面为静止参照物，船相对于河水的速度为 $v_船$，河水相对于岸的速度为 $v_水$，码头连线为 AB。当由 A 向 B 渡河时，船应向上游和 AB 连线成α角，使船相对于岸的速度方向正好沿 AB 方向。将 $v_船$和 $v_水$分解成 AB 方向上和垂直于 AB 方向上的两个分速度来考虑。在垂直于 AB 方向上则有





$$v_船\sin\alpha=v_水\sin\theta$$

船对岸的航行速度为 $v_{船}\cos\alpha = v_{水}\cos\theta$， (1)

所以 $s = (v_{船}\cos\alpha + v_{水}\cos\theta)t_1$。

当渡船由 B 返回 A 时，船仍应向上游与 AB 连线成 α 角，才能保证仍在 BA 航线上。这时船对岸的航行速度为 $v_{船}\cos\alpha - v_{水}\cos\theta$。

设返回时间为 t_2，则

$$s = (v_{船}\cos\alpha - v_{水}\cos\theta)t_2。$$

往返一次时间为

$$t = t_1 + t_2 = \frac{s}{v_{船}\cos\alpha + v_{水}\cos\theta} + \frac{s}{v_{船}\cos\alpha - v_{水}\cos\theta}$$

$$= \frac{s \cdot 2v_{船}\cos\alpha}{(v_{船}\cos\alpha)^2 - (v_{水}\cos\theta)^2} \quad (2)$$

(2)式化简

$$v_{船}^2 t\cos^2\alpha - 2v_{船}s\cos\alpha - tv_{水}^2\cos^2\theta = 0，$$

$$\cos\alpha = \frac{2v_{船}s \pm \sqrt{(2v_{船}s)^2 + 4v_{船}{}^2t^2v_{水}{}^2\cos^2\theta}}{2v_{船}{}^2t}，$$

$$= \frac{s \pm \sqrt{s^2 + v_{水}{}^2t^2\cos^2\theta}}{v_{船}t}。$$

由于 $\alpha < 90°$，$\cos\alpha$ 为正值。而根号内数值肯定大于 s，所以负号应舍去。

将(1)式代入，消去 $v_{船}$ 得

$$\text{ctg}\alpha = \frac{s + \sqrt{s^2 + v_{水}^2t^2\cos^2\theta}}{v_{水}\sin\theta t}，$$

船头应和 AB 连线成 α 角。由 A 到 B 时和河岸成（α+θ）角；由 B 返回 A 时和河岸成（θ-α）角。将数据代入计算得 θ=60°，$v_{水}$=1.9 米/秒，s=1200 米，t=300 秒。

$$\text{ctg}\alpha = \frac{1200 + \sqrt{(1200)^2 + (1.9)^2 \cdot (300)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{1.9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 300} = 4.93，\ \alpha = 11.5°。$$

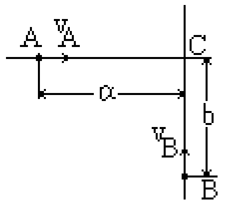
$$v_{船} = v_{水}\frac{\sin\theta}{\sin\alpha} = 1.9 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0.199}\text{米/秒} = 8.27\text{米/秒}。$$

598．两条互相正交的公路，交点为 C。一条公路上离 C 点距离为 α 处有一辆车以速度 v_A 匀速向 C 行驶。在另一条公路上离 C 点距离为 b 处有一辆车以速度 v_B 向 C 匀速行驶。问：(1)什么时候两车相距最近？距离是多少？

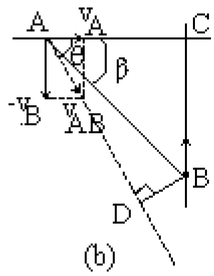
(2)又过多少时间，两车距离和开始时相同。

[解法一]　(1)据题意，经时间 t 后 A 车离 C 点距离为 $\alpha - v_At$，B 车离 C 点距离为 $b - v_Bt$。两车间距离为

$$\begin{aligned}
s^2 &= (\boldsymbol{\alpha}-v_A{}^t)^2+(b-v_B{}^t)^2\\
&= \boldsymbol{\alpha}^2+v^2{}_At^2-2\boldsymbol{\alpha}v_A^t+b^2+v_B^2t^2-2bv_B^t\\
&=\left(v_A^2+v_B^2\right)t^2-(\boldsymbol{\alpha}v_A+bv_B)2t+a^2+b^2\\
&=\left(v_A^2+v_B^2\right)\left[t^2-\frac{2(\boldsymbol{\alpha}v_A+bv_B)}{v_A^2+v_B^2}+\frac{a^2+b^2}{v_A^2+v_B^2}\right]\\
&=\left(v_A^2+v_B^2\right)\left[\left(t-\frac{\boldsymbol{\alpha}v_A+bv_B}{v_A^2+v_B^2}\right)^2-\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}v_A+bv_B}{v_A^2+v_B^2}\right)^2+\frac{a^2+b^2}{v_A^2+v_B^2}\right]。
\end{aligned}$$



(a)



(b)

当 $t=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}v_A+bv_B}{v_A^2+v_B^2}$**时，s为最小。代入上式可得**

$$s_{min}=\frac{|\ \boldsymbol{\alpha}v_B-bv_A\ |}{\sqrt{v_A^2+v_B^2}}。$$

(2)要使两车距离和开始时相同，即 $s^2=a^2+b^2$。由上式得（$v_A^2+v_B^2$）$t'^2-2(av_A+bv_B)t'=0$

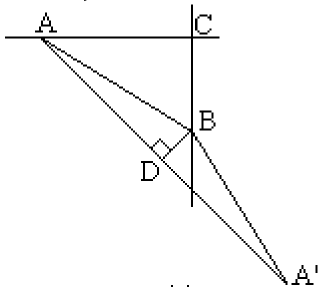
解得 $$t=0\text{和}t'=\frac{2(av_A+bv_B)}{v_A^2+v_B^2}。$$

即两车相距最近瞬时后，又经过$t'-t=\dfrac{av_A+bv_B}{v_A^2+v_B^2}$**时间后，两车间距离和开始时相同。**

[解法二](1)设 B 车为参考系。则 A 车相对于 B 车的速度为 v_{AB}。

$$v_{AB}=v_A+(-v_B)，tg\boldsymbol{\theta}=\frac{v_B}{v_A}。$$

即在 B 车上观察 A 车沿 v_{AB} 方向运动。要求 A、B 两车最近距离，可由 B 点作 v_{AB} 方向上延长线的垂线，垂足 D 到 B 点的距离即为最短距离[图(b)]。（注意：相对运动图象并非是地面观察者所看到的实际运动的图象，实际位置不是 B、D 处；但相对距离是对的）



(c)

这时A相对B的位移是 $s_{AB}=AD=v_{AB}\cdot t=\sqrt{v_A^2+v_B^2}\cdot t。$

由图可知

$$s_{AB}=AD=AB\cdot\cos(\theta-\beta)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cdot\cos\beta+\sin\theta\sin\beta)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{v_A}{\sqrt{v_A^2+v_B^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{v_B}{\sqrt{v_A^2+v_B^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\frac{av_A+bv_B}{\sqrt{v_A^2+v_B^2}}。$$

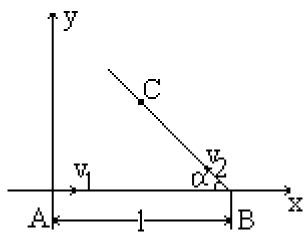
两式相等得时间 $t=\dfrac{av_A+bv_B}{v_A^2+v_B^2}$。

最近距离 s_{min}=BD=ABsin(θ-β)

$$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cdot\cos\beta-\cos\theta\sin\beta)$$
$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{v_B}{\sqrt{v_A^2+v_B^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{v_A}{\sqrt{v_A^2+v_B^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$
$$=\frac{av_B-bv_A}{\sqrt{v_A^2+v_B^2}}。$$

(2)由 BD 对称关系可知
再经过相等的时间 t，A 车和 B 车相对距离为 A′B 时即和开始时相同。见图(c)所示。

599．点 P_1 以速度 v_1 由 A 向 B 作匀速运动，同时点 P_2 以速度 v_2 由 B 向 C 作匀速运动（如图）。距离 AB 为 l，锐角 ABC 等于α，试问经过多少时间，点 P_1 和 P_2 之间的距离 r 最短？并求该距离。



[解答]　设 A 为原点，v_1 方向为 x 轴方向，建立 xy 坐标。点 P_1 以 v_1 作匀速运动，在运动过程中 P_1 的位置坐标为 $x_1=v_1t$；$y_1=0$。点 P_2 以 v_2 沿 BC 方向作匀速运动，在运动过程中，P_2 的位置坐标为

$x_2=l-v_2t\cos\alpha$；$y_2=v_2t\sin\alpha$。

在运动过程中，点 P_1 和 P_2 之间的距离 r 为

$$r^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$
$$=[(l-v_2t\cos\alpha)-v_1t]^2+[v_2t\sin\alpha-0]^2$$
$$=(v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha)t^2-2l(v_2\cos\alpha+v_1)t+l^2$$

根据二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质，如果 $a>0$ 当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，y 有极小值 $y_{min}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$。

因为 $v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha>0$，

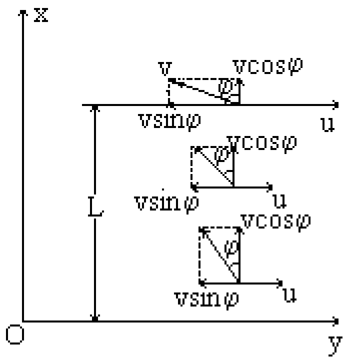
所以当 $t=-\dfrac{-2\ell(v_2\cos\alpha+v_1)}{2(v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha)}=\dfrac{\ell(v_2\cos\alpha+v_1)}{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}$

r^2 有极小值，即 r 为最短。其值为

$$r=\sqrt{\frac{4(v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha)\cdot\ell^2-[2\ell(v_2\cos\alpha)]^2}{4(v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha)}}$$

$$=\frac{\ell v_2\sin\alpha}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}}。$$

600．河水流速 u 在岸边等于零，从河岸到河中心流速和离河岸的距离成比例地增大。河中心流速等于 u_L。河宽为 2L。要使一艘船以对水的速度 v 从岸边出发，沿最短路线驶到出发点正对面河中心的浮标，问船头必须和水流成多大角度？



[解答] 设以河岸为原点，x 轴方向垂直河岸，由岸指向河中心。则由河岸到河心河水流速 u 的变化如下式

$$u=u_L\cdot\frac{x}{L}。$$

为使船由岸到浮标路线最短，必须使船沿 x 方向运动，即船对地的速度沿 x 方向。由于水速方向是已知的，就可求出船相对水的速度方向。而要保持垂直于岸边的直线，必须使船速和岸平行方向的分量和河水的流速相等、方向相反。也就是随离河岸的距离而增加。

由于船速 v 的数值已知不变的，所以必须随时调整船的航向，即φ角随 x 的增加而增加。船对岸的速度在两个方向上的投影应是

$$v_x=v\cos\varphi，$$

$$v_y=v\sin\varphi-u=v\sin\varphi-u_L\frac{x}{L}。$$

任何时刻 $v_y=0$，因此

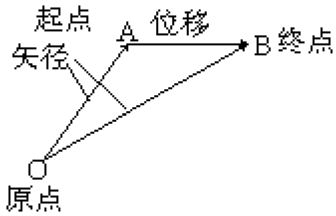
$$v\sin\varphi-\frac{u_L}{L}x=0，$$

$$\sin\varphi=\frac{u_L}{Lv}x。$$

表明角φ随距离的变化的规律。小船离岸后，由于φ角逐渐变大船头必须逐渐迎向水流。当 $x=L$ 时，$\sin\varphi=\dfrac{u_L}{v}$。φ角达到最大值。如果 $u_L>v$ 时，小船不可能达到浮标。

说理和论证题

601．路程和位移有什么区别？矢径和位移有什么区别？



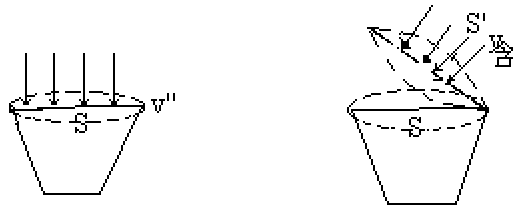
[解答] 路程是物体运动经历的实际路径，是一个标量。位移是物体初末位置的位置矢量的差，如图中 AB 所示，表示物体位置的改变，是一个矢量。只有当物体作直线运动而且方向不变时，位移的数值和路程相同。

矢径即位置矢量，如图中 OA 是坐标原点指向物体所在位置的一有向线段。而位移是两位置矢量的差。如果取物体运动起始点为坐标原点则终点的位置矢量和位移两者一致。

602．一个物体的速率恒定，但速度有变化，是否可能？一个物体的速度恒定，但速率有变化，是否可能？

[解答] 速度是矢量，既有大小又有方向，两者中有一个变化，速度即有变化。当速度的大小不变而方向变化时，就是速率不变，速度有变化。例如匀速圆周运动就是一例。所以，物体速率恒定、速度有变化是有可能的。物体的速度一定，即意味着速度的大小、方向均不变，就是速率也一定不变。因此，后一种情形是不可能的。

603．假定雨相对地面以速率 v 垂直落下，那末用桶盛雨水，在不刮风或有平行于地面的两种情况下，哪一种能较快地盛满雨水？



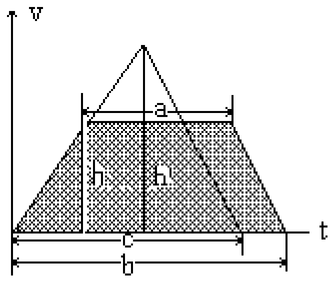
[解答] 桶中盛的雨水量和桶口面积 S，雨水速率 v 以及时间有关。雨水垂直于地面的速度一定时，刮平行于地面的风时使雨相对于地面的

速度($v_合$)增大。$v_合=\dfrac{v}{\cos\theta}$（θ为$v_合$和竖直方向间的角）。而桶口相对于雨的垂直面积变小了，S’=Scosθ。因此盛满水的时间决定于 $v_合$和 S′的乘积，$v_合$S′=vS。两种情况下，如果盛雨水时间相同，所盛雨水量相同。

604．一个物体运动的速度不为零，而加速度为零是否可能？如果加速度不为零，而速度为零是否可能？

[解答] 根据定义加速度是指速度的变化率，它和速度的增量和变化的时间有关。如果具有速度而加速度为零，是完全可能的。例如作匀速直线运动的物体。如果物体某一时刻的速度为零，经过△t 时间间隔后速度变为 v，那末这一时刻的加速度就为零。所以物体具有加速度而它的速度为零也是可能的。例如上抛运动的物体达到最高点时速度为

零，但加速度为 g。速度和加速度是两个不同的概念，不能混淆。
605．关于加速度的概念，下列说法是否正确？
(1)运动物体的加速度越大，物体的速度越大；
(2)物体在一直线上运动时，如果物体向前的加速度减小了，则物体向前的速度也随之减小；
(3)物体的加速度值很大，而物体的速度的值可以不变，这是不可能的。
[解答]　　这些说法都不正确。
(1)加速度是速度随时间的变化率。加速度大，速度的不一定大。
加速度大，速度为零的例子也有。因为还有个时间的因素要考虑。
(2)判断物体是作加速运动还是减速运动,要根据加速度方向和速度方向是否一致来判断。如果两者方向一致则是加速运动，两者方向相反则是减速运动。至于加速度的大小变化只说明速度变化的快慢有所不同。向前的加速度减小只说明速度的变化率减小，前进的速度并不减小，而仍是增大只是增加得慢而已。
(3)当加速度的方向和速度的方向垂直时,这时加速度的效果只改变速度的方向，而不改变速度的数值（即速率不变）。所以物体加速度值很大，而物体速度的数值不变是可能的。例如匀速圆周运动就是如此。
606.匀速运动是否一定是直线运动？匀变速运动是否一定是直线运动？
[解答]　　匀速运动是指速度不变的运动，即速度的大小和方向都不变化的运动。所以匀速运动一定是作直线运动。
匀变速运动是指加速度不变的运动。但物体运动的轨迹不但和加速度的方向有关，还和初速度的方向有关。如果初速度和加速度的方向在一条直线上就是直线运动，如竖直下抛运动。如果两者方向不在一条直线上，就是曲线运动，如斜抛物体运动。
607．物体在只受重力作用下，它一定作自由落体运动，对不对？说明你的理由。
[解答]　　不一定。如果物体初速度等于零，且只受重力作用时，则作自由落体运动。如果初速度不为零，就不是自由落体运动。由于物体运动的初始条件不明确，所以无法肯定。
初速不为零，只受重力作用的物体有三种运动状态。(1)初速度沿水平方向，只受重力，作平抛运动。(2)初速度方向跟水平方向成仰角，只受重力，作斜上抛运动或竖直上抛运动。(3)初速度方向跟水平方向成俯角，只受重力，作斜下抛运动或竖直下抛运动。
608．物体从 A 点由静止出发沿直线运动到 B 点停止。在这段时间内，物体可以作匀速运动，也可以作加速度为 a 的匀变速运动。要使物体从 A 到 B 运动的时间最短，物体应该怎样运动？



[解答]　　按题意，物体运动的 v-t 图象可能是等腰梯形（开始以 a

作匀加速运动，中间作匀速运动，然后以-a 作匀减速运动），也可能是等腰三角形（开始以 a 作匀加速运动，然后以-a 作匀减速运动）。这两个图象中腰和下底边的夹角相同（因为 a 相同），面积相同（因为 S 相同）。则由下列证明可知在给定的面积值和角值时，三角的底边最短，即时间最短。证明如下：
设梯形的上底为 a，下底为 b，高为 h；三角形的底为 c，高为 h′。

由面积得 $\frac{1}{2}h(a+b)=\frac{1}{2}h'c$。$\frac{h}{h'}=\frac{c}{a+b}$。

由相似三角形得 $\frac{h}{h'}=\frac{\frac{1}{2}(b-a)}{\frac{1}{2}c}=\frac{b-a}{c}$。

所以 $\frac{c}{a+b}=\frac{b-a}{c}$。

$b^2-a^2=c^2$，得 $c<b$。
此时物体先以 a 作匀加速运动，后以-a 作匀减速运动；且各通过 AB 之间路程的一半。物体从 A 到 B，这样运动所需时间最短。
609．试证明：在匀变速直线运动中，任何一段时间的中间时刻的即时速度，等于这段时间的初速度和末速度的算术平均值；也就是等于这段时间内的平均速度。

[证明] 由$v_t=v_0+at$和$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$，得出这一段时间内的平均速度等于

$$\bar{v}=\frac{s}{t}=v_0+\frac{1}{2}at=v_0+\frac{1}{2}(v_t-v_0)=\frac{1}{2}(v_0+v_t)。$$

设中间时刻的速度为 v_m，则

$$v_m=v_0+a\cdot(\frac{t}{2})=\frac{1}{2}(v_0+v_0+at)=\frac{1}{2}(v_0+v_t)=\bar{v}。$$

610.试证明做匀变速直线运动的物体在各个连续相等时间 T 内的路程差是一个恒量，而且都等于 aT^2。（a 为加速度）
[证明] 设 T=0 时速度为 v_0，则由位移公式和速度公式

$$s_1=v_0t+\frac{1}{2}aT^2，$$

$$s_2=(v_0+aT)T+\frac{1}{2}aT^2=v_0T+\frac{3}{2}aT^2，$$

$$s_3=(v_0+2aT)T+\frac{1}{2}aT^2=v_0T+\frac{5}{2}aT^2,$$

……

$$s_{n-1}=[v_0+(n-2)aT]T+\frac{a}{2}T^2=v_0T+\frac{2n-3}{2}aT^2，$$

$$s_n=[v_0+(n-1)aT]T+\frac{a}{2}T^2=v_0T+\frac{2n-1}{2}aT^2，$$

所以 $\triangle s=s_2-s_1=s_3-s_2=\cdots\cdots=s_n-s_{n-1}=aT^2$。
611.试证明初速度为零的匀变速直线运动在各相等时间间隔内的位移的

比等于从 1 开始的连续奇数的比。

[证明]

$$s_1=\frac{1}{2}at^2,$$

$$s_2=\frac{1}{2}a(2t)^2,$$

$$s_3=\frac{1}{2}a(3t)^2,$$

……

$$s_{n-1}=\frac{1}{2}a[(n-1)t]^2,$$

$$s_n=\frac{1}{2}a[(n-1)t]^2,$$

$$s_I=s_1,\ s_{II}=s_2-s_1=\frac{1}{2}a\cdot(2t^2-t^2)=\frac{3}{2}at^2,$$

$$s_{III}=s_3-s_2=\frac{1}{2}a(3t^2-2t^2)=\frac{5}{2}at^2,$$

$$s_N=s_n-s_{n-1}=\frac{1}{2}a[(nt)^2-(n-1)^2t^2]$$

$$=\frac{1}{2}a(2n-1)t^2,$$

所以 $s_I:s_{II}:s_{III}:\cdots:s_N=1:3:5\cdots:(2n-1)$。

612．一列作直线运动的火车，先以恒定的加速度 a 从静止开始加速行驶，直到速度增加到某一值 v，而后以这速度匀速行驶，最后以恒定的加速度 a′，减速行驶直至停止。如果全程位移为 d，求证火车通过全程的时间。

$$T=\frac{d}{v}+\frac{v}{2a}+\frac{v}{2a'}。$$

[证明] 设火车第一段作匀加速运动的位移为 s_1，时间为 t_1，则

$$t_1=\frac{v}{a},\ s_1=\frac{v^2}{2a}。$$

火车第二段作匀速运动的位移为 s_2，时间为 t_2，则

$$t_3=\frac{v}{a'},\ s_3=\frac{v^2}{2a'}。$$

全程位移 $d=s_1+s_2+s_3$

$$=\frac{v^2}{2a}+vt_2+\frac{v^2}{2a'}。$$

由此得 $t_2=\frac{d}{v}-\frac{v}{2a}-\frac{v}{2a'}$。

所以通过全程的时间为

$$T=t_1+t_2+t_3=\frac{v}{a}+\left(\frac{d}{v}-\frac{v}{2a}-\frac{v}{2a'}\right)+\frac{v}{a'}$$

$$=\frac{d}{v}+\frac{v}{2a}+\frac{v}{2a'}。$$

613．一列火车从静止出发，在运行的前 1/4 距离中作匀速运动，最后 1/4 距离中作匀减速运动到停止，中间一段距离作匀速运动。试证明火车在整段距离中的平均速度是最大速度的 2/3。

[证明]　　　设火车行驶的全距离为 4s，a 和 a′分别为加速和减速过程中的加速度的大小，v 为最大速度。

火车从静止出发，经过 1/4 距离的末速度为

$$v^2=2as。$$

最后 1/4 距离的初速度为 $v^2=2a's$。

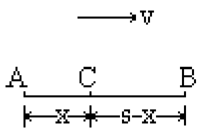
火车运行的总时间 $T=\frac{v}{a}+\frac{2s}{v}+\frac{v}{a'}=\frac{2s}{v}+\frac{2s}{v}+\frac{2s}{v}$

$$=\frac{6s}{v}。$$

$$平均速度=\frac{总距离}{总时间}=\frac{4s}{\left(\frac{6s}{v}\right)}=\frac{2}{3}v。$$

614．一个质点由 A 出发沿直线 AB 运动。行程的第一部分是加速度为 a 的匀加速运动，接着以加速度 a′作匀减速运动，抵达 B 点时恰好停止。如果 AB 的长度是 s，试证明质点走完 AB 所花的时间

$$t=\sqrt{2s\frac{a+a'}{aa'}}。$$



[证明]　　　设 x 为匀加速运动部分(AC)的路程，运动的时间为 t′。C 点的速度为 v。则

$$v^2=2ax，v=at'。$$

$$0=v^2-2a'(s-x)，$$

$$0=v-a'(t-t')$$

$$v^2=2ax=2a'(s-x) \qquad (1)$$

$$v=at'=a'(t-t') \qquad (2)$$

$$由(1)式消去x得v^2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a'}\right)=2s \qquad (3)$$

$$由(2)式消去 t' 得 \qquad v\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}\right)=t \qquad (4)$$

将(4)式平方后除以(3)式

$$得 \qquad \frac{t^2}{2s}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}，\ t=\sqrt{2s\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha\alpha'}}。$$

615．　直线 AB 长 s，等分成 n 段。一个质点由 A 由静止出发，以加速度α向 B 作匀加速运动，当质点到达每一段的末端时，它的加速度突然增加 $\frac{a}{n}$，试证明质点走到B点时的速度是 $\sqrt{\alpha s(3-\frac{1}{n})}$。

[**证明**]$AB=s$，**等分于**C、D、E…，$AC=CD=DE=\cdots=\frac{s}{n}$。**由匀加速运动公式**

$$v_t^2=v_0^2+2as\text{可知}$$

质点到达C点时速度 $v_C=\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\frac{s}{n}}$，

质点到达 D 点时速度

$$V_D=\sqrt{v_C^2+2\boldsymbol{\alpha}\cdot(\frac{n+1}{n})\cdot\frac{s}{n}}$$

$$=\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\frac{s}{n}[1+(1+\frac{1}{n})]}\text{。}$$

质点到达 E 点时速度

$$v_E=\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\frac{s}{n}[1+(1+\frac{1}{n})]+2(1+\frac{2}{n})\boldsymbol{\alpha}\cdot\frac{s}{n}}$$

$$=\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\frac{s}{n}[1+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{2}{n})]}\text{。}$$

依次类推，可知，

质点到 B 点时的速度

$$v_B=\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\frac{s}{n}+[1+(1+\frac{1}{n})+(1+\frac{2}{n})+\cdots+(1+\frac{n-1}{n})]}$$

$$=\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\frac{s}{n}\left\{n+\frac{1}{n}[1+2+\cdots+(n-1)]\right\}}$$

$$=\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\frac{s}{n}(n+\frac{n-1}{2})}$$

$$=\sqrt{2\boldsymbol{\alpha}\frac{s}{n}(\frac{3n-1}{2})}$$

$$=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}s(3-\frac{1}{n})}\text{。}$$

616．证明在竖直上抛物体的运动过程中，(1)在轨迹上任何一点向上运动和向下运动时的速度的大小相等；(2)对于轨迹上任取一段竖直距离，向上运动时经过该段距离的时间和向下运动时经过该段距离的时间相等。

[证明一](1)轨迹上任一点 P 离抛出点 O 距离为 y。取抛出点 O 为坐标原点、并由抛出开始计时，第一次经过 P 的时刻为 t_1，第二次又经过 P 的时刻为 t_2。取竖直向上方向为正，假定经过 P 点速度的大小分别为 v_1，v_2。则

$$v_1=v_0?\ gt_1;v_2=v_0?\ gt_2\text{。}$$

$$v_1+v_2=2v_0?\ g(t_1+t_2)\ (1)$$

由位移公式 $y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，

因此t_1, t_2均为方程 $t^2 - \frac{2v_0}{g}t + \frac{2y}{g} = 0$的两个根，即

$$t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{g} \qquad (2)$$

由(1)、(2)式解得 v_1=? v_2.

(2)在轨迹上取一段路程为 AB，物体到达 A、B 两点离抛出点的高度分别为 h_A 和 h_B，所需要时间各为 t_A 和 t_B。则有

$$h_A = v_0 t_A - \frac{1}{2}gt_A^2, \quad \text{即}\ \frac{g}{2}t_A^2 - v_0 t_A + h_A = 0。$$

$t_A = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh_A}}{g} = \frac{v_0}{g} \pm \frac{v_A}{g}$。（上升时$v_A$和$g$反向，所以$\frac{v_A}{g}$取取负号。）

同理 $t_B = \frac{v_0}{g} \pm \frac{v_B}{g}$。（上升时$v_B$和$g$反向，所以$\frac{v_B}{g}$取负号。）

从A点上升到B需时 $t_B - t_A = -\frac{v_B}{g} + \frac{v_A}{g}$。

下降时，v_A、v_B和g同向，所以$\frac{v_A}{g}$、$\frac{v_B}{g}$取正号。

从B点下降到A需时 $t'_A - t'_B = \frac{v_A}{g} - \frac{v_B}{g}$。所以上升时间等于下降时间。

[证明二](1)设抛出点 O 为坐标原点，并开始计时，经过 P 点时刻为 t_1，速度为 v_1，再次经过 P 点时刻为 t_2，速度为 v_2，则

v_1=v_0? gt_1 (1)

v_2=v_0? gt_2 (2)

由 P 点向上运动到最高处再落回到 P 点所需时间为 t_2? t_1。这段时间内位移为零。由位移公式得

$$s = 0 = v_1(t_2 - t_1) - \frac{1}{2}g(t_2 - t_1)^2。$$

$$t_2 - t_1 = \frac{2v_1}{g} \qquad (3)$$

(1)式减(2)式得 $v_1 - v_2 = g(t_2 - t_1) = g \cdot \frac{2v_1}{g}$，

(2)设上抛经过 A 点速度为 v_A，落回经过 A 点时速度为 v'_A，共需时间为 T_A。则

v'A=v_A? gT_A (1)

v'_A=? v_A (2)

所以 $T_A = \frac{2v_A}{g}$。

同理，经过 B 点速度为 v_B，落回经过 B 点速度为 v'_B，所需时间为 T_B。则

$$T_B=\frac{2v_B}{g}。$$

向上运动由A到B时间为$t_上$，向下运动由B到A时间为$t_下$。则

$$T_A=t_上+T_B+t_下。$$

$$t_上+t_下=T_A-T_B=2\frac{v_A}{g}-2\frac{v_B}{g}=\frac{2}{g}(v_A-v_B)。$$

又因为 $v_B=v_A$? gt 上，所以 v_A? $v_B=gt_上$。

代入上式得 $t_上+t_下=\frac{2}{g}(gt_上)=2t_上$。

$$t_上=t_下。$$

617．一个物体竖直上抛，测得该物体上、下两次经过A点所用的时间为T_A。上、下两次经过B点的时间为T_B。试证明：重力加速度 $g=\frac{8h}{T_A^2-T_B^2}$。

[证明]设B点比A点高h，由上抛运动公式

$$v_B^2-v_A^2=-2gh。$$

由题意知，两次经过同一高度时间分别为T_A、T_B。因为上抛运动上升到最高点时间和由最高点落回原地时间相同。

$$v_B=g\cdot\frac{T_B}{2},\quad v_A=g\cdot\frac{T_A}{2},$$

代入上式得 $(\frac{gT_B}{2})^2-(\frac{gT_A}{2})^2=-2gh,$

$$g=\frac{8h}{T_A^2-T_B^2}。$$

618．物体自高h_1、h_2、h_3竖直下抛，它的初速度分别是v_1、v_2、v_3，如果三者同时到达地面。求证： $\frac{h_1-h_2}{v_1-v_2}=\frac{h_2-h_3}{v_2-v_3}=\frac{h_3-h_1}{v_2-v_1}$。

[证明]设落地时间为t，由下抛运动得

$$h_1=v_1t+\frac{1}{2}gt^2$$

$$h_2=v_2t+\frac{1}{2}gt^2。$$

$$h_2=v_2t+\frac{1}{2}gt^2。$$

代入

$$\frac{h_1-h_2}{v_1-v_2}=\frac{v_1 t+\frac{1}{2}gt_2-(v_2 t+\frac{1}{2}gt^2)}{v_1-v_2}=t。$$

同理可得 $\frac{h_2-h_3}{v_2-v_3}=t。$

$$\frac{h_3-h_1}{v_3-v_1}=t。$$

所以 $\frac{h_1-h_2}{v_1-v_2}=\frac{h_2-h_3}{v_2-v_3}=\frac{h_3-h_1}{v_3-v_1}$

619．一块石子由塔顶上抛，它经过塔顶下 h 时的速度量值恰为经过塔顶上h时速度的两倍。求证它所达到的最高点离塔顶的高度是 $\frac{5}{3}h$。

[证明一]设石块由 O 点上抛经 A 点时速度为 v,到达最大高度 B 点再落下，经过 C 点时速度为 2v。由于自最高点落下经 A 时，速度和上升经过 A 点速度大小相等即为 v。则有

2g(H? h)=v²? 0 (1)

自最高点落至 C 时

2g(H+h)=(2v)²? 0 (2)

(1)**式**＋(2)**式得** $\frac{H-h}{H+h}=\frac{1}{4},$

$$H=\frac{5}{3}h.$$

[证明二]把竖直上抛运动转化为自由落体运动来研究。自 B 点自由落下经过 A 和 C 点速度分别为 v_A 和 v_C，由题意 $v_C=2v_A$，

v_0 ：v_A=t_{BC} ：t_{BA}，t_{BC}=2t_{BA}。

即 t_{BA}=t_{AC}。由比例关系 s_{I} ：s_{II} ：s_{III}=1：3：5 可知

AC=3BA。

因为 $AC=2h$**，** **所以** $BA=\frac{AC}{3}=\frac{2}{3}h.$

最大高度 $OB=BA+h=\frac{2}{3}h+h=\frac{5}{3}h$。

[**证明三**]**设上抛初速度为**v_0**，则最大高度**$H=\frac{v_0^2}{2g}$。

由题意 $v_A^2=v_0^2=2gh$ (1)

$v_C^2=v_0^2-2g(-h)$ (2)

由(1)**式** $h=\frac{v_0^2-v_A^2}{2g}=\frac{v_0^2}{2g}-\frac{v_A^2}{2g}=H-\frac{v_A^2}{2g}$**，**

即 $H-h=\frac{v_2 A}{2g}$。

由(2)式得 $H+h=\frac{v_C^2}{2g}=\frac{4v_A^2}{2g}=4(H-h)$,

$3H=5h$，$H=\frac{5}{3}h$。

620．试证明：要使在 h 高处平抛的物体，水平射程是高度的 n 倍时，抛出的初速度应等于物体从同样高度自由下落着地速度的 $\frac{n}{2}$ 倍。

[证明]据平抛运动 $s=v_0t$ (1)

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

因为 $s=nh, v_0t=n\cdot\frac{1}{2}gt^2$，$v_0=\frac{ngt}{2}$。

由(2)式 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$ 代入 $v_0=\frac{ng}{2}\sqrt{\frac{2h}{g}}=\frac{n}{2}\sqrt{2gh}$。

自 h 高处自由下落物体着地时即时速度为

$$v_t=\sqrt{2gh},$$

所以

$$v_0=\frac{n}{2}v_t。$$

621．追击炮弹以 v_0 为 100 米/秒和 45°投射角射出。如果不计空气阻力，证明炮弹的竖直位移 h 和水平位移 s 有下列函数关系 $h=s-\frac{9.8s^2}{10000}$。

[证明]由斜抛运动 $x=v_0\cos\theta\cdot t$,

$$y=v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2。$$

消去 t 整理得

$$y=x\mathrm{tg}\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \quad (1)$$

以 v_0=100 米/秒，θ=45°代入(1)式得 y=h,x=s.

将 h,s 代入(1)式得 $h=s-\frac{9.8s^2}{10000}$。

622．枪对竖直的靶射击，如果要让具有一定速度的子弹垂直射入靶中，求证：

(1)子弹出口速度 v_0 方向的仰角应为 $\frac{1}{2}\arcsin(\frac{2sg}{v_0^2})$。式中 s 为枪口和靶的水平距离；

(2)枪弹中靶点的高度恰好为瞄准点高度的一半。

[证明](1)垂直中靶，即子弹正好飞到最高点时碰靶。这时水平前进距离 s 应为射程的一半。

$$s=\frac{1}{2}(\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g})。$$

$$\alpha=\frac{1}{2}\arcsin(\frac{2sg}{v_0^2})。$$

(2)**瞄准点高度**$H=s\cdot tga=\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}\cdot tg\alpha=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}$。**中靶点高度**

即射高$h=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$。

$$h=\frac{H}{2}。$$

623．从原点 0，以初速度 v_0 投掷一个质点。假设横轴用 x，纵轴用 y 表示，重力加速度为 g。回答下面问题。

(1)要命中 $P(x_0,y_0)$ 点应向什么方向投射质点；

(2)试求命中 $P(x_0,y_0)$ 点所需的条件；

(3)由(1)的投掷方向通常有两个，如果假设两个投掷方向和横轴间的

夹角分别为 α_1、α_2，OP 和横轴间的夹角为 β。求证 $\alpha_1+\alpha_2-\beta=\frac{\pi}{2}$。

(已知$(tg(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{tg\alpha_1+tg\alpha_2}{1-tg\alpha_1 tg\alpha_2},\quad tg(\frac{\pi}{2}+\beta)=-\frac{1}{tg\beta})$

[分析](1)由斜抛运动条件求出 x_0、y_0 的式子，消去 t 可求出 tgα；(2)求出 tgα 的实数条件；(3)可用二次方程式 $\alpha x^2=bx+c=0$ 的根和函数关

系$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{\alpha}$。$x_1$、$x_2$**即为方程的根。**

[解答](1)设和水平面成α角的方向投掷，则

$$x_0=v_0 cosat，$$

$$y_0=v_0\sin\alpha t-\frac{1}{2}gt^2$$

由上两式消去 t 并加以整理得

$$y_0=tg\alpha\cdot x_0-\frac{gx_0^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=tg\alpha\cdot x_0-\frac{gx_0^2}{2v_0^2}(1+tg^2\alpha)，$$

$$tg^2\alpha-\frac{2v_0^2}{gx_0}tg\alpha+(\frac{2v_0^2 y_0}{yx_0^2}+1)=0$$

解得 $tg\alpha=\frac{1}{gx_0}(v_{01}^2\pm\sqrt{v_0^4-g^2x_0^2-2gv_0^2y_0})$

(2)为了命中 $P(x_0,y_0)$ 点，tgα必须为实数

所以 $v_{01}^4-g^2x_0^2-2gv_{01}^2y_0\geq 0$，

$$v_{01}^2-g(y_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2})][v_{01}^2-g(y_0-\sqrt{x_0^2+y_0^2}]\geq 0。$$

因为 $v_0^2>0$，$v_{01}^2\geq g(y_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2})$，

$$v_0 \geq \sqrt{g(y_0+\sqrt{x_0^2+y_0^2})}。$$

(3)从(1)中的二次方程的根和系数关系得

$$\mathrm{tg}\alpha_1+\mathrm{tg}\alpha_2=\frac{2v_0^2}{gx_0},\mathrm{tg}\alpha_1\cdot\mathrm{tg}\alpha_2=\frac{2v_0^2y_0}{gx_0^2}+1。$$

将此式代入$\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=\frac{\mathrm{tg}\alpha_1+\mathrm{tg}\alpha_2}{1-\mathrm{tg}\alpha_1\mathrm{tg}\alpha_2}$，

得$\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=-\frac{x_0}{y_0}$。由图知

$$\mathrm{tg}\beta=\frac{y_0}{x_0},$$

$$\mathrm{tg}(\alpha_1+\alpha_2)=-\frac{1}{\mathrm{tg}\beta}=\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\beta)。$$

得 $$\alpha_1+\alpha_2=\frac{\pi}{2}+\beta$$

即 $$\alpha_1+\alpha_2-\beta=\frac{\pi}{2}。$$

624．抛射角为θ，抛射的最大高度为H，求证在离抛射点所在水平面高为$H\sin^2\theta$的两点间抛射物飞行所经历的时间为$2\sqrt{\frac{2H}{g}}\cos\theta$。

[证明一]由斜抛运动最大高度公式

$$H=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g},\quad v_0=\frac{\sqrt{2gH}}{\sin\theta}。$$

设t为抛出后到高度$H\sin^2\theta$所需时间，则

$$H\sin^2\theta=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2=\sqrt{2gH}\cdot t-\frac{1}{2}gt^2.$$

解得

$$t=\frac{\sqrt{2gH}\pm\sqrt{2gH-4\cdot\frac{g}{2}\cdot H\sin^2\theta}}{2(\frac{g}{2})}=\frac{\sqrt{2gH}\pm\sqrt{2gH(1-\sin^2\theta)}}{g}$$

$$=\frac{\sqrt{2gH}(1\pm\cos\theta)}{g}=\sqrt{\frac{2H}{g}}(1\pm\cos\theta)。$$

减号为未达到位于最高点前的高度$H\sin^2\theta$的时间,加号为达到位于最高点后的高度$H\sin^2\theta$所需要的时间。

间隔时间为

$$\triangle t=\sqrt{\frac{2H}{g}}[(1+\cos\theta)-(1-\cos\theta)]=2\sqrt{\frac{2H}{g}}\cos\theta。$$

[**证明二**]**由证明一得**$H\sin^2\theta=\sqrt{2gH}\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$

即 $t^2-\frac{2\sqrt{2gH}}{g}t+\frac{2H\sin^2\theta}{g}=0.$

t**有两个根，** $t_1+t_2=2\sqrt{\frac{2H}{g}},\qquad t_1t_2=\frac{2H\sin^2\theta}{g}$。

所以间隔时间为$(\triangle t)^2=(t_2?\ t_1)^2=(t_1+t_2)^2?\ 4t_1t_2$.

$$(\triangle t)^2=4(\frac{2H}{g})-4\cdot\frac{2H\sin^2\theta}{g}=4\cdot\frac{2H}{g}(1-\sin^2\theta)=\frac{8H}{g}\cos^2\theta$$

$$\triangle t=\sqrt{\frac{8H}{g}\cos^2\theta}=2\sqrt{\frac{2H}{g}}\cos\theta。$$

[证明三]由高为 $H\sin^2\theta$ 开始作斜上抛运动，则上一部分斜抛运动的最大高度为 $H?\ H\sin^2\theta=H\cos^2\theta$。

由斜抛运动公式可知

$$H\cos^2\theta=\frac{(v_1\sin\alpha)^2}{2g}\qquad(1)$$

$$T=\frac{2v_1\sin\alpha}{g}\qquad(2)$$

由(1)式得

$$v_1\sin\alpha=\sqrt{2gH}\cos\theta\qquad(3)$$

(3)**式代入**(2)**式飞行时间** $T=\frac{2(\sqrt{2gH}\cos\theta)}{g}=2\sqrt{\frac{2H}{g}}\cos\theta$。

[证明四]设由最高点 H 落至 $H\sin^2\theta$ 高处这一部分运动可看作平抛运动，它所需时间应和由 H 高处落至 $H\sin^2\theta$ 处自由落体运动的时间相同。

$h=H\cos^2\theta$,**所以**$\triangle t=2t=2\sqrt{\frac{2h}{g}}=2\sqrt{\frac{2H\cos^2\theta}{g}}=2\sqrt{\frac{2H}{g}}\cos\theta$。

[证明五]飞行时间仅由竖直方向的分运动决定。由前面证明可知

$$v_0=\frac{\sqrt{2gH}}{\sin\theta}.$$

由初速 v_0 达到 $H\sin^2\theta$ 高处速度为 v_1 则由竖直方向分运动为上抛运动可知$v_{0v}^2=v_{0v}^2-2gH\sin^2\theta$。

在高度 $H\sin^2\theta$ 两点间隔时间和 v_{1v} 为初速上抛落回原高度处时间相同，所以

$$\triangle t=\frac{2v_{1v}}{g}=\frac{2\sqrt{(v_{0v}^2-2gH\sin^2\theta)}}{g}=\frac{2\sqrt{v_0^2\sin^2\theta-2gH\sin^2\theta}}{g}$$

$$=\frac{2\sqrt{2gH-2gH\sin^2\theta}}{g}=\frac{2\sqrt{2gH\cos^2\theta}}{g}=2\sqrt{\frac{2H}{g}}\cos\theta。$$

[证明六]斜抛运动在最高点以后的运动可看作平抛运动，所以由最高点飞行到 $H\sin^2\theta$ 高处的时间和从最高点自由落体运动到同高度的时

间相等。即自由落体运动落下高度为

$$h=H? \; H\sin^2\theta=H\cos^2\theta。$$

又由于斜抛运动性质，题目所求时间即为上述时间的 2 倍。所以

$$\triangle t=2\sqrt{\frac{2h}{g}}=2\sqrt{\frac{2H\cos^2\theta}{g}}=2\sqrt{\frac{2H}{g}}\cos\theta。$$

625．试证明：如果作斜抛运动的物体在某一时刻的即时速度大小为 v，方向和水平间成θ角。那末经过时间$\frac{v}{g\sin\theta}$后，它的即时速度一定和原来的方向垂直。

[证明一]把斜抛运动分解成和 v 平行方向和 v 垂直方向的两个分运动。重力加速度 g 也相应分为

$$g_1=g\sin\theta\;；g_2=g\cos\theta。$$

在平行 v 方向上的分运动是以 v 为初速，加速度为? gsinθ的匀变速运动，经过时间 t 后，这个分运动末速度为零时，则合运动的末速度就是和 v 垂直方向的速度 v’了。

$$0=v-g\sin\theta\cdot t,\qquad t=\frac{v}{g\sin\theta}。$$

[证明二]速度 v 经时间 t 后变为 v’，并和 v 垂直。由矢量关系可知

$$v\cos\theta=v'\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=v'\sin\theta \qquad (1)$$

$$\triangle v=gt=v\sin\theta+v'\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=v\sin\theta+v'\cos\theta \qquad (2)$$

由(1)式得

$$v'=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}v \qquad (3)$$

(3)式代入(2)式　　$gt=v\sin\theta+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$

解得　　$t=\frac{1}{g}[v\sin\theta+\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}v]=\frac{v}{g\sin\theta}。$

626．炮弹从岸边海平面向海中射击，抛射角为θ。如果在高为 h 的炮台上以同一角度θ和同一初速射击，试证：水平射程增加量为原来的$\frac{1}{2}[(1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\theta})^{\frac{1}{2}}-1]$。

[证明]　　由斜抛运动　　$x=v_0\cos\theta\cdot t$，

$$y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2。$$

两式消去t得　　$y=tg\theta\cdot x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2。$

在海平面上射击$y=0$，射程$x_1=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$。

如果在高为 h 炮台上射击，它到达海平面时，y=? h

$$-h = tg\theta \cdot x_2 - \frac{gx_2^2}{2v_0^2\cos^2\theta},$$

解得
$$x_2 = \frac{tg\theta \pm \sqrt{tg^2\theta + \frac{4gh}{2v_0^2\cos^2\theta}}}{2\cdot\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}\left(1 \pm \sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\theta}}\right)。$$

[其中 $\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0^2\cdot\sin 2\theta}{g}\left(1-\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\theta}}\right) < 0$，不合题意，舍去。]

射程 $$x_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}\left(2+\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\theta}}\right)。$$

$$\frac{x_2-x_1}{x_1} = \frac{x_2}{x_1} - 1 = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}\left(1+\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\theta}}\right)}{\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g}} - 1$$

$$= \frac{1}{2}\left[1+\left(1+\frac{2gh}{v_0^2\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{2gh}{v_0^2\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right]。$$

627．抛射体在轨道的最高点时的速度和它离地面的距离为最大高度的$1/2$处速度的比是$\sqrt{\frac{2}{5}}$，试证抛射角必定是$60°$。

[证明]设抛射角为θ，初速度为v_0，在高度为h时速度为u，和水平面间夹角为φ。由于水平方向分速度不变，则有

$$u\cos\varphi = v_0\cos\theta \quad (1)$$

$$(u\sin\varphi)^2 = (v_0\sin\theta)^2 - 2gh \quad (2)$$

由(1)、(2)式解得

$$tg\varphi = \frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\theta - 2gh}}{v_0\cos\theta} \quad (3)$$

物体所达最大高度为 $H = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$。

将最大高度的一半 $h = \frac{H}{2} = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{4g}$，

代入(3)式

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{\sqrt{v_0^2\sin^2\theta-2g(\frac{v_0^2\sin^2\theta}{4g})}}{v_0\cos\theta}=\frac{\mathrm{tg}\theta}{\sqrt{2}} \qquad (4)$$

按题意 $\frac{v_0\cos\theta}{u}=\sqrt{\frac{2}{5}}$，

由(1)、(4)式 $\frac{v_0\cos\theta}{u}=\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\theta}}=\sqrt{\frac{2}{5}}$。

$$5=2(1+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\theta)，$$

$$\mathrm{tg}\theta=\sqrt{3}，$$

所以 $\theta=60°$。

628．如图所示，子弹沿 OP 方向射出，瞄准在 P 点的靶子。在子弹发射的瞬间，靶子自由落下。试证明当子弹的出口速度大于某数值时，子弹一定能在空中击中靶子（不计空气阻力）。

[证明]在子弹运动轨道平面上，取枪口为直角坐标系的原点。水平方向为 x 轴，则在时刻 t 时枪弹的坐标为

$$x=(v_0\cos\theta)t \qquad (1)$$

$$y=(v_0\sin\theta)t-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

解(1)式和(2)式得 $y=x\mathrm{tg}\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$。

靶子的坐标为 $x_1=x_0=$常数 (3)

$$y_1=y_0-\frac{1}{2}gt^2 \qquad (4)$$

式中$(x_0、y_0)$是靶子的瞄准位置，应有

$$y_0=x_0\mathrm{tg}\theta \qquad (5)$$

本题证明，当 $x=x_1$（即 $x=x_0$）时，y 应等于同一时刻的 y_1.

设 $t=t_1$ 时 $x=x_0$ 则由(1)式得

$$t_1=\frac{x_0}{v_0\cos\theta}。$$

将上式代入(2)式得此时刻的 y 值

$$y=x_0\mathrm{tg}\theta-\frac{1}{2}gt_1^2=y_0-\frac{1}{2}gt_1^2。$$

由(4)式可知，$t=t_1$时，$y_1=y_0-\frac{1}{2}gt_1^2$。因而证明了当$x=x_1$时，$y=y_1$。

在空中击中靶子的条件是 $y_2>0$，则子弹在落地前击中靶子，即

$$x_0\mathrm{tg}\theta-\frac{gx_0^2}{2v_0^2\cos^2\theta}>0，$$

即 v_0 必须满足下列条件

$$v_0^2 > \frac{gx_0}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{gx_0}{\sin 2\theta}。$$

629．在空中某点同时以同样大小的速度 v_0 向各个方向抛出几个小球。证明小球在运动的任一时刻 t，所有小球都位于一个球面上，而且这个球的中心以自由落体加速度 g 下落，它的半径等于 v_0t。

[证明]取一空间坐标 OXYZ。设任意一个球 A，以初速为 v_0 沿任意一方向抛出，它和 X、Y、Z 轴交角分别为 α、β、γ，由于球 A 抛出后，它的加速度方向在? Z 方向，它在 X、Y 方向都没有加速度。所以在 X、Y 方向都以初速 v_0 在该方向上的分速度作匀速直线运动；而在 Z 方向有加速度? g，则球 A 的运动方程

$$x=v_0\cos\alpha\cdot t。$$

$$y=v_0\cos\beta\cdot t$$

$$z = v_0\cos\gamma\, t - \frac{1}{2}gt^2。$$

以上三式平方后再相加得

$$x^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2}gt^2)^2 = (v_0t)^2。$$

由上式可知，它是一个球面方程。半径为 v_0t，球心坐标为 x=0，y=0，$z = -\frac{1}{2}gt^2$。即球心以加速度g向负Z方向移动。

630．在倾角为φ的斜面上，斜向上抛出一个物体，它的初速度和斜面间夹角为α，如果最恰好垂直落到斜面上（如图）。求证：$\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{ctg}\alpha$。

[证明]把斜抛运动分解成平行斜面和垂直于斜面的两个分运动。则平

行于斜面的分运动是以 $v_0\cos\alpha$ 为初速，以加速度为 $-g\sin\varphi$ 的匀变速运动。垂直于斜面的分运动是以 $v_0\sin\alpha$ 为初速，加速度为 $-g\cos\varphi$ 的匀变速运

动。设飞行时间为 T。按题意，落在斜面上，即垂直于斜面方向上的位移为零。则

$$v_0\sin\alpha\cdot T - \frac{1}{2}\cdot g\cos\varphi\cdot T^2 = 0 \qquad (1)$$

$$T = \frac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\varphi} \qquad (2)$$

又因垂直落在斜面上，所以平行于斜面的分速度为零。则

$$v_0\cos\alpha - g\sin\varphi\cdot T = 0 \qquad (3)$$

将(2)式代入(3)式得

$$v_0\cos\alpha = g\sin\varphi\cdot T = g\sin\varphi(\frac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\varphi}),$$

由此得 $$\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha。$$

631．敌人在山上离地面 h 高处。地面上的射击点和敌人的连线跟水平成φ角。如果要击中敌人，试证子弹的初速度v_0不得小于$\sqrt{gh(1+\csc\varphi)}$。

[证明]射击点和敌人连线跟水平面组成一个斜面，倾角为φ。

设射击时的仰角为θ，则沿斜面方向上的射程

$$s=\frac{v_0\cos\theta\cdot T}{\cos\varphi}=\frac{v_0\cos\theta}{\cos\varphi}\cdot\frac{2v_0\sin(\theta-\varphi)}{g\cos\varphi}$$

$$=\frac{2v_0^2\cos\theta\sin(\theta-\varphi)}{g\cos^2\varphi}$$

$$=\frac{v_0^2}{g\cos^2\varphi}[\sin(2\theta-\varphi)-\sin\varphi]。$$

当 v_0、φ一定的情况下，要使射程 s 最大，应使 sin(2θ? φ)最大，等于 1。则沿斜面方向上的最大射程

$$s=\frac{v_0^2(1-\sin\varphi)}{g\cos^2\varphi}=\frac{v_0^2}{g(1+\sin\varphi)}。$$

又因 $$s=\frac{h}{\sin\varphi},$$

所以 $$\frac{h}{\sin\varphi}=\frac{v_0^2}{g(1+\sin\varphi)}。$$

$$v_0^2=\frac{gh(1+\sin\varphi)}{\sin\varphi}=gh(\frac{1}{\sin\varphi}+1)$$

$$=gh(1+\operatorname{coc}\varphi)。$$

$$v_0=\sqrt{gh(1+\cos\varphi)}。$$

即子弹初速度必须大于或等于$\sqrt{gh(1+\csc\varphi)}$。

632．以一定的初速度在水平面上斜向上抛一个物体，它的最大射程为 L。如果用这一初速度在φ为 30°的斜面上分别向斜面顶端和底端各斜向上抛一个物体；并且都使达到最大射程（假设斜面足够长，物体都落在斜面上）。试证两物体落点间的距离为$\frac{8}{3}$L。

[证明]在水平面上斜向上抛的物体射程为

$$s=\frac{v_0^2\sin2\theta}{g},\text{当}\sin2\theta=1，\text{射程最大。}$$

按题意 $$L=\frac{v_0^2}{g}，\quad v_0^2=Lg.$$

在斜面上斜向上抛的物体射程为

$$s=\frac{v_0\cos\theta\cdot T}{\cos\phi}=\frac{v_0\cos\theta}{\cos\phi}\cdot\frac{2v_0\sin(\theta-\phi)}{g\cos\phi}$$

$$=\frac{2v_0^2\cos\theta\sin(\theta-\phi)}{g\cos^2\phi}=\frac{v_0^2}{g\cos^2\phi}[\sin(2\theta-\phi)-\sin\phi]。$$

当 sin(2θ? φ)=1，射程最大。

则在斜面上向斜面顶端斜向上抛物体的最大射程

$$s_{上}=\frac{v_0^2}{g(1+\sin\phi)}=\frac{Lg}{g(1+\frac{1}{2})}=\frac{2}{3}L。$$

在斜面上向斜面底端斜向上抛物体的最大射程

$$s_{下}=\frac{v_0^2}{g(1-\sin\phi)}=\frac{Lg}{g(1-\frac{1}{2})}=2L。$$

两落点间距离为 $s_{上}+s_{下}=\frac{2}{3}L+2L=\frac{8}{3}L。$

633．从直角坐标的原点 O 以仰角α射出子弹，恰好通过空间一点 P，P 点在 x 轴上的坐标为 h，在 y 轴上的坐标为 k。如图所示。设水平射程为 L，子弹落在 x 轴上的 Q 点。从 O、Q 两点引到 P 点的直线和 x 轴所成的角度分别为锐角θ，φ。试证明：

$$\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}\theta+\mathrm{tg}\varphi=\frac{k}{h}+\frac{k}{L-h}.$$

[证明]把斜抛运动看成沿抛出方向以 v_0 为速度的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动这两个分运动的合运动。则在抛出后经时间 t 运动到 P 点。经过整个飞行时间 T，子弹运动到 Q，则

$OA=v_0t$；　　$OB=v_0T$；

$AP=\frac{1}{2}gt^2$；　　$BQ=\frac{1}{2}gT^2$；

OD=h；　　OQ=L；　　PD=k。

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{AD}{OD}=\frac{AP+PD}{OD}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{h}+\frac{k}{h}\qquad(1)$$

由相似三角形和 $\frac{OA}{OB}=\frac{AD}{BQ}=\frac{AP+PD}{BQ}.$

即

$$\frac{t}{T}=\frac{\frac{1}{2}gt^2+k}{\frac{1}{2}gT^2}\qquad(2)$$

$$T=\frac{2v_0\sin\alpha}{g},t=\frac{h}{v_0\cos\alpha}，L=\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}。$$

代入计算得 $k=\frac{gt}{2}(T-t)=\frac{g}{2}(\frac{h}{v_0\cos\alpha})[\frac{2v_0\sin\alpha}{g}-\frac{h}{v_0\cos\alpha}]$

$$=\frac{gh}{2v_0\cos\alpha}[\frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha-hg}{gv_0\cos\alpha}]$$

$$=\frac{gh}{2v_0^2\cos^2\alpha}(L-h)$$

$$=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{h}(L-h)。$$

所以 $\frac{\frac{1}{2}gt^2}{h}=\frac{k}{L-h}$ (3)

(3)式代入(1)式得

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\theta+\operatorname{tg}\varphi=\frac{k}{h}+\frac{k}{L-h}。$$

634．如图，用初速 v_0 倾角为θ斜抛一只球，球将落在 B 点，在球抛出同时，有一个人匀速从 C 奔向 B，恰能和球同时到达 B 点。试证这个人在奔跑中看球形成的仰角的正切随时间线性增大

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{gt}{2(v_0\cos\theta+gl/2v_0\sin\theta)}。$$

[证明]设人匀速奔跑的速度为 $v_人$，球抛出经过时间 t 运动到 P 点时，人已奔跑至 D 点，人看球的仰角α。则

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{s_v}{s_x}。$$

由于斜抛物体的最大射程　　AB=L=$v_0\cos\theta\cdot T$

飞行时间　$T=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$，则$BC=l=v_人\cdot T$，$v_人=\frac{gl}{2v_0\sin\theta}$。

s_x=L+l? $v_0\cos\theta\cdot t$? $v_人 t$

=$v_0\cos\theta T+v_人\cdot T$? v0cosθt? $v_人\cdot t$

=$(v_0\cos\theta+v_人)(T$? t)

$$=(v_0\cos\theta+\frac{gl}{2v_0\sin\theta})(T-t),$$

$$s_y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2=\frac{gTt}{2}-\frac{gt^2}{2}=\frac{gt}{2}(T-t),$$

所以 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{gt}{2}(T-t)}{(v_0\cos\theta+\frac{gl}{2v_0\sin\theta})(T-t)}=\frac{gt}{2(v_0\cos\theta+\frac{gl}{2v_0\sin\theta})}$。

图线和作图题

635．甲、乙、丙三物体向同一方向运动，它们的位移图象如图所示。问

(1)从图象上能否知道它们各作什么运动？速度各是多少？

(2)它们出发时刻的先后如何？谁先出发？

(3)当乙出发时，甲已走了多少路程？当甲出发时，丙在哪里？

(4)乙能否追上甲？甲能否追上丙？

[解答](1)由于位移图象是直线，所以知道它们都作匀速直线运动，速度都等于 1 米/秒。

(2)t=0 开始，甲、乙先出发；当 t=4 秒时，丙才开始出发。

(3)当乙出发时，甲已在乙前面 4 米处。当甲出发时，丙仍在原点。

(4)由于三条图线都相互平行，不会相交，所以三物体在这段时间内运动不会相遇。

636．如图所示是 5 辆车的 s? t 图线，从图可知

(1)向前运动的车是 A，D，B；

(2)向后运动的车是 C，E；

(3)速率最大的车是 E；

(4)初速肯定为零的车是 D，E；

(5)从同地出发的车是 D，E；

(6)在 T 时间内行驶路程最大的车是 A；

(7)在 T 时间内行驶路程最少的车是 D；

(8)互相在运动中相遇的车是 C，B；

(9)在静止时遇到运动车辆最多的车是 D，E；

(10)在运动中没有遇到过一辆运动车辆的车是 A，D，E；

(11)加速度始终为零的车是 A；

(12)初速不为零，末速度为零的车是 B，C。

637．如图是一个物体的运动图线。由图中可知 AB 段的加速度为 –0.5 米/秒 ^{2}；BC 段的加速度为 0 米/秒 ^{2}；CD 段的加速度为 1 米/秒 ^{2}；在这段时间内物体通过的总路程为 17.5 米。

638．如图是某一物体运动的 v? t 图象。

(1)在 t_4 时刻的即时速度最大；

(2)在 O 到 t_1，t_1 到 t_2，t_3 到 t_4，t_4 到 t_5 各段时间中平均速度最大的是 t_3 到 t_4 的一段；

(3)在 t_4 到 t_5 时间内加速度的绝对值最大。

639．汽车以 10 米/秒的速度向东行驶，雨滴以 10 米/秒速度竖直下落。用作图法求坐在车上的人观察到雨滴速度的大小和方向。

[解答]以坐在车上的人为参照物，雨滴同时参与向西和向下两个分运动。已知这两个合运动的速度，可用平行四边形法则求出它们合速度的大小和方向。

v_1=10 米/秒，

v_2=10 米/秒，

v=14.1 米/秒，

方向是竖直向西 45°。

640．物体的两种运动图象如图所示。试比较它们的意义。

[解答](a)s? t 图，表示静止；v? t 图表示匀速运动。

(b)s? t 图表示匀速运动，A 物体速度比 B 物体大。v? t 图表示初速为零的匀加速运动，A 物体的加速度比 B 物体大。

(c)s? t 图表示在原点前方 s_0 处出发作匀速运动，v? t 图表示初速为 v_0 的匀加速运动。

(d)s? t 图表示物体自计时开始经过时间 t_0 才开始作匀速运动，v? t 图表示物体自计时开始经过时间 t。才开始作初速为零的匀加速运动。

(e)s? t 图表示在离开原点 s_0 处出发向原点方向作匀速运动经过原点，继续运动。v? t 图表示物体以 v_0 作匀减速运动，直到速度减小到零后，又向反方向作匀加速运动。

(f)s? t 图表示两物体距离 s，同时开始相向作匀速运动，图线的交点表示相遇。v? t 图表示一个物体作初速为零匀加速运动，一个物体作初速不为零的匀减速运动，图线的交点表示两物体速度相等。

(g)s? t 图表示物体在 0? t_1 时间内作匀速运动，在 t_1? t_2 时间内静止。在时刻 t_2 起，物体又以相同的速度作匀速运动。v? t 图表示物体在 0? t_1 时间内作初速为零的匀加速运动。t_1? t_2 时间内物体以 t_1 时刻的速度作匀速运动，自 t_2 时刻开始，又以 t_1 时刻的速度为初速，作匀加速运动。加速度和 0? t_1 时间内的加速度相等。

(h)s? t 图表示三个物体向同一方向作匀速运动，速度相同，出发时刻不同。v? t 图表示三个物体向同一方向都作初速为零的匀加速运动，加速度相同，出发时刻不同。

641．如图分别为甲、乙两物体的运动图象，试分别说明它们的运动情况。

[解答]图(a)给出了甲物体的位移图象。在最初 2 秒钟从离原点 5 米处出发，以 2.5 米/秒的速度远离原点方向作匀速运动。自第 2 秒末到第 4 秒末这段时间内物体静止。自第 4 秒末开始物体向相反方向运动返回原点，速度大小为 5 米/秒；并在第 6 秒末经过原点。8 秒内总路程是 25 米；位移是? 15 米。图(b)给出了乙物体的速度图象。在最初 2 秒钟内，物体以初速 v_0=5 米/秒作匀加速运动，加速度 a=2.5 米/秒^2。在中间 2 秒钟内，物体作匀速运动，速度 v=10 米/秒。最后 4 秒钟作匀减速运动，加速度的大小是 5 米/秒^2，第 6 秒末速度减为零，接着速度为负值，表

示作反向运动，加速度大小仍为 5 米/秒 ^{2}。8 秒内路程是 55 米，位移是 35 米。8 秒末物体仍在原点前方，未返回到原点。

642．某质点从静止开始作直线运动，它的加速度和时间的关系如图(a)，求：(1)质点在 16 秒末的速度是多少？作出它的速度图象；(2)质点在 16 秒内的总位移是多少？(3)质点在 16 秒内所通过的路程是多少？

[解答]由 a? t 图找出各段时间间隔内物体的加速度，则有

$t=0$ 到　$t_1=2$ 秒　$a_1=1$ 米/秒 ^{2}，　$\triangle t_1=2$ 秒，　$v_1=a_1\triangle t_1=2$ 米/秒。

$t_1=2$ 秒到 $t_2=6$ 秒　$a_2=0$，$\triangle t_2=4$ 秒，$v_2=v_1=2$ 米/秒。

$t_2=6$ 秒到 $t_2=10$ 秒　$a_3=?\ 1$ 米/秒 ^{2}，$\triangle t_3=4$ 秒，$v_3=v_2+a_3\triangle t_3=?\ 2$ 米/秒。

$t_3=10$ 秒到 $t_4=14$ 秒　$a_4=0$，$\triangle t_4=4$ 秒，$v_4=v_2=?\ 2$ 米/秒。

$t_4=14$ 秒到 $t_5=16$ 秒　$a_5=2$ 米/秒 ^{2}，$\triangle t_5=2$ 秒，$v_5=v_4+a_5\triangle t_5=2$ 米/秒。

所以知道最后速度为 2 米/秒。作速度图象如图(b)。

(2)计算各段位移

$$s_1=\frac{1}{2}a_1\triangle t_1^2=\frac{1}{2}\times 1\times 2^2\text{米}=2\text{米}$$

$$s_2=v_2\triangle t_2=8\text{米。}$$

$$s_3=v_2\triangle t_3+\frac{1}{2}a_3\triangle t_3^2=0\text{。}$$

$s_4=v_3\triangle t_4=?\ 8$ 米。

$$s_5=v_4\triangle t_5+\frac{1}{2}a_5\triangle t_5^2=0$$

总位移　　　$s=s_1+s_2+s_3+s_4=8$ 米

(3)第 3 段和第 5 段位移虽然为零，但是由速度图象可知，质点不是始终朝一个方向运动的；中间经过速度为零的点（图中 t=8 秒和 t=15 秒）。所以第 3 段路程计算应将时间分为 $t'_3=2$ 秒和 $t''s=2$ 秒。

$$s'_3=v_2t'_3+\frac{1}{2}a_3t'^2_3=[2.2+\frac{1}{2}(-1)\cdot 2^2]\text{米}=2\text{米。}$$

$$s''_3=\left|\frac{1}{2}a_3t''^2_3\right|=\left|\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot 2^2\right|\text{米}=2\text{米。}$$

路程　　$|s_3|=s'_2+s''_3=(2+2)\text{米}=4\text{米。}$

同理，计算得　$|s_5|=2\left|v_4\cdot\frac{t_5}{2}+\frac{1}{2}a_5\cdot(\frac{t_5}{2})^2\right|$

$$=2\times\left|(-2)\times\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\times 2\times(\frac{2}{2})^2\right|\text{米}=2\text{米。}$$

总路程　　　　　｜s｜=(2+8+4+8+2)米=24 米。

643．甲、乙两辆汽车沿同方向行驶，当 t=0 时，两辆车恰好位于同一处。它们的路程 s 随时间 t 变化的规律如下：

甲车　　　　　　　$s_1=10t$；

乙车　　　　　　　$s_2=2t+t^2$.

(1)在坐标图中画出两车的速度图线；

(2)根据图线确定两车速度相等的时刻；

(3)什么时刻两车再次相遇？两次相遇处相隔路程多少？

(4)什么时刻两车距离最远？最远距离多大？

[解答](1)根据匀速直线运动公式 $s=vt$ 和匀加速直线运动公式 $s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$ 可以确定，甲车作匀速直线运动 $v_1=10$ 米/秒；乙车作匀加速直线运动 $v_{02}=2$ 米/秒，$a_2=2$ 米/秒^2。乙车速度随时间变化规律为 $v_2=v_{02}+a_2t=2+2t$ 米/秒。

由速度表示式作图线如图。

(2)根据图线可确定，在 $t=4$ 秒时，两车的速度相等。

(3)根据 $s_1=s_2$，得方程 $10t=2t+t^2$，解此方程求得两车第二次相遇的时间 $t=8$ 秒。再求得两次相遇时相隔路程为 80 米。

(4)当 $t<4$ 秒时，甲车速度大于乙车速度，两车距离相隔越来越大，$t=4$ 秒时，两车速度相等，当 $t>4$ 秒时，乙车速度大于甲车，两车距离越来越近，所以 $t=4$ 秒时，两车相距离最远。最远距离由图线下面积差（即图中阴影部分）求得为 $\frac{1}{2}\times 8\times 4$ 米 $=16$ 米。

644．一个物体运动的速度分量 v_x，v_v 随时间 t 从 0—4 秒变化的情况，如图所示。求：(1)$t=0$ 时，速度多大？(2)速度最小时，t 等于多少？最小速度是多少？(3)$t=2$ 秒时，加速度多大？(4)$t=0$ 时和 $t=4$ 秒末的速度方向间有什么关系？(5)这个物体的运动轨迹。

[解答](1)$t=0$ 时，$v_0=\sqrt{v_x^2+v_v^2}=\sqrt{(0.4)^2+(0.3)^2}$ 米/秒 $=0.5$ 米/秒。

(2)由于 v_x 不变，当 $v_y=0$ 时，v 最小。最小速度 $v_x=0.4$ 米/秒。

(3)由 v_y 图可知 $a_y=?\ 0.15$ 米/秒^2，$a_x=0$，所在任何时刻加速度 $a=a_y=?\ 0.15$ 米/秒^2。

(4)$t=0$ 时 $v_y=+0.3$ 米/秒；$t=4$ 秒时 $v_y=?\ 0.3$ 米/秒，所以这两时刻的速

度大小相等。它们和水平方向夹角分别为 θ_1、θ_2，由于 $\mathrm{tg}\theta=\frac{v_y}{v_x}$，所以 θ_1 和 θ_2 互为补角。

(5)由 v_x 可知水平方向分量为匀速运动，v_y 竖直方向分量为上抛运动。所以这个物体运动是斜抛运动，轨迹是一条抛物线。

645．物体作斜上抛运动，它的轨迹方程为 $s_y=s_x\times(\frac{4}{3}-\frac{5}{36}sx)$ 米，试作出它两个分运动的速度图象。

[解答]斜上抛运动的参数方程是

$$s_x=v_0\cos\theta t,\quad s_y=v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2.$$

消去t得它的轨迹方程$s_y=\mathrm{tg}\theta\times s_x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}s_x^2$。本题中$\mathrm{tg}\theta=\frac{4}{3}$，$\theta=53°$。

$$\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}=\frac{5}{36}，v_0=10米/秒。$$

解得　$v_x=v_0\cos\theta=10\cos53°$米/秒=6米/秒，

$v_y=v_0\sin\theta$？gt=(10sin53°？10t)米/秒=(8？10t)米/秒。

可作出它两个分运动的速度图象如下

646．一个物体作抛体运动，它的水平方向分速度v_x和竖直方向分速度v_y的速度图象分别如图所示。求：(1)物体做怎样的抛体运动？(2)初速多少？(3)3秒末速度？(4)3秒末物体的位置。

[解答](1)由速度图象可知，水平方向为匀速运动；竖直方向为初速不为零的匀加速运动，加速度a=10米/秒^2，所以为斜下抛运动。

(2)由图象可知v_{0x}=40米/秒，v_{0y}=30米/秒

初速　$v_0=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2}=\sqrt{40^2+30^2}米/秒=50米/秒$。

$$\theta_0=\mathrm{tg}^{-1}\frac{v_{0y}}{v_{0x}}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{30}{40}=37°。$$

(3)由图可知v_{3x}=40米/秒，v_{3y}=60米/秒。

$v_3=\sqrt{v_{3x}^2+v_{3y}^2}=\sqrt{40^2+60^2}米/秒=72米/秒$，

$$\theta_3=\mathrm{tg}^{-1}\frac{v_{3y}}{v_{3x}}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{60}{40}=56°19'。$$

(4)$s_x=v_0x\cdot t_3$=40×3米=120米。

$$s_y=\frac{1}{2}(v_{03y}+v_{3y})t_3=\frac{1}{2}(30+60)3米=135米。$$

实验题

647．给你一个空罐头和一只秒表，怎样估测出一幢新公房的高度？

[参考解答]站在屋顶上，从手中放开空罐头同时按秒表的起动按钮，当听到罐头撞击地面的声音时让秒表停止。秒表上读数t就是空罐下落的时间t_1跟声音从空罐着地处声音传到人耳所需时间t_2的和。

房子高度h，则　$h=\frac{1}{2}gt_1^2$。

声音速度为v(一般取340米/秒)，则$h=vt_2$。

所以　$\sqrt{\frac{2h}{g}}+\frac{h}{v}=t$，

解此方程可求得h。

在房子不太高的情况下，t_2很小可略去，前面一项由于空气阻力引

起的修正值也未考虑。所以 $\sqrt{\frac{2h}{g}} = t_1 \approx t$,

则 $$h = \frac{1}{2}gt^2。$$

648．用一个秒表，怎样测出玩具手枪射出子弹的初速度？

[参考解答]将枪身竖直向上，用秒表测出子弹从射出到落地所需要时间 t。由上抛运动知

$$t = \frac{2v_0}{g}。$$

子弹初速 $$v_0 = \frac{gt}{2}。$$

由于运动物体的速度比较小，可以忽略空气阻力对物体的影响。

649．在无风的天气里，只允许使用表和量角器，怎样根据雨滴在行驶着的火车车厢窗门上所留下的水迹，测定雨滴下落的速度？

[参考解答]火车以速度 v_n 从左向右运动，雨滴相对于火车有一个数值相等、方向相反的速度 v'_n，运动着的雨滴同时相对于车厢有一个自上而下的运动速度 v_x。于是 v'_n 和 v_x 的合速度 v 和竖直方向间成角度 α，且

$$tg\alpha = \frac{v'_n}{v_x}。$$

角α可用量角器测出，火车的速度可以根据窗外电线杆间的路程和所需的时间计算出来。一般电线杆间距离为 50 米或 100 米，根据测得的α和 v_n，可求得 v_x。($v_x=v'_n ctg\alpha$)

如果是在汽车里的话，速度可从车上速率表直接读出，则秒表也可不用了。

650．用一把卷尺，测定一个男孩抛出的小球速度比女孩抛出的小球速度大多少倍。

[参考解答]利用平抛运动原理。让两个小孩先后水平抛出小球，然后用卷尺分别量出抛出的水平距离 s_1 和 s_2。由于

$$s_1 = v_1t_1 = v_1\sqrt{\frac{2h_2}{g}},$$

$$s_2 = v_2t_2 = v_2\sqrt{\frac{2h_2}{g}},$$

可得，速度之比

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2}\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}。$$

用卷尺量出球抛出的距离和高度就可以了。如果要使测量和求解过程更简便，可以让两人中较矮的一个站在高度合适的垫板上，使 h_1 和 h_2 相等，那么

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2}。$$

动力学

填充题

651．从公元前三百年的希腊学者亚里士多德提出力是维持物体运动的原因以后，人们一直以为这种观点是正确的。最早对此产生异义的是意大利物理学家伽利略，他认为如果没有力的作用，原来运动着的物体将保持匀速直线运动。

652．物体保持原有运动状态的属性，叫做惯性。物体在任何条件下都具有惯性。由于惯性，原来静止的物体在没有外力作用下将保持静止状态。

653．一个以速度 v 米/秒运动着的球，如果没有受到任何力的作用，t 秒后它的速度将是 v 米/秒，nt 秒后它的速度是 v 米/秒。

654．原来静止的汽车里坐着的乘客，在汽车突然开动时，会向车后倒，这是由于惯性的缘故，乘客的上身还要保持原来的运动（静止）状态；原来快速行驶的汽车里坐着的乘客，在汽车制动时，会向车前倒，这也是由于惯性的缘故，乘客的上身还要保持原来的运动（向前）状态。

655．有人在匀速前进的火车上，跳起来以后仍能落回到原地。这是因为人具有惯性，人在火车前进的方向上保持和火车相同的速度。

656．手握■头的木柄往硬地上猛敲几下，原来木柄松动的■头被压紧了。这是木柄在和硬地碰撞时受到阻力迅速变为静止而锤头由于惯性仍向下运动的结果。

657．用绳子拉着小车在光滑的水平面上运动，如果绳子突然继掉，小车将作匀速直线运动，这时小车在水平方向上受到力的大小为零。

658．对于力的认识，亚里士多德认为力是维持物体运动的原因，而伽利略和牛顿则认为力是改变物体运动状态的原因。

根据牛顿第二定律，质量为 m 的物体在受到外力 F 的作用时，产生的加速度是 α。质量为 2m 的物体受到外力 F 作用，产生的加速度为 α/2。这说明质量大的物体，虽然受到相同外力的作用，运动状态较难改变，也可以说是质量大的物体惯性大。所以质量是惯性大小的量度。

659．根据牛顿第二定律：物体的加速度跟作用力成正比，跟物体的质量成反比。写成公式就是 $\alpha\propto\frac{F}{m}$ 或者 $F\propto m\alpha$。改写成等式应该是 $F=km\alpha$。为了简化公式，在国际单位制中，m 的单位是千克，加速度的单位是米/秒^2,就规定使质量为 1 千克的物体产生 1 米/秒^{2}的加速度的力，叫做 1 牛。这样上式中的 k 就等于 1，牛顿第二定律的公式就可以简化成 F=ma 的形式了。

660．质量为 10 千克的物体在水平面上受 20 牛水平拉力时恰好做匀速运动。要使它获得 1 米/秒^{2}的加速度，作用于物体的水平拉力是 30 牛。

当它受到 50 牛水平拉力作用时，获得的加速度是 3 米/秒^2。

661．用弹簧秤在水平桌面上沿水平方向拉动一个物体并使它作匀速运动，弹簧秤的读数为 F_1 牛。当物体以加速 α 米/秒^{2}运动时，弹簧秤读

数为F_2牛，则此物体的质量是$\frac{F_2-F_1}{\alpha}$千克。

662．用倔强系数为 1000 牛/米的弹簧沿水平方向拉一个质量为 5 千克的物体，当物体在水平木板上作匀速运动时，弹簧伸长了 2 厘米，当物体以 1 米/秒^{2}的加速度作加速运动时，则弹簧伸长量是 2.5 厘米。

当弹簧伸长量为 5 厘米时，则物体的加速度是 6 米/秒^2。

663．质量一定的物体放在光滑的水平面上，在水平力 F 作用下作加速运动，当 F 逐渐减小时，它的加速度将逐渐减小，速度将逐渐增大，位移将逐渐增大；在 F 减小到零时，它的加速度将变为零，速度将不变，位移将继续增大。

664．在水平地面上，质量为 m 的物体在水平外力 F 作用下作匀速直线运动；当水平外力减为 F/3 时，物体将作匀减速直线运动，它的加速度大小是 2F/3m；如果物体受水平外力方向不变，大小改为 2F 时，物体将作匀加速直线运动，后将水平外力的方向改为相反方向（大小不变），物体将作匀减速直线运动，它的加速度大小是 3F/m。

665．质量为 m 的静止物体在一恒力作用下开始运动，经过时间 t，发生的位移为 s。则在相同的力作用下，质量为 m/2 的物体在时间 2t 内发生的位移是 8s。

如果在相同的力作用下，在 2t 时间内，另一个物体的位移是 16s，则物体的质量将为 m/4。

666．两个相等的恒力分别作用在质量为 m_1、m_2 两个静止的物体上，各经 t_1、t_2 时间，它们速度相等，则 t_1：t_2=m_1：m_2，在 t_1、t_2 时间内位移的比 s_1：s_2=m_1：m_2。

667．一辆汽车能以 3 米/秒^{2}的加速度前进。如果在不考虑阻力的情况下，牵引力保持不变，它拉着另一辆质量相同的汽车一起运动，则此时的加速度等于 1.5 米/秒^2。

668．用 6 牛的力作用在质量 m_1 千克的物体上，产生的加速度为 3 米/秒^2；用 8 牛的力作用在质量 m_2 千克的物体上产生的加速度为 2 米/秒^2；如果用 14 牛的力作用在质量(m_1+m_2)千克的物体上产生的加速度是 2.33 米/秒^2。

物体甲受到 F_1 的作用产生加速度α_1，物体乙受到 F_2 的作用产生加速度α_2,如果把拴在一起的甲、乙两个物体受到大小为(F_1+F_2)的力的作用，产生的加速度为$\frac{\alpha_1\alpha_2(F_1+F_2)}{\alpha_1F_2+\alpha_2F_1}$。

669．如果有几个大小和方向都不同的力作用在一个原来静止的物体上，则物体沿着合力的方向可能作加速运动，可能作匀速直线运动也可能处于静止状态。

670．如图所示，质量为 m 的物体放在光滑水平面上，通过绳子跟滑轮相连。滑轮的质量，滑轮和绳子间的摩擦不计。

671．如图所示，某质量为 2 千克的物体 A 受五个力的作用，处于静止状态，已知其中 F_1 的大小为 10 牛，方向是水平向右，现在 F_1 停止作

用，则物体 A 将向水平向左方向运动，其加速度大小是 5 米/秒 ^{2}。

672．质量是 2 千克的物体，受到 4 个力的作用而静止。当撤去其中两个力 F_1、F_2 后，物体运动的加速度为 1 米/秒 ^{2}，方向正东。那么 F_1、F_2 的合力是 2 牛，方向正西。

673．重力为 10.0 牛的物体静止在水平地面上，受到如图所示方向拉力的作用。已知物体跟地面间滑动摩擦系数为 0.2。(sin37°=0.6，cos37°=0.8)当拉力 F=2.17 牛时，物体作匀速直线运动；当拉力 F=16.7 牛时，物体沿水平地面作无摩擦的直线运动。

674．一个质量为 1 千克的物体，放在倾角为 30°的斜面上，恰好匀速下滑，如将此物体沿斜面匀速上拉，则需沿斜面向上施 10 牛的力，斜面跟物体间的滑动摩擦系数为 0.577。如果要使物体沿斜面以加速度 1.2 米/秒 ^{2} 向上运动，则需要沿斜面向上施加 11.2 牛的力。（取 g=10 米/秒 ^{2})

675．一光滑斜面跟水平面成 30°角，某物体以 5 米/秒的初速沿斜面上升，恰能到达斜面顶端，这个斜面长应该是 2.5 米。物体从斜面底端开始向上运动到返回斜面底端，经过的时间是 2 秒。(取 g=10 米/秒 ^{2})

676．如果传送皮带上的物体 A 跟传送带之间没有相对滑动。A 的质量为 m，传送带跟水平夹角为α（如图所示），则

(1)传送带匀鼓速运动时，A 受到摩擦力的大小为 mgsinα。

(2)当传送带以α=gsinα向上作匀加速运动时,A 受到的摩擦力的大小是 2mgsinα。

(3)当传送带以α=gsinα向上作匀减速运动时,A 受到的摩擦力的大小是 0。

(4)当传送带以α=gsinα向下作匀加速运动时,A 受到的摩擦力的大小是 0。

(5)当传送带以α=gsinα向下作匀减速运动时,A 受到的摩擦力的大小是 2mgsinα。

677．皮带运输机和皮带上的物体 A 一起运动，如图(a)所示。它的速度图线如图(b)所示。试根据此图线填充

(1)在物体 A 开始运动的最初 2 秒内，作用在物体 A 上的静摩擦力是 4 牛，则物体的质量是 4 千克。

(2)开始运动后的第 3 秒内，作用在物体 A 上的静摩擦力是 0 牛。

(3)在开始运动后的 5 秒内,作用在物体 A 的静摩擦力的大小是 2 牛，方向和原来的运动方向相反。

678．一个重力为 G 牛的物体，在有阻力的空气中由静止开始匀加速下落，t 秒内下落了 h 米，如果当地的重力加速度为 g 米/秒 ^{2}，它下落的加速度是 $\frac{2h}{t^2}$ 米/秒 ^{2}，它的质量是 $\frac{G}{g}$ 千克，空气对它的平均阻力是 $G(1-\frac{2h}{gt^2})$ 牛。

679．两个长度相等，倾角都是α的斜面，一个是光滑的，另一个粗糙的，物体从粗糙斜面顶端匀加速滑到底端所用的时间为在光滑斜面上由顶端滑到底端所用时间的 2 倍。那么，物体在光滑斜面和粗糙斜面上下滑加速度的比为$\underline{4:1}$，物体和粗糙斜面间的摩擦系数为$\underline{\frac{3}{4}\mathrm{tg}\alpha}$。

[提示]$s_1=s_2$，$\frac{1}{2}\alpha_1\cdot t_1^2=\frac{1}{2}\cdot\alpha_1\cdot t_2^2$。

因为　$t_2=2t_1$，所以$\frac{1}{2}\cdot\alpha_1 t_1^2=\frac{1}{2}\cdot\alpha_2\cdot 4t_1^2$。

$$\alpha_2=\frac{1}{4}\alpha_1，\alpha_1:\alpha_2=4:1。$$

因为 $\alpha_1=g\sin\alpha$，$\alpha_2=\frac{mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha}{m}=g\sin\alpha-\mu g\cos\alpha$，

$\alpha_1=4\alpha_2$。所以 $g\sin\alpha=4(g\sin\alpha?\ \mu g\cos\alpha)$。

$$4\mu g\cos\alpha=3g\sin\alpha，\mu=\frac{3}{4}\mathrm{tg}\alpha。$$

680．质量为 1 千克的物体，以 20 米/秒的初速度竖直上抛，如果空气阻力始终是 1 牛，g 取 10 米/秒^2，那么，向上运动加速度的大小为 11 米/秒^2，方向向下；物体向下运动时加速度大小为 9 米/秒^2，方向也向下。向上运动的时间比返回原地的时间要短。（填长还是短）

681．质量为 0.2 千克的物体，在光滑水平面上运动，其 x 方向的分速度 v_x 和 y 方向的分速度 v_y 随时间而变化的图线如图(a)、(b)所示，则

(1)此物体所受力的大小为 0.2 牛；

(2)此物体的初速度的大小为$4\sqrt{2}$米/秒；

(3)此物体的运动轨迹为抛物线。

682．用天平称量的是物体的质量；用弹簧秤称量的是物体的重力；用杆秤称量的是物体的质量；用有槽砝码（槽码）调节平衡的磅秤称量的是物体的质量；内部有弹簧结构的磅秤称量的是物体的重力。曹冲称象时，称量的是象的质量。

683．在弹簧秤下端吊有一个 200 克的砝码，当手拿住弹簧秤以 0.3 米/秒^{2}的加速度作匀减速下降时，弹簧秤的读数为 2.02 牛；当用手拿住弹秤以 0.3 米/秒的速度匀速向下运动时，弹簧秤的读数为 1.96 牛；当手拿住弹簧秤以 9.8 米/秒^{2}的加速度向下作匀加速运动时，弹簧秤的读数应为 0；当手拿住弹簧秤以 9.8 米/秒^{2}的加速度向上作匀加速运动时，弹簧秤的读数应为 3.92 牛。

684．如图，在升降机天花板上挂着一只弹簧秤。弹簧秤下端挂一重 5 牛的物体。当升降机竖直下降时，弹簧秤的读数稳定在 7.5 牛。则升降机加速度的大小为 4.9 米/秒^2；方向向上。

685．某人在地面上最多能举起质量为 60 千克的物体。在一加速下降的电梯里最多能举起质量为 80 千克的物体，此时电梯的加速度为 2.5 米/秒^2；如果电梯以这个加速度加速上升，则此人在梯里最多能举起质

量为48千克的物体。（取 g=10 米/秒^2）

686．在离地面一定高度的范围内，物体受到的重力可以认为是一个恒量。物体的重力并不会随着物体的运动状态变化而发生变化。所谓超重并不是指物体的重力增大了，而是指在竖直方向上有向上的加速度时，物体对支持物的压力（或对悬挂物的拉力）大于物体所受重力的现象。所谓失重也不是指物体的重力减小了，而是指在竖直方向上有向下的加速度时，物体对支持物的压力（或对悬挂物的拉力）小于物体所受重力的现象。

687．图中物体 A 的质量为 1 千克，A 和小车的接触面间的滑动摩擦系数为 0.25，当小车的加速度为 39.2 米/秒^{2}时，才能使 A 在小车右端面向下匀速滑动。

688．图中，A、B 是两个带柄(a 和 b)的完全相同的长方形物体，物体 C 的质量为 m，A、B 和斜面间以及和 C 之间都有摩擦，C 和 A、B 间的静摩擦系数都为 μ_0，设它们原来都处于静止状态。（设 $\mu_0 > 2\operatorname{tg}\theta$）

(1)如果一手握住α，使 A 不动，另一手握住 b，逐渐用力将 B 沿倾角为θ的斜面向上拉。当力增大到能使 B 刚刚开始向上移动时，C 将静止。（填静止或向什么方向动）

(2)此时C作用于A的摩擦力为$mg(\frac{1}{2}\mu_0\cos\theta-\sin\theta)$，方向沿斜面向

(3)如果握住 b 使 B 不动，握住α逐渐用力将 A 沿倾角为θ的斜面向下拉，当 A 开始移动时，C 将沿斜面向下运动。

689．虽然牛顿运动定律只适用于解决宏观物体的低速运动问题，但它对有一般条件下的生产、生活和科研已是足够精确的了。

690．用细线悬挂着的物体受到的两个力是重力和弹（拉）力，它们分别是地球和悬线对物体的作用。它们的反作用力分别作用在地球和悬线上。

在水平地面上受到沿水平方向的绳子的牵引而作匀速运动的物体，它受到的四个力是重力、弹（支持）力、弹（拉）力和摩擦力。它们的反作用力分别作用在地球、地面、绳子和地面上。

691．一根绳子只能承受小于 400 牛的拉力，如果两人用手对拉绳子，则每人用力 400 牛时，绳子就会被拉断。

692．如图所示，m_1=300 克，m_2=200 克，如果不考虑滑轮和绳子的质量，以及滑轮和绳子间的摩擦。弹簧秤的读数是 4 牛；如果 m_2 换成 400 克，当 m_1 和 m_2 运动时，弹簧秤的读数是 6.86 牛。（g 取 10 米/秒^2）

693.质量为 50 千克的同学以 2 米/秒^{2}的加速度沿一竹竿竖直滑下。他施在杆上向下的力是 400 牛。（取 g=10 米/秒^2）

694．质量为 m 的物体，放在倾角为α的斜面上，物体跟斜面间的摩擦系数为μ，当物体在斜面静止时，物体对斜面的作用力有弹（压）力和静摩擦力，它们的大小分别是 $mg\cos\alpha$ 和 $mg\sin\alpha$。如果物体不能保持平衡，而沿斜面下滑时，斜面受到的摩擦力的大小为 $\mu mg\cos\alpha$，方向沿斜面向下，而物体获得的加速度为 gsinα？ μgcosα。

695．如图所示，倾角为θ的光滑斜面加速向前运动，如果重物跟斜面保持相对静止，此时重物 m 对斜面的压力等于 mg/cosθ。

696．如图所示，A、B 之间以及 A 跟地面间都没有摩擦，A 物体受到一个水平推力 F 的作用，A 和 B 一起作匀加速运动，并且保持相对静。如果 A 和 B 质量相等，A 倾角α为 30°，则 B 对 A 压力的大小是 F。

697．在轻弹簧下面吊一个物体，物体静止时弹簧伸长 AL。整个装置处在静止状态。如果想使弹簧伸长 2△L，应使整个装置向上加速运动，加速度是 9.8 米/秒 ^{2}。如果想使弹簧伸长为△L/2 应使整个装置向下加速运动，加速度是 4.9 米/秒 ^{2}。

698．两个质量都是 m 的小球 A 和 B，用轻弹簧把它们连接起来，然后用轻绳吊起。如图所示，当把 A 球上端的绳烧断的瞬间，A 的加速度是 2g，B 的加速度是 0。

699．物体 A 和 B 用弹簧连在一起，吊在固定支架上，保持静止。如图所示，设 A、B 质量分别为 m_1、m_2，弹簧和吊线的质量不计，当吊线被烧断的瞬间，A、B两物体的加速度分别是$\frac{m_1+m_2}{m_1}$g和0。

700．如图所示，三个相同的物体用绳顺次相连放在桌面上，物体跟桌面间的滑动摩擦系数为 0.2，用力 F 作用在第一个物体，物体运动的加速度是 1 米/秒 ^{2}。当最后一个物体丢掉后，其余两物体的加速度是 2.5 米/秒 ^{2}。（g=10 米/秒 ^{2}）

701．五块质量相同的木块，排放在光滑的平面上，如图所示，水平外力 F 作用在第一块木块上，则第三块木块对第四块木块的作用力为 2/5F。

702．在空中竖直向上发射一枚小火箭，其速度一时间图象如下页左图所示。火箭内的水平支承面上放有质量为 0.2 千克的物体，则物体对支承面的最大压力为 6 牛。从第 5 秒到第 30 秒的时间内，物体对支承面的压力最小，其大小为 0 牛。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

703．重力为 500 牛的人，站在电梯内，电梯的重力为 4500 牛，下页右图为电梯上升时的 v? t 图象，如果 g 取 10 米/秒 ^{2}，在下列几段时间内，人对电梯地板的压力 N 和悬挂电梯的钢索所受的力 T 分别是

(1)t=1～5 秒，N_1=600 牛，T_1=6000 牛；
(2)t=5～10 秒，N_2=500 牛，t_2=5000 牛；
(3)t=10～20 秒，N_3=450 牛，T_2=4500 牛。

704．在图中物体 B 叠放在 A 上，A 放在倾角为 30°的光滑斜面上，已知 B 和 A 之间的摩擦系数为 0.30，则当 A 沿斜面下滑时，A、B 之间的摩擦力为 0。

选择题

705．关于惯性，下列哪几种说法是正确的？
(a)物体能够保持原有运动状态的性质叫做惯性；

(b)物体不受外力作用时才有惯性；

(c)物体静止时有惯性，物体一开始运动，不再保持原有的运动状态，也就失去了惯性；

(d)物体静止时没有惯性，只有始终保持运动状态才有惯性；

(e)在相同的外力作用下，获得加速度小的物体惯性大。

答(a)、(e)

706．人从行驶的汽车上跳下来后容易

(a)向汽车行驶的方向跌倒；(b)向汽车行驶的反方向跌倒；

(c)向车右侧方向跌倒；　　(d)向车左侧方向跌倒。

答(a)

707．在公路上行驶的车辆突然刹车时，乘客将向车前方倾倒。这是因为

(a)当乘客随车辆前进时已经受到了一个向前的力，这个力在刹车时继续起作用；

(b)在刹车时车辆对乘客施一个向前的力；

(c)车辆具有惯性，因而促使乘客向前倾倒；

(d)乘客具有惯性，而车辆突然减速。

答(d)

708．物体在车厢中做抛体运动。下列哪种情况，人在车厢里观察到的现象和在车厢静止时观察到的现象一样？

(a)车厢加速行驶时；　　(b)车厢减速行驶时；

(c)车厢转弯时；　　(d)车厢匀速直线行驶时。

答(d)

709．火车在长直水平轨道上匀速行驶。车厢内有一人向上跳起，发现仍落回到车上原处，这是因为

(a)人跳起后，厢内空气给他以向前的力，带着他随同火车一起向前运动；

(b)人跳起的瞬间，车厢内的地板给他一个向前的力，推动他随同火车一起向前运动；

(c)人跳起后，车继续向前运动，所以人落下后必定偏后一些，只是由于时间很短，偏后距离太小，不明显而已；

(d)人跳起后直到落地，在水平方向上人和车始终具有相同的速度。

答(d)

710．在树枝上悬挂着一条牢固的细绳，绳的中部套着一个铁圈（如图所示）。由于存在一些摩擦，铁圈可以停留在绳上不滑下来，如何操纵绳的下端 P，能使铁圈最终升到顶端 Q？

(a)使 P 点小幅度地左右摆动；

(b)使 P 点大幅度地左右摆动；

(c)使 P 点迅速向下，缓慢向上地上下运动（树枝有弹性）；

(d)使 P 点在水平面上作圆周运动。

答(c)

711．关于力和运动的关系，下列哪一句话是正确的？

(a)力是物体运动的原因；

(b)力是维持物体运动的原因；
(c)力是改变物体运动状态的原因；
(d)力是物体获得速度的原因。

答(c)

712．某人用力推一下原来静止的小车，开始运动后只要用较小的力就可以维持小车的运动。这一事实说明
(a)力是产生运动和维持运动的原因；
(b)力是物体产生加速度的原因；
(c)力是维持物体运动速度的原因；
(d)在相同接触面和相同压力下物体所受到的最大静摩擦力大于滑动摩擦力。

答(d)

713．从牛顿第二定律公式可以得到 m=F/a，对某一物体来说它的质量
(a)跟外力成正比；　(b)跟合外力成正比；
(c)跟加速度成反比；　(d)跟合外力以及加速度都无关。

答(d)

714．下列说法中，正确的是
(a)物体速度越大，惯性越大；
(b)物体的质量越大，惯性越大；
(c)运动物体受到的摩擦力越小，惯性越大；
(d)物体的加速度越大，惯性越大。

答(b)

715．静止在光滑水平面上的物体，受到一个水平拉力，当力刚开始作用的瞬间，下列说法正确的是
(a)物体同时获得速度和加速度；
(b)物体立即获得加速度，但速度仍为零；
(c)物体立即获得速度，但加速度仍为零；
(d)物体的速度和加速度仍为零。

答(b)

716．物体在运动过程中
(a)速度大，加速度一定大；
(b)速度为零，加速度一定为零；
(c)加速度的方向一定跟速度增量的方向一致；
(d)加速度的方向一定跟合外力的方向一致；

答(c)、(d)

717．当作用在物体上的合外力不等于零时，则
(a)物体的速度将一定越来越大；
(b)物体的速度将一定越来越小；
(c)物体的速度将有可能不变；
(d)物体的速度将一定改变。

答(d)

718．下列说法中正确的是
(a)物体的运动方向总是和它所受合力的方向一致；

(b)物体的惯性总是和它所受的合力方向相反；

(c)物体的速度方向总是和它所受合力的方向一致；

(d)物体加速度的方向总是和它所受合力的方向一致；

答(d)

719．原来作匀速直线运动的物体，当它所受的合外力逐渐减小时

(a)它的加速度将减小，它的速度也减小；

(b)它的加速度将减小，它的速度在增加；

(c)它的加速度和速度都保持不变；

(d)情况复杂，加速度和速度的变化无法确定。

答(b)

720．物体在变力 F 的作用下，由静止开始运动。如果变力 F 随时间 t 按图所示的情况变化，那么在 0-t 的时间内，物体运动时，速度的大小将

(a)不变；　　(b)变大；

(c)变小；　　(d)忽大、忽小。

答(b)

721．一个小金属车的质量比小木车的质量大一倍，把它们放置在光滑水平面上，用一个力作用在静止的小金属车上，得到 2 米/秒^{2}的加速度。如果用相同的力作用在静止的小木车上，经过 2 秒，小木车的速度是

(a)2 米/秒；　　(b)4 米/秒；

(c)6 米/秒；　　(d)8 米/秒；

答(d)

722．一辆以加速度 a 作匀加速直线运动的汽车，如果再拖上一辆和它质量相同的挂车，两车的阻力相同。当汽车以同样的牵引力行驶时，它们的加速度将是

(a)2a；　　(b)a/2；　　(c)4a；

(d)a/4；　　(e)上述答案都不对。

答(e)

723．设洒水车的牵引力不变，所受的阻力跟车重成正比，洒水车在平直路面上行驶原来的匀速的，开始洒水后，它的运动情况将是

(a)继续作匀速运动；　　(b)变为作匀加速运动；

(c)变为作变加速运动；　　(d)变为作匀减速运动。

答(c)

724．在光滑的水平面上有一质量为 m（千克）的物体，受到 F（牛）水平恒力作用，从静止开始运动，在 t（秒）内移动了 s（米）。今要使移动距离变为 4s，应该

(a)将物体质量减半；

(b)将水平恒力增加到 4F；

(c)将作用时间延长到 4t；

(d)将作用时间 t 变为原来的 2 倍。

答(b)、(d)

725．在忽略摩擦力的条件下，质量为 M（千克）的物体在 F（牛）外力作用下，从静止开始运动，在 t（秒）内位移为 s（米）。下列说法

中哪些是正确的？

(a)M/2 的物体受 F/2 外力作用，在 t/2 时间内，位移为 s/2；

(b)M/2 的物体受 F/2 外力作用，在 t 时间内，位移为 s；

(c)M/2 的物体受 F 外力作用，在 2t 时间内位移为 8s；

(d)2M 的物体受 F/2 外力作用，在 2t 时间内位移为 s；

答(b)、(c)、(d)

726．下列关于质量和重力的说法中，错误的是

(a)质量和重力是用不同单位表示的同一物理量；

(b)质量是物体本身的一种属性，而重力是由两个物体相互作用而产生的；

(c)在同一地点，物体的重力正比于它的质量；

(d)物体的质量随它在各地的重力改变而改变。

答(a)、(b)

727．下述关于重力和质量的单位及关系的叙述，哪些是正确的？

(a)在地面上质量为 1 千克的物体，其重力约为 9.8 牛；

(b)1 千克力=9.8 牛；

(c)在地面上重力为 9.8 牛的物体，它的质量约为 1 千克；

(d)1 千克质量约为 9.8 牛。

答(a)、(b)、(c)

728．下面的说法正确的是

(a)物体在恒力作用下，可以作曲线运动；

(b)物体在变力作用下，可以作直线运动；

(c)如果物体在外力作用下，沿直线作加速运动，则在外力逐渐减小的过程中，其加速度越来越小，速度也越来越小；

(d)以不同速度沿水平面抛出质量相同的两个铅球，速度大的铅球比速度小的铅球难停下来，这说明物体的速度越大，惯性也越大。

答(a)、(b)

729．物体做曲线运动的充要条件是

(a)受到重力作用；

(b)合外力为恒力；

(c)合外力不断增大；

(d)合外力方向跟速度方向不在一条直线上

答(d)

730．下降中的气球和吊篮的总质量为 M。它们下降的加速度为重力加速度的一半。在吊篮中放着一些体积远小于气球体积的砂袋。如果空气阻力忽略不计，要使它们以等值的加速度匀加速上升，则应抛出吊篮中砂袋的质量是总质量 M 的

(a)1/2；　　(b)1/3；　　(c)1/4；

(d)3/4；　　(e)2/3

答(e)

731．如图所示，质量和初速度大小都相等的 A、B、C 三个物体在同一水平面上。A 竖直上抛。B 斜向上抛，抛射角为θ，C 沿倾角也为θ斜面上滑（斜面足够长，C 不至于滑过顶端），摩擦和空气阻力都忽略不计。如用 h_A、h_B、h_C 表示它们各自上升的最大高度，则

(a)$h_A=h_B=h_C$；　　(b)$h_B=h_C<h_A$；
(c)$h_A=h_C>h_B$；　　(d)$h_A>h_B$，$h_A>h_C$。

答(c)

732．质量为 m 的物体，放在粗糙的水平面上，受到一个水平方向的恒力 F 作用而运动。在运动过程中，物体运动加速度 a 的大小

(a)和物体运动的速度无关；
(b)和物体跟地面间的摩擦系数无关；
(c)和物体通过的位移无关；
(d)和物体运动的时间无关；
(e)和恒力 F 成正比。

答(a)、(c)、(d)

733．从牛顿第二定律知道，无论怎样小的力可以使物体产生加速度。可是当我们用一个很小的力去推很重的桌子时，却推不动它。这是因为

(a)牛顿第二定律不适用于静止物体；
(b)桌子加速度很小，速度增量很小，眼睛不易觉察到；
(c)推力小于静摩擦力，加速度是负值；
(d)桌子所受的合力为零。

答(d)

734．质量为 m 千克的物体，它的 v-t 图象如图所示

（1）该物体在哪一段时间所受的合外力最大？
（2）该物体在哪一段时间内所受的合外力最小？

可供选择的答案是

(a)0~2 秒；　(b)2~6 秒；　(c)6~9 秒；
(d)9~10 秒；　(e)10~13 秒。

（1）答(d)；（2）答(c)

735．一个质量为 1 千克的物体在倾角为 30°的斜面上滑下。以斜面顶端为坐标原点，它的位移和时间的函数关系为 $s=(33.5t^2+3t+2)$ 厘米，如果取 $g=10$ 米/秒^2，那么物体和斜面间的滑动摩擦系数应为

(a)0.5；　(b)0.577；　(c)0.654；
(d)0.67；　(e)0.866

答(a)

736．一个静止在光滑水平面上的物体，如果受到沿平面向东的力 F_1 的作用，产生加速度 a_1；如果受到沿平面向南的 F_2 的作用，产生加速度 a_2；当 F_1 和 F_2 同时作用在该物体上，则

（1）物体的运动是

(a)匀速直线运动；　(b)匀加速直线运动；
(c)平抛运动；　(d)变加速曲线运动。

答(b)

（2）物体运动的轨迹是

(a)直线；　(b)抛物线；
(c)双曲线；　(d)圆弧。

答(a)

（3）物体运动的加速度的大小是

(a)a_1+a_2；　　(b)a_1；

(c)a_2；　　(d)$\sqrt{a_1^2+a_2^2}$。

答(d)

737．质量为 m 的质点，静止在直角坐标系的原点 O 上。如果同时受到沿 O_x、O_y 轴方向的恒力 F_x 和 F_y 的作用，则在时间 t 末质点距原点的距离是

(a)$\frac{1}{2}\cdot\frac{F_x}{m}t^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{F_y}{m}t^2$；

(b)$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{F_x}{m}t^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{F_y}{m}t^2\right)^{1/2}$；

(c)$\frac{\sqrt{F_x^2+F_y^2}}{2m}t^2$；

(d)$\frac{F_x+F_y t_2}{2m}$。

答(c)

738．如图所示，板 B 和滑块 A 质量相等，板 B 用绳拴在倾角为 a 的斜面顶端上方，滑块 A 沿斜面加速下滑。如果 B、A 之间以及 A 和斜面之间的摩擦系数都是μ，则滑块 A 的加速度是

(a)g(sina—3μcosa)；　　(b)g(sina—2μcosa)；

(c)g(sina—μcosa)；　　(d)g(tga—μcosa)。

答(a)

739．如图所示，手提一根不计质量的、下端挂有物体的弹簧，竖直向上作加速运动。当手突然停止运动的瞬间，物体将

(a)立即处于静止状态；　　(b)向上作加速运动；

(c)向上作匀速运动；　　(d)向上作减速运动。

答(b)

740．金属小桶下部钻两个小孔 A、B，当筒内盛水时，水从 A、B 孔喷出如下页左图所示。如果撒手让小筒自由下落，如果空气阻力可以忽略，则在下落的过程中

(a)水继续以相同的速度喷出；

(b)水将不再从小孔中喷出；

(c)水将以更大的速度喷出；

(d)水将以较小的速度喷出。

答(b)

741．用一个和水平面成 a 角的恒力 F 推动木箱向前加速滑行如右上图所示。木箱重力为 G，它跟水平面间的滑动摩擦系数为μ，则木箱受到的摩擦力的大小等于

(a)Fcosa·μ；　　(b)（F·sina+G）μ；

(c)（F+G）μ；　　(d)（G-Fsina）μ。

答(b)

742．质量为 m 的物体放在水平面上，受到如图所示的两个力作用，

当两个力都等于mg时，物体加速度a的大小恰好等于$\frac{1}{2}g$，物体跟

跟水平面间的滑动摩擦系为μ为

(a)0.25； (b)0.5；

(c)0.75； (d)0（即水平面是光滑的）。

答((b)

743．在粗糙的水平面上，一个质量为M的物体在水平恒力F的作用下由静止开始运动。经过时间t后，速度为v。如果要使物体的速度增到2v，可采用下面哪几种方法？

(a)将物体的质量减为原来的1/2，其他条件不变；

(b)将水平恒力增到2F，其他条件不变；

(c)将时间增到2t，其他条件不变；

(d)将物体质量、水平恒力和时间都同时增加为原来的两倍。

答(c)、(d)

744．以相同的作用力作用在原来静止的两个质量不同的物体上，在没有摩擦的条件下，在相同的时间内，两物体位移的比是K_1、平均速度的比是K_2和加速度的比是K_3应有关系是

(a)$K_1=K_2\neq K_3$； (b)$K_3=K_2\neq K_1$；

(c)$K_3=K_1\neq K_2$； (d)$K_1=K_2=K_3$。

答(d)

745．质量为m_A和m_B的两个物体以相同的初速度在同一水平面上滑行，摩擦系数相同，则静止前滑行的时间比为

(a)$m_A:m_B$ (b)$\sqrt{m_A}:\sqrt{m_B}$

(c)1:1 (d) $\sqrt{m_B}:\sqrt{m_A}$

(e)$m_B:m_A$。

答(c)

746．质量为m千克开口向上的金属盒，以v_0米/秒的初速度在水平面上最多能够滑行s米。如果在盒中填满橡皮泥，使它的质量变为2m千仍以初速度v_0米/秒在同一水平面上滑行，则它最多能滑行

(a)$\frac{s}{2}$米； (b)2s米；

(c)$\frac{s}{4}$米； (d)s米。

答(d)

747．A为实心木球；B是形状大小和A相同的实心铁球；C是质量和形状大小和A一样的空心铁球。三球同时从同一高度从静止开始下落，如果受到阻力相同。则三球落地的时间是

(a)相同；

(b)B先落地，A最后落地；

(c)A、B同时落地，C最后落地；

(d)A、C同时落地，B在A、C前落地。

答(d)

748．竖直向上抛出的物体在上升的过程中由于受到空气阻力，加速度的大小为$\frac{3}{2}$g，如果所受阻力不变，则此物体在下降阶段中的加速度的大小为

(a)$\frac{3}{2}$g；　　(b)g；

(c)$\frac{1}{2}$g；　　(d)3g。

答(c)

749．竖直向上发射枪弹，已知空气的阻力跟速度的平方成正比。问子弹从离开枪口到落到地面的过程中

(a)离开枪口时加速度最小，到达最高点时加速度最大；

(b)离开枪口时加速度最小，到达落地点时加速度最大；

(c)离开枪口时加速度最大，到达最高点时加速度最小；

(d)离开枪口时加速度最大，到达落地点时加速度最小；

(e)到达最高点时加速度最小，到达落地点时加速度最大。

答(d)

750．物块 m 以 v_0 从斜面底冲上有摩擦的斜面，如果它的加速度为 $a_上$，如图（1）所示；仍然是这块物块，自原斜面某处自行滑下，如果它的加速度为 $a_下$，如图（2）所示。那末 $a_下$和 $a_上$的大小相比较是

(a)$a_上>a_下$；　　(b)$a_上=a_下$；

(c)$a_上<a_下$；　　(d)无法确定。

答(a)

751．在倾角为 30°的光滑斜面上，用平行于斜面向上的力 F 把质量为 m 的物体加速上推，它的加速度大小等于不加力 F 时物体下滑的加速度，则力 F 等于

(a)$\frac{1}{2}$mg；　　(b)mg；

(c)$\frac{3}{2}$mg；　　(d)2mg。

答(b)

752．静止的皮带运输机上有一块木块，正以某一速度匀速下滑。当传送带突然向上开始后，木块运动的情况哪一种说法是正确的？

(a)传送带突然开动。将木块带动，使它获得一个向上的加速度，木块将向上运动；

(b)木块下滑和传送带的速度无关，木块下落的时间不变；

(c)因传送带的运动减小了摩擦，木块下落的时间将减短；

(d)因素太多，无法确定。

答(b)

753．原来静止的物体受到如图所示的力的作用。下列四个图象中和图对应的速度图线是

(a)如图（1）所示；　　(b)如图（2）所示；

(c)如图（3）所示；　　(d)如图（4）所示。

答(b)

754．物体自高度为 H 的 A 点，沿不同长度的斜面下滑，斜面是光滑的，如图所示。物体自静止开始滑到斜面末端时的速度是哪个最大？

(a)60°； (b)45°； (c)30°；

(d)15°； (e)都一样。

答(e)

755．上题中物体滑到斜面底端时所用时间最长的是

(a)60°； (b)45°； (c)30°；

(d)15°； (e)都一样。

答(d)

756．如图所示，光滑的直角斜面，底 AO 为定长，当斜面和底的交角

(a)等于 45°时，物体在斜面顶端从静止开始滑下的时间最少；

(b)等于 30°和 60°时，物体在斜面顶端从静止开始滑下的时间最少；

(c)越是接近 90°时，物体在斜面顶端从静止开始滑下的时间越少；

(d)不论等于多大，物体在斜面顶端从静止开始滑下的时间都相等。

757．汽车运载一个物体，它的质量为 500 千克。物体和汽车接触面之间的静摩擦系数为 0.3，滑动摩擦系数为 0.25。当汽车以 3.5 米/秒^{2}的加速度在水平方向上作匀减速运动时，汽车对物体的摩擦力是

(a)滑动摩擦力，方向跟汽车行驶的方向相反；

(b)静摩擦力，方向跟汽车行驶的方向相同；

(c)滑动摩擦力，方向跟汽车行驶的方向相同；

(d)静摩擦力，方向跟汽车行驶的方向相反。

答(a)

758．一个恒力 F 作用在质量为 m_1 的物体上，产生的加速度为 a_1；作用在质量为 m_2 的物体上，产生的加速度为 a_2，如果这个恒力 F 作用在质量为（m_1+m_2）的物体上，产生的加速度 a 是

(a)a_1+a_2； (b)$\frac{a_1+a_2}{2}$；

(c)$\sqrt{a_1\cdot a_2}$； (d)$\frac{a_1\cdot a_2}{a_1+a_2}$；

答(d)

759．有 A、B、C 三个物体，质量分别为 m_A、m_B、m_C，并知 $m_C=m_A+m_B$。当这三个物体分别受到相同的力作用，所得的加速度分别为 a_A、a_B、a_C。那么，这三个加速度之间有下面哪一种关系

(a)$a_C=a_A+a_B$； (b)$a_C=|a_A-a_B|$；

(c)$a_C=\sqrt{a_A\cdot a_B}$； (d)$a_C=\frac{a_A\cdot a_B}{a_A+a_B}$。

答(d)

760．如图所示，小车上固定着一个光滑的斜面，斜面的倾角为 a，小车恒定的加速度向前运动。有一个物体放在斜面上，相对斜面静止。

此时这个物体相对地面的加速度 a_0 的大小应等于

(a)gsina；　　(b)gcosa；

(c)gtga；　　(d)gctga。

答(c)

上题中，如果小车的加速度小于 a_0，则在小车向前速的过程中，物体将会

(a)沿斜面向下滑动；　　(b)静止在斜面上；

(c)沿斜面向上滑动；　　(d)脱离斜面作抛体运动。

答(a)

上题中，如果小车的加速度大于 a_0，则物体将会

(a)沿斜面向下滑动；　　(b)静止在斜面上；

(c)沿斜面向上滑动；　　(d)脱离斜面作抛体运动。

答(c)

761．如图所示，三个质量相同，形状相同的斜面，放在地面上。另有三个质量相同的小物体分别从斜面顶端沿斜面滑下。由于小物体斜面间的摩擦不同，第一个小物体匀加速下滑；第二个小物体匀速下滑；第三个小物体以初速 v_0 匀减速下滑。三个斜面都不动。则下滑过程中斜面对地面压力大小的顺序是

(a)$N_1=N_2=N_3$；　　(b)$N_1<N_2<N_3$；

(c)$N_1>N_2>N_3$；　　(d)$N_1<N_2=N_3$=物体重力。

答(b)

762．一块长直木板上面放一块铁块，从水平位置开始缓慢地抬起长木板的一端，另一端不动，如图所示。以下关于铁块所受的摩擦力叙述哪一个是正确的？

(a)铁块受到摩擦力随抬起角度增大而逐渐变小；

(b)铁块受到摩擦力随抬起角度的增大而增大。当铁块开始滑动以后，随着抬起角度继续增大而减小。

(c)抬起木板过程中，在铁块开始滑动之前摩擦力大小不变，开始滑动以后摩擦力随抬起角度增大而减小。

(d)抬起木板过程中，在铁块开始滑动之前摩擦力大小是随抬起角度增大而减小的，一旦铁块开始滑动，摩擦力大小就不随抬起角度增大而变化了。

答(b)

763．有两个物体，质量分别为 m_1 和 m_2。m_1 原来静止，m_2 以速度 v 向右运动，如图所示。如果对它们加上完全相同的作用力 F，则在如下的条件中，哪些能使它们的速度达到相同：

(a)F 方向向右，$m_1\geq m_2$；

(b)F 方向向右，$m_1<m_2$；

(c)F 方向向左，$m_1>m_2$；

(d)F 方向任意，$m_1=m_2$；

答(b)、(c)

764．在上题中，如果 m_1 和 m_2 受到完全相同的作用力 F，且始终跟 m_2

和速度 v 垂直，则

(a)当 $m_1>m_2$ 时，它们的速度可能相同；

(b)当 $m_1=m_2$ 时，它们的速度可能相同；

(c)当 $m_1<m_2$ 时，它们的速度可能相同；

(d)不管 m_1 和 m_2 取任何值，经过一定时间后，它们的速度到某一时刻总可能相同；

(e)m_1 和 m_2 不论取何值，都不可能使它们的速度相同。

答(e)

765．下列关于力的叙述中，哪些是正确的？

(a)施力物体同时一定是受力物体；

(b)作用力和反作用力是一对平衡力；

(c)作用力和反作用力是同一种性质的力；

(d)一对平衡力一定是同一种性质的力。

答(a)、(c)

766．物体 A 静止地放在水平面上，下列说法哪些是正确的？

(a)A 物体受到的重力和桌面对 A 的弹力是一对作用力和反作用力；

(b)A 物体受到的重力和桌面对 A 的弹力是一对平衡力；

(c)A 对桌面的压力就是 A 所受的重力；

(d)A 对桌面的压力和桌面对 A 的弹力是一对作用力和反作用力；

(e)A 对桌面的压力和桌面对 A 的弹力是一对平衡力。

答(b)、(d)

767．下述关于力的叙述，正确的是

(a)力是使物体位移增加的原因；

(b)作曲线运动的物体一定受力的作用；

(c)力是物体间的相互作用，因此，重力、弹力、摩擦力总是成对出现的；

(d)两物体间摩擦力，一定有弹力，而且这两种力的方向互相垂直。

答(b)、(c)、(d)

768．一对平衡力和一对作用力和反作用力都是大小相等，方向相反，作用在一条直线上的，但它们的区别是

(a)一对平衡力一定是作用在同一个物体上的，一对作用力和反作用力不可能是作用在同一个物体上的；

(b)一对平衡力不可能是作用在同一个物体上的，一对作用力和反作用力一定是作用在同一个物体上的；

(c)一对平衡力一定是同一种性质的力，一对作用力和反作用力不一定是同一种性质的力；

(d)一对平衡力不一定是同一种性质的力，一对作用力和反作用力一定是同一种性质的力；

(e)一对平衡力中的两个力一定同时产生同时消失，一对作用力和反作用力中的两个力不一定同时产生同时消失；

(f)一对平衡力中的两个力不同时产生同时消失，一对作用力和反作用力一定同时产生，同时消失。

答(a)、(d)、(f)

769．两人分别用 10 牛的力去拉弹簧秤的两端。那么，弹簧秤的读数为

(a)0；　　(b)10 牛；

(c)20 牛；　　(d)5 牛。

答(b)

770．放在光滑斜面上加速下滑的物体受到的力是

(a)重力和斜面支持力；

(b)重力、下滑力和斜面支持力；

(c)重力、斜面支持力和加速力；

(d)重力、斜面支持力、下滑力和正压力。

答(a)

放在不光滑的斜面上加速下滑的物体受到的力是

(a)重力和斜面支持力；

(b)重力、下滑力和斜面支持力；

(c)重力、摩擦力和斜面支持力；

(d)重力、摩擦力、下滑力和斜面支持力；

答(c)

771．质量为 m 的物体，在倾角为θ的粗糙斜面上加速下滑，则物体所受各力的大小或它们间的相互关系是

(a)重力和斜面支持力的反作用力都作用在斜面上；

(b)所谓“下滑力”并不是什么特殊的力，通常是指重力沿斜面的分量 $mg\sin\theta$；

(c)重力是斜面支持力和摩擦力的平衡力；

(d)重力为 mg，斜面支持力 $N=mg\cos\theta$。

答(b)、(d)

772．一个质量为 50 千克的人，站在竖直向上运动着的升降机地板上。他看到升降机上挂着重物的弹簧秤的示数为 40 牛，如图所示。如果弹簧秤下挂着的重物 A 重力为 50 牛，g 取 10 米/秒 ^{2}，这时人对升降机地板的压力

(a)大于 500 牛；　　(b)小于 500 牛；

(c)等于 500 牛；　　(d)上述几种情况都不对

答(b)

773．升降机地板上放一个木箱，质量为 m，当它对地板压力 $N=0.8mg$ 时，升降机可能作以下哪种运动

(a)加速上升；　　(b)加速下降；

(c)减速上升；　　(d)减速下降。

答(b)、(c)

774．物体 M 悬在弹簧秤下，弹簧秤悬在电梯的天花板上，在下列哪种情况下弹簧秤的读数最小？

(a)电梯匀速上升；

(b)电梯匀速上升，加速度的大小为 g/2；

(c)电梯匀减速上升，加速度的大小为 g/2；

(d)电梯匀加速下降，加速度的大小为 g/3；

(e)电梯匀减速下降，加速度的大小为 g/3。

答(c)

775．某人站在一台秤上，当他迅速蹲下时，台秤的读数

(a)先变大，后变小，最后等于它的重力；

(b)先变小，后变大，最后等于它的重力；

(c)变大，最后等于它的重力；

(d)变小，最后等于它的重力。

答(b)

776．如图所示，有一位工人站在地面上用绳子通过定滑轮提起地面上的货物，如果绳子、滑轮质量和摩擦都可以不计，而重物的质量恰好和工人的质量相等，则举物时出现的情形将是

(a)货物被举到最高处，工人仍在原地；

(b)货物先被举到最高处，然后工人也升到最高处；

(c)工人将先升高，然后货物也被举高；

(d)货物和工人同时上升，且处在同一高度。

答(d)

777．一个质量为 M 的人站在地面上，用一只定滑轮将质量为 m 的重物从同处放下，M>m 如图所示。如果重物以加速度 a 下降(a<g)，则人对地面的压力是

(a)(M+m)g-ma；　　(b)M(g-a)-ma；

(c)(M-m)g+ma；　　(d)Mg-ma。

答(c)

778．如图所示，有两条质量相等的有篷小船，用绳子连接（绳子质量可忽略不计）。其中一条船内有人在拉绳子，如果水的阻力不计，下列判断正确的是

(a)绳子两端的拉力不相等。跟有人的船连接的一端拉力大；

(b)根据两船运动的快慢，运动快的船里肯定有人，因为是他用力，船才运动起来的；

(c)运动慢的船里肯定有人，因为绳子对两条船的拉力是相等的，但有人的船质量大，所以加速度小；

(d)无法判断。

答(c)

779．物体 A 的质量为 m_A，放在光滑水平桌面上，如果在绳子的另一端通过一个定滑轮加一个竖直向下的力 F，则物体 A 运动的加速度为 a。将力 F 去掉，在绳子另一端系个一物体 B，B 物的重力和 F 和值相等，那么 A 物体的加速度

(a)仍为 a；　　(b)比 a 小；

(c)比 a 大；　　(d)缺少条件，无法判断。

答(b)

780．如图所示，如果 A 物体的重力 G_A 小于 B 物体的重力 G_B。在不计滑轮、绳子和 B 物体跟桌面间的摩擦力的情况下，问：

（1）A 物体的运动为

(a)静止不动；　　(b)自由落体运动；

(c)匀速运动；　　(d)匀变速运动。

答(d)

（2）绳对物体的拉力

(a)$T=G_B$；　　　　(b)$T=G_A$；

(c)$T=0$；　　　　(d)$0<T<G_A$。

答(d)

在上题中，如果 B 和桌面间有摩擦，则绳子的拉力可能是

(a)$T>G_A$；　　　　(b)$T=G_A$；

(c)$T<G_A$；　　　　(d)上述答案都对。

答(b)、(c)

781．如图所示，在光滑的水平桌面上有一物体 A，通过绳子、定滑轮和物体 B 相连。假设绳子的质量以及绳子跟定滑轮之间的摩擦力都可忽略不计，绳子不可伸长。如果物体 B 的质量是物体 A 的质量的 3 倍，即 $m_B=3m_A$。那么，物体 A 和 B 的加速度的大小等于

(a)3g；　　　　(b)g；

(c)3g/4；　　　　(d)g/2。

答(c)

782．A、B 二物体放在光滑的水平面上。$m_A=2m_B$，A、B 之间用细绳（质量不计）相连。在 B 上施加一个水平向右的力 F，当把这个力 F 改为水平向左并作用在 A 上，则前后两种情况下绳子张力的比应为

(a)2∶1；　　　　(b)1∶1

(c)1∶2；　　　　(d)3∶1

答(a)

783．如图所示，A、B 两个物体在拉力 T_1 的作用下作匀加速运动。$m_B>m_A$，它们跟平面间的摩擦系数相同。试比较拉力 T_1、T_2 的大小

(a)$T_1>T_2$；　　　　(b)$T_1=T_2$；

(c)$T_1<T_2$；　　　　(d)$T_1\neq 0$，$T_2=0$。

答(a)

784．两个质量相同的物体 A 和 B 紧靠在一起并放在光滑的水平桌面上，如图所示。如果它们分别受到水平推力 F_1 和 F_2，如果 $F_1>F_2$，则 A 作用在 B 上力的大小为

(a)F_1；　　　　(b)F_2；

(c)（F_1+F_2）/2；　　　　(d)（F_1-F_2）/2。

答(c)

785．在光滑的水平桌面上放一个物体 A，A 上再放一个物体 B，A、B 间有摩擦。在 B 物体上施加一个水平力 F，使它相对于桌面向右运动。这时物体 A 相对于桌面

(a)向左动；　　　　(b)向右动；

(c)不动；　　　　(d)运动，但运动方向不能判断。

答(b)

786．A、B 二物体以不同的方式叠放在水平面上，如图所示。已知 $m_A<m_B$，所有接触面间的摩擦系数都相同。为了不使 A、B 之间发生相对滑动，则图中所能用的水平最大拉力 F 和 F’相比较，应是

(a)F’>F　　　　(b)F’=F；

(c)F'<F；　　　　　　　　(d)以上三种情况都有可能。

答(b)

787．如图所示，A质量为m，B质量为M，放在光滑的水平面上并紧贴在一起。如果已知M>m，现以水平力F第一次作用在A上，第二次作用在B上，则

(a)两次作用引起物体系的加速度相同，且物体A和物体B之间的相互作用力也相同；

(b)两次作用引起物体系的加速度不相同，且物体A和物体B之间的相互作用力也不相同；

(c)两次作用引起的物体系的加速度相同，但物体A和物体B之间的相互作用力不相同；

(d)两次作用引起的物体系的加速度不相同，但物体A和物体B之间的相互作用力相同。

答(c)

788．如图所示，A、B两个物体用细绳连接，滑轮质量和摩擦都可以不计，A物体的质量为m_A，B物体的质量为m_B，B跟桌面间的摩擦系数为μ，这时两物体的加速度为a。要使绳子的拉力减小到原来的1/3，可以采用的办法是

(a)m_A减小为原来的1/3；

(b)m_B减小为原来的1/3；

(c)m_A和m_B同时减小为原来的1/3；

(d)B和桌面的摩擦系数减小为原来的1/3。

答(c)

789．如图所示，m_1和m_2两个物体通过定滑轮和细绳连结起来，斜面和滑轮都是光滑的，且$m_1>m_2$。那么，m_1将从静止开始

(a)沿斜面向上滑动；

(b)沿斜面向下滑动；

(c)保持静止；

(d)以上三种情况都有可能。

答(d)

在上题中，如果m_1和斜面间的摩擦系数为μ，下列结论中正确的是

(a)当$m_2>m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$时，$m_2$一定向下作加速运动；

(b)当$m_2<m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$时，$m_2$一定向上作加速运动；

(c)当$m_2<m_1(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$时，$m_2$一定向上作加速运动；

(d)当$m_2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\leq m_2\leq m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$时，$m_2$一定处于静止状态。

答(a)、(c)、(d)

790．如图所示，在光滑的斜面上，放着一只质量为m的A盆，A盆用细绳跨过定滑轮和B盘相连,B盘内放着一个质量和A盆质量相等的物体，如果把这个物体改放在A盆中，则系统的加速度跟原来的加速度等值而反向，由此可知B盘的质量一定为

(a)m/2；　　　　　　　　(b)3m/2；

(c)m/4；　　　　　　　(d)m/3。

答(c)

791．质量相等的五个物体 A、B、C、D、E 用很轻的绳子 1、2、3、4 连接，放在光滑的水平桌面上。物体 A 所受的拉力 F 的方向向右，如图所示。

(1)物体 B 所受的合力是；

(2)绳 1 的拉力是；

(3)物体 D 所受的合力是；

(4)绳 3 的拉力是。

(a)F/4；　　　　　　　(b)F/5；

(c)2F/5；　　　　　　　(d)4F/5。

(1)答(b)；(2)答(d)；(3)答(b)；(4)答(c)

792．如图所示，弹簧秤两连各挂有质量为 1 千克的重物，如果滑轮、绳子和弹簧秤的质量和摩擦都可不计，g 取 10 米/秒 ^{2} 则弹簧秤的读数应该是

(a)0 牛；　　　　　　　(b)10 牛；

(c)20 牛；　　　　　　　(d)无法确定。

答(b)

如果右边的重物质量增加到 1.5 千克，则弹簧秤的读数是

(a)5 牛；　　　　　　　(b)12 牛；

(c)12.5 牛；　　　　　　　(d)25 牛。

答(b)

793．如图所示，$m_1=m_2+m_3$，这时杠杆保持平衡。如果把 m_3 移到 m_1 上，杠杆将

(a)沿顺时针方向转动；

(b)沿逆时针方向转动；

(c)仍然保持平衡；

(d)先沿顺时针方向转动，然后沿逆时针方向转动。

答(b)

794．有一块木块 A 托着铁块 B，把它们一起斜上抛（如图所示），如果不计空气阻力，则脱手后它们在上升过程中，铁块受到的力是

(a)重力；

(b)弹力和重力；

(c)摩擦力、重力和弹力；

(d)正压力、弹力和摩擦力。

答(a)

795．在一个容器的底部，放置一只砝码，此容器受力后作斜抛运动。如果在飞行过程中容器作平动，则

(a)在上升阶段容器底部受到砝码的压力；达到最高点时，压力消失；下降时又受到砝码的压力。

(b)在上升阶段容器底部受到砝码的压力；下降时没有受到砝码的压力。

(c)在飞行过程中，容器底部始终受到砝码的压力。

(d)在飞行过程中，容器底部始终没有受到砝码的压力。

答(d)

796．m_A=1 千克，m_B=2 千克，两物体紧密接触放在倾角为 30°的光滑斜面上，让它们同时由静止开始下滑。那么，物体 B 对 A 的作用力是

(a)10 牛； (b)20 牛；

(c)0； (d)17.3 牛；

答(c)

797．如图所示，有 A、B 两物体，$m_A=2m_B$，用细绳连接以后放在光滑的斜面上。在它们下滑的过程中

(a)它们的加速度 a=gsina；

(b)它们的加速度 a<gsina；

(c)细绳的张力 T=0；

(d)细绳的张力$T=\frac{1}{3}m_B g\sin a$。

答(a)、(c)

在上题中，如果两物体和斜面间的摩擦系数都为μ，则在它们下滑的过程中

(a)它们的加速度 a=gsina；

(b)它们的加速度 a<gsina；

(c)细绳的张力 T=0；

(d)细绳的张力$T=\frac{1}{3}(m_B g\sin a-\mu m_B g\cos a)$。

答(b)、(c)

798．如图所示，在光滑的斜面上，用平行于斜面的力 F 拉 m 和 2m 两个用细绳连接的物体。则

(a)当 F>3mgsina 时，物体向上加速运动；

(b)物体向上加速运动时，m 和 2m 间的细绳张力 T 一定大于 2mgsinga；

(c)当 F<3mgsina 时，物体向下加速运动；

(d)物体向下加速运动时,m 和 2m 间的细绳张力 T 一定小于 mgsinθ。

答(a)、(b)、(c)

[提示] 当$F>3mg\sin ga$时，$a=\frac{F-3mg\sin ga}{3m}$。

以m为对象 $F-mg\sin a-T=ma-=\frac{F}{3}-mg\sin a$， $T=\frac{2}{3}F>2mg\sin a$；

当$F<3mg\sin ga$时，$a=\frac{3mg\sin a-F}{3m}$。

以m为对象 $T+mg\sin a-F=ma=mg\sin a-\frac{F}{3}$，

$T=\frac{2}{3}F<2mg\sin a$，不一定小于$mg\sin a$。

799．如图所示，由一个定滑轮和两个动滑轮组成的滑轮组中，滑轮的质量和摩擦都可忽略不计。系统原来是静止的，要提起物体 M，必须满足

(a)m>M；　　　　　　(b)m>M/2；

(c)m>M/4；　　　　　(d)m>M/8。

答(c)

当物体 M 被提起时，它的加速度 q_m 和物体 m 的加速度 a_m 的比值是

(a)1∶1；　　　　　　(b)1∶2；

(c)1∶4；　　　　　　(d)1∶8。

答(c)

800．质量为 m 的小球被两根橡皮筋系在小球上，如图所示。当小球 C 静止时，橡皮筋 AC 处在水平方位上。在下列论断中正确的是

(a)在 AC 被突然剪断的瞬间，BC 长度跟剪断前相等；

(b)在 AC 被突然剪断的瞬间，小球的加速度为零；

(c)在 AC 被突然剪断的瞬间，小球的加速度为 gsinθ；

(d)在 AC 被突然剪断的瞬间，小球的加速度为 gtgθ。

答(a)、(d)

计算题

801．重力是 G 的物体在水平光滑面上受到一个水平方向的恒力 F 作用作加速运动。如果这个物体的初速度是 v_0。问：经过多少时间以后速度增加到 nv_0？

[分析]物体在水平方向的恒力作用下作匀加速运动。根据牛顿第二定律求得加速度 a，再通过运动学公式求得时间 t。

[解答]根据牛顿第二定律和运动学公式

得　$$F = ma = \frac{G}{g}a \quad (1)$$

$$nv_0 = v_0 + at \quad (2)$$

由(1)式得　$$a = \frac{Fg}{G} \quad (3)$$

由(2)式得　$$a = \frac{nv_0 - v_0}{t} = (n-1)\frac{v_0}{t} \quad (4)$$

由(3)、(4)式得　$$t = \frac{(n-1)Gv_0}{Fg}。$$

802．质量为 1.5 吨的汽车在平直公路上作匀加速直线运动，5 秒钟内速度从 36 千米/小时增加到 54 千米/小时，如果汽车在前进中，遇到的阻力是车重的 0.05 倍。求发动机的牵引力。

[分析]汽车在运动中的受力情况如图所示。从汽车的运动状态运用运动学公式列出方程，再从牛顿第二定律求出牵引力。

[解答]由运动学公式

得 $$a=\frac{v_t-v_0}{t} \quad (1)$$

根据牛顿第二定律

得 $$F-f=ma \quad (2)$$

$$f=kmg \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式联立

得 $$F=kmg+m\cdot\frac{v_t-v_0}{t}$$

$$=0.05\times1.5\times10^3\times9.8\text{牛}+1.5\times10^3\times\frac{15-10}{5}\text{牛}$$

$$=2235\text{牛}。$$

803．质量 m 为 1500 吨的列车以 57.6 千米/小时的速度行驶，从制动到静止所经过的路程 3 为 200 米，试同制动力 f 等于多少？如果使列车制动到静止所经过的路程减小一半，则制动力应增加多少？

[分析]受力情况如图。制动距离减小，制动力将增加。列车末速度 $v_t=0$，在竖直方向上 N-G=0。

[解答]运用运动学公式

$$v_t^2=v_0^2-2as \quad (1)$$

根据牛顿第二定律

$$f=ma \quad (2)$$

$$N-G=0 \quad (3)$$

由(1)、(2)式联立得

$$f=\frac{mv_0^2}{2s}$$

$$=\frac{1500\times10^3\times16^2}{2\times20}\text{牛}=9.6\times10^5\text{牛}$$

f 和 v_0 方向相反。

设制动距离减小一半时的制动力为 f’

则 $$f'=\frac{1500\times10^3\times16^2}{2\times100}=1.92\times10^6\text{牛}$$

$$f'-f=1.92\times10^6\text{牛}-9.6\times10^5\text{牛}=9.6\times10^5\text{牛}。$$

制动力增加 9.6×10^5 牛。

804．水平安置的皮带运输机上放一个质量为 10 千克的工件，试求下列三种情况，作用在工件上的静摩擦力的大小和方向。

(1)工件随皮带一起以 1 米/秒 ^{2} 的加速度作匀加速运动；

(2)工件随皮带一起以 4 米/秒的加速度作匀速运动；

(3)工件随皮带一起以 0.5 米/秒 ^{2} 的加速度作匀减速运动。

[分析]对工件作受力分析后可知，物体的三种运动状态是由皮带作用在它上面的静摩擦力所决定。作匀加速运动时，加速度的方向向前，静摩擦力方向也向前；作匀速运动时，加速度为零，静摩擦力也为零；作匀减速运动时，加速度的方向向后，静摩擦力的方向也向后。

[解答](1)工件随皮带作匀加速运动时，静摩擦力的大小

$f_1=ma_1=10\times1$ 牛=10 牛，

方向向前。

(2)当工件随皮带匀速运动时，$a_2=0$，

$f_2=ma_2=0$。

(3)当工件随皮带作匀减速运动时，静摩擦力的大小

$f_3=ma_3=10\times0.5$ 牛=5 牛，

它的方向向后。

805．质量 m 为 0.2 千克的物体放在水平桌面上，距桌的边沿 s_2 为 1.0 米。物体在 2.0 牛的拉力 F 的作用下，前进了 $s_1=0.60$ 米的位移后把力 F 撤去如图(a)，如果物体跟桌面的摩擦系数 μ 为 0.20，求物体滑出桌边时的速度多大？

[分析]物体在拉力 F 作用下加速前进了 s_1 后，撤去 F 作减速运动，受力情况如图(b)所示。

[解答]根据牛顿第二定律

前进s_1时　$F-\mu mg=ma_1$　(1)

$$v=\sqrt{2a_1s_1}\quad(2)$$

前进s_1后　$\mu mg=ma_2$　(3)

$$v'^2=v^2-2a_2(s_2-s_1)$$

$$v'=\sqrt{v^2-2a_2(s_2-s_1)}\quad(4)$$

由(1)、(2)、(3)、(4)式联立，

得　$$v'=\sqrt{\frac{2Fs_1-2\mu mgs_2}{m}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times2.0\times0.6-2\times0.20\times9.8\times1.0}{0.2}}\text{米/秒}$$

$$=2.8\text{米/秒。}$$

806．滑冰者停止用力后，在平滑的水平冰面上前进了 80 米才停止。如果滑冰者的质量等于 50 千克，冰刀和冰面的摩擦系数为 0.015。求滑冰者停止用力时的速度？

[分析]滑冰者受到三个力的作用，如图所示，其中 N-G=0，滑冰者停止用力后，在水平冰面上作匀减速运动，且 $v_t=0$。

[解答]根据牛顿第二定律

$f=ma$，

$$a=\frac{f}{m}=\frac{\mu mg}{m}=\mu g\quad(1)$$

由运动学公式

$v_0^2=2as$，

$$v_0=\sqrt{2as}\quad(2)$$

由(1)、(2)式得

$$v_0=\sqrt{2\mu gs}=\sqrt{2\times0.015\times9.8\times80}\text{米}/\text{秒}^2=4.85\text{米}/\text{秒}^2。$$

807．木块质量为 8 千克，放在有摩擦的水平地面上，在 2 牛水平拉力作用下，从静止开始作匀加速直线运动，经 5 秒钟位移为 2.5 米。求：

(1)木块运动的加速度多大？所受的摩擦力多大？

(2)如果木块从静止开始运动 5 秒钟后，又加一个水平阻力，木块继续前进 5 米停止，所加阻力多大？

(3)木块从开始运动到停止运动这段时间内的平均速度多大？

[解答]

(1)因为初速为零，所以

$$s=\frac{1}{2}at^2，$$

$$a=\frac{2s}{t^2}=\frac{2\times2.5}{5^2}\text{米}/\text{秒}^2=0.2\text{米}/\text{秒}^2。$$

木块受力情况如图(a)。由牛顿第二定律

$$F-f_1=ma$$

$$f_1=F-ma$$

$$=2\text{牛}-8\times0.2\text{牛}=0.4\text{牛}。$$

(2)木块运动分两个阶段，5 秒内作匀加速运动；5 秒后作匀减速运动[受力情况如图(b)]。

木块 5 秒末速度

$$v_5=a_1t$$

$$=0.2\times5\text{米/秒}=1\text{米/秒}$$

匀减速运动的末速度 $v_t=0$。

$$v_t^2=v_5^2-2a_2s_2，$$

$$a_2=\frac{v_5^2}{2s_2}$$

$$=\frac{1}{2\times5}\text{米}/\text{秒}^2=0.1\text{米}/\text{秒}^2。$$

由牛顿第二定律

得 $$f_1+f_2-F=ma_2，$$

$$f_2=F+ma-f_1$$

$$=2\text{牛}+8\times0.1\text{牛}-0.4\text{牛}=2.4\text{牛}$$

(3)设加阻力 f_2 后到停止运动经时间 t_2

$$v_t=v_5-a_2t_2=0，$$

$$t_2=\frac{v_5}{a_2}=\frac{1}{0.1}\text{秒}=10\text{秒}，$$

$$\bar{v}=\frac{s}{t}=\frac{s_1+s_2}{t}$$

$$=\frac{2.5+5}{5+10}\text{米}/\text{秒}=0.5\text{米}/\text{秒}。$$

808．甲乙两辆摩托车，以相同的速度在平直公路上匀速并排行驶。

从某处开始甲车发动机停止工作，同时乙车加大牵引力以匀加速前进，5 秒后两车相距 20 米。已知两车所受阻力都为本身重力（人车总重）的 1/20，乙车和人总重 2000 牛，（取 g=10 米/秒 ^{2}）求：

(1)甲车的加速度 a_1 多大？

(2)乙车的加速度 a_2 多大？

(3)乙车加速行驶的牵引力 F。

[分析]甲车发动机停止后由于阻力作用，甲车作匀减速运动；乙车由于牵引力大于阻力，乙车作匀加速运动。甲车的加速度可根据牛顿第二定律求得，乙车加速度可以根据运动状况求得，再根据牛顿第二定律求出乙车的牵引力。

[解答]对甲车，运用牛顿第二定律

(1)$f = m_1 a_1$，$f = \frac{1}{20} m_1 g$，$a_1 = \frac{1}{20} g = \frac{1}{20} \times 10$米/秒$^2 = 0.5$米/秒^2。

(2)从某处开始，5秒后甲车前进的路程为

$$s_1 = v_0 t = \frac{1}{2} a_1 t^2。$$

乙车前进的路程为

$$s_2 = v_0 t + \frac{1}{2} a_2 t^2。$$

所以

$$v_0 t + \frac{1}{2} a_2 t_2 - (v_0 t - \frac{1}{2} a_1 t^2) = s_2 - s_1,$$

$$\frac{1}{2} a_2 t^2 + \frac{1}{2} a_1 t^2 = s_2 - s_1,$$

$$a_2 = \frac{2(s_2 - s_1) - a_1 t^2}{t^2}$$

$$= \frac{2 \times 20 - 0.5 \times 5^2}{5^2} \text{米/秒}^2$$

$$= 1.1 \text{米/秒}^2$$

(3)乙车加速时的牵引力为 F，

$$F - f_2 = m_2 a_2,$$

$$F = \frac{1}{20} m_2 g + m_2 a_2$$

$$= \frac{1}{20} \times 2000 \text{牛} + 200 \times 1.1 \text{牛}$$

$$= 320 \text{牛}。$$

809.V-2 火箭的发动机质量为 1.8×10^3 千克。最初向上的推力为 2.6×10^4 牛，试求它最初向上的加速度（设 g=10 米/秒 ^{2}）。

[分析]火箭最初向上运动时受到重力 G 和推力 F 两个力作用，根据牛顿第二定律可以列出方程。

[解答] $F-mg=ma$，

$$a=\frac{F-mg}{m}=\frac{2.6\times10^{4}-1.3\times10^{3}\times10}{1.3\times10^{3}}\text{米/秒}^{2}$$

$$=10\text{米/秒}^{2}\text{。}$$

810．质量为 2 千克的物体从高处下落，经过某一位置时的速度为 5 米/秒，再经过 2 秒测得的速度为 23.4 米/秒，求空气的平均阻力。

[分析]物体在下落过程中受重力 mg 和空气阻力 f，且作加速运动。

[解答]由运动学公式

得 $$a=\frac{v_t-v_0}{t}$$

由牛顿第二定律

得 mg-f=ma

由(1)、(2)式联立

得 $$f=m(g-a)=m(g-\frac{v_t-v_0}{t})$$

$$=2\times\left(9.8-\frac{23.4-5}{2}\right)\text{牛}$$

$$=1.2\text{牛。}$$

811．装有水的桶，质量为 M，放在跟水平面成 a 角的斜面上，如图(a)所示。水桶和斜面之间的摩擦系数等于μ。当水桶沿斜面向下平动时，使水桶中的水面和斜面相平行，求：沿斜面方向作用在水桶上的外力 F。

[分析]水桶中水在上的液元△m 受重力△mg 和垂直于斜面的液体对它的压力△N 的作用，如果液面和斜面平行，液元的合力方向沿斜面向下，即△mgsinga=△ma，a=gsina。水桶的加速度应和桶内液元的加速度相同。

[解答]根据牛顿第二定律，水桶受力情况如图(b)所示。

F+Mgsina-μMgcosa=Ma，

F=Mgsina-Mgsina+μMgcosa

=μMgcosa

作用在水桶上的外力 F 在数值上恰好等于摩擦力。

812．一个质量为 m 的长方体在水平面上运动。起初以 v_0 沿某一方向运动，此时摩擦系数等于μ。当长方体同时又以速度 v_1《v_0 沿垂直于 v_0 的方向移动时，作用在物体上的摩擦力垂直 v_0 方向的分量为多大？

[分析]根据题意，长方体以某个微小的速度 v_1 向垂直 v_0 方向运动，这时长方体的合速度等于 v,在这种情况下长方体受到的摩擦力的方向和 v 的方向相反。

[解答]分解摩擦力，如图所示。

因为 $f_1=f\sin a$，v_1《v_0，$\sin a\approx tga$，

所以 $$f_1=ftga=f\cdot\frac{v_1}{v_0}=\mu mg\cdot\frac{v_1}{v_0}\text{。}$$

可见，作用在物体上的摩擦力垂直 v_0 方向的分量的大小跟这两个速

度大小的比值成正比。

813．有人沿和水平线成 a 角的方向，用力拉一个质量为 m 的木箱，使它匀加速前进，加速度为 a，木箱跟地面间摩擦系数为μ。试求：

(1)人的拉力 F；

(2)木箱对地面的压力 N’。

[分析]木箱受到四个力的作用：拉力 F，重力 G，弹力 N，摩擦力 f，如图所示。由于木箱作匀加速运动，加速度方向水平向右，所以取水平向右方向为 x 轴正方向，竖直向上方向为 y 轴正方向，将拉力 F 沿 x 轴上和y轴上分解，根据$\sum F_x = ma_x$，$\sum F_y = ma_y$列出方程。

[解答] $F\cos a - f = ma$ (1)

$F\sin a + N - mg = 0$ (2)

$f = \mu N$ (3)

由(1)、(2)、(3)式联立，

得
$$F = \frac{m(a+\mu g)}{\cos a + \mu\sin a}$$

$$N = mg - \frac{m(a+\mu g)}{\cos a + \mu\sin a}\cdot\sin a$$

$$= m\left(g - \frac{a+\mu g}{\operatorname{ctg} a + \mu}\right)。$$

由牛顿第三定律可知，木箱对地面的压力 N′和 N 大小相等、方向相反。

814．有人在冰面上用力 F 推质量为 400 千克的物体，力的方向和冰面成 30°角，如图(a)所示。如果推力为 294 牛，冰面跟物体的摩擦系数μ为 0.048，求物体的加速度。

[分析]物体受到四个力的作用，如图(b)所示。将 F 正交分解，根据牛顿第二定律列出方程。

[解答]$F\cos30° - f = ma$ (1)

$N - mg - F\sin30° = 0$ (2)

$f = \mu N$ (3)

三式联立后，

解得
$$a = \frac{F\cos30° - \mu(mg + F\sin30°)}{m}$$

$$= \frac{294\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.048\times(400\times9.8 - 294\times\frac{1}{2})}{400}\text{米/秒}^2$$

$$= 0.148\text{米/秒}^2$$

815．水平地面上有一个 200 千克的木箱，木箱和地面间的摩擦系数为 0.1，在木箱上加一个和水平方向成 30°角的推力 F，如图(a)所示。求：

(1)木箱匀速前进时推力 F_1 多大？

(2)使木箱以加速度 a_2=0.98 米/秒^{2}作匀加速运动时的推力 F_2 多大？

(3)如果使木箱从静止开始以加速度 a_2 作匀加速运动，前进 10 秒后，撤去推力，木箱经多长时间停下来？

[分析]木箱受到四个力的作用，如图(b)所示。木箱匀速前进时，加速度 $a_1=0$；$\Sigma F_x=0$，当 $\Sigma F_x>0$ 时，木箱将加速前进；前进过程中如果撤去推力 F，木箱由于摩擦力的作用作匀减速运动，加速度的方向和运动方向相反。

[解答]（1）木箱匀速前进，$a_1=0$，则

$$F_1\cos30°-f_1=0 \tag{1}$$

$$N_1-mg-F_1\sin30°=0 \tag{2}$$

$$f_1=\mu N_1 \tag{3}$$

联立后，

解得 $$F_1=\frac{\mu mg}{\cos30°-\mu\sin30°}=\frac{0.1\times200\times9.8}{\frac{\sqrt{3}}{2}-0.1\times\frac{1}{2}}\text{牛}$$

$$=240.19\text{牛}。$$

（2）木箱以加速度 $a_2=0.98$ 米/秒^{2}作匀加速运动，根据牛顿第二定律

$$F_2\cos30°-f_2=ma_2 \tag{4}$$

$$N_2-mg-F_2\sin30°=0 \tag{5}$$

$$f_2=\mu N_2 \tag{6}$$

联立后，

解得 $$F_2=\frac{ma_2+\mu mg}{\cos30°-\mu\sin30°}=\frac{200\times0.98+0.1\times200\times9.8}{\frac{\sqrt{3}}{2}-0.1\times\frac{1}{2}}\text{牛}$$

$$=480.39\text{牛}$$

（3）加速 10 秒后，撤去推力，方程为

$$f_3=ma_2 \tag{7}$$

$$f_3=\mu N_3 \tag{8}$$

$$N_3-mg=0 \tag{9}$$

联立后，

解得 $\mu mg=ma_3$，

$a_3=\mu g=0.1\times9.8$ 米/秒^2

$=0.98$ 米/秒^2。

10 秒后的速度 $v=a_2t=0.98\times10$ 米/秒

$=9.8$ 米/秒。

木箱经 t’的时间停止，则 $v=a_3t'$，

$$t'=\frac{v}{a_3}=\frac{9.8}{0.98}\text{秒}$$

$$=10\text{秒}。$$

816．有一个质量为 60 千克的物体，和水平地面的滑动摩擦系数为

0.2，一个人用和地面成 30°角的力 F_1 拉它，另一个人用和地面成 30°角的力 F_2 推它，如图(a)。已知 F_1=392 牛，F_2=196 牛。求物体运动的加速度。

[分析]将 F_1 和 F_2 作正交分解。

[解答]物体的受力情况如图(b)所示，由牛顿第二定律

得 $F_1\cos30°+F_2\cos30°-f=ma$ (1)

$N+F_1\sin30°-F_1\sin30°-mg=0$ (2)

$f=\mu N$ (3)

联立上述三式，得

$$a=\frac{(F_1+F_2)\cos30°-\mu mg-\mu(F_2-F_1)\sin30°}{m}$$

$$=\frac{(392+196)\times\frac{\sqrt{3}}{2}-0.2\times60\times9.8-0.2\times(196-392)\times\frac{1}{2}}{60}\text{米/秒}^2$$

$$=6.85\text{米/秒}^2。$$

817．一个质量为 m 的拖把，把柄和竖直方向成θ角。令 μ_8 和 μ_k 分别为拖把和地板间的静摩擦系数和滑动摩擦系数，忽略柄的质量。求：（1）使拖把在地板上以恒定的加速度 g/2 滑动，沿把柄的方向必须施加多大的力？（2）试证：如果把柄和竖直方向的夹角小于某一个角 θ_0，则不论沿着把柄的方向施加多大推力，都不能使拖把在地板上滑动，这个 θ_0 应有多大？

[解答]（1）由图(a)可见，当沿把柄施加推力时

$$F\sin\theta-f=\frac{mg}{2} \quad (1)$$

$$N-mg-F\cos\theta=0 \quad (2)$$

$$f=\mu_k N=\mu_k(mg+F\cos\theta) \quad (3)$$

解上述三式

得 $$F=\frac{(0.5+\mu_k)mg}{\sin\theta-\mu_k\cos\theta}。 \quad (4)$$

由图(b)可见，当沿把柄施加拉力时

$$F\sin\theta-f=\frac{mg}{2} \quad (5)$$

$$N+F\cos\theta-mg=0 \quad (6)$$

$$f=\mu_k N=\mu_k(mg-F\cos\theta) \quad (7)$$

解上述三式

得 $$F=\frac{(0.5+\mu_k)mg}{\sin\theta+\mu_k\cos\theta} \quad (8)$$

(2)由(4)式可知

当 $\sin\theta-\mu_k\cos\theta=0$ 时，F=∞。即沿拖把方向不论施加多大的推力，拖把不动。此时只存在静摩擦力 μ_8，如果把这时力 F 和竖直方向的夹角定为 θ_0。则有 $\sin_\theta-\mu_8\cos\theta_0=0$，

$$\theta_0=tg^{-1}\mu_8。$$

818．在竖直导轨上有一个质量为 m 的工件，令以力 F 沿跟水平成 a 角的方向推工件，使它作竖直向上的匀加速运动。如果工件和导轨间的滑动摩擦系数为μ，求工件获得的加速度多大？

[分析]工件受到四个力作用，如图所示。加速度 a 的方向竖直向上。将 F 分解为沿加速度 a 的方向和垂直加速度 a 的方向的两个分量，列出两个方程。

[解答]由牛顿第二定律

得 $F\sin a-mg-f=ma$ (1)

$F\cos a-N=0$ (2)

$f=\mu N$ (3)

由(1)、(2)、(3)式联立，

得 $a=\dfrac{F(\sin a-\mu\cos a)-mg}{m}$。

819．起重机的钢丝吊着 4 吨的货物以 2 米/秒^{2}的加速度匀减速上升，货物上升过程中所受空气阻力为 200 牛，求钢索的拉力多大？

[解答]货物的受力情况如图，有：拉力 F，重力 G，空气阻力 f。加速度方向和运动方向相反。

根据牛顿第二定律

$G+f-F=ma$，

$F=G+f-ma$

$=m(g-a)+f$

$=4000\times(9.8-2)$牛$+200$牛

$=31400$ 牛。

820．一个质量是 50 千克的人，站在矿井的升降机中，试求在下述的情况中，人对升降机地板的压力。

(1)升降机静止不动，匀速上升或下降；

(2)升降机以 4.9 米/秒^{2}的加速度匀加速上升或匀减速下降；

(3)升降机以 4.9 米/秒^{2}的加速度匀加速下降或匀减速上升；

(4)升降机自由下落。

[分析]由于人和升降机一起运动，在研究二者的整体运动时，我们可以把人和升降机作为一个物体来考虑，但在分析人和升降机间的相互作用时，就必须把人和升降机隔离开来，分别研究人和升降机的受力情况，才能够利用牛顿第二运动定律来解决。根据题目的条件，选取人作研究对象。人共受两个力，重力 G 和弹力 N，即地板对人的支持力，它的反作用力就是人对地板的压力 N’。

[解答](1)当升降机静止不动、匀速上升或下降时，人的运动特点是加速度 a=0，合外力为零，如图(a)所示。

$mg-N_1=0$

$N_1=mg=50\times9.8$ 牛$=490$ 牛。

由第三定律知$N_1'=$牛，方向向下。

(2)当升降机匀加速上升或匀减速下降时，人的运动特点是加速度 a 的方向向上，合外力方向向上。如图(b)所示。

N_2-mg=ma，

N_2=m(g+a)

=50×(9.8+4.9)牛

=735 牛。

$N'_2 = 735$牛，方向向下。

(3)当升降机匀加速下降或匀减速上升时，人的运动特点是加速度 a 的方向向下，合外力方向向下，如图(c)所示。

mg-N_3=ma，

N_3=m(g-a)

=50×(9.8-4.9)牛

=245 牛。

$N'_3 = 245$牛，方向向下。

(4)当升降机自由下落时，人也做自由落体运动，加速度为 g，如图(d)所示。

mg-N_4=mg，

N_4=0。

N’4=0。

821、质量为 60 千克的人，站在运动电梯里的台秤上，台秤的指数为 539 牛，问电梯的加速度是多少？是上升还是下降？

[分析]60 千克的人重 588 牛，现在对台秤的压力是 539 牛，根据牛顿第三定律，台秤对人的压力也是 539 牛，方向向上。由此可见，人受到的压力 N 小于人的重力，合力方向竖直向下，电梯加速度的方向竖直向下。受力情况和加速度方向如图所示。

[解答]根据牛顿第二定律

$$mg - N = ma,$$

$$a = \frac{mg - N}{m} = \frac{60 \times 9.8 - 539}{60}\text{米} / \text{秒}^2$$

$$= 0.82\text{米} / \text{秒}^2$$

电梯作匀减速上升或匀加速下降运动时，加速度方向都向下，人对电梯的压力都小于人的重力(失重)。所以电梯不论是上升还是下降，都可能出现失重现象。

822、当电梯以 g/3 的加速度下降时，电梯中质量为 M 的人开始以相对于电梯为 2g/3 的加速度上举一个质量为 m 的物体，这时人对电梯地板的压力是多少？

[分析]根据题意，物体在非惯性系中作加速运动，向上的加速度 2g/3 是相对于电梯而言的。如果以地面为参照系进行计算，人的加速度 a_1=g/3(向下)，物体的加速度 a_2=2g/3-g/3=g/3(向上)。人和物体受力情况如图所示。设人对物体的力为 T。

[解答]根据牛顿第二定律

对物体　　T-mg=ma_1　　(1)

对人　　　　$Mg+T-N=Ma_1$　　　　(2)

由(1)式得　$T=m(a_2+g)=\frac{4}{3}mg$　　(3)

把(3)式代入(2)式得$N=M(g-a_1)+m(g+a_2)$

$$=\frac{2}{3}(M+2m)g.$$

823、气球下吊一个重为 G 的重物，开始气球以加速度 a 匀加速上升。问：吊着的重物增加多少时，才能使气球以同样的加速度匀加速下降？(设空气阻力不计，气球本身重力不计。)

[分析]气球受到升力和重力的作用，当升力大于重力，气球向上作加速运动；当重力大于升力时，气球向下作匀加速运动。

[解答]设气球的升力为 F，增加的重物的重力为 G’，

气球上升时　　$F-G=\frac{G}{g}\cdot a$　　(1)

气球下降时　　$G+G-F=\frac{G+G}{g}\cdot a$　　(2)

联立(1)、(2)式求得　　$G'=\frac{2gG}{g-a}$。

824、降落伞全部打开时，所受的阻力跟速度平方成正比(比例系数 k=20 牛·秒^2/米^2)。如果跳伞运动员的质量为 72 千克，试问他从很高处全部打开降落伞后落地的速度跟他不用降落伞从多大高度 h 处跳下落地时的速度相等？(设不用降落伞下落时空气阻力不计)

[分析]降落伞全部打开时，由于阻力跟速度平方成正比，所以随着下落速度的增大，阻力也增大，向下的加速度减小，但速度仍增大，阻力又增大。当阻力增大到跟重力相等时，加速度为零，这时速度不再增大，达到最大值。此后就以这个速度匀速下降直到地面。在不计空气阻力的情况下运动员不用降落伞跳下时，是作自由落体运动。

[解答]跳伞运动员落地时的速度 v，就是伞全部张开下落过程中的最大速度。这时他所受的合力为零。

$mg-f=0$。

因为　　$f=kv^2$，

所以　　$mg-kv^2=0$。

$$v^2=\frac{mg}{k}\qquad(1)$$

运动员不用降落伞，从 h 高处跳下

$$v^2=2gh\qquad(2)$$

由（1）式和（2）式得　$h=\frac{m}{2k}$

$$=\frac{72}{2\times20}米=1.8米。$$

825、一个气球的质量 m_1 为 200 克，另有质量 m_2 为 50 克的重物系在气球上，气球以 10 米/秒的速度竖直匀速上升，当升高到 400 米时，重物税离气球，求当重物落地时气球离地面的高度。(设气球所受升力不变，空气阻力不计，g 取 10

米/秒 ^{2})

[解答]设重物由 400 米高处脱离气球后落地所需时间为 t，则

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2,$$

$$-400 = 10t - \frac{1}{2}\times 10\times t^2.$$

解得 t=10 秒　t'=-8 秒(舍去)。

在这 10 秒内气球继续上升，根据牛顿第二定律：

$$F_{升}-m_1g=m_1a \quad (1)$$

在匀速上升时　$F_{升}=(m_1+m_2)g$　(2)

由（1）式和（2）式得 $m_1g + m_2g - m_1g = m_1a$。

$$m_2g = m_1a,$$

$$a = \frac{m_2}{m_1}g = \frac{0.05}{0.20}\times 10\text{米}/\text{秒}^2$$

$$= 2.5\text{米}/\text{秒}^2$$

上升高度 $h' = v'_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$$= 10\times 10\text{米} + \frac{1}{2}\times 2.5\times 10^2\text{米} = 225\text{米}$$

则　$H = h + h' = 400\text{米} + 225\text{米} = 625\text{米}$

826、竖直向上抛出一个小球，小球质量 m=150 克，空气阻力为 10 克，小球抛出后 5 秒钟落回原地，设小球在运动中受到的阻力大小不变。求小球抛出时的速度和上升高度。(g=10 米/秒 ^{2})

[分析]小球在上升过程中受到的重力 mg 和阻力 f，方向都向下，作匀减速运动如图(a)；小球在下降过程中，受到的阻力向上，作匀加速运动如图(b)。

[解答]上升过程

$$mg+f=ma_1 \quad (1)$$

下降过程

$$mg-f=ma_2 \quad (2)$$

由（1）式得 $a_1 = \frac{mg+f}{m} = \frac{150\times 10^{-3}\times 10 + 10\times 10^{-3}\times 10}{150\times 10^{-3}}\text{米}/\text{秒}^2$

$$= 10.7\text{米}/\text{秒}^2,$$

由（2）式得 $a_2 = \frac{150\times 10^{-3}\times 10 - 10\times 10^{-3}\times 10}{150\times 10^{-3}}\text{米}/\text{秒}^2$

$$= 9.3\text{米}/\text{秒}^2。$$

设小球抛出时的速度为 v_0，上升时间为 t_1，上升高度为 h，则得

$$h = v_0 t_1 - \frac{1}{2} a_1 t_1^2 \qquad (3)$$

又 $$v = v_0 - a_1 t_1 = 0$$

$$v_0 = a_1 t_1 \qquad (4)$$

由(3)和(4)式联立得 $h = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$ (5)

下降过程中初速为零的匀加速运动,下降时间为t_2则

$$h = \frac{1}{2} a_2 t_2^2 \qquad (6)$$

由（5）式和（6）式可得 $a_1 t_1^2 = a_2 t_2^2$。

$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{a_2}{a_1} = 0.87$，$t_2 = 1.07 t_1$，

$t_1 + t_2 = 5$秒。

$t_1 = 2.42$秒，$t_2 = 2.58$秒。

小球上升高度由（5）式可得

$h = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} \times 10.7 \times 2.42^2$ 米

$= 31.33$米。

抛出时初速度由(4)式可得

$v_0 = a_1 t_1 = 10.7 \times 2.42$ 米/秒$= 25.89$ 米/秒。

827、用 20 米/秒的初速度竖直上抛一个 2 千克的物体。由于空气阻力，物体只能达到 19 米的高度。求物体落回地面时的速度大小。(假定在整个运动过程中，物体所受空气阻力的大小不变，取 g=10 米/秒 ^{2})

[分析]物体的运动分为两个阶段。上升阶段和下降阶段，受力情况见图。

[解答]上升阶段，由运动学公式

$v_t^2 - v_0^2 = -2a_1 h$, $\qquad v_t = 0$,

$$a_1 = \frac{v_0^2}{2h} \qquad (1)$$

根据牛顿第二定律

$f + mg = ma_1$,

$f = m(a_1 - g) \qquad (2)$

将(1)式代入(2)式得 $f=m\left(\frac{v_0^2}{2h}-g\right)$ (3)

下降阶段

$$v'^2_t=2a_2h \quad (4)$$

$$mg-f=ma_2,$$

$$a_2=\frac{mg-f}{m} \quad (5)$$

把(5)式代入(4)式得

$$v't=\sqrt{\frac{2(mg-f)h}{m}} \quad (6)$$

把(3)式代入(6)式得

$$v'_t=\frac{\sqrt{2\left(mg-\frac{mv_0^2+mg}{2h}\right)h}}{m}$$

$$=\sqrt{4gh-v_0^2}$$

$$=\sqrt{4\times10\times19-20^2}\text{米/秒}$$

$$=18.97\text{米/秒}$$

823、一个小球在空气中由 A 点竖直向上抛出，如果落回原处时的速度为抛出速度的一半，问：(1)小球在空气中受到的平均阻力是自身重力的多少倍？(2)小球能上升的最大高度只是它在真空中上升的最大高度的几分之几？(假定小球在上升和下降过程中遇到阻力的大小都是恒值，g 取 10 米/秒 ^{2}。)

[解答]设在空气中由 A 点上抛时初速为 v_0，落回原地时速度为 v_t，上升最大高度为 h。由运动学公式得

上升过程 $v_0^2=2a_1h$ (1)

下降过程 $v_t^2=2a_2h$ (2)

将(1)式除以(2)式得 $\frac{v_0^2}{v_t^2}=\frac{a_1}{a_1}$,即 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{4}{1}$ (3)

由牛顿第二定律可得

上升过程 $mg+f=ma_1$ (4)

下降过程 $mg-f=ma_2$ (5)

由(4)式÷(5)式得 $\frac{mg+f}{mg-f}=\frac{a_1}{a_2}$ (6)

将(3)式代入(6)式得 $mg+f=4mg-4f$,

$$f=\frac{3}{5}mg \quad (7)$$

小球在真空中上升时，只受重力作用，加速度为-g，最大高度为 h’，由运动学公式

$$v_0^2=2gh' \quad (8)$$

由(1)、(8)式得　$a_1h=gh'$

$$\frac{h}{h'}=\frac{g}{a_1} \qquad (9)$$

把(7)式代入(4)式得　$a_1=\frac{8}{5}g \qquad (10)$

把(10)式代入(9)式　$\frac{h}{h'}=\frac{5}{8}$,

$$h=\frac{5}{8}h'$$

829、在水库建筑工地上，有六个人一起打夯，其中四个人牵绳，绳跟夯成60°角，两人扶夯。设每人用力 F 为 300 牛，每次用力的时间为 0.2 秒，夯重 400 牛。求夯上升的高度。又设夯落地时跟地面接触的时间是 0.1 秒，求每次打击地面所受到的力。(取 g 为 10 米/秒^2，空气阻力不计。)

[分析]在用力的时间 0.2 秒内夯向上作匀加速运动，接着在重力作用下向上作匀减速运动，直到速度为零。夯离开原来位置的距离就是夯上升的高度。以后夯作自由落体运动到达地面，和地面接触，受到地面的冲力，在 0.1 秒内速度减小到零。

[解答]在力作用的 0.2 秒内，夯受向上的作用力 $F_总$和向下的重力 mg 的作用。

$$F_总=4F\cos 60°+2F$$
$$=\left(4\times300\times\frac{1}{2}\times2\times300\right)牛$$
$$=1200牛,$$
$$mg=400牛$$

根据牛顿第二定律　F-mg=ma，

$$a=\frac{F-mg}{m}=\frac{1200-400}{40}米/秒^2=20米/秒^2。$$

由运动学公式

$$h_1=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times20\times0.2^2米=0.4米。$$
$$v_1=at=20\times0.2米/秒=4米/秒，$$
$$v_2^2=v_1^2-2gh_2=0，$$
$$h_2=\frac{v_1^2}{2g}=\frac{16}{20}米=0.8米，$$

所以　$H=h_1+h_2=0.4米+0.8米=1.2米。$

夯落地速度

$$v'_1=\sqrt{2gH}。$$

击地加速度

$$a'=\frac{v'_1}{t'}=\frac{\sqrt{2gH}}{t'}。$$

夯击地时受到的力为 F’，根据牛顿第二定律

$$F'-mg=ma',$$

$$F' = m(g + a') = m\left(g + \frac{\sqrt{2gH}}{t'}\right)$$

$$= 40\times\left(10 + \frac{\sqrt{2\times10\times1.2}}{0.1}\right)\text{牛}$$

$$= 2359.6\text{牛。}$$

830、一个重为 G 的物体自 h_1 处匀加速下落，落到雪上后，匀减速地沉入雪层的深度为 h_2。空气对运动物体的阻力等于 f_1。求雪对运动物体的阻力 f_2。

[分析]物体在空气中受到重力 G 和阻力 f_1 作用，物体受力情况如图(a)。落到雪上后物体受重力 G 和雪对物体的阻力 f_2 作用，它的加速度方向和重力方向相反，物体的受力情况如图(b)。

[解答]设下落的方向为正，根据牛顿第二定律

$$G-f_1=ma_1 \qquad (1)$$

$$G-f_2=m(-a_2) \qquad (2)$$

设落地时的速度为 v，由运动学公式得

$$a_1 = \frac{v_2}{2h_1} \qquad (3)$$

$$a_2 = \frac{v_2}{2h_2} \qquad (4)$$

联立(1)、(3)式得

$$\frac{v^2}{2h_1} = \frac{G - f_1}{m} \qquad (5)$$

联立(2)、(4)式得

$$\frac{v^2}{2h_2} = \frac{f_2 - G}{m} \qquad (6)$$

联立(5)、(6)式并化简得

$$f_2 = G\left(\frac{h_1}{h_2} + 1\right) - f_1\frac{h_1}{h_2}\text{。}$$

831、一个质量为 m 的木块，以初速度 v_0 在一个水平面上运动。两个力 F_1 和 F_2 作用在木块上，F_1、F_2 和 v_0 在同一水平面内，它们跟 v_0 方向的夹角分别为 ? $_1$、? $_2$，如图所示。求木块的加速度和速率。

[分析]选取 v_0 方向及垂直 v_0 方向为坐标轴的两个方向，以初始时刻木块的位置为坐标轴的原点。从题意可知，木块在两个力作用下，沿 x 轴方向做初速度为 v_0 的匀加速运动，沿 y 轴方向做初速度为零的匀加速运动。本题应先按牛顿第二定律求出木块加速度，再按运动学公式求出木块的速率。

[解答]木块的加速度

$$\alpha_x=\frac{F_1\cos\alpha_1+F_2\cos\alpha_2}{m},$$

$$\alpha_y=\frac{F_1\sin\alpha_1+F_2\sin\alpha_2}{m},$$

$$\alpha=\sqrt{\alpha_x^2+\alpha_y^2}=\frac{1}{m}\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)}。$$

设α和v_0的夹角为a，则

$$tga=\frac{\alpha_y}{\alpha_x}=\frac{F_1\sin\alpha_1+F_2\sin\alpha_2}{F_1\cos\alpha_1+F_2\cos\alpha_2},$$

$$a=arctg\frac{F_1\sin\alpha_1+F_2\sin\alpha_2}{F_1\cos\alpha_1+F_2\cos\alpha_2}。$$

木块的速率

因为 $v_x=v_0+\alpha_x t, v_y=\alpha_y t$。

所以$v=\sqrt{(v_0+\alpha_x t)^2+(\alpha_y t)^2}$

$$=\sqrt{v_0^2+2v_0\alpha_x+\alpha_2 t_2}$$

$$=\sqrt{v_0^2+2v_0\left(\frac{F_1\cos\alpha_1+F_2\cos\alpha_2}{m}\right)t+\frac{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)}{m_2}t^2}。$$

832、物体沿斜面匀速下滑，已知斜面倾角为?，求物体和斜面间的滑动磨擦系数μ。

[分析]物体受三个力，如图所示，加速度? =0。

[解答]mgsin? -f=0 (1)

N-mgcos? =0 (2)

f=μN (3)

由(1)、(2)、(3)式联立得

μ=tg?。

833、设某种汽车前后轮都是主动轮，为了使汽车能以0.6米/秒^{2}的加速度匀加速无滑动爬上一个倾斜30°角的斜坡，汽车的车轮和路面之间的静磨擦系数至少要多大才行？

[分析]汽车在斜坡上爬行时的动力就是地面对车轮的静磨擦力。因此汽车共受三个力的作用，重力mg、弹力N和最大静磨擦力f，如图所示。加速度?沿斜坡向上。

[解答]根据牛顿第二定律得

f-mgsin30°=ma (1)

N-mgcos30°=0 (2)

f=μN (3)

由(1)、(2)、(3)式联立可得

$$\mu = \frac{a + g\sin\alpha}{g\cos\alpha} = \frac{0.6 + 9.8 \times 0.5}{9.8 \times 0.866}$$
$$= 0.65$$

834、用倾角θ=30°的传送带传送 m=0.5 千克的物体，物体跟传送带间没有滑动。求在下述情况物体所受的力：(1)传送带静止；(2)传送带以 v=3 米/秒的速度匀速向上运动；(3)传送带以 v=3 米/秒的速度匀速向下运动；(4)传送带以 a_1=2 米/秒^{2}的加速度匀加速向上运动；(5)传送带以 a_2=0.5 米/秒^{2}及 a_3=6 米/秒^{2}的加速度匀加速向下运动；(6)当传送带和物体间的磨擦系数是 0.6，传送带以多大的加速度向上运动时，传送带和物体间才开始打滑？

[分析]物体受到重力 mg、磨擦力 f 和弹力 N 三个力的作用，如图所示。取沿斜面方向和垂直斜面的方向确立直角坐标，从上述各运动的特点判定合力方向，列出牛顿第二定律方程。

[解答](1)、(2)、(3)三个小题中物体运动的加速度都为零，合力也都为零。物体相对于斜面有向下运动的趋势，静磨擦力方向沿斜面向上。

mgsinθ-f=0

f=mgsinθ=0.5×9.8×0.5 牛=2.45 牛。

N=mgcosθ=0.5×9.8×0.87 牛=4.26 牛。

mg=4.9 牛。

(4)物体运动加速度 a_1 沿斜面向上，静磨擦力 f_1 的方向和加速度 a_1 的方向相同，由牛顿第二定律得

f_1-mgsinθ=ma_1。

f_1=m(gsinθ+a_1)

=0.5×(9.8×0.5+2)牛=3.45 牛。

N=mgcosθ=4.26 牛。

mg=4.9 牛。

(5)物体运动加速度 a_2 和 a_3 都沿斜面向下，根据牛顿第二定律得

mgsinθ-f=ma，

f=m(gsinθ-a)。

f_2=m(gsinθ-a_2)

=0.5×(9.8×0.5-0.5)牛=2.2 牛。

f_3=m(gsinθ-a_3)

=0.5×(9.8×0.5-6)牛=-0.55 牛。

f_3 方向跟原来假设的方向相反。

N=mgcosθ=4.26 牛，

mg=4.9 牛。

(6)物体随传送带向上作加速运动时，物体的加速度和传送带的加速度相等，当传送带的加速度大于物体的加速度时，物体开始打滑，故传送带的最大加速度不能大于物体可能获得的最大加速度，而后者取决于最大静磨擦力 f_{max}。物体能产生的最大加速度 a_{max} 应满足下面方程。

f_{max}-mgsinθ=ma_{max}　　(1)

f_{max}=μN=? mgcosθ　　(2)

联立(1)、(2)式得

a_{max}=g(? cosθ-sinθ)

=9.8×(0.6×0.87-0.5)米/秒^2

=0.22 米/秒^2。

传送带和物体间不发生打滑的最大加速度为 0.22 米/秒^2。

835、截面为直角三角形的木块 ABC，三边的比 AB：BC：CA=5：4：3。

现将木块按图(a)、(b)所示两种情况固定在水平面上。将一个小木块放在斜面顶端让它从静止开始沿斜面滑下。在图(a)中木块滑下的时间为 2 秒，而在图(b)中木块滑下的时间为 1 秒。求：木块跟斜面间的磨擦系数是多大？(设磨擦系数为μ)

[分析]小木块在(a)、(b)两种情况下，都是作初速为零的匀加速运动，我们可以运用牛顿第二定律列出方程找到加速度。问题是，题中只给出三角形的三条边长的比，不知它们的长度。我们设斜边长为 5s 为，s 为比例常数。

[解答]按图(a)的情况

mgsin? -? mgcos? =ma_1，

gsin? -? gcos? =a_1　　　　(1)

$$L_{AB}=\frac{1}{2}a_1t_1^2,a_1=\frac{2L_{AB}}{t_1^2}\qquad(2)$$

把(2)式代入(1)式。

得　$$g\sin\alpha-mg\cos\alpha=\frac{2L_{AB}}{t_1^2}\qquad(3)$$

按图(b)的情况同理可得

$$g\sin\beta-\mu g\cos\alpha=\frac{2L_{AB}}{t_2^2}\qquad(4)$$

把LAB = 5s米，t1 = 2秒，t2 = 1秒，

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\cos\alpha=\frac{4}{5},\sin\beta=\frac{4}{5},\cos\beta=\frac{3}{5},$$

代入(3)式和(4)式

$$\frac{3}{5}g-\mu g\frac{4}{5}=\frac{2\times5s}{2^2}\qquad(5)$$

$$\frac{4}{5}g-\mu g\frac{3}{5}=\frac{2\times5s}{1^2}\qquad(6)$$

(5)式除以(6)式

$$\frac{0.6-0.8\mu}{0.8-0.6\mu}=0.25，$$

$$\mu=0.62。$$

836、在和水平方向成? 角的斜面上放一个质量为 m 的物体，物体跟斜面间的磨擦系数为? 。今以水平推力 F 作用在物体上，使它以加速度 a 沿着斜面向上作匀加速运动，如图(a)所示。试求推力的大小。

[分析]物体在水平推力 F 作用下沿斜面向上作加速运动。可将推力 F 分解为

沿斜面方向的分力 F_1 和垂直斜面方向的分力 F_2，根据牛顿第二定律列方程，物体共受到四个力的作用，如图(b)所示。

[解答]　　　F_1=Fcos? ，F_2=Fsin? 。

Fcos? -mgsin? -f=ma　　(1)

N-Fsin? -mgcos? =0　　(2)

f=? N　　(3)

联立(1)、(2)、(3)式得

$$F = \frac{ma + mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

837、将质量为 10 千克的小球，挂在倾角为? =30°的光滑斜面上，如图(a)所示。

(1)当斜面以加速度 a=g/3 向右运动时，求绳子受到的拉力及小球对斜面的压力；

(2)当斜面的加速度至少为多大时，小球对斜面的压力为零；

(3)如果使绳子的张力为零，斜面沿水平方向的加速度应向左还是向右，它的最小值至少为多大？

[分析]当斜面以加速度 a 向右运动时，小球受到三个力的作用，重力 mg、拉力 T、弹力 N，如图(b)所示，将 T 和 N 沿水平方向和竖直方向分解；当小球对斜面的压力为零时，小球受到两个力作用，重力 mg、拉力 T’，如图(c)所示，只要将 T’进行正交分解；当绳子张力为零时，小球也受到两个力作用，重力和弹力，如图(d)所示，它们的合力方向向左，因此加速度 a 的方向也向左，可以将 N’进行正交分解。

[解答](1)斜面向右以 a=g/3 运动时，根据牛顿第二定律

Tcos? -Nsin? =ma　　(1)

Tsin? +Ncos? =mg　　(2)

将(1)式×cos? +(2)式×sin?

得

$$T = m(a\cos\theta + g\sin\theta)$$

$$= mg(\frac{1}{3}\cos 30° + \sin 30°)$$

$$= 10\times 9.8\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\text{牛}$$

$$= 77.29\text{牛。}$$

从(2)式得

$$N = \frac{mg - T\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{10\times 9.8 - 77.29\times\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\text{牛} = 68.54\text{牛}$$

(2)当小球对斜面的压力为零时，根据牛顿第二定律

T’cos? =ma　　(3)

T’sin? =mg　　(4)

将(3)式除以(4)式可得

$$\mathrm{ctg}\theta = \frac{a}{g},$$

$$a = g\mathrm{ctg}\theta = 9.3 \times \sqrt{3}\text{米}/\text{秒}^2$$

$$= 16.97\text{米}/\text{秒}^2。$$

(3)当绳子的张力为零时，可列方程

N'cos? =mg (5)

N'sin? =ma (6)

由(5)、(6)式可得

$$a = g\mathrm{tg}\theta = 9.8 \times \frac{\sqrt{3}}{3}\text{米}/\text{秒}^2$$

$$= 5.66\text{米}/\text{秒}^2$$

斜面沿水平方向向左作加速运动。

838、自动扶梯跟水平面成 30°角，梯上立一个人，如图(a)所示。人的质量为 50 千克，人的鞋底跟梯面的静磨擦系数?$_0$=0.5，g=10 米/秒^2。求：

(1)当扶梯匀速运动时，画出人的受力图并指出各力的大小。

(2)当扶梯以 2 米/秒^{2}的加速度上升时，画出人的受力图，并指出各力的大小。

[分析]如图(b)、(c)所示，当人随扶梯作匀速运动时，人和梯面的磨擦可以忽略不计，当人随梯作加速运动时，因加速度方向沿斜面向上，须将 a 沿水平方向和竖直方向分解。人和梯面间有静磨擦力作用，方向水平向右，弹力 N 将大于重力 mg。

[解答](1)当扶梯匀速运动时，人的受力如图(b)所示。

mg=50×10 牛=500 牛，

N_1=mg=500 牛。

(2)当扶梯作加速运动时，人的受力如图(c)所示，重力 mg，弹力 N_2和水平向右的磨擦力 f。加速度 a 沿斜面向上，根据牛顿第二定律

$$f = ma\cos 30° = 50 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\text{牛} = 86.6\text{牛}。$$

$$N_2 - mg = ma\sin 30°,$$

$$N_2 = m(g + a\sin 30°) = 50 \times 11\text{牛} = 550\text{牛}。$$

这时的最大静磨擦力 f_{max}=?$_0N_2$

=0.5×550 牛

=275 牛。

275 牛＞86.6 牛。人不会在梯上打滑。

839、一个物体从高为 h，底边为 b 的斜面顶端由静止开始匀加速滑下，到达斜面底端时速度为 v，求物体和斜面间的磨擦系数?。

[分析]物体沿斜面滑下时的受力情况如图所示。加速度沿斜面向下。

[解答]由牛顿第二定律

mgsinθ-f=ma (1)

N-mgcosθ=0 (2)

$f=\mu N$ (3)

由(1)、(2)、(3)式联立

得 $mg\sin\theta-\mu mg\cos\theta=ma$，

$$\mu=\frac{g\sin\theta-\alpha}{g\cos\theta} \qquad (4)$$

由运动学公式

$$v^3=2aL, a=\frac{v^2}{2L} \qquad (5)$$

$$L^2=b^2+h^2 \qquad (6)$$

由（4）、（5）、（6）式联立

得 $\mu=\dfrac{g\bullet\dfrac{h}{L}-\dfrac{v^2}{2L}}{g\bullet\dfrac{b}{L}}=\dfrac{2gh-v^2}{2gb}$。

840、一个物体在倾角?=30°的斜面上由静止开始下滑100米，需要时间为10秒，求物体跟斜面间的磨擦系数?。

[分析]物体的受力情况如图。

[解答]根据牛顿第二定律

得 $mg\sin\alpha-f=ma$ (1)

$mg\cos\alpha=N$ (2)

$f=\mu N$ (3)

由(1)、(2)、(3)式联立

得 $\mu=\dfrac{g\sin\alpha-a}{g\cos\alpha}$ (4)

由运动学公式

$$s=\frac{1}{2}at^2，a=\frac{2s}{t^2} \qquad (5)$$

将(5)式代入(4)式

得 $\mu=\dfrac{g\sin\alpha-\dfrac{2s}{t^2}}{g\cos\alpha}$

$$=\frac{9.8\times0.5-\dfrac{2\times100}{10^2}}{9.8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=0.34。$$

841、列车的质量是2000吨，沿长为1000米，坡度是0.015的坡道向上行驶。上坡前列车的速度为54千米/小时，上坡的时候列车受到的阻力等于车重的0.003倍，上完坡后列车的速度减小到36千米/小时。求机车的牵引力。(g取10米/秒^2)

[分析]列车上坡时的受力情况如图所示。列车作匀减速运动。坡度很小时，$tg\alpha\approx\sin\alpha=0.015$。

[解答]根据牛顿第二定律

得 $mg\sin\alpha+f-F=ma$ (1)

$f=kmg$ (2)

由运动学公式得

$$v_t^2=v_0^2-2as，a=\frac{v_0^2-v_t^2}{2s} \quad (3)$$

将(2)、(3)式代入(1)式得

$$F=mg(\sin\alpha+k)-\frac{m(v_0^2-v_1^2)}{2s}$$

$$=2000\times10^3\times10(0.015+0.003)\text{牛}-\frac{2000\times10^3(15^2-10^2)}{2\times1000}\text{牛}$$

$$=2.35\times10^5\text{牛}。$$

842、质量为 10 千克的物体，以 20 米/秒的初速度滑上倾角为 30°的斜面，物体和斜面间的滑动磨擦系数为 0.20，求：

(1)物体所受的滑动磨擦力；

(2)物体沿斜面向上运动到静止时的时间；

(3)物体返回原地的速率。(g 取 10 米/秒^2)

[分析]物体向上滑动时作匀减速运动，所受磨擦力的方向沿斜面向下；物体向下滑动时作匀加速运动，滑动磨擦力沿斜面向上，两者加速度的大小是不同的。

[解答] (1) $f=\mu N=\mu mg\cos30°$

$$=0.20\times10\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{牛}=17.3\text{牛}$$

(2)物体向上滑动，根据牛顿第二定律

$$mg\sin\alpha+f=ma_1，$$

$$a_1=\frac{mg\sin\alpha+f}{m}=\frac{10\times10\times\frac{1}{2}+17.3}{10}\text{米/秒}^2$$

$$=6.73\text{米/秒}^2。$$

由运动学公式

$$v_t=v_0-a_1t$$

因为 $v_t=0$

所以 $t=\frac{v_0}{a_1}=\frac{20}{6.73}\text{秒}=2.97\text{秒}$

(3)物体向下加速运动，由牛顿第二定律得

$$mg\sin\alpha - f = ma_2,$$

$$a_2 = \frac{mg\sin\alpha - f}{m}$$

$$= \frac{10\times10\times\frac{1}{2}-17.3}{10}\text{米/秒}^2 = 3.27\text{米/秒}^2\text{。}$$

物体滑下的距离等于物体上滑的距离，

所以 $$\frac{v_0^2}{2a_1} = \frac{v^2}{2a_2}\text{。}$$

$$v = \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\bullet v_0 = \sqrt{\frac{3.27}{6.37}}\times 20\text{米/秒}$$

$$= 13.94\text{米/秒。}$$

843、光滑斜面高 h=400 厘米，一个物体从斜面顶端由静止开始下滑，在 1 秒末到达斜面中点(见图所示)，求斜面的长度。(g 取 10 米/秒 ^{2})

[分析]物体沿光滑斜面下滑，受重力 mg 和弹力 N，下滑加速度 $a=g\sin\alpha$。

[解答]设斜面的长度为 L，由运动学公式

$$s = \frac{1}{2}at^2, s = \frac{L}{2},$$

$$L = at^2 = g\sin\alpha t^2 \qquad (1)$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{L} \qquad (2)$$

由(1)、(2)式联立

得 $$L^2 = ght^2,$$

$$L = \sqrt{gh}\bullet t$$

$$= \sqrt{10\times4}\times1\text{米} = 6.32\text{米。}$$

844、滑雪者和滑雪板共重 750 牛，用 4 米/秒的初速度从高 3 米的桥顶顺坡下滑。桥坡长 20 米，下坡后在水平路面上前进 40 米才停止。求滑雪板跟路面间的磨擦系数。(g=10 米/秒 ^{2})

[分析]滑雪者在斜坡上受到重力 mg，弹力 N_1，滑动磨擦力 f_1 三个力的作用，作匀加速运动，下坡后在水平路面上所受到的磨擦力 f_2 和弹力 N_2 发生了变化，作匀减速运动，如图所示。

[解答]根据牛顿第二定律可知

在斜坡上 $mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=ma_1$，

$$a_1=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha) \qquad (1)$$

在水平路面上 $\mu mg=ma_2$，

$$a_2=\mu g \qquad (2)$$

设到斜坡底端的速度为 v，由运动学公式可得

在斜坡上下滑 $$v_2 = v_0^2 + 2a_1L \qquad (3)$$

在水平路面上　　　　$v^2=2a_2s$　　　　(4)

由(3)、(4)两式可得　$v_0^2+2a_1L=2a_2s$　　　　(5)

将(1)、(2)式代入(5)式得

$$v_0^2+2g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)L=2\mu gs,$$

$$\mu=\frac{v_0^2+2g\sin\alpha\bullet L}{2g(\cos\alpha\bullet L+s)}。\quad \sin\alpha=\frac{h}{L},\quad \cos\alpha=\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L},$$

$$\mu=\frac{v_0^2+2gh}{2g(\sqrt{L^2-h^2}+s)}=\frac{4^2+2\times10\times3}{2\times10(\sqrt{20^2-3^2}+40)}=0.06。$$

845、用初速 v_0 沿倾角为 60°的光滑斜面上抛一个物体，2 秒后物体经过某点 A，再过 4 秒，物体又经过 A 点，求 v_0。如果斜面和物体间的磨擦系数为$1/\sqrt{3}$，用同一个初速沿斜面将物体上抛，物体能否抵达A点，如能抵达 A 点则需要多少时间？(取 g=10 米/秒 ^{2})

[分析]物体在光滑斜面上受到重力 mg 和弹力 N 的作用，作匀减速运动，如图(a)所示。从 A 点到达最高点的时间跟从最高点返回 A 点的时间相等。那么，沿斜面向上到达最高点的时间为 4 秒。运用牛顿第二定律和运动学公式可求得加速度 a 和初速度 v_0。

[解答]根据牛顿第二定律 mgsin60°=ma，

$$a=g\sin60° \qquad (1)$$

由运动学公式　　$v_t=v_0-at$，$v_t=0$，

$$v_0=at \qquad (2)$$

因为　　$t=2秒+\frac{4}{2}秒=4秒$。

(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned}v_0&=gt\sin60°\\&=10\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}米/秒=20\sqrt{3}米/秒\\&=34.6米/秒\end{aligned}$$

如果沿磨擦系数为$1/\sqrt{3}$的斜面上滑，物体受到三个力的作用，如图(b)所示。

根据牛顿定律

$$mg\sin60°+f=ma' \qquad (1)$$

$$f=\mu N=\mu mg\cos60° \qquad (2)$$

由(1)、(2)式得

$$a'=g(\sin60°+\mu\cos60°) \qquad (3)$$

物体能沿斜面上升的最大距离 s_{max}，则

$$v_0^2 = 2a's_{max}$$

$$s_{max} = \frac{v_0^2}{2a'} = \frac{v_0^2}{2g(\sin 60° + \mu\cos 60°)}$$

$$= \frac{(20\sqrt{3})^2}{2\times 10\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}\text{米}$$

$$= 30\sqrt{3}\text{米。}$$

物体第一次到达 A 点时的时间为 2 秒，

有 $$s_A = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

$$= 20\sqrt{3}\times 2\text{米} - \frac{1}{2}\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\text{米}$$

$$= 30\sqrt{3}\text{米。}$$

因为 s_A=s_{max}，即物体恰好能抵达 A 点，且在 A 点速度为零。则有

$$v_0 = a't'$$

$$t' = \frac{v_0}{a'} = \frac{20\sqrt{3}}{10\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}\right)}\text{秒} = 3\text{秒。}$$

846、长 L=10 米的斜面，和水平面间的倾角α=60°，一个物体从斜面顶端由静止下滑，需要时间 t_1=1.70 秒，如果斜面倾角改为 45°，问它下滑所需要的时间 t_2 是多少？

[解答]根据牛顿第二定律

$mg\sin_a - f = m\alpha_1$ (1)

$N - mg\cos\alpha = 0$ (2)

$f = \mu N$ (3)

由(1)、(2)、(3)式联立

得 $a_1 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ (4)

由运动学公式可知

$$L = \frac{1}{2}a_1 t_1^2,$$

$$a_1 = \frac{2L}{t_1^2} = \frac{2\times 10}{1.7^2}\text{米}/\text{秒}^2 = 6.92\text{米}/\text{秒}^2\text{。}$$

将a_1值代入（4）式得

$$\mu = \frac{g\sin 60° - a_1}{g\cos 60°} = \frac{10\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 6.92}{10\times\frac{1}{2}} = 0.35\text{。}$$

如果斜面和水平面间的倾角改为 45°，则

$$a_2=g(\sin45°-\mu\cos45°)$$

$$=10\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0.35\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\text{米/秒}^2$$

$$=4.6\text{米/秒}^2\text{。}$$

又 $$L=\frac{1}{2}a_1t_2^2$$

$$t_2=\sqrt{\frac{2L}{a^2}}=\sqrt{\frac{2\times10}{4.6}}\text{秒}=2.09\text{秒。}$$

847、两个物体质量相同，其中一个物体从倾角为 30°的斜面滑下，另一个物体从同一高度自由下落。设第一个物体滑到斜面底端的速度是自由下落的物体落到同一水平面上时速度的 0.8 倍。求物体跟斜面间的滑动磨擦系数。

[分析]物体 m_1 在斜面上的受力情况如图(a)所示。物体 m_2 只受重力作用，如图(b)所示。m_1 沿斜面滑下的加速度可由牛顿第二定律得出 m_2 的加速度为 g。再运用运动学公式 $v^2=2as$ 联立可解得。

[解答]物体 m_1 沿斜面下滑，它的初速度为零。设斜面长为 L，高为 h。根据牛顿第二定律

$$m_1g\sin30°-\mu m_1g\cos30°=m_1a,$$

$$a=g(\sin30°-\mu\cos30°)\text{。}$$

由运动学公式得

$$v_1=\sqrt{2aL}=\sqrt{2Lg(\sin30°-\mu\cos30°)}\text{。}$$

物体 m_2 从 h 高处自由下落到斜面底端同一平面的速度为 v_2。

$$v_2=\sqrt{2gh},$$

因为 $$v_1=0.8v_2,v_1^2=0.64v_2^2\text{。}$$

所以 $$2Lg(\sin30°-\mu\cos30°)=0.64\times2gh,$$

$$\sin30°-\mu\cos30°=0.64\bullet\frac{h}{L}\text{。}$$

又 $$\frac{h}{L}=\sin30°,$$

则 $$\mu=\frac{\sin30°(1-0.64)}{\cos30°}=0.36\text{tg}30°$$

$$=0.21\text{。}$$

848、两个长度相等，倾角都是 45°的斜面，其中一个是光滑的，另一个是粗糙的。一个物体从粗糙斜面上滑下所用时间是从光滑斜面滑下所用时间的两倍。试求粗糙斜面和物体间的磨擦系数。

[分析]物体沿光滑斜面滑下的加速度 $a_1=g\sin\alpha$，沿粗糙斜面滑下的加速度 a_2 可以从时间比中得到关系，再根据牛顿第二定律列出方程求得磨擦力 f 和弹力 N 的比μ。

[解答]设斜面长为 L，从光滑斜面上滑下所用时间为 t_1；从粗糙斜面上滑下时间为 t_2。

$$\frac{1}{2}a_1t_1^2=\frac{1}{2}a_2t_2^2,\quad \frac{a_2}{a_1}=\frac{t_1^2}{t_2^2}=\frac{1}{4},$$

$$a_2=\frac{1}{4}a_1=\frac{1}{4}g\sin\alpha。$$

物体在粗糙面上的受力情况如图所示。

$$mg\sin\alpha-f=ma_2,\quad f=m(g\sin\alpha-a_2)。$$

$$N-mg\cos\alpha=0,\quad N=mg\cos\alpha。$$

则 $$\mu=\frac{f}{N}=\frac{g\sin\alpha-a_2}{g\cos\alpha}=\frac{g\sin 45°\left(1-\frac{1}{4}\right)}{g\cos 45°}=\frac{3}{4}tg45°$$

$$\mu=0.75。$$

849、一个质量为 m 的物体，在力 F 的作用下沿倾斜角为α、磨擦系数为μ的斜面向上作减速运动。力 F 和斜面成β角，如图(a)所示。物体的初速度为 v_0。当它向上运动到速度为零时，便加速向下运动。从开始运动经过时间 t 物体向下运动的速度达到 v。求时间 t。

[分析]物体在斜面上往返运动，因磨擦力的方向发生变化，所以加速度不同。物体上、下滑动时的受力情况如图(b)所示。

[解答]在向上运动时，根据牛顿第二定律得

$$mg\sin\alpha+f-F\cos\beta=ma_1 \quad (1)$$

$$N+F\sin\beta-mg\cos\alpha=0 \quad (2)$$

$$f=\mu N \quad (3)$$

设向上运动的时间为 t_1，由运动学公式得

$$v_0=a_1t_1 \quad (4)$$

由(1)~(4)式联立得

$$a_1=\frac{mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)-F(\cos\beta+\mu\sin\beta)}{m}$$

$$t_1=\frac{mv_0}{mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)-F(\cos\beta+\mu\sin\beta)}。$$

设向下运动时间为 t_2，在向下运动时，同样可得

$$mg\sin\alpha-f-F\cos\beta=ma_2 \quad (5)$$

$$N+F\sin\beta-mg\cos\alpha=0 \quad (6)$$

$$f=\mu N \quad (7)$$

$$v=a_2t_2 \quad (8)$$

由(5)~(8)式联立可得

$$a_2=\frac{mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-F(\cos\beta-\mu\sin\beta)}{m}，$$

$$t_2=\frac{mv}{mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-F(\cos\beta+\mu\sin\beta)}。$$

$$t=t_1+t_2=\frac{mv_0}{mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)-F(\cos\beta+\mu\sin\beta)}+\frac{mv}{mg(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-F(\cos\beta-\mu\sin\beta)}。$$

850、质量为 m 的物体放在倾角为α的斜面上，物体和斜面间的滑动磨擦系数为μ，如果沿斜面方向加一个推力 F_1，能使物体沿斜面向上以加速度 a 作匀加速直线运动；如果沿水平方向加一个力 F_2，也能使物体沿斜面向上以加速度 a 作匀加速直线运动[如图(a)所示]。求 F_1：F_2。

[解答]物体在两种情况下的受力情况如图(b)所示。

第一种情况 $F_1-f_1-mg\sin\alpha=ma$ (1)

$N_1-mg\cos\alpha=0$ (2)

$f_1=\mu N_1$ (3)

由(1)、(2)、(3)式得 $F_1=m(a+g\sin\alpha+\mu g\cos\alpha)$。

第二种情况

$F_2\cos\alpha-mg\sin\alpha-f_2=ma$ (4)

$N_2-mg\cos\alpha-F_2\sin\alpha=0$ (5)

$f_2=\mu N_2$ (6)

由(4)、(5)、(6)式得

$$F_2=\frac{m(a+g\sin\alpha+\mu g\cos\alpha)}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}。$$

所以 $F_1：F_2=\cos\alpha-\mu\sin\alpha$。

讨论：当斜面倾角$\alpha<\frac{\pi}{2}$时，$\cos\alpha-\mu\sin\alpha<1$，这时$F_1<F_2$；只有当 a=0 时，$\sin\alpha=0$，$\cos\alpha-\mu\sin\alpha=1$，$F_1=F_2$。即只有在斜面水平时，$F_1$和 F_2相等。

851、如图所示，雪橇从高 h=2 米，倾角为 37°的坡顶上由静止自由冲下，到坡底后又经过一段水平距离 L=20 米，冲上另一个倾角为 30°的斜坡，设磨擦系数都是 0.01，问它能冲上多高。

[分析]雪橇下坡时作加速运动，在水平面上作减速运动，上坡时也作减速运动。

[解答]设下坡加速度为 a_1，水平面上加速度为 a_2，上坡加速度为 a_3，根据牛顿第二运动定律

得 $mg\sin37°-\mu mg\cos37°=ma_1$ (1)

着地速度 $$v_1=\sqrt{2a_1\frac{h}{\sin 37°}} \qquad (2)$$

由(1)、(2)式得 $v_1=\sqrt{2gh(1-\mu ctg37°)}$。

又 $$v_2=\sqrt{v_1^2-2a_2L} \qquad (3)$$

$$\mu mg=ma_2 \qquad (4)$$

由(3)、(4)式得 $$v_2=\sqrt{2gh(1-\mu ctg37°)-2\mu gL} \qquad (5)$$

因为 $$mg\sin 30°+\mu mg\cos 30°=ma_2$$

$$v_2=\sqrt{2a_3\frac{h'}{\sin 30°}}=\sqrt{2gh'(1+\mu ctg30°)} \qquad (6)$$

由(5)和(6)式

得 $\sqrt{2gh(1-\mu ctg37°)-2\mu gl}=\sqrt{2gh'(1+\mu ctg30°)}$。

$$h'=\frac{h(1-\mu ctg37°)-\mu L}{1+\mu ctg30°}$$

$$=\frac{2\times\left(1-0.01\times\frac{4}{3}\right)-0.01\times 20}{1+0.01\times\sqrt{3}}\text{米}$$

$$=1.74\text{米}$$

852、几个具有相同底边 b=0.3 米的斜面，如图所示。将一个物体先后放在它们上面。设斜面是光滑的。试问：

(1)斜面跟水平面夹角多大时，才能使这个物体从斜面上滑下所用的时间 t=0.4 秒。

(2)斜面跟水平面的夹角多大时，才能使这个物体从斜面上滑下所用的时间最小？

[分析]物体从光滑斜面上滑下只受重力 mg 和弹力 N 的作用，使它产生沿斜面下滑的加速度 a 是它们的合力 mgsinα。

[解答](1) $$mg\sin\alpha=ma \qquad (1)$$

$$\frac{b}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}at^2 \qquad (2)$$

解得 $b=\frac{1}{2}g\sin\alpha\bullet\cos\alpha\bullet t^2$，

$$\sin 2\alpha=\frac{4b}{gt^2}=\frac{4\times 0.3}{9.8\times 0.4^2}=0.77。$$

$a_1=25°11'$，

$a_2=64°49'$

(2)$t^2=\frac{4b}{g\sin 2a}$，$t=\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g\sin 2a}}$。

当$\sin 2\alpha=1$**时，**t**为最小。**

即$\alpha=45°$**时，**$t_{min}=\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{g}}=\frac{2\sqrt{0.3}}{\sqrt{9.8}}$**秒**$=0.35$**秒。**

853、当斜面跟水平面成α角时，物体 A 刚好沿斜面匀速下滑，斜面跟水平面夹角增大到β时，如图所示，A 物体从斜面高 h 处滑到底端需要多长时间？

[分析]A 物体沿斜面滑下时受到三个力作用，如图所示。当斜面跟水平面夹角为α时，物体运动的加速度 a=0，当夹角增到β时，a≠0，沿斜面向下。分别根据第二定律列出方程。

[解答]当斜面跟水平面夹角为 a 时

$mg\sin\alpha-f=0 \qquad (1)$

$N-mg\cos\alpha=0 \qquad (2)$

$f=\mu N \qquad (3)$

联立可得 $\mu=tga$。

当夹角为β时

$mgsi\beta-f'=ma \qquad (4)$

$N'-mg\cos\beta=0 \qquad (5)$

$f'=\mu N' \qquad (6)$

联立(4)、(5)、(6)式可得

$a=g(\sin\beta-\mu\cos\beta)$，

将$\mu=tga$ **代入** $a=g(\sin\beta-tg\alpha\cos\beta)$

$$=\frac{\sin\beta\cos\alpha-\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha}\bullet g$$

$$=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}\bullet g \qquad (7)$$

物体下滑距离为$L=\frac{h}{\cos\beta}$**，由运动学公式**

$$\frac{h}{\cos\beta}=\frac{1}{2}at^2 \qquad (8)$$

由(7)、(8)**两式可得**

$$t=\sqrt{\frac{2h\cos\alpha}{g\cos\beta\bullet\sin(\beta-\alpha)}}。$$

854、有二个物体，质量 m_1=0.2 千克，m_2=0.3 千克。用绳子把它们连接起来(绳子质量不计)。放在光滑的水平桌面上，如图(a)所示。(1)假定在物体 m_1 上加一个 1 牛的水平力，求两个物体运动的加速度和绳子的张力。(2)如果连接两个物体的绳子能承受的最大拉力为 10 牛。①将力加在 m_1 上，②将力加在 m_2 上。在以上两种情况下能使绳子拉断的力各是多大？(设力的方向和水平桌面平行，g 取 10 米/秒 ^{2})

[分析]物体 m_1 和物体 m_2 由绳子连接，它们在外力 F 的作用下，都以同一个加速度 a 作匀加速运动。用隔离法分析物体 m_1 和 m_2 的受力情况。

[解答]物体 m_1 和 m_2 受力如图(b)。根据牛顿第二定律

$$F-T_1=m_1a \qquad (1)$$

$$T_2=m_2a \qquad (2)$$

$$T_1=T_2 \qquad (3)$$

联立(1)、(2)、(3)式

得 $$a=\frac{F}{m_1+m_2}=\frac{1}{0.5}\text{米/秒}^2$$

$$=2\text{米/秒}^2，$$

$$T=T_1=T_2=m_2a=0.3\times2\text{牛}=0.6\text{牛。}$$

(2)将力加在 m_1 上，这时绳子张力为 10 牛，隔离 m_2，由牛顿第二定律

$$T=m_2a_1，$$

$$a_1=\frac{T}{m_2}=\frac{10}{0.3}\text{米/秒}^2=\frac{100}{3}\text{米/秒}^2，$$

$$F_1=(m_1+m_2)a_1=0.5\times\frac{100}{3}\text{牛}$$

$$=16.67\text{牛。}$$

将力加在 m_2 上，隔离 m_1，则由牛顿第二定律

$$T=m_1a_2, a_2=\frac{T}{m_1}=\frac{10}{0.2}\text{米/秒}^2$$

$$=50\text{米/秒}^2\text{。}$$

$$F_2=(m_1+m_2)a_2=0.5\times50\text{牛}$$

$$=25\text{牛。}$$

855、测力计的两端连接两个物体，物体的质量分别为 m_1 和 m_2。把它们一起放在光滑的水平地面上。作用在 m_1、m_2 上的外力分别是 F_1=15 牛、F_2=4 牛，如图(a)。如果 m_1=3 千克，m_2=2 千克，测力计的质量不计。求测力计的读数多大？(g 取 10 米/秒 ^{2})

[分析]物体 m_1 和 m_2 的受力情况如图(b)。因 $F_1＞F_2$，加速度 a 的方向应和 F_1 相同，因测力计的质量不计，所以 T 和 T’大小相等。

[解答]根据牛顿第二定律

$$F_1-T=m_1a \qquad (1)$$

$T'-F_2=m_2a$　　　　　　(2)

$T=T'$　　　　　　(3)

由(1)、(2)、(3)式联立得 $F_1-F_2=(m_1+m_2)a$，

$$a=\frac{F_1-F_2}{m_1+m_2}=\frac{15-4}{3+2}\text{米}/\text{秒}^2=2.2\text{米}/\text{秒}^2。$$

$$T=T'=F_2+m_2a=4\text{牛}+2\times2.2\text{牛}$$
$$=8.4\text{牛}。$$

测力计的读数是 8.4 牛。

856、力 F 斜拉木块加速前进，如图(a)所示。已知 M、m、F 和 a，不计磨擦。求：

(1)加速度 a；

(2)连结 M 和 m 的绳子的张力 T。

[解答](1)将 F 沿水平方向和竖直方向进行分解，F 的水平分力使 M 和 m 一起前进。如果把 M 和 m 看作是一个整体，根据牛顿第二定律

$F\cos\alpha=(M+m)a$，

$$a=\frac{F\cos\alpha}{M+m}.$$

(2)对物体 M，它的受力情况如图(b)所示。

$$T=Ma=\frac{M\bullet F\cos\alpha}{M+m}$$

857、如图所示，质量为 m_1，m_2，……，m_n 的 n 个不同的重物用同样的不能伸长的线连结起来，在水平力 F 的作用下沿水平面作匀加速运动。假定每一个重物跟平面间的磨擦系数都等于μ，求任意一根线的张力公式。

[解答]根据牛顿第二定律

对整体　$F-\mu g(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n)=(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n)a$

$$F=(\mu g+a)(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n)，$$

$$\mu g+a=\frac{F}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n}\qquad(1)$$

连结最后一个重物的线上的张力

$T_1-\mu m_1g=m_1a$，$T_1=(\mu g+a)m_1$，

连结第 i 个重物的线上的张力

$T_i-\mu g(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_i)=(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_i)a$

$$T_i=(\mu g+a)(m_1+m_2+\cdots\cdots+m_i)\qquad(2)$$

把(1)式代入(2)式得

$$T_i=F\bullet\frac{(m_1+m_2+\Lambda\Lambda+m_i)}{m_1+m_2+\Lambda\Lambda+m_n},i=1,2,\Lambda\Lambda n$$

(注意：i 是从末尾起给每个重物的编号。)

858、一个长度为 L 各处截面积都相同的均匀长方体，在水平力 F 作用下沿粗糙水平面作加速运动，如图所示。长方体的某一截面上的张力是这个截面到后

边缘的距离的函数，求此张力。(物休的形变可忽略)

[分析]设截面到后边缘的距离为 x，将长方体截成长度为 x 和 L-x 的两段。图中的 T 就是长方体中距后边缘为 x 那一截面上的张力。因为这两段都以同一加速度运动，分别列出这两段的运动方程，即可解得。

[解答]根据牛顿第二定律得

$F-f_1-T=m_1a$，$f_1=\mu N_1=\mu G_1=\mu m_1 g$。

$T-f_2=m_2a$，$f_2=\mu N_2=\mu G_2=\mu m_2 g$。

式中μ为长方体跟水平面间的磨擦系数。

联立上面各式可解得

$$T=\frac{F}{1+m_1/m_2} \qquad (1)$$

设长方体材料的密度为ρ、截面积为 S，长方体的体积为 V。于是

$m_1/m_2=\rho V_1/\rho V_2=\rho S(L-x)/\rho Sx$，

$m_1/m_2=(L/x)-1 \qquad (2)$

将(2)式代入(1)式，

得 $T=F\bullet\frac{x}{L}$。

859、如图(a)所示，用 9.8 牛的水平推力 F，推着质量为 2 千克的物体 A 和质量为 4 千克的物体 B 共同前进。如果物体和水平地面之间的磨擦系数为 0.1，试求：

(1)AB 间的相互作用力是多少？

(2)如果在水平推力 F 的作用下，把 B 顶到墙上。当不计 A、B 和水平地面磨擦或者考虑静磨擦这两种情况下，A、B 间的相互作用力分别是多少？

[分析]要解物体 A、B 间的相互作用力，应先对 A 和 B 进行隔离分析，它们的受力情况如图(b)所示。

[解答](1)根据牛顿第二定律

对 A $\qquad F-T'-f_A=m_Aa \qquad (1)$

$N_A-m_Ag=0 \qquad (2)$

对 B $\qquad T-f_B=m_Ba \qquad (3)$

$N_B-m_Bg=0 \qquad (4)$

且 $\qquad f_A=\mu N_A=\mu m_Ag \qquad (5)$

$f_B=\mu N_B=\mu m_Bg \qquad (6)$

因为 T=T’，由(1)、(3)、(5)、(6)式联立得

$$a=\frac{F-\mu(m_A+m_B)g}{m_A+m_B}$$

$$=\frac{9.8-0.1\times6\times9.8}{2+4}\text{米/秒}^2=0.65\text{米/秒}^2,$$

$$T=m_B(a+\mu g)$$

$$=4\bullet(0.65+0.1\times9.8)\text{牛}=6.5\text{牛}。$$

(2)如果 B 顶在墙上，物体处于静止状态，

$a=0$。

根据牛顿第二定律

$F-f_{A静}-T'=0$，

因为 F=9.8 牛已远大于 A 物体的最大静磨擦力 $f_{A静最大}$，设静磨擦系数和滑动磨擦系数近似相等，$f_A=\mu m_A g=1.96$ 牛，故得

$T'=F-f_A=(9.8-1.96)$牛$=7.84$ 牛。

根据牛顿第三定律

$T=T'=F_A-f_{A静}=7.84$ 牛，

二力方向相反。

当不计磨擦时

$F-T'=0$，

则有 $T=T'=F=9.8$ 牛，

二力方向相反。

860、有两个物体 A 和 B，并排放在光滑的桌面上，如图所示。B 的质量为 A 的两倍，如果物体 A、B 在两边分别受到 F_1 和 F_2 的作用力，且 $F_1=4F_2$。求：两个物体间的相互作用力。

[分析]物体 A 和 B 在力 F_1 和 F_2 作用下，以相同的加速度前进。AB 间的相互作用力可用隔离法解得。

[解答]以 AB 两个物体作为一个系统。根据牛顿第二定律得

$$F_1-F_2=(m_A+m_B)a，$$

$$a=\frac{F_1-F_2}{(m_A+m_B)}=\frac{3F_2}{3m_A}=\frac{F_2}{m_A}。$$

对于物体B $N_{AB}-F_2=m_B a$，

$$N_{AB}=F_2+m_B a=F_2+2m_A\cdot\frac{F_2}{m_A}$$

$$=3F_2。$$

N_{BA} 和 N_{AB} 为 AB 间的相互作用力，大小为 $3F_2$，方向相反。

861、水平面上并排放着 A、B 两个物体，如图(a)所示。已知 $m_A=2$ 千克，$m_B=3$ 千克，A 物体跟地面间的磨擦系数$\mu_A=0.4$，B 物体跟地面间的磨擦系数$\mu_B=0.2$，现有水平推力 F=20 牛作用在 A 物体上，经 5 秒钟撤去 F。问：

(1)A、B 间最大距离是多少？

(2)在 F 撤去前 A、B 间的相互作用力多大？

(3)如果$\mu_A=0.2$ 而$\mu_B=0.4$，则在 F 撤去前后，A、B 间的相互作用力各为多大？

[分析]在 F 作用下，物体 A、B 以同样的速度运动，A、B 间存在相互作用，物体 A、B 的受力情况如图(b)所示。当 F 撤去后，物体

A受磨擦力f_A的作用，加速度$a_A=\frac{f_A}{m_A}=\mu_A g$，物体B受磨擦力$f_B$的作用，

$a_B=\mu_B g$，如图(c)。因为$\mu_A>\mu_B$，所以$a_A>a_B$。物体A、B脱离，不存在相互作用。

[解答](1)F撤去前，物体A、B以同一加速度作加速运动，根据牛顿第二定律得

对A物 $F-F_{BA}-f_A=m_A a$ (1)

对B物 $F_{AB}-f_B=m_B a$ (2)

$f_A=\mu_A m_A g$，$f_B=\mu_B m_B g$ (3)

根据牛顿第三定律可知

$F_{BA}=F_{AB}$ (4)

由(1)~(4)式联立可得

$$a=\frac{F-\mu_A m_A g-\mu_B m_B g}{m_A+m_B}=\frac{20-0.4\times2\times9.8-0.2\times3\times9.8}{3+2}\text{米/秒}^2$$

$$=1.26\text{米/秒}^2\text{。}$$

经5秒后，物体A、B的速度为

$v=at=1.26\times5$ 米/秒$=6.3$ 米/秒。

撤去F后，物体A、B在水平方向上只受磨擦力f_A和f_B作用，根据牛顿第二定律

$\mu_A m_A g=m_A a_A$，$a_A=\mu_A g$。

$\mu_B m_B g=m_B a_B$，$a_B=\mu_B g$。

物体A、B通过的距离可以由运动学公式求得。

因为 $v_t^2=v^2-2as=0$，

所以 $$s_A=\frac{v^2}{2a_A}=\frac{v^2}{2\mu_A g}=\frac{6.3^2}{2\times0.4\times9.8}\text{米}=5.06\text{米，}$$

$$s_B=\frac{v^2}{2a_B}=\frac{v^2}{2\mu_B g}=\frac{6.3^2}{2\times0.2\times9.8}\text{米}=10.12\text{米。}$$

A、B间的最大距离为A、B停止后的距离，即

$\triangle s=s_B-s_A=10.12$ 米-5.06 米$=5.06$ 米。

(2)在F撤去前的相互作用力可由(2)式得

$F_{AB}=\mu_B m_B g+m_B a=m_B(\mu_B g+a)$

$=3\times(0.2\times9.8+1.26)$ 牛$=9.66$ 牛。

$F_{AB}=F_{BA}=9.66$ 牛。

(3)如果$\mu_A=0.2$，$\mu_B=0.4$，在撤去F前的相互作用力$F_{AB}=\mu_B m_B g+m_B a$，其中a仍为1.26米/秒^2，

$F_{AB}=F_{BA}=3\times(0.4\times9.8+1.26)=15.54$ 牛。

F撤离后，因为$\mu_A<\mu_B$，A、B间存在相互作用，所以两个物体以同一个加速度a'运动。根据牛顿第二定律

$$\mu_A m_A g+\mu_B m_B g=(m_A+m_B)a'，$$

$$a'=\frac{\mu_A m_A g+\mu_B m_B g}{m_A+m_B}$$

$$=\frac{(0.2\times 2+0.4\times 3)\times 9.8}{5}\text{米/秒}$$

$$=3.14\text{米/秒}^2。$$

物体 A 的受力情况如图(d)所示。

根据牛顿第二定律

$$F'_{BA}+f_A=m_A a'，$$

$$F'_{BA}=m_A a'-f_A=m_A a'-\mu_A m_A g$$

$$=2\times(3.14-0.2\times 9.8)\text{牛}=2.36\text{ 牛}。$$

$$F'_{AB}=F'_{BA}=2.36\text{ 牛}。$$

综合以上计算，在 F 撤去的前后，A、B 物体间相互作用力分别为 15.54 牛和 2.36 牛。

862、如图(a)所示，A、B 的质量分别为 m_A、m_B。A、B 两物体间以及 B 和水平桌面间的滑动磨擦系数分别为μ_1、μ_2。如果以水平力 F 拉 B,求 A 的加速度？(绳和滑轮的质量，绳跟滑轮间的磨擦都可以不计。)

[分析]物体 A 和 B 的加速度大小相等，方向相反，可用隔离法解，物体的受力情况如图(b)所示。其中物体 A 相对于 B 向滑轮方向运动，受到的磨擦力 f_A 方向向左，物体 A 对 B 的磨擦力 f'_A 方向向右，地面对 B 的磨擦力 f_B 也向右。

[解答]根据牛顿第二定律

对 A $\quad T-f_A=m_A a \quad (1)$

$N_A-m_A g=0 \quad (2)$

对 B $\quad F-T-f'_A-f_B=m_B a \quad (3)$

$N_B-N'_A-m_B g=0 \quad (4)$

由第三定律和(2)式可得

$$f_A=f'_A=\mu_2 N_A=\mu_2 m_A g。$$

由(4)式可求得

$$f_B=\mu_2 N_B=\mu_2(N'_A+m_B g)=\mu_2(m_A+m_B)g。$$

代入(3)式可得

$$F-T-\mu_1 m_A g-\mu_2(m_A+m_B)g=m_B a \quad (5)$$

代入(1)式可得

$$T-\mu_1 m_A g=m_A a \quad (6)$$

由（5）、（6）式解得

$$a=\frac{F-[2\mu_1 m_A g+\mu_2(m_A+m_B)g]}{m_A+m_B}。$$

863、如图(a)所示，已知 F=4 牛，m_1=0.3 千克，m_2=0.2 千克，两个物体跟水平面的磨擦系数都为 0.2，设滑轮和绳子的质量以及滑轮和绳间的磨擦都不计。求物体 m_2 的加速度及绳对它的拉力。

[分析]m_1和m_2的受力情况如图(b)所示，其中$T_1=2T_2$，两个物体各以加速度a_1和a_2作加速运动。由图可知，m_1和m_2从静止开始，在相等时间内所通过距离的比为$\frac{s_2}{s_1}=\frac{2}{1}$，加速度的比为$\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}$。

[解答]根据牛顿第二定律

得 $F-T_1-f_1=m_1a_1$ (1)

$T_2-f_2=m_2a_2$ (2)

$T_1=2T_2$ (3)

$f_1=\mu m_1g$，$f_2=\mu m_2g$ (4)

$a_2=2a_1$ (5)

由(1)、(2)、(3)、(4)式联立

得 $F-\mu g(m_1+2m_2)=(4m_2+m_1)a_1$，

$$a_1=\frac{F-\mu g(m_1+2m_2)}{4m_2+m_1}=\frac{4-0.2\times9.8\times0.7}{1.1}\text{米/秒}^2$$

$$=2.39\text{米/秒}^2\text{。}$$

$$a_2=2a_1=4.78\text{米/秒}^2\text{。}$$

$$T_2=m_2a_2+\mu m_2g$$

$$=0.2\times4.78\text{牛}+0.2\times0.2\times9.8\text{牛}$$

$$=1.35\text{牛。}$$

a_2和T_2的方向跟F方向相同。

864、A、B两个物体在水平推力F的作用下，一起作匀加速运动，如图(a)所示。A、B的质量分别为m_A、m_B。A、B间的磨擦系数为μ_0，A跟水平面间的滑动磨擦系数为μ。求F最小应为何值，B才不致下滑。

[分析]B不致下落的条件是：$f_{AB}=m_Bg$，而$f_{AB}=\mu_0N_{AB}$、N_{AB}是使物体B产生加速度a_B的力即$N_{AB}=m_Ba_B$如图(b)所示。从上面的条件可知，物体A、B运动的加速度a必须大于或等于a_B。

[解答]根据牛顿第二定律，

对物体B $N_{AB}=m_Ba_B$ (1)

$m_Bg-\mu_0N_{AB}=0$ (2)

从(1)、(2)式联立得$a_B=\frac{g}{\mu_0}$。

对物体系A、B

$F-\mu(m_A+m_B)g=(m_A+m_B)a$，

$F=(m_A+m_B)(\mu g+a)$。

当$a=a_B$时，F为B不致下滑的最小值

$F_{min}=(m_A+m_B)(\mu g+a_B)$

$$=\left(\mu+\frac{1}{\mu_0}\right)(m_A+m_B)g。$$

865、一架运输机拖着两架滑翔机起飞，滑翔机质量都为 1200 千克，所受阻力都是 2000 牛。它们一前一后相随。已知运输机和第一架滑翔机之间拖缆的张力为 10000 牛，求：

(1)如果飞机起飞要求速度是 40 米/秒，机场的跑道要多长？

(2)在跑道上加速时，两架滑翔机之间的拖缆的张力为多大？

[分析]将两架滑翔机隔离出来进行分析，运输机和第一架滑翔机之间拖缆的张力为 T。

[解答](1)根据牛顿第二定律

对滑翔机整体　　　　　T-2f=2ma　　　　　(1)

由运动学公式

$$v_t^2-v_0^2=2as$$

$$v_0=0，s=\frac{v_t^2}{2a} \qquad (2)$$

将(1)、(2)式联立得$s=\frac{mv_t^2}{T-2f}=\frac{1200\times(40)^2}{10000-4000}$米$=320$米。

(2)设两架滑翔机之间的拖缆的张力为 T’，则根据牛顿第二定律

T’-f=ma，

T’=f+ma　　　　　　　　(3)

从（1）式得　$a=\frac{T-2f}{2m}=\frac{10000-4000}{2\times1200}$米/秒^2 $=2.5$米/秒^2，

代入(3)式　　　　T’=2000 牛+1200×2.5 牛=5000 牛。

866、卡车质量为 4 吨，拖车质量为 2 吨，在平直公路上以 v=10 米/秒的速度匀速行驶。如果阻力为车重的 0.05 倍，途中拖车突然脱钩，从脱钩到驾驶员发现，车已前进了 L=40 米。这时驾驶员立即关掉发动机，卡车在公路上滑行。求：当卡车和拖车都停止时，它们之间的距离多大？

[分析]卡车和拖车的运动可以分三个阶段。卡车和拖车作匀速运动时，卡车牵引力 $F=k(m_1+m_2)g$；脱钩后，卡车作匀加速运动，拖车在阻力作用下匀减速运动；卡车关掉发动机后，也在阻力作用下作匀减速运动。

[解答]当卡车和拖车匀速运动时，根据牛顿第二定律

$F-k(m_1+m_2)g=0$，

$F=k(m_1+m_2)g$　　　　　(1)

脱钩后，拖车和卡车的加速度分别为 a_2 和 a_1。

$km_2g=m_2a_2$，

$a_2=kg$　　　　　(2)

$F-km_1g=m_1a_1$，

$$a_1=\frac{F-km_1g}{m_1}=\frac{km_2g}{m_1} \qquad (3)$$

拖车由脱钩到静止，运动的路程为 s_2，由运动学公式得

$$v^2 = v_0^2 - 2a_2 s_2 = 0 \qquad (4)$$

把（2）式代入（4）式，得$s_2 = \dfrac{v_0^2}{2a_2} = \dfrac{v_0^2}{2kg}$。

驾驶员发现脱钩时，卡车的速度为 v_1，

$$v_1^2 = v_0^2 + 2a_1 L \qquad (5)$$

把（3）式代入（5）式，得$v_1^2 = v_0^2 + 2 \bullet \dfrac{km_2 gL}{m_1}$。

关闭发动机后，卡车的加速度为 a'_1，

$$km_1 g = m_1 a'_1,$$

$$a'_1 = kg。$$

卡车从关闭发动机到静止，运动的路程为 s_1，由运动学公式得

$$v^2 = v_1^2 - 2a'_1 s_1 = 0,$$

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2kg} = \frac{v_0^2 + 2 \bullet kg \dfrac{m_2}{m_1} L}{2kg}$$

$$= \frac{v_0^2}{2kg} + \frac{m_2}{m_1} L。$$

卡车和拖车间的距离为 s，

$$s = L - s_2 + s_1$$

$$= L - \frac{v_0^2}{2kg} + \frac{v_0^2}{2kg} + \frac{m_2}{m_1} L$$

$$= \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) L$$

$$= \left(1 + \frac{2 \times 10^3}{4 \times 10^3}\right) \times 40 \text{米}$$

$$= 60\text{米}。$$

867、质量 m=2 千克的物体 A，放在质量 M=4 千克的小车 B 上。小车放在光滑的水平面上。今以水平力 F=12 牛拉小车 B，如果 A 和 B 间的磨擦系数μ=0.3。试求：

(1)此时，B 给 A 的磨擦力多大？

(2)如果 F=20 牛，B 给 A 的磨擦力多大？

(3)如果使 A 在 B 上刚开始打滑，水平拉力 F 应多大？

[分析]A、B 的受力情况如图(b)所示。A 的加速度是在 B 给 A 的磨擦力作用下产生的，其数值不能大于最大静磨擦力，所以 A 的加速度有一个限度。在这个范围内物体 A、B 以相同的加速度 a 运动。如果水平拉力 F 增加，加速度 a 随着增加，B 给 A 的磨擦力 f 也增加。当 f 增到 f_{max} 时，f 不再增大，A 的加速度就要小于 B 的加速度，便出现打滑现象。

[解答](1)假定 A、B 未发生打滑，将 A、B 作为整体，根据牛顿第二定律得

$$F=(M+m)a_1,$$

$$a_1=\frac{F}{M+m}。$$

由物A可得 $f_{BA}=ma_1=\frac{mF}{M+m}$

$$=\frac{2\times12}{4+2}牛=4牛。$$

B 对 A 的最大静磨擦力

$f_{max}=\mu mg=0.3\times2\times9.8$ 牛$=5.88$ 牛。

所以当 F=12 牛时，B 给 A 的磨擦力小于最大静磨擦力，假定正确。

(2)如果 F=20 牛时，

$$f_{BA}=\frac{mF}{M+m}$$

$$=\frac{2\times20}{4+2}牛=6.67牛。$$

此时($f_{BA}>f_{max}$)A 在 B 上已滑动，上式不成立，$f_{BA}=\mu mg=5.88$ 牛。

(3)A 在 B 上开始打滑，此时 B 给 A 的磨擦力达到最大值。$f_{max}=\mu mg$，由 A 物的受力情况，根据牛顿第二定律得

$f_{max}=ma$，$\mu mg=ma$，

而 $F=(M+m)a=(M+m)\mu g$

$=(4+2)\times0.3\times9.8$ 牛$=17.64$ 牛。

868、如图(a)所示，已知 $m_A=2$ 千克，$m_B=10$ 千克。A、B 之间以及 B 和地之间的磨擦系数都为 0.1，静磨擦系数和滑动磨擦系数相同。在 B 物体上加一个水平力 F，求：

(1)当 F=23.52 牛时，A、B 没有相对滑动，物体加速度度多大？方向如何？

(2)当 F=31.36 牛时，A、B 的加速度多大？

[解答](1)当 F=23.52 牛时，AB 间没有相对滑动，整体的受力情况如图(b)所示。根据牛顿第二定律

$F-f=(m_A+m_B)a$ (1)

$f=\mu(m_A+m_B)g$ (2)

由(1)、(2)式得 $a=\frac{F-\mu(m_A+m_B)g}{m_A+m_B}$

$$=\frac{23.52-0.1\times9.8\times12}{12}米/秒^2=0.98米/秒^2。$$

物体 A 的受力情况如图(c)所示。根据牛顿第二定律

$f_A=m_Aa=2\times0.98$ 牛$=1.96$ 牛。

它的方向向右。

(2)A、B 间的最大静磨擦力 $f_{max}=\mu m_Ag$，

$f_{max}=0.1\times2\times9.8=1.96$ 牛。

可见，当 F=23.52 牛时，A 受到的静磨擦力已到达最大值，因此当 F=31.36

牛时，A、B 间将产生相对滑动，两者加速度不相同。物体 A 的加速度 $a_A=0.98$ 米/秒^2。而物体 B 的加速度由牛顿第二定律得

$$F-f_B-f_{max}=m_Ba_B$$

$$a_B=\frac{F-\mu(m_A+m_B)g-f_{max}}{m_B}$$

$$=\frac{31.36-0.1\times9.8\times12-1.96}{10}\text{米/秒}^2$$

$$=1.76\text{米/秒}^2$$

它的方向向右。

869、如图(a)所示，将 $m_1=4$ 千克的木块放在 $m_2=5$ 千克的木块上，m_2 放在光滑的水平面上，当用 12 牛的水平力拉 m_1 时，正好使 m_1 相对于 m_2 开始发生滑动。问：用多大水平拉力拉 m_2 时，才能使 m_1 相对于 m_2 开始滑动？

[分析]当 F_1 作用在 m_1 上使 m_1 和 m_2 开始相对滑动，此时的静磨擦力应该是最大静磨擦力 f_{max}，且两者具有同一个加速度 a_1。同理 F_2 作用在 m_2 上使 m_1 和 m_2 开始相对滑动，m_1 和 m_2 也应具有同一个加速度 a_2，m_1 和 m_2 之间的静磨擦力也达到最大值 f_{max}。

[解法一]用水平拉力 F_1 拉 m_1 时，根据牛顿第二定律

$$F_1=(m_1+m_2)a_1,\qquad a_1=\frac{F_1}{(m_1+m_2)}。$$

对m_2

$$f_{max}=m_2a_1=\frac{m_2F_1}{m_1+m_2}。$$

用水平力拉 m_2 时，对 m_1 运用牛顿第二定律

$$f_{max}=m_1a_2,a_2=\frac{f_{max}}{m_1}=\frac{m_2F_1}{m_1(m_1+m_2)}$$

$$F_2=(m_1+m_2)a_2$$

$$=(m_1+m_2)\cdot\frac{m_2F_1}{m_1(m_1+m_2)}=\frac{m_2}{m_1}F_1$$

$$=\frac{5}{4}\times12\text{牛}=15\text{牛}。$$

[解法二]用水平力 F_1 拉 m_1 时，隔离 m_1 和 m_2，它们的受力分别由图(b)所示，根据牛顿第二定律得

$F_1-f_1=m_1a_1$ (1)

$f'_1=m_2a_1$ (2)

$f'_1=f_1=f_{max}$(开始滑动的条件) (3)

用水平力 F_2 拉 m_2 时，它们的受力由图(c)所示。根据牛顿第二定律得

$F_2-f'_2=m_2a_2$ (4)

$f_2=m_1a_2$ (5)

$f_2=f'_2=f_{max}$ (6)

由(1)~(6)式解得

$$F_2=\frac{m_2}{m_1}F_1=\frac{5}{4}\times 12\text{牛}=15\text{牛}$$

870、有一个质量为 20 千克的小车，它可以在水平面上作没有磨擦的运动。在小车上放一块质量为 2 千克的木块，如图(a)所示。木块和小车间的磨擦系数为 0.25(滑动磨擦系数和静磨擦系数相同)，如果第一次作用在木块上的力 F_1=1.96 牛，第二次是 F_2=19.6 牛。在这两种情况中求：木块和小车间的磨擦力多大？木块和小车各以多大的加速度运动？

[解答]第一种情况，设木块和小车间没有相对滑动，根据牛顿第二定律

$$F_1=(m+M)a,$$

$$a=\frac{F_1}{m+M}=\frac{1.96}{20+2}\text{米/秒}^2=0.089\text{米/秒}^2\text{。}$$

对木块，根据牛顿第二定律

$F_1-f_1=ma$，

$f_1=F_1-ma$=1.96 牛-2×0.089 牛=1.78 牛。

而木块和小车间的最大静磨擦力

$f_{max}=\mu mg$=0.25×2.98 牛=4.9 牛。

$f_1<f_{max}$这结论和假设相符，所以加速度 a=0.089 米/秒 ^{2}，静磨擦力 f_1=1.78 牛。

第二种情况，仍设木块和小车间没有相对滑动，根据牛顿第二定律

$$F_2=(m+M)a',$$

$$a'=\frac{F_2}{m+M}=\frac{19.6}{22}\text{米/秒}^2=0.89\text{米/秒}^2\text{。}$$

所受磨擦力 f_2-F_2-ma'=19.6 牛-2×0.89=17.82 牛。

$f_2>f_{max}$，是不可能的。假设不成立，木块和小车间应有相对滑动。设木块的加速度为 a_1，小车加速度为 a_2，木块和小车间的滑动磨擦力 f_2=4.9 牛，由图(c)所示。根据牛顿第二定律

$F_2-f_2=ma_1$ (1)

$f'_2=Ma_2$ (2

$f_2=f'_2$ (3)

由(1)、(2)、(3)式求得

$$a_1=\frac{F_2-f_2}{m}=\frac{19.6-4.9}{2}\text{米/秒}^2=7.35\text{米/秒}^2,$$

$$a_2=\frac{f'_2}{M}=\frac{4.9}{20}\text{米/秒}^2=0.25\text{米/秒}^2\text{。}$$

木块和小车间的滑动磨擦力 f_2=4.9 牛。

木块加速度 a_1=7.35 米/秒^2，小车加速度 a_2=0.25 米/秒^2。

871、如图(a)所示。质量为 M 的木板上放一块质量为 m 的木块，木块和木板间的磨擦系数为μ_1，木板和桌面间的磨擦系数为μ_2，问加在木板上的力 F 多大时，才能将木板从木块下抽出来？

[解答]木块和木板的受力情况如图(b)所示。设木块对地的加速度为 a_1，木板对地的加速度为 a_2。根据牛顿第二定律对木块有

$$f_1=ma_1 \qquad (1)$$

对木板有

$$F-f'_1-f_2=Ma_2 \qquad (2)$$

$$f_2=\mu_2(m+M)g \qquad (3)$$

由牛顿第三定律

$$f_1=f'_1=\mu_1 mg \qquad (4)$$

由(1)、(4)式得

$$a_1=\mu_1 g,$$

由(2)、(3)、(4)式得

$$a_2=\frac{F-\mu_1 mg-\mu_2 g(m+M)}{M}。$$

要使$a_2>a_1$，即

$$\frac{F-\mu_1 mg-\mu_2 g(M+m)}{M}>\mu_1 g,$$

所以必须 $F>(\mu_1+\mu_2)(M+m)g$。

872、在水平桌面上放有木板 B，在 B 上放一个质量为 4 千克的物体 A。用弹簧把 A 和 B 的直立部分连结起来，如图(a)所示。弹簧的倔强系数 k 为 196 牛/米。现在使 B 沿水平面移动。试问：

(1)当 B 的加速度为 0.2 米/秒^{2}时，弹簧保持原有长度，而 A、B 一起前进。A 所受的磨擦力如何？

(2)当 B 的加速度为 1 米/秒^{2}时，弹簧伸长 1 厘米后 A、B 一起前进。那么 A、B 间的静磨擦力又是多大？

[分析]弹簧不伸长时，A 随 B 一起前进，这时 B 对 A 有一个静磨擦力作用，弹簧伸长时，A 随 B 一起前进，这时 A 受到弹簧的弹力和 B 对 A 的静磨擦力共同作用。受力情况如图(b)所示。

[解答](1)当 A 和 B 一起以 a_1=0.2 米/秒^{2}的加速运动时，A 所受的静磨擦力的方向向前，大小是

$f_1=ma_1$=4×0.2 牛=0.8 牛。

(2)当 A 和 B 一起以 a_2=1 米/秒^{2}的加速运动时，则

$T+f_2=ma_2$，

$f_2=ma_2-T$

=4×1 牛-1.96 牛

=2.04 牛。

873、如图(a)所示，质量 M=1.2 吨的汽车载着质量 m=1 吨的重物。重物和车厢底板的磨擦系数μ=0.2，汽车在水平公路上开动，由于开动时加速度较大，开动 2 秒钟后，重物由车尾滑下来。已知重物原来距车尾的距离 L=2 米，车高 h=1.25 米，汽车所受阻力为车总重的 0.01 倍，求：(1)重物滑落时相对于地面的速度 v_1；(2)此时汽车的速度 v_2 及重物相对于汽车的速度 v；(3)重物从脱离车尾到落地的水平距离 s；(4)在这 2 秒钟内汽车的平均牵引力。

[分析]重物从汽车上滑下表明，在运动过程中，汽车的加速度和重物的加速度是不同的，且汽车的加速度大于重物的加速度，重物的加速度是由汽车车厢底板作用于重物的滑动磨擦力产生的。重物在 2 秒内从车上滑下表明，在 2 秒内重物和汽车前进的距离不相同。汽车前进的距离大于重物前进的距离，两者之差即 L。重物脱离车后只受到重力的作用作平抛运动。

[解答](1)对重物 m，如图(b)所示。

$f_1=\mu mg=ma_1$，

$a_1=\mu g=0.2\times9.8$ 米/秒^2=1.96 米/秒^2。

$v_1=a_1t=1.96\times2$ 米/秒=3.96 米/秒。

（2）设汽车加速度为a_2，2秒内汽车通过的距离为$\frac{1}{2}a_2t^2$，重物通过的距离为$\frac{1}{2}a_1t^2$，按题意

$$L=\frac{1}{2}a_2t^2-\frac{1}{2}a_1t^2,$$

$$a_2=a_1+\frac{2L}{t^2}=1.96\text{米}/\text{秒}^2+\frac{2\times2}{2^2}\text{米}/\text{秒}^2=2.96\text{米}/\text{秒}^2。$$

$$v_2=a_2t=2.96\times2\text{米}/\text{秒}=5.92\text{米}/\text{秒}。$$

重物相对于汽车的速度 $v=v_1-v_2$=3.92 米/秒-5.92 米/秒=-2 米/秒。负号表示重物相对于汽车向左运动。

(3)重物滑落到地的时间

$$t'=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times1.25}{9.8}}\text{秒}=0.5\text{秒}。$$

水平距离 $s=v_1t'=3.92\times0.5$ 米=1.96 米。

(4)汽车 M 受力情况如图(c)所示，根据牛顿第二定律

$F-f_2-f'_1=Ma_2$，

$F-k(M+m)g-\mu mg=Ma_2$，

$F=k(M+m)g+\mu mg+Ma_2$

$=M(kg+a_2)+mg(k+\mu)$

$=1200\times(0.01\times9.8+2.96)$牛$+1000\times9.8\times(0.01+0.2)$牛

=5728 牛

874、如图(a)所示，质量为 M 的平板 A 静止在光滑的水平面上，质量为 m 的物体 B 在平板 A 的右端，相对于 A 以初速度 v_0 运动。如果物体 B 和平板 A 之间的滑动磨擦系数为μ，A 板长为 L，且物体 B 的大小可以忽略不计，求：

(1)物体 B 和平板 A 所受的水平力和加速度；

(2)B 对 A 的加速度；

(3)B 在 A 上运动一段路程 x 时，相对于 A 的速度 v；

(4)如果最后 B 不脱离 A，并和 A 保持相对静止，则 v_0 的值应满足什么条件？

(5)如果 B 在 A 板上滑落，v_0 的值又应在什么范围？

[分析]物体 B 在板 A 上滑动，受到一个向右的磨擦力而被减速。同时板 A 受到一个等量的向左的磨擦力而被加速。随着物体 B 在板 A 上的滑动，B 相对于 A 的速度 v 不断减小，待相对速度 v 减小到零时，B 在 A 上滑动的距离 x=L。B 不和 A 保持相对静止。如果 B 在 A 上滑动的距离 x=L 时相对速度 v＞0，B 将脱离 A。

[解答](1)物体 B 受到一个向右的滑动磨擦力 f 作用，板 A 受到一个向左的滑动磨擦力 f’作用，且 f=f’。受力情况如图(b)所示。

$$f=f'=\mu mg \qquad (1)$$

设物体 B 对地的加速度为 a_1，板 A 对地的加速度为 a_2，根据牛顿第二定律

$$f=ma_1 \qquad (2)$$

$$f'=Ma_2 \qquad (3)$$

由(1)、(2)式得 $a_1=\mu g$，加速度方向向右。

由（1）、（3）式得$a_2=\mu\frac{m}{M}g$，加速度方向向左。

(2)物体 B 相对于板 A 的加速度如图(c)所示。

$$a_{12}=a_1+a_2=\mu g\left(1+\frac{m}{M}\right)$$

B 相对于 A 的加速度方向向右。

(3)根据运动学公式有

$$v_0^2-v^2=2a_{12}x,$$

$$v=\sqrt{v_0^2-2(a_1+a_2)x}=\sqrt{v_0^2-2\mu g\left(1+\frac{m}{M}\right)x}。$$

(4)物体 B 和板 A 保持相对静止时，B 对 A 的速度 v=0，即

$$v_0^2-2\mu g\left(1+\frac{m}{M}\right)x=0,$$

$$v_0=\sqrt{2\mu g\left(1+\frac{m}{M}\right)x}。$$

v_0 的取值范围取决于 B 在 A 上运动的一段距离 x，而 x 的范围应 x≤L，则

$$v_0\leq\sqrt{2\mu g\left(1+\frac{m}{M}\right)L}。$$

(5)物体 B 在板 A 上滑落，即 x=L 时，B 相对 A 的速度 v＞0，所以 v_0 取值范围为

$$v_0>\sqrt{2\mu g\left(1+\frac{m}{M}\right)L}。$$

875、如图(a)所示，在光滑的水平台上放一个质量 M=5 千克的木块 B，从平

台下 O 处斜向上抛一个质量 m=1 千克的木块 A，抛出时的初速度为 6 米/秒，抛射角θ=60°，当木块到达最高点时，木块 A 正好落在 B 上(图示中表示 A 正好已落在 B 上)，并沿木块 B 表面滑动。木块 A 滑离木块 B 时相对于平台的速度减小到 2 米/秒。已知木块 A 和 B 间的滑动磨擦系数为 0.5。求：

(1)木块 A 滑离 B 时，B 相对于平台的速度多大？

(2)木块 A 滑离 B 时，木块 A、B 各相对于平台移动了多大距离？

[分析]根据题意知，当木块 A 落在木块 B 上时，木块 A 只具有水平分速度 $v_0\cos60°$。由于受到木块 A 的磨擦力的作用，木块 B 向右作匀加速运动，同时 A 在 B 上作匀减速滑动。

[解答]以下解题都以平台为参照物。木块 A 的受力情况如图(b)所示。根据牛顿第二定律

$$f=ma_A \qquad (1)$$

$$N_A=mg \qquad (2)$$

且 $$f=\mu NA \qquad (3)$$

由(1)~(3)式可得

$$a_A=\mu g=0.5\times9.8\text{ 米/秒}^2=4.9\text{ 米/秒}^2。$$

木块 B 的受力情况如图(c)所示。根据牛顿第二定律

$$f'=Ma_B \qquad (4)$$

$$f=f=\mu mg \qquad (5)$$

由(4)、(5)式得

$$a_B=\frac{\mu mg}{M}=\frac{0.5\times1\times9.8}{5}\text{米/秒}^2=0.98\text{米/秒}^2。$$

设木块 A 相对于平台在木块 B 上滑动的时间为 t，由运动学公式有

对A $$v_A=v_0\cos60°-a_At,$$

$$t=\frac{v_0\cos60°-v_A}{a_A}=\frac{6\times\frac{1}{2}-2}{4.9}\text{秒}=0.2\text{秒},$$

$$s_A=\frac{v_0^2\cos^2 60°-v_A^2}{2a_A}=\frac{\left(6\times\frac{1}{2}\right)^2-2^2}{2\times4.9}\text{米}=0.51\text{米}。$$

对B $$v_B=a_Bt=0.98\times0.2\times\text{米/秒}=0.196\text{米/秒},$$

$$s_B=\frac{1}{2}a_Bt^2=\frac{1}{2}\times0.98\times0.2^2\text{米}=0.0196\text{米}。$$

876、用力 F 提拉细绳连在一起的 A、B 两个物体，以 4.9 米/秒 ^{2} 的加速度匀加速竖直上升。如果物体 A 的质量是 1 千克，物体 B 的质量是 2 千克，如图(a)所示。求：(1)拉力 F 的大小；(2)连接 AB 的细绳上的张力。

[分析]物体 A、B 在拉力 F 和重力 m_Ag、m_Bg 的作用下，向上作匀加速直线运动。为求连接 A、B 的细绳上的张力，要将 A、B 隔离研究。

[解答](1)对 A、B 整体，根据牛顿第二定律

$F-(m_A+m_B)g=(m_A+m_B)a$，

$F=(m_A+m_B)(g+a)$

$=(1+2)(9.8+4.9)$牛$=44.1$牛

(2)物体 B 受力情况如图(b)所示。

$T-m_Bg=m_Ba$，

$T=m_B(g+a)=2\times(9.8+4.9)$牛$=29.4$牛。

877、甲乙两盘质量各为 10 克，悬于线的两端，如图(a)所示。如果滑轮和线的质量以及它们间的磨擦都不计。两盘内分别放 m_1 和 m_2 的物体，且 $m_1=14$ 克，$m_2=30$ 克。求：

(1)系统运动的加速度多大？

(2)物体对盘的压力各多大？

[分析]甲乙两盘放有物体 m_1 和 m_2 后，物体 m_1 将竖直向上作匀加速运动，m_2 将竖直向下作匀加速运动，受力情况如图(b)所示。

[解答](1)设盘的质量为 m，根据牛顿第二定律

$$(m+m_2)g-T_2=(m+m_2)a \quad (1)$$

$$T_1-(m_1+m)g=(m_1+m)a \quad (2)$$

$$T_1=T_2 \quad (3)$$

联立(1)、(2)、(3)式得

$$a=\frac{(m_2-m_1)g}{m_1+m_2+2m}$$

$$=\frac{(0.03-0.014)\times 9.8}{0.03+0.014+0.02}\text{米/秒}^2=2.45\text{米/秒}^2\text{。}$$

(2)分别以物体 m_1、m_2 作研究对象，受力情况如图(c)所示。根据牛顿第二定律

$$N_1-m_1g=m_1a \quad (4)$$

$$m_2g-N_2=m_2a \quad (5)$$

解得 $N_1=m1(g+a)=0.014\times12.35$牛

$=0.17$牛，

$N_2=m_2(g-a)=0.03\times7.35$牛

$=0.22$牛。

根据牛顿第三定律，物休对盘的压力 N'_1、N'_2 在数值上等于盘对物体的压力 N_1、N_2，方向相反，即

$N_1'=0.17$牛，方向向下；

$N_2'=0.22$牛，方向向下。

878．如图(a)所示，物体 A 和物体 B 的质量都是 2 千克，求 MN 段绳子的张力是多大？如果再在 B 物体上放一个 0.5 千克的物体，情况又怎样？

[解答] 物体 A 和 B 的质量都是 2 千克，它们所受的重力 $G=mg=2\times9.8$牛$=19.6$牛。所以在图(a)的情况下，MN 段绳子张力为 19.6 牛。

如在 B 物体上放一个 0.5 千克的物体，如图(b)所示。根据牛顿第二定律

$$T_A-m_Ag=m_Aa \quad (1)$$

$$m'_Bg=T_B=m'_Ba \quad (2)$$

$$T_A=T_B \quad (2)$$

由(1)、(2)、(3)式得

$$a=\frac{m'_Bg-m_Ag}{m_A+M'_B}=\frac{2.5\times9.8-2\times9.8}{2+2.5}\text{米}/\text{秒}^2$$

$$=1.1\text{米}/\text{秒}^2$$

$$T_A=m_A(g+a)=2\times1.1+2\times9.8\text{牛}$$

$$=21.8\text{牛}。$$

MN 段绳子上的张力 T 在数值上等于 T_A 和 T_B，为 21.8 牛。

879．如图(a)所示，物体质量为 m，人的质量为 M。如果绳子和滑轮的质量和摩擦不计，当人竖直向下拉绳子时，求下列情况下人对地面的压力

(1)当物体匀速上升时；

(2)当物体以加速度 a 作匀加速上升时。

［解答］ 物体和人的受力情况，如图(b)所示。

(1)当物体匀速上升时

$$T_1-mg=0 \quad (1)$$

$$T_2+N-Mg=0 \quad (2)$$

$$T_1=T_2 \quad (3)$$

联立(1)、(2)、(3)式得 N=(M-m)g。

根据牛顿第三定律，人对地面的压力的大小

N’=N，

所以 N’=(M-m)g，方向向下。

(2)当物体以 a 向上匀加速运动时，根据牛顿第二定律：

$$T_1-mg=ma \quad (3)$$

$$T_2+N-Mg=0 \quad (4)$$

$$T_1=T_2 \quad (5)$$

联立(3)~(5)式得 N=Mg-m(g+a)。

因为 N’=N，

所以 N’=Mg-m(g+a)=(M-m)g-ma，方向向下。

880．跨过定滑轮的一条绳子，一端固定在箱上，另一端被站在箱中的人拉住如图(a)所示。已知箱的质量为 40 千克，人的质量为 60 千克，当人以 550 牛的力拉绳时，求：(1)箱的加速度多大？(2)人对箱的压力多大？(g=10 米/秒 ^{2})

［分析］ 人随箱一起向上作匀加速运动，箱子所受力为两根绳子的拉力以及人和箱的重力。如图(b)所示。为求人对箱的压力，可将人隔离研究。人受绳的拉力、重力和箱的弹力，受力情况如图(c)所示。

［解答］　设箱子质量为 M，人的质量为 m，根据牛顿第二定律列方程

对人和箱组成的系统　　　$2T-(M+m)g=(M+m)a$，

$$a=\frac{2T-(M+m)g}{(M+m)}=\frac{2\times550-(40+60)\times10}{(40+60)}\text{米/秒}^2$$

$$=1\text{米/秒}^2$$

对人　　　　　　$T+N-mg=ma$，

$N=m(g+a)-T=60(10+1)$牛-550牛

$=110$牛。

人对箱子的压力　　　$N'=N=110$牛，方向向下。

881．如图(a)所示。两物体质量分别为 m_1、m_2，$m_1=2m_2$，设滑轮和绳子的质量和摩擦都不计。求在运动过程中，弹簧秤的读数多大？

［分析］　根据题意，m_1 作竖直向下匀加速运动，m_2 竖直向上作匀加速运动，且加速度大小相等，滑轮处于平衡状态，弹簧秤的读数等于绳子张力的两倍。物体的受力情况如图(b)、(c)所示。

［解答］　根据牛顿第二定律

$$m_1g-T_1=m_1a \qquad (1)$$

$$T_2-m_2g=m_2a \qquad (2)$$

$$T_1=T_2 \qquad (3)$$

联立(1)、(2)、(3)式得

$$a=\frac{(m_1-m_2)g}{m_1+m_2}=\frac{m_2}{3m_2}g=\frac{1}{3}g。$$

$$T_2=m_2(a+g)=\frac{4}{3}m_2g。$$

弹簧秤读数　　$T'=T=2T_2=\frac{8}{3}m_2g。$

882．一条绳子跨过定滑轮拴着两个物体，重的在上，轻的在下，相距 2 米，如图(a)所示。放手后经 2 秒二物体到达同一水平面。求两物体的质量比。

［分析］　根据题意，m_1 竖直向下匀加速，m_2 竖直向上匀加速。从静止开始经 2 秒 m_1 和 m_2 移动的距离各为 1 米。m_1 和 m_2 的受力情况见图(b)。

［解答］　根据牛顿第二定律

$$m_1g-T_1=m_1a \qquad (1)$$

$$T_2-m_2g=m_2a \qquad (2)$$

$$T_1=T_2 \qquad (3)$$

由(1)~(3)式得　　　$m_1g-m_2g=m_1a+m_2a$，

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{g+a}{g-a} \qquad (4)$$

根据运动学公式$s=\frac{1}{2}at^2$

得　　　　$a=\frac{2s}{t^2}$　　　　(5)

由(5)式代入(4)式　　$\frac{m_1}{m_2}=\frac{g+2s/t^2}{g-2s/t^2}=\frac{9.8+2/4}{9.8-2/4}=1.1$。

883．如图(a)所示，轻滑轮两边分别用细绳悬挂托盘和砝码，每个托盘的质量和砝码的质量都是 m，系统处于静止状态时，右边砝码挂在盘底的上方 l 处。如果一切阻力都可忽略不计，求右边砝码由于细绳断裂下落和盘底发生碰撞瞬间，盘子的速度。

［分析］　由于一切阻力都可忽略不计，右边砝码断线后作自由落体运动。下落距离s_1后[见图(b)]和右盘相撞。根据运动学公式$s_1=\frac{1}{2}gt^2$。同时右盘以加速度a上升，距离s_2且$s_2=\frac{1}{2}at^2$。而在撞前瞬间砝码速度$v_1=\sqrt{2gs_1}$，右盘(或左盘)速度$v_2=\sqrt{2as_2}$。

［解答］　右边砝码断线后作自由落体运动，左右两盘做匀加速运动，根据牛顿第二定律和运动学公式有

2mg-mg=3ma　　　　(1)

$s_2=\frac{1}{2}at^2$　　　　(2)

$s_1=\frac{1}{2}gt^2$　　　　(3)

由(1)式得　　　　$a=\frac{1}{3}g$　　　　(4)

将(4)式代入(2)式得　　　　$s_2=\frac{1}{6}gt^2$　　　　(5)

且　　　　$l=s_1+s_2$　　　　(6)

(3)、(5)、(6)式联立求解得　　$s_1=\frac{3}{4}l$，$s_2=\frac{1}{4}l$。

碰撞前瞬间右砝码的速度

$v_1^2=2gs_1$，$v_1=\sqrt{\frac{3}{2}gl}$(方向竖直向下)。

碰撞前右盘的速度

$v_2^2=2as_2$，$v_2=\sqrt{\frac{1}{6}gl}$(方向竖直向上)。

884．一个滑轮两边分别挂着 A 和 B 两个物体，它们的质量分别为m_A=20 千克，m_B=10 千克，今用力 F 将滑轮提起，见图(a)。当 F 分别等于(1)98 牛；(2)196 牛；(3)392 牛；(4)784 牛时。求出物体 A 和 B 的加速度和两边绳中的张力(滑轮的质量和摩擦不计)。

[分析] 用力将滑轮提起时，绳子上的张力$T=\frac{F}{2}$，物体A、B受力情况如图(b)所示。设 a_A 为物体 A 对地面的加速度，a_B 为物体 B 对地面的加速度。

[解答] 根据牛顿第二定律

$$T-m_A g=m_A a_A \qquad (1)$$

$$T-m_B g=m_B a_B \qquad (2)$$

$$T=\frac{F}{2} \qquad (3)$$

将(3)式代入(1)式得

$$a_A=\frac{F}{2m_A}-g \qquad (4)$$

将(3)式代入(2)式得

$$a_B=\frac{F}{2m_B}-g \qquad (5)$$

当 F=98 牛时，

$$a_A=\frac{98}{2\times 20}\text{米/秒}^2-9.8\text{米/秒}^2=-7.35\text{米/秒}^2。$$

$$a_B=\frac{98}{2\times 10}\text{米/秒}^2-9.8\text{米/秒}^2=-4.9\text{米/秒}^2。$$

两者都是负值是不合理的，此时绳的拉力 T=F/2=49 牛，均小于两物体受的重力，根本提不起来。

当 F=196 牛时，

$$a_A=\frac{196}{2\times 20}\text{米/秒}^2-9.8\text{米/秒}^2=-4.9\text{米/秒}^2，$$

$$a_B=\frac{196}{2\times 10}\text{米/秒}^2-9.8\text{米/秒}^2=0。$$

表示仍然提不起。此时 T=98 牛，恰好等于 B 物体受的重力。

当 F=392 牛时，

$$a_A=\frac{392}{2\times 20}\text{米/秒}^2-9.8\text{米/秒}^2=0，$$

$$a_B=\frac{392}{2\times 10}\text{米/秒}^2-9.8\text{米/秒}^2=9.8\text{米/秒}^2。$$

表示 A 不动，B 以 9.8 米/秒 ^{2} 加速度上升。

此时 T=196 牛。

当 F=784 牛时，

$$a_A=\frac{784}{2\times20}米/秒^2-9.8米/秒^2=9.8米/秒^2，$$

$$a_B=\frac{784}{2\times10}米/秒^2-9.6米/秒^2=29.4米/秒^2。$$

此时 $T=\frac{784}{2}牛=392牛。$

885．在光滑的水平桌面上放一个质量为4千克的物体A，通过定滑轮把物体A和质量为1千克的物体B联在一起，如图(a)所示。试求：

(1)它们的加速度；

(2)绳的拉力。

[解法一] 作出物体的受力图(b)。

根据牛顿第二定律

(1)以A、B为整体 $m_Bg=(m_A+m_B)a$，

$$a=\frac{m_B}{m_A+m_B}\cdot g=\frac{1\times9.8}{1+4}米/秒^2=1.96米/秒^2。$$

(2)以A为研究对象

$T=m_Aa=4\times1.96$ 牛=7.8牛。

[解法二] 用隔离法解题，由牛顿第二定律

$$T=m_Aa \quad (1)$$

$$m_Bg-T'=m_Ba \quad (2)$$

$$T=T' \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式得 $a=\frac{m_Bg}{m_A+m_B}=\frac{1\times9.8}{1+4}米/秒^2=1.96米/秒^2，$

$$T=m_Aa=4\times1.96牛=7.8牛。$$

886．一个重为 G_2 的物体通过伸长可以忽略的细绳跟悬挂的重物 G_1 相连。G_2 沿水平面作匀加速运动，它和桌面的滑动摩擦系数等于μ。求绳的张力和滑轮所受的压力。(滑轮的质量和摩擦都不计)

[解答] 求绳子的张力解法如上题。为求得滑轮所受到的压力可以绳子为研究对象，列出平衡方程

$$N_{滑}\sin45^o=T_1' \quad (1)$$

$$N_{滑}\cos45^o=T_2' \quad (2)$$

方程中 $N_{滑}$ 是滑轮对绳子的压力，和滑轮受到的压力是相互作用力，且

$$T_1'=T_2'=T \quad (3)$$

从(1)式和(3)式解得 $N_{滑}=\frac{T}{\sin 45^{o}}=\sqrt{2}T$。

根据牛顿第二定律 $G_1-f=(\frac{G_1}{g}+\frac{G_2}{g})a$ (4)

$$f=\mu\cdot G_2 \quad (5)$$

$$T-f=\frac{G_2}{g}a \quad (6)$$

由(4)、(5)、(6)式得 $T=\frac{G_1G_2}{G_1+G_2}(1+\mu)$，

$$N_{滑}=\frac{\sqrt{2}G_1G_2}{G_1+G_2}(1+\mu)。$$

887．将质量为 m 和 M 的两个小球 A 和 B 分别拴在一根细线的两端，线长为 l，M=3m。将小球 B 放在光滑的水平桌面上，桌面离地面的高度为 h。小球 A 刚跨过桌边，当 A 下落时拉着 B 沿桌面滑动。A 下落到地面后，静止在地上，B 继续前滑，滑出桌面后落地。求 B 球和 A 球着地点的距离 s[设 l>h，见图(a)]。

［分析］ B 球随 A 球作匀加速滑动，当 A 球着地时 B 球获得速度 v=$\sqrt{2ah}$，并继续沿桌面向前滑动，滑出桌面后B球作平抛运动。平抛运动的水平距离就是B球着地点和A球着地点的距离。

［解答］ 作出小球的受力图(b)。小球 A 受到细线的张力 T’和重力 mg，根据牛顿第二定律

$$mg-T'=ma \quad (1)$$

小球 B 受重力 Mg，弹力 N 和张力 T。且

$$T=Ma=3ma \quad (2)$$

从(2)式代入(1)式得 $a=\frac{g}{4}$。

由运动学公式可知，A 球落地时 B 球的速度

$$v=\sqrt{2ah}=\sqrt{\frac{1}{2}gh}。$$

B 球滑出桌后在空中运行时间

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}。$$

B 球滑出桌面后的水平距离

$$s=vt=\sqrt{\frac{1}{2}gh}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}=h。$$

888．木块 A 质量为 4 千克，它上面放的砝码 B 质量为 0.5 千克。砝码盘质量为 0.5 千克，盘中砝码质量为 1 千克，装置如图(a)所示。木块和水平桌面间的滑动摩擦系数为 0.2，砝码 B 和木块 A 间没有相对滑动。如果滑轮和绳的质量及摩擦都不考虑。求：(1)木块运动的加速度和绳子

的张力；(2)砝码和木块间的静摩擦力；(3)如果砝码盘与地相距1米，A与滑轮相距3米，系统由静止开始运动，砝码盘着地时速度多大？以后木块是否会撞到滑轮上？

［分析］　因为砝码B和木块A间没有相对滑动，系统以加速度a作匀加速运动，砝码B在静摩擦力作用下随A运动。在砝码盘着地时，木块A和砝码B作匀减速运动。

［解答］　(1)砝码和木块、砝码盘和砝盘受力情况如图(b)所示。根据牛顿第二定律　$(m_3+m_4)g-T'=(m_3+m_4)a$　(1)

$T-\mu(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a$　(2)

$T=T'$　(3)

联立(1)、(2)、(3)式得 $a=\dfrac{(m_3+m_4)g-\mu(m_1+m_2)g}{m_1+m_2+m_3+m_4}$

$=\dfrac{(1.5-0.2\times4.5)\times9.8}{6}$米/秒^2

$=0.98$米/秒^2。

$T=(m_3+m_4)g-(m_3+m_4)a$

$=1.5\times9.8$牛-1.5×0.98牛$=13.23$牛。

(2)根据牛顿第二定律可得，砝码受到的摩擦力f_2，$f_2=m_2a=0.5\times0.98$牛$=0.49$牛，方向向右。由第三牛顿定律知，木块A受到的静摩擦力的0.49牛，但方向向左。

(3)设砝码盘落地速度为v，则

$v=\sqrt{2ah}=\sqrt{2\times0.98\times1}$米/秒$=1.4$米/秒，

木块在这时的速度也为1.4米/秒，此时离开滑轮的距离$s'=3$米-1米=2米。

由牛顿第二定律　$\mu(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a'$，

$a'=\mu g=0.2\times9.8$米/秒$^2=1.96$米/秒^2，它的方向向左。

$s''=\dfrac{v^2}{2a'}=\dfrac{1.4^2}{2\times1.96}$米$=0.5$米。

木块停止运动时距定滑轮距离为$s'-s''=1.5$米，故不会撞到滑轮。

889．A、B、C三个物体，质量分别为$m_A=m_B=0.1$千克，$m_C=0.8$千克，当它们如图(a)所示那样放置时，由它们组成的系统正好作匀速运动。求：(1)物体C和水平桌面间的滑动摩擦系数；(2)如果把物体A移到物体B上，如图(b)所示，求系统的加速度和绳子的张力。

［分析］　如图(a)，系统正好作匀速运动。A、C间没有摩擦力，C和桌面间的滑动摩擦力的大小等于B的重力。把A移到B上，系统作匀加速运动。

［解法一］　(1)根据牛顿第二定律　$m_Bg-\mu(m_A+m_C)g=0$，

$\mu=\dfrac{m_B}{m_A+m_C}=\dfrac{0.1}{0.1+0.8}=0.11$。

(2)根据牛顿第二定律

$$(m_A+m_B)g-\mu m_C g=(m_A+m_B+m_C)a,$$

$$a=\frac{(m_A+m_B-\mu m_C)}{(m_A+m_B+m_C)}\cdot g=\frac{0.2-0.11\times 0.8}{0.2+0.8}\times 9.8\text{米/秒}^2$$

$$\approx 1.1\text{米/秒}^2。$$

把物体 C 隔离，得 $T-\mu m_C g=m_C a$，

$T=m_C(\mu g+a)=0.8(0.11\times 9.8+1.1)$牛=1.74 牛。

［解法二］　(1)用隔离法解，如图(c)所示，由题意知 a=0。

对 A、C　　$T_1-f=0$　　(1)

$f=\mu N_1=\mu(m_A+m_C)g$　　(2)

$m_B g-T_1'=0$　　(3)

由(1)、(2)、(3)式解得　$\mu=\frac{m_B}{m_A+m_C}=\frac{0.1}{0.1+0.8}=0.11$。

(2)隔离体受力分析见图(d)所示。根据牛顿第二定律得

$T_2-f'=m_C a$　　(4)

$(m_A+m_B)g-T_2'=(m_A+m_B)a$　　(5)

$f'=\mu m_C g$　　(6)

由(4)、(5)、(6)式解得

$$a=\frac{(m_A+m_B-\mu m_C)g}{m_A+m_B+m_C}=\frac{(0.2-0.11\times 0.8)\times 9.8}{0.1+0.1+0.8}\text{米/秒}^2$$

$$=1.1\text{米/秒}^2。$$

$T_2=m_C(\mu g+a)=0.8(0.11\times 9.8+0.98)$牛=1.74 牛。

890．如图(a)所示，A 的质量为 m_A，A 和平面间的摩擦系数为 μ。小球 B 的质量为 m_B，悬吊小球的细线和竖直方向的夹角为 θ，滑轮和线的质量、滑轮的摩擦都不计。求(1)小球 B 所受线的拉力 T；(2)C 物体的质量 m_C；(3) θ 是否可能为 60°？试对 θ 角的可能范围加以讨论。

［分析］　系统的运动是在物体 C 的重力和平面对 A 的滑动摩擦力作用下产生的。因为 C 的质量未知，故不能用整体法求出加速度 a，但可以用隔离 B 的方法来求得。夹角 θ 是跟加速度 a 有关的量，a 增大，θ 随之增大，a=0，θ=0°。小球 B 的受力情况如图(b)所示。

［解答］　(1)小球 B 跟随 A 一起作加速运动，a 为小球的加速度，根据牛顿第二定律可得

$T\sin\theta=m_B a$　　(1)

$T\cos\theta-m_B g=0$　　(2)

由(1)、(2)式消去 T 得　$a=g\tan\theta$　　(3)

由(2)式可得　$T=\frac{m_B g}{\cos\theta}$。

(2)把 A、B、C 作为一个系统，加速度为 a，根据牛顿第二定律

$m_C g-f=(m_A+m_B+m_C)a$　　(4)

$$N-m_Ag-m_Bg=0 \quad (5)$$

$$f=\mu N \quad (6)$$

联立(3)～(6)式得 $m_c=\frac{(m_A+m_B)(\mu+tg\theta)}{1-tg\theta}$。

(3)从$a=gtg\theta$中可知，θ随a变而变，即$tg\theta=\frac{a}{g}$。如摩擦力不计，a也不可能达到g。a必小于g，tgθ<1，0<45°。θ角的可能范围应为0°≤θ<45°。所以θ不可能等于60°。

如果根据第(2)小题的结果，$m_C=\frac{(m_A+m_B)(\mu+tg\theta)}{1-tg\theta}$。当$\theta=60°$时，1-tgθ<1，$m_C$为负值，这也是不可能的。

891．在光滑的水平桌面上放着一块质量M=10千克的木板，质量m=5千克的物块压在板上，它们间的摩擦系数μ=0.1。物块和质量m′的重物由跨过滑轮的细绳连接，如图。(滑轮和细绳的质量、滑轮轴上的摩擦都可以忽略不计。)

假设静摩擦系数等于滑动摩擦系数，g=10米/秒²，试分别计算(1)当m′=0.4千克时；(2)当m′=1千克时物块和木板的加速度以及它们间的相互作用力。

［分析］ 根据题设条件，木板能够产生的最大加速度

$$a'=\frac{\mu mg}{M}=\frac{0.1\times5\times10}{10}米/秒^2=0.5米/秒^2。$$

只有当物块加速度a>a'时，物块和木板才能发生相对滑动。当a<a'时，物块和木板保持相对静止。a=a'时刚要发生相对滑动，设这时的重物$m=m_0'$，a的大小和m'有关。当$m'\le m_0'$时，M和m间无相对滑动。当$m'>m_0'$时M和m间有相对滑动。

［解答］ 当M和m刚要发生相对滑动(但尚未滑动)时，a=a'。

$$a'=\frac{\mu mg}{M}=\frac{0.1\times5\times10}{10}米/秒^2=0.5米/秒^2。$$

这时重物质量为m_0'。由牛顿第二定律得

$$m_0'g-T=m_0'a' \quad (1)$$

$$T=(m+M)a' \quad (2)$$

(2)式表示尚未滑动。

由(1)、(2)式得 $m_0'=\frac{(m+M)a'}{g-a'}=\frac{(5+10)\times0.5}{10-0.5}$千克

$=0.79$千克

(1)m'=0.4千克<0.79千克，M和m无相对滑动，可将m、M、m'作一个系统，由牛顿第二定律

$$m'g = (M + m + m')a，$$

$$a = \frac{m'}{(M + m + m')} \cdot g = \frac{0.4}{10 + 5 + 0.4} \times 10\text{米}/\text{秒}^2$$

$$= 0.26\text{米}/\text{秒}^2。$$

此时 M 和 m 之间存在着压力 50 牛和静摩擦力 f_1。

$$f_1=Ma=10\times0.26\text{牛}=2.6\text{牛}。$$

(2)m’=1 千克>0.79 千克，M 和 m 之间有相对滑动。它们之间存在着压力 50 牛和滑动摩擦力 f_2。

$$f_2=\mu mg=0.1\times5\times10\text{牛}=5\text{牛}。$$

物体的加速度 a_1 和木板的加速度 a_2 可由牛顿第二定律求出

$$m'g-T=m'a_1 \qquad (3)$$

$$T-\mu mg=ma_1 \qquad (4)$$

$$\mu mg=Ma_2 \qquad (5)$$

由(3)式和(4)式解得

$$a_1 = \frac{m'-\mu m}{m'+m}g = \frac{1-0.1\times5}{1+5}\times10\text{米}/\text{秒}^2 = 0.83\text{米}/\text{秒}^2。$$

由(5)式解得

$$a_2 = \frac{\mu mg}{M} = \frac{0.1\times5\times10}{10}\text{米}/\text{秒}^2 = 0.5\text{米}/\text{秒}^2。$$

892．已知 m_1=5 千克，m_2=10 千克，m_3=20 千克，绳的质量及一切摩擦不计(如图所示)。试求 m_3 的下落加速度及各绳的张力。

[分析] 设两绳的拉力作用在 m_3 的质心上,由图可知 m_3 下落的距离跟 m_1、m_2 滑动的距离相等。所以 $a_1=a_2=a_3=a$。对 m_1、m_2、m_3 分别隔离，应用牛顿第二定律即可解得。

[解答] 应用牛顿第二定律

对 m_1 $\quad T_1=m_1a \qquad (1)$

对 m_2 $\quad T_2=m_2a \qquad (2)$

对 m_3 $\quad m_3g-T_1-T_2=m_3a \qquad (3)$

由(1)~(3)式联立得

$$a = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot g = \frac{20}{5+10+20}\times9.8\text{米}/\text{秒}^2$$

$$= 5.6\text{米}/\text{秒}^2。$$

$$T_1 = 5\times5.6\text{牛} = 28\text{牛}，$$

$$T_2 = 10\times5.6\text{牛} = 56\text{牛}。$$

893．图(a)中，m_1=3 千克，m_2=4 千克，m_3=3 千克。m_1、m_2 和水平面的摩擦系数分别是 μ_1=0.1，μ_2=0.2。设滑轮和绳子的质量及滑轮和绳子摩擦都不计。求绳子的张力及三个物体的加速度？(g=10 米/秒 ²)

[分析] 由图可知，m_3 竖直向下作匀加速运动，m_1 向右作匀加速运动，m_2 向左作匀加速运动，在相同的时间内 m_3 通过的路程 s_2 为 m_1

和m_2所通过的路程和(s_1+s_2)的$\frac{1}{2}$，即$a_3=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$。m_1、m_2、m_3的受力情况如图(b)所示。

［解答］ 根据牛顿第二定律，

对 m_1 $\quad T_1-\mu_1 m_1 g=m_1 a_1 \quad (1)$

对 m_2 $\quad T_1-\mu_2 m_2 g=m_2 a_2 \quad (2)$

对 m_3 $\quad m_3 g-T_2=m_3 a_3 \quad (3)$

其中 $\quad T_2=2T_1 \quad (4)$

$$a_3=\frac{1}{2}(a_1+a_2) \quad (5)$$

联立(1)~(5)式得

$a_1=3$ 米/秒^2，$a_2=1$ 米/秒^2，$a_3=2$ 米/秒^2。

$T_1=f_2+m_2a_2=12$ 牛，

$T_2=2T_1=24$ 牛。

894．汽车质量为 6 吨，拖车质量为 4 吨，汽车拉着拖车开上山坡，汽车在山坡上每前进 100 米，升高 10 米。汽车和拖车行驶中所受的阻力为车重的 0.04 倍。求汽车拉着拖车以加速度 a=0.2 米/秒^{2}匀加速上坡时汽车的牵引力和拖车受到的拉力。

［分析］ 汽车 M 和拖车 m 的受力情况如图所示，它们都沿斜面以加速度 a 向上作匀加速运动。

［解答］ 根据牛顿第二定律，

对汽车 M

$$F-f_1-T-Mg\sin\alpha=Ma \quad (1)$$

对拖车 m $\quad T'-f_2-mg\sin\alpha=ma \quad (2)$

据题意 $\quad f_1=kMg$，$f_2=kmg$，$\sin\alpha=\frac{1}{10}$。

根据牛顿第三定律 $\quad T=T' \quad (3)$

由(1)~(3)式联立解得

$F=(m+M)a+(m+M)g\sin\alpha+k(m+M)g$

$=(m+M)(a+g\sin\alpha+kg)$

$=10\times10^3\times(0.2+9.8\times0.1+0.04\times9.8)$牛

$=15720$ 牛。

$T'=kmg+mg\sin\alpha+ma$

$=m(kg+g\sin\alpha+a)$

$=4\times10^3\times(0.04\times9.8+9.8\times0.1+0.2)$牛

$=6288$ 牛。

895．如图(a)所示，斜面和水平面的夹角α为 30°，A 的质量为 10 千克，B 的质量为 5 千克，两者用质量可以不计的绳子相连。

(1)如 A 和斜面间的摩擦系数为 0.6，B 和斜面间的摩擦系数为 0.2，物体加速度及绳子的张力多大？

(2)如果把物体 A 和 B 互换位置，物体的加速度和绳子的张力多大？

(3)如果两物体和斜面都光滑无摩擦，则物体的加速度和绳子的张力多大？

［分析］　物体 A、B 的受力情况如图(b)所示。

本题中物体的下滑条件是重力沿斜面的分力应大于最大静摩擦力，即

$$mg\sin\alpha \geq \mu mg\cos\alpha。$$

现有　　$m_Ag\sin30° = 10\times9.8\times0.5$ 牛$=49$ 牛，

$$\mu_A m_A g\cos30° = 0.6\times10\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{牛} = 50.9\text{牛}。$$

即　　$m_Ag\sin\alpha < \mu_A m_A g\cos\alpha$，物体 A 不能自行下滑。

对于物体 B　　$m_Bg\sin30° = 5\times9.8\times0.5$ 牛$=24.5$ 牛，

$$\mu_B m_B g\cos30° = 0.2\times5\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{牛} = 8.5\text{牛}。$$

即：$m_Bg\sin\alpha > \mu_B m_B\cos\alpha$，物体 B 能自行下滑。

［解答］　(1)据所给的条件，物体 A 不能自行下滑，只有当物体 B 下滑到和物体 A 接触后，由于受到物体 B 的作用，二者将以共同加速度下滑，这时绳子的张力为零。它们的加速度根据牛顿第二定律有：

$$(m_A+m_B)g\sin\alpha - \mu_A m_A g\cos\alpha - \mu_B m_B g\cos\alpha = (m_A+m_B)\cdot a,$$

$$a = \frac{(m_A+m_B)g\sin\alpha - \mu_A m_A g\cos\alpha - \mu_B m_B g\cos\alpha}{m_A+m_B}$$

$$= \frac{(10+5)9.8\times0.5 - 0.6\times10\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 0.2\times5\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{10+5}\text{米/秒}^2$$

$$= 0.94\text{米/秒}^2。$$

(2)如 A、B 位置互换，根据上述分析，B 自行下滑能把绳子拉直，物体 A、B 的受力情况如图(c)所示，根据牛顿第二定律

$$m_Bg\sin30° - \mu_B m_B g\cos30° - T = m_Ba \qquad (1)$$

$$m_Ag\sin30° + T' - \mu_A m_A g\cos30° = m_Aa \qquad (2)$$

$$T = T' \qquad (3)$$

解得

$$\alpha = \frac{(m_A+m_B)g\sin30° - (\mu_B m_B + \mu_A m_A)g\cos30°}{m_A+m_B}$$

$$= \frac{(10+5)\times9.8\times0.5 - (0.2\times5+0.6\times10)\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{10+5}\text{米/秒}^2$$

$$= 0.94\text{米/秒}^2。$$

$$T = T' = m_Bg\sin30° - \mu_B m_B g\cos30° - m_Ba$$

$$= (5\times9.8\times0.5 - 0.2\times5\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 5\times0.94)\text{牛}$$

$$= 11.32\text{牛}。$$

(3)A、B 跟斜面没有摩擦，即 $f_A=f_B=0$，根据牛顿第二定律

$$m_A g\sin30° - T = m_A \alpha \quad (1)$$

$$T' + m_B g\sin30° = m_B \alpha \quad (2)$$

$$T = T' \quad (3)$$

解得 $\alpha = g\sin30° = 9.8\times0.5$ 米/秒^2=4.9 米/秒^2。

$T=0$(即绳子上无张力)。

396．质量 $m_1=4$ 千克和 $m_2=8$ 千克的两个物体用一条绳子相连，沿着倾角为 30°的斜面下滑，如图(a)所示。如果 m_1 和斜面间的摩擦系数为 0.25，而 m_2 和斜面间的摩擦系数为 0.50，求：

(1)各物体的加速度；

(2)绳的张力。

[分析]　据题意 m_1 自行下滑的加速度 a_1 大于 m_2 自行下滑的加速度 a_2(见前题)所以绳子张紧，系统以同一加速度 a 下滑。

[解法一]

(1)根据牛顿第二定律

$$m_1 g\sin30° + m_2 g\sin30° - \mu_1 m_1 g\cos30° - \mu_2 m_2 g\cos30° = (m_1+m_2)a,$$

$$a = \frac{(m_1+m_2)g\sin30° - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g\cos30°}{(m_1+m_2)}$$

$$= \frac{12\times9.8\times0.5-(1+4)\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{12}\text{米/秒}^2$$

$$= 1.36\text{米/秒}^2。$$

(2)隔离 m_1，它的受力情况如图(b)所示，用牛顿第二定律

$$m_1 g\sin30° - \mu_1 m_1 g\cos30° - T = m_1 a,$$

$$T = m_1(g\sin30° - \mu_1 g\cos30° - a)$$

$$= 4\times(9.8\times0.5-0.25\times9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1.36)\text{牛}$$

$$= 5.67\text{牛}。$$

[解法二]　隔离 m_1 和 m_2，它们的受力情况见图(c)所示。根据牛顿第二定律得

对 m_1　$m_1 g\sin30° - \mu_1 m_1 g\cos30° - T = m_1 a \quad (1)$

对 m_2　$m_2 g\sin30° + T' - \mu_2 m_2 g\cos30° = m_2 a \quad (2)$

$$T = T' \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式解得

$$a=\frac{(m_1+m_2)g\sin 30°-(\mu_1 m_1+\mu_2 m_2)g\cos 30°}{m_1+m_2}$$

$$=\frac{12\times 9.8\times 0.5-(1+4)\times 9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{12}\text{米/秒}^2=1.36\text{米/秒}^2。$$

$$T=m_1(g\sin 30°-\mu_1 g\cos 30°-a)$$

$$=4\times(9.8\times 0.5-0.25\times 9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1.37)\text{牛}=5.67\text{牛}。$$

897．在一个倾斜 30°角的光滑斜面上，放一个质量是 3 千克的物体 A，通过定滑轮和一个质量是 2 千克的物体 B 相连接，如图(a)所示。求两物体的加速度和绳的拉力？

［分析］ $m_Bg>m_Ag\sin 30°$。A 物沿斜面向上匀加速运动，B 物竖直向下匀加速运动，且两者的加速度大小相等。A、B 的受力情况如图(b)所示。

［解答］ 根据牛顿第二定律

对 A $\quad T-m_Ag\sin 30°=m_Aa \qquad (1)$

对 B $\quad m_Bg-T'=m_Ba \qquad (2)$

$T=T' \qquad (3)$

由(1)、(2)式得 $\quad m_Bg-m_Ag\sin 30°=(m_A+m_B)a$，

$$a=\frac{m_Bg-m_Ag\sin 30^o}{m_A+m_B}=\frac{(2-3\times 0.5)\times 9.8}{5}\text{米/秒}^2$$

$$=0.98\text{米/秒}^2$$

由(2)式得 $\quad T'=m_B(g-a)=2\times(9.8-0.98)$牛

$=17.6$ 牛。

898．斜面体的倾角为 30°，物体 A 的质量 $m_A=14$ 千克，物体 B 的质量 $m_B=2$ 千克。A、B 用细绳相连并跨过斜面体 C 顶端的定滑轮，如图(a)所示。当物体 A 沿斜面以 2.5 米/秒 ^{2} 的加速度匀加速下滑时，C 保持静止状态。如果定滑轮和连接 A、B 两物体的细绳和滑轮的摩擦忽略不计，求斜面体 C 所受地面的摩擦力。

［分析］ 斜面体 C 所受地面的摩擦力的大小可以由 A 对 C 的压力和滑轮上绳子对 C 的压力所决定，它的方向尚不能确定，暂设为右。斜面体 C 的受力情况见图(b)。本题虽然没有说明 A、C 间有无摩擦。但通过计算可知，如果斜面光滑，A 沿斜面下滑的加速度必大于 2.5 米/秒 ^{2}，从而可以确定摩擦力是存在的。

［解法一］

对 C $\quad \Sigma F_x=T'_A\cos 30°+f_{AC}\cos 30°-N_{AC}\sin 30°-fc=0 \qquad (1)$

对 A、B 整体 $\quad m_Ag\sin 30°-f_{CA}-m_Bg=(m_A+m_B)a \qquad (2)$

对 B $\quad T_B-m_Bg=m_Ba \qquad (3)$

又 $\quad N_{CA}=m_Ag\cos 30° \qquad (4)$

$T'_A=T_A=T_B \qquad (5)$

$N_{CA}=N_{AC} \qquad (6)$

$$f_{AC}=f_{CA} \qquad (7)$$

由(1)~(7)式联立

得 $$fc=-m_A a\cos30°$$

$$=-14\times2.5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{牛}$$

$$=-31\text{牛}。$$

式中求得 f_C 为负值，表明跟原设方向相反。

[解法二] 把 B、C 及绳等作为一个体系，A 为独立物体。A 物体受到重力和体系作用力后沿斜面向下加速运动[见图(c)]，其加速度为 a。由于重力不可能使 A 获得 x 方向的加速度,故 a_x 完全是由 BC 系统作用于 A 的力在 x 方向的分量产生的，在 x 方向的分力为

$$F_x=m_A a\cos30^o$$

$$=14\times2.5\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{牛}$$

$$=31\text{牛}。$$

B、C 系统受到的外力是重力(G_B、G_C)，地面的弹力以及 A 对 BC 系统的作用力和地面对 C 的摩擦力。由于重力、弹力都在铅直方向，它们不可能在 x 方向产生效应，故在 x 方向平衡的条件由 A 对 BC 系统的作用力在 x 方向的分力和摩擦力决定，即 A 对 BC 系统的作用力在 x 方向的分力为-F_x，而地给 C 的摩擦力和 F_x 同向，其量值相等。

899．如图(a)所示。$m_1=m_2=100$ 克，α=30°，斜面和物体间的摩擦系数为 0.1，m_1 离地面是 0.5 米。求系统由静止开始运动，当 m_1 落地后，m_2 还能继续滑行多远才开始下滑？(g=10 米/秒²)

[分析] m_2 随系统加速上升，当 m_1 落地后，作减速上升，m_1 着地时的速度就是 m_2 作减速运动的初速度，直到速度减小到零，才开始下滑。m_1 和 m_2 的受力情况如图(b)所示。

[解答] 根据牛顿第二定律

得 $$m_1g-\mu m_2g\cos30°-m_2g\sin30°=(m_1+m_2)a,$$

$$a=\frac{[m_1-(\sin30^o+\mu\cos30^o)m_2]g}{m_1+m_2}$$

$$=\frac{[0.1-(\frac{1}{2}+0.1\times\frac{\sqrt{3}}{2})\times0.1]\times10}{0.2}\text{米/秒}^2=2.07\text{米/秒}^2。$$

当 m_1 落地时，m_2 的受力情况如图(c)所示。

根据牛顿第二定律

得 $$f+m_2g\sin30°=m_2a',$$

$$f=\mu m_2g\cos30°,$$

$$a'=(\sin30°+\mu\cos30°)g=(0.5+0.087)\times10\text{米/秒}^2$$

$=5.87$ 米/秒 ^{2}。

m_2 作减速运动，其初速度

$$v_0=\sqrt{2ah}=\sqrt{2\times 2.07\times 0.5}\text{米/秒}=1.44\text{米/秒}。$$

继续滑行的距离由 $v^2=v_0^2-2a's=0$ 求得

$$s=\frac{v_0^2}{2a'}=\frac{2.07}{2\times 5.87}\text{米}=0.18\text{米}。$$

还能滑行 0.18 米才开始下滑。

900．在倾角为 30°的斜面上放一物体 A，它和斜面间的摩擦系数为 0.2，物体 A 用一根细绳经过斜面顶端的定滑轮跟一个质量为 19.6 千克的物体 B 相连，如图(a)所示。当 B 上再放置一个质量为 1 千克的砝码 C 后，B 受到的压力为 11 牛，求 A 物体的质量。(细绳质量、伸缩以及它和定滑轮间的摩擦都可不计，g 取 10 米/秒 ^{2})

［分析］ 据题意，系统中物体 A、B、C 以同一个大小的加速度 a 作匀加速运动。对 C 物研究，它受重力 m_cg 和弹力 N 作用，其中 N 是物体 B 受到的压力 N'的反作用力，根据牛顿第三定律 N=N'=11 牛。而重力 $m_cg=10$ 牛。现 $N>m_cg$，说明加速度 a 在这里的方向竖直向上，因而 A 物沿斜面向下运动。

［解答］ 根据牛顿第二定律

$$m_Ag\sin 30°-\mu m_Ag\cos 30°-(m_B+m_C)g=(m_A+m_B+m_C)a,$$

$$m_A(g\sin 30°-\mu g\cos 30°-a)=(m_B+m_C)(g+a)$$

$$m_A=\frac{(m_B+m_C)(g+a)}{g\sin 30°-\mu g\cos 30°-a} \qquad (1)$$

对 C $\qquad N-m_cg=m_ca,$

$$a=\frac{N-m_cg}{m_C}=\frac{11-10}{1}\text{米/秒}^2=1\text{米/秒}^2。$$

将 a 值代入(1)式

得 $$m_A=\frac{(19.6+1)(10+1)}{5-\sqrt{3}-1}\text{千克}=99.9\text{千克}。$$

901．如图(a)所示，斜面长 l=2 米，高 h=1 米，顶端有一个定滑轮，一条线的两端各吊一个物体，质量分别为 $m_1=1.2$ 千克，$m_2=0.8$ 千克，m_1 静止在顶端时，m_2 正好在斜面底端，m_1 由静止开始下降，到达地面时速度为 $\sqrt{5}$ 米/秒，g 取 10 米/秒 ^{2}。求：

(1) m_1 从静止开始下降到达地面所需时间？

(2) m_2 能在斜面上到达的最大高度？

(3) m_3 和斜面间的摩擦系数？

［分析］ m_1 随系统以同一大小的加速度 a 运动，当 m_1 落地时，m_2 以 a'作匀减速运动，待速度为零时 m_2 达到最大高度。

[解答]　m_1着地的速度$v=\sqrt{5}$米/秒，根据运动学公式得

$$a=\frac{v^2}{2h}=\frac{5}{2\times 1}\text{米/秒}^2=2.5\text{米/秒}^2,$$

$$t=\frac{v}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2.5}\text{秒}=0.89\text{秒}。$$

此时m_2开始在斜面上匀减速上升，其初速度$v_0=\sqrt{5}$米/秒，加速度为 a'，受力情况如图(b)所示。根据牛顿第二定律得

$$f+m_2g\sin\alpha=m_2a' \quad (1)$$

$$f=\mu m_2g\cos\alpha \quad (2)$$

由于μ未知，从(1)、(2)两式无法求得 a'，但是在 m_1 着地前，m_2 受到的滑动摩擦力的大小不因 m_1 着地而变化，而 m_1 着地前

对 m_1、m_2 整体　　$m_1g-m_2g\sin\alpha-\mu m_2g\cos\alpha=(m_1+m_2)a$ (3)

由(1)、(2)式得　　$a'=(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)g$ (4)

且　　$\sin\alpha=\frac{h}{L}=0.5$，　$\cos\alpha=0.866$。

从(3)式得

$$\mu=\frac{m_1(g-a)-m_2(g\sin\alpha+a)}{m_2g\cos\alpha}$$

$$=\frac{1.2(10-2.5)-0.8(5+2.5)}{0.8\times 10\times 0.866}$$

$$=0.43。$$

将μ值代入(4)式中得

$$a'=(0.5+0.43\times 0.866)\times 10\text{ 米/秒}^2$$

$$=8.72\text{ 米/秒}^2。$$

由运动学公式

$$v^2=v_0^2-2a's=0。$$

$$v_0^2=2a's \quad (5)$$

将 a'值代入(5)式

$$s=\frac{v_0^2}{2a'}=\frac{5}{2\times 8.72}\text{米}=0.28\text{米}。$$

m_2 能在斜面上到达的最大高度

$$h_{max}=(1+0.28)\sin\alpha\text{米}$$

$$=1.28\times 0.5\text{ 米}=0.64\text{ 米}。$$

902．图(a)中物体 A 的质量 m_A=100 克，物体 B 的质量 m_B=40 克，用一根细绳跨过滑轮相连接，物体 B 跟斜面的摩擦系数μ=0.2，当 A 物体下降 h=20 厘米时，突然把绳割断，求绳割断后再经过 t=1 秒的时候物体 B 的速度(斜面倾角α=60°)。

[分析]　物体 B 随系统沿斜面向上作匀加速运动，当绳子突然割断，物体 B 就开始沿斜面向上作匀减速运动。

[解答]　设细绳割断前系统加速度为 a，作受力图(b)，根据牛顿第

二定律得　　$m_Ag-m_Bg\sin60°-\mu m_Ag\cos60°=(m_A+m_B)a$，

$$a=\frac{(m_A-m_B\sin60°-\mu m_B\cos60°)g}{m_A+m_B}$$

$$=\frac{(0.1-0.04\times\frac{\sqrt{3}}{2}-0.2\times0.04\times\frac{1}{2})\times9.8}{0.1+0.04}\text{米/秒}^2$$

$$=4.3\text{米/秒}^2\text{。}$$

当绳突然割断，物体 B 的加速度为 a’，作出 B 物受力图(c)，根据牛顿第二定律

$$\mu m_Bg\cos60°+m_Bg\sin60°=m_Ba'，$$

$$a'=(\sin60°+\mu\cos60°)g$$

$$=(\frac{\sqrt{3}}{2}+0.2\times\frac{1}{2})\times9.8\text{米/秒}^2=9.5\text{米/秒}^2\text{。}$$

绳突然割断时 m_B 的速度为 v，根据运动学公式

$$v=\sqrt{2ah}=\sqrt{2\times4.3\times0.2}\text{米/秒}=1.3\text{米/秒。}$$

设 m_B 继续沿斜面向上运动到 v’=0 时所需时间为 t’，则

$$v'=v-a't'=0，t'=\frac{v}{a'}=\frac{1.3}{9.5}\text{秒}=0.14\text{秒。}$$

设 m_B 沿斜面向下运动的加速度为 a″，作出受力图(d)，根据牛顿第二定律

$$a''=(\sin60°-\mu\cos60°)g$$

$$=(\frac{\sqrt{3}}{2}-0.2\times\frac{1}{2})\times9.8\text{米/秒}^2=7.5\text{米/秒}^2\text{。}$$

绳割断后，m_B 经过 1 秒的速度为 v″，则

$$v''=a''(t-t')=7.5\times(1-0.14)\text{米/秒}$$

$$=6.45\text{米/秒。}$$

它的方向沿斜面向下。

903．如图所示，m_1=50 克，两物体和斜面间的摩擦都不计，绳和滑轮的摩擦和质量也不计。求：(1)当 m_2=40 克时，系统的加速度多大？绳子的张力多大？(2)当 m_2 为多大时,系统作匀速运动？此时绳子的张力多大？

［分析］　当 m_2=40 克时，据题意，$m_1g\sin30°<m_2g\sin60°$，m_1 沿斜面加速向上，m_2 沿斜面加速向下，加速度 a 大小相同。系统作匀速运动时，$m_1g\sin30°=m_2g\sin60°$。m_1 和 m_2 的受力情况如图(b)所示。

［解答］　(1)根据牛顿第二定律

得　　$T-m_1g\sin30°=m_1a$　　(1)

$m_2g\sin60°-T=m_2a$　　(2)

将(1)式+(2)式得　$m_2g\sin60°-m_1g\sin30°=m_1a+m_2a$，

$$a=\frac{(m_2\sin60°-m_1\sin30°)}{m_1+m_2}\cdot g$$

$$=\frac{(0.04\times0.866-0.05\times0.5)}{0.04+0.05}\times9.8\text{米}/\text{秒}^2$$

$$=1.05\text{米}/\text{秒}^2$$

$$T=m_1(a+g\sin30°)$$

$$=0.05\times(1.05+9.8\times0.5)\text{牛}$$

$$=0.298\text{牛。}$$

(2)系统作匀速运动，a=0。

$m_1g\sin30°=m_2g\sin60°$，

$$m_2=\frac{m_1\sin30°}{\sin60°}=\frac{0.05\times0.5}{0.866}\text{千克}=0.0289\text{千克}$$

$$=28.9\text{克。}$$

$$T=m_1g\sin30°=0.05\times9.8\times\frac{1}{2}\text{牛}=0.245\text{牛。}$$

904．如图所示，质量 m 的小球放在盒内，盒能从斜面上没有摩擦地滑下。斜面和水平面的夹角等于α。求球对盒的前壁和底的作用力。

［分析］ 小球 m 随盒沿斜面向下加速运动，所受力的作用为重力 mg，盒前壁对它的弹力 N_1 和盒底对它的弹力 N_2。

［解答］ 作出球和盒的受力图，根据牛顿第二定律

对球 m 有 $mg\sin\alpha-N_1=ma$ (1)

$N_2-mg\cos\alpha=0$ (2)

对盒M有 $Mg\sin\alpha+N_1'=Ma$ (3)

且 $N_1=N_1'$ (4)

由(1)、(3)、(4)式联立，得 $a=g\sin\alpha$ (5)

把(5)式代入(1)式 $N_1=0$。

从(2)式得 $N_2=mg\cos\alpha$。

905．如图(a)所示，小车沿倾斜角为θ的斜面没有摩擦地滑下，在小车的水平台面上有一个质量为 m 的木块和小车保持相对静止，试求：

(1)小车下滑过程中作用在木块上的静摩擦力；(2)小车下滑过程中木块对小车水平台面的压力。

［分析］ 木块 m 随小车以相同的速度和加速度 a 沿斜面向下滑动，小车对 m 有静摩擦力作用，木块的受力情况如图(b)所示。因木块 m 的加速度 a 的方向沿斜面向下，故取沿斜面向下的方向为 x 轴的正方向，垂直斜面向上方向为 y 轴的正方向。根据 $\Sigma F_x=ma_x$，$\Sigma F_y=ma_y$ 列出方程。

［解法一］ 在 x 轴方向

$mg\sin\theta+f\cos\theta-N\sin\theta=ma$ (1)

在 y 轴方向

$N\cos\theta+f\sin\theta-mg\cos\theta=0$ (2)

木块和小车一起下滑时的加速度

$$a=g\sin\theta \qquad (3)$$

由(2)式得 $$N=\frac{mg\cos\theta-f\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (4)$$

联立(4)、(3)、(1)式得

$$mg\sin\theta+f\cos\theta-\frac{mg\cos\theta-f\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\sin\theta=mg\sin\theta,$$

整理后 $$f=mg\sin\theta\cos\theta=\frac{mg}{2}\sin 2\theta。$$

将f值代入(4)式 $$N=\frac{mg\cos\theta-mg\sin^2\theta\cos\theta}{\cos\theta}$$

$$=mg(1-\sin^2\theta)$$

$$=mg\cos^2\theta。$$

[解法二] 木块受力情况如前图所示。木块和小车一起下滑时的加速度 $a=g\sin\theta$。把 a 沿水平和竖直方向分解为 $a\cos\theta$ 和 $a\sin\theta$ 如图(c)所

示，则$f=ma\cos\theta=mg\sin\theta\cos\theta=\frac{mg}{2}\sin 2\theta$。又$mg-N=ma\sin\theta$，

$N=mg(1-\sin^2\theta)=mg\cos^2\theta$。

906.质量为 5 千克,倾角α为 30°的斜面体 C 放在粗糙的水平面上。质量为 2 千克的物体 B 放在斜面上，B 和 C 之间的滑动摩擦系数μ

为$\frac{\sqrt{3}}{6}$，质量为1千克的物体A放在B上，A和B的接触面是水平的。当B在斜面上滑动时，C 相对于地面静止，A 相对 B 静止，如图(a)所示。问这时 A、B、C 各受几个力作用，合力各为多大？(g 取 10 米/秒²)

[分析] 见上一题。

[解答] 物体 A、B、C 的受力情况如图(b)所示。其中斜面体 C 所受地面对它的静摩擦力 f_C 的方向由 f_{BC} 和 N_{BC} 在水平方向的分量的大小决定。

$$f_{BC}=f_{CB}=\mu(m_A+m_B)g\cos 30°,$$

$$N_{BC}=N_{CB}=(m_A+m_B)g\cos 30°,$$

$$f_{BC}\cos 30°-N_{BC}\sin 30°=(m_A+m_B)g\cos 30°(\mu\cos 30°-\sin 30°)。$$

又 $$\mu\cos 30°-\sin 30°=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4},$$

即 $f_{BC}\cos 30°<N_{BC}\sin 30°$，故 fc 方向水平向左。

因 A、B 没有相对滑动，可把 A、B 作为一个整体。

根据牛顿第二定律得

$$(m_A+m_B)g\sin 30°-f_{CB}=(m_A+m_B)a \qquad (1)$$

$$N_{CB}-(m_A+m_B)g\cos30°=0 \qquad (2)$$

$$f_{CB}=\mu N_{CB} \qquad (3)$$

由(1)~(3)式解得

$$a=(\sin30°-\mu\cos30°)g=(0.5-0.25)\times10\ 米/秒^2$$

$$=2.5\ 米/秒^2。$$

则物体A所受合力$\Sigma F_A=m_Aa=1\times2.5$牛$=2.5$牛。物体B所受合力$\Sigma F_B=m_Ba=2\times2.5$牛$=5$牛。物体C所受合力$\Sigma F_C=0$。

907．如图(a)所示，质量 M 的木板可以沿倾角是α的斜面无摩擦地滑下。欲使木板静止在斜面上，木板上质量是 m 的人应以多大的加速度、向什么方向跑动？

［分析］ 要木板在斜面上保持静止，人必须给它一个沿斜面向上的摩擦力，大小等于它的重力沿斜面方向的分力 $Mg\sin\alpha$。那么人跑动时受到的摩擦力方向沿斜面向下，且 $f=Mg\sin\alpha$。人在跑动时受到三个力，重力 mg、木板给它的弹力 N_1、摩擦力 f，如图(b)所示。

［解答］ 根据牛顿第二定律

得
$$mg\sin\alpha+f=ma,$$

$$f=Mg\sin\alpha,$$

$$\alpha=\frac{g\sin\alpha(M+m)}{m}$$

$$=g\sin\alpha(1+\frac{M}{m})。$$

加速度的方向和人跑动的方向相同，沿斜面向下。

908．在火车的车厢中挂一个铅锤，可以测量火车的加速度。如果铅锤悬线跟竖直方向成 30°角，试确定火车的加速度是多少？

［分析］ 观察结果可知，车厢中挂的铅锤和火车以同一加速度 a 运动，作用在锤上的力是重力和悬线的拉力，且它们的合力方向应和 a 方向相同，所以悬线需向车后的方向倾斜，铅锤的受力情况如图。

［解答］ 根据牛顿第二定律

$$T\sin30°=ma \qquad (1)$$

$$T\cos30°=mg \qquad (2)$$

由(1)、(2)式联立解得 $a=tg30°\cdot g=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot g$。

909．如图(a)所示，在小车的弯杆上用线系一个球，质量为 m。当小车以加速度 a 沿和水平面成α角的斜面向上作匀加速直线运动时，求悬线和竖直方向所成的夹角θ以及悬线的张力 T。

［分析］ 小球所受的重力和悬线对小球的拉力这两个力的合力决定小球加速度的大小(即小车的加速度)。小球受力情况如图(b)所示。

［解答］ 取沿斜面向上方向为 x 轴正方向，跟斜面垂直向上方向为 y 轴正方向。根据牛顿第二定律

$$T\sin(\theta+\alpha)-mg\sin\alpha=ma, \qquad (1)$$

$$T\sin(\theta+\alpha)=m(a+g\sin\alpha)$$

$$T\cos(\theta+\alpha)-mg\cos\alpha=0,$$
$$T\cos(\theta+\alpha)=mg\cos\alpha \qquad (2)$$

将(1)式平方+(2)式平方

得 $$T=m\sqrt{a^2+g^2+2ga\sin\alpha}。$$

将(1)式÷(2)式

得 $$tg(\theta+\alpha)=\frac{a+g\sin\alpha}{g\cos\alpha},$$
$$\theta=tg^{-1}\frac{a+g\sin\alpha}{g\cos\alpha}-\alpha。$$

910．固定在卡车上的粗绳拖着一根圆木。欲使圆木和粗绳成一直线，卡车应以多大的加速度 a 行驶？圆木长为 L、粗绳长等于 b。粗绳在卡车上的固定点距地面为 h，如图(a)所示。

［分析］ 欲使圆木和粗绳成一直线，圆木下端点处于将要离地面而未离开地面的状态，此时圆木在重力 mg 和绳子张力 T 作用下作加速运动，a 越大，圆木下端点离地越高。所以在保持圆木和粗绳成一直线的情况下，圆木刚要离地时的加速度 a 最小。

［解答］ 圆木的受力情况如图(b)所示。根据牛顿第二定律

$$T\cos a=ma \qquad (1)$$
$$T\sin\alpha-mg=0 \qquad (2)$$

由(1)、式(2)得 $$a=ctg\alpha\cdot g=\frac{\sqrt{(l+b)^2-h^2}}{h}\cdot g,$$

所以卡车的加速度 $$a\geq\frac{\sqrt{(l+b)^2-h^2}}{h}\cdot g。$$

911．如图(a)所示，倾角为α的斜面放在光滑的水平面上。斜面上放一木块，木块和斜面间的静摩擦系数为μ_8。欲使木块和斜面间保持相对静止，斜面在水平方向上的加速度最大不得超过多少？此时木块对斜面的压力多大？

［分析］ 使木块随斜面以相同的加速度 a 运动是斜面对木块静摩擦力、弹力和它受到的重力作用的结果。而加速度 a 增大，静摩擦力也随之增加，但静摩擦力不能超过最大值 f_{max}，这样加速度 a 的大小也有限度。斜面在水平方向的加速度 a 有两种可能：水平向右和水平向左。当 a 水平向右时，木块只有下滑趋势，静摩擦力必沿斜面向上。当 a 水平向左时，物体有上滑和下滑两种可能。现题目要求的是木块和斜面间保持相对静止时的最大加速度，因此只需求得木块在有上滑时的最大加速度(木块在有下滑趋势时的加速度不是最大值)。本题对力沿水平方向和竖直方向进行正交分解，取水平向左为 x 轴正方向，竖直向上为 y 轴正方向。

［解答］ (1)当 a 向右时，木块的受力情况如图(b)，设木块质量为 m，根据牛顿第二定律

$$f\cos\alpha-N\sin\alpha=ma_{max} \qquad (1)$$
$$N\cos\alpha+f\sin\alpha-mg=0 \qquad (2)$$

$$f=\mu_8 N \qquad (3)$$

(1)～(3)式联立得 $N=\dfrac{mg}{\cos\alpha+\mu_8\sin\alpha}$，

$$a_{max}=\frac{\mu_8\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\mu_8\sin\alpha}\cdot g$$

$$=\frac{\mu_8-tg\alpha}{1+\mu_8 tg\alpha}\cdot g。$$

由第三定律，木块对斜面的压力大小和 N 相同，方向和 N 相反。

(2)当 a 向左并有一定大小时，木块有上升趋势，静摩擦力 f，沿斜面向下，木块的受力情况如图(c)所示。根据牛顿第二定律

$$N'\sin\alpha+f'\cos\alpha=ma'_{max} \qquad (4)$$

$$N'\cos\alpha-f'\sin\alpha-mg=0 \qquad (5)$$

$$f'=\mu_8 N' \qquad (6)$$

联立(4)～(6)式得 $N'=\dfrac{mg}{\cos\alpha-\mu_8\sin\alpha}$，

$$a'_{max}=\frac{\mu_8+tg\alpha}{1-\mu_8 tg\alpha}\cdot g。$$

a'_{max} 是不使木块上滑的最大加速度。从上式可知，当 $1-\mu_8 tg\alpha=0$ 时，$a'_{max}\to\infty$，即任何有限加速度都不能使木块上滑。

由第三定律知木块对斜面的压力大小和 N'相同，方向和 N'相反。

912．如图(a)所示，质量为 m 的物体 A，放在质量为 M，倾角为α的斜面体 B 上。如果物体和斜面间、斜面体和地面间的摩擦都不计，那么：

(1)作用在 B 上的水平推力 F 要有多大，才能使 A、B 之间没有相对运动？

(2)此时 A、B 相互间的作用力多大？

[分析] 如果 A、B 之间没有相对滑动，则它们必须以同一加速度 a 沿水平推力 F 的方向作匀加速运动。此时 A 物体受到重力和 B 对它的压力作用。将压力进行正交分解，压力的竖直分量和重力平衡，压力的水平分量使它获得了加速度 a。其受力情况如图(b)所示。

[解答] 以 A、B 为一系统，根据牛顿第二定律

$$F=(M+m)a \qquad (1)$$

以 A 为对象，取加速度方向为 x 轴的正方向，垂直于加速度方向的向上方向为 y 轴的正方向。

则

$$N\sin\alpha=ma \qquad (2)$$

$$N\cos\alpha-mg=0 \qquad (3)$$

由(2)式和(3)式可得 $a=g\cdot tg\alpha$。

$$N=mg\cdot\frac{1}{\cos\alpha}。$$

将 a 值代入(1)式得 $F=(M+m)g\cdot tga$。

913．如图(a)所示，将质量为 m=10 千克的小方块在粗糙的斜面上，斜面的倾角α=30°，如果静摩擦系数μ=0.8，当斜面向右的加速度 a 为

多大时，物体相对斜面开始滑动？

［分析］　由于斜面和物体 m 间存在静摩擦力的作用，物体 m 会随斜面运动。m 的受力情况如图(b)所示。在静摩擦力达到最大值时，物体将相对斜面开始滑动。

［解答］　作出物体的受力图，取加速度 a 的方向为 x 轴正方向，竖直向上方向为 y 轴的正方向。根据 $\Sigma F_x=ma_x$，$\Sigma F_y=ma_y$ 列方程：

$$f_{max}\cos30°-N\sin30°=ma \qquad (1)$$

$$f_{max}\sin30°+N\cos30°-mg=0 \qquad (2)$$

$$f_{max}=\mu N \qquad (3)$$

联立(1)~(3)式得

$$a=\frac{\mu\cos30°-\sin30°}{\mu\sin30°+\cos30°}=\frac{0.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}-0.5}{0.8\times0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}}\text{米}/\text{秒}^2$$

$$=0.15\text{米}/\text{秒}^2。$$

914．如图(a)所示，质量为 m 的物体放在质量为 M 的倾角为 α 的斜面上，如果物体和斜面间摩擦系数为 μ，斜面和地面间摩擦不计，那么：

(1)作用在斜面上的水平推力 F 要有多大，才能使 m、M 间没有相对滑动？

(2)此时 m、M 间的相互作用的压力 N 多大？

［分析］　m 随 M 以同一加速度 a 加速运动,a 的大小由 M 对 m 的作用力所决定。m 的受力情况如图(b)所示。摩擦力 f 的方向有二种可能，沿斜面向上和向下。

［解答］　(1)摩擦力 f 的方向沿斜面向上(m 有向下运动的趋势)

根据牛顿第二定律

$$N\sin\alpha-f\cos\alpha=ma \qquad (1)$$

$$N\cos\alpha+f\sin\alpha-mg=0 \qquad (2)$$

$$f=\mu N \qquad (3)$$

以 m 和 M 为一个整体

$$F=(M+m)a \qquad (4)$$

由(1)~(3)式可得　$a=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha}\cdot g$。

$$N=\frac{mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}。$$

将a值代入(4)式得　$F=\frac{\mathrm{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\mathrm{tg}\alpha}(M+m)g$。

(2)摩擦力 f 的方向沿斜面向下(m 有向上运动的趋势)，作出受力图(c)，根据牛顿第二定律

$$N\sin\alpha+f\cos\alpha=ma \qquad (5)$$

$$N\cos\alpha-f\sin\alpha-mg=0 \qquad (6)$$

$$f=\mu N \qquad (7)$$

$$F=(M+m)a \qquad (8)$$

由(5)～(7)式可得 $a=\dfrac{tg\alpha+\mu}{1-\mu tg\alpha}\cdot g$。

$$N=\frac{mg}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}。$$

将a值代入(8)式得 $F=\dfrac{tg\alpha+\mu}{1-\mu tg\alpha}(M+m)g$，

因此 $\dfrac{tg\alpha+\mu}{1-\mu tg\alpha}(M+m)g\geq F\geq\dfrac{tg\alpha-\mu}{1+\mu tg\alpha}(M+m)g$。

915．如图(a)所示，有一劈面光滑的劈，质量为 M，在水平力 F 作用下在水平地面上运动，这时质量为 m 的物体恰能在斜面上相对静止。如果劈和地面的滑动摩擦系数为μ，求水平作用力 F？

［分析］ 物体 m 能随劈 M 一起运动是由于劈对 m 有压力的作用，物体 m 的受力情况如图(b)所示。

［解法一］ 以 m 和 M 为一整体，根据牛顿第二定律得

$$F-f=(M+m)a,$$

$$f=\mu(M+m)g。$$

由上面两式可得 $F-\mu(M+m)g=(M+m)a$，

$$F=(M+m)(\mu g+a) \qquad (1)$$

以 m 为研究对象，根据牛顿第二定律

$$N\sin\alpha=ma \qquad (2)$$

$$N\cos\alpha-mg=0 \qquad (3)$$

由(2)式和(3)式可得 $a=g\cdot tg\alpha$ (4)

将(4)式代入(1)式得 $F=(M+m)(\mu+tg\alpha)g$。

［解法二］ 隔离 m 和 M，受力分析如图(c)所示。根据牛顿第二定律可得

$$N_1\sin\alpha=ma \qquad (1)$$

$$N_1\cos\alpha-mg=0 \qquad (2)$$

$$F-f-N_1'\sin\alpha=Ma \qquad (3)$$

$$N_2-Mg-N_1'\cos\alpha=0 \qquad (4)$$

$$f=\mu N_2 \qquad (5)$$

由牛顿第三定律得

$$N_1'=N_1 \qquad (6)$$

由(1)~(6)式可解得

$$F=(M+m)(\mu+tg\alpha)g。$$

916．如图(a)所示，假定一质量为 m 的物体沿倾角为α的斜面向下作匀速运动。那么当该斜面的高度为 h、倾角变为β(β>α)，物体从斜面顶端滑下需要多少时间？

［分析］ 根据物体在倾角为α的斜面上作匀速运动的条件，可求出物体和斜面间的滑动摩擦系数。物体在倾角为β的斜面上将作匀加速运动，由牛顿第二定律和运动学公式可求出物体下滑的时间。

［解答］ 物体在斜面上受重力、弹力、摩擦力的作用，受力情况如图(b)所示。根据牛顿第二定律

物体在倾角α的斜面上作匀速运动

$$mg\sin\alpha-\mu mg\cos\alpha=0,$$

$$\mu=\mathrm{tg}\,\alpha。$$

物体在倾角β的斜面上作匀加速运动

$$mg\sin\beta-\mu mg\cos\beta=ma,$$

$$a=g(\sin\beta-\mu\cos\beta)=g(\sin\beta-\mathrm{tg}\,\alpha\cos\beta)。$$

设斜面长度为l， $l=\frac{h}{\sin\beta}$。

由运动学公式

$$l=\frac{1}{2}at^2,$$

$$t=\sqrt{\frac{2l}{a}}=\sqrt{\frac{2h\cos\alpha}{g\sin\beta\sin(\beta-\alpha)}}。$$

917．如图(a)所示，一个质量为 m 的物体置于倾角为α的斜面上，当斜面以加速度 a 向右移动，物体则以加速度 a’相对于斜面运动，两者间滑动摩擦系数等于μ。求物体相对于斜面的加速度 a′的大小和物体对斜面的压力。

［分析］ 物体对地的加速度是它对斜面的加速度 a’和斜面对地加速度 a 的矢量和。物体 m 的受力情况如图(b)所示。

［解答］ 把物体所受的力和 a 沿斜面和垂直斜面的方向进行正交分解(见图)。

根据牛顿第二定律

$$mg\sin\alpha-f=m(a\cos\alpha+a') \qquad (1)$$

$$N-mg\cos\alpha=ma\sin\alpha \qquad (2)$$

$$f=\mu N \qquad (3)$$

从(2)式可和 $N=m(a\sin\alpha+g\cos\alpha)$。

把 N 代入(3)式后再代入(1)式得

$$a'=(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)g-(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)a。$$

918．有两个重物，质量 $m_1=m_2=2.0$ 千克，用一根轻绳跨过两个定滑轮悬挂在一个静止的小车上，如图(a)所示。如果小车以加速度 a=g 沿水平方向作匀加速运动，重物和车接触面之间的滑动摩擦系数μ=0.2，试求绳子的张力 T 和两重物相对于车的加速度的大小和方向。(滑轮的摩擦不计，g=10 米/秒 ^{2})

［分析］ 当小车以加速度 a 向右运动时，重物 m_2 向左离开小车，设绳子和水平方向成θ角。重物 m_1 将靠紧小车，m_1 相对于车的加速度 a’，方向竖直向上，m_2 相对于车的加速度大小也是 a’，其方向为沿着绳子斜向向下。以地面为参照系，m_1 的竖直加速度等于相对于车的加速度 a’，

水平分加速度为 a，m_2 的水平分加速度 $a_x=a-a'\cos\theta$，竖直分加速度 $a_y=a'\sin\theta$。m_1 和 m_2 的受力情况如图(b)所示。应用牛顿第二定律可列出方程。

[解答] 对于 m_1 $\qquad N=m_1a \qquad (1)$

$$T-m_1g-f=m_1a' \qquad (2)$$

$$f=\mu N \qquad (3)$$

从(1)~(3)式解得 $\qquad T=m_1(g+a'+\mu a) \qquad (4)$

对于 m_2 $\qquad T\cos\theta=m_2(a-a'\cos\theta) \qquad (5)$

$$m_2g-T\sin\theta=m_2a'\sin\theta \qquad (6)$$

(5)式和(6)式联立 $\qquad \mathrm{tg}\theta=\dfrac{g-a'\sin\theta}{a-a'\cos\theta}$。

因为 a=g，所以 $g\,\mathrm{tg}\theta-a'\sin\theta=g-a'\sin\theta$。$\mathrm{tg}\theta=1$，

$$\theta=45° \qquad (7)$$

由(4)、(5)式和(7)式联立可得

$$a'=\frac{1-\cos\theta-\mu\cos\theta}{2\cos\theta}\cdot g=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{10}}{\sqrt{2}}\times 10\text{米}/\text{秒}^2$$

$$=1.07\text{米}/\text{秒}^2。$$

m_1 相对于车竖直向上加速运动，m_2 相对于车斜向向下加速运动。

$$T=2\times(10+1.07+2)\text{牛}=26.1\text{牛}。$$

919．质量可以忽略不计的横杆被支在 A、B 两点上，在 AB 杆的 O 点处系有一个定滑轮如图(a)所示。已知 AO=3BO，跨过定滑轮的细绳的两端挂有两个托盘。两托盘的质量都为 m=10 千克，盘中分别放有 m_1=30 克，m_2=14 克两个重物，设滑轮和绳子的质量和摩擦都不计。求：(1)两托盘的加速度；(2)O 点受力多大？横杆对 A、B 两点的压力多大？(3)两重物对盘的的压力多大？

[分析] O 点受到的力在滑轮质量和摩擦不计的情况下等于绳子张力的两倍，横杆对 A、B 两点的压力可用杠杆平衡条件求得。

[解答] (1)两盘和滑轮的受力情况如图(b)所示。

根据牛顿第二定律

对右盘 $\qquad (m+m_1)g-T'=(m+m_1)a \qquad (1)$

对左盘 $\qquad T'-(m+m_2)g=(m+m_2)a \qquad (2)$

从(1)、(2)式解得

$$a=\frac{(m_1-m_2)}{m_1+m_2+2m}\cdot g=\frac{0.016}{0.064}\times 9.8\text{米}/\text{秒}^2$$

$$=2.45\text{米}/\text{秒}^2。$$

$$T'=(m+m_2)a+(m+m_2)g=0.024\times 12.25\text{牛}$$

$$=0.294\text{牛}。$$

(2)F=2T=2T'=0.588 牛。

由杠杆平衡条件可得

$$F' \cdot \frac{1}{4}AB - N_A AB = 0 \qquad (3)$$

$$F' \cdot \frac{3}{4}AB - N_B AB = 0 \qquad (4)$$

从(3)式和(4)式可得

$$N_A = \frac{F'}{4} = 0.588 \times \frac{1}{4}\text{牛} = 0.147\text{牛。}$$

$$N_B = \frac{3}{4}F' = 0.588 \times \frac{3}{4}\text{牛} = 0.441\text{牛。}$$

根据第三定律，支持物受到的压力大小 $N'_A=N_A$，$N'_B=N_B$，方向和 N_A、N_B 相反。

(3)将 m_1 和 m_2 分别隔离，见图(d)。

由牛顿第二定律 $m_1g-N_1=m_1a$ (5)

$N_2-m_2g=m_2a$ (6)

解得 $N_1=m_1(g-a)=0.03\times7.35$ 牛$=0.221$ 牛。

$N_2=m_2(g+a)=0.014\times12.25$ 牛$=0.172$ 牛。

根据牛顿第三定律，重物对盘的压力$N_1' = N_1$，$N_2' = N_2$。方向分别和 N_1、N_2 相反。

920．如图(a)所示，在升降机中的水平光滑桌面上放一个质量为 m 的物体 A，以细绳跨过滑轮和质量也为 m 的物体 B 相连。细绳和滑轮的质量不计。当升降机以$\frac{1}{2}g$的加速度匀加速上升时，A、B两物体相对桌子的加速度是多大？

［分析］ 以地面作为参考系，物体 A 受到重力 G_A、桌面弹力 N_A 及绳子张力 T 作用。B 受到重力 G_B 及向上的绳子的张力 T’作用。设物体 A、B 相对于桌面的加速度的大小相等，以 a’表示。那么 A 对地面的加速度的水平方向分量为a'，竖直方向的分量为$a = \frac{g}{2}$。B对地面的加速度为(a’-a)。

［解答］ 根据牛顿第二定律列出方程式

对 A 物 $T=ma'$ (1)

$N_A-mg=ma$ (2)

对B物 $mg - T' = m(a'-a) = m(a' - \frac{g}{2})$。

$$T' + ma' = \frac{3}{2}mg \qquad (3)$$

$T=T'$ (4)

由(1)、(3)、(4)式

得 $2ma' = \frac{3}{2}mg$，

$$a'=\frac{3}{4}g。$$

921．和水平方向成α角的斜面位于以加速度 a 向上运动的升降机内，斜面上放着质量是 m 的小立方体，求小立方体对斜面的压力 N’。小立方体和斜面之间的静摩擦系数μ为何值时，小立方体不会从斜面上滑下？

［分析］ 小立方体的受力情况如图(b)所示。取 a 的方向为 y 轴正方向，水平向左方向为 x 轴的正方向，将 N 和 f 两力分解列出方程。

［解答］ 根据牛顿第二定律得

$$N\cos\alpha+f\sin\alpha-mg=ma \qquad (1)$$

$$N\sin\alpha-f\cos\alpha=0 \qquad (2)$$

由(1)式和(2)式求得 $N=m(g+a)\cos\alpha$，

$f=m(g+a)\sin\alpha$。

小立方体对斜面的压力 N’是 N 的反作用力，大小等于 $m(g+a)\cos\alpha$，方向和 N 相反。

要使小立方体不会从斜面上滑下，必须

$\mu N'\geq f$。 因为 $\frac{f}{N'}=\mathrm{tg}\alpha$，

所以必须满足 $\mu\geq\mathrm{tg}\alpha$。

922．在加速行驶的火车上固定一个斜面，斜面倾角为θ，如图(a)所示。有一个物体静止在斜面上。如果火车以加速度小于某一值 a_1 运动，物体就会下滑；大于某值 a_2 运动时，物体就会向上滑。设物体和斜面间的摩擦系数μ，(1)试求 a_1 和 a_2 各多大？(2)m 和 M 间没有静摩擦而物体静止在斜面上时，m 对 M 的压力多大？

［分析］ 根据题意，当加速度较小时，物体有下滑趋势，m 受摩擦力沿斜面向上；当加速度较大时，物体有上滑趋势，m 受摩擦力沿斜面向下。

［解答］ (1)火车加速度 a_1 较小时，m 的受力情况如图(b)所示。根据牛顿第二定律得

$$N\sin\theta-f\cos\theta=ma_1 \qquad (1)$$

$$N\cos\theta+f\sin\theta-mg=0 \qquad (2)$$

$$f=\mu N \qquad (3)$$

由(1)～(3)式得 $a_1=\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{\cos\theta+\mu\sin\theta}\cdot g$。

火车加速度 a_2 较大时，m 的受力情况如图(c)所示。根据牛顿第二定律

$$N\sin\theta+f'\cos\theta=ma, \qquad (4)$$

$$N\cos\theta-f'\sin\theta=mg \qquad (5)$$

$$f'=\mu N \qquad (6)$$

由(4)～(6)式得 $a_2=\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\cos\theta-\mu\sin\theta}\cdot g$。

(2)当 m 和 M 间无摩擦时，m 受重力 mg 和压力 N 的作用，则

$$N\sin\theta = ma_0 \qquad (7)$$

$$N\cos\theta = mg \qquad (8)$$

由(7)、(8)式解得 $a_0 = g\mathrm{tg}\theta$，$N = \dfrac{mg}{\cos\theta}$。

923．用细绳联结的物体 A、B，并经过光滑的定滑轮，物体 C 放在 B 上如图所示。三个物体的质量分别为 m_A=150 克，m_B=90 克，m_C=80 克。当物体 B、C 由静止开始下降 8 秒钟的时候，突然把 C 拿去，问：

(1)再经过几秒钟物体 B 开始由下降而转为上升？

(2)从拿去 C 的时候算起，经过几秒钟后物体 A 落到原来的位置？(g=10 米/秒 ^{2})

［分析］ $m_B+m_C > m_A$，物体 A 匀加速向上运动；当物体 C 突然拿去，$m_B < m_A$，物体 A 匀减速上升，待速度变为零时，B 物开始上升。

［解答］ (1)根据牛顿第二定律

$$(m_B+m_C)g - m_Ag = (m_A+m_B+m_C)a_1,$$

$$a_1 = \frac{m_B+m_C-m_A}{m_A+m_B+m_C}\cdot g = \frac{0.02}{0.32}\times 10\text{米}/\text{秒}^2$$

$$= 0.625\text{米}/\text{秒}^2。$$

B、C 由静止开始下降 8 秒后的速度为 v，

$v = a_1t = 0.625\times 8$ 米/秒=5 米/秒，

此时拿去 C 后，仍取 v 的方向为正方向，A、B 运动的加速度为 a_2

$$a_2 = \frac{(m_B-m_A)}{m_A+m_B}\cdot g = \frac{0.09-0.15}{0.24}\times 10\text{米}/\text{秒}^2 = -2.5\text{米}/\text{秒}^2。$$

负号表示 a_2 的方向和 v 的方向相反。

如果从此时开始，再经过 t′秒后，速度为零，A、B 开始倒转。

$$v' = v + a_2t' = 0。$$

$$t' = \frac{v}{-a_2} = \frac{5}{2.5}\text{秒} = 2\text{秒}。$$

(2)从拿去 C 的时候算起，如果经过 t″后，物体 A 落到原来位置。

A物体前8秒上升的距离$h = \frac{1}{2}a_1t^2$，从拿去 C 后回到原来位置下降的距离也等于 h，设以 8 秒末 A 所在位置为原点，取铅直向上的方向为正方向，则

$$h' = vt'' + \frac{1}{2}a_2t''^2 \qquad (1)$$

$$h' = \frac{1}{2} - a_1t^2 \qquad (2)$$

从(1)、(2)式联立

$$t'' = \frac{-v-\sqrt{v^2-a_1a_2t^2}}{a_2}$$

$$= \frac{-5-\sqrt{25+0.625\times2.5\times64}}{2.5}\text{秒}$$

$= 6.47$秒。（舍去不合理根）

924． 简易起重机装置如图(a)所示。粗细均匀的棒 AB 长 5 米，质量为 50 千克。AB 杆跟柱子的夹角为 30°，OB 长为 3 米，物体 P 的质量为 100 千克。起重时，物体由地面匀加速上升 h=9 米所用的时间为 3 秒，问这段时间内 AC 绳子的拉力是多大？其它已知条件如图(a)所示，绳子、滑轮的质量以及摩擦力不计。

[分析] 本题包含运动学、动力学、静力学三类问题，受力情况如图(b)所示。根据物体的运动情况可以求得绳子拉力 T_1。而 $T'=2T_1$，确定了 B 端的力。根据平衡条件，可算出 AC 绳子的拉力。

[解答] 从运动学公式 $h=\frac{1}{2}at^2$。

重物P的加速度为 $a=\frac{2h}{t^2}=\frac{2\times9}{3^2}$米/秒^2 $=2$米/秒^2。

根据牛顿第二定律

$$T_1' - P = ma，$$

$$T_1' = P + ma = 100\times9.8\text{牛} + 100\times2\text{牛} = 1180\text{牛}。$$

又 $T_1'' = T_1$，

$T'=2T_1=2\times1180$ 牛$=2360$ 牛。

$T=T'=2360$ 牛。

根据平衡条件，则

$$T\times OB\sin30^\circ + W\times OD\sin30^\circ = F_{AC}\times OA，$$

$$F_{AC} = \frac{T\times OB\sin30^\circ + W\times OD\sin30^\circ}{OA}$$

$$= \frac{2360\times3\times\frac{1}{2}+50\times9.8\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{2}\text{牛}$$

$$= 1831.25\text{牛}$$

说理和论证题

925．有人认为，要维持一个物体运动，必须有动力对物体作用。任何运动物体如果没有动力作用，它就会趋于停止(这个事实远在二千多年前希腊哲学家亚里士多德就指出过)，所以说第一定律和事实不符。再说宇宙间根本不存在不受力的物体，所以牛顿第一定律的条件根本就不存在，不存在这个条件，就不存在由它决定的运动状态。你认为这个看法对不对？为什么？

[解答] 亚里士多德的断言是错误的，但因为它和人们日常的直觉和经验颇似符合，很容易被人接受，所以在他死后近两千年未遇到什么批评。直到十七世纪，意大利学者伽利略，利用斜面实验，用令人信服

的论证否定了亚里士多德这个貌似正确的断言。伽利略对斜面上滚动的小球作如下的论证：小球沿斜面向下运动，因为受到沿斜面向下的重力的分力作用而产生加速度，小球的速度越来越大；当小球沿斜面向上滚动时，沿斜面向下的加速度依然存在，因而产生了减速运动，小球的速度越来越小。因此当小球在既没有向下倾斜也没有向上倾斜的水平面上运动时，沿水平面方向不受力作用，因为不存在加速和减速的原因，故沿水平方向运动的速度将不变。当然伽利略知道这种情况在实际生活中是不存在的，小球的速度肯定会越来越小，最终要停止下来。这是由于沿水平面仍然有力的作用，这个力就是摩擦力。伽利略进一步发现，水平面对小球的摩擦减小，小球维持运动的时间就增长，如果没有了摩擦力，小球的运动就一定能保持下去，决不需要外力来维持它。伽利略从可靠的实验事实出发，把逻辑思维和实验事实相结合，得出科学的结论。他不但否定了亚里士多德的错误论断而且为我们开创了研究物理学的一种方法。

926．地球是一个半径大约为 6400 千米的球体，它绕着地轴自转。在赤道附近地面上有一个人，他认为地球赤道地面大约以 1700 千米/小时的速率自西向东运动，因此他只要设法向上跳起并在空中经历 1 秒钟，就地在起跳点在西面 472 米处落地。试说明他的错误之处。

［解答］　这种认识不对。人站在地球上，随地球一起以 1700 千米/小时的速度自西向东运动，当人向上跳起时，由于人具有惯性，在水平方向上仍保持 1700 千米/小时的速度自西向东运动，因此在这个方向上人和地面保持相对静止，他落下时应落回原地。

927．自行车带人行驶时，所带的人突然从车上跳下来，易向哪个方向倒？满载苹果的卡车在公路上高速行驶时，如果这时从车上落下一只苹果应向哪一个方向滚动？为什么？

［解答］　运动着的自行车，在车上跳下一个人来，人保持向前的惯性运动，等到脚落地，脚受到地面的摩擦阻力作用和地相对静止，但上身仍在向前运动，故人要向车前进的方向倒。同理，苹果从卡车上掉下，要向车行进的方向滚动。

928．火车在平直轨道上作匀速直线运动时，是否牵引力一定要比阻力略大一点，火车才能向前运动？

［解答］　这个说法不正确。火车在平直轨道上作匀速直线运动时，从牛顿第二定律可知合外力一定为零，所以牵引力的大小等于阻力大小。火车因为惯性的缘故保持原有运动状态作匀速直线运动。

929．要使木工用的木刨中的刀片退出来，要用锤击刨身后部，这是为什么？

［解答］　为了退刀，只要用锤击刨身后部，刨身向前迅速运动，但刨刀由于惯性仍要保持原来的静止状态，刨刀就会向刨身的后上方退出。

930．有人说：“物体在静止时不易被推动，说明物体在静止时比在运动时的惯性大。”这种说法对不对？为什么？又有人说：“物体在速度大时不易停下来，说明速度大时惯性大，速度小时惯性小。”这种说法对吗？为什么？

［解答］　不对。物体的惯性是物体本身的属性，它和物体的运动状

态无关。一般情况下，物体在静止时不易推动，是因为在相同的压力和接触面的情况下最大静摩擦力比滑动摩擦力大，所以不易被推动。后者的说法也是错误的。速度大不易停下来，这是因为当阻力一定时，对同一个物体来说，它的加速度是一定的。只是要把大速度减小到零，花的时间较长，而不是物体速度大物体的惯性也大。

931．一重物悬挂在氢气球下面，随气球一起匀速直线上升，在某一高度处悬绳被剪断重物随即落下，有人认为重物相对于地面将作自由落体运动。因为气球用绳子吊着重物上升是靠绳子的拉力来维持这种运动的，现在绳子断了，这个力不存在，所以物体应该作自由落体运动。这种说法对吗？为什么？

［解答］ 不对。所谓自由落体运动是一种初速度为零，加速度为 g 竖直向下的匀加速运动。这里开始时重物随氢气球一起匀速上升，它具有一个向上的速度，在某一高度处悬绳被剪断，重物只受重力作用，有一个向下的加速度 g，由于惯性，重物应该具有一个原有的速度，向上作竖直上抛运动，而不是作自由落体运动。

932．列车在平直铁路上行驶，列车中的乘客看到原来静止在桌子上的小球，突然向车头方向滚动，于是有乘客说：“小球在水平方向没有受任何作用力，现在它从静止开始运动，这说明牛顿第一定律是不正确的。”试分析上面这种说法正确与否？为什么？

［解答］ 我们应该明确，牛顿定律对惯性系是正确的，相对于地球静止或作匀速直线运动的系统都可以近似看作惯性系统。本题讨论的列车，实际上在作减速运动。如果列车中的乘客以列车为参照系，因为它不是惯性系，所以不能用牛顿第一定律去讨论小球向前滚动的现象，更不能去否定牛顿第一定律。由此可见，这位乘客的说法是错误的。对上述现象应该这样分析：以地面为参照系，开始小球随列车一起向前作匀速运动，和列车保持相对静止，当列车减慢速度时，小球由于惯性要继续保持原来的速度向前运动，因此小球表现为向车头方向滚动。

933．试回答下列说法是否正确。

(1)一个同学看到某人用力推一辆原来静止的车，结果没有推动，于是说：“推不动，是因为这辆车的惯性太大。”

(2)某人用手推一下静止的小车，小车开始运动，以后只要用较小的力就可以使小车维持一定的速度运动，于是他说：“力是产生和维持运动的原因。”

(3)行驶着的车辆突然刹车时，车上的乘客将向前倾倒，这是因为乘客具有惯性，还要继续向前运动。

(4)如果不计空气阻力，在空中飞行的手榴弹作匀变速运动。

(5)合外力等于零，物体的速度一定等于零。

(6)合外力不等于零，任何时刻物体的速度不可能为零。

(7)合外力不等于零，物体速度的大小一定发生变化。

(8)合外力不等于零，物体一定沿着合外力方向运动。

［解答］ (1)这位同学的说法不对。我们知道只有力才能使物体获得加速度和改变物体的运动状态。现在车仍处于静止状态，说明车受到的合外力一定为零，即推力和车受到地面的静摩擦力相互平衡。

(2)不对。静止的小车由静止变为运动并不能看成是推力产生了运

动。因为小车原来的静止仅仅是相对于参照物而言的，实际上也是一种运动状态。所以应该说是推力改变了小车的运动状态，力是改变物体运动状态的原因。

小车被推动以后，阻力要改变它的运动状态，为了让小车以一定的速度运动下去，就必须用较小的推力去平衡阻力，使小车受到的合力为零。当然也就不能说力是维持运动的原因了。

(3)对的。当刹车时，车速减慢，乘客的脚受汽车地板的摩擦力作用而减速，人的上身因惯性而继续保持原来速度向前运动，结果有向前倾斜的现象。

(4)对的。因为手榴弹在空中飞行的过程中，只受到重力作用，所以它的加速度保持为 g，方向竖直向下，手榴弹作匀变速运动。

(5)不对。合外力等于零，物体的加速度等于零，物体的速度是否等于零是看它的初速是否等于零，如果初速不为零，物体将继续保持这一速度运动。

(6)不对。物体的速度不仅跟它的加速度有关，还跟物体初速和加速的时间有关。当物体所受合外力不为零时，物体获得加速度，当初速度方向与加速度方向相反时，物体作匀减速运动，则在某一时刻物体的速度可以为零。例如，竖直上抛运动，物体所受合外力不为零(等于 mg)，但当物体上升到最高处时，物体的速度为零。

(7)不对。如物体作匀速圆周运动，其速度大小是不变的，但物体所受的合外力不为零(等于向心力)。

(8)不对。物体运动由所受外力和初始速度共同决定的，物体是否沿合外力方向运动要看有没有初速以及初速的方向和合外力方向的关系。如果初速为零，合外力为恒力，则合外力的方向将是以后物体运动的方向；当初速方向和合外力方向一致时，物体当然沿合外力方向运动；当初速方向和合外力方向不一致时，物体运动方向都和合外力方向不同。

934．如图所示，物体 A、B 作加速运动。有人说：“A 的重力传到 B 上，所以 B 受到的向前拉力和 A 的重力大小相等。”你说对吗？为什么？

[解答]　这种说法是错误的。A 物体受到的重力是地球对 A 的作用，不可能传到 B 上，更谈不上小相等。B 物体受到的是绳子的张力。A 物体在重力作用下要向下运动，但受到绳子的约束，绳子产生的张力向上拉住 A 物体，绳子内部张力同时也作用在 B 物体上。因为物体 A 在重力和绳子张力作用下向下作匀加速运动，所以重力大于绳子张力，B 受到向前的拉力在数值上必定小于 A 的重力。如果 A 物体静止或作匀速运动，则重力和绳子张力大小就相等，B 受到的拉力才和 A 的重力的大小相等。

935．力的单位“牛顿”是怎样定义的？

[解答]　根据牛顿第二定律可知，当物体的质量一定时它获得的加速度跟作用在物体上的外力成正比。在物理学中定义质量为 1 千克的物体，当它获得 1 米/秒^{2}的加速度时，加在物体上的作用力大小为 1“牛顿”。按这样定义，牛顿第二定律中的比例系数 k 等于 1，即

$$F=kma,$$

可写作

$$F=ma。$$

936．在什么情况下物体处于静止、匀速运动、匀加速直线运动或匀减速直线运动状态？牛顿运动定律对这一问题作了怎样的说明？

［解答］ 根据牛顿第一定律可知，当物体不受任何外力作用时，物体将保持静止或匀速直线运动状态不变。由牛顿第二定律可知，当物体受外力作用，合外力等于零时，其加速度为零，物体同样可以处于静止或匀速直线运动状态。当物体所受合外力不为零并且恒定不变，根据牛顿第二定律可知物体所得的加速度不变，这时物体作匀变速运动，当加速度的方向和运动物体的速度方向相同时，物体作匀加速直线运动；当 a 的方向和运动物体的速度方向相反时，物体作匀减速直线运动。

937．有人认为“牛顿第一定律是牛顿第二定律的特例，即合外力为零的情况，所以牛顿第一定律意义不大”，这个说法是否正确？

［解答］ 不能认为牛顿第一定律是牛顿第二定律的特例。牛顿第一定律有它自身的物理意义和地位，首先牛顿第一定律阐明了物体不受外力作用时的运动规律，同时还引出了物体惯性的概念，即物体具有保持原来运动状态的性质。定律虽然引入力的概念，但没有说明力怎样改变物体的运动状态，而牛顿第二定律却说明了物体受力时，力和物体加速度之间的关系。所以说牛顿第一定律是用来阐明物体不受外力作用时的运动规律，而牛顿第二定律是用来阐明物体受到外力作用时的运动规律，二者不能替代。

938．在北京用弹簧秤称一个物体，在上海用弹簧秤称另一个物体，称出它们的重力相等，问它们的质量是否相同？

［解答］ 北京和上海的重力加速度不同，如果甲物体在北京用弹簧秤称得的重力等于乙物体在上海用弹簧秤称得的重力，即

$$m_{甲}g_{北}=m_{乙}g_{上}。$$

因为 $g_{北}\neq g_{上}$

所以 $m_{甲}\neq m_{乙}$ 两个物体的质量不同。

939．甲乙两人对半块砖和整块砖哪一块先落地的问题发生争论。甲说“半块砖的质量是整块砖的一半，因为加速度和质量成反比，半块砖下落的加速度应比整块砖大一倍，所以半块砖先落地。”乙说：“半块砖受的重力是整块砖受的重力的一半，因为加速度和力成正比，半块砖下落的加速度也应是整块砖的一半，所以整块砖先落地。”这个问题应该怎样分析？

［解答］ 甲、乙两人的看法都是片面的。在讨论正比和反比问题时，都要有一定的条件，甲、乙两人都没有以条件为前提，甲只看到半块砖的质量是一块砖的一半，没有看到半块砖所受重力是一块砖的一半；乙只看到半块砖所受的重力是一块砖的一半，没有看到半块砖的质量是一块砖的一半。从牛顿第二定律可知

半块砖的加速度

$$\frac{m}{2}g=\frac{m}{2}a，a=g；$$

一块砖的加速度

$$mg=ma，a=g。$$

所以说半块砖和整块砖的自由下落应该是同时落地的。

940．一位同学对着放在场地上的一个足球，向他的同伴说：“我踢它一下，它就得到了速度；我用的力越大，它得到的速度也一定越大”。

他这句话对不对？为什么？

［解答］ 从表面现象看，这位同学的说法似乎是对的，其实他在概念上犯了严重的错误。根据牛顿第二定律可知力是物体产生加速度的原因，作用在物体上的力大，加速度大；力小，加速度小。物体增加的速度应由加速度跟时间的乘积来决定。从加速度定义可知

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}，\Delta v=a\Delta t，$$

在相同的时间内 a 大，△v 也大；a 小，△v 也小。用大小不同的力踢足球，当然用力越大，足球获得的加速度就越大。在相同时间里，用力大的球的速度改变量也大，所以足球的速度也大。

941．分析下列各小题的说法是否正确，并作出正确的回答。

(1)竖直上抛的物体，在向上运动的过程中受到重力、空气阻力和向上运动的力作用。起初向上运动的力比较大，所以物体的速度大，后来向上运动的力越来越小，物体的速度也就越来越小，到达最高点时，向上运动的力变为零，所以物体的速度也等于零了；

(2)物体的速度方向总跟它所受的合外力的方向一致，速度越大，合外力必然越大；

(3)物体作匀加速直线运动时，它所受的合外力必然是个恒量；

(4)100 牛重的物体静止在水平面上，至少需要 100 牛的力才可能使它运动。

［解答］ (1)竖直上抛物体在向上运动中,只受两个方向都向下的重力和空气阻力作用，不存在向上运动的力。物体所以能向上运动，是物体具有向上的初速度。物体的速度之所以变化是由于受两个向下的外力作用，要产生一个向下的加速度。这个加速度将随物体向上运动的速度逐渐减小而减小，这是因为它所受空气阻力在随速度减小而变小。当物体到达最高点时，速度减为零，空气阻力变为零，但这时物体仍受向下重力的作用，因此开始向下运动。

(2)物体的运动速度方向不一定跟合外力的方向一致。例如平抛运动中，重力方向和初速方向垂直，在以后运动中重力方向和速度方向有一个不为零的夹角。合外力只决定物体加速度大小和方向，和物体速度没有直接关系。如在平直轨道上匀速前进的列车，其速度可以很大，但合外力等于零。

(3)正确。由牛顿第二定律可知

$$F_{合}=ma。$$

在物体作匀加速直线运动中，由于物体的质量不变，加速度是恒量，所以 $F_{合}$也是恒量。

(4)不对。推动静止在水平面上的物体，只要推力大于物体所受到的最大静摩擦力。一般 $\mu_s<1$，推力就小于 100 牛；如果要把这个物体从静止开始提起来，这个力应大于 100 牛。

942．一个人站在一个有较大弹性的木板桥中央，把桥压弯到一定程度，当他突然蹲下时，桥的弯曲程度将怎样变化？为什么？如果他再从已经蹲着的姿态突然站起，这时桥的弯曲程度又将怎样变化？为什么？(设人的质量是 m，向上或向下的加速度的平均值都是 a)

［解答］　当人站在木板中央静止不动时，木板形变而产生的弹力 N 作用在人身上，这个力和人的体重平衡。当人突然下蹲时，人有向下的加速度 a，合力方向一定向下，

即 $$mg-N=ma,$$

$$N=mg-ma。$$

$$N<mg。$$

木板所受的压力小于 mg，因而木板弯曲程度减小。反之人从下蹲突然转变为站起，人有向上的加速度 a，因此合力方向也向上，

即 $$N'-mg=ma,$$

$$N'=mg+ma。$$

故 $$N'>mg。$$

木板受到的压力 N’大于 mg，木板的弯曲程度更大。

943．在一个圆木球内任意挖几个光滑的圆槽，槽的下端都通过球的最下端 O，试证明：小球从任意槽的上端落到底端 O 时所需的时间都相等。

［证明］　如果使小球在 AO 圆洞内无摩擦地滑下，在重力沿斜面分力的作用下作匀加速运动。由牛顿第二定律得

$$mg\sin\alpha=ma,$$

$$a=g\sin\alpha。$$

根据运动学公式，

$$s_{AO}=\frac{1}{2}at^2,$$

得 $$t=\sqrt{\frac{2s_{AO}}{a}}=\sqrt{\frac{2s_{AO}}{g\sin\alpha}}。$$

又因 $$s_{AO}=2R\sin\alpha,$$

故 $$t=\sqrt{\frac{2\times 2R\sin\alpha}{g\sin\alpha}}=2\sqrt{\frac{R}{g}}。$$

同理可证得小球在 BO 圆孔内下滑的时间

$$t=2\sqrt{\frac{R}{g}}。$$

可见从任意孔的下端滑到下端所需时间都相同。它只和球的直径有关，跟小球所在槽孔的位置无关。

944．有一个半径为 R 的圆，放置在竖直平面内，由圆的水平直径的一端作任意弦，求证质点 m 在任意弦上从上端滑到弦的终端时所经历的时间和弦跟竖直方向间的夹角的正切的平方根成正比(设质点在弦上运动是无摩擦的)。

［证明］　质点受力情况如图所示。m 在受重力分力作用下沿弦 AC 作匀加速直线运动。其加速度由牛顿第二定律可得

$$a=g\cos\theta \qquad (1)$$

质点由静止开始下滑位移为

$$s_{AO}=\frac{1}{2}at^2 \qquad (2)$$

由(1)、(2)式解得

$$t=\sqrt{\frac{2s_{AC}}{g\cos\theta}},$$

又因 AB=2R 得 $s_{AC}=2R\sin\theta$。

即
$$t=\sqrt{\frac{4R\sin\theta}{g\cos\theta}}=2\sqrt{\frac{R}{g}}(\sqrt{tg\theta})。$$

如果弦 AC 在直径 AB 的上面，同理可证得第 943 题的结果。

945．测定重力加速度的实验装置，如图所示。已知砝码 P 和 Q 的质量都为 M，小砝码质量为 m，把小砝码放在砝码 P 上，测出时间 t 内砝码 P 通过的距离 s，试证明 g 的表达式为

$$g=\frac{2s(2M+m)}{mt^2}。$$

［证明］　由题意得

$$s=\frac{1}{2}at^2 \qquad (1)$$

根据牛顿定律求得加速度

$$a=\frac{m}{2M+m}g \qquad (2)$$

由(1)、(2)式解得

$$g=\frac{2s(2M+m)}{mt^2}。$$

946．一个物体在跟水平面成α角的粗糙斜面上，以 kg 的加速度(其中 g 为重力加速度，k 为一常量)匀加速下滑。如果使它以初速为 v_0 沿斜面向上滑行，试证明它在此斜面上能滑行的距离为

$$\frac{v_0^2}{2g(2\sin\alpha-k)}。$$

［证明］　由题意知，物体向下滑行的加速度为 kg，根据牛顿第二定律

$$mg\sin\alpha-f=mkg,$$

得
$$f=mg(\sin\alpha-k)。$$

物体沿斜面向上滑行时受到的摩擦力在大小上等于向下滑行时的摩擦力，但方向相反。

物体在上滑过程中的加速度为

$$a=\frac{mg\sin\alpha+f}{m}=\frac{mg\sin\alpha+(\sin\alpha-k)mg}{m}$$
$$=g(2\sin\alpha-k)。$$

加速度方向沿斜面向下，物体沿斜面上滑作匀减速直线运动。

由运动学公式 $v_t^2=v_0^2-2as=0$ 求得上滑最大位移

$$s=\frac{v_0^2}{2a}=\frac{v_0^2}{2g(2\sin\alpha-k)}。$$

947．试证明一个物体由光滑斜面自由下滑到底端时的速度的大小，和它从同一高度自由落体到底端时所得到的速度大小相等。

［证明］ 质量为 m 的物体在重力 G=mg 的作用下自由下落，经 h 高度后的速度为

$$v=\sqrt{2gh}。$$

使物体从斜面顶点滑到底端，经长度 l 后速度为 v'，在斜面上物体受重力的分力 $mg\sin\alpha$ 的作用产生加速度 $a=g\sin\alpha$，

所以
$$v'=\sqrt{2al}=\sqrt{2gl\sin\alpha}$$

式中
$$l\sin\alpha=h$$

把(2)式代入(1)式

$$v'=\sqrt{2gh}。$$

所以
$$v=v'。$$

948．一个物体分别在两个倾角分别为α和β，底边相同的光滑斜面上自静止开始下滑，所用时间相等，试证明：α+β=90°。

［证明］ 因为物体在这两个斜面上滑下，都是作匀加速运动，所以我们可以通过牛顿第二定律和运动学公式求证两者的关系。

$$a_\alpha=g\sin\alpha \qquad (1)$$

$$a_\beta=g\sin\beta \qquad (2)$$

$$L_1=\frac{d}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}a_\alpha t_1^2，$$

$$t_1^2=\frac{2d}{a_\alpha\cos\alpha} \qquad (3)$$

$$L_2=\frac{d}{\cos\beta}=\frac{1}{2}a_\beta t_2^2，$$

$$t_2^2=\frac{2d}{a_\beta\cos\beta} \qquad (4)$$

因为
$$t_1=t_2，$$

所以
$$\frac{2d}{a_\beta\cos\beta}=\frac{2d}{a_\alpha\cos\alpha} \qquad (5)$$

把(1)、(2)式代入(5)式

$$\frac{2d}{g\sin\beta\cdot\cos\beta}=\frac{2d}{g\sin\alpha\cdot\cos\alpha}，$$

$$\sin\beta\cdot\cos\beta=\sin\alpha\cdot\cos\alpha，$$

$$\frac{1}{2}\sin2\beta=\frac{1}{2}\sin2\alpha，$$

所以
$$\alpha=\beta 或 \alpha+\beta=90°。$$

实验题

949．如图所示用气垫导轨配合数字电子记时器，验证牛顿第二定律。M 是放在导轨上的滑块，当导轨通气时，滑块浮起，这时摩擦减小到极小，

可忽略不计，m 为一个小砝码，它通过细线拉动滑块 M 作匀加速运动，G_1 和 G_2 为两个光电门，当滑块插上计时宽度为 l 的挡光框经过它们时，分别由数字记时器记下读数 t_1 和 t_2(t_1 为挡光框通过第一光电门所需的时刻，t_2 为挡光框通过第二光电门所需的时刻)。

(1)实验时取不同的小砝码 m，好可得作用在运动系统(M 和 m 组成)上有不同的外力，保持滑块质量 M 不变，测得实验数据见下表

实验条件	滑块质量 M=0.4101 千克,档光框记时宽度 l=0.100 米，两光电门之间的距离 s=0.500 米。					
作用力	砝码质量 m(千克)	0.005	0.010	0.015	0.020	0.025
	F(牛)	0.049	0.098	0.147	0.196	0.245
记时器的读数	t_1(毫秒)	441	314	258	225	203
	t_2(毫秒)	686	489	401	350	315

试根据上述数据验证 a 和 F 成正比，并作 a~F 图象。

(2)实验时，保持砝码 m 的质量为 4 克，在滑块上加不同的砝码来改变 M 的值，测得的数据如下表

实验条件	小砝码质量 m=4 克，作用力 F=0.0392 牛，档光框记时宽度 l=0.100 米，两光电门之间距离 s=0.500 米。				
质量	M(千克)	0.04724	0.07280	0.09792	0.1143
	$\frac{1}{M+m}(1/\text{千克})$	19.5	13.0	9.81	8.45
记时器的读数	t_1(毫秒)	197	240	279	298
	t_2(毫秒)	298	363	420	450

950．试根据上述数据验证a和 $\frac{1}{M+m}$ 成正比，并作出 $a\sim\frac{1}{M+m}$ 的图象。

[参考解答] 本实验的目的是验证牛顿第二定律，分两步进行：第一，实验时先保持滑块质量 M 不变，改变作用力 F(即改变小砝码质量 m)，测得不同的加速度 a 值，作 a~F 图线。如果是一条直线，则验证了 a 和 F 成线性的关系，如果直线过原点，则成正比关系。第二，保持 F 不变即小砝码m不变，改变滑块质量M，再测出加速度a，作 $\alpha\sim\frac{1}{M+m}$ 图线。如果也是一条过原点的直线，则证明了α和 $\frac{1}{M+m}$ 成正比。实验中α的大小实际上是通过计算得到的。将 $v_1=\frac{l}{t_1}$ 近似看作滑动档光框通过第一光电门的即时速度；$v_2=\frac{l}{t_2-t_1}$ 近似看作滑块档光框通过第二光电门的即时速度，因为s为两光电门的距离，所以 $\alpha=\frac{v_2^2-v_1^2}{2s}$。具体列表、作图解如下：

(1)列表

作用力 F(牛)	记时器读数		$v_1=\frac{l}{t_1}$ (米/秒)	$v_2=\frac{l}{t_2-t_1}$ (米/秒)	$\alpha=\frac{v_2^2-v_1^2}{2s}$ (米/秒^2)	F/a(千克)
	t_1(毫秒)	t_2(毫秒)				
0.049	441	686	0.227	0.408	0.115	0.426
0.098	314	489	0.318	0.571	0.225	0.436
0.147	258	401	0.388	0.699	0.339	0.434
0.196	225	350	0.444	0.800	0.442	0.443
0.245	203	315	0.493	0.893	0.555	0.441

从上表可知，F/a 几乎是一个常数，所以当质量不变时，a 和 F 成正比。事实上,在实验时仅仅保持了滑块质量M不变,运动系统的总质量(M+m)是随着砝码的质量 m 的增加而增大，实验结果当然有系统误差出现。

利用上表可作出 a~F 图象如下：

(2)列表

质量		记时器读数		$v_1=\frac{l}{t_1}$ (米/秒)	$v_2=\frac{l}{t_2-t_1}$ (米/秒)	$\alpha=\frac{v_2^2-v_1^2}{2s}$ (米/秒^2)	$\alpha/\frac{1}{M+m}$ (牛)
M(千克)	1/M+m(1/千克)	t_1(毫秒)	t_2(毫秒)				
0.04724	19.5	197	298	0.508	0.991	0.723	0.0371
0.07280	13.0	240	363	0.417	0.813	0.487	0.0375
0.9792	9.81	279	420	0.358	0.709	0.375	0.0382
0.1143	8.45	298	450	0.336	0.658	0.320	0.0379

从上表可知，$\alpha/\frac{1}{M+m}$几乎是一个不变数，所以当外力不变时，α和$\frac{1}{M+m}$成正比。

由图可知α和$\frac{1}{M+m}$成正比。如果作$\alpha\sim\frac{1}{M}$图，直线将不过原点这是因为系统在外力作用下运动的总质量应包括小砝码质量，如不计砝码 m 质量将产生误差。

951．火车从车站开出后，在一段时间内基本上是作匀加速运动。(1)现在用一根线、一只 100 克的砝码和一把尺，怎样测定火车在这段时间内加速度的大小。(2)如果把尺换成量角器怎样测？(3)如果把尺改成精确的测力计怎样做法？

[参考解答]　(1)将砝码悬在线上做成摆，并且挂在车厢的天花板上。当火车作匀加速运动时，摆发生偏斜，重力 G 和绳子的张力 T 的合力 F 正好使砝码的加速度和火车的加速度相同，由力的矢量图可得两个三角形的相似比

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{OB}\quad 即\quad \frac{ma}{mg}=\frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}},$$

所以 $$\alpha=\frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}\cdot g。$$

用尺量出摆长 l，和偏离平衡位置的水平距离 x，即可算出火车的加速度。

(2)如用量角器测得∠AOB，可以算出

$$tg\angle AOB=tg\angle ACD=\frac{F}{G}=\frac{m\alpha}{mg}=\frac{\alpha}{g}。$$

(3)由图中可知，在△ACD 中

$$AD^2=DC^2-AC^2 \quad 或 F=\sqrt{T^2-G^2}，$$

即可写成 $$m\alpha=\sqrt{T^2-G^2}，$$

所以 $$\alpha=\frac{\sqrt{T^2-G^2}}{m}=g\cdot\frac{\sqrt{T^2-G^2}}{G}=g\sqrt{(\frac{T}{G})^2-1}。$$

用测力计测出火车静止时或匀速运动时砝码的测力计读数 G，测出火车加速时的测力计读数 T，即可算出火车的加速度。

952．用一组砝码、一只秒表和图示的装置，怎样最简单地测定物体 M 的质量。

[参考解答] 最简单的方法是替代法。用秒表测出小车在绳的拉力作用下，通过某一段路程所需的时间。然后从小车上取下被测物体，改放一定质量的砝码，并逐步调整砝码总质量，使小车在同样时间内通过同样的路程。这时车上砝码质量的总和就是被测物体的质量值。

953．图中所示是一台阿特伍德机，它是一种力学实验装置。最高处是轻质滑轮，转动时可以不计磨擦力。悬挂在滑轮两边的重物 A、B 质量较大，并且相等，$m_A=m_B$。为了验证当 m 一定时，a∝F，实验时先在 B 上放一个质量较小的槽码 C(C 的直径比 B 大)。当 B、C 从静止开始，由 E 点向下运动，经过支架 D 时，B 物穿过 D 孔，继续向下运动经过 F，而 C 物因直径较大被搁在 D 架上。问

(1)B、C 两物从 E 到 D 点作什么运动？

(2)B 物从 D 到 F 点作什么运动？

(3)如果在实验中，测得如下数据：

s_1=0.700 米，s_2=1.000 米，$m_A=m_B$=500 克。

试验证 a∝F，并作出 a~F 图象。

M_c(克)	20	40	50	60
位移 s_2 所用时间 t(秒)	1.94	1.38	1.24	1.13

[参考解答] (1)作初速度为零的匀加速运动。

(2)作匀速运动，其速度大小等于 B 物通过 D 孔时的即时速度值。

(3)分析：B、C两物经D位置时的即时速度可用$v=\frac{s_2}{t}$求得，在 s_1段的加速度大小可用$\alpha=\frac{v^2}{2s_1}$求得。如时$\frac{a}{F}$是个不变量，则说明当 m 一定时，a∝F。利用实验测得数据，列出下表

$F_{合}=m_cg$(牛)	t(秒)	$v=\frac{s_2}{t}$(米/秒)	$\alpha=\frac{v^2}{2s_1}$(米/秒^2)	a/F (1/千克)
0.196	1.94	0.515	0.189	0.96
0.392	1.38	0.725	0.375	0.96
0.490	1.24	0.806	0.464	0.95
0.588	1.13	0.885	0.559	0.95

从上表中可以看到 a 和 F 近似成正比。请读者分析一下，造成实验误差的原因是什么？

a~F 图象如下

如果要用该机验证当F一定时，$\alpha \propto \frac{1}{m}$，请读者想一想，该怎样做实验。

954．两个朋友在大楼阳台上提出一个问题，要是不打开火柴盒，怎样确定谁的火柴盒中的火柴较少？

［参考解答］　下落的火柴盒受到重力和空气阻力。根据牛顿定律，下落的加速度

$$a=\frac{G-F_{阻}}{m}=\frac{mg-F_{阻}}{m}=g-\frac{F_{阻}}{m}。$$

由于火柴盒下落截面积相同，在速度相等的条件下，两盒火柴盒所受的空气阻力相同，故较满的火柴盒(质量大)有较大的加速度。这样，当从阳台上同时落下两盒火柴，哪一盒早达到地面，哪一盒里的火柴就较多。如果两盒火柴盒中的火柴数量相差较多，实验是可行的。

圆周运动

填充题

955．轨迹是圆周的运动叫圆周运动。在相等时间里通过的圆弧长度都相等的圆周运动叫做匀速圆周运动，匀速圆周运动的速度方向时刻在改变，因此匀速圆周运动是一种变速运动。

956．质点做匀速圆周运动的时候，它通过的弧长△s 跟所用的时间△t 之比，叫做匀速圆周运动的线速度。它的大小 v=△s/△t。

质点做匀速圆周运动的时候，连接质点和圆心的半径转过的角度△φ跟所用的时间Δt之比，叫做匀速圆周运动的角速度。它的大小$\omega = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$。

这两个物理量之间的关系是 $v=\omega r$。

“匀速圆周运动”一词中所指的“匀速”就是指速率和角速度保持不变。

有一质点沿半径为 80 厘米的圆周作匀速圆周运动，5 秒内通过的圆弧长度为 6 米，则它的线速度为 1.2 米/秒，角速度为 1.5 弧度/秒。

957．电唱机在放唱片时，唱片转动过程中，唱针相对于唱片运动的速率将变小(填变大、变小或不变)，理由是：唱片由作匀速转动的唱机带动，唱片的角速度为恒量，而唱针离转轴的距离越来越小的缘故。

958．质点做匀速圆周运动时，运动一周所用的时间叫做周期，用字母T表示。线速度的大小和周期的关系是$v = \frac{2\pi r}{T}$，角速度与周期的关系是$\omega = \frac{2\pi}{T}$。

作匀速圆周运动的飞机，运动半径为 4000 米，线速度为 80 米/秒，周期 T 为 314 秒，角速度ω为 0.02 弧度/秒。

959．质点做匀速圆周运动时，它在任一点的加速度都是沿着半径指向圆心的。因此，匀速圆周运动的加速度叫做向心加速度。

向心加速度 a_n 和线速度 v、圆周半径 r 的关系为 $a_n=v^2/r$。

向心加速度 a_n 和角速度ω、圆周半径 r 的关系为 $a_n=\omega^2 r$。

虽然匀速圆周运动的加速度 a_n 的大小不变，由于加速度是矢量，所以匀速圆周运动是一种变加速运动。

960．电唱机转盘每分钟的转数为 n，则转盘运动的周期为 60/n 秒，角速度为 nπ/30 弧度/秒，转盘上某点离轴的距离为 r 米，则该点的线速度是 nπr/30 米/秒，向心加速度为 $n^2\pi^2 r/900$ 米/秒^2。

961．一个砂轮的直径为 20 厘米，转速为 2880 转/分，则砂轮转动的角速度为 302 弧度/秒，一分钟转过的角度为 1.81×10^4 弧度。砂轮边缘一点的线速度大小为 30.16 米/秒，向心加速度大小为 9096 米/秒^2。

962．钟表的时针、分针和秒针的针尖都在作圆周运动，它们的角速度的比是 1∶12∶720，如果三针的长度的比是 2∶3∶3。那么，三针尖的线速度的比是 1∶18∶1080，向心加速度的比是 1∶216∶777600。

963．根据牛顿第二定律 F=ma 和向心加速度公式 $a_n=v^2/r$、$a_n=\omega^2 r$。作用在质量为 m 的质点上的向心力的大小为 $F=mv^2/r$ 或 $F=m\omega^2 r$。

向心力是从力的效果来命名的。它并不是什么特殊的力，它可以是任何一种力或几种力的合力，只要它的作用效果是使质点产生向心加速度，它就是向心力。

例如，用绳子拴住在光滑水平面上作匀速圆周运动物体所受的向心力是弹力。在水平转台上作匀速圆周运动并和转台相对静止的物体，所受的向心力是静摩擦力。自行车转弯时，作匀速圆周运动的向心力是弹力和重力的合力。

964．如果汽车的质量为 m，水平弯道的曲率半径为 50 米，汽车和地面间的最大静摩擦力为车重的 0.2 倍，如果汽车转弯时不打滑，则汽车在弯道处行驶的最大速度为 10 米/秒。(取 g=10 米/秒 ^{2})

965．一个做匀速圆周运动的物体，如果每秒转数变为原来的 2 倍，所需的向心力比原来的心力大 6 牛，则物体原来的向心力应为 2 牛。

966．一根水平横杆可绕 OO’轴在水平面内转动，杆上穿一个空心圆柱形物体，质量为 0.4 千克，物体可在杆上无磨擦滑动，物体和转轴间用一根倔强系数 k=800 牛/米的弹簧相连，如图所示。当横杆绕轴匀速转动时，弹簧从原长 8 厘米伸长到 10 厘米，那末弹簧对物体的拉力是 16 牛，物体运动的角速度是 20 弧度/秒，线速度是 200 厘米/秒。(物体可视为质点)

967．质量为 1 千克的物体在光滑的水平面内作半径为 0.6 米的匀速圆周运动，已知它在圆周上走过一段$\overset{\frown}{AB}$的过程中平均速率为 6 米/秒($\overset{\frown}{AB}$所对的圆心角为 60°)。那么，这个物体作圆周运动的周期是 0.628 秒；所受到的向心力为 60 牛；在这一运动阶段中，物体速度的增量为 6 米/秒。

968．长度为 l_0 的橡皮带一端拴住一个质量为 m 的小球，以另一端为中心使小球在光滑水平面上作匀速圆周运动，角速度为 ω_0。如果橡皮带每伸长单位长度产生的弹力为 f_0，则橡皮带的张力为

$$\frac{m\omega_0^2 l_0 f_0}{f_0 - m\omega_0^2}。$$

969．如图所示，物体在光滑的水平面内作半径为 R 的匀速圆周运动，周期为 T。物体沿圆周由 A 点运动到 B 点的过程中，它的平均加速度为 $12\pi R/T^2$。当物体沿圆周由 A 点运动到 C 点的过程中，它的平均加速度为$6\sqrt{3}\pi R/T^2$。

物体在 A 点的即时速度为 $4\pi^2R/T^2$，在 B 点的即时加速度为 $4\pi^2R/T^2$，在 C 点的即时加速度为 $4\pi^2R/T^2$。

970．如图所示，一个大轮通过皮带带动一个小轮，皮带和两个轮子之间没有滑动，小轮的半径 r 是大轮半径 R 的 1/2，大轮上有一点 S，它和转动轴之间的距离是大轮半径的 1/3。当 S 点的向心加速度为 a 时，大轮边缘上的 P 点的向心加速度的大小为 3a，小轮边缘上的 Q 点的向心加速度的大小为 6a。

971．如图所示，如皮带与两个轮之间没有滑动。当皮带轮转动后，A、B、C 三点的角速度的比是 2∶1∶1；A、B、C 三点的线速度的比是 3∶3∶1；A、B、C 三点的向心加速度的比是 6∶3∶1。

972．一圆环，如以直径 AB 为轴作匀速转动，如图所示。则环上 P、

Q的两点线速度大小的比v_p：v_Q = $\underline{\sqrt{3}：1}$。如环的半径为20厘米，绕AB轴转动的周期为0.01秒，则环上Q点的向心加速度大小为<u>4000π^{2}米/秒^2</u>。

973．甲、乙两辆完全相同的汽车分别以相同的速度v匀速行驶在凸形桥和凹形桥上，两桥半径都是R。当它们分别处于凸形桥的最高点和凹形桥的最低点时，桥面对它们的压力的比$N_{甲}：N_{乙}=\underline{\frac{gR-v^2}{gR+v^2}}$。

974．表演杂技的摩托车在半径为9.8米、位于竖直平面内的圆形轨道内壁作圆周运动，摩托车在最高点A的最小速率是<u>9.8</u>米/秒。摩托车在竖直圆筒内壁的B、C位置所受的向心力是<u>重力</u>和<u>弹力</u>的合力。

975．一个质量是1千克的小球，系于细绳的一端。小球绕O点在竖直平面里作圆周运动的半径是40厘米，小球经过圆周的最高点时的线速度的大小是4米/秒，如图所示。g取10米/秒^2，小球经过最高点时，绳子的拉力为<u>30牛</u>，小球能通过最高点的最小速度是<u>2米/秒</u>。

976．一根硬杆的一端系着一个质量m为1千克的小球，绕O点在竖直平面内作匀速转动，如图所示。如果球心和O点的距离为1米，硬杆运动到和水平方向成30°角时，小球的线速度v的大小为1米/秒，则小球受到硬什的作用力为<u>3.9牛</u>，方向沿硬什<u>向外</u>。

977．如图，有一根轻质硬杆，长为1米，上端为转轴O，下端的A点和距上端0.4米处的B点各固定一个质量为1千克的小球，当它们以1弧度/秒的角速度转动到竖直位置时，硬杆对转轴的作用力的大小是<u>21牛</u>，方向<u>竖直向下</u>。

978．如图所示，摩托车开到圆弧形的山坡处，圆弧半径是R，圆弧长是1/4圆周长，要使摩托车可腾空飞起而直接落到地面，它的速率v至
少是$\underline{\sqrt{Rg}}$，落地点和坡端的距离AB至少是$\underline{(\sqrt{2}-1)R}$。

979．质量为m的物体，沿半径为R的圆形轨道滑下，轨道上有一点B、过B点的法线是竖直的，当物体通过B点时速度为v。已知物体和轨道间的滑运磨擦系数为μ，则物体滑过B点时受到的磨擦力的大小为$\underline{\mu m(g+\frac{v^2}{R})}$。

980．如图(a)所示，质量为m的小球用长为l的轻绳系在竖直轴OO’上，轴转动后，绳和轴线的张角保持为θ，则小球做匀速圆周运动的周期为$\underline{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\cos\theta}}$，角速度为$\underline{\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}}$，线速度为$\underline{\sqrt{gl\sin\theta\cdot tg\theta}}$。

［提示］　小球受重力(mg)和绳的拉力(T)，如图(b)。这两个力的合力F

为向心力。由图可知，$\frac{F}{mg}=tg\theta$，$F=mgtg\theta$，圆周运动的半径$R=l\sin\theta$，向心力$F=\frac{mv^2}{l\sin\theta}$，由$mgtg\theta=\frac{mv^2}{l\sin\theta}$，$v^2=lg\,tg\theta\sin$，$v=\sqrt{lg\,tg\theta\sin\theta}$。周期$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi\cdot l\sin\theta}{\sqrt{lg\,tg\theta\sin\theta}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\cos\theta}$。

981．长度为 1 米的细绳，上端固定，下端拴一个质量为 0.1 千克的小球，使小球在一个水平面内作匀速圆周运动，如左下图所示。如果绳受到 10 牛的拉力就断，则作圆周运动的角速度大小不能超过 10 弧度/秒。

982．悬于同一点的两个圆锥摆，绕同一竖直轴转动，如果两摆都在同一个水平面内作匀速圆周运动，且 $L_1=2L_2$，如右上图。则两圆锥摆的周期的比 T_1：T_2=1：1。

983．如下页左图所示，儿童乐园中的电动转椅是一把把由 2 米长悬线悬挂在钢架上的椅子，悬挂点距转动轴心 5 米，转椅启动后，当悬线和竖直方向成 30°角时，转椅旋转的角度为 0.97 弧度/秒，坐在椅子上的小朋友向心加速度为 5.82 米/秒^2，每旋转一周需要的时间是 6.47 秒。

984．如下页右图所示。一个质量为 m 的质点，系在一根长为 4a 的绳子中央，绳的两端分别系在一根竖立杆上的 A 点和 B 点。A 点在 B 点的正上方，并且 AB=2a。质点以角速度ω绕杆作水平旋转，这时两段绳子都张紧，则上、下两部分绳子上的张力的比$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\alpha\omega^2+g}{\alpha\omega^2-g}$。

985．在以加速度 a 向上作加速运动的电梯中，有一摆线长度为 l 的圆锥摆，若摆线和竖直方向所成的夹角为θ，当地的重力加速度为 g，则摆球作圆周运动速度v为$\sqrt{\frac{(g+\alpha)l}{\cos\theta}}\cdot\sin\theta$，运动周期T为$2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g+\alpha}}$。

986．如图所示，沿半球形碗的光滑内表面，一质量为 m 的小球正以角速度ω在水平面内作匀速圆周运动。如果碗的半径为 R，则该球作匀速圆周运动的水平面离碗底的距离 H 为 $R-g/\omega^2$。

987．如图所示，有一运动员骑自行车以速度 v 转弯，车身和地面的夹角为 a，此时自行车转弯的半径为 v^2tga/g，地面对自行车的静磨擦力等于 mg/tga。

选择题

988．匀速圆周运动的特点是

(a)速度不变，加速度为零；

(b)角速度不变，角加速度为零；

(c)角速度不变，但不为零

(d)速度和加速度都变化，物体所受的合力不变；

(e)加速度的大小不变，且始终与速度方向垂直；

(f)物体所受的合力大小不变，且始终指向圆心。

答：(b)、(e)、(f)

989．用绳拴着一个物体，使物体在光滑的水平面上作匀速圆周运动。绳断以后，物体将

(a)沿半径方向接近圆心；

(b)沿半径方向远离圆心；

(c)仍维持圆周运动；

(d)沿切线方向作直线运动。

答　(d)

990．质点作匀速圆周运动时，不发生变化的量有

(a)周期；

(b)速度；

(c)角速度；

(d)相对于圆心的位移；

(e)加速度；

(f)转速。

答　(a)、(c)、(f)

991．当质点作匀速圆周运动时，试判断下面哪一个说法是正确的？

(a)向心加速度一定与旋转半径成反比，因为 $a=v^2/r$；

(b)向心加速度一定与角速度成正比，因为 $a=\omega^2/r$；

(c)角速度一定与旋转半径成反比，因为$\omega=v/r$；

(d)角速度一定与转速成正比，因为$\omega=2\pi n$。

答　(d)

992．图为绕 0 轴匀速转动的偏心轮。轮上各点的

(a)线速度的大小均不相同；

(b)向心加速度和到转轴 0 的距离成正比；

(c)角速度不同；

(d)向心加速度相同。

答　(b)

993．圆环在水平面上匀速滚动，跟平面间没有相对滑动，如图所示。环心对地的速度为 v，环上的点相对于地面的最大和最小的速度分别为

(a)2v 和 v；

(b)2v 和零；

(c)v 和零；

(d)1.5v 和 0.5v。

答　(b)

994．由于地球自转，地球上的物体都随地球一起转动。所以

(a)在我国各地的物体都有相同的角速度；

(b)位于赤道地区的物体的线速度比位于两极地区的小；

(c)位于赤道地区的物体的线速度比位于两极地区的大；

(d)地球上所有物体的向心加速度方向都指向地心。

答　(a)、(c)

995．有质量相等的甲、乙、丙三个物体，甲放在广州，乙放在上海，丙放在北京。当它们随着地球一起转动时，下面哪句话是完全正确的？

(a)甲的角速度最大，乙的线速度最小，它们的转动周期一样；

(b)丙的角速度最小，甲的线速度最大，甲所需的向心力最大；

(c)三个物体的角速度、周期和线速度均相等；

(d)三个物体的角速度，周期一样，丙的线速度最小，丙所需的向心力最小。

答 (d)

996．在皮带传动装置中，如果皮带和轮间无滑动，下列说法中正确的是

(a)A 点和 C 点的角速度相同，所以 A 点向心加速度也相同；

(b)A 点和 B 点的线速度的大小相同，由于半径 O_1A 比半径 O_2B 大，所以 A 点向心加速度小；

(c)由于半径 O_2B 和半径 O_1C 相等，所以 B、C 两点的向心加速度也相同；

(d)由于半径 O_1A 比半径 O_1C 大，又在同一皮带轮上，所以 A 点的向心加速度大。

答 (b)、(d)

997．如图所示的皮带传动装置，A 轮为主动轮，B 轮为从动轮，箭头表示轮子的旋转方向。关于 A、B 两轮所受磨擦力的方向，下述说法正确的是

(a)两轮所受的磨擦力方向和两轮转动方向相同；

(b)两轮所受的磨擦力方向和两轮转动方向相反；

(c)A 轮所受的磨擦力方向和 A 轮转动方向相同,B 轮所受的磨擦力方向和 B 轮转动的方向相反；

(d)A 轮所受的磨擦力方向和 A 轮转动方向相反,B 轮所受的磨擦力方向和 B 轮转动的方向相同。

答 (d)

998．下列说法中，正确的是

(a)物体在恒力作用下，一定作直线运动；

(b)物体在始终与速度垂直的力的作用下，一定作匀速圆周运动；

(c)物体在变力作用下，有可能做匀速圆周运动；

(d)物体在恒力作用下，不可能做圆周运动。

答 (c)、(d)

999．物体静止在旋转的水平圆盘上。

(1)它受到的外力是

(a)重力、弹力、平衡力；

(b)重力、弹力、静磨擦力；

(c)重力、弹力、滑动磨擦力；

(d)重力、静磨擦力、向心力。

答 (b)

(2)物体受到的外力中构成平衡的力是

(a)重力和弹力；

(b)弹力和静磨擦力；

(c)滑动磨擦力和重力；

(d)静磨擦力和重力。

答 (a)

(3)使物体跟随圆盘作圆周运动的向心力是
(a)重力；
(b)支持力；
(c)平衡力；
(d)静磨擦力。

答 (d)

1000．在匀速旋转的圆筒内壁上紧贴一个物体，物体随圆筒一起运动
(1)它受到的外力是
(a)重力、弹力、平衡力；
(b)重力、弹力、静磨擦力；
(c)重力、弹力、滑动磨擦力；
(d)重力、弹力、向心力。

答 (b)

(2)物体受到的外力中，构成平衡的力是
(a)重力、弹力；
(b)弹力、静磨擦力；
(c)静磨擦力、重力；
(d)重力、滑动磨擦力。

答 (c)

(3)物体受到的向心力是
(a)静磨擦力；
(b)滑动磨擦力；
(c)重力；
(d)弹力。

答 (d)

1001．在图中有一个以角速度ω旋转的圆锥摆。
(1)小球受到的力是
(a)重力和弹力；
(b)重力、弹力和向心力；
(c)重力和向心力；
(d)向心力和弹力。

答 ()

(2)摆球作匀速圆周运动的向心力是
(a)重力；
(b)弹力；
(c)重力和弹力的合力；
(d)平衡力。

答 (c)

(3)摆球所受的向心力等于
(a)mg+T；
(b)mgcosθ；
(c)mgsinθ；

(d)mgtgθ。

答 (d)

1002．在水平面上做匀速圆周运动的飞机

(1)受到的外力是

(a)重力、升力；

(b)重力、升力、牵引力；

(c)升力、牵引力、空气阻力；

(d)重力、升力、牵引力、空气阻力。

答 (d)

(2)飞机受到的向心力是

(a)升力；

(b)重力；

(c)升力和重力的合力；

(d)升力和牵引力的合力。

答 (c)

1003．下列关于向心力的论述中正确的是

(a)物体作圆周运动以后，过一段时间就会受到向心力；

(b)物体因为受到向心力的作用，才可能作圆周运动；

(c)向心力与重力、弹力、磨擦力一样是一种特定的力，它只在物体作圆周运动时才产生；

(d)向心力仅仅是从它产生的效果来命名的，它可以使用初速度的物体作圆周运动，它的方向始终指向圆心；

(e)向心力可以是重力、弹力、磨擦力、电场力或磁场力中的某一种力，也可以是这些力中某几个力的合力；

(f)向心力只可能改变物体运动的方向，不可能改变物体运动的快慢。

答 (b)、(d)、(e)、(f)

1004．用细绳拴一个物体在光滑水平面上作圆周运动。下列判断中正确的是

(a)当物体转动的周期增为原来的两倍时，绳子的张力增为原来的四倍；

(b)当物体转动的转速增为原来的两倍时，绳子的张力增为原来的四倍；

(c)当转动的角速度相同时，绳越长越容易断；

(d)当转动的线速度相同时，绳越长越容易断。

答 (b)、(c)

1005．将质量为 m 的砝码放在水平圆盘的边缘，圆盘的半径为 R，砝码和圆盘间的静磨擦系数为μ。当圆盘绕通过圆心垂直于盘面的转轴转动，转速达到ω时，砝码开始和圆盘有相对运动。则

(a)ω和μ成正比；

(b)ω和$\sqrt{\mu}$成正比；

(c)ω和μg 成正比；

(d)ω和μmg 成正比。

答 (b)

1006．甲、乙两球在半径分别为 45 厘米和 15 厘米的圆周上作匀速圆周运动，甲球的质量是乙球的两倍，在 15 秒内甲球转 30 周，乙球转 60 周，则甲、乙两球所需的向心力的比为

(a)3∶2；

(b)2∶3；

(c)3∶1；

(d)3∶4。

答 (a)

1007．图是用以说明向心力和质量、半径之间关系的仪器。球 A 和 B 可以在光滑杆 OO' 上无磨擦地滑动，两球之间用一根绳连接，$m_A=2m_B$，当仪器以ω匀速旋转时，两球离转轴的距离保持不变，则这时

(a)A 和 B 球受到的向心力分别是绳子对它的拉力 T_A、T_B；

(b)A 球受到的向心力大于 B 球受到的向心力；

(c)r_A 一定等于 $r_B/2$；

(d)当ω增大时，A 球将向外运动。

答 (a)、(c)

1008．有一质量为 m 的物体放在水平旋转的圆台上，离转轴距离为 r，当圆台转速为 n 时，物体和圆台相对静止。

(1)如果转台的转速增加，而物体仍和台面相对静止，则

(a)静磨擦力增大；

(b)台面弹力增大；

(c)台面对物体的最大静磨擦力增大；

(d)物体受到的合力增大。

答 (a)、(d)

(2)物体能静止于转台上，它和台面间的静磨擦系数的最小值应等于

(a)$\frac{4\pi^2n^2r}{g}$；

(b)$\frac{4\pi^2n^2}{rg}$；

(c)$\frac{2\pi^2n^2r}{g}$；

(d)$\frac{n^2r}{4\pi^2g}$。

答 (a)

(3)如果物体和台面的静磨擦系数恰好等于第(2)小题中求得的最小值。今将物体移到距离轴 2r 的远处，而仍要物体和台面保持相对静止，可采用的办法是

(a)在物体上叠另一重物，使总质量增大到 2m；

(b)减小物体的质量到 m/2；

(c)将转台的转速变慢，使它的最大值不超过 n/2；

(d)将转台的转速变慢，使它的最大值不超过$\sqrt{2}n/2$。

答 (d)

1009．如图所示，A、B、C 三个物体放在旋转的圆台上，它们由相同材料制成。A 的质量为 2m，B、C 的质量各为 m。如果 OA=OB=R，OC=2R，则当圆台旋转时(设 A、B、C 都没有滑动)，下述结论中正确的是

(a)C 物的向心加速度最大；

(b)B 物的静磨擦力最小；

(c)当圆台旋转速度增加时，C 比 B 先开始滑动；

(d)当圆台旋转速度增加时，A 比 B 先开始滑动。

答　(a)、(b)、(c)

1010．有一质量为 m 的木块，从半球形、内壁粗糙的碗边 a 点下滑到 b 点，如图所示。在下滑过程中，由于磨擦作用，木块的速率恰能保持不变。下列说法中正确的是

(a)因木块的速率不变，说明它的加速度为零，合外力也为零；

(b)木块下滑过程中，所受的合外力越来越大；

(c)木块下滑的过程中，加速度数值恒定，方向不断改变，始终沿着半径指向圆心；

(d)木块下滑的过程中，磨擦力的数值不变。

答　(c)

1011．如图所示，有一质量为 m 的木块，从半球形的碗边开始下滑，不计算磨擦作用，则木块下滑的过程中，下面哪种说法是正确的？

(a)它的加速度方向指向球心；

(b)它所受的合力数值恒定，方向不断改变；

(c)它所受的合力数值不断改变，方向指向球心；

(d)它所受碗的弹力数值不断增加。

答　(d)

1012．如图所示，竖直放置的刚性圆环，半径为 20 厘米，在环上有一个穿孔的小球 m，仅能沿环无磨擦滑动。假如圆环绕着通过中心的竖直轴 O_1O_2 以 10 弧度/秒的角速度旋转(取 g=10 米/秒^2)，那么小球相对环静的位置和 O_1O_2 间的夹角 a 等于

(a)30°

(b)45°

(c)60°

(d)90°

答　(c)

1013．如图所示，质量为 m 的物体沿半径为 R 的圆形轨道自 A 点滑下，A 点的法线为水平方向，B 点的法线为竖直方向，C 为弧长 AB 的中点，物体和轨道间的滑动磨擦系数为 μ，当物体滑到 C 点时，速度值为 v，此时物体受到的磨擦力为

(a)μmg；

(b)$\mu\frac{mv^2}{R}$；

(c)$\mu m(g+\frac{v^2}{R})$；

(d)$\mu m(\frac{\sqrt{2}}{2}g+\frac{v^2}{R})$。

答　(d)

1014．如图所示，用细线将一小球悬挂在匀速前进的车厢里，当车厢突然制动时：

(a)线的张力不变；

(b)线的张力突然减小；

(c)线的张力突然增大；

(d)线的张力如何变化无法判断。

答　(c)

1015．一球 m，用长 L 的悬绳固定于 O 点，在 O 点正下方 L/2 处钉有一颗钉子，把悬线沿水平方向拉直无初速释放后，当悬线碰到钉子的时刻：

(a)小球的速度突然增大；

(b)小球的向心加速度突然增大；

(c)小球的角速度突然增大；

(d)悬线的张力突然增大。

答　(b)、(c)、(d)

1016．一物体自半径为 R 的光滑球面顶点自由滑下，当它滑下一定高度后，会离开球面，在空中作抛体运动。

(1)物体离开球面时，运动具有的特点是

(a)向心力等于零；

(b)球面的弹力等于零；

(c)重力和弹力的合力等于零；

(d)速度等于零。

答　(b)

(2)如果使物体一开始就离开球面运动，必须给物体的最小水平速度是

(a)$\sqrt{Rg}$；

(b)$\sqrt{2Rg}$；

(c)$\sqrt{3Rg}$；

(d)$2\sqrt{Rg}$。

答　(a)

(3)在上题中以最小水平速度运动的物体，落地时离球心的水平距离是

(a)R；

(b)$\sqrt{2}R$；

(c)2R；

(d)$2\sqrt{2}R$。

答　(c)

1017．皮带传送机传送矿石的速度大小恒定为 v，在轮缘的 A 点和皮带分离。当地的重力加速度为 g。则通过 A 点的半径 OA 和竖直方向 OB 的夹角 θ 为

(a)$\sin^{-1}\frac{v^2}{Rg}$；

(b)$\cos^{-1}\frac{v^2}{Rg}$；

(c)$tg^{-1}\frac{v^2}{Rg}$；

(d)$ctg^{-1}\frac{v^2}{Rg}$。

答 (b)

1018．质量为 m 的小球在竖直平面内的圆形轨道的内侧运动，经过最高点而不脱离轨道的临界速度是 v，当小球以 2v 的速度经过最高点时，对轨道的压力的数值是

(a)0；

(b)mg；

(c)3mg；

(d)5mg。

答 (c)

1019．圆锥摆的偏角(即绳与竖直方向的夹角)为θ，要使θ增大，必须增大的物理量是

(a)小球质量；

(b)角速度；

(c)周期；

(d)重力加速度。

答 (b)

1020．如图，用一根长为 l 的细绳把质量为 m 的小球悬在直圆锥体的顶角上，圆锥体的顶角为 2θ，侧面光滑。小球以角速度ω绕圆锥体轴线转动。

(1)当小球的ω增大，而小球仍未离开锥面时

(a)圆锥体侧面弹力 N 增大，细绳拉力 T 减小；

(b)圆锥体侧面弹力 N 减小，细绳拉力 T 不变；

(c)圆锥体侧面弹力 N 减小，细绳拉力 T 增大；

(d)圆锥体侧面弹力 N 增大，细绳拉力 T 增大。

答 (c)

(2)当ω等于某值时，小球恰好离开锥面，此时有

(a)圆锥体侧面对小球弹力不等于零，向心力 F=mgtgθ+Tsinθ-Ncosθ；

(b)圆锥体侧面对小球弹力等于零，向心力 F=mgtgθ+Tsinθ；

(c)圆锥体侧面对小球弹力等于零，向心力 F=mgtgθ；

(d)圆锥体侧面对小球弹力等于零，向心力 F=mgtgθ-Tsinθ；

答 (c)

1021．如图所示，在 OC 绳的 C 端，用等长线段悬挂着两个质量都是 m 的小球，这两个小球以角速度ω弧度/秒绕 OC 轴旋转，则 OC 受的张力为

(a)2mg；

(b)$\frac{mg}{\cos\frac{\phi}{2}}$；

(c)$\frac{2mg}{\cos\phi}$；

(d)2mgcosϕ。

答 (a)

1022．如图所示，A、B 两小球质量相同，用轻线把它们连结，并跨过两个无磨擦的定滑轮。在 B 球左右摆动的时候，则 A 球将

(a)不动；

(b)向上运动；

(c)上下往复运动；

(d)向下运动。

答 (c)

[提示] 如果 B 球摆动的最大偏角为θ，则绳子承受的拉力 T 最小时为$mg\cos\theta$，最大时为$mg+\frac{mv^2}{l}$，A球的重力mg介于其间，所以作上下往复运动。

1023．质量为 m 的汽车以速率 v 沿半径为 r 的水平弯道转弯，如图所示。汽车转弯的向心力是车轮和地面的总磨擦力 f($f=f_1+f_2$)，由于汽车重心和磨擦力的作用线有一定的距离 h(h 就是汽车重心的高度)，磨擦力就会产生一个使汽车向外侧翻转的力矩 fh。由于这一转动趋势，就会使汽车的外侧轮胎加强对地面的挤压，内侧轮胎减轻对地面的挤压，造成$N_2>N_1$，从而产生反向力矩，使汽车不致翻滚。如果两轮的距离为 b，则反向力矩等于$(N_2-N_1)b/2$。

(1)在下列情形中，外侧轮上受到的弹力会继续增大

(a)汽车转弯的速率 v 增大；

(b)弯道半径 r 增大；

(c)汽车重心离地面的距离 h 增大；

(d)内侧轮和外侧轮的距离 b 增大。

答 (a)、(c)

(2)如果汽车和地面的滑动磨擦系数为μ，汽车在弯道上行驶不发生滑动的最大速率是

(a)$\sqrt{rg}$；

(b)$\sqrt{\mu mg}$；

(c)$\sqrt{\mu g}$；

(d)$\sqrt{\mu}$。

答 (d)

(3)如果汽车和地面的滑动磨擦系数足够大，不会发生滑动，要使汽车不发生翻倒的最大速率是

(a)$\sqrt{2gh}$；

(b)$\sqrt{\mu rg}$；

(c)$\sqrt{grb}$；

(d)$\sqrt{\frac{gbr}{2h}}$。

答　(d)

1024．高速行驶的竞赛汽车依靠磨擦力转弯是有困难的，所以竞赛场地的弯道处做成斜坡，如果弯道的半径为 r，斜坡和水平方向成θ角，则汽车完全不依靠磨擦力转弯时的速度大小为

(a)$\sqrt{gr\sin\theta}$

(b)$\sqrt{gr\cos\theta}$

(c)$\sqrt{gr\,tg\theta}$

(d)$\sqrt{gr\,ctg\theta}$

答　(c)

1025．原来作圆周运动的物体产生离心运动的条件的简略表述，可以是

(a)当物体需要的向心力等于物体所受的合外力时；

(b)当物体需要的向心力小于物体所受的合外力时；

(c)当物体所受合外力小于作圆周运动所需要的向心力时；

(d)当物体所受的外力不能与向心力平衡时。

答　(c)

计算题

1026．闹钟上的分针长 3.5 厘米，试计算它尖端的线速度。

[解答]　分针的转动周期 $T=36\times10^3$ 秒，它作圆周运动的半径 $R=3.5\times10^{-2}$ 米，它的尖端的线速度

$$v=\frac{2\pi R}{T}$$
$$=\frac{2\times3.14\times3.5\times10^{-2}}{36\times10^{3}}\text{米/秒}$$
$$=6.11\times10^{-5}\text{米/秒}$$

1027．某金属压延厂所用的轧辊机辊筒的半径为 20 厘米，轧辊机的转速为 80 转/分，问轧一根长为 50 米的金属线材，需要多长时间？

[解答]　已知：n=80 转/分=1.33 转/秒，R=20 厘米=0.2 米。

设轧辊机边缘的线速度为 v，则

$$v=2\pi nR=2\times3.14\times1.33\times0.2\text{米/秒}$$
$$=1.67\text{米/秒}$$

根据运动学公式　$t=\frac{s}{v}$，

$$t=\frac{50}{1.67}\text{秒}=29.94\text{秒}。$$

1028．电唱机转盘每分钟的转数有$16\frac{2}{3}$、$33\frac{1}{3}$、45和78四档。求每一档的周期和角速度。

［解答］　根据圆周运动公式

$$T = \frac{1}{n},$$

$$T_1 = \frac{1}{n_1} = 1/(16\frac{2}{3}/60)\text{秒} = 3.60\text{秒};$$

$$T_2 = \frac{1}{n_2} = 1/(33\frac{1}{3}/60)\text{秒} = 1.80\text{秒};$$

$$T_3 = \frac{1}{n_3} = 1/(45/60)\text{秒} = 1.33\text{秒};$$

$$T_4 = \frac{1}{n_4} = 1/(78/60)\text{秒} = 0.77\text{秒}。$$

$$\omega = 2\pi n,$$

$$\omega_1 = 2\pi \cdot 16\frac{2}{3}/60\text{弧度}/\text{秒} = 1.74\text{弧度}/\text{秒};$$

$$\omega_2 = 2\pi \cdot 33\frac{1}{3}/60\text{弧度}/\text{秒} = 3.49\text{弧度}/\text{秒};$$

$$\omega_3 = 2\pi \cdot 45/60\text{弧度}/\text{秒} = 4.71\text{弧度}/\text{秒};$$

$$\omega_4 = 2\pi \cdot 78/60\text{弧度}/\text{秒} = 8.16\text{弧度}/\text{秒}。$$

1029．测定气体分子速率的部分装置如图所示，全部装置放在高真空容器中，A、B 是两个圆盘，绕一根共同的轴以相同的角速度转动。两盘相距 l=20 厘米，盘上各开一很窄的细缝，两盘细缝之间成 6°的夹角。要使 v =300 米/秒的气体分子能垂直通过两个圆盘的细缝，求圆盘每秒钟的转速 n。

［分析］　当装置匀速转动时，要使 v=300 米/秒的分子能通过两个圆盘，则分子经过两盘距离 l 的时间 t_1 等于圆盘转过 6°的时间 t_2。

［解答］　气体分子通过两盘间的距离 l 所需的时间

$$t_1 = \frac{l}{v}。$$

圆盘装置转过 6°所需的时间

$$t_2 = \frac{6}{180} \cdot \pi / 2\pi n。$$

$$t_1 = t_2,$$

$$\frac{l}{v} = \frac{1}{60n},$$

$$n = \frac{v}{60l} = \frac{300}{60 \times 0.2}\text{转}/\text{秒}$$

$$= 25\text{转}/\text{秒}。$$

1030．有一个小球沿两根固定的平行轨道从静止开始作匀加速滚动，小球的半径 r=2 厘米，两平行导轨间的距离 d=3 厘米，经过 3 秒钟小球通过的距离是 4.5 米，求：

(1)经过 2 秒后小球滚动的角速度；

(2)此时球顶对于球心的线速度和向心加速度。

［解答］　(1)小球质心的加速度

$$\alpha = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 4.5}{3^2}\text{米}/\text{秒}^2 = 1\text{米}/\text{秒}^2,$$

两秒后小球质心的速度

$$v_1=at_2=1\times 2\ 米/秒=2\ 米/秒。$$

小球滚动时在某一时刻的线速度和角速度之间的关系(参阅论证题第1098题)

$$v=\omega\sqrt{r^2-\frac{d^2}{4}},$$

$$\omega_2=\frac{v_2}{\sqrt{r^2-\frac{d^2}{4}}}=\frac{2}{\sqrt{0.02^2-\frac{0.03^2}{4}}}弧度/秒$$

$$=151.2弧度/秒$$

(2)球顶相对球心的线速度

$$v'_2=\omega_2\cdot r=151.2\times 0.02\ 米/秒$$

$$=3.02\ 米/秒。$$

球顶相对球心的向心加速度

$$\alpha'_2=\omega_2^2 r=151.20^2\times 0.02米/秒^2$$

$$=457.2米/秒^2。$$

1031．有一个转速是75转/分的齿轮，想要用它带动一个54齿的转速为300转/分的齿轮转动，这时传动比和主动轮的齿数各是多少？

［解答］　设主动轮转速为 n_1，从动轮转速为 n_2，则传动比

$$n=\frac{n_2}{n_1}=\frac{300}{75}=4。$$

主动轮的齿数　　　$Z_1=n\cdot Z_2=4\times 54=216$。

1032．某工厂用传送带传送零件，要求传送速度为15米/分，两个传动轮的直径为300毫米，如图所示。假设皮带和轮子之间不打滑，那么轮子的转速应该多大？

［解答］　皮带的传送速度等于皮带轮边缘的线速度。

已知：v=15米/分=0.25米/秒，

$$R=\frac{300毫米}{2}=0.15米。$$

设需要轮子的转速为n，

$$v=2\pi n\cdot R$$

$$n=\frac{v}{2\pi R}=\frac{0.25}{2\times 3.14\times 0.15}转/秒$$

$$=0.27转/秒。$$

1033．地球自西向东自转，地球上的人，也随地球一起转动。已知地球半径R'约6400公里，地球自转一周需24小时，球在地面上纬度30°处，人随地球自转的角速度、线速度和向心加速度。

［解答］　人随地球自转作圆周运动的半径为R，R=R'cos30°，见图。根据圆周运动公式

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\times3600}\text{弧度/秒}$$
$$= 7.3\times10^{-5}\text{弧度/秒，}$$
$$v = \omega\cdot R = \omega R'\cos30°$$
$$= 7.3\times10^{-5}\times6.4\times10^{6}\times0.866\text{米/秒}$$
$$= 404\text{米/秒，}$$
$$\alpha = \omega^2R = \omega^2R'\cos30°$$
$$= (7.3\times10^{-5})^2\times6.4\times10^{6}\times0.866\text{米/秒}$$
$$= 3.0\times10^{-2}\text{米/秒}^2\text{。}$$

1034．如图所示，一个大轮通过皮带带动一个小轮转动。皮带和两个轮子之间没有滑动，大轮的半径是小轮的 2 倍，大轮上有一点 S 离转动轴的距离是大轮半径的 1/2。当大轮边缘上 P 点的向心加速度是 2 厘米/秒 ^{2} 时，大轮上的 S 点和小轮边缘的 Q 点的向心加速度各为多大？

［分析］　由于大轮通过皮带带动小轮，而皮带和轮子之间没有滑动，所以 P 点和 Q 点的线速度相等(即 $v_P=v_Q$)。此外，P 点和 S 点是大轮上的两个点，它们的角速度相等，即$\omega_P=\omega_S$。

［解答］　已知：$\omega_P=\omega_S$，$R_P=2R_S=2R_Q$，$\alpha_P=2$ 厘米/秒 ^{2}。

从公式　$\alpha_S=\omega_S^2R_S$，$\alpha_P=\omega_P^2R_P$，

得
$$\frac{\alpha_S}{\alpha_P}=\frac{\omega_S^2R_S}{\omega_P^2R_P}=\frac{1}{2}\text{，}$$
$$\alpha_S=\frac{1}{2}\alpha_P=\frac{1}{2}\times2\text{厘米/秒}^2=1\text{厘米/秒}^2\text{。}$$

又从　$\alpha_Q=\dfrac{v_Q^2}{R_Q}$，$\alpha_P=\dfrac{v_P^2}{R_P}$，

得
$$\frac{\alpha_Q}{\alpha_P}=\frac{\dfrac{v_Q^2}{R_Q}}{\dfrac{v_P^2}{R_P}}=\frac{\dfrac{v_Q^2}{R_Q}}{\dfrac{v_Q^2}{2R_Q}}=2\text{，}$$

$\alpha_Q=2\alpha_P=2\times2$ 厘米/秒 $^2=4$ 厘米/秒 ^{2}。

1035．正在前进的火车，它的机车的轮子(主动轮)每轮转数是各节车厢轮子每秒转数的 3/5，如果车厢轮子的半径是 36 厘米，那么机车轮子的半径是多大？机车轮子边缘上各点的向心加速度和车厢上轮子边缘上各点的向心加速度的比是多少？(车轮和轨道间无滑动。)

［解答］　火车在前进中机车轮子和车厢轮子的线速度相等，设机车轮子每秒转数为 n_1，车厢轮子每秒转数为 n_2。则

$$v_{\text{机}}=2\pi n_1r_1\text{，}$$
$$v_{\text{厢}}=2\pi n_2r_2\text{，}$$
$$2\pi n_1r_1=2\pi n_2r_2\text{。}$$

$$r_1=\frac{n_2}{n_1}r_2=\frac{5}{3}r_2$$

$$=\frac{5}{3}\times 36\text{厘米}=60\text{厘米。}$$

机车轮子边缘上的向心加速度$\alpha_1=4\pi^2n_1^2r_1$，

车厢轮子边缘上的向心加速度$\alpha_2=4\pi^2n_2^2r_2$，

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{n_1^2r_1}{n_2^2r_2}=(\frac{n_1}{n_2})^2\times\frac{r_1}{r_2}=(\frac{3}{5})^2=\frac{60}{36}$$

$$=\frac{3}{5}\text{。}$$

1036．甲乙两质点都在作匀速圆周运动，甲的质量是乙的 1/3，甲转动的圆周半径是乙的 3/4，当甲转动 60 次时，乙转动 45 次，试求甲乙两质点向心加速度的比和向心力的比。

［解答］　设甲、乙两质点转动时的向心加速度分别为$\alpha_{甲}$、$\alpha_{乙}$。

则
$$\alpha_{甲}=\omega_{甲}{}^2R_{甲}\text{，}\alpha_{乙}=\omega_{乙}{}^2R_{乙}\text{，}\frac{\omega_{甲}}{\omega_{乙}}=\frac{n_{甲}}{n_{乙}}=\frac{60}{45}\text{，}$$

$$\frac{\alpha_{甲}}{\alpha_{乙}}=(\frac{\omega_{甲}}{\omega_{乙}})^2\times\frac{R_{甲}}{R_{乙}}=(\frac{60}{45})^2\times\frac{3}{4}=\frac{4}{3}\text{。}$$

设甲、乙两质点所需的向心力分别为 $F_{甲}$和 $F_{乙}$，则

$$F_{甲}=m_{甲}\alpha_{甲}\text{，}F_{乙}=m_{乙}\alpha_{乙}\text{，}$$

$$\frac{F_{甲}}{F_{乙}}=\frac{m_{甲}}{m_{乙}}\times\frac{\alpha_{甲}}{\alpha_{乙}}=\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{9}\text{。}$$

1037．作匀速圆周运动的质点，线速度为 10 米/秒，该质点从 A 到 B 速度增量的大小是 5 米/秒，AB 两点间弧长是 4 米，求：(1)这一过程中的平均加速度；(2)这段弧长所对的圆心角；(3)圆周的半径；(4)向心加速度的大小。

［解答］(1)设这过程中的平均加速度为$\overline{\alpha}$，则有

$$\overline{\alpha}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\qquad(1)$$

$$\Delta t=\frac{\overset{\frown}{AB}}{v}\qquad(2)$$

将(2)式代入(1)式得

$$\overline{\alpha}=\frac{\Delta v\cdot v}{AB}=\frac{5\times 10}{4}\text{米/秒}^2=12.5\text{米/秒}^2\text{。}$$

(2)质点作匀速圆周运动，在 A 点 B 点的速度大小相等，方向不同，从矢量图中可知，这段弧长所对的圆心角为θ，是等腰三角形的顶角。则

$$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\frac{1}{2}\Delta v}{v}=\frac{1}{2}\quad\frac{\Delta v}{v}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{10}=\frac{1}{4}\text{，}$$

$$\frac{\theta}{2}=\arcsin 0.25\text{，}$$

$$\theta=2\arcsin 0.25=29^\circ\text{。}$$

(3)圆周的半径 $$R=\frac{AB}{\theta}=\frac{4}{29°\times\frac{\pi}{180°}}\text{米}=7.9\text{米。}$$

(4)向心加速度 $$\alpha_n=\frac{v^2}{R}=\frac{10^2}{7.9}\text{米/秒}^2=12.7\text{米/秒}^2\text{。}$$

1038．一列火车以 72 千米/小时的速度运行，在驶近一座铁桥时，火车以-0.1 米/秒^{2}的加速度减速，90 秒后到达铁桥，如果机车轮子半径为 60 厘米，车厢轮子的半径为 36 厘米，求火车到达铁桥时机车轮子和车厢轮子的转速和轮子边缘的向心加速度。(车轮与轨道间无滑动。)

[解答]　火车运行的速度等于轮子边缘相对于轮轴转动的线速度。

根据运动学公式，火车到达铁时的线速度

$$\begin{aligned}v&=v0-at\\&=20-0.1\times90\text{米/秒}\\&=11\text{米/秒。}\end{aligned}$$

机车轮子的转速 $$n_1=\frac{v}{2\pi r_1}=\frac{11}{2\times3.14\times0.6}\text{转/秒}$$

$$=2.92\text{转/秒}$$

因机车和车厢的速度相同，所以车厢轮子的转速

$$n_2=\frac{v}{2\pi r_2}=\frac{11}{2\times3.14\times0.36}\text{转/秒}$$

$$=4.87\text{转/秒。}$$

机车轮子边缘的向心加速度

$$\alpha_{n_1}=\frac{v_1^2}{r_1}=\frac{11^2}{0.6}\text{米/秒}^2=202\text{米/秒}^2\text{。}$$

车厢轮子边缘的向心加速度

$$\alpha_{n_2}=\frac{v_2^2}{r_2}=\frac{11^2}{0.36}\text{米/秒}^2=336\text{米/秒}^2\text{。}$$

1039．一轻绳绕在半径为 1 米的轻质的定滑轮上，绳子的下端挂质量为 1 千克的物体，轻绳和定滑轮间的磨擦力为 6 牛。试求物体从静止开始下降 1.5 秒后定滑轮的角速度ω。

[解答]　物体下落的加速度α由牛顿第二定律得

$$mg-f=ma,$$

$$\alpha=\frac{mg-f}{m}=\frac{1\times9.8-6}{1}\text{米/秒}^2$$

$$=3.8\text{米/秒}^2\text{。}$$

下落 1.5 秒后的速度

$$v=\alpha t=3.8\times1.5\text{米/秒}=5.7\text{米/秒。}$$

物体在此时的速度 v 也就是定滑轮边缘在此时的线速度，所以定滑轮在此时的角速度为

$$\omega=\frac{v}{r}=\frac{5.7}{1}\text{弧度/秒}=5.7\text{弧度/秒。}$$

1040．如图(a)，将内壁光滑的等螺距螺旋管竖直放置，长 L=25 厘米，半径 R=5 厘米。有一质量 m=150 克的钢珠沿壁从顶端 A 由静止开始向下运

动，经过时间 t=1 秒后在末端 F 出来，AF 间有 5 个螺距，试求钢球在管壁内 B、C、D、E、F 各点的速度及水平面内的向心加速度和向心力。

［分析］ 钢珠在管壁内受到重力和管壁弹力的作用，其中弹力方向不断改变，指向中心轴线，它的水平分力就是钢珠作圆周运动的向心力。因钢珠运动的速率不断增加，所以钢珠做圆周运动的水平分速度也不断增加，所以从上到下，钢球绕中心轴做圆周运动的向心加速度和向心力的大小也不断增加。为便于分析，将螺旋展开为斜面，如图(b)所示，总长 $s=\sqrt{L^2+(10\pi R)^2}$，设钢珠沿斜面的加速度为α。则

$$v_B=\sqrt{2\alpha\cdot\sqrt{(\frac{L}{5})^2+(2\pi R)^2}};$$

$$v_C=\sqrt{2\alpha\cdot\sqrt{(\frac{2L}{5})^2+(4\pi R)^2}};$$

$$v_D=\sqrt{2\alpha\cdot\sqrt{(\frac{3L}{5})^2+(6\pi R)^2}};$$

$$v_E=\sqrt{2\alpha\cdot\sqrt{(\frac{4L}{5})^2+(8\pi R)^2}};$$

$$v_F=\sqrt{2\alpha s}。\qquad 其中\alpha=\frac{2s}{t^2}。$$

绕中心轴做圆周运动的水平分速度

$$v'_B=v_B\cos\alpha=v_B\cdot\frac{10\pi R}{\sqrt{(10\pi R)^2+L^2}};$$

$$v'_C=v_C\cdot\frac{10\pi R}{\sqrt{L^2+(10\pi R)^2}};$$

$$v'_D=v_D\cdot\frac{10\pi R}{\sqrt{L^2+(10\pi R)^2}};$$

$$v'_E=v_E\cdot\frac{10\pi R}{\sqrt{L^2+(10\pi R)^2}};$$

$$v'_F=v_F\cdot\frac{10\pi R}{s}。$$

向心加速度

$$\alpha'_B=\frac{{v'_B}^2}{R};\ \alpha'_C=\frac{{v'_C}^2}{R};\ \alpha'_D=\frac{{v'_D}^2}{R};$$

$$\alpha'_E=\frac{{v'_E}^2}{R};\ \alpha'_F=\frac{{v'_F}^2}{R}。$$

向心力

$$F_B=m\alpha'_B;\ F_C=m\alpha'_C;\ F_D=m\alpha'_D;$$

$$F_E=m\alpha'_E;\ F_F=m\alpha'_F。$$

［解答］ 钢珠沿斜面的加速度α

$$\alpha=\frac{2s}{t^2}=\frac{2\sqrt{L^2+(10\pi R)^2}}{t^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{0.25^2+(10\pi\times0.05)^2}}{1}\text{米/秒}^2=3.18\text{米/秒}^2$$

沿斜螺旋到达 B、C、D、E、F 各点的速度

$$v_B=\sqrt{2\alpha\cdot\sqrt{(\frac{L}{5})^2+(2\pi R)^2}}$$

$$=\sqrt{2\times3.18\cdot\sqrt{0.05^2+(2\pi\times0.05)^2}}\text{米/秒}$$

$$=1.42\text{米/秒；}$$

$$v_C=\sqrt{2\alpha\cdot\sqrt{(\frac{2L}{5})^2+(4\pi R)^2}}$$

$$=\sqrt{2\times3.18\cdot\sqrt{0.1^2+(4\pi\times0.05)^2}}\text{米/秒}$$

$$=2.01\text{米/秒；}$$

$$v_D=\sqrt{2\alpha\cdot\sqrt{(\frac{3L}{5})^2+(6\pi R)^2}}$$

$$=\sqrt{2\times3.18\cdot\sqrt{0.15^2+(6\pi\times0.05)^2}}\text{米/秒}$$

$$=2.46\text{米/秒；}$$

$$v_E=\sqrt{2\alpha\cdot\sqrt{(\frac{4L}{5})^2+(8\pi R)^2}}$$

$$=\sqrt{2\times3.18\cdot\sqrt{0.2^2+(8\pi\times0.05)^2}}\text{米/秒}$$

$$=2.84\text{米/秒；}$$

$$v_F=\sqrt{2\alpha s}=\sqrt{2\times3.18\cdot\sqrt{0.25^2+(10\pi\times0.05)^2}}\text{米/秒}$$

$$=3.18\text{米/秒。}$$

绕中心轴做圆周运动的水平分速度

$$v_B' = \frac{10\pi R v_B}{(10\pi R)^2 + L^2} = \frac{10\pi \times 0.05}{(10\pi \times 0.05)^2 + 0.25^2} \times 1.42\text{米}/\text{秒}$$
$$= 1.40\text{米}/\text{秒};$$
$$v_C' = \frac{10\pi R v_C}{(10\pi R)^2 + L^2} = \frac{10\pi \times 0.05}{(10\pi \times 0.05)^2 + 0.25^2} \times 2.01\text{米}/\text{秒}$$
$$= 1.98\text{米}/\text{秒};$$
$$v_D' = \frac{10\pi R v_D}{(10\pi R)^2 + L^2} = \frac{10\pi \times 0.05}{(10\pi \times 0.05)^2 + 0.25^2} \times 2.46\text{米}/\text{秒}$$
$$= 2.43\text{米}/\text{秒};$$
$$v_E' = \frac{10\pi R v_E}{(10\pi R)^2 + L^2} = \frac{10\pi \times 0.05}{(10\pi \times 0.05)^2 + 0.25^2} \times 2.84\text{米}/\text{秒}$$
$$= 2.80\text{米}/\text{秒};$$
$$v_F' = \frac{10\pi R v_F}{(10\pi R)^2 + L^2} = \frac{10\pi \times 0.05}{(10\pi \times 0.05)^2 + 0.25^2} \times 3.18\text{米}/\text{秒}$$
$$= 3.14\text{米}/\text{秒}。$$

做圆周运动的向心加速度

$$\alpha_B' = \frac{{v_B'}^2}{R} = \frac{1.40^2}{0.05}\text{米}/\text{秒}^2 = 39.2\text{米}/\text{秒}^2;$$
$$\alpha_C' = \frac{{v_C'}^2}{R} = \frac{1.98^2}{0.05}\text{米}/\text{秒}^2 = 78.41\text{米}/\text{秒}^2;$$
$$\alpha_D' = \frac{{v_D'}^2}{R} = \frac{2.43^2}{0.05}\text{米}/\text{秒}^2 = 118.1\text{米}/\text{秒}^2;$$
$$\alpha_E' = \frac{{v_E'}^2}{R} = \frac{2.80^2}{0.05}\text{米}/\text{秒}^2 = 156.8\text{米}/\text{秒}^2;$$
$$\alpha_F' = \frac{{v_F'}^2}{R} = \frac{3.14^2}{0.05}\text{米}/\text{秒}^2 = 197.2\text{米}/\text{秒}^2;$$

向心力

$$F_B = m\alpha_B' = 0.15 \times 39.2\text{牛} = 5.88\text{牛};$$
$$F_C = m\alpha_C' = 0.15 \times 78.4\text{牛} = 11.76\text{牛};$$
$$F_D = m\alpha_D' = 0.15 \times 118.1\text{牛} = 17.72\text{牛};$$
$$F_E = m\alpha_E' = 0.15 \times 156.8\text{牛} = 23.52\text{牛};$$
$$F_F = m\alpha_F' = 0.15 \times 197.2\text{牛} = 29.58\text{牛};$$

1041．一根长 0.5 米的绳，受到 9.8 牛的拉力就会被拉断。现在把绳的一端拴一个质量为 0.3 千克的物体，使物体在光滑水平面内作匀速圆周运动，求绳被拉断时物体的线速度。

[解答]　绳子对物体的拉力，就是供给物体作匀速圆周运动的向心力。

根据牛顿第二定律

$$F = m \cdot \frac{v^2}{R},$$

$$v = \sqrt{\frac{FR}{m}} = \sqrt{\frac{9.8 \times 0.5}{0.3}}\text{米/秒}$$

$$= 4.04\text{米/秒}。$$

1042．一重心很低的汽车在水平地面上沿半径 R=90 米的圆弧行驶，如果车轮和地面的磨擦系数μ=0.4，求汽车最大的行驶速度。

［解答］ 使汽车沿圆弧行驶的向心力由地面对车轮的静磨擦力供给，最大静磨擦力

$$f_{max}=\mu N \qquad (1)$$

而 $$N=mg \qquad (2)$$

根据牛顿第二定律

$$f_m = m \cdot \frac{v^2}{R} \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式联立得

$$\mu mg = m \cdot \frac{v^2}{R},$$

$$v = \sqrt{\mu Rg} = \sqrt{0.4 \times 90 \times 9.8}\text{米/秒}$$

$$= 18.8\text{米/秒}。$$

1043．铁路转弯处圆弧的半径是 300 米，轨距是 1435 毫米，规定火车通过这里的速度是 72 千米/小时，计算内、外铁轨具有相同压力时，它们的高度差。

［分析］ 如果外轨超出内轨的高度适当，可以使重力 mg 和支持力 N 的合力刚好等于火车转弯所需要的向心力，这时内、外轨和轮缘不相互挤压，车能安全运行。

［解答］ 火车在铁路转弯处受到重力 mg 和支持力 N，如图所示。它们的合力 F 等于火车转弯所需要的向心力，所以

$$F = mg \cdot tg\alpha = m\frac{v^2}{R},$$

$$tg\alpha = \frac{v^2}{Rg}。$$

由于 $$tg\alpha = \frac{h}{L},$$

所以 $$\frac{h}{L} = \frac{v^2}{Rg},$$

$$h = \frac{v^2 L}{Rg} = \frac{20^2 \times 1.435}{300 \times 9.8}\text{米}$$

$$= 0.195\text{米}。$$

1044．如果自行车以 18 千米/小时的速度转弯，转弯处的半径为 20 米，问这时自行车和铅垂线的夹角α是多大？如将车速降为 9 千米/小时，夹角又是多大？

［解答］ 自行车转弯时受到重力 mg 和地面对车的作用力 Q 的作用，

如图所示。这两个力的合力 F 就是自行车转弯所需要的向心力，有

$$F = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

又 $$F = mgtg\alpha \qquad (2)$$

将(2)式代入(1)式

得 $$tg\alpha = \frac{v^2}{Rg},$$

$$\alpha = arctg\frac{v^2}{Rg}。$$

因为 v=18 千米/小时=5 米/秒，

所以 $$\alpha = arctg\frac{25}{20\times 9.8} = arctg0.1276,$$

$$\alpha = 7°15'。$$

当 $v = 9$千米/小时 $= 2.5$米/秒，

$$\alpha = arctg\frac{25^2}{20\times 9.8} = arctg0.0319,$$

$$\alpha = 1°49'。$$

1045．一辆摩托车最小的速度应该是多少时才能在圆周半径 R=6 米的竖直圆筒体的内表面运行。已知轮胎和圆筒体内表面的磨擦系数μ=0.4，求摩托车驾驶员身体对垂线的倾斜度。

[分析]　作用在摩托车和驾驶员身上有三个力：和圆筒体表面相垂直的弹力 N，重力 mg 和静磨擦力 f，其中弹力 N 就是供给摩托车驾驶员作圆周运动的向心力。

[解答]　根据牛顿第二定律

$$N = m\cdot\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

$$f - mg = 0 \qquad (2)$$

当以最小速度作圆周运动时，摩托力 f=μN。将此值代入(2)式得

$$\mu N - mg = 0,$$

$$N = \frac{mg}{\mu} \qquad (3)$$

将(3)式代入(1)式

得 $$\frac{mg}{\mu} = \frac{mv^2}{R},$$

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu}} = \sqrt{\frac{9.8\times 6}{0.4}}\text{米/秒} = 12.12\text{米/秒}。$$

根据物体的平衡条件，对于质心的合力矩为零

则

$$f \cdot AO \cdot \sin\alpha = N \cdot AO \cdot \cos\alpha,$$

$$tg\alpha = \frac{N}{f} = \frac{N}{\mu N} = \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$\alpha = 68°12'。$$

1046．一架滑翔机用 180 千米/小时的速率，沿着半径为 1200 米的水平圆弧飞行，计算机翼和水平面的夹角。

[解答]　滑翔机沿圆弧飞行时受到重力 mg 和升力 N 的作用(如图所示)，它们的合力 F 等于滑翔机所需要的向心力，设机翼的水平面的夹角为α。则

$$F=N\sin\alpha \qquad (1)$$

$$mg=N\cos\alpha \qquad (2)$$

根据牛顿第二定律

$$F = m \cdot \frac{v^2}{R} \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式联立消去 F、N 得

$$tg\alpha = \frac{v^2}{Rg},$$

因为　v=180 千米/小时=50 米/秒，

所以

$$\alpha = arctg\frac{v^2}{Rg} = arctg\frac{50^2}{1200 \times 9.8}$$

$$= 12°。$$

1047．一台自动传送盘，盘上离转动轴 0.5 米处有一个重 4.9 牛的零件随盘作匀速转动。(1)如果零件在盘上无滑动，当零件的线速度为 1.5 米/秒时，所需的向心力有多大？(2)作出零件的受力图，并指出它们各为多大。

[解答]　(1)所需向心力

$$F_{向} = m\frac{v^2}{R} = \frac{4.9}{9.8} \times \frac{1.5^2}{0.5}\text{牛}$$

$$= 2.25\text{牛}。$$

(2)根据题意可知，零件受到重力 mg，盘的支持力 N 和静磨擦力 f 的作用，如图(b)所示。由于零件在竖直方向上保持平衡，因此 N=mg=4.9 牛；而静磨擦力 f 就是零件作圆周运动所需的向心力，所以 f=2.25 牛。

1048．一根倔强系数 $k=10^3$ 牛/米的弹簧，长 l=0.2 米，一端固定在光滑水平转台的转动轴上，另一端系一个质量 m=2 千克的物体，当转台以 180 转/分转动时，弹簧伸长多少？

[解答]　物体随转台做圆周运动的向心力就是弹簧的弹力，F=kx。而物体的转动半径 r=l+x，其中 x 为弹簧伸长的长度。

根据牛顿第二定律

$$kx = m \cdot 4\pi^2 n^2 (l + x),$$

$$x = \frac{4\pi^2 n^2 ml}{k - 4\pi^2 n^2 m}。$$

因为 n=180 转/分=3 转/秒，l=0.2 米，m=2 千克，k=10^3 牛/米，

所以
$$x=\frac{4\times3.14^2\times3^2\times2\times0.2}{10^3-4\times3.14^2\times3^2\times2}\text{米}$$
$$=0.49\text{米}$$

1049．在半径为 0.2 米的水平转台的边缘处放一个 0.5 千克的物体 A，在离转轴 0.1 米处，立一根直杆，杆顶系一根长 0.3 米的细绳，绳的另一端拴一个 0.1 千克的小球 B，当转台匀速转动时，A 和 B 都随着转台一起作匀速圆周运动，拴小球 B 的细绳跟直杆成 30°角，如图所示，(1)使 A、B 作匀速圆周运动的向心力各是什么力？各有多大？这时角速度是多少？(2)如果角速度变大，将发生什么现象？

[解答] (1)物体 A 随转台一起作匀速圆周运动，和球台保持相对静止，重力跟支承力平衡，转台对 A 的静磨擦力就是使 A 作匀速圆周运动所需的向心力，设转动时的角速度为ω，则

$$f_A=m_A\omega^2r_A \qquad (1)$$

小球 B 由绳子拴着随转台转动作匀速圆周运动时，它所需的向心力是它的重力和绳子对它的拉力的合力，即

$$m_Bgtg30°=m_B\omega^2r_B \qquad (2)$$

从(2)式得

$$\omega=\sqrt{\frac{gtg30°}{r_B}}=\sqrt{\frac{9.8\times0.577}{0.1+0.3\sin30°}}\text{弧度/秒}$$
$$=4.76\text{弧度/秒。}$$

所以
$$f_A=m_A\omega^2r_A=0.5\times4.76^2\times0.2\text{牛}$$
$$=2.3\text{牛；}$$
$$F_B=m_Bgtg30°=0.1\times9.8\times0.577\text{牛}=0.566\text{牛。}$$

(2)如果角速度增大，则 A 和 B 所需的向心力也相应增大。A 的向心力是转台对它的静磨擦力，在最大静磨擦力的范围内，物体 A 仍随转台转动而作匀速圆周运动。由于$f_{max}=m_A\omega^2r_A$，当$\omega>\sqrt{\frac{f_{max}}{m_Ar_A}}$时，静磨擦力就不足以提供 A 所需的向心力，物体 A 就将税离转台沿切线方向飞出。当角速度增大时，物体 B 将升高，绳子和直杆间的夹角增大，这样它的重力和绳子对它拉力的合力也相应增大，以适应所需向心力的增大，角速度愈大，B 将升得愈高，张角θ也愈大。但由于 B 的升高，拉力随之增大，如果超过了绳所能承受的最大拉力，绳将被拉断而 B 即沿切线方向飞出。

1050．已知地球半径为 R、自转角速度为ω求一个质量为 m 的物体在地理纬度φ处的重力。

[解答] 设物体在地球表面，作用在物体上的力是地球对物体的万有引力 mg 和支持力 N(它的反作用力的数值等于物体的重力)。该物体和地球一起以角速度ω旋转，距离转轴的半径 r=Rcosφ。如图所示(示意图对向心力的大小作了夸张)。

根据牛顿第二定律

$$mg\cos\varphi-N\cos\alpha=m\omega^2R\cos\varphi \qquad (1)$$
$$N\sin\alpha-mg\sin\varphi=0 \qquad (2)$$

由(2)式得 $N\sin\alpha = mg\sin\varphi$，$\sin\alpha = \dfrac{mg\sin\varphi}{N}$，

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{mg\sin\varphi^2}{N^2}} \qquad (3)$$

将(3)式代入(1)式得

$$mg\cos\varphi - m\omega^2 R\cos\varphi = \sqrt{N^2-(mg\sin\varphi)^2}。$$

两边平方得 $m^2\cos^2\varphi(g^2-2g\omega^2R+\omega^4R^2)+m^2g^2\sin^2\varphi = N^2$，

$$N = \sqrt{m^2g^2-m^2\omega^2R\cos^2\varphi(2g-\omega^2R)}。$$

由于$\omega^2 R \le g$，所以有

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{(mg)^2-2(m^2g)R\omega^2\cos^2\varphi} \\ &= \sqrt{(mg)^2-2(m^2g)R\omega^2\cos^2\varphi+(Rm\omega^2\cos^2\varphi)^2} \\ &= mg-mR\omega^2\cos^2\varphi。\end{aligned}$$

1051．有一台水平转盘，盘上有一个质量为 m 的物体离转动轴的距离为 r，中间用一根细线相连，物体和转盘之间的静磨擦系数为 μ。如果细线所能承受的拉力为 3μmg。求：

(1)当角速度$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{\mu g}{2r}}$时，细线的拉力$T_1$；

(2)当角速度$\omega_2 = \sqrt{\dfrac{3\mu}{2r}}g$时，细线的拉力$T_2$；

(3)转盘转动的最大角速度ω_{max}。

［分析］ 物体随转盘运动时所需要的向心力是绳的拉力和静磨擦力的合力。即

$$T+\mu mg=m\omega^2 r \qquad (1)$$

但当ω较小时，向心力只有静磨擦力提供；当ω增大到使物体需要的向心力大于最大静磨擦力时才适用(1)式。因此用ω_b表示 T=0 时的最大角速度，则

$$\mu mg = m\omega_b^2 r，$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mu g}{r}}。$$

［解答］(1)当$\omega_1 = \sqrt{\dfrac{\mu}{2r}}g$时，因为$\omega_1 < \omega_b$，

所以 $T_1=0$，

$$f = m\omega^2 r = m\frac{\mu}{2r}g \cdot r = \frac{1}{2}\mu mg。$$

(2)当 $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{3\mu}{2r}}g$时，因为$\omega_2 > \omega_b$，

根据(1)式

$$T_2 = m \cdot \frac{3\mu}{2r}g \cdot r - \mu mg = \frac{1}{2}\mu mg，$$

而　　　　　　$f = f_{max} = \mu mg$。

(3)细线所能承受的最大拉力为T_{max}，转盘的最大角速度为ω_{max}

$$T_{max} + \mu mg = m\omega_{max}^2 r,$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{3\mu mg + \mu mg}{mr}} = 2\sqrt{\frac{\mu g}{r}}。$$

1052．如图所示，一个半径为 R 的半球壳，可绕通过球心的竖直轴转动，有质量为 m 的小物体 A，放在半球壳内侧，A 和球壳间的磨擦系数为μ，要使 A 紧贴在内侧边缘随半球壳作匀速圆周运动，角速度ω至少应该多大？

［分析］　物体 A 处于半球边缘随半球壳匀速转动而作匀速圆周运动时受到重力 mg，磨擦力 f 以及半球壳内侧的弹力 N 三个力的作用，如图所示。要使 A 紧贴在内侧边缘随半球壳的转动而作匀速圆周运动所需要的向心力N的值至少要等于$\frac{f}{\mu}$，而$f = mg$。

［解答］　根据题意

$$f=mg \qquad (1)$$

$$f=\mu N \qquad (2)$$

$$N=m\omega^2 R \qquad (3)$$

将(1)式代入(2)式得　　$N = \frac{mg}{\mu}$　　(4)

将(4)式代入(3)式得

$$\omega^2 R = \frac{g}{\mu},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\mu g}}。$$

1053．光滑水平转台上放一个质量为 1 千克的物体系有轻绳，通过中心孔绕过轻质定滑轮跟固定的弹簧相连，如图所示。物体离中心距离为 0.4 米，弹簧倔强系数 k=980 牛/米，当转台转动时物体随着作匀速圆周运动，如果绳子受到 19.6 牛的力就被拉断，求转台转动的最大角速度。(滑轮磨擦不计)

［解答］　物体随转台作匀速圆周运动的向心力就是绳子的拉力，而绳子的拉力等于弹簧的弹力，当ω最大时则

$$T_{max}=kx \qquad (1)$$

其中 x 为弹簧的伸长，物体转动半径为(l+x)。根据牛顿第二定律有

$$T_{max} = m\omega_{max}^2(l + x) \qquad (2)$$

由(1)式代入(2)式得

$$T_{max} = m\omega_{max}^2\left(l + \frac{T_{max}}{k}\right),$$

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{T_{max}}{m\left(l + \frac{T_{max}}{k}\right)}} = \sqrt{\frac{19.6}{1\times\left(0.4 + \frac{19.6}{980}\right)}}\text{弧度/秒}$$

$$= 6.83\text{弧度/秒}$$

1054．一竖直放置的圆环，半径为 0.1 米，以 2 转/秒的转速绕通过圆心的竖直轴旋转，套在圆环上的小球可以沿环无磨擦地滑动，求当小球相对圆环静止时小球所处的位置。

[分析]　设小球相对圆环静止时,小球和圆心的连线跟竖直轴的夹角为θ。此时小球受到重力 mg 和弹力 N 两个力作用，它们的合力就是提供小球绕竖直轴做匀速圆周运动的向心力。

[解答]　根据牛顿第二定律

$$N\sin\theta=m\cdot 4\pi^2n^2R\sin\theta \quad (1)$$

$$N\cos\theta=mg \quad (2)$$

(2)式除以(1)式　$\cos\theta=\frac{g}{4\pi^2n^2R}$

$$=\frac{9.8}{4\times 3.14^2\times 2^2\times 0.1}=0.6212,$$

$$\theta=51°36'。$$

1055．如图(a)在倾角 a=30°的光滑斜面上，有一长 L=0.4 米的细绳，一端固定在 O 点，另一端拴一个质量 m=0.2 千克的小球，使物体在斜面上作圆周运动。求：(1)小球通过最高点 A 时的最小速度；(2)如果细绳受到 9.8 牛的拉力就会被拉断，小球通过最低点 B 时的最大速度。

[分析]　小球在斜面上做圆周运动受重力 mg、弹力 N 和细绳拉力 T 的作用，如图(b)。如小球通过最高点 A 时，T=0 则速度为最小，向心力是重力和弹力的合力，等于 mgsinα。在通过最低点 B 时，向心力为 mg、N、T 这三个力的合力，且等于 T－mgsinα当 T=9.8 牛时，速度达最大。

[解答]　小球在斜面上作圆周运动，根据牛顿第二定律

在A点　$mg\sin\alpha=m\frac{v_A^2}{L}$，

$$v_A=\sqrt{gL\sin\alpha}=\sqrt{9.8\times 0.4\times \sin 30°}\text{米/秒}$$

$$=1.4\text{米/秒}。$$

在B点　$T-mg\sin\alpha=m\frac{v_B^2}{L}$，

$$v_B=\sqrt{\frac{TL}{m}-gL\sin\alpha}=\sqrt{\frac{9.8\times 0.4}{0.2}-9.8\times 0.4\times\frac{1}{2}}\text{米/秒}$$

$$=4.2\text{米/秒}。$$

1056．如图(a)离心机上装有横杆，杆上穿过两个小球 A 和 B 质量都为 m。转轴和 A 球的距离，AB 两球间的距离都为离心机内半径 r 的 1/3，且 A、B 间用细线连接(线在图中未画出)，球 B 和杆间无磨擦。当离心机的角速度为ω时，求：(1)细线中的张力；(2)A 球所受的磨擦力。

[分析]　两球随离心机作圆周运动,小球 A 所需的向心力是横杆对它的磨擦力和细线的拉力的合力，球 B 所需的向心力由细线张力所供给。A、B 两球受力情况如图(b)所示。

[解答]　根据牛顿第二定律

$$f-T=m_A\omega^2r_A \quad (1)$$

$$T=m_B\omega^2r_B \quad (2)$$

将(2)代入(1)式

$$f=\omega^2(m_A r_A+m_B r_B)。$$

因为 $$r_A=\frac{r}{3}，r_B=\frac{2r}{3}，m_A=m_B=m，$$

所以 $$T=m_B\omega^2\cdot r_B=\frac{2}{3}m\omega^2 r，$$

$$f=m\omega^2(r_A+r_B)=m\omega^2 r。$$

1057．在离心机的光滑的横杆上穿过两个质量分别为 2m 和 m 的小球 m_A 和 m_B，m_A、m_B 之间用倔强系数为 k 的弹簧连接，弹簧自然长度为 l。当离心机心角速度ω转动时，如果 A、B 两球仍能相对于横杆静止而又不碰到两壁，求 A、B 两球离开转轴的水平距离。

[解答]　两个小球 A 和 B 随离心机转动作匀速圆周运动所需要的向心力由弹簧的弹力提供，设弹簧伸长量为 x，则

$$kx=m_A\omega^2 r_A \qquad (1)$$

$$kx=m_B\omega^2 r_B \qquad (2)$$

其中 r_A、r_B 分别为小球 A 和 B 离开转轴的水平距离。

从(1)、(2)式可得

$$m_A r_A=m_B r_B，\qquad \frac{r_A}{r_B}=\frac{m_B}{m_A}=\frac{1}{2} \qquad (3)$$

由题意可知，

$$x=r_A+r_B-l \qquad (4)$$

(3)式代入(4)式

$$x=3r_A-l \qquad (5)$$

(5)式代入(1)、(2)式得

$$k(3r_A-l)=m_A\omega^2 r_A，$$

$$r_A=\frac{kl}{3k-2m\omega^2}，r_B=\frac{2kl}{3k-2m\omega^2}。$$

从上述答案中可知，当$\omega^2<\frac{3k}{2m}$时$3k-2m\omega^2>0$；当ω^2增大到等于$\frac{3k}{2m}$时，$3k-2m\omega^2=0$，此时r_A和r_B无穷大，也即ω^2尚未达到$\frac{3k}{2m}$时球A、B已紧靠离心机两壁了。

1058．绳长 0.5 米，一端固定在光滑水平台面上的 O 点，另一端系一个质量为 0.1 千克的小球 A，中间连一个质量为 0.05 千克的小球 B，在台面上以角速度$\omega=\frac{\pi}{2}$弧度/秒作匀速圆周运动，求绳上的张力。

[分析]　球 A、B 以相同角速度做匀速圆周运动，A 球需要的向心力由绳 AB 段的张力提供，而 B 球所要的向心力由绳 OB 段的张力和 AB 段张力的合力提供，两球的受力情况如图。

[解答]　根据牛顿第二定律

$$T_{AB} = m_A\omega^2 r$$
$$= 0.1\times(\frac{\pi}{2})^2\times 0.5\text{牛}$$
$$= 0.12\text{牛}$$
$$T_{OB} - T'_{AB} + m_B\omega^2\frac{r}{2}，T'_{AB} = T_{AB}，$$
$$T_{OB} = T'_{AB} + m_B\omega^2\frac{r}{2}$$
$$= 0.12\text{牛} + 0.05\times(\frac{\pi}{2})^2\times 0.25\text{牛}$$
$$= 0.15\text{牛}。$$

1059．半径为 0.2 米的竖直放置的圆环，以 2π弧度/秒的角速度绕通过圆心的竖直轴旋转，套在圆环上的小球 A 可以沿环无磨擦地滑动，用 0.2 米的绳子连接小球 A 和 B 如图(a)所示，小球 A 和 B 的质量都是 0.1 千克，当系统达到平衡时，A 小球和圆心的连线跟竖直轴的夹角为 30°。求：

(1)连接小球 A 和 B 的绳子跟竖直轴的夹角φ的大小；

(2)小球 A 受到环的压力 N 和绳子的拉力 T 的大小。

[分析]　小球 A 在环上受到三个力的作用：重力 m_Ag、弹力 N 和绳子拉力 T，受力情况如图(b)所示。向心力 F_A=Nsin30°－Tsinφ

小球 B 受绳子的拉力 T'(大小等于 T)和重力 m_Bg 的作用，向心力 F_B=T'sinφ=Tsinφ，转动半径 F_B=(Rsin30°＋lsinφ)。

[解答]　根据牛顿第二定律有

$$N\cos30° - T\cos\varphi - m_Ag = 0 \quad (1)$$
$$N\sin30° - T\sin\varphi = m_A\omega^2 R\sin30° \quad (2)$$
$$T\cos\varphi - m_Bg = 0 \quad (3)$$
$$T\sin\varphi = m_B\omega^2(R\sin30° + l\sin\varphi) \quad (4)$$

(3)式代入(1)式

$$N\cos30° - m_Ag - m_Bg = 0,$$
$$N = \frac{m_A + m_B}{\cos30°}g = \frac{0.1+0.1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times 9.8\text{牛}$$
$$= 2.26\text{牛}$$

(4)式代入(2)式

$$N\sin30° - m_B\omega^2(R\sin30° + l\sin\varphi) = m_A\omega^2 R\sin30°,$$
$$\sin\varphi = \frac{N\sin30° - 2m_A\omega^2 R\sin30°}{m_A\omega^2 l}$$
$$= \frac{2.26\times0.5}{0.1\times(2\pi)^2\times0.2} - 1$$
$$= 0.4312，$$
$$\varphi = \arcsin0.4312 = 25°32'$$

由(3)式可得

$$T=\frac{m_B g}{\cos\varphi}=\frac{0.1\times 9.8}{\cos 25°32'}\text{牛}=1.09\text{牛。}$$

1060．长 0.4 米的细绳一端拴一个质量为 1 千克的小球，另一端固定在 O 点，然后使小球从最低位置 B 由静止开始在竖直平面上做切向加速度大小始终为 1.2 米/秒^{2}的圆周运动，经过两周细绳突然断掉。问：

(1)此时小球的速度多大？

(2)细绳所能随的最大张力多大？

(3)如果 O 点离地高 2.4 米，小球落地点离 O 点的水平距离多大？

［解答］　(1)小球经二周在 B 点拉断细绳脱落，此时速度可由公式

$$\begin{aligned}v&=\sqrt{2\alpha s}\\&=\sqrt{2\times1.2\times4\pi r}=\sqrt{2\times1.2\times4\pi\times0.4}\text{米/秒}\\&=3.47\text{米/秒。}\end{aligned}$$

(2)设细绳所受的最大张力为 T_{max} 根据牛顿第二定律

$$T_{max}-mg=\frac{mv^2}{r}\text{，}$$

$$\begin{aligned}T_{max}&=m(\frac{v^2}{r}+g)\\&=1\times(\frac{3.47^2}{0.4}+9.8)\text{牛}\\&=39.9\text{牛。}\end{aligned}$$

(3)小球在 B 点脱离时，速度方向与 OB 垂直，即作平抛运动。根据运动学公式　　　　s=vt，

$$h=\frac{1}{2}gt^2\text{；}$$

得

$$\begin{aligned}s&=v\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}=3.47\times\sqrt{\frac{(2.4-0.4)\times2}{9.8}}\text{米}\\&=2.22\text{米。}\end{aligned}$$

1061．一辆质量为 4 吨的汽车，以 18 千米/小时的速度分别通过平桥、凹形桥最低点和凸形桥的最高点。已知凹形桥和凸形桥中央的圆弧半径都是 50 米，问汽车对桥面的压力各是多少？

［解答］　汽车通过凹形桥和凸形桥时受到重力 mg 的桥面对它的弹力 Q 的作用，供给汽车作圆周运动的向心力就是这二个力的合力。

汽车通过凹形桥最低点时

$$Q_1-mg=m\frac{v^2}{R}\text{，}$$

$$\begin{aligned}Q_1&=m(g+\frac{v^2}{R})=4\times10^3(9.8+\frac{5^2}{50})\text{牛}\\&=4.12\times10^4\text{牛。}\end{aligned}$$

此时汽车对桥面的压力 N_1 与弹力 Q_1 是一对相互作用力，所以 $N_1=4.12\times10^4$ 牛。

汽车通过平桥时　　　$Q_2=mg=4\times10^3\times9.8$ 牛

$=3.92\times10^4$ 牛。$N_2=Q_2$，

即 $N_2=3.92\times10^4$ 牛。

汽车通过凸形桥最高点时

$$mg-Q_3=m\cdot\frac{v^2}{R},$$

$$Q_3=m(g-\frac{v^2}{R})=4\times10^3(9.8-\frac{5^2}{50})\text{牛}$$

$$=3.72\times10^4\text{牛}。$$

此时汽车对桥面的压力 N_3 与弹力 Q_3 是一对相互作用力,所以 $N_3=3.72\times10^4$ 牛。

1062．拱桥的半径为 50 米，桥面顶处有一个不大的空缺。现有一辆汽车通过桥顶，为使汽车不陷到空缺里面，则汽车的速度至少要多大？

［分析］　汽车在拱桥上做圆周运动，它到达桥顶时，在竖直方向受到重力 mg 和弹力 N 两个力的作用，为使汽车不陷到空缺里面，必须使弹力 N=0，即维持汽车做圆周运动的向心力正好为重力 mg。

［解答］　根据牛顿第二定律

$$mg=m\frac{v^2}{R},$$

$$v=\sqrt{Rg}=\sqrt{50\times9.8}\text{米/秒}=22.14\text{米/秒}。$$

1063．飞机在竖直平面内作圆周运动，圆周的半径是 180 米，飞行员的质量是 70 千克。求：(1)飞行员在到达圆周的最高点不致税离座位的最小速度是多大？(2)以同样的速度通过圆弧的最低点，飞行员对座位的压力又是多大？

［分析］　当飞机达到圆弧的最高点时,如果飞行员所受的重力全部供给飞行员作圆周运动的向心力，飞行员就正好不税离座位。在过圆弧的最低点时，飞行员受到两个力的作用：重力 mg 和竖直向上的座位对它的弹力 Q，它们的合力就是供给飞行员作圆周运动的向心力。而飞行员对座位的压力 N 与 Q 的数值相等。

［解答］　(1)设飞行员到达圆周的最高点时的最小速度为 v，则

$$mg=m\cdot\frac{v^2}{R},$$

$$v=\sqrt{Rg}=\sqrt{180\times9.8}\text{米/秒}=42\text{米/秒}。$$

(2)飞行员到达最低点时

$$Q-mg=m\cdot\frac{v^2}{R},$$

$$Q=m(g+\frac{v^2}{R})$$

$$=70(9.8+\frac{42^2}{180})\text{牛}$$

$$=1372\text{牛}。$$

飞行员对座位的压力 N 是弹力 Q 的反作用力，所以 N=1372 牛。

1064．行车上钢丝绳的张度 L=4 米，用它来吊运 2 吨重的机件。行车以 v=2 米/秒的速度向前匀速行驶，当行车突然刹车时，机件将怎样运动？求这时钢丝绳对机件的拉力？

[分析]　机件受到重力 G 和钢丝绳的拉力 T 的作用，如图所示。当行车以 v=2 米/秒的速度向前匀速行驶时，G 和 T 是一对平衡力，T=G。当行车突然刹车时，机件由于惯性和钢丝绳的拉力作用，将沿着半径为 L 的圆弧作圆周运动，作用在机件上的重力 G 和钢丝绳的拉力 T 的合力就是机件作圆周运动的向心力。

[解答]　在刹车的瞬间，G 和 T 在一直线上，所以

$$T - mg = m \cdot \frac{v^2}{R},$$

$$T = m\frac{v^2}{R} + mg$$

$$= m(\frac{v^2}{R} + g)$$

$$= 2\times10^3(\frac{2^2}{4} + 9.8)\text{牛}$$

$$= 2.16\times10^4\text{牛。}$$

1065．在图(a)中，一球由二条轻线系住使它静止在位置 A 上，如将水平的一条线切断，于是小球开始摆动，试求小球在摆动到最大位移的位置 B 时跟静止在位置 A 时悬线中张力的比值。

[解答]　球在 A 点时，受到悬线张力 T_A、水平线张力 T、重力 mg 三个力的作用而处于平衡状态，如图(b)所示。根据共点力平衡条件有

$$T_A\cos\theta = mg,$$

$$T_A = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad (1)$$

当球摆动到最大位移位置 B 时，球只受到悬线张力 T_B 和重力 mg，而此时速度为零，即向心力=0，所以有 $T_B - mg\cos\theta = 0$，

$$T_B = mg\cos\theta \qquad (2)$$

由(1)式和(2)式可得

$$\frac{T_A}{T_B} = \frac{mg}{\cos\theta}/mg\cos\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\text{。}$$

1066．长 0.5 米的细绳一端挂着质量为 3 千克的物体，另一端固定在 O 点，当从水平方向射来的一颗质量为 0.02 千克的子弹进入物体时，细绳即刻被拉断。细绳所能承受的最大拉力为 98 牛。求：(1)子弹射入后物体的瞬时速度；

(2)如果物体离地高 2.5 米，物体落地时离 O 点的水平距离 s 为多大？

[解答]　细绳被拉断时所受的拉力为 T_{max}。此时物体受到的向心力 $F=T_{max}-(M+m)g$。

根据牛顿第二定律

$$T_{max}-(M+m)g=(M+m)\frac{v^2}{L},$$

$$v=\sqrt{\frac{T_{max}L}{M+m}-gL}$$

$$=\sqrt{\frac{98\times0.5}{3+0.02}-9.8\times0.5}\text{米}/\text{秒}=3.37\text{米}/\text{秒}。$$

物体在细绳被拉断后，作平抛运动，则

$$h=\frac{1}{2}gt^2,$$

$$s=vt;$$

$$s=v\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$=3.37\times\sqrt{\frac{2\times2.5}{9.8}}\text{米}=2.41\text{米}。$$

1067．如图(a)质量为 0.1 千克的木桶，盛水 0.4 千克，用 50 厘米长的绳子系桶，使桶在竖直平面内作圆周运动，如果通过最高点和最低点时的速度大小分别为 9 米/秒和 10 米/秒，求木桶在最高点和最低点对绳的拉力和水对桶底的压力。

［解答］　木桶在竖直平面内作圆周运动时，它们的最高点 A 时的受力情况如图(b)所示。设水的质量为 m_1，木桶质量为 m_2，N_A 为桶对水的压力，N'_A 为水对桶的压力，T_1 为绳的拉力，根据牛顿第二定律和向心力公式

得
$$m_1g+N_A=m_1\frac{v_A^2}{R} \qquad (1)$$

$$T_1+m_2g-N'_A=m_2\frac{v_A^2}{R} \qquad (2)$$

$$N_A=N'_A \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式联立

得
$$T_1+(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)\frac{v_A^2}{R},$$

$$T_1=(m_1+m_2)(\frac{v_A^2}{R}-g)$$

$$=(0.1+0.4)(\frac{9^2}{0.5}-9.8)\text{牛}$$

$$=76.1\text{牛}。$$

从(1)式得

$$N_A=m_1(\frac{v_A^2}{R}-g)$$

$$=0.4(\frac{9^2}{0.5}-9.8)\text{牛}$$

$$=60.9\text{牛}。$$

水对桶底压力的大小 $N'_A=N_A=60.9$ 牛。

在最低点 B 的受力分析如图(c)所示，N_B 为桶对水的压力，

N’$_B$ 为水对桶的压力，T_2 为绳的拉力，则

$$N_B - m_1 g = m_1 \frac{v_B^2}{R} \qquad (4)$$

$$T_2 - m_2 g - N'_B = m_2 \frac{v_B^2}{R} \qquad (5)$$

$$N_B = N'_B \qquad (6)$$

由(4)、(5)、(6)式联立得

$$T_2 - (m_1 + m_2)g = (m_1 + m_2)\frac{v_B^2}{R},$$

$$T_2 = (m_1 + m_2)(g + \frac{v_B^2}{R})$$

$$= (0.1 + 0.4)(\frac{10^2}{0.5} + 9.8)\text{牛}$$

$$= 104.9\text{牛。}$$

从(4)式得

$$N_B = m_1(g + \frac{v_B^2}{R}) = 0.4(9.8 + \frac{10^2}{0.5})\text{牛}$$

$$= 83.9\text{牛。}$$

这时水对桶底压力的大小 $N'_B = N_B = 83.9$牛。

1068．在车厢顶板上，用长为 L 的细绳系一质量为 m 的小球。车厢突然以速度 v 向前运动，求此时细绳所受到的拉力。

[解答] 当车厢突然向前运动时，小球相对于车厢向后运动，速度也为 v，小球在车厢内沿圆弧运动，所以此时小球运动可作为圆周运动处理。

设绳对小球的拉力为 T，则

$$T - mg = m\frac{v^2}{L},$$

$$T = m(g + \frac{v^2}{L})\text{。}$$

1069．一根轻杆长 L=1 米，一端固定在转动轴 O 上，另一端和质量 m=20 千克的钢块相连。如果当杆绕轴 O 转动而到达最低点时钢块的速度 v=6 米/秒，求这时转轴 O 所受到的力。

[分析] 转轴 O 所受到的力在数值上等于轻杆对钢块的拉力。钢块过最低点时受到重力 G 和杆的竖直向上的拉力 T，合力是钢块沿半径为 L 作圆周运动的向心力，方向向上。

[解答] 钢块在最低点时受到的向心力

$$F_{\text{向}} = T - mg \qquad (1)$$

根据牛顿第二运动定律

$$F_{\text{向}} = m \cdot \frac{v^2}{R} \qquad (2)$$

由(1)式和(2)式得

$$T - mg = m\frac{v^2}{R},$$

$$T = m(g + \frac{v^2}{R})$$

$$= m(g + \frac{v^2}{L})$$

$$= 20(9.8 + \frac{6^2}{1})\text{牛}$$

$$= 916\text{牛。}$$

轻杆所受拉力与转轴 O 所受的力数值相等，即转轴 O 受到 916 牛的力。

1070．如图(a)，一根轻杆长 0.6 米，一端固定在转动轴 O 上，杆的另一端和杆的中间各接质量为 2 千克的钢球 A 和 B。当杆绕轴 O 转动而到达最低点时，A 球的速度为 3 米/秒。求：(1)两段轻杆所受的力；(2)转动轴 O 所受的力；(3)如果钢球 A 到达最高点时的速度为 1 米/秒，轻杆的上下两段和转轴 O 受到的力各是多大？

[分析]　钢球 A、B 随轻杆绕轴 O 转动而作圆周运动，到达最低点位置时所需的向心力分别是轻杆对 A 球的拉力和 A 球重力的合力、上下两段轻杆对 B 球的拉力和 B 球重力的合力,A、B 球的受力情况如图(b)所示。

[解答]　根据牛顿第二定律

$$T_{BA} - m_A g = m_A\frac{v_A^2}{R} \qquad (1)$$

$$T_{OB} - T_{AB} - m_B g = m_B \cdot \frac{v_B^2}{\frac{1}{2}R} \qquad (2)$$

其中

$$v_B = \frac{1}{2}v_A \qquad (3)$$

$$T_{BA} = T_{AB} \qquad (4)$$

由(1)式得

$$T_{BA} = m_A(g + \frac{v_A^2}{R}) = 2\times(9.8 + \frac{3^2}{0.6})\text{牛} = 49.6\text{牛；}$$

$$T_{AB} = T_{BA} = 49.6\text{牛。}$$

将(3)式代入(2)式

$$T_{OB} = T_{AB} + m_B(g + \frac{v_A^2}{2R})$$

$$= 49.6\text{牛} + 2\times(9.8 + \frac{3^2}{2\times 0.6})\text{牛}$$

$$= 84.2\text{牛。}$$

转轴 O 受到的力 $T_{BO}=T_{OB}=84.2$ 牛，方向向下。

当钢球 A 到达最高点时，A、B 受力情况如图(c)所示。根据牛顿第二定律

$$T'_{BA}+m_A g=m_A\frac{{v'_A}^2}{R} \qquad (5)$$

$$T'_{OB}+m_B g-T'_{AB}=m_B\frac{{v'_B}^2}{\frac{1}{2}R} \qquad (6)$$

其中
$$v'_B=\frac{1}{2}v'_A \qquad (7)$$

$$T'_{BA}=T'_{AB} \qquad (8)$$

解(5)～(8)式可得

$$T'_{BA}=m_A(\frac{{v'_A}^2}{R}-g)=2\times(\frac{1}{0.6}-9.8)\text{牛}=-16.27\text{牛，}$$

$$T'_{AB}=T'_{BA}=-16.27\text{牛；}$$

$$\begin{aligned}T'_{OB}&=T'_{AB}+m_B(\frac{{v'_A}^2}{2R}-g)\\&=-16.27\text{牛}+2\times(\frac{1}{2\times0.6}-9.8\text{牛})\\&=-34.2\text{牛。}\end{aligned}$$

负号表示上述各力的方向和图(c)中假设的方向相反。根据牛顿第三定律，转轴 O 受到的力为 34.2 牛，方向向上。

1071．长为 1 米的轻杆 AB，两端各连接质量为 1 千克的钢块，整个系统绕固定转轴 O 在竖直平面内转动，A 端离开转轴 O 的距离为 0.6 米，当 A 端转动到达最低点位置时的速度为 3 米/秒。求(1)二段轻杆各受的力；(2)转轴 O 所受到的力。

[解答]　钢块 A、B 绕固定转轴 O 在竖直平面内转动，当 A 转动到最低点位置时 B 到达最高点位置，二钢块的受力情况如图所示。

根据牛顿第二定律

$$T_{OA}-m_A g=m_A\frac{v_A^2}{r_A} \qquad (1)$$

$$m_B g-T_{OB}=m_B\frac{v_B^2}{r_B} \qquad (2)$$

而且
$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{r_A}{r_B} \qquad (3)$$

解(1)式

得
$$\begin{aligned}T_{OA}&=m_A(g+\frac{v_A^2}{r_A})\\&=1\times(9.8+\frac{3^2}{0.6})\text{牛}=24.8\text{牛。}\end{aligned}$$

(3)式代入(2)式

得 $$T_{OB}=m_B(g-\frac{r_B}{r_A^2}v_A^2)$$

$$=1\times(9.8-\frac{0.4}{0.6^2}\times3^2)\text{牛}=-0.2\text{牛}。$$

负号表示 T_{OB} 的方向竖直向下。

转轴 O 所受的力为 T_{OA} 与 T_{OB} 的合力

$F=T_{OA}+T_{OB}$=24.8 牛? 0.2 牛

=24.6 牛。

1072．列车以速度 v=72 公里/小时沿半径 R=200 米的圆弧运行，在列车车厢内用测力计称量质量 m=5 千克的货物为多重？

［分析］ 在这种情况下，拉测力计弹簧的力（即拉力 T）就是在车厢里所称得的货物重力。作用在货物上的力有重力 mg 和弹簧拉力 T，它们的合力 F 就是向心力，货物作圆周运动的速度等于 v。

［解答］ 当车厢沿半径 R 的圆弧运行时，弹簧偏离竖直方向力α角（如图）。根据牛顿第二定律

$$T\sin\alpha=m\cdot\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

$$T\cos\alpha-mg=0 \qquad (2)$$

由(2)式得 $$T\cos\alpha=mg \qquad (3)$$

(1)式平方+(3)式平方 $$T^2=m^2(\frac{v^4}{R^2}+g^2),$$

$$T=mg\sqrt{(\frac{v^2}{Rg})^2+1}$$

$$=5\times9.8\sqrt{(\frac{20^2}{200\times9.8})^2+1}\text{牛}$$

$$=50\text{牛}。$$

1073．有一圆锥摆，绳长 l，小球质量 m，在水平面内作匀速圆周运动，如果绳子和竖直轴线成θ角，求这时摆的角速度，周期、线速度和绳子的张力。

［解答］ 小球在水平面内作匀速圆周运动时受到重力mg和绳子拉力 T，它们的合力就是提供小球作圆周运动的向心力，所以

$$mg\,tg\theta=m\omega^2 l\sin\theta,$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{\cos\theta l}}。$$

又由于 $$\omega=\frac{2\pi}{T}，\text{得}\ T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}。$$

$$v=\omega l\sin\theta=\sqrt{\frac{l^2g\sin^2\theta}{\cos\theta l}}=\sqrt{lg\,tg\theta\cdot\sin\theta},$$

$$T\cos\theta=mg,$$

$$T=\frac{mg}{\cos\theta}。$$

1074．图为一个圆锥摆，细绳的一端固定在天花板上，另一端悬挂着小球，小球经推动后，在水平面内作每分钟 60 转的匀速圆周运动，拴小球的绳子和竖直方向成 30°的角，求绳的长度。

［解答］　根据牛顿第二定律，有

$$T\cos\theta ?\ mg=0 \qquad (1)$$

$$T\sin\theta=mL\omega^2\sin\theta \qquad (2)$$

根据运动学公式，

$$\omega=2\pi n \qquad (3)$$

把(3)代入(2)得　$T=4\pi^2n^2mL$　　(4)

将(4)代入(1)得　$4\pi^2n^2mL\cos\theta=mg$，

$$L=\frac{g}{4\pi^2n^2\cos\theta}=\frac{9.8}{4\times3.14^2\times1\times0.87}\text{米}=0.29\text{米。}$$

1075．一根橡皮绳原长为 20 厘米，上端固定在 0 点，下端拴一个质量为 50 克的物体如图所示。这时橡皮绳长 l 为 22 厘米。以后物体在水平面上作匀速圆周运动。这时橡皮绳跟竖直方向成 30°角。求：(1)这时橡皮绳的长度；(2)物体具有的速度大小。（橡皮绳的质量、空气阻力都不计，g 取 10 米/秒 ^{2}）

［分析］　使物体在水平面上作匀速圆周运动时,受到橡皮绳的弹力 T 和重力 mg，它们的合力就是物体作圆周运动的向心力。

［解答］　设物体的质量为 m，速度为 v，橡皮绳的倔强系数为 k，原长为 l_0。挂物体时长为 l_1，物体在水平面上做匀速圆周运动时的长为 l_2。依题意，有

$$mg=k(l_1?\ l_0),$$

$$k=\frac{mg}{l_1-l_0}=\frac{5\times10^{-2}\times10}{0.22-0.20}\text{牛/米}$$

$$=25\text{牛/米。}$$

$$T=k(l_2?\ l_0) \qquad (1)$$

根据牛顿运动定律，有

$$T\cos\theta ?\ mg=0 \qquad (2)$$

$$T\sin\theta=\frac{mv^2}{l_2\sin\theta} \qquad (3)$$

由(2)式可求得

$$T=\frac{mg}{\cos\theta}=\frac{5\times10^{-2}\times10}{\cos30°}\text{牛}=0.58\text{牛。}$$

由(1)式可得

$$k=\frac{T}{l_2-l_0},$$

$$l_2=\frac{T}{k}+l_0=\frac{0.58}{25}\text{米}+0.20\text{米}=0.22\text{米。}$$

将 T 和 l_2 的值代入(3)式，得

$$v=\sqrt{\frac{Tl_2\sin^2\theta}{m}}=\sqrt{\frac{0.58\times0.22\times\frac{1}{4}}{0.55}}\text{米/秒}$$

$$=0.80\text{米/秒}。$$

1076．电梯顶上挂一个摆长为 l，锥角为 2θ的圆锥摆，求：(1)当电梯以加速度α匀加速上升时圆锥摆的周期 T_1；(2)当电梯以加速度α匀加速下降时圆锥摆的周期 T_2。

［解答］　摆球在电梯中受到绳子张力 T 和重力 mg 二个力作用，当电梯以α加速上升时有

$$T\cos\theta-mg=m\alpha \qquad (1)$$

$$T\sin\theta=m\omega^2L\sin\theta \qquad (2)$$

(1)式和(2)式联立消去 T 得

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{\omega^2L\sin\theta}{g+\alpha},$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g+\alpha}{L\cos\theta}}。$$

周期　$T_1=2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g+\alpha}}$。

当电梯以α匀加速下降时有

$$mg? \ T\cos\theta=m\alpha,$$

$$T\cos\theta=m(g? \ \alpha) \qquad (3)$$

$$T\sin\theta=m\omega^2L\sin\theta \qquad (4)$$

(3)式和(4)式联立并消 T 得

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{\omega^2L\sin\theta}{g-\alpha},$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g-\alpha}{L\cos\theta}}。$$

周期　$T_2=2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g-\alpha}}$。

1077．质量为 m 的质点，位于光滑的水平面上，质点通过长度为 l 的绳系于固定的悬挂点 O，O 点到水平面的距离为 h，h＜l，如图所示。现使质点在该水平面上以 n 转/秒做匀速圆周运动，求水平面上受到的压力。为了使质点不离开水平面，求 n 的最大值。

［解答］　质点 m 受到重力 mg、绳子的拉力 T 和水平面弹力 N 的作用，如图所示。根据牛顿第二定律

$$T\cos\theta+N=mg \qquad (1)$$

$$T\sin\theta=m\omega^2r \qquad (2)$$

(1)式×sinθ? (2)式×cosθ得

$$m\omega^2r\cos\theta+N\sin\theta? \ mg\sin\theta=0,$$

$$N=\frac{m(g\sin\theta-r\omega^2\cos\theta)}{\sin\theta}。$$

把 $\cos\theta = \frac{h}{l}$、$\omega = 2\pi n$、$r = l\sin\theta$，

代入上式得

$$N = m(g? 4\pi^2 n^2 h)。$$

当质点开始脱离水平面，即$N = 0$，转速n为最大值，$g - 4\pi^2 n_{max}^2 h = 0$，

$$n_{max} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}}。$$

1078．一个光滑的圆锥体固定在水平的桌面上，轴线沿竖直方向，母线和轴线之间的夹角θ=30°，如图(a)所示。一条长度为 l 的绳（质量不计），一端的位置固定在圆锥体的顶点 O 处，另一端拴着一个质量为 m 可看作质点的小物体。物体以速率 v 绕圆锥体做水平匀速圆周运动。问：

(1)当$v = \sqrt{\frac{1}{6}gl}$时，求绳对物体的拉力。

(2)当$v = \sqrt{\frac{3}{2}gl}$时，求绳对物体的拉力。

[解答]　物体作水平匀速圆周运动有二种可能：一种是物体和锥面接触；另一种是物体和锥面不接触。当物体和锥面接触时，物体受到绳子的拉力 T、锥面弹力 N 和重力 mg 的作用，因物体和锥面间无摩擦。根据牛顿第二定律，有

$$T\sin\theta - N\cos\theta = m\frac{v^2}{l\sin\theta} \qquad (1)$$

$$T\cos\theta + N\sin\theta = mg \qquad (2)$$

由(1)、(2)两式消去 T，可得 N 与 v 的关系

$$N = mg\sin\theta - m\frac{v^2\cos\theta}{l\sin\theta}。$$

可见，在θ给定后，v 越大，N 就越小，当

$$v = \sqrt{\frac{gl\sin^2\theta}{\cos\theta}}时，N = 0，$$

如用 v_b 表示这个速率，并将θ=30°代入得

$$v_b = \sqrt{\frac{\sqrt{3}gl}{6}}。$$

因为 N 是支持力，最小等于 0，所以当 $v > v_b$ 时，物体不和锥面接触。

(1)当$v = \sqrt{\frac{1}{6}gl}$时，因为$v < v_b$，所以物体和锥面接触，由(1)、(2)式，消去N，得

$$T = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\theta = m\frac{\frac{1}{6}lg}{l} + \frac{\sqrt{3}}{2}mg$$

$$= \frac{1 + 3\sqrt{3}}{6}mg = 1.03mg。$$

(2)当$v=\sqrt{\frac{3}{2}gl}$时，因为$v>v_b$，所以物体和锥面不接触[如图(b)所示]这时物体只受重力和绳子拉力的作用，用α表示绳和圆锥体轴线之间的夹角，

有
$$T\sin\alpha=\frac{mv^2}{l\sin\alpha} \qquad (3)$$
$$T\cos\alpha=mg \qquad (4)$$

将 $v=\sqrt{\frac{3}{2}gl}$代入(3)式，由(3)、(4)两式，消去α

得
$$2T^2?\ 3mgT?\ 2m^2g^2=0。$$

解此方程 $T=-\frac{1}{2}mg$或$T'=2mg$，

取合理值 $T=2mg$。

1079．一个光滑的圆锥面固定在水平的桌面上，轴线沿竖直方向，圆锥角θ=60°（如图）。一条长为 0.2 米的轻质细线，一端固定在圆锥面内的顶点 O 处，另一端拴着一个质量为 0.1 千克的物体悬挂在锥面内作水平匀速圆周运动。(1)当物体的角速度多大时，物体虽和圆锥内表面接触而压力等于零？(2)当$\omega=\sqrt{30g}$弧度/秒时，细线对物体的拉力多大？(3)当$\omega=\sqrt{\frac{10}{3}g}$弧度/秒时，细线对物体的拉力多大？(不考虑磨擦)

[解答] 当物体沿圆锥内表面作水平匀速圆周运动时，物体受到细线的拉力 T、弹力 N 和重力 mg 的作用。根据牛顿第二定律有
$$T\sin\frac{\theta}{2}+N\cos\frac{\theta}{2}=m\omega^2 l\sin\frac{\theta}{2} \qquad (1)$$
$$T\cos\frac{\theta}{2}-N\sin\frac{\theta}{2}=mg \qquad (2)$$

(1)式$\times\cos\frac{\theta}{2}-$(2)式$\times\sin\frac{\theta}{2}$得
$$N=m\sin\frac{\theta}{2}(\omega^2 l\cos\frac{\theta}{2}-g)。$$

可见，在θ给定的情况下，ω越大，N 就越大。

当 $\omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\frac{\theta}{2}}}$时，$N=0$，如$\omega_b$表示这个角速度，并将$\theta=60°$、$l=0.2$米代入得
$$\omega_b=\sqrt{\frac{10g}{\sqrt{3}}}\text{弧度/秒。}$$

(1)物体和圆锥内表面接触而压力等于零时，角速度
$$\omega=\omega_b=\sqrt{\frac{10g}{\sqrt{3}}}\text{弧度/秒。}$$

(2)当$\omega=\sqrt{30g}$弧度/秒时，因为$\omega>\omega_b$，物体和锥面接触。

由(1)、(2)式消去N得

$$T=m(\omega^2 l\sin^2\frac{\theta}{2}+g\cos\frac{\theta}{2})$$

$$=0.1(30\times9.8\times0.2\times\frac{1}{4}+9.8\times\frac{\sqrt{3}}{2})\text{牛}$$

$$=2.32\text{牛。}$$

(3)当$\omega=\sqrt{\frac{10}{3}g}$弧度/秒时，因为$\omega<\omega_b$，物体和锥面不接触，这时物体受重力mg和细线的拉力T二个力的作用，根据牛顿第二定律

$$T\sin\alpha=m\omega^2 l\sin\alpha,$$

$$T=m\omega^2 l=0.1\times\frac{10}{3}\times9.8\times0.2\text{牛}$$

$$=0.65\text{。}$$

1080．光滑的水平转台上有一个质量为 m 的物体，用长为 l 的细绳将物体连接在转轴上，使细线和竖直转轴的夹角为θ如图所示，转台以角速度ω转动。

(1)当$\omega=\sqrt{\frac{g}{2l\cos\theta}}$时，求物体对转台的压力，

(2)当$\omega=\sqrt{\frac{3g}{2l\cos\theta}}$时，求物体对转台的压力。

[解答]　物体随水平转台作匀速圆周运动，它所需的向心力就是重力 mg、绳子拉力 T 和弹力 N 的合力如图，转动半径为 $l\sin\theta$。根据牛顿第二定律

$$T\sin\theta=m\omega^2 l\sin\theta \qquad (1)$$

$$T\cos\theta=mg?\ N \qquad (2)$$

(1)、(2)式联立，并且消去 T 后得

$$m\omega^2 l\cos\theta=mg?\ N,$$

$$N=m(g?\ \omega^2 l\cos\theta) \qquad (3)$$

从上式可知，ω越大，N越小，当$\omega=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$时，$N=0$；$\omega>\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$时，物体脱离转台，细绳和转轴的夹角大于θ；当$\omega<\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}$时，物体和台面接触，可从(3)式求得弹力N。

(1)当$\omega=\sqrt{\dfrac{g}{2l\cos\theta}}$时，因为$\omega<\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$，

所以
$$N=m(g-\frac{g}{2l\cos\theta}\cdot l\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{2}mg。$$

即物体对转台的压力为$\frac{1}{2}mg$。

(2)当$\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{2l\cos\theta}}$时，因为$\omega>\sqrt{\dfrac{g}{l\cos\theta}}$，物体脱离转台，物体转动的向心力是重力mg和绳子张力T的合力。设细绳和竖直轴夹角为φ，根据牛顿第二定律

$$T\sin\varphi=m\omega^2 l\sin\varphi \qquad (4)$$
$$T\cos\varphi=mg \qquad (5)$$

将(4)、(5)式联立并消去 T

$$\cos\varphi=\frac{g}{\omega^2 l}=\frac{g}{\frac{3}{2}\cdot\frac{g}{l\cos\theta}\cdot l}=\frac{2}{3}\cos\theta,$$
$$\varphi=\arccos(\frac{2}{3}\cos\theta)。$$

因为物体脱离转台，所以物体对转台的压力为零。

1081．图是离心调速器的示意图。已知两个摆球的质量都是 1.6 千克，四根轻质连杆各长 25 厘米，和连杆下端相连的是滑块 M，它的质量是 5.6 千克并套在光滑的转轴上，问转轴的转动角速度达到多大时，连杆和转轴的夹角α正好是 37°。（取 g=10 米/秒^2）

［分析］ 两个摆球在作圆周运动，每个摆球受到的向心力的大小都是 $m\omega^2 l\sin\alpha$，这个向心力是重力 mg 和两根杆拉力 T_1、T_2 的合力。当转轴以某一确定的角速度匀速转动时，滑块在两根下杆的拉力 T_2 与滑块重力 Mg 两个力作用下处于平衡状态。

［解答］ 滑块受力情况以及一个摆球的受力情况如图所示，T_1 是上杆的拉力，T_2 是下杆的拉力，根据牛顿第二定律

对于滑块 $\qquad 2T_2\cos\alpha=Mg \qquad (1)$

对于摆球 $\qquad T_1\cos\alpha? mg? T_2\cos\alpha=0 \qquad (2)$

$\qquad T_1\sin\alpha+T_2\sin\alpha=m\omega^2 l\sin\alpha \qquad (3)$

由(1)式得 $\qquad T_2=\dfrac{Mg}{2\cos\alpha}$。

将T_2代入(2)式得 $\qquad T_1=\dfrac{g(m+0.5M)}{\cos\alpha}$。

将T_1、T_2代入(3)式得

$$\omega=\sqrt{\frac{(M+m)g}{ml\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{(1.6+5.6)\times10}{1.6\times0.25\times0.8}}\text{弧度/秒}$$
$$=15\text{弧度/秒}。$$

1082．如图(a)所示，OA 为长 0.5 米的绳子，O′A 为连杆，A 为质量 1 千克的金属球，当转轴 OO′以 120 转/分的转速转动时，求绳 OA 和连杆 O′A 所受力的大小。

［分析］ A 球随转轴在水平面上作匀速圆周运动,它所需要的向心力是重力 mg、绳子拉力 T 和连杆的弹力 N 的合力。但连杆的弹力方向有二种可能：(1)在 A 运动的角速度较小时，连杆作用在球 A 上的弹力是沿 O′A 向上的；(2)在 A 角速度较大时，连杆的弹力沿 AO′向下；当角速度为某一值w_b时，连杆弹力为零，此时向心力$F=m\omega_b^2 l\sin 45°$。根据牛顿第二定律

$$T\sin 45° = m\omega_b^2 l\sin 45° \qquad (1)$$

$$T cis 45° = mg \qquad (2)$$

由(1)、(2)式联立后得

$$\omega_b=\sqrt{\frac{g}{l\cos 45°}}=\sqrt{\frac{9.8}{0.5\times 0.7071}}\text{弧度/秒}=5.26\text{弧度/秒},$$

而题设$\omega=2\pi n=4\pi$弧度/秒=12.56 弧度/秒。

因为$\omega>\omega_b$，所以 A 球在转动时的受力情况可用图(b)来表示。

［解答］ 根据牛顿第二定律

$$T\cos 45° ? N\cos 30° ? mg=0 \qquad (3)$$

$$T\sin 45°+N\sin 30°=m\omega^2 l\sin 45° \qquad (4)$$

(3)式×sin30°+(4)式×cos30°后得

$$T(\sin 30°\cos 45°+\cos 30°\sin 45°)$$

$$=m(g\sin 30°+\omega^2 l\sin 45°\cos 30°),$$

$$T=\frac{m(g\sin 30°+\omega^2 l\sin 45°\cos 30°)}{\sin 75°}$$

$$=\frac{1\times(4.9+12.56^2\times 0.5\times\frac{\sqrt{6}}{4})}{0.9659}\text{牛}$$

$$=55.08\text{牛}。$$

由(3)式可得

$$N=\frac{T\cos 45°-mg}{\cos 30°}=\frac{55.08\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1\times 9.8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\text{牛}$$

$$=33.67\text{牛}。$$

绳 OA 所受拉力大小　　　　　　T′=T=55.08 牛。

连杆 O′A 所受的力大小　　　　N′=N=33.67 牛。

1083．如图(a)所示，AC 为固定转轴，AB 是长 0.2 米的细绳，BC 为连杆。现在 B 处用 0.1 米的细线悬挂一个质量为 0.5 千克的球，杆的质量不计，当转轴旋转达到稳定时，悬球的线和竖直方向成 30°角，求：(1)转轴旋转的角速度ω；(2)绳 AB 的张力 T_1 和连杆 BC 的弹力 N。

［解答］ 小球作圆周运动受到重力和绳子的拉力作用，向心力

F=Tsin30°，旋转半径 R=l_{AB}sin60°+l_{BD}sin30°。根据牛顿第二定律

$$T\sin 30° = m\omega^2(l_{AB}\sin 60° + l_{BD}\sin 30°) \quad (1)$$

$$T\cos 30° = mg \quad (2)$$

从(1)、(2)式中消去 T 得

$$\mathrm{tg}30° = \frac{\omega^2(l_{AB}\sin 60° + l_{BD}\sin 30°)}{g},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}30°}{l_{AB}\sin 60° + l_{BD}\sin 30°}} = \sqrt{\frac{9.8\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{0.2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 0.1\times\frac{1}{2}}}\text{弧度/秒}$$

$$= 5.03\text{弧度/秒。}$$

从(2)式得

$$T = \frac{mg}{\cos 30°} = \frac{0.5\times 9.8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\text{牛}$$

$$= 5.66\text{牛。}$$

$$T' = T\text{。}$$

B 点受力情况如图(b)所示，由于 B 点无质量，则

$$T_1\cos 60° + N\cos 30° = T'\cos 30° \quad (3)$$

$$T_1\sin 60° = N\sin 30° + T'\sin 30° \quad (4)$$

将(3)、(4)式联立消去 T_1 得

$$\mathrm{tg}60° = \frac{N+T'}{T'-N}\cdot\mathrm{tg}30°,$$

$$N + T' = 3(T' - N),$$

$$N = \frac{T'}{2} = \frac{5.66}{2}\text{牛} = 2.83\text{牛。}$$

将 T′与 N 值代入(3)式得

$$T_1 = (T' - N)\cdot\frac{\cos 30°}{\cos 60°}$$

$$= 2.83\times\sqrt{3}\text{牛} = 4.9\text{牛。}$$

1084．把一个零件放置在倾角α为 30°的斜面的中间，斜面长为 1 米，摩擦系数为 0.8，当斜面绕通过顶点的竖直轴匀速转动时物体和斜面间无相对滑动。求最大角速度。

[分析] 当斜面转动时，零件随着斜面绕轴作匀速圆周运动，它所受到的重力 mg、弹力 N 和摩擦力 f 的合力就是维持零件作圆周运动的向心力。

[解答] 根据牛顿第二定律有

$$f\cos\alpha ?\ N\sin\alpha = m\omega^2 r \quad (1)$$

$$f\sin\alpha ?\ N\cos\alpha = mg \quad (2)$$

当ω到达最大值时， $f=f_{max}$。

$$f_{max} = \mu N \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)联立可得

$$\omega^2 r=\frac{\mu\cos\alpha-\sin\alpha}{\mu\sin\alpha+\cos\alpha}\cdot g$$

$$\omega=\sqrt{\frac{(\mu\cos\alpha-\sin\alpha)g}{(\mu\sin\alpha+\cos\alpha)r}}$$

$$=\sqrt{\frac{(0.8\times0.866-0.5)\times9.8}{(0.8\times0.5+0.866)\times0.5\times0.866}}\text{弧度/秒}$$

$$=1.86\text{弧度/秒。}$$

1085．如图所示，横杆 OC=1 米，OB=0.6 米，悬线长 l=0.5 米，线的下端拴一个物体。当整个系统绕 OA 以角速度ω转动时，悬线和竖直轴线的夹角θ=45°求：

(1)转轴转动的角速度ω；

(2)如果物体的质量为 2 千克，斜杆 AB 所受的力为多大？（杆 OC，AB 质量忽略不计）

[解答]　(1)当物体绕轴以角速度ω旋转时，有

$$T\cos45°=mg \qquad (1)$$

$$T\sin45°=m\omega^2(OC+l\sin45°) \qquad (2)$$

由(1)式和(2)式联立并消去 T 得

$$g\,tg45°=\omega^2(OC+l\sin45°),$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g\,tg45°}{OC+l\sin45°}}=\sqrt{\frac{9.8\times1}{1+0.5\times\frac{\sqrt2}{2}}}\text{弧度/秒}$$

$$=2.69\text{弧度/秒。}$$

(2)杆 OC 绕轴匀速转动处于稳定状态时，则对 O 的转动合力矩为零。

$$T_{AB}\cdot OB\sin30°=T\cdot OC\sin45° \qquad (3)$$

由(1)式和(3)式联立得

$$F_{AB}\cdot OB\sin30°=\frac{mg}{\cos45°}\cdot OC\sin45°,$$

$$F_{AB}=\frac{OC\cdot tg45°}{OB\cdot\sin30°}\cdot mg=\frac{1}{0.6\times\frac12}\cdot mg$$

$$=\frac{10}{3}mg=\frac{10}{3}\times2\times9.8\text{牛}$$

$$=65.3\text{牛。}$$

即斜杆AB所受力的大小　$F'_{AB}=F_{AB}=65.3$牛。

1086．如图(a)，转架的水平横杆上套一个质量为 m_1 的制动件，它距离转轴中心的臂长为 R。在制动件下方系有长为 L 的绳子，绳子的另一端悬挂一个质量为 m_2 的物体。当转架以一定的角速度转动时，悬线和竖直轴线的夹角为 30°。求：

(1)此时转架的转动角速度ω；

(2)绳子的张力 T；

(3)制动件和横杆间的摩擦系数的最小值。

[分析]　制动件 m_1 和物体 m_2 随转架一起作圆周运动，受力情况如图(b)所示。m_1 的向心力 $F_1=f? Tsin30°$；m_2 的向心力 $F_2=T'sin30°$，转动半径为 $R+Lsin30°$。

[解答]　根据牛顿第二定律

对于 m_2　　$T'\sin30°=m_2(R+L\sin30°)\omega^2$　　(1)

$T'\cos30°=m_2g$　　(2)

联立上面两式得

$$\mathrm{tg}30° = \frac{R+L\sin30°}{g}\omega^2,$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g\,\mathrm{tg}30°}{R+L\sin30°}}=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}g}{6R+3L}};$$

$$T=T'=\frac{m_2g}{\cos30°}=\frac{2\sqrt{3}}{3}m_2g。$$

对于 m_1　　$f? T\sin30°=m_1R\omega^2$　　(3)

$N=m_1g+T\cos30°$　　(4)

由(3)、(4)式解出

$$f=T\sin30°+m_1R\omega^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}m_2g\times\frac{1}{2}+m_1R\times\frac{2\sqrt{3}g}{6R+3L}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}m_2g+\frac{2\sqrt{3}}{6R+3L}Rm_1g;$$

$$N=m_1g+\frac{2\sqrt{3}}{3}m_2g\times\frac{\sqrt{3}}{2}=(m_1+m_2)g。$$

摩擦系数的最小值为

$$\mu=\frac{f}{N}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}m_2+\frac{2\sqrt{3}R}{6R+3L}m_1}{m_1+m_2}=\frac{\sqrt{3}(m_2+\frac{2R}{2R+L}m_1)}{3(m_1+m_2)}$$

说理和论证题

1087．物体作匀速圆周运动的条件是什么？作匀速圆周运动物体的速度和加速度有无变化？

[解答]　物体作匀速圆周运动的条件是：物体要有初速度，同时受到一个始终和速度方向垂直的、大小不变的、指向圆心的力的作用。

作匀速圆周运动物体的速度大小不变，方向不断改变，始终与圆周相切。加速度大小也不变，方向不断改变，但总是指向圆心。

1088．由于地球的自转，地球上的物体都有向心加速度。

(1)“在地球表面各处的向心加速度的方向都是指向地心的”，这种说法正确吗？为什么？

(2)在赤道和北极附近的向心加速度哪个大？为什么？

[解答]　(1)在地球表面各处的物体随地球地轴转动作匀速圆周运动，所以向心加速度是指向地轴，不是指向地心。只有在赤道上的物体，

它的向心加速度是指向地心的。

(2)由图可知物体随地球自转的向心加速度 $a_n=m\omega^2R$，半径 R 越大，加速度 a_n 越大。赤道处的半径比北极附近半径大，所以赤道处向心加速度比北极附近的向心加速度大。

1089．作圆周运动的物体，它的加速度方向是否一定指向圆心？为什么？

[解答] 不一定。因为作圆周运动的物体，它的线速度大小可以变化，因此除了存在法向加速度 a_n 外，还可能存在切向加速度 a_t，加速度 a 就是切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 的矢量和，方向不一定指向圆心，如图。只有匀速圆周运动，因为切向加速度为零，仅有法向加速度 a_n，方向才恒指向圆心。

1090．线的一端拴一重物，手握线的另一端使重物在水平面内做匀速圆周运动，如图所示。当转速一定时，线长易断还是线短易断？为什么？线速度一定时又怎样？

[解答] 重物在水平面内做匀速圆周运动的向心力就是线的张力。当转速一定时，根据牛顿第二定律有 $T=4\pi^2n^2mR$，线上的张力 T 跟半径 R 成正比，可见转速相同时，线长易断。

当线速度相同时，$T = m\frac{v^2}{R}$，线上的拉力跟半径成反比，可见线短的易断。

1091．为什么铁路拐弯处，内外侧的钢轨要有一定的高度差，并且在火车通过弯道时要规定行驶速度？

[解答] 火车在转弯时作圆周运动，必须有向心力的作用。如果在拐弯处内外侧的钢轨有一定的高度差，则向心力可由火车所受重力和钢轨的支持力来提供。设铁路弯道的半径为 R，两轨间水平距离为 L，内外铡钢轨的高度差为H，如图所示，则合力的大小为 $\frac{H}{L}mg$。此合力即为向心力，对应的速度即为 $\sqrt{\frac{H}{L}Rg}$。也就是说，当火车恰好以 $v=\sqrt{\frac{H}{L}Rg}$ 的速度驶过这段弯道时，钢轨和火车车轮之间无侧向相互作用力。

但火车行驶的速度由于各种原因并不能严格调节为 $\sqrt{\frac{H}{L}Rg}$。当火车行驶的速度小于 $\sqrt{\frac{H}{L}Rg}$ 时，重力与支持力的合力超过火车转弯所需要的向心力，这样火车车轮将挤压较低的一条轨道的内侧，同时受到内侧的作用力，使合力等于所需要的向心力，以维持火车正常行驶。

反之，如果火车的行驶速度大于 $\sqrt{\frac{H}{L}Rg}$，则火车车轮将挤压较高一条轨道的外侧，同时受到轨道外侧的作用力以补充向心力的不足，维持火车的正常行驶。

可见，火车行驶速度偏离规定的行驶速度时（不论是偏大还是偏小），轨道就会受到侧向的压力。当然，侧向力只要不超过一定限度还

是正常的，但侧向力过大会损坏轨道甚至发生危险，因而铁路的弯道处总是限定一个行驶速度的范围。

1092．如图(a)，一台水平转盘，盘上有一个质量为 m 的物体，物体与转轴间由倔强系数为 k，长度为 L 的弹簧相连，物体和转盘间的静摩擦系数为μ，问当转盘以角速度ω作匀速转动时，物体受到几个力的作用？向心力是谁提供的。

［解答］　当转盘作匀速转动时，物体受力情况有两种可能。

(1)当$\omega \le \sqrt{\frac{\mu g}{L}}$时，物体受到重力mg，压力N和静摩擦力f三个力的作用，如图(b)所示，向心力由静摩擦力提供。

(2)当$\omega > \sqrt{\frac{\mu g}{L}}$时，物体受到重力mg、压力N、静摩擦力f和弹簧的弹力F四个力作用，如图(c)所示，向心力由弹力F和静摩擦力f的合力提供。

1093．一竖直放置的圆环绕通过圆心的竖直轴旋转，套在圆环上的小球可以沿环无摩擦地滑动，如果转速 n 由小变大将发生什么现象？小球能否到达和圆心 O 同高的水平线上？

［解答］　设圆环半径为 R，转速为 n 时，连接圆心和小球的半径跟竖直转轴的夹角为θ，小球质量为 m，此时向心力是小球所受弹力 N 和重力的合力，则

$$mg\,tg\theta = m4\pi^2n^2R\sin\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{g}{4\pi^2n^2R}, \qquad \text{其中}\frac{g}{4\pi^2n^2R}\text{是常数，}$$

所以
$$\cos\theta \propto \frac{1}{n^2}。$$

n越大，cosθ值越小，在$\theta < \frac{\pi}{2}$内，θ增大。则转速由小变大，小球渐渐升高，但小球不能到达和圆心等高的水平面上，因为小球在那时没有一个力和重力 mg 平衡。

1094．如图(a)所示的小车，质量为 m_2，小车上有一倒 L 形木杆，杆上有一轻绳吊有质量为 m_1 的重物。当小车从静止开始突然以初速 v_0 向右方向移动时，有人分析说小车对地面的压力仍为$(m_1+m_2)g$，理由是小车在竖直方向上没有运动，也没有其他外力存在。这人的分析对吗？

［解答］　根据题意，小车突然以 v_0 向右运动时，m_1 相对于小车的速度为$-v_0$，同时受到绳子 l 的约束而作圆周运动。m_1 的受力情况如图(b)，这时绳子的张力$T = m_1g + \frac{m_1v_0'^2}{l}$，小车受力如图(c)，竖直向下的力有 T′和 m_2g，竖直向上的力有弹力 N_2，所以压力

$$N_2' = m_2g + T' = (m_1 + m_2)g + \frac{m_1v_0^2}{l},$$

这说明小车对地面的压力增加了$\frac{m_1v_0^2}{l}$。这个人的分析是不对的。

1095．质量为 m 的质点固定在长为 R 的轻绳一端，绳的另一端固定在 O 点，使质点在竖直平面内作圆周运动，质点 m 到达最高点的速度最小值为$v_{min}=\sqrt{Rg}$。如果用一根轻质硬杆，长度也是R来代替这根轻绳，则质点在最高点的最小速度是否也是$\sqrt{Rg}$？为什么？

[解答] 作圆周运动的质点在最高点的向心力为$F=m\frac{v^2}{R}$，它是绳子的拉力和重力的合力，由于绳子的拉力方向向下，重力也方向向下，所以作圆周运动的质点在最高处的最小向心力等于它的重力，质点最小速度$v_{min}=\sqrt{Rg}$。

如果用硬杆代替绳子，硬杆能受拉抻力又能受压缩力，当作圆周运动的质点运动到最高点时受力情况如图，这时向心力为

$$F=mg+N。$$

式中的 N 方向可以向下为拉力，也可以向上为支持力。当 N=? mg 时，$F=0$，这时向心力等于零，即速度的最小值不再是$\sqrt{Rg}$而是零。

1096．试证明质点做匀速圆周运动时，它在任意一点的加速度都指向圆心并且大小等于 v^2/R。（其中 v 为质点运动的速度值，R 为半径）

如图所示，质点经过Δt 时间，从 A 点运动到 B 点，所对应的速度从 v_A 变成 v_B。把速度矢量的矢端画在同一点，用三角形 xyz 表示，其中$v_B-v_A=\Delta v$，质点在Δt时间内的平均速度$\alpha=\frac{\Delta v}{\Delta t}$，它的方向与$\Delta v$的方向相同。当$\Delta t\to 0$时，质点在A点的加速度$\alpha=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\alpha=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$。在三角形xyz中，$v_A$和$v_B$大小相等，$\angle xyz=\angle yxz=\alpha$，$2\alpha+\Delta\phi=\pi$。$\alpha=\frac{\pi}{2}-\frac{\Delta\phi}{2}$，当$\Delta t\to 0$时，$\Delta\phi\to 0$，$\alpha\to\frac{\pi}{2}$。即$\Delta v$与$v_A$重直指向圆心，$\alpha$也指向圆心。

加速度的大小可从图中的△ABO 和△xyz 看出 $v_A\perp OA$,$v_B\perp OB$,∠xzy=∠AOB=$\Delta\phi$。

所以　△xyz～△ABO，用 v 表示 v_A 和 v_B 的大小，

则　$\frac{\Delta v}{v}=\frac{AB}{R}$，$\Delta v=v\cdot\frac{AB}{R}$。

用Δt 除上式两边，得到

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{AB}{\Delta t}\cdot\frac{v}{R}。$$

当$\Delta t\to 0$时

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{AB}{\Delta t}\cdot\frac{v}{R},$$

因为　$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\alpha$，　$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{AB}{\Delta t}=\frac{AB}{\Delta t}=v$，

所以　$\alpha=v\cdot\frac{v}{R}=\frac{v^2}{R}$。

1097．一个直径为 d 的飞轮绕水平轴转动，当飞轮转速为 n 时，附在轮缘上的水滴脱离飞轮而飞出，求证水滴上升的最大高度$h_{max}=\frac{\pi^2n^2d^2}{2g}$。

［证明］　附在轮缘上的水滴飞出时的速度就是飞轮边缘质点的线速度，方向各不相同，只有附在和轴在同一水平面上的 A 点位置，水滴飞出时的方向竖直向上，上升的高度最大。根据匀速圆周运动公式有

$$v=2\pi nR \qquad (1)$$

水滴脱离飞轮后作竖直上抛运动，飞出时的速度为竖直上抛运动的初速度 $v_0=v$。根据运动学公式

$$v_0^2=v^2=2gh_{max} \qquad (2)$$

由(1)、(2)式联立得

$$h_{max}=\frac{4\pi^2n^2R^2}{2g}=\frac{\pi^2n^2d^2}{2g}。$$

1098．有一乒乓球沿两根固定的平行轨道以角速度ω匀速滚动，导轨间的距离为 d，乒乓球半径为 r。求证：乒乓球纯滚动时的速度

$$v=\omega\sqrt{r^2-\frac{d^2}{4}}。$$

［证明］　乒乓球在平行轨道上滚动时，转动半径为 r′，如图所示。

因为 $$r'=\sqrt{r^2-(\frac{d}{2})^2},$$

根据纯滚动的条件，线速度和角速度的关系有

$$v=\omega r',$$

所以 $$v=\omega\sqrt{r^2-\frac{d^2}{4}}。$$

1099．一杂技演员在圆筒形建筑物内表演飞车走壁。演员骑摩托车从底部开始运动，随着速度增加，圈子越兜越大，最后在直壁上匀速率行驶，如图(a)所示。如果演员的摩托车的总质量为 M，直壁半径为 R，匀速率行驶速度为 v，每绕一周上升距离为 h。求证：摩托车匀速走壁时的向心力

$$F=Mv^2\cdot\frac{4\pi^2R}{4\pi^2R^2+h^2}。$$

［证明］　摩托车在直壁上作匀速圆周螺旋运动，速度 v 可以分解为 v_1 和 v_2。v_1 是摩托车绕筒壁作圆周运动的水平分速度，v_2 是摩托车向上作

匀速运动的分速度，则向心加速度$a=\frac{v_1^2}{R}$。

展开螺旋面成斜面，v 沿斜面向上，如图(b)所示。

$$v_1 = v\cos\alpha = v\cdot\frac{2\pi R}{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}}。$$

向心加速度 $$\alpha = \frac{v_1^2}{R} = \frac{v^2}{R}\left(\frac{2\pi R}{\sqrt{(2\pi R)^2 + h^2}}\right)^2。$$

向心力 $$F = M\alpha$$

$$= \frac{Mv^2}{R}\cdot\frac{4\pi^2 R^2}{4\pi^2 R^2 + h^2}$$

$$= Mv^2\cdot\frac{4\pi^2 R}{4\pi^2 R^2 + h^2}。$$

1100．放在转台上的物体 A，由细绳通过转台中心孔和物体 B 连接，如图(a)所示。当转台以角速度ω转动时，A 随着一起转动。设 A 的质量为 m_1，B 的质量为 m_2，试证明：A 的转动半径 $r=m_2g/m_1\omega^2$ 时，B 物体才能既不上升也不下降？（摩擦忽略不计）

[证明] 作 A、B 受力图，如图(b)。A 随转台一起作匀速圆周运动，所需的向心力为绳对它的拉力 T。

根据牛顿第二定律，有

$$T=m_1\omega^2 r \quad (1)$$

当 B 物体受力平衡时，

$$T'? m_2g=0 \quad (2)$$

$$T=T' \quad (3)$$

由(1)式和(2)式解得

$$m_2 g = m_1\omega^2 r,$$

$$r = \frac{m_2 g}{m_1\omega^2}。$$

1101．如图所示，质量为 m 的小球沿半径为 R 的半球形碗的光滑内表面以角速度ω在一水平面内作匀速圆周运动。求证该小球作匀速圆周运动的水平面离碗底的高度

$$H = R\left(1 - \frac{g}{\omega^2 R}\right)。$$

[证明] 小球在光滑水平面内作匀速圆周运动时，受重力 mg 和碗壁对它的弹力 N 的作用，这两个力的合力就是小球作匀速圆周运动所需要的向心力。根据牛顿第二定律得

$$N\cos\alpha=mg \quad (1)$$

$$N\sin\alpha=m\omega^2 R\sin\alpha,$$

$$N=m\omega^2 R \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式

$$m\omega^2 R\cos\alpha=mg,$$

$$\omega^2 R\cos\alpha=g,$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 R}。$$

因为 $$H=R(1? \cos\alpha),$$

所以 $$H=R(1-\frac{g}{\omega^2 R})。$$

1102．有一水平转台，在离转轴 20 厘米处放一物体，如图所示。当转速超过 300 转/分时，物体就不能和转台保持相对静止。要使转速达到 500 转/分时物体仍能和转台保持相对静止而不滑动，试证明：物体必须放在离轴 7.2 厘米的范围内。

［证明］ 根据圆周运动向心力公式

$$f_m=m\omega^2 r \qquad (1)$$

而 $$f_m=\mu N \qquad (2)$$

解(1)式和(2)式得

$$\mu=\frac{m\omega^2}{N}r。$$

当 r_1=20 厘米，转速为 300 转/分时物体就不能与转台体质相对静止，则有

$$\mu=\frac{m\omega_1^2}{N}r_1 \qquad (3)$$

当转速为 500 转/分，使物体与转台保持相对静止，物体离转轴距离为 r_2，同样有

$$\mu=\frac{m\omega_2^2}{N}r_2 \qquad (4)$$

由(3)、(4)式联立

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \qquad (5)$$

因为 $$\omega_1=2\pi n_1，\ \omega_2=2\pi n_2，$$

所以 $$\frac{\omega_1}{\omega_2}=\frac{2\pi n_1}{2\pi n_2}=\frac{n_1}{n_2} \qquad (6)$$

把(6)式代入(5)式得

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{n_1^2}{n_2^2}，$$

$$r_2=(\frac{n_1}{n_2})^2\cdot r_1=(\frac{300}{500})^2\times 0.2\text{米}=0.072\text{米}。$$

从上式可知，要使物体在转台上保持相对静止，转台转速越大，物体就必须离转轴越近。据计算 r_2 应该不大于 0.072 米。即：$r_2\leq 0.072$ 米。

1103．图中 OA 为一轻杆，和 OZ 轴成θ角。杆上有一圆球，质量为 m，可沿轻杆无摩擦地滑动。当轻杆绕 OZ 轴以角速度ω旋转时，圆球在距 O 点为 l 处相对于杆静止，

求证：$\theta=\arccos\frac{-g+\sqrt{g^2+4l^2\omega^4}}{2\omega^2 l}$。

［证明］ 圆环在轻杆上绕 OZ 轴转动时受到轻杆的弹力 N 和重力 mg 的作用。它们的合力就是圆球作圆周运动的向心力。

根据牛顿第二定律，有

$$N\sin\theta=mg \qquad (1)$$

$$N\cos\theta=m\omega^2 r \qquad (2)$$

$$r=l\sin \qquad (3)$$

将(3)式代入(2)式得

$$N\cos\theta=m\omega^2 l\sin\theta \qquad (4)$$

将(1)式除以(4)式

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{g}{\omega^2 l\sin\theta},$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{g}{\omega^2 l\sin\theta},$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{g}{\omega^2 l},$$

$$\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{g}{\omega^2 l},$$

$$\omega^2 l\cos^2\theta+g\cos\theta-\omega^2 l=0,$$

$$\cos\theta=\frac{-g\pm\sqrt{g^2+4\omega^4 l^2}}{2\omega^2 l},$$

$$\theta=\arccos\frac{-g+\sqrt{g^2+4l^2\omega^4}}{2\omega^2 l}$$ 。(舍去负值)

1104．将一摆锤用长为 l 的细绳吊起，上端固定，使摆锤在水平面内做匀速圆周运动，构成一个“圆锥摆”如图所示。如果细绳和竖直方向的夹角为θ，试证明这个锤摆的周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}。$$

[证明]　摆球在水平面上做匀速圆周运动所需的向心力为重力mg和细绳的张力F的合力，根据牛顿第二定律

$$F\cos\theta=mg \qquad (1)$$

$$F\sin\theta=\frac{mv^2}{R}=m\cdot\frac{v^2}{l\sin\theta} \qquad (2)$$

由(2)式÷(1)式得

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{v^2}{gl\sin\theta},$$

$$v^2=gl\sin\theta\cdot\mathrm{tg}\theta。$$

周期

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi l\sin\theta}{v}=2\pi\frac{l\sin\theta}{\sqrt{gl\sin\theta\cdot\mathrm{tg}\theta}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}。$$

1105．转架中心有竖直转轴，轴的上端有一个水平长臂，臂端距中心转轴为R，系有长L的绳索，绳索下端悬挂一个座椅。如果悬挂座椅的绳索和竖直方向成θ角，试证：(1)转架旋转的周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R + L\sin\theta}{gtg\theta}}。$$

(2)对某一给定的转速，绳与竖直方向的夹角θ和座椅的质量无关。

[证明]　设转架旋转的角速度为ω，则绳索张力 T 和座椅重力 mg 的合力是提供座椅转动的向心力，所以有

$$T\cos\theta = mg \qquad (1)$$

$$T\sin\theta = m\omega^2(R+L\sin\theta) \qquad (2)$$

由(1)、(2)式联立消去 T 得

$$gtg\theta = \omega^2(R+l\sin\theta),$$

$$\omega = \sqrt{\frac{gtg\theta}{R + L\sin\theta}}。$$

周期　$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R + L\sin\theta}{gtg\theta}}。$$

(2)因为$tg\theta = \frac{\omega^2(\alpha + L\sin\theta)}{g}$，式中θ与m无关，所以绳索与竖直方向的夹角θ和座椅的质量无关。

万有引力

填充题

1106．所有的行星分别在大小不同的椭圆轨道上围绕太阳运动，太阳是在这些随圆的一个焦点上。这叫做开普勒第一定律。

太阳和行星的连线在相等的时间内扫过相等的面积。这叫做开普勒第二定律。

1107．某行星绕太阳运行的椭圆轨道如图所示，F_1 及 F_2 是随圆轨道的两个焦点，行星在A点的速率比在B点的大，则太阳是位于焦点F_2上。

1108．所有行星的椭圆轨道的半长轴的三次方跟公转周期的平方的比值都相等，这就是开普勒第三定律。

由于行星的椭圆轨道都跟圆近似，在计算中，可以认为行星都以太阳为圆心做匀速圆周运动。如果以 R 代表轨道半径，T 代表公转周期，该定律可表示为：$\frac{R^3}{T^2} = k$。

已知水星的公转周期为 7.60×10^6 秒，地球的公转周期为 3.16×10^7 秒，那么地球的平均轨道半径是水星的 2.59 倍。

1109．两个行星质量分别为 m_1、m_2，它们绕太阳运动的轨道半径分别为R_1、R_2，如果$m_1 = 2m_2$，$R_4 = 4R_2$，那么，它们运行周期的比$T_1：T_2 = 8：1$。

1110．质量为 m_1 和 m_2 的两颗行星，在太阳引力作用下，沿半径为R_1和R_2的圆作匀速圆周运动，则两行星的向心加速度的比为R_2^2 / R_1^2。

1111．任何两个物体都是相互吸引的，当两个物体可以看作为质点

时，它的引力的大小跟两个物体的质量的乘积成正比，跟它们的距离的平方成反比。这就是万有引力定律。并可以用公式$F = G\frac{m_1m_2}{r_2}$来表示。

在国际单位制中，万有引力恒量 G=6.67×10^{-11}牛·米^2/千克^2，也就是两个质量都是 1 千克的物体相距 1 米时的相互吸引力是 6.67×10^{-11}牛。

已知太阳质量是 1.97×10^{30}千克，地球质量是 5.98×10^{24}千克，太阳和地球间的平均距离是 1.49×10^{11}米，太阳和地球间的万有引力是 3.54×10^{22}牛。已知拉断截面积为 1 厘米^{2}的钢棒需力 6.86×10^4牛，那末，地球和太阳间的万有引力可以拉断截面积是 5.16×10^{13}米^{2}的钢棒。

1112．1798 牛，在牛顿发现万有引力定律一百多年以后，英国物理学家卡文迪许利用扭秤，第一次在实验室里比较准确地测出了万有引力恒量的数值。

当时测定的万有引力恒量是 6.75×10^{-11}牛·米^2/千克^2，同现代公认的 G 等于 6.67×10^{-11}牛·米^2/千克^{2}很接近。

1113．木星到太阳的距离约等于地球到太阳距离的 5.2 倍。如果地球在轨道上的公转速度为 30 千米/秒，则木星在其轨道上运转的速度等于 13 千米/秒。

1114．地球和木星的质量分别是 $m_{地}$=6×10^{24}千克，$m_{木}$=2×10^{27}千克，它们绕太阳运动了轨道半径分别是 $R_{地}$=1.5×10^{11}米和 $R_{木}$? 7.8×10^{11}米。那么这两个行星所受的向心力的比 $F_{地}$：$F_{木}$=0.0811：1。这两个行星绕太阳运转的周期的比 $T_{地}$：$T_{木}$=0.0843：1。

1115．木星和地球都绕太阳做匀速圆周运动，已知它们的质量分别为M_M和M_E，轨道半径分别为R_M和R_E。它们的公转周期的比T_M：T_E等于$\sqrt{\frac{R_M^3}{R_E^3}}$，它们的线速度的比$v_M$：$v_E$等于$\sqrt{\frac{R_E}{R_M}}$，它们的向心加速度的比$\alpha_M$：$\alpha_E$等于$\frac{R_E^2}{R_M^2}$，它们受到的太阳引力的比$F_M$：$F_E$等于$\frac{m_M R_E^2}{m_E R_M^2}$。

1116．有一颗行星，它的质量和半径都是地球的一半。那么，物体在这颗行星上的重力是在地球上的重力的 2 倍。

在这颗行星的表面上，将此物体以 19.6 米/秒的速度上抛，物体能上升的最大高度为 9.8 米，上升到最大高度的时间是 1 秒。

1117．火星的半径大约是地球半径的一半，火星的质量大约是地球质量的 1/9。如果在地球上重 490 牛的人，乘飞船到达火星，他在火星上的重力将是 217.8 牛，他的质量将是 50 千克。

1118．地球半径取 6400 千米，在地面上重为 9.8×10^3牛的人造地球卫星，发射后在距地面 6400 千米的高度处运行，此时受到地球的吸引力为 2.45×10^3牛。

1119．地球上的一切物体都随着地球自转而绕地轴做匀速圆周运动，都需要向心力。这个向心力方向是指向地轴的。我们可以把这个向心力看成是万有引力的一个分力；而另一个分力就是物体的重力，它的方向是和水平面垂直的。而万有引力的方向指向地心。

1120．设地球半径为 R，地面附近的重力加速度为 g，则在离地面高为h的重力加速度是$\underline{\frac{R^2}{(R+h)^2}g}$。

1121．用人造地球卫星，可以准确地测定地球的质量，如果一颗人造地球卫星的周期是 5.58×10^3 秒，运行轨道的平均半径是 6810 千米，那么地球的质量是 $\underline{6.00\times10^{24}}$千克。（$G=6.67\times10^{-11}$牛·米^2/千克^2）

1122．已知行星绕恒星转一周需时间 T，两者之间的距离为 r，万有引力恒量为G，则恒星的质量$\underline{M=\frac{4\pi^2r^2}{GT^2}}$。

1123．地球绕太阳公转周期和公转轨道半径分别为 T 和 R，月球绕地球公转周期和公转半径分别为 t 和 r，则太阳质量和地球质量的比值$\underline{\frac{M_{日}}{M_{地}}=\frac{R^3t^2}{r^3T^2}}$。

1124．已知地球的半径为 R，地面的重力加速度为 g，万有引力恒量为 G。如果不考虑地球自转的影响，地球的平均密度可以表示为$\frac{3g}{4\pi RG}$。

1125．登月飞行的密封舱在离月球表面 112 千米的空中沿圆形轨道运行,周期是 120.5 分钟,月球的半径是 1740 千米,那么月球质量为 $\underline{7.19\times10^{22}}$千克，平均密度为 $\underline{3259}$ 千克/米^3。

1126．v=7.9 千米/秒是人造卫星在地面附近环绕地球做匀速圆周运动必须具有的速度，叫做第一宇宙速度或者环绕速度。

v=11.2 千米/秒是物体可以挣脱地球引力束缚,成为绕太阳运动的人造行星的速度，叫做第二宇宙速度或者脱离速度。

v=16.7 千米/秒是使物体挣脱太阳引力的束缚,飞到太阳系以外的宇宙空间去的速度，叫做第三宇宙速度或者逃逸速度。

1127．人造卫星离地面高度为 R（R 为地球半径）时，环绕速度为v。在人造卫星离地面高度是R的2倍时，环绕速度为$\underline{\frac{\sqrt{6}}{3}v}$。

1128．离地面是地球半径 n 倍的圆形轨道上，人造卫星的加速度是地面重力加速度的$\underline{\frac{1}{(n+1)^2}}$倍，人造卫星的速度是第一宇宙速度的$\underline{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}$倍。

1129．人造地球卫星实际运行的是椭圆轨道，地球位于椭圆轨道的一个焦点上。为了便于解题，椭圆轨道可以近似地作为圆轨道来处理。我国在 1970 年 4 月 24 日成功发射了第一颗人造地球卫星，它的近地点是 439 千米，远地点是 2384 千米。以卫星在近地点和远地点时到地心距离的平均值作为卫星轨道的平均半径，计算出来的运转周期为 114.3 分，和卫星的实际周期 114 分相差 0.3 分。（地球的质量为 6×10^{24} 千克，半径为 6400 千米。）

1130．在人造卫星脱离运载火箭以后，虽然两者速度相近，运载火箭常常比卫星“超前”一些，这是由于火箭处在比卫星较低的位置，运

行周期较小。

1131．已知地球质量 M 是 5.98×10^{24} 千克，万有引力恒量 G 是 6.67×10^{-11} 牛·米^2/千克^2。要发射一颗围绕地球作匀速圆周运动的周期为 T 的卫星，它运行时的轨道半径 $r=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$，速度 $v=\sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}$。如果已知卫星的周期为 90 分钟，则它的轨道半径为 6654 千米，运行速度为 7.742 千米/秒。

1132．微波通讯都是直线传播的，要把信号传送得越远，架起的天线就要越高。如果能把飞出大气层的人造卫星用作通讯工具，当然是最理想的了。为了通讯的稳定可靠，必须让卫星和地面保持相对静止。由于人造卫星是依靠万有引力作为向心力的，而万有引力的方向是指向地心的，那么用作通讯的卫星一定要在赤道上空，在它和地球同步运行时，圆周运动的圆心就恰好在地心上。

由于地球自转角速度不大，在地面附近的物体和地球同步运行所需的向心力远小于万有引力，当然不能成为卫星。在角速度一定的前提下，随着物体高度的增大，需要的向心力就增大，而随着高度的增大，万有引力就会减小。所以，到了某一特定高度就能找到万有引力恰好能提供所需要的向心力的位置。

1133．如果地球的半径是 R，质量是 M，自转周期是 T，万有引力恒量是 G，那么同步卫星距地面的高度的表达式是 $\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}-R$，同步卫星速度的表达式是 $\sqrt[3]{\frac{2\pi GM}{T}}$，同步卫星的周期是 T。

已知地球的半径是 6370 千米、质量是 5.98×10^{24} 千克、自转周期是 24 小时、万有引力恒量是 6.67×10^{-11} 牛·米^2/千克^2，那么同步卫星距地面的高度为 3.59×10^4 千米，运行速度为 3.07 千米/秒。

选择题

1134．某行星沿椭圆轨道运行，近日点离太阳距离为 a，远日点离太阳距离为 b，过近日点时行星的速率为 v_a，则过远日点时的速率是

(a) $v_b=\frac{b}{a}v_a$；　　(b) $v_b=\sqrt{\frac{a}{b}}v_a$；

(c) $v_b=\frac{a}{b}v_a$；　　(d) $v_b=\sqrt{\frac{b}{a}}v_a$。

[提示]　参阅第 1106 题。

答(c)

1135．飞船沿半径为 R 的圆周绕地球运动，其周期为 T（如图所示）。如果飞船要返回地面，可在轨道上的某一点 A 处，将速率降低到适当数值，从而使飞船沿着以地心为焦点的椭圆轨道运行，椭圆和地球表面在 B 点相切。如果地球半径为 R_0，则飞船由 A 点到 B 点所需时间为

(a) $\frac{1}{4\sqrt{2}}(1+\frac{R_0}{R})^{3/2}T$；　　(b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\frac{R_0}{R})^{3/2}T$；

(c) $(1+\frac{R_0}{R})^{3/2}T$；　　(d) $(1+\frac{R_0}{R})T$。

答(a)

1136．地球质量大约是月球质量的 81 倍，在登月飞船通过月地之间、月亮和地球对它引力相等的位置时，飞船离开月亮中心和地球中心的距离比为

(a)1∶27；　　(b)1∶9；

(c)1∶3；　　(d)9∶1。

答(b)

1137．已知月球中心和地球中心的距离大约是地球半径的 60 倍，则月球绕地球运行的向心加速度与地球表面上的重力加速度的比为

(a)1∶60；　　(b)1∶600；

(c)1∶3600；　　(d)60∶1。

答(c)

1138．物体在月球表面上的重力加速度为在地球表面上的六分之一，这说明了

(a)地球的直径是月球直径的六倍；

(b)地球质量是月球质量的六倍；

(c)月球吸引地球表面的力是地球吸引月球表面的力的六分之一；

(d)物体在月球表面的重力是在地球表面的六分之一。

答(d)

1139．苹果落向地球，而不是地球向上运动碰到苹果．下列论述中正确的是

(a)由于苹果质量小，对地球的引力较小，而地球质量大，对苹果的引力大造成的；

(b)由于地球对苹果有引力，而苹果对地球没有引力造成的；

(c)苹果对地球的作用力和地球对苹果作用力是相等的，由于地球质量极大，不可能产生明显的加速度；

(d)都不对。

答(c)

1140．火星和地球都是球体，火星的质量 $M_{火}$和地球的质量 $M_{地}$的比 $M_{火}/M_{地}=p$。火星的半径 $R_{火}$和地球的半径 $R_{地}$的比 $R_{火}/R_{地}=q$。那么火星表面处的重力加速度 $g_{火}$和地球表面处的重力加速度 $g_{地}$的比 $g_{火}/g_{地}$等于

(a) p/q^2；　(b) pq^2；　(c) p/q；　(d) pq。

答(a)

1141．在地球表面物体的重力随纬度的升高而增加。其原因有

(a)地球是个椭球体，两极的半径小于赤道的半径，因而万有引力增大；

(b)由于地球上各地的地质结构不同，高纬度处矿藏较多造成的；

(c)由于地球的磁极位于地极附近，因此产生附加的引力；

(d)由于物体随地球转动所需要的向心力是万有引力的一部分，纬度增大，转动的半径减小，在角速度相同的条件下，向心力减小，重力就随着纬度升高而增大了。

答(a)、(d)

1142．历史上第一个在实验室里比较准确地测出万有引力恒量的科学家是

(a)伽利略； (b)托里拆利；

(c)牛顿； (d)卡文迪许。

答(d)

1143．银河系中有两颗行星环绕某恒星运转，从天文望远镜中观察到它们的运转周期的比为 27∶1，则它们的轨道半径的比为

(a)3∶1； (b)9∶1；

(c)27∶1； (d)1∶9。

答(b)

两行星的公转速度的比为

(a)3∶1； (b)1∶3；

(c)9∶1； (d)1∶9。

答(b)

1144．几个离地高度不相等的人造卫星，绕地球（质量设为 M）做匀速圆周运动，则它们运行轨道半径的三次方和公转周期的平方的比值等于（万有引力恒量为 G）

(a)$\frac{GM}{4\pi^2}$； (b)$4\pi^2GM$；

(c)$\sqrt{GM}$； (d)$\frac{\sqrt{GM}}{2\pi}$。

答(a)

[提示] 参阅第 1203 题。

1145．下列是对人造地球卫星的几种论述，其中正确的是

(a)人造地球卫星在空中运行不再落回地球，表明它已经脱离了地球的引力范围；

(b)人造地球卫星绕地球作曲线运动，表明它还受到地球的引力作用；

(c)人造地球卫星由近地点向远地点运动时，不受地球引力作用，由远地点向近地点运动时，受地球引力作用；

(d)以上说法都不正确。

答(b)

1146．不计空气阻力，一个质量 4 千克的抛射体，在地球表面的环绕速度为 8 千米/秒，如果该抛射体的质量增加一倍，则环绕速度为

(a)16 千米/秒； (b)8 千米/秒；

(c)4 千米/秒； (d)11.2 千米/秒。

答(b)

1147．课外小组的同学对人造卫星所需的向心力发生了争论，其中正确的是

(a)有同学说，当人造卫星的轨道半径增大到 2 倍时，向心力也增大

到 2 倍，因为 $F=m\omega^2r$；

(b)有同学说，当人造卫星的轨道半径增大到 2 倍时，向心力减小到原来的 $\frac{1}{2}$，因为 $F=\frac{mv^2}{r}$；

(c)有同学说，当人造卫星的轨道半径增大到 2 倍时，向心力减小到原来的 $\frac{1}{4}$，因为 $F=G\frac{mM}{r^2}$；

(d)有同学认为，因为几方面的因素有矛盾，所以仅仅知道人造卫星轨道半径的变化量，是无法确定向心力的变化情况的。

答(c)

1148．人造地球卫星在圆形轨道上环绕地球运转，它的运动速度、周期和轨道半径的关系是

(a)半径越大，速度越大，周期越大；

(b)半径越大，速度越小，周期越大；

(c)半径越大，速度越大，周期越小；

(d)半径越大，速度越小，周期越小。

答(b)

1149．人造地球卫星由于受大气的阻力，则其轨道半径逐渐减小，其相应的线速度和周期的变化情况是

(a)速度减小，周期增大； (b)速度减小，周期减小；

(c)速度增大，周期增大； (d)速度增大，周期减小。

答(d)

1150．当人造地球卫星离地面的高度增大时，则

(a)卫星的速度和周期均增大；

(b)运行速度增大，运行周期减小；

(c)运行速度减小，运行周期增大；

(d)运行速度和运行周期都减小。

答(c)

1151．在轨道上运行的人造地球卫星，如果卫星上的天线突然折断，则天线

(a)作自由落体运动；

(b)作平抛运动；

(c)和卫星一起绕地球在同一轨道上运动；

(d)由于惯性，沿轨道切线方向作直线运动。

答(c)

1152．我国在 1984 年 4 月 8 日 19 时 20 分成功地发射了一颗试验通讯卫星，这种卫星相对地面静止不动，犹如悬在空中一样，它和地球自转的角速度相同，所以又叫做同步卫星。下面是对同步卫星的同种说法，其中正确的有

(a)同步卫星要和地球自转同步，则同步卫星的高度和速率就被确定；

(b)同步卫星的角速度和地球自转的角速度相同，但高度和速率可以选择，高度增加，速率加大或高度降低、速率减小仍可同步；

(c)同步卫星在地球上空的纬度可以选择，高度相同时，纬度增大，

卫星的运转半径减小，速率就可减小，以保持与地球自转相同的角速度；

(d)同步卫星的纬度只可能是零度，只有这时万有引力才和所需向心力的方向一致；

(e)我国 1970 年 4 月 24 日发射的第一颗人造地球卫星的周期是 114 分钟，比同步卫星的周期短，所以第一颗人造卫星离地面的高度比同步卫星低；

(f)同步卫星的速率比第一颗人造卫星的速率小。

答(a)、(d)、(e)、(f)

1153．同步卫星位于赤道上方，相对地面静止不动。如果地球半径为 R，自转角速度为ω，地球表面的重力加速度为 g，那么同步卫星离地面的高度为

(a)$\sqrt{Rg}$；　　(b)$\sqrt[3]{\frac{R^2g}{\omega^2}}$；

(c)$\sqrt[3]{\frac{R^2g}{\omega^2}}-R$；　　(d)$\sqrt[3]{\frac{R^2g}{\omega^2}}+R$。

答(c)

同步卫星绕地球的运行速度是

(a)$\sqrt{Rg}$；　　(b)$\sqrt{R\omega g}$；

(c)$\sqrt{\frac{R^2}{\omega g}}$；　　(d)$\sqrt[3]{R^2\omega g}$。

答(d)

1154．宇宙飞船进入一个围绕太阳运行的近乎圆形的轨道上运动，如果轨道半径是地球轨道半径的 9 倍，那末宇宙飞船绕太阳运行的周期是

(a)3 年；　　(b)9 年；

(c)27 年；　　(d)81 年。

答(c)

1155．在环绕地球运转的空间实验室内，下列几项实验中不能进行的有

(a)验证阿基米德定律；　　(b)观察电子在磁场中的偏转；

(c)验证欧姆定律；　　(d)观察热传递中的对流现象；

(e)验证平面镜成像规律；　　(f)观察α粒子散射实验。

答(a)、(d)

1156．人造卫星进入轨道作匀速圆周运动，卫星内仪器受力情况是

(a)卫星内仪器不失重，仪器受重力和向心力作用；

(b)卫星内仪器失重，仪器不再受重力作用；

(c)卫星内仪器失重，但仪器仍受重力作用；

(d)以上说法都不正确。

答(c)

计算题

1157．每个行星系都有各自的开普勒恒量 k，如果月球轨道半径是 3.83×10^8 米，周期是 27.3 天，求地球的 k 值。

［解答］　根据开普勒第三定律有

$$k=\frac{R^3}{T^2}=\frac{(3.83\times10^8)^3}{(27.3\times24\times3600)^2}\text{米}^3/\text{秒}^2$$

$$=1.01\times10^{13}\text{米}^3/\text{秒}^2\text{。}$$

1158．有人发现了一个小行星，测得它到太阳的平均距离是地球到太阳的平均距离的八倍。问这个小行星绕太阳的公转周期将是地球的公转周期的几倍？

［解答］　设地球到太阳的平均距离为 R,那末小行星到太阳的平均距离为 8R。又设地球的公转周期为 T，小行星的公转周期为 T′。根据开普勒第三定律可列出

$$\frac{R^3}{T^3}=\frac{(8R)^3}{T'^2}\text{，}$$

$$T'=\sqrt{(8R)^3\cdot\frac{T^2}{R^3}}=16\sqrt{2}T\approx22.6T\text{。}$$

1159．月球环绕地球运动的轨道半径约为地球半径的 60 倍，运行周期约为 27 天。能否应用开普勒定律计算出：在赤道平面内离地面多少高度，人造地球卫星可以随地球一起转动，就象停留在天空中不动一样。

［解答］　设人造地球卫星运行半径为 R，周期为 T，根据开普勒定律有

$$k=\frac{R^3}{T^2}\qquad(1)$$

同理设月球轨道半径为 R′，周期为 T′，也有

$$k=\frac{R'^3}{T'^2}\qquad(2)$$

由(2)式代入(1)式得

$$\frac{R^3}{T^2}=\frac{R'^3}{T'^2}\text{，}$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{T^2}{T'^2}\cdot R'^3}=\sqrt[3]{(\frac{1}{27})^2\times(60R_{\text{地}})^3}$$

$$=6.67R_{\text{地}}\text{。}$$

在赤道平面内离地面高度

$H=R?\ R_{地}=6.67R_{地}?\ R_{地}=5.67R_{地}=5.67\times6.4\times10^3$ 千米

$=3.63\times10^4$ 千米。

1160．天文学家观察哈雷彗星的周期是 75 年，离太阳最短的距离是 8.9×10^{10} 米，但它离太阳最远的距离不能被测出。试根据开普勒第三定律计算这个最远距离。太阳系的开普勒恒量 k_3 可取 3.354×10^{18} 米 ^{3}/秒 ^{2}。

［解答］　根据开普勒第三定律有

$$\frac{R^3}{T^2}=k_3\qquad(1)$$

(1)式中 R 是指彗星到太阳的平均距离，等于行星轨道离太阳最大距离和最小距离的和的一半，简称轨道半径。

设彗星离太阳的最短的距离为 R_l，最远距离为 R_{max}，则

$$R=\frac{R_l+R_{max}}{2} \qquad (2)$$

(2)式代入(1)式得

$$\frac{(R_l+R_{max})^3}{8T^2}=k_3,$$

$$\begin{aligned}R_{max}&=\sqrt[3]{8k_8T^2}-R_l\\&=\sqrt[3]{8\times3.354\times10^{18}\times(75\times365\times24\times3600)^2}\text{米}-8.9\times10^{10}\text{米}\\&=5.314\times10^{12}\text{米}-8.9\times10^{10}\text{米}\\&=5.225\times10^{12}\text{米。}\end{aligned}$$

1161．试用牛顿运动定律和开普勒第三定律推导出万有引力定律。

[解答]　设质量是 m 的行星环绕太阳做匀速圆周运动，它到太阳的距离是 R，周期是 T。行星做圆周运动的向心力就是由万有引力提供的，根据牛顿第二定律有

$$F=m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R=\frac{4\pi^2mR}{T^2} \qquad (1)$$

根据开普勒第三定律有

$$T^2=\frac{R^3}{k} \qquad (2)$$

把(2)式代入(1)式得

$$F=\frac{4\pi^2km}{R^2} \qquad (3)$$

(3)式中 k 是只和太阳有关的量，和行星无关。在太阳系中太阳对各个行星的 k 值都是一样的。设常数 $\mu=4\pi^2k$，因此有

$$F=\mu\frac{m}{R^2} \qquad (4)$$

(4)式中 μ 也是一个只和太阳有关的量。上式表明太阳对行星的引力和距离的平方成反比。

根据牛顿第三定律，太阳同时也受到行星的引力，即

$$F'=\mu'\frac{M}{R^2} \qquad (5)$$

(5)式中 μ' 只与行星有关的量，和太阳无关。M 是太阳的质量。因为 F=F′，所以从(4)式和(5)式联立可得

$$\mu\frac{m}{R^2}=\mu'\frac{M}{R^2}$$

$$\frac{\mu}{M}=\frac{\mu'}{m}=G \qquad (6)$$

可设想(6)式中 G 与太阳或行星都无关的恒量，叫做万有引力恒量。把 $\mu=GM$ 代入(4)式，即得万有引力定律的数学表达式

$$F=G\frac{Mm}{R^2}\text{。}$$

1162．太阳对木星的引力是 4.17×10^{23} 牛，它们之间的距离是 7.8

$\times 10^{11}$千米，现在已知木星的质量约为2×10^{27}千克，试求太阳的质量。

［解答］　根据万有引力定律有

$$F = G\cdot\frac{M_{木}M_{太}}{r^2},$$

$$M_{太} = \frac{Fr^2}{GM_{木}} = \frac{4.17\times10^{23}\times(7.8\times10^{11})^2}{6.67\times10^{-11}\times2\times10^{27}}\text{千克}$$

$$= 1.9\times10^{30}\text{千克。}$$

1163．地球和月球中心的距离是3.84×10^8米，月球绕地球一周所用的时间是2.3×10^6秒。求地球的质量。

［分析］　月球绕地球的运动可以近似地当作匀速圆周运动。设月球的质量为$m_{月}$，它作圆周运动所需要的向心力就是地球对月球的万有引力。

［解答］　地球对月球的万有引力

$$F_{引} = G\cdot\frac{m_{月}\cdot m_{地}}{R^2} \qquad (1)$$

月球绕地球作匀速圆周运动需要的向心力是

$$F_{向} = \frac{m_{月}v^2}{R} = \frac{m_{月}(2\pi nR)^2}{R} \qquad (2)$$

$$F_{引} = F_{向} \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式得

$$G\cdot\frac{m_{月}m_{地}}{R^2} = \frac{m_{月}(2\pi nR)^2}{R}\text{。}$$

$$m_{地} = \frac{4\pi^2R^3n^2}{G} = \frac{4\times3.14^2\times(3.84\times10^8)^3\times(\frac{1}{2.3\times10^6})^2}{6.67\times10^{-11}}\text{千克}$$

$$= 6.33\times10^{24}\text{千克。}$$

1164．物体在地面附近自由落下的加速度约为9.8米/秒^2，它跟地球中心的距离（地球半径）可以近似地取6.37兆米，试求地球的近似质量。

［解答］　设地球质量为M，根据万有引力定律

$$F = \frac{GMm}{R^2} \qquad (1)$$

$$F = mg \qquad (2)$$

(1)式代入(2)式得

$$\frac{GMm}{R^2} = mg,$$

$$M = \frac{R^2g}{G} = \frac{6.37^2\times10^{12}\times9.8}{6.67\times10^{-11}}\text{千克}$$

$$= 5.96\times10^{24}\text{千克。}$$

1165．某天文台测得某行星的一颗卫星沿半径为R的圆周轨道绕行星转动，周期为T，求：(1)卫星的向心加速度；(2)行星的质量。

［解答］　假设R为卫星和行星中心间的距离，G为万有引力恒量。卫

星绕行星转动所需要的向心力就是万有引力。根据圆周运动公式，卫星的向心加速度为

$$a_n=\frac{4\pi^2}{T^2}R。$$

根据万有引力公式和牛顿第二定律得

$$\frac{GMm}{R^2}=ma_n=m\frac{4\pi^2}{T^2}R。$$

$$\frac{GM}{R^2}=\frac{4\pi^2 R}{T^2}。$$

$$M=\frac{4\pi R^3}{GT^2}。$$

1166．用卡文迪许扭秤做实验。小球质量 m=0.01 千克，大球质量 m′=0.5 千克，两球心之间的距离为 0.05 米，两球远离其他物体。问两球的加速度及万有引力是多少？

［解答］　根据万有引力定律有

$$F=G\frac{m\cdot m'}{r^2}=6.67\times10^{-11}\frac{0.01\times0.05}{(0.05)^2}\text{牛}$$

$$=1.33\times10^{-11}\text{牛。}$$

小球的加速度

$$a=\frac{F}{m}=\frac{1.33\times10^{-11}}{1.0\times10^{-2}}\text{米/秒}^2=1.33\times10^{-9}\text{米/秒}^2。$$

大球的加速度

$$a'=\frac{F}{m'}=\frac{1.33\times10^{-11}}{0.5}\text{米/秒}^2=2.66\times10^{-11}\text{米/秒}^2。$$

因为引力随着两球的互相靠近而增加，所以加速度不是恒量。

1167．求人造地球卫星在距离地面 h=200 千米高处的圆形轨道上运行的向心加速度。（已知地球半径 R=6400 千米，地球质量 $M=5.98\times10^{24}$ 千克，引力恒量 $G=6.67\times10^{-11}$ 牛·米^2/千克^2。）

［解答］　人造地球卫星在圆形轨道上运动的向心力就是万有引力，根据牛顿第二定律有

$$G\frac{Mm}{(h+R)^2}=ma。$$

$$a=\frac{GM}{(h+R)^2}=\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}{[(6400+200)\times10^3]^2}\text{米/秒}^2$$

$$=9.16\text{米/秒}^2。$$

1168．一只气球上升到离地面 22 千米的高度，问那里的重力加速度有多大？（只知地球表面的 g=9.8 米/秒^2）

［解答］　设离地面 22 千米处的重力加速度为 g′，即有

$$\frac{GMm}{(R+h)^2}=mg' \qquad (1)$$

而

$$\frac{GMm}{R^2}=mg \qquad (2)$$

(1)式÷(2)式得

$$\frac{g'}{g}=\frac{R^2}{(R+h)^2}=\frac{6400^2}{(6400+22)^2}=0.993,$$

$$g'=0.993g=9.73\text{米}/\text{秒}^2。$$

1169．已知月球的半径是 1.74×10^3 千米，月球的质量是 7.35×10^{22} 千克，地球质量是 5.98×10^{24} 千克，地球半径是 6.4×10^6 米。求月球表面和地球表面重力加速度的比。

[解答]　设物体在地球表面时

$$mg=G\frac{Mm}{R^2},\qquad g=\frac{MG}{R^2}\qquad(1)$$

物体在月球表面时

$$mg'=G\frac{M'm}{R'^2},\qquad g'=\frac{M'G}{R'^2}\qquad(2)$$

(2)式÷(1)式得

$$\frac{g'}{g}=\frac{M'}{M}\cdot\frac{R^2}{R'^2}=\frac{7.35\times10^{22}}{5.98\times10^{24}}\cdot\frac{(6.4\times10^6)^2}{(1.74\times10^6)^2}$$

$$=0.166。$$

1170．太阳质量是地球质量的 3.3×10^5 倍，太阳的半径是地球半径的 109 倍，求太阳表面的重力加速度是地球表面的重力加速度的几倍？

[解答]　设物体的质量为 m,在地球表面上受到的万有引力近似地等于物体在地球表面的重力。在太阳表面上受到的万有引力近似地等于物体在太阳表面的重力 mg′。根据万有引力定律公式

$$\frac{GM'm}{R^2}=mg',\qquad g'=\frac{GM'}{R^2}\qquad(1)$$

$$\frac{GMm}{r^2}=mg,\qquad g=\frac{GM}{r^2}\qquad(2)$$

(1)式÷(2)式得

$$\frac{g'}{g}=\frac{M'r^2}{MR^2}=33\times10^4\times(\frac{1}{109})^2$$

$$=27.8。$$

1171．月球轨道半径是地球半径的 60 倍，问地球表面的重力加速度是月球绕地球的向心加速度的多少倍？

[解答]　设月球轨道半径为 R，地球半径为 r，月球绕地球的向心加速度为 a′。根据万有引力定律有

$$F'=\frac{GMm}{R^2}\qquad(1)$$

根据牛顿第二定律有

$$F'=ma'\qquad(2)$$

由(1)、(2)式联立消去 F′得

$$\frac{GMm}{R^2}=ma',$$

$$a'=\frac{GM}{R^2}\qquad(3)$$

设质量为 m 的物体在地球上，同理可得

$$g=\frac{GM}{r^2} \qquad (4)$$

(4)式÷(3)式得

$$\frac{g}{a'}=\frac{R^2}{r^2}=60^2=3600。$$

1172．要想发射一颗用来转播电视讯号的同步卫星，并且使这颗卫星停留在地球赤道上某地的上空，问这题卫星应该发射的高度是多少？

［解答］　卫星做圆周运动所需要的向心力就是地球对卫星的万有引力，它转动周期和地球自转的周期相等，因此有

$$G\frac{mM}{(R+h)^2}=m\omega^2(R+h) \qquad (1)$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T} \qquad (2)$$

由(1)、(2)式联立，可得

$$h=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}-R，$$

$$=\sqrt[3]{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times(24\times3600)^2}{4\times3.14^2}}\text{米}-6.37\times10^6\text{米}$$

$$=3.60\times10^7\text{米}=3.60\times10^4\text{千米。}$$

1173．如果在离月球表面的高度为 h 米处发射一个月球的卫星，那么它的线速度至少应多大？（已知月球半径为 R 米，质量为 M 千克。）

［解答］　设月球卫星的质量为 m 千克，它所受月球的引力就是所需要的向心力，则

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2}=\frac{mv^2}{(R+h)}$$

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}}\text{米/秒。}$$

1174．要使一颗人造卫星在离地面 1850 千米的高空绕地球作匀速圆周运动，必须使它具有多大的速度？速度方向如何？它环行一周需要多少时间？（$R_{地}$=6370 千米）

［解答］　卫星绕地球作匀速圆周运动有

$$m\frac{v^2}{R+h}=G\frac{Mm}{(R+h)^2}，$$

$$v=\sqrt{\frac{GM}{R+h}} \qquad (1)$$

因为在地球表面

$$\frac{GMm}{R^2}=mg，$$

$$GM=R^2g \qquad (2)$$

把(2)式代入(1)式得

$$v = R\sqrt{\frac{g}{R+h}} = 6370\times10^2\sqrt{\frac{9.8}{6370\times10^3+1850\times10^3}}\text{米/秒}$$

$$= 6955\text{米/秒。}$$

v 的方向必须跟地心连线相垂直。

周期 $T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi(6370\times10^3+1850\times10^3)}{6955}\text{秒} = 7422\text{秒。}$

1175．有一颗人造地球卫星，在地球表面绕地球运动，速度为 v_1。如果另一个人造地球卫星，在离地面高 h=3R 的地方（R 为地球半径）绕地球运动，速度为 v_2。问 v_2 是 v_1 的多少倍？

［解答］ 设在地球表面人造卫星绕地球运动的半径是 R_0 人造卫星绕地球运动有

$$\frac{m_1v_1^2}{R} = \frac{GMm_1}{R^2} \qquad (1)$$

$$\frac{m_2v_2^2}{4R} = \frac{GMm_2}{(4R)^2} \qquad (2)$$

(2)式÷(1)式得

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{R}{4R}} = \frac{1}{2}\text{。}$$

1176．两个行星的质量分别是 M_1 和 M_2，它们绕太阳运动的轨道半径分别等于 R_1 和 R_2。假定它们只受到太阳的作用，求它们所受的向心力的比和运行周期的比各等于多少？

［解答］ 设太阳的质量为 M,行星绕太阳作圆周运动所需的向心力就是太阳对行星的万有引力。

对于质量是 M_1 的行星所受的万有引力 F_1 为

$$F_1 = G\frac{M_1M}{R_1^2}\text{，}$$

对于质量是 M_2 的行星所受的万有引力 F_2 为

$$F_2 = G\frac{M_2M}{R_2^2}\text{，}$$

它们所受的向心力的比为

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{G\cdot\frac{M_1M}{R_1^2}}{G\cdot\frac{M_2M}{R_2^2}} = \frac{M_1R_2^2}{M_2R_1^2} \qquad (1)$$

在圆周运动中， $F = m\omega^2R = m\frac{4\pi^2}{T^2}R$，所以

$$F_1 = M_1\frac{4\pi^2R_1}{T_1^2}\text{，} \qquad F_2 = M_2\frac{4\pi^2R_2}{T_2^2}\text{。}$$

$$T_1^2 = M_1\frac{4\pi^2R_1}{F_1}\text{，} \qquad T_2^2 = \frac{M_2 4\pi^2R_2}{F_2}\text{。}$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sqrt{\frac{M_1 4\pi^2 R_1}{F_1}}}{\sqrt{\frac{M_2 4\pi^2 R_2}{F_2}}}=\sqrt{\frac{F_2 M_1 R_1}{F_1 M_2 R_2}} \qquad (2)$$

(1)式代入(2)式得

$$\frac{T_1}{T_2}=\sqrt{\frac{M_2 R_1^2}{M_1 R_2^2}\cdot\frac{M_1 R_1}{M_2 R_2}}=\sqrt{\frac{R_1^2}{R_2^3}}。$$

1177．有两个人造地球卫星，甲离地面 800 千米，乙离地面 1600 千米，求：(1)两者的向心加速度的比；(2)两者的周期的比；(3)两者的线速度的比。（地球半径约为 6400 千米）

[解答]　人造地球卫星绕地球作圆周运动所需要的向心力就是万有引力。设两者向心加速度分别为 $a_甲$和 $a_乙$，则有

$$\frac{GMm_甲}{(R+h_甲)^2}=m_甲 a_甲 \qquad (1)$$

$$\frac{GMm_乙}{(R+h_乙)}=m_乙 a_乙 \qquad (2)$$

(1)式÷(2)式得

$$\frac{a_甲}{a_乙}=\frac{(R+h_乙)^2}{(R+h_甲)^2}=\frac{(6400+1600)^2}{(6400+800)^2}=\frac{100}{81}。$$

因为
$$a_甲=\frac{4\pi^2}{T_甲{}^2}\cdot(R+h_甲) \qquad (3)$$

$$a_乙=\frac{4\pi^2}{T_乙{}^2}\cdot(R+h_乙) \qquad (4)$$

(3)式÷(4)式

得
$$\frac{a_甲}{a_乙}=\frac{T_乙{}^2}{T_甲{}^2}\cdot\frac{R+h_甲}{R+h_乙}。$$

$$\frac{T_甲}{T_乙}=\frac{\sqrt{a_乙(R+h_甲)}}{\sqrt{a_甲(R+h_乙)}}=\sqrt{\frac{81}{100}\cdot\frac{7200}{8000}}$$

$$=0.854。$$

因为
$$a_甲=\frac{v_甲{}^2}{R+h_甲}，\qquad v_甲=\sqrt{a_甲(R+h_甲)} \qquad (5)$$

$$a_乙=\frac{v_乙{}^2}{R+h_乙}，\qquad v_乙=\sqrt{a_乙(R+h_乙)} \qquad (6)$$

(5)式÷(6)式得

$$\frac{v_{甲}}{v_{乙}}=\sqrt{\frac{a_{甲}}{a_{乙}}\cdot\frac{(R+h_{甲})}{(R+h_{乙})}}=\sqrt{\frac{(R+h_{乙})^2}{(R+h_{甲})^2}\cdot\frac{(R+h_{甲})}{(R+h_{乙})}}=\sqrt{\frac{R+h_{乙}}{R+h_{甲}}}$$

$$=\sqrt{\frac{6400+1600}{6400+800}}=\frac{\sqrt{10}}{3}。$$

1178．A、B 两个天体，彼此相距很远。设天体 A 的半径为 R_A，质量为 M_A；天体 B 的半径为 R_B，质量为 M_B。试求在接近天体 A 表面的圆形轨道上运行的人造卫星的周期 T_A 和在接近天体 B 表面的圆形轨道上运行的人造卫星的周期 T_B 的比。

[解答]　万有引力就是提供卫星运动的向心力，所以有

$$G\frac{Mm}{R^2}=\frac{4\pi^2 mR}{T^2},$$

$$T^2=\frac{4\pi^2R^3}{GM}。$$

对于天体 A 的卫星，它的周期是

$$T_A^2=\frac{4\pi^2R_A^3}{GM_A}\qquad(1)$$

对于天体 B 的卫星，它的周期是

$$T_B^2=\frac{4\pi^2R_B^3}{GM_B}\qquad(2)$$

(1)式÷(2)式得

$$\frac{T_A}{T_B}=\sqrt{\frac{R_A^3}{M_A}\cdot\frac{M_B}{R_B^3}}=\sqrt{\frac{M_B}{M_A}}\cdot\sqrt{\frac{R_A^3}{R_B^3}}。$$

1179．一根绳子在地球表面最多只能挂 3 千克物体，而用这根绳子沿水平方向拉动一质量为 10 千克的物体时，物体和地面的摩擦系数 $\mu=0.2$。求：

(1)物体所能达到的最大加速度 a；

(2)已知月球上重力加速度是地球上的 1/6，在月球上用这条绳最多能挂多大质量物体？用这条绳在月球上沿水平方向拉动一个质量为 10 千克的物体，如果物体和月面的摩擦系数 μ' 也等于 0.2，物体所能达到的最大加速度 a' 又是多大？

[解答]　(1)物体沿水平方向上受到绳子张力 T 和摩擦力 f，根据牛顿第二定律

$$T?\ f=ma,$$

$$f=\mu mg,$$

$$T=m(\mu g+a)。$$

$$a=\frac{T}{m}-\mu g=(\frac{3\times 9.8}{10}-0.2\times 9.8)\text{米/秒}^2$$

$$=0.98\text{米/秒}^2。$$

(2)因为绳子在地球上和月球上所能承受的最大张力不变，所以在月球上

$$T = m'g',$$

$$m' = \frac{T}{g'} = \frac{T}{\frac{1}{6}g} = \frac{6T}{g}$$

$$= 6 \times 3\text{千克} = 18\text{千克}。$$

在沿水平方向上

$$T - \mu mg' = ma',$$

$$T = m(\mu g' + a')$$

$$a' = \frac{T}{m} - \mu g'$$

$$= \frac{3 \times 9.8}{10}\text{米/秒}^2 - 0.2 \times \frac{1}{6} \times 9.8\text{米/秒}^2$$

$$= 2.61\text{米/秒}^2。$$

1180．月球质量是地球质量的 1/81，月球半径是地球半径的 1/3.8。如果分别在地球上和月球上都用同一初速度竖直向上抛出一个物体（阻力不计）求：(1)两者上升高度的比；(2)两者从抛出到落地的时间的比。

[解答]　设质量为 m 的物体在月球上的重力加速度为 g '，则有

$$mg' = \frac{GM_{月}m}{R_{月}^2}, \qquad g' = \frac{GM_{月}}{R_{月}^2} \qquad (1)$$

物体在地球上的重力加速度为 g，则有

$$mg = \frac{GM_{地}m}{R_{地}^2}, \qquad g = \frac{GM_{地}}{R_{地}^2} \qquad (2)$$

(1)式÷(2)式得

$$g' = \frac{M_{月}}{M_{地}} \cdot \frac{R_{地}^2}{R_{月}^2} \cdot g = \frac{1}{81} \times \frac{3.8^2}{1} \times 9.8\text{米/秒}^2$$

$$= 1.75\text{米/秒}^2。$$

设在地球上上抛的高度为 h，在月球上上抛的高度为 h '。根据运动学公式

可得

$$v_t^2 - v_0^2 = -2gh$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g},$$

$$h' = \frac{2v_0^2}{2g'},$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{g'}{g} = \frac{1.75}{9.8} = 0.178。$$

设在地球上抛出到落地需要的时间为 t，在月球上所需的时间为 t '。根据运动学公式 v_t=v_0? gt，因为 v_t=? v_0，所以有

$$t=\frac{2v_0}{g}，$$

$$t'=\frac{2v_0}{g'}，$$

$$\frac{t}{t'}=\frac{g'}{g}=0.178。$$

1181．离地球表面和月球表面 1.8 米高处都用 v_0=20 米/秒的初速度水平抛出一颗石子，求石子分别在地球上和月球上飞行的水平距离。（月球的质量和半径见第 1180 题，且阻力不计）

[解答]　因为

$$mg'=\frac{GM_{月}m}{R_{月}^2}，$$

$$mg=\frac{GM_{地}m}{R_{地}}，$$

所以

$$g'=\frac{M_{月}R_{地}^2}{M_{地}R_{月}^2}\cdot g=\frac{1}{81}\times\frac{3.8^2}{1}\times 9.8\text{米}/\text{秒}^2$$

$$=1.75\text{米}/\text{秒}^2。$$

根据平抛运动公式，在地球上

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$s=v_0t=v_0\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}}=20\times\sqrt{\frac{2\times1.8}{9.8}}\text{米}$$

$$=12.12\text{米}。$$

在月球上

$$t'=\sqrt{\frac{2h}{g'}},$$

$$s=v_0t'=v_0\sqrt{\frac{2h}{g'}}=20\times\sqrt{\frac{2\times1.8}{1.75}}\text{米}$$

$$=28.69\text{米}。$$

1182．设一只飞船从地球飞向月球，在途中某处飞船受到两球的万有引力相等，并且在一直线上。求这一位置离地心多远？（设地球和月球的质量分别为 M 和 M′，两球心相距 L）

[解答]　设飞船离地心的距离为 h，月球离地心的距离为 L，月球质量为 M′，地球质量为 M，根据万有引力定律有

$$\frac{GMm}{h^2}=\frac{GM'm}{(L-h)^2}，(\text{式中}m\text{为飞船的质量})$$

$$\frac{M}{h^2}=\frac{M'}{(L-h)^2}，$$

$$\frac{(L-h)^2}{h^2}=\frac{M'}{M},$$

$$\frac{L}{h}-1=\sqrt{\frac{M'}{M}},$$

$$h=\frac{L}{1+\sqrt{\frac{M'}{M}}}。$$

1183．离开地面多少高度才能使火箭受到地球引力为在海平面时受到地球引力的 1/2？这个高度是地球半径的几倍？

［解答］　根据题意，火箭离开地面 h 高时的引力等于在海平面时引力的一半，所以有

$$G\cdot\frac{Mm}{(R+h)^2}=\frac{1}{2}G\cdot\frac{Mm}{R^2},$$

$$(R+h)^2=2R^2。$$

$$R+h=\sqrt{2}R,$$

$$h=(\sqrt{2}-1)R,$$

$$\frac{h}{R}=\sqrt{2}-1。$$

1184．一个重 882 牛的人，在月球上约重 147 牛。月球和地球的半径比约为 1/4，地球的第一宇宙速度为 7.9 千米/秒。试求月球的第一宇宙速度的近似值。

［解答］　按题意可知

$$\frac{mg_{地}}{mg_{月}}=\frac{882}{147}=\frac{6}{1},$$

$$\frac{R_{月}}{R_{地}}=\frac{1}{4},$$

根据

$$mg=m\frac{v^2}{R},$$

$$v=\sqrt{Rg}。$$

所以

$$\frac{v_{月}}{v_{地}}=\sqrt{\frac{R_{月}g_{月}}{R_{地}g_{地}}},$$

$$v_{月}=\sqrt{\frac{R_{月}g_{月}}{R_{地}g_{地}}}\cdot v_{地}=\sqrt{\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}}\times 7.9\text{千米}/\text{秒}$$

$$=1.61\text{千米}/\text{秒}。$$

1185．推算第一宇宙速度。（物体具有超过 v=7.9 千米/秒的速度，才能使人造地球卫星环绕地球运行，这个速度叫做第一宇宙速度。）

［解答］　设卫星的质量为 m，地球的质量为 M，卫星环绕地球作匀速圆周运动的最小半径看作等于地球的半径（6400 公里）。

卫星作匀速圆周运动所需要的向心力为

$$F_{向} = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

这向心力就是地球对它的万有引力

$$F_{引} = G\frac{mM}{R^2} \qquad (2)$$

而 $F_{引}=F_{向}$ (3)

(1)、(2)式联立得

$$G\cdot\frac{mM}{R^2} = m\cdot\frac{v^2}{R}。$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad (4)$$

由于卫星离地面不远，可以认为地球对卫星的引力就是卫星所受的重力，即

$$G\frac{mM}{R^2} = mg，$$

$$\frac{GM}{R^2} = g。$$

或 $$\frac{GM}{R} = Rg \qquad (5)$$

以(5)式代入(4)式得

$$v = \sqrt{Rg}，$$

$$= \sqrt{6.4\times10^6\times9.8}\text{米/秒}$$

$$= 7.9\times10^3\text{米/秒}。$$

1186．推算第二宇宙速度。（人造行星脱离地球引力进入行星轨道具有的速度，其数值 v=11.2 千米/秒。）

［解答］ 用 M 表示地球的的质量，r 表示地球的半径，m 表示人造行星的质量，G 表示万有引力恒量。把一个人造行星从地球表面发射到无限远处，对它所需做的功W在数值上就等于克服万有引力$G\frac{Mm}{r^2}$所做的功。其中万有引力随着距离的平方成反比例地减小，因而是个变力。为了计算这个变力所做的功，把位移分成无数小段（r_1? r），（r_2? r_1）…分段计算外力所做的功，然后相加，如图所示。由于 r_1? r 极小，引力$G\frac{Mm}{r^2}$可看作不变；又因r与r_1相差极小，$r^2 = r\cdot r_1$因此外力做功

$$W_1 = G\frac{Mm}{r^2}(r_1 - r) = G\frac{Mm}{r\cdot r_1}(r_1 - r)$$

$$= GMm(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1})。$$

同理，物体从 r 移到无穷远的过程中，外力所做的功依次为

$$W_2 = GMm(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})。$$

$$W_3 = GMm(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3})。$$

Λ Λ　　　　Λ Λ

$$W_n = GMm(\frac{1}{r_n - 1} - \frac{1}{r_n})。$$

$$W_\infty = GM_m(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{\infty})。$$

所以在把物体从 r 移到无穷远的整个过程中，外力所做的总功

$$W = W_1 + W_2 + Λ\ Λ + W_n + W\infty$$

$$= G\frac{Mm}{r}。$$

如果人造行星所具有的动能足以达到上述数值，便可脱离地球引力的控制，即

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{r} \qquad (1)$$

而 $$\frac{GM}{r^2} = g \qquad (2)$$

所以 $$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{2rg} = 11.2\text{千米/秒}。$$

1187．推算第三宇宙速度（人造天体挣脱太阳系而飞向太阳系以外的宇宙空间去，必须具有的最小速度，其数值 v=16.7 千米/秒）。

[解答]　人造天体如果挣脱太阳引力的束缚，需要比人造行星脱离地球引力的能量多。地球环绕太阳运动，速度大约为 30 千米/秒，地球上的物体也随着这个速度绕太阳运动。人造天体脱离太阳引力的束缚所需的速度正如物体挣脱地球引力的束缚所需的速度一样，等于环绕速度的

$\sqrt{2}$倍，即$\sqrt{2}\times 30$千米/秒$= 42.4$千米/秒。因为人造天体是在地球上的，它已有环绕太阳运动的速度 30 千米/秒，所以只要沿地球运动轨道的方向增加12.4千米/秒就成了。也就是它需增加动能$\frac{1}{2}mv^2$。

人造天体要挣脱太阳引力需做的功

$$W = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 \qquad (1)$$

$$W = \frac{1}{2}mv_3^2 \qquad (2)$$

（其中 v_2 为第二宇宙速度，v_3 为第三宇宙速度）

由(1)、(2)式得

$$v_3^2 = v_2^2 + v^2，$$

$$v_3 = \sqrt{v_2^2 + v^2} = \sqrt{11.2^2 + 12.4^2}\text{米/秒}$$

$$= 16.7\text{米/秒}。$$

1188．求月球上的第一和第二宇宙速度值。（月球表面重力加速度 g=1.63 米/秒 ^{2}，月球半径 R=1.74×10^3 千米。）

[解答] 从第一宇宙速度推导公式有

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{1.63\times1.74\times10^6}\text{米/秒}$$
$$=1.68\times10^3\text{米/秒}$$
$$=1.68\text{千米/秒。}$$

从第二宇宙速度的推导公式有

$$v_2 = \sqrt{2gR} = 1.68\sqrt{2}\text{千米/秒}$$
$$=2.38\text{千米/秒。}$$

1189.已知宇宙飞船离地面的最大距离为 183 千米,最小距离为 24.4 千米。求飞船绕地球运转的周期。

[解法一] 飞船绕地球运转的向心力就是万有引力，根据万有引力定律和牛顿第二定律有

$$G\frac{Mm}{R^2}=\frac{4\pi^2 mR}{T^2},$$
$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{GM}}\text{。}$$

其中 $R=6400\times10^3\text{米}+\dfrac{183\times10^3+24.4\times10^3}{2}\text{米}$

$$=6503.7\times10^3\text{米},$$

地球质量 M=5.98×10²⁴千克，

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2\times(6.50\times10^6)^3}{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}}}\text{秒}$$
$$=5211\text{秒}=86.85\text{分。}$$

[解法二] 应用开普勒第三定律有

$$k=\frac{R^3}{T^2},$$
$$T=\sqrt{\frac{R^3}{k}}\text{。}$$

(其中地球的开普勒恒量 $k=1.01\times10^{13}\text{米}^3/\text{秒}^2$)

$$T=\sqrt{\frac{(6.5\times10^6)^3}{1.01\times10^{13}}}\text{秒}=5214\text{秒}$$
$$=86.9\text{分。}$$

1190．世界上第一颗人造地球卫星轨道的长轴比第二颗短 800 公里，第一颗卫星开始绕地球运转时周期为 96.2 分钟。求：(1)第二颗人造卫星轨道的长轴 ;(2)第二颗人造卫星绕地球运转的周期。(地球质量 $M=5.98\times10^{24}$千克)

[解答] 设第一颗人造卫星的长轴为 2R，周期为 T。第二颗人造卫星的长轴为 2R′，周期为 T′。则

2R=2R′？ 800×10³米，

轨道平均距离

R=R′？ 400×10³米。

根据牛顿第二定律和万有引力定律有

$$\frac{GMm}{R^2}=\frac{4\pi^2 mR}{T^2},$$

$$R=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6.67\times10^{-11}\times5.98\times10^{24}\times(96.2\times60)^2}{4\pi^2}}\text{米}$$

$$=6.958\times10^6\text{米。}$$

R′=R+400×10^3米=6.957×10^6米+0.4×10^6米

=7.358×10^6米。

2R′=2×7.358×10^6米=1.47×10^4公里。

根据开普勒第三定律有

$$\frac{R'^3}{R'}=\frac{T'^2}{T^2},$$

$$T'=\sqrt{\frac{R'^3}{R^3}}\cdot T=\sqrt{(\frac{7.358}{6.957})^3}\times96.2\text{分}$$

$$=104.6\text{分。}$$

1191．求一个物体下降到距地面深度为 h 时重力加速度的变化。它在多深的地方重力加速度为地面上的 25%？（设地球的密度为常数）

［解答］　位于地球表面以下 h 深度的物体，不受上面厚度为 h 的地球表面层的吸引，因为整个表面层对物体的吸引力的合力为零。（参阅第 1208 题）

假设物体离开地球中心 r=R? h，物体的质量为 m。在这情况下有

$$mg'=G\cdot\frac{M'm}{r^2}\text{。}$$

式中 M′是具有半径为 r 的球体的质量，且密度等于地球的密度ρ。因为$M'=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$。所以

$$mg'=Gm\frac{4}{3}\pi r\rho \qquad (1)$$

在地球表面有

$$mg=G\frac{Mm}{R^2}=Gm\frac{4}{3}\pi R\rho \qquad (2)$$

(1)式÷(2)式得

$$\frac{g'}{g}=\frac{r}{R}=\frac{R-h}{R},$$

即 $$h=R(1-\frac{g'}{g})\text{。}$$

如果 $$\frac{g'}{g}=25\%,$$

则 $$h=R(1-25\%)=0.75R\text{。}$$

1192．在宇宙中某处，设有一个质量为 m 的小物体，沿着一个很大的光滑金属实心球表面做匀速圆周运动（圆半径 R 跟金属球半径相等）。金属密度ρ=8×10^3千克/米^3，星体对它的引力作用可以不计时，求这小

物体在金属球的大圆上绕行一周所需的最短时间（最小周期）。

[解答]　小物体沿着光滑金属球表面做匀速圆运动时，受到大球对它的引力 F 和大球表面对它的压力 N 的作用，向心力就是引力和压力的合力。

$$F-N=m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}R。$$

从上式可知，当 N=0 时，T 达到最小。

$$F=m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2_{min}}\cdot R,$$

$$G\cdot\frac{Mm}{R^2}=m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2_{min}}\cdot R,$$

$$T_{min}=2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}。$$

而 $$M=\frac{4\pi}{3}R^3\rho,$$

所以 $$T_{min}=\sqrt{\frac{4\pi^2R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3\rho\cdot G}}=\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$$

$$=\sqrt{\frac{3\pi}{6.67\times10^{-11}\times8\times10^3}}\text{秒}=4202\text{秒}$$

$$=70\text{分钟}。$$

1193．某行星上一昼夜的时间 t=6 小时，在行星赤道处的弹簧秤示重比在行星两极处小 10%。求这个行星的平均密度ρ_0(G=6.67×10^{-11} 牛·米^2/千克^2)

[解答]　设物体的质量为 m，在行星两极处的重力为 P，T 为弹簧秤在行星赤道处的弹力，R 为行星的半径，所以

$$P-T=\frac{mv^2}{R}=m\frac{4\pi^2}{T^2}R,$$

按题意 $T=0.9P$，而$P=G\frac{mM}{R^2}$。(公式中M是行星的质量)

$$G\frac{mM}{R^2}(1-0.9)=m\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R$$

$$0.1GM=R^3\frac{4\pi^2}{T^2}\cdot R$$

$$M=\frac{4\pi^2R^2}{0.1GT^2}$$

因为 $$\rho=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3},$$

所以 $\rho=\dfrac{3\pi}{0.1GT^2}=\dfrac{3\times3.14}{0.1\times6.67\times10^{-11}\times(6\times3600)^2}$ 千克/米^3

$=3.03\times10^3$ 千克/米^3。

说理和论证题

1194．十七世纪中叶牛顿根据第谷对行星运动的精确观测，及开普勒的计算结果，并对行星绕太阳运动的动力学分析得到了万有引力定律。那么，万有引力是否是万有的呢？

［解答］ 我们观察到地球表面上一切物体在自由下落中都具有相同的加速度，这就说明在地球表面具有来自同种的引力行为。对整个可见的宇宙恒星和星系，从那里来的光讯息说明，那里的一切物质和地球上一样有引力行为。无论在何处都没有找到任何物体有不服从牛顿万有引力定律的。在没有任何证据可以提出异义的情况下，提出这个疑问是不合理的。

1195．月球绕地球运动，地球绕太阳运动，它们的开普勒恒量是否相同？

［解答］ 不相同。

从开普勒第三定律可知，所有行星的椭圆轨道的半长轴的三次方和公转周期的平方的比值是恒量，即$k=\dfrac{R^3}{T^2}$。其中k值只取决于各星系中恒星（或行星）的质量（$k=\dfrac{GM}{4\pi^2}$）。因此月球绕地球运动的开普勒恒量只取决于地

球的质量$k_{地}=\dfrac{GM_{球}}{4x^2}$；地球绕太阳运动的开普勒恒量只取决于太阳的质量$k_{日}=\dfrac{GM_{日}}{4\pi^2}$。所以月球绕地球运动，地球绕太阳运动，它们的开普勒恒量是不相同的。

1196．月球和地球之间有引力，地球和太阳之间也有引力，它们的万有引力恒量是否相同？为什么万有引力恒量不取 1？

［解答］相同的。

从万有引力定律可知，引力和两物体的质量乘积成正比，和它们的距离平方成反比。而引力恒量仅是比例系数，当质量和距离的单位取定后，引力恒量就有一定的值。在国际单位制中，引力恒量 $G=6.67\times10^{-11}$ 牛·米^2/千克^2。因此，万有引力恒量 G 和星体的质量、距离等任务参量无关。

由于我们已经规定了质量单位为千克、长度单位为米、力的单位是牛。如果为了简化万有引力定律的公式，把 G 取为 1，那就必须确定上述三个物理量的新单位。例如，力的单位不用牛，而用 6.67×10^{-11} 牛为新单位。万有引力定律就可以写成$F=\dfrac{m_1m_2}{r^2}$了。但是，牛顿第二定就不能再表达为$F=ma$，必须表达为$F=kma$；而且$k=\dfrac{1}{6.67\times10^{-11}}$。权衡利弊，G 采用 1 是不适合的。

1197．在地球表面上物体的重力是否就是万有引力？

[解答]地球在不断地自转，地面上一切物体随地球都在作圆周运动，这些圆周平面垂直于地轴而和纬线相合。作匀速圆周运动的物体需要向心力，这个向心力是由地球对物体的引力来维持。因此地球上物体的重力应该等于它受到的地球引力和它随同地球自转所需向心力的矢量差。

从上面分析可知，物体的重力是由地球对物体的引力而产生的。除两极（两极处无向心力）外，物体重力都不等于万有引力。

应该指出，重力和万有引力的差值是不大的。以需要向心力最大的赤道为例，向心力仅是万有引力的 0.34%，重力是万有引力的 99.66%，相差是很小的。

1198．在地球表面重力加速度都相等吗？为什么？

[解答]在地球表面，赤道处的重力加速度最小。重力加速度随着纬度的增加则增加，到两极处的重力加速度为最大。

地球表面上的物体随地球自转作圆周运动所需要的向心力等于 $m\omega^2R\cos\varnothing$，其中 $R\cos\varnothing$是物体在某纬度处作圆周运动的半径。向心力由万有引力提供，因此物体的重力等于万有引力和向心力两者的矢量差。即 $mg=F-F_{\varnothing}$（F 为万有引力，$F_{\varnothing}$为某纬度处的向心力），如上图所示。因为 $F_{\varnothing}=m\omega^2R\cos\varnothing$，可知在$\varnothing=0$ 时，$F_{\varnothing}$最大。在$\varnothing=90°$ 时，$F_{\varnothing}$最小。

其次，地球是椭球体，它的极半径小而赤道半径大，根据引力和距离平方成反比的关系，物体在赤道处受的引力比在两极处受的引力小，且随着纬度的增加，引力也随着增加。

综合上面两点，物体在赤道上所受引力最小，而所需向心力最大，在两极处正相反。所以物体的重力在赤道上最小，在两极处最大。物体从赤道沿径线向两极移动，它的重力就随着纬度的增加而增加。

此外，物体的重力还和所在处的地质构造有关。如果地下密度较大，物体所受引力要大些，重力加速度就比较大些。所以，在地球表面各处的重力加速度并不处处相等。

1199．地球上纬度相同但离地心距离不同的地方，重力加速度是否都相等？

[解答]不相等。因为在离地面深处（地球内部），重力加速度和物体到地心的距离成正比，愈近地心重力加速度就愈小。在地心处地球对物体的引力为零，重力加速度当然也为零。在地球上空，重力加速度和物体到地心的距离平方成反比，愈远离地心，重力加速度愈小。因此地球上纬度相同的地方，物体在地球表面上重力加速度最大。

设在地球表面上的重力加速度为 g，物体到地球中心的距离为 r，根据万有引力定律和力的叠加原理可证得：当$r<R$时，$g'=G\cdot\frac{4}{3}\pi\rho r$；当$r=R$时，$g'=g$；当$r>R$时，$g'=G\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^3/r^2$（ρ为地球的平均密度），如图所示图中 O 为地球中心，R 为地球半径。

1200．有人说：“我国曾经创造过举重世界记录的运动员陈镜开，如果他到月球上去表演举重，他的成绩将远远超过现有的记录。”这个讲法对不对，为什么？

[解答]假设他能举起的重量不变的话，在月球上他就能举起质量更大

的物体。因为$m_{地}g_{地}=m_{月}g_{月}$（分别是他在地球和月球上举起的质量），所以$m_{月}>m_{地}$。这个讲法是对的。

1201．人造地球卫星轨道半径（轨道可看成圆）越大，它环绕速度和向心加速度是变大还是变小？为什么？

[解答]人造地球卫星的环绕速度和向心加速度都变小。因为环绕速度和轨道半径的平方根成反比($v=\sqrt{\frac{GM}{R}}$)，向心加速度和轨道半径的平方成反比($a=\frac{GM}{R^2}$)。所以人造地球卫星轨道半径越大，它环绕速度和向心加速度都变小。

1202．应用于电视转播的同步通讯卫星，为什么只能有一种高度和一种速率？又只能在赤道上方而不可能在其他地区的上方？

[解答]电视转播的通讯卫星的周期和地球自转的周期相同且相对于地球停留在固定位置，因为

$$G\frac{Mm}{(R+h)^2}=m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}(R+h),$$

$$h=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}-R。$$

式中R为地球半径，T为地球自转周期，G为引力恒量，M为地球质量。这些都是常量，所以只有一种高度；又$v=\frac{2\pi}{T}(R+h)$，所以只有一种速率。

卫星在赤道上方的运动周期和地球自转的周期相同且运动轨道平面在赤道平面上，离开地面一定高度，所以相对于地球停留在固定位置上。如不在赤道上方，卫星绕地球运动的周期虽和地球自转周期相同，但运动轨道平面和地球赤道平面间有夹角，相对于地球来讲，位置要发生变化。所以同步通讯卫星只能在赤道上方而不可能在其他地区上方。

1203．试用开普勒第三定律和万有引力定律证明：(1)星体的开普勒恒量只和星体自身的质量有关：(2)证明太阳的近似质量$M=2.0\times10^{30}$千克。（已知太阳的开普勒恒量$k=3.354\times10^{18}$米^3/秒^2）

[证明](1)如果有一颗质量为m的物体围绕质量为M的星体运动，轨道半径为R，周期为T，运动速度为v，则有

$$m\frac{v^2}{R}=G\frac{Mm}{R^2}。$$

以$v=\frac{2\pi R}{T}$代入上式，整理后得

$$\frac{R^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2},$$

$$k=\frac{R^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}。$$

其中$\frac{G}{4\pi^2}$是常数，所以k（开普勒恒量）只决定于星体的质量M。

(2)根据第(1)小题有

$$M=\frac{4\pi^2 k}{G}=\frac{3.354\times10^{18}\times4\pi^2}{6.67\times10^{-11}}\text{千克}$$

$=2.0\times10^{30}$千克。

1204．假定行星绕太阳运行的轨道都是圆，试证行星绕太阳转动周期的平方和轨道半径的立方成正比。

[证明]设 M 为太阳的质量，m 为行星的质量，R 为行星轨道的半径，T 为周期，太阳对行星的引力就是行星绕太阳转动的向心力。则有

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\cdot\frac{4\pi^2}{T^2}R,$$

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM}。$$

其中G是万有引力恒量，那么$\frac{4\pi^2}{GM}$也是一个恒量，这个恒量的值取决于太阳的质量，用$k=\frac{4\pi^2}{GM}$代入上式，那么

$$\frac{T^2}{R^3}=k。$$

这就说明行星绕太阳周期的平方和轨道半径的立方成正比。

1205．设物体在距地心为 r 处的重力加速度为 g_r，试根据万有引力定律和牛顿第二定律证明：$g_r=\frac{R^2}{r^2}\cdot g$。（式中R为地球的平均半径，r>R，g 为地球表面处的重力加速度）

[证明]设物体的质量为 m，地球的质量为 M，则根据万有引力定律有

$$F_r=G\frac{Mm}{r^2}；F_R=G\frac{Mm}{R^2}。$$

根据牛顿第二定律有

$$F_r=mg_r；F_R=mg。$$

因为 $G\cdot\frac{Mm}{r^2}=mg_r；G\cdot\frac{Mm}{R^2}=mg$。

$$G\cdot M=g_r r^2；GM=gR^2。$$

所以

$$g_r r^2=gR^2。$$

$$\frac{g_r}{g}=\frac{R^2}{r^2},$$

$$g_r=\frac{R^2}{r^2}\cdot g。$$

1206．求证：在地球表面上空 h 高度处，作圆周运动的人造地球卫星周期$T=2\pi(R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}}$。（G为万有引力恒量，M为地球质量，R为地球半径，m 为卫星质量。）

[证明]人造卫星在离地面 h 高处受到的引力就是向心力，因此有

$$G \cdot \frac{Mm}{(R+h)^2} = m \cdot \frac{v^2}{R+h} = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot (R+h),$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 (R+h)^3}{GM}$$

$$T = 2\pi (R+h)\sqrt{\frac{R+h}{GM}}。$$

1207．试用万有引力定律证明，在地面上同一个地点，质量不同的物体重力加速度是相等的。

[证明]设两个物体的质量各为 m_1 和 m_2，地球半径为 r，地球质量为 M，质量为 m_1 的物体受到地球的引力为 F_1。根据万有引力定律有

$$F_1 = G\frac{m_1 M}{r^2} \qquad (1)$$

质量为 m_2 的物体受到地球的引力为 F_2。则有

$$F_2 = G\frac{m_2 M}{r^2} \qquad (2)$$

设 m_1 和 m_2 在同一个地点的重力加速度分别为 g_1 和 g_2，根据牛顿第二定律有

$$F_1 = m_1 g_1 = G\frac{m_1 M}{r^2}，\ g_1 = G\frac{M}{r^2}。$$

$$F_2 = m_2 g_2 = G\frac{m_2 M}{r^2}，\ g_2 = G\frac{M}{r^2}。$$

即 $$g_1=g_2。$$

1208．试证明：物体从地球表面移向地球球心时，它所受的引力和离地心的距离成正比。（设地球物质的密度是均匀的）

[证明]设质量为 m 的物体放在地球内任一点 A 处，过 A 点作一半径为 r 且和球面同心的小球面，如图(a)所示。小球面把物体 A 受到的引力分成两部分：一部分是小球面以内的物质对物体的引力；另一部分是地球表面跟小球面之间的物质对物体的引力。

前一部分的引力可由万有引力定律得出

$$F = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \cdot m}{r^2} = \frac{4}{3}Gm \cdot \pi r\rho。$$

即在球体内部物体所受引力和物体离开地心的距离成正比。

“球层”中的物质对物体的引力应该是“球层”各部分物质对物体的引力的矢量和。

在整个“球层”上取足够薄的“薄层”，然后取其中两小块体积$\triangle V_1$和$\triangle V_2$，如图(b)所示。$\triangle V_1$和$\triangle V_2$是过 A 点的对顶锥体上截取的离地表距离相等的簿层，当$\triangle V_1$和$\triangle V_2$足够小时，可以近似地看作圆台。

已知圆台的体积公式

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2),$$

其中 R_1 和 R_2 分别是上、下两底面的半径。当圆台很小很薄时，且 H<<a，H<<b 时，$R_1 \approx R_2 \approx R$，那么

$V=\pi HR^2$。

对$\triangle V_1$，$R=a\sin\theta$，对$\triangle V_2$，$R=b\sin\theta$。

$\triangle V_1=\pi Ha^2\sin^2\theta$，$\triangle m_1=\rho\pi Ha^2\sin^2\theta$。

$\triangle V_2=\pi Hb^2\sin^2\theta$，$\triangle m_2=\rho\pi Hb^2\sin^2\theta$。

根据万有引力定律

$$\triangle F_1=G\frac{\triangle m_1 m}{a^2}=G\frac{m\rho\pi Ha^2\sin^2\theta}{a^2}=m\rho\pi H\sin^2\theta,$$

$$\triangle F_2=G\frac{\triangle m_2 m}{b^2}=G\frac{m\rho\pi Hb^2\sin^2\theta}{b^2}=m\rho\pi H\sin^2\theta。$$

所以$\triangle F_1=\triangle F_2$，即两小块体积的物质对物体的引力相等。至于方向，从图示可见，是正好相反、且两者合力为零。这样层层分割，对整个“球层”作同样推理，证明了“球层”中的地球物质对物体的引力的矢量和为零。所以物体在地球内任何一点处所受到的引力$F=\frac{4}{3}Gm\pi r\rho$。其中$\frac{4}{3}G\pi\rho$为常数，用 k 表示。所以 F=kmr，F 和 r 成正比。

功和能

功和功率

填充题

1209．放在粗糙水平地面上的某物体，在 10 牛的水平拉力作用下，以 3 米/秒的速度匀速移动 5 秒钟，则拉力共做了150 焦的功，拉力的功率为 30 瓦。

1210．用竖直向上的力将 60 牛重的物体向上匀速举高 0.5 米，然后在水平方向上匀速移动 1.5 米，则该力所做的功为 30 焦。

1211．功率为 60 千瓦的汽车以 36 千米/小时的速度匀速行驶 15 分钟，它共做功 5.4×10^7焦。

1212．把一根横卧在地面上的长 6 米质量为 20 千克的粗细均匀铁管子竖直立起来，需要对它做功 588 焦。

1213．质量 5 千克的物体挂在跨过定滑轮的绳子的一端，用力拉绳的另一端使物体从静止出发上升 2 米，这时物体的速度为 2 米/秒（设绳与滑轮的摩擦不计），则拉力所做的功是 108 焦。

1214．质量为 2 千克的物体放在摩擦系数为 0.5 的水平地面上，用和地面成 37°角、大小为 10 牛的力拉物体使其从静止出发移动 5 米，则拉力对物体做功 40 焦；摩擦力对物体做功－34 焦；在 2 秒末时拉力的即时功率为 9.6 瓦。（sin37°=0.6，cos37°=0.8。）

1215．两艘质量均为 m 的小船 A 和 B，静止在河面上并相隔一定距离，一人站在 A 船上用绳子以恒力 F 拉 B 船，水的阻力不计，则当 B 船开始运动后经过t秒钟，人做的功为$\frac{F^2t^2}{m}$。t秒末时人所发出的即时功率为$\frac{2F^2t}{m}$。

1216．有一个质量为 2 千克的物体。用 25 牛的力从静止出发竖直向上拉物体，使物体匀加速上升。已知 2 秒末时物体的速度为 5 米/秒，则拉力做功 125 焦；重力做功－100 焦；2 秒钟内拉力的平均功率为 62.5 瓦。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

1217.以 200 米/秒的水平速度从离地 30 米高处抛出一质量为 1 千克的物体，2 秒内重力做功为 200 焦；2 秒末时重力的即时功率为 200 瓦。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

1218．质量为 m 的物体放在水平地面上，受到和水平面成 30°角、大小为 $\frac{1}{2}$mg的力作用，第一次是拉，如图(a)所示；第二次是推，如图(b)所示。已知物体和地面间的摩擦系数为μ，物体克服摩擦力所做的功第一次和第二次相等，第一次物体移动的距离为 s，则第二次物体移动的距离为0.6s，摩擦系数μ的大小不能超过 $\frac{\sqrt{3}}{5}$。

1219．体积为 5×10^{-3} 米 ^{3}，密度为 0.6×10^{3} 千克/米 ^{3} 的木块从 2 米深的水底上升到水面，已知木块上升时作匀加速运动，加速度为 5 米/秒 ^{2}，则上升过程中，浮力做功 100 焦；重力做功－60 焦；水对木块的阻力做功－10 焦。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

1220.质量为 m 的物体在离水平地面 h 高处的圆弧槽上 A 点自静止出发滑下，由于受圆弧槽和地面的摩擦作用到达 B 点时静止。现将物体从 B 处拉回到 A，如果拉回时物体所受的摩擦力不变，至少需要做功 2mgh。

1221．汽车以速度 v 沿倾角为θ的斜坡匀速上驶。如果保持功率不变，它能以 3v 大小的速度在这个斜坡上匀速下驶，则汽车和斜坡间的摩擦系数为 2tgθ。

1222．利用一个动滑轮，将 340 牛重的物体匀速举高 0.5 米，已知滑轮的效率为 85%，则拉力做了 200 焦的功，拉力的大小为 200 牛。

1223．利用一个动滑轮和一个定滑轮组成滑轮组，滑轮组的机械效率为 80%，要将 360 牛重的物体举高 1 米，拉力至少要做 450 焦功，拉力的最小值应为 150 牛。

1224．利用滑轮组来提起重物，已知重物重量和所用拉力的比为 3，滑轮组的效率为 60%，当拉力移动 5 米时，重物被举起的高度为 1 米。

1225.用平行于斜面的力将重 500 牛的物体从斜面底匀速推到斜面顶端，已知斜面的长为 4 米高为 0.8 米，机械效率为 80%，则推力的大小为 125 牛；推力所做的功为 500 焦。

1226．质量为 m 的物体放在倾角为θ的斜面上。已知斜面和物体间的摩擦系数为 tgθ，物体在沿斜面向上的推力作用下移动 l 距离，这时推力做的功为 2mglsinθ；斜面的机械效率为 50%。

1227．辘轳轴的直径为 20 厘米，摇臂的把到轴线的垂直距离为 0.5 米，辘轳的机械效率为 75%。利用它来提起 150 牛重的物体，在把上要加 40 牛的力。

1228．直径为 0.2 米的轴上绕有每米重 2 牛的绳子，还有 10 米长一段没有绕上，如果轴以 240 转/分的转速匀速转动将绳全部绕到轴上，要做功 100 焦；平均功率为 25.13 瓦。

选择题

1229．在光滑水平面和粗糙水平面上推车，如果所用的推力相同并通过相同的路程，则推力对车所做的功是

(a)一样大；

(b)在光滑水平面上所做的功较大；

(c)在粗糙水平面上所做的功较大；

(d)要由小车通过这段路程的时间来决定。

答(a)

1230．用轻质硬棒和小球 m 作成单摆，在摆动过程中不考虑任何损耗，则对小球做功的情况是

(a)重力和弹力都对 m 做功；

(b)只有重力做功；

(c)只有棒的拉力做功；

(d)没有力做功。

答(b)

1231．同一物体在重力作用下沿着三条不同的轨道从 A 滑到 B，已知物体和三条轨道间的摩擦系数相同，则重力对物体的做功情况是

(a)沿轨道 I 做功最少；

(b)沿轨道 II 做功最少；

(c)沿轨道 III 做功最少；

(d)沿三条轨道做功一样大小。

答(d)

1232．利用如图所示的动滑轮装置，将重物 G 匀速提起 h 高度，滑轮的重力和摩擦都不计。在提起重物的过程中，第一次使绳的夹角 θ_1 保持不变，第二次使绳的夹角改变为 θ_2，$\theta_2>\theta_1$，并且仍保持不变。则第二次拉力所做的功

(a)比第一次多；

(b)比第一次少；

(c)同第一次相同，

(d)不能确定比第一次多还是少。

答(c)

1233．倾角为θ的斜面上有一个质量为 m 的物体，在水平推力 F 的作用下移动了距离 s。如果物体和斜面间的摩擦系数为μ，则推力所做的功为

(a)$Fs\sin\theta$；

(b)$Fs\cos\theta$；

(c)$\mu mgs\cos\theta$；

(d)$(mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)s$。

答(b)

1234．如图所示，物体在力 F_1 和 F_2 作用下从静止开始移动 2 米。下列哪一种情况，力对物体做的功最多？

(a)F_1=8 牛，F_2=0；

(b)F_1=8 牛，F_2=8 牛，θ=120°；

(c)F_1=6 牛，F_2=8 牛，θ=90°；

(d)F_1=6 牛，F_2=6 牛，θ=60°。

答(d)

1235．放在光滑水平地面上的静止物体，在水平拉力 F_1 的作用下，移动了距离 s，如果拉力改为和水平成 30°的力 F_2，移动的距离为 2s。已知拉力 F_1 和 F_2 所做的功相等，则 F_1 和 F_2 的大小的比为

(a)2∶1； (b)$\sqrt{2}$∶1；

(c)3∶1； (d)$\sqrt{3}$∶1。

答(d)

1236．弹簧的原长为 l，倔强系数为 k，用力把它拉到伸长量为△l，拉力所做的功为 W_1。继续拉伸，弹簧再伸长△l，拉力在继续拉伸的过程中所做的功为 W_2（均在弹性限度内），则 W_1∶W_2 为

(a)1∶1； (b)1∶2；

(c)1∶3； (d)1∶4。

答(c)

1237．起重机的吊钩下挂着质量为 m 的木箱，如果木箱以加速度 a 匀减速下降了高度 h，则木箱克服钢索拉力所做的功为

(a)mgh； (b)m(g－a)h；

(c)m(g+a)h； (d)m(a－g)h。

答(c)

1238．质量为 m 的物体沿光滑斜面由静止开始下滑，斜面的倾角为θ。当它在竖直方向下降 h 高度时，重力的即时功率为

(a)$mg\sqrt{2gh}$； (b)$mg\sqrt{2gh}\cos\theta$；

(c)$mg\sqrt{2gh\sin\theta}$； (d)$mg\sqrt{2gh}\sin\theta$。

答(d)

1239．有一质量为 m 的物体静止在倾角为θ的斜面上。物体和斜面间的摩擦系数为μ，现将斜面在水平面上向右作匀速直线移动，移动的距离为 l，如图所示。

(1)斜面作用于物体的弹力所做的功为

(a)0； (b)$mgl\cos^2\theta$

(c)$mgl\sin^2\theta$； (d)$-mgl\sin\theta\cos\theta$。

答(d)

(2)摩擦力对 m 做的功为

(a)0； (b)$-\mu mgl\cos^2\theta$

(c)$mgl\sin\theta\cos\theta$； (d)$-mgl\sin^2\theta$。

答(c)

1240．A、B 两斜面，高度相等，长度 l_A＞l_B。质量相等的物体分别在拉力的作用下匀速地从斜面底拉到斜面的顶端。如果两物体和斜面间的摩擦力是相等的，则这个斜面的机械效率

(a)η_A＞η_B； (b)η_A=η_B；

(c)η_A＜η_B； (d)不能确定。

答(c)

1241．飞机、轮船运动时受到的阻力并不固定。当速度很大时，阻力和速度的平方成正比，这时要把飞机、轮船的最大速度增大到 2 倍，发动机的输出功率要增大到原来的

(a)2 倍；　　　　　　　　(b)4 倍；

(c)6 倍；　　　　　　　　(d)8 倍。

答(d)

1242.放在水平地面上的物体在力 F 作用下沿着力的作用线通过地面上 A、B 两点。在这过程中，哪些说法哪些是正确的？

(a)物体作匀速直线运动，通过 AB 两点时的速度越大，力 F 做的功也越多；

(b)物体作匀速直线运动，通过 AB 两点时的速度越大，但力 F 做的功不变；

(c)物体作匀速直线运动，通过 AB 两点时的速度越大，力 F 的功率也越大；

(d)物体作匀速直线运动，通过 AB 两点时的速度越大，但力 F 的功率不变。

1243．质量为 m 的物体，受力 F 作用，在粗糙水平面上运动，下列说法哪些是正确的？

(a)如果物体作匀加速运动，则 F 一定对物体作正功；

(b)如果物体作匀减速运动，则 F 一定对物体作负功；

(c)如果物体作匀减速运动，则 F 可能对物体作正功；

(d)如果物体作匀减速运动，则 F 可能对物体不作功。

答(a)、(c)、(d)

1244．下列几种说法，哪些是正确的？

(a)物体在作匀变速直线运动时，一定有外力对物体做功；

(b)物体在作变速直线运动时，一定有外力对物体做功；

(c)物体在作匀速圆周运动时，一定有外力对物体做功；

(d)物体在作变速圆周运动时，一定有外力对物体做功。

答(a)、(b)、(d)

1245．静止在光滑水平面上的物体在力 F 的作用下，从 A 点移到 B 点，下列说法哪些是正确的？

(a)F 越大，它所做的功一定越多；

(b)物体的加速度越大，力 F 所做的功一定越多；

(c)如果要使物体到达 B 点时的速度为原来速度的 2 倍，则力 F 所做的功要增加到原来的 4 倍；

(d)如果要使物体到达 B 点的时间为原来的 2 倍，则力 F 所做的功要减少一半。

答(b)、(c)

1246．在粗糙斜面顶端系一弹簧，弹簧的下端挂一物体，物体在 A 点时处于平衡状态，如图所示。现用平行于斜面的向下拉力作用于物体，第一次直接将物体拉到 B 点，第二次将物体先拉到 C 点然后再回到 B 点，则在两次拉物体的过程中

(a)弹簧的弹力对物体所做的功相等；

(b)弹簧的弹力对物体所做的功不相等；

(c)重力对物体所做的功相等；

(d)重力对物体所做的功不相等；

(e)摩擦力对物体所做的功相等；

(f)摩擦力对物体所做的功不相等。

答(a)、(c)、(f)

1247．以恒力 F 推物体使它在粗糙水平面移动一段距离，力 F 所做的功为 W_1，平均功率为 P_1。以相同的恒力推该物体使它在光滑水平面移动相同的距离，此时力 F 所做的功为 W_2，平均功率为 P_2，则下列结论中哪些是正确的？

(a)$W_1>W_2$；　　(b)$W_1=W_2$；

(c)$W_1<W_2$；　　(d)$P_1>P_2$；

(e)$P_1=P_2$；　　(f)$P_1<P_2$。

答(b)、(f)

1248．水平力 F_1 作用在某物体上，使该物体以水平速度 v_1 匀速移动距离 s_1。水平力 F_2 作用在另一物体上，使该物体以水平速度 v_2 匀速移动距离 s_2，设 $F_2=2F_1$，$v_2=\frac{1}{3}v_1$，$s_2=\frac{1}{2}s_1$，F_1 所做的功为 W_1，功率为 P_1，F_2 所做的功为 W_2，功率为 P_2，则下列结论哪些是正确的？

(a)$W_1>W_2$；　　(b)$W_1=W_2$；

(c)$W_1<W_2$；　　(d)$P_1>P_2$；

(e)$P_1=P_2$；　　(f)$P_1<P_2$。

答(b)、(d)

1249．在相同的光滑斜面上，相同的物体不同外力作用下匀速通过相同的路程，如下列三个图所示。设 F_1 所做的功为 W_1，F_2 所做的功为 W_2，F_2 所做的功为 W_3。则下列结论哪些是正确的？

(a)W_2 最大；　　(b)W_1 最小；

(c)W_3 最小；　　(d)$W_1=W_2=W_3$。

答(d)

1250．设汽车行驶时所受的阻力和它的速率成正比，如果汽车以 v 的速率匀速行驶时发动机的功率为 P，好么当它以 2v 的速率匀速行驶时，它的功率是

(a)P；　　(b)2P；

(c)3P；　　(d)4P。

1251．如果站在向上运动的自动扶梯上的人，他同时沿着阶梯匀速地向上走，那末人在相同位移下，自动扶梯的发动机所消耗的功和它的功率的变化情况是

(a)消耗的功增加；　　(b)消耗的功减少；

(c)消耗的功不变；　　(d)功率增加；

(e)功率减少；　　(f)功率不变。

答(b)、(f)

计算题

1252．木匠用 100 牛的力拉锯，锯条从这边拉到另一边的距离是 50

厘米，每拉一锯，锯条深入 3 毫米，要想把 30 厘米厚的木头锯断，需做多少功？

[解答]每拉一次，木匠需做的功

$$W_1=F\cdot s=100\times 0.5\text{ 焦}=50\text{ 焦},$$

因为每拉一次，锯条深入3毫米，所以30厘米厚的木头需要锯$\frac{300}{3}=100$次才能锯断，木匠需做的总功

$$W=100W_1=5000\text{ 焦}。$$

1253．A、B 两物体用细绳连接着，放在水面上，用水平力 F 拉 A 物体，使 A 和 B 一起以 v=5 米/秒的速度匀速前进，这时细绳的张力 T=20 牛。现在用水平力 F＇只拉 A 物体使它也以 v=5 米/秒的速度匀速前进，这时 F＇的功率为 200 瓦。求 F 的功率应为多大？

[解答]已知 F＇的功率为 200 瓦，速度为 5 米/秒，根据 P=Fv，可得$F'=\frac{P'}{v}=\frac{200}{5}\text{牛}=40\text{牛}$。由于物体A作匀速运动，它所受的摩擦力应等于拉力，即 f=F＇。

当 A 和 B 连接时，两个物体都作匀速运动。对物体 A 来说在水平方向受三个力作用，F 向左，f 和 T 向右，而且 F=f+T=(40+20)牛=60 牛。因为两个物体同样以 v=5 米/秒速度匀速运动，所以 F 的功率为 P=Fv=60×5 瓦=300 瓦。

1254．用平行于斜面的力 F 拉物体，使物体沿光滑斜面向上匀速移动了一段距离 s。已知斜面的长 l=10 米，高 h=2 米，拉力所做的功 W=40 焦，拉力的功率 P=8 瓦，物体的重力 G=50 牛，求：

(1)拉力的作用时间 t；(2)拉力 F 的大小；(3)物体移动的距离 s；(4)物体移动的速度 v。

[解答](1) $t=\frac{W}{P}=\frac{40}{8}\text{秒}=5\text{秒}$；

(2)在光滑斜面上匀速移动，Fl=Gh；

$$F=\frac{Gh}{l}=\frac{50\times 2}{10}\text{牛}=10\text{牛}；$$

(3)$W=Fs$ $s=\frac{W}{F}=\frac{40}{10}\text{米}=4\text{米}$；

(4) $v=\frac{s}{t}=\frac{4}{5}\text{米/秒}=0.8\text{米/秒}$。

1255．质量 m=4 吨的汽车，在平地上以 v_1=10 米/秒的速度匀速行驶。如果保持功率不变，匀速开到一斜坡上，坡度为每 100 米升高 15 米，则汽车的速度应改为 v_2=5 米/秒。假设汽车在斜坡上行驶时所受的摩擦阻力是平地上的 0.8 倍，问汽车的功率为多大？

[解答]设汽车的功率为 P，平地上所受的阻力为 f，当它匀速行驶时，牵引力 F_1=f，则有功率 P=fv_1。开上斜坡后，为了仍保持匀速，则牵引力=阻力+重力沿斜坡的分力，即$F_2=0.8f+\frac{15}{100}mg$，

功率为 $P=F_2v_2=(0.8f+\frac{15}{100}mg)v_2$。

所以 $fv_1=(0.8f+\frac{15}{100}mg)v_2$，

$$f=\frac{\frac{15}{100}mgv_2}{v_1-0.8v_2}=\frac{\frac{15}{100}\times4000\times9.8\times5}{10-0.8\times5}\text{牛}=4900\text{牛}，$$

$$P=fv_1=4900\times10\text{ 瓦}=49\text{ 千瓦。}$$

1256．某人利用如图所示的装置，以 F=100 牛的力作用于不计质量的细绳端，将重物从水平地面上的 A 点移到 B 点。已知 $a_1=30°$，$a_2=37°$，h=1.5 米。求力 F 对物体所做的功。

$$(\sin37°=\frac{3}{5})$$

[解答]设从滑轮到重物这一段绳子的长度在 A 点时为 l_1，在 B 点时为

l_2，则$l_1=\frac{h}{\sin30°}$，$l_2=\frac{h}{\sin37°}$。

重物从A点移到B点，绳子缩短$\triangle s=l_1-l_2=\frac{h}{\sin30°}-\frac{h}{\sin37°}$，而△s 就是力 F 在力的方向上移动的距离，所以力 F 所做的功为

$$W=F\cdot\triangle s=F\cdot h(\frac{h}{\sin30°}-\frac{h}{\sin37°})，$$

$$=100\times1.5(\frac{1}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{\frac{3}{5}})\text{焦}=50\text{焦。}$$

1257．某人将质量为 m 的物体竖直举到 h 高度。第一次他以速度 v 匀速举起，第二次由静止出发以 a=g/2 的加速度匀加速举起，当物体达到 h 高度时速度也为 v。如果第一次该人发出的功率为 P_1，第二次该人发出的平均功率为 P_2，求 P_1/P_2 的值。

[解答]第一次匀速举起物体时，该人所用的力 F=mg，则有

$$P_1=Fv=mgv。$$

第二次以$a=\frac{g}{2}$的加速度匀加速举起物体，该人所用的力$F'=mg+ma=\frac{3}{2}$

mg，平均速度为$\frac{v}{2}$，则有

$$P_2=\frac{3}{2}mg\cdot\frac{v}{2}=\frac{3}{4}mgv，$$

那么 $P_1/P_2=mgv/\frac{3}{4}mgv=\frac{4}{3}$。

1258．轮船以 36 千米/小时的速度航行时，发动机的平均功率为 8000 马力，推进器的效率为 75%，求轮船航行时受到的平均阻力。

[解答]航行速度 v=36 千克/小时=10 米/秒，

有效功率 $P=\overline{P}\cdot\eta=8000\times0.75\text{马力}=6000\text{马力}$

$$=6000\times735\text{ 瓦}=4410000\text{ 瓦；}$$

平均阻力 $\overline{F}=\frac{P}{v}=\frac{4410000}{10}$牛$=441000$牛。

1259．起重机能在 8 小时内把 3000 吨的建筑材料送到 9 米高的地方去。如果起重机的机械效率是 60%，问：带动起重机工作的电动机的输出功率应多大？如果电动机的输入功率是 16 千瓦，那么电动机的效率是多少？（g 取 10 米/秒²）

[解答]起重机的输出功率

$$P_{出}=\frac{F\cdot s}{t}=\frac{3000\times1000\times10\times9}{8\times3600}\text{瓦}=9375\text{瓦}；$$

起重机的输入功率

$$P_{入}=\frac{P_{出}}{\eta}=\frac{9375}{0.6}\text{瓦}=15625\text{瓦}=15.6\text{千瓦}；$$

起重机的输入功率是带动起重机工作的电动机的输出功率，而电动机的输入功率为 16 千瓦，

电动机的效率 $\eta'=\frac{15.6}{16}=97.5\%$。

1260．粗细均匀长 2 米、重为 G_1=40 牛的撬棒 AB，用它撬起重为 G_2=800 牛的物体。已知支点 O 离 A 端 0.4 米，物体作用在撬棒上的力的作用点离支点 0.2 米，如图所示。某人用竖直向下的力 F 作用在棒的 B 端将物体撬起 h=0.1 米高。求力 F 的大小和它所做的功。

[解答]从已知条件，可知撬棒的重心离支点 0.6 米，力 F 的作用点离支点 1.6 米，当物体升高 0.1 米时，撬棒的重心要下降 h_1=0.3 米，F 的作用点要向下移动 h_2=0.8 米，由此可得

阻力功为 $W_{阻}=G_2h$，

动力功为 $W_{动}=G_1h_1+Fh_2$，

所以 $G_2h=G_1h_1+Fh_2$。

$$F=\frac{G_2h-G_1h_1}{h_2}=\frac{800\times0.1-40\times0.3}{0.8}\text{牛}=85\text{牛}，$$

力 F 所做的功为 $W=Fh_2$=85×0.8 焦=68 焦。

1261．长 1.6 米的杠杆，支点在离挂重物端 0.4 米处，另一端装有机械效率为 80%的滑轮组，如图所示。滑轮组的下端挂一个重 240 牛的物体，用力 F 拉绳使物体匀速上升，这时杠杆保持平衡，则另一端所挂的重物为多少牛？

[解答]先求出力 F 的大小，设物体上升的高度为 h，则

$$\eta=\frac{240h}{F\cdot2h}，$$

$$F=\frac{240}{2\times0.8}\text{牛}=150\text{牛}；$$

杠杆左端受 3F 力的作用，即受到 3×150 牛=450 牛的向下作用力。设重物的重为G，则在杠杆保持平衡时$G=\frac{450\times1.2}{0.4}$牛$=1350$牛。

1262．质量 m=60 千克的人站在同滑轮组连接的吊架上，吊架重力不计，滑轮组的机械效率η=80%。这人利用自己拉绳的方式使吊架匀速地升

高 s=2 米，如图所示。则拉绳的力是多少？如果要使吊架以 a=1 米/秒 ^{2} 的加速度匀加速上升 s=2 米,则人拉绳的力是多少？这人拉绳所做的功是多少？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解答]设人拉绳的力为 F，当吊架匀速上升时，有用功 $W_{有}$=mgs，拉力对吊架所做的功 $W_{总}$=3Fs；

$$\eta=\frac{W_{有}}{W_{总}}=\frac{mgs}{3Fs},$$

$$F=\frac{mg}{3\eta}=\frac{60\times10}{3\times0.8}牛=250牛。$$

当吊架作匀加速上升时，则 3η 要大于 mg，

$$3\eta F-mg=ma,$$

$$F=\frac{m(g+a)}{3\eta}=\frac{60\times(10+1)}{3\times0.8}牛=275牛。$$

拉力所做的功 $W_{总}$=3Fs=3×275×2 焦=1650 焦。

1263．一个轮轴，轴的直径 d=20 厘米，把手长 l=60 厘米，加在把手一端的力 F=250 牛，可提起质量 m=120 千克的物体，求轮轴的机械效率。若轮轴的转速为 n=3 转/秒时,轮轴的有用功率为多少？(g 取 10 米/秒 ^{2})

[解答]当轮轴转动一周时，力 F 所做的功

$W_{总}$=F·2πl，有用功 $W_{有}$=mg·πd，

机械效率 $$\eta=\frac{W_{有}}{W_{总}}=\frac{mg\cdot\pi d}{F\cdot2\pi l}=\frac{mgd}{2Fl}$$

$$=\frac{120\times10\times20}{2\times250\times60}=\frac{24000}{30000}=80\%。$$

有用功率 $$P_{有}=\frac{W_{有}}{t}=mg\pi dn$$

=120×10×3.14×0.2×3 瓦=2261 瓦=2.26 千瓦

1264．举重螺旋把手长 l=40 厘米，螺距 d=0.5 厘米，用它来举起 G=8000 牛的重物。如果机械效率η=20%，则加在把手端的力为多大？

[解答]设加在把手上的力为 F，当 F 移动一周时，动力所做的功 $W_{总}$=F·2πl，有用功 $W_{有}$=Gd，

则 $$\eta=\frac{W_{有}}{W_{总}}=\frac{Gd}{2\pi Fl},$$

$$F=\frac{Gd}{2\pi l\eta}=\frac{8000\times0.5\times10^{-2}}{2\times3.14\times0.4\times0.2}牛=80牛。$$

1265．如图装置的轮轴，轮的直径 a=50 厘米，粗轴的直径 b=12 厘米，细轴的直径 c=10 厘米，同时绕轴心 OO′转动。跨过动滑轮两边的绳子分别绕在粗细二轴上，滑轮的下端挂一重物 G=500 牛。已知整个装置的机械效率η=40%。要使重物匀速上升，需用多大的力 F 去拉绕在轮上的绳。

[解答]当用力 F 拉绳使轮轴转动一周时，滑轮左边绕在细轴上的绳子放下的长度为πc，滑轮右边绕在粗轴上的绳子上升的长度为πb，所以

滑轮上升的高度为$\frac{1}{2}\pi(b-c)$，即重物G上升$\frac{1}{2}\pi(b-c)$。力F移动的距离为πa，则有用功为$G\cdot\frac{1}{2}\pi(b-c)$，总功为$F\cdot\pi a$，

$$\eta=\frac{G\cdot\frac{1}{2}\pi(b-c)}{F\cdot\pi a},$$

$$F=\frac{G(b-c)}{2a\eta}=\frac{500(12-10)}{2\times50\times0.4}\text{牛}=25\text{牛}。$$

1266．差动滑轮装置如图所示。两个连在一起的定滑轮同轴转动，绳在滑轮上不滑动。设拉力为 F，重物为 G，大定滑轮半径为 R，小定滑轮半径为 r，怎样计算省力情况和机械效率？

[解答]当拉力 F 拉大的定滑轮转一周时，重物 G 上升的高度为$\frac{1}{2}(2\pi R-2\pi r)$，所以它的机械效率为

$$\eta=\frac{G\times\frac{1}{2}(2\pi R-2\pi r)}{F\times2\pi R}=\frac{G(R-r)}{2FR}。$$

当$\eta=1$时，$F=\frac{G(R-r)}{2R}$。由此可知

当 R 一定时，r 的半径越接近于 R 越省力。

1267．摩擦传动中传动速度比为 1∶6，主动轮的速度为 120 转/分，从动轮的直径为 0.2 米，如果所传递的功率 1.57 千瓦，那么作用在从动轮边缘上的力有多大？

[解答]从动轮的转速为$n=\frac{1}{6}\times120\text{转/分}=20\text{转/分}=\frac{1}{3}\text{转/秒}$；轮边缘的线速度为$v=\pi\times0.2\times\frac{1}{3}\text{米/秒}$；设作用在从动轮边缘的力为F，则

$$F=\frac{P}{v}=\frac{1570}{\pi\times0.2\times\frac{1}{3}}\text{牛}=7500\text{牛}。$$

1268．有一台水泵，它每秒钟可把质量 m=80 千克的水抽到 h=10 米高处，水泵的效率η_1=80%，g 取 10 米/秒^2。求：

(1)水泵抽水时所需的功率；

(2)现有一台效率η_2=85%的电动机，用它来带动这台水泵，求电动机的输入功率。

[解答](1)水泵的效率 $\eta_1=\frac{W_{有}}{W_{总}}=\frac{P_{有}}{P_{总}}$，

水泵抽水时所需的总功率

$$P_{总}=\frac{P_{有}}{\eta_1}=\frac{mgh}{\eta_1}=\frac{80\times10\times10}{0.8}\text{瓦}=10000\text{瓦}=10\text{千瓦}。$$

(2)水泵的输入功率（即$P_{总}$）就是电动机的输出功率，已知电动机的效率η_2=85%，则

电动机的输入功率 $P_{总}=\dfrac{P_{出}}{\eta_2}=\dfrac{10}{0.85}$千瓦$=11.8$千瓦。

1269．弹簧原来的长度 l_0=15 厘米，受 40 牛拉力作用，伸长到 l_1=20 厘米。问拉力对弹簧做了多少功？

[解答]本题是变力做功问题。弹簧从 15 厘米伸长到 20 厘米的过程中，伸长量 $x=l_1-l_0$=5 厘米，作用力从零增大到 40 牛，当拉力是线性增大时，平均作用力为

$$\overline{F}=\frac{0+F}{2}=\frac{0+40}{2}\text{牛}=20\text{牛},$$

拉力对弹簧所做的功

$$W=\overline{F}x=20\times0.05\text{焦}=1\text{焦。}$$

1270．用铁锤将钉子击入木板。如果钉子受木板的阻力与进入木板的深度成正比，铁锤每次打击时所做的功相等。在击第一次时钉子进入木板的深度为 2 厘米，那末击第二次时，钉子进入木板的深度为多少？

[解答]设钉子受木板的阻力为 f，击入的深度为 x，则 f=kx；第一次打击时，木板对钉子的平均阻力$f_{平}=\dfrac{0+f}{2}=\dfrac{0+kx}{2}$，铁锤打击钉子所做功 W 等于钉子克服木板对它的阻力所做的功

即 $$W=f_{平}\cdot x=\frac{1}{2}kx^2\text{。}$$

第二次打击时，设钉子再进入的深度为 x'，则第二次打击时，钉子受木板的平均阻力为

$$f_{平}'=\frac{kx+k(x+x')}{2}\text{，则}W=f_{平}'\cdot x'=\frac{kx+k(x+x')}{2}x'\text{，}$$

所以 $$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}k(x+x+x')x'\text{，}x^2=2xx'+x'^2\text{，}$$

将 x=2 厘米代入得

x'=0.83 厘米。

1271．在倾角θ=37°的斜面上，某人利用如图所示的滑轮组，用力 F 拉绳 A 端将一个质量 m=10 千克的物体以 v_0=0.5 米/秒的速度匀速上滑。已知物体的斜面间的摩擦系数μ=0.40，绳和滑轮的重力以及摩擦力都不计。（sin37°=0.6，cos37°=0.8，g 取 10 米/秒²），求：(1)拉力 F 的大小；(2)力 F 的功率；(3)该装置的机械效率。

[分析]在求力 F 的大小时，先分析物体在上滑过程中的受力情况，物体共受四个力作用：重力 mg，弹力 N=mgcosθ，绳的拉力 2F，滑动摩擦力 f=μmgcosθ。当物体匀速上滑时，所受合外力为零。力 F 功率的大小可根据 P=Fv 来计算，但要注意 v 是指力 A 端移动的速度。它等于物体移动速度的 2 倍，即 $v=2v_0$。

[解答](1)　2F=mgsinθ+μmgcosθ，

$$F=\frac{mg}{2}(\sin\theta+\mu\cos\theta)=\frac{10\times10}{2}(0.6+0.4\times0.8)\text{牛}=46\text{牛；}$$

(2)$P=Fv=2Fv_0=2\times46\times0.5$ 瓦=46 瓦；

(3)设物体的位移为 s，则

机械效率$\eta=\frac{有用功}{总功}=\frac{mgs\sin\theta}{2Fs}=\frac{10\times10\times0.6}{2\times46}=65.2\%$。1

1272．平面上有质量 m_A=20 千克和 m_B=30 千克的物体 A 和 B，它们跟平面间的摩擦系数 μ_A=0.25、μ_B=0.5，AB 间连接一根质量不计、尚未发生形变、倔强系数 k=200 牛/米的弹簧，如图所示。现用水平拉力 F 作用在 B 上，当物体 A 沿力的方向缓慢地匀速移动 s=10 米时，则该力所做的功为多少？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[分析]设物体 A 和 B 在滑动时所受的摩擦力分别为 f_A 和 f_B。当拉力 F $\geq f_B$ 时物体 B 才开始运动。随着 B 的运动，弹簧逐渐伸长，F 也要相应地增大，当 F 增大到使弹簧的伸长量为 x 时弹簧的弹力 F_A=kx。又当 $F_A=f_A$ 时，物体 A 也开始运动。为了使 A 保持匀速运动，F 不能再增大。从 B 开始运动起到 A 匀速移动 s=10 米的过程中，力 F 所做的功等于物体 A 克服摩擦所做的功 f_As；物体 B 克服摩擦所做的功 $f_B(s+x)$和拉伸弹簧使它伸长力所做的功三者的和。

[解答] $f_A=\mu_A m_A g=0.25\times20\times10$ 牛=50 牛，

$f_B=\mu_B m_B g=0.5\times30\times10$ 牛=150 牛，

$$x=\frac{F_A}{k}=\frac{50}{200}米=0.25米，$$

$$W=f_As+f_B(s+x)+\frac{0+kx}{2}\cdot x$$

$$=[50\times10+150(10+0.25)+\frac{1}{2}\times200\times0.25^2]焦$$

$=2.04\times10^3$ 焦。

1273.由电动机带动的吊车将密度为 8.0×10^3 千克/米 ^{3},体积为 0.10 米 ^{3} 的金属块从 8.0 米深的河底吊到水面。如果电动机的最大输出功率为 15 千瓦，吊车的效率为 80%，上升时水对金属块的平均阻力为金属块重力的 0.10。问：

(1)吊车能否保持 8.0×10^3 牛的拉力将金属块吊到水面？

(2)金属块上升时能达到的最大速度为多少？这时吊车的拉力多大？

(3)如果开始时吊车用 8.6×10^3 牛的拉力，当金属块的速度达到 1.0 米/秒时，即将拉力减小，使金属块保持 1.0 米/秒的速度匀速上升到水面，则吊车在全过程中的平均功率为多大？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解答](1)从电动机的最大输出功率为 15 千瓦和吊车的效率为 80%，可知吊车的最大输出功率为

P=15×80%千瓦=12 千瓦。

金属块在上升过程中已知受四个力的作用，即重力 G=8.0×10^3 牛，阻力 f=$0.1\times8.0\times10^3$ 牛，水对金属块的浮力 F '=$0.1\times10^3\times10=1.0\times10^3$ 牛，吊车对金属块的拉力 F=8.0×10^3 牛。金属块所受的合外力 $F_合$=$(8.0\times10^3+1.0\times10^3-8.0\times10^3-8.0\times10^2)$牛=200 牛，方向向上。

金属块上升的加速度$a=\frac{F_合}{m}=\frac{200}{800}米/秒^2=0.25米/秒^2$。

如果吊车保持 8.0×10^3 牛拉力不变，则金属块上升到水面时的速度

$$v=\sqrt{2as}=\sqrt{2\times\frac{1}{4}\times 8}\text{米}/\text{秒}=2\text{米}/\text{秒}。$$

由于受吊车的最大输出功率的限制，在拉力为 8.0×10^3 牛时，金属块的速度不能超过

$$v_1=\frac{P}{F}=\frac{12000}{8000}\text{米}/\text{秒}=1.5\text{米}/\text{秒}，$$

所以吊车不能保持 8.0×10^3 牛的拉力不变,即当金属块速度达到 1.5 米/秒时，必须将拉力减小，否则吊车的输出功率就会超过额定值。

(2)在保持电动机的输出功率为某一定值的条件下，F 最小时，v 最大。要使金属块从河底上升到河面，吊车的最小拉力 F=G+f－F'，

即　F=(8.0×10^3+8.0×10^2－1.0×10^3)牛=7.8×10^3 牛。

这时金属块的速度

$$v_m=\frac{12000}{7800}\text{米}/\text{秒}=1.54\text{米}/\text{秒}。$$

(3)开始时金属块上升的加速度

$$a=\frac{F_{\text{合}}}{m}=\frac{8.6\times10^3-7.8\times10^3}{800}\text{米}/\text{秒}^2=1.0\text{米}/\text{秒}^2，$$

当它速度达到 1.0 米/秒时，拉力作用的时间

$$t_1=\frac{v}{a}=1.0\text{秒}，$$

金属块上升的距离

$$s=\frac{1}{2}at^2=0.50\text{米}，$$

金属块以 1.0 米/秒速度匀速上升到水面的时间

$$t_2=\frac{8-0.5}{1}\text{秒}=7.5\text{秒}，$$

这时拉力应为 7.8×10^3 牛，因此吊车在这过程中的平均功率

$$P=\frac{W}{t}=\frac{8600\times0.5+7800\times7.5}{1+7.5}\text{瓦}=7388\text{瓦}=7.4\text{千瓦}。$$

1274．如图，质量为 m 的物体放在倾角为θ斜长为 l 的斜面底端，物体和斜面间的摩擦系数μ=tgθ。问：

(1)要将物体沿斜面拉到斜面的顶端，至少要用多大的力？力的方向如何？

(2)要将物体从斜面底沿斜面拉到斜面顶，拉力至少要做多少功？这个拉力的大小和方向又如何？

[解答](1)设拉力为 F 和斜面成α角。当物体匀速上滑时，F 有最小值。

$$F\cos\alpha=mg\sin\theta+\mu(mg\cos\theta-F\sin\alpha)，$$

$$F=\frac{mg(\sin\theta+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos\theta)}{\cos\alpha+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\alpha}=\frac{2mg\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha}$$

$$=\frac{mg\sin2\theta}{\cos(\theta-\alpha)}，\text{当}\theta=\alpha\text{时，F有最小值，}$$

最小值 $F=mg\sin 2\theta$。

(2)物体匀速上滑时，拉力所做的功等于物体克服重力做功与克服摩擦力做功的和，因此要使拉力所做的功最少，只要物体克服重力和摩擦力所做的功最少，所以当摩擦力为零时，拉力所做的功等于物体克服重力所做的功，这时拉力所做的功最少，即物体实际上只受拉力和重力二个力的作用而作匀速运动。因此拉力 F 的大小为 mg，方向与重力方向相反，它所做的功 $W=mgl\sin\theta$。要注意：物体在斜面底时一定要有一个沿斜面向上的初速度，才能匀速地被拉到斜面顶。

解本题还可以设拉力 F' 的方向与斜面成 α' 角，要使摩擦力为零，必须物体所受的弹力等于零，因此

$$F'\sin\alpha'=mg\cos\theta \qquad (1)$$

$$F'\cos\alpha'=mg\sin\theta \qquad (2)$$

从(1)式和(2)式可得

$$\mathrm{tg}\,\alpha'=\mathrm{ctg}\,\theta，\ \alpha'=90°-\theta，$$

即 F' 和重力方向相反，代入(2)式

$$F'=\frac{mg\sin\theta}{\cos\alpha'}=\frac{mg\sin\theta}{\cos(90°-\theta)}=mg。$$

1275．上题中，如果通过如下图所示的装置来拉这个物体，绳的一端固定在斜面顶，绳子跨过固定在物体上的滑轮，拉力作用在绳的另一端，如果要使拉力做功最少，拉力的大小和方向应如何？

[解答]要使拉力所做的功最少，必须满足两个条件，一是物体匀速上滑，二是滑动摩擦力为零，因此 $F\sin\alpha=mg\cos\theta$，

$$F+F\cos\alpha=mg\sin\theta；$$

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}，\ \cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta=-\cos\theta，$$

$$\cos(\alpha+\theta)=-\cos\theta=\cos(180°-\theta)，得\ \alpha=180°-2\theta。$$

$$F=\frac{mg\cos\theta}{\sin\alpha}=\frac{mg\cos\theta}{\sin(180°-2\theta)}=\frac{mg\cos\theta}{\sin 2\theta}=\frac{mg}{2\sin\theta}。$$

讨论：如果 $\theta<45°$，则 $\alpha>90°$，即拉力偏向后；

$\theta=45°$，则 $\alpha=90°$，即拉力与斜面垂直；

当 $\theta=30°$，$F=mg$；

$\theta>30°$ 时，$F<mg$。

1276．用每米重 40 牛的钢索从 h=50 米深的矿井中匀速拉起 m=1 吨的物体，求拉力做了多少功？（g 取 10 米/秒^2）

[解答]把拉力所做的功 W 分成拉力对物体所做的功 W_1 和拉力对钢索所做的功 W_2。前者是恒力做功，$W_1=mgh=1000\times10\times50$ 焦$=5\times10^5$ 焦；后者是变力做功，因为钢索总重为 40×50 牛=2000 牛，所以开始时拉力为 $F_1=2000$ 牛，最后拉力 $F_2=0$，平均拉力为 $F=\frac{F_1+F_2}{2}=1000$ 牛，

$W_2=1000\times50$ 焦$=5\times10^4$ 焦；$W=W_1+W_2=5\times10^5$ 焦$+5\times10^4$ 焦$=5.5\times10^5$ 焦。

1277．放在地面上的物体上端系在倔强系数为 k=400 牛/米的弹簧上，弹簧的另一端拴在跨过定滑轮的绳子上，如图所示。手拉绳的另一端，当往下拉 10 厘米时，物体开始离开地面，继续拉绳，使物体匀速升高到

离地 h=0.5 米高处，如果不计弹簧的重和滑轮跟绳的摩擦，则拉力共做功多少？

[解答]设 W_1 为力 F 拉弹簧伸长 0.1 米时所做的功。开始时，拉力为零；伸长0.1米时，拉力$F_1 = kx$，在这过程中平均力为$\frac{0+kx}{2}$，所做的功$W_1 = \frac{1}{2}kx^2$。这时物体开始离开地面，说明物体的重力$G = F_1$，物体匀速升高到离地 0.5 米高的过程中是恒力做功，F=G。设 W_2 为这过程中力 F 所做的功，则 $W_2=Gh=kxh$。

所以力 F 所做的功

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}kx^2 + kxh = \frac{1}{2}kx(x+2h)$$
$$= \frac{1}{2} \times 400 \times 0.1(0.1+1)\text{焦} = 22\text{焦。}$$

1278．水平板上放着一块质量 m=2 千克的物体，现将水平板沿着 AB 方向以加速度 a=4 米/秒 ^{2}，从 A 点移到 B 点，AB 的距离 s=2 米，AB 和竖直方向的夹角 θ=60°，如图(a)所示。求：

(1)摩擦力对物体所做的功；

(2)弹力对物体所做的功。

[解答]要求摩擦力和弹力对物体所做的功，首先要求出摩擦力和弹力的大小。物体在运动过程中，受重力 mg、弹力 N 和摩擦力 f 三个力的作用。把加速度 a 分解成水平加速度 a_x 和竖直向下加速度 a_y，如图(b)所示。根据牛顿第二定律，水平加速度 a_x 是由于物体受水平静摩擦力的作用而产生的，竖直向上加速度 a_y，则由于物体受重力和弹力的合力作用而产生的，

所以 $f=ma_x=ma\sin\theta$

$$= ma\sin 60° = 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\text{牛} = 4\sqrt{3}\text{牛；}$$

$$mg - N = ma_y；$$

$$N = mg - ma_y = m(g - a\cos 60°)$$

$$= 2\ (9.8 - 4 \times \frac{1}{2})\text{牛} = 15.6\text{牛。}$$

(1)摩擦力对物体所做的功

$$W_f = fs\sin\theta = 4\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\text{焦} = 12\text{焦。}$$

(2)弹力对物体所做的功为

$$W_N = Ns\cos(180° - \theta) = -Ns\cos\theta = -Ns\cos 60°$$
$$= -15.6 \times 2 \times \frac{1}{2}\text{焦} = -15.6\text{焦}$$

即物体克服弹力做了 15.6 焦的功。

1279．图为测定电动机输出功率的装置。在电动机的转轴上有一个半径 r=0.2 米的转轮，在转轮上套上一条皮带，皮带一端挂一重力 G=50 牛的物体，皮带另一端有一个一端固定的弹簧秤。当电动机以 n=50 转/秒的

转速运动时，弹簧秤的示数 F_1=85.0 牛，弹簧秤自重不计。求电动机的输出功率。

[解答]$P=Fv=(F_1-G)\times 2\pi nr$

$=(85.0-50)\times 2\times 3.14\times 50\times 0.2$ 瓦=2198 瓦。

1280．32 吨自卸载重大卡车的最大输出功率 P=400 马力，在水平路面上行驶时的速度 v=43.2 千米/小时。问它的最大牵引力有多大？上坡行驶时驾驶员应如何调节它的速度？

[解答]计算前先统一单位制，P=400 马力=294000 瓦，v=43.2 千米/小时=12 米/秒，所以卡车在该速度下行驶时的最大牵引力

$$F=\frac{P}{v}=\frac{294000}{12}\text{牛}=24500\text{牛。}$$

当卡车上坡时，由于除克服摩擦阻力做功外还要克服重力做功，卡车的牵引力必须比平路上增大。但卡车的输出功率却受最大输出功率的限制。因此，P 不变，牵引力 F 和速度 v 成反比。所以驾驶员必须减速，才能增大牵引力，使卡车向上行驶。

1281．质量 m=4 吨的卡车额定输出功率 P=80 马力。当它从静止出发开上坡度为 0.05（即每 100 米长升高 5 米）的斜坡时，坡路对卡车的摩擦阻力为车重的 0.1 倍。（g 取 10 米/秒 ^{2}）问：

(1)卡车能否保持牵引力为 8000 牛不变在坡路上行驶。

(2)卡车在坡路上行驶时能达到的最大速度为多大？这时牵引力为多大？

(3)如果卡车用 4000 牛的牵引力以 12 米/秒的初速度上坡，当卡车到达坡顶时速度为 4 米/秒，那么卡车在这一段路程中的最大功率是多大？平均功率是多大？到达坡顶时的即时功率多大？

[解答]已知坡度为 0.05，坡路对卡车的摩擦阻力为车重的 0.1 倍，所以摩擦力

$$f=0.1\times 4000\times 10\text{ 牛}=4000\text{ 牛，}$$

卡车上坡时重力沿坡路的分力为

$$G_1=mg\sin\theta=mg\times 0.05=2000\text{ 牛。}$$

当牵引力 F 大于 $f+G_1$（即 4000 牛+2000 牛=6000 牛）时，卡车能加速开上坡路，

$$a=\frac{F-(f+G_1)}{m}=\frac{8000-6000}{4000}\text{米/秒}^2=0.5\text{米/秒}^2\text{。}$$

由于额定输出功率的限制，在 8000 牛牵引力作用下卡车的速度不能超过

$$v=\frac{P}{F}=\frac{80\times 735}{8000}\text{米/秒}=7.35\text{米/秒，}$$

因此在足够长的坡路上超过

$$s=\frac{v^2}{2a}=\frac{7.35^2}{2\times 0.5}\text{米}=54\text{米，}$$

卡车就不能保持牵引力为 8000 牛不变。在坡路上行驶到速度为 7.35 米/秒时，发动机的牵引力必须开始减少，如果继续以 0.5 米/秒 ^{2} 的加速度加速，输出功率就要超过额定值。

(2)从公式 P=Fv，当 P 保持最大输出功率 80 马力不变，v 要达到最大，则 F 要最小，即牵引力 F 等于卡车受到的总阻力 $f+G_1$=(4000+2000)

牛$=6000$牛时，这时卡车的速度$v=\frac{80\times735}{6000}$米/秒$=9.8$米/秒。

(3)如果卡车以 4000 牛牵引力，以 12 米/秒的初速度上坡，由于牵引力小于总阻力 6000 牛，卡车在坡路上作匀减速运动。在这段路程中卡车的最大功率 P_1=4000×12 瓦=48000 瓦=65.3 马力；平均功率 P_2=4000

$(\frac{12+4}{2})$瓦$=32000$瓦$=43.5$马力；到达坡顶时的即时功率$P_3=4000\times4$瓦=16000 瓦=21.6 马力。

1282．机车和列车的总质量 m=500 吨，机车的功率不变 P=600 千瓦，火车与轨道间的摩擦系数 μ=0.01，空气阻力不计。求：

(1)当车速 v_1=1 米/秒时和车速 v_2=10 米/秒时火车的加速度；

(2)火车的最大速度。

[分析]由公式 P=Fv，当 P 不变时 F 与 v 成反比，所以车速小时牵引力大，车速大时牵引力小。火车在行驶时阻力不变，故车速小时火车所受合外力大，车速大时火车所受合外力小。当速度达到一定值后，牵引力正好等于阻力，这时合外力为零。从牛顿第二运动定律可知，车速小时加速度大，车速大时加速度小，车速达到最大值时，加速度为零。

[解答](1)$F_{合}=F-\mu mg=ma$，

$F=\mu mg+ma$，

$P=Fv=(\mu mg+ma)\cdot v$，

整理得 $a=\frac{1}{m}(\frac{P}{v}-\mu mg)$。

已知 P=600 千瓦=6×10^5 瓦，m=500 吨=5×10^5 千克，μ=0.01。

当 v_1=1 米/秒时

$$a_1=\frac{1}{5\times10^5}(\frac{6\times10^5}{1}-0.01\times5\times10^5\times9.8)\text{米/秒}^2$$

≈1.1 米/秒^2。

当 v_2=10 米/秒时

$$a_2=\frac{1}{5\times10^5}(\frac{6\times10^5}{10}-0.01\times5\times10^5\times9.8)\text{米/秒}^2$$

≈0.022 米/秒^2。

(2)当 F=μmg 时 a=0，牵引力最小，火车的速度最大。

$$P=\mu mgv,$$

$$v=\frac{P}{\mu mg}=\frac{6\times10^5}{0.01\times5\times10^5\times9.8}\text{米/秒}\approx12.2\text{米/秒}。$$

说理和论证题

1283．在厘米·克·秒制中，功的单位叫做尔格，1 尔格是 1 达因的力使物体在力的方向上发生 1 厘米的位移所做的功，试证明：

1 焦耳=10^7 尔格。

[证明]因为 1 达因=1 克·厘米/秒^2，而 1 牛顿=1 千克·米/秒^2，故

1 牛顿=10^5 达因。

1 焦耳=1 牛顿·米=10^5 达因·10^2 厘米=10^7 达因·厘米=10^7 尔格。

1284．一个小孩把 3.0 千克的货物沿着高 0.50 米、长 2.0 米的光滑斜面，由底部匀速推到顶端。在计算小孩做多少功时，有两种不同的答案：

(1)W=3.0×9.8×2.0 焦=59 焦；

(2)W=3.0×9.8×0.50 焦=15 焦。

你认为哪个答案对？说明你的理由。

[解答]答案(2)是对的，因为在光滑斜面上由底部匀速推到顶端，不论推力的方向如何，都是克服重力做功。

1285．在公路上作变加速直线运动的平板车，当平板车的加速度逐渐增大到某一数值时，车上的物体将相对平板车滑动。试分别讨论在这过程中物体和平板车间的摩擦力对车和物体的做功（正功或负功）情况。

[解答]当物体在车上还没有相对滑动时，物体与车之间有静摩擦力作用。对物体来说静摩擦力做正功，对车来说静摩擦力做负功。当物体与车间发生滑动以后，物体与车之间有滑动摩擦力作用。这个滑动摩擦力对物体仍是做正功，对车来说仍是做负功。

1286．当列车匀速行驶时，车厢里的人用很大的力、很长的时间推车厢的前壁，有人说，这人对车厢做了很多功，因为 F 很大，在很长时间中车厢的位移也很大。这种说法对吗？

[解答]不对，因为他的手用力 F 推车厢前壁时，脚同时用同样大小的力 F 向后推车厢。以地面为参照系，手对车厢做的正功，数值上等于脚对车厢做的负功。所以人对车厢来讲，所做的总功为零。

1287．试证明用平行于斜面的力把物体从倾角为θ，摩擦系数μ=sinθ的斜面上匀速向上拉时，斜面的机械效率

$$\eta=\frac{1}{1+\cos\theta}。$$

[证明]设物体的质量为 m，在斜面上移动的距离为 l，那末有用功 $W_{有}=mgl\sin\theta$。当拉力 F 沿斜面将物体匀速上拉时，$F=mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta=mg\sin\theta(1+\cos\theta)$，

因此总功　$W_{总}=mgl\sin\theta(1+\cos\theta)$

$$\eta=\frac{W_{有}}{W_{总}}=\frac{mgl\sin\theta}{mgl\sin\theta(1+\cos\theta)}=\frac{1}{1+\cos\theta}。$$

1288．劈尖的夹角为θ，劈的机械效率为η，如图所示。用它顶一个质量为 m 的物体竖直匀速上升。试证明加在劈背上的水平力

$$F=\frac{mg\,\mathrm{tg}\,\theta}{\eta}$$

[证明]设劈面长为 l，高为 h。当物体匀速上升 h 时，有用功 $W_{有}=mgh=mgl\sin\theta$，力 F 所做的功 $W_{总}=Fl\cos\theta$，

$$\eta=\frac{W_{有}}{W_{总}}=\frac{mgl\sin\theta}{Fl\cos\theta}=\frac{mg}{F}\mathrm{tg}\,\theta，$$

所以

$$F=\frac{mg\,\mathrm{tg}\,\theta}{\eta}。$$

图线和作图题

1289．用两个定滑轮和两个动滑轮组成滑轮组，用它来提起 G=560 牛重的货物。已知滑轮组的效率η=70%，问拉力至少要多大？并绘出滑轮组的示意图。

[解答]用如图所示装置，拉力 F 为最小，现设货物被提高 h 米，那么拉力 F 移动的距离为 5h，

根据 $\eta=\frac{W_{有}}{W_{总}}$ 得 $\eta=\frac{Gh}{F\cdot 5h}$

解得 F=160 牛。

1290．用三个动滑轮组成滑轮组，要求拉力为物体重力的 1/8 就可使物体匀速上升（滑轮和绳的重力、摩擦都不计）。绘出它的示意图，并用功的原理加以证明。

[解答]如图所示，当物体 G 同滑轮 III 一起升高 h 时，动滑轮 II 要向上移动 2h，而当动滑轮 II 向上移动 2h 时，则动滑轮 I 要向上移动 4h，而动滑轮 I 向上移动 4h 时，则力 F 要向上移动 8h。当滑轮和绳的重力、摩擦都不计时，即滑轮组的机械效率为 100%。根据功的原理，动力功等于阻力功，即 $F\cdot 8h=G\cdot h$，$F=\frac{1}{8}G$。

1291．图为力对物体做功的 F-s 图，求该力在 10 米位移内共做了多少功？

[解答]根据力-位移图线下方的面积表示力所做的功，可知前 5 米是变力做功，后 5 米是恒力做功。做功的数值等于三角形的面积加矩形的面积，

$$W=(\frac{1}{2}30\times5+20\times5)\text{焦}=175\text{焦}。$$

1292．质量 m=4 千克的物体，从静止出发在水平地面上受到水平力 F 的作用。已知物体和地面的摩擦系数μ=0.75，图为物体运动时的 v-t 图。问力 F 在 4 秒内所做的功为多少？第 4 秒内的平均功率为多大？(g 取 10 米/秒 ^{2})

[分析]要求力 F 在 4 秒内所做的功和第 4 秒内的平均功率,首先要求出力 F 的大小。从 v-t 图可以看出物体作匀加速运动，加速度 a=tgθ，再分析物体受力情况，可知道物体所受的合外力为 F－μmg，根据牛顿第二定律 F－μmg=ma，从而求出 F 的大小来。

[解答]从 v-t 图 a=tgθ，则 F－μmg=ma，

$$F=\mu mg+ma=m(\mu g+tg\theta)=4(0.75\times10+\frac{5}{2})\text{牛}=40\text{牛}，$$

设 4 秒内物体的位移为 s，从图中可看出

$$s=\frac{4\times10}{2}\text{米}=20\text{米}，$$

所以 4 秒内力所做的功 W=Fs=40×20 焦=800 焦，第 4 秒内的平均功率

$$P=F\bar{v}=F\frac{v_3+v_4}{2}=40\times\frac{7.5+10}{2}\text{瓦}=350\text{瓦}。$$

1293．质量 m=1 千克的物体，在光滑水平面上受水平力 F 的作用。力 F 的即时功率和速度的关系，如图所示。求物体运动时的加速度和 2 秒钟内力 F 所做的功。

[解答]从图线是直线可知

$$F=\frac{P}{v}=\frac{40}{8}\text{牛}=5\text{牛。}$$

根据牛顿第二定律

$$a=\frac{F}{m}=5\text{米}/\text{秒}^2\text{，}$$

2秒钟内的位移 $s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times5\times2^2\text{米}=10\text{米}$，

2 秒钟内力 F 所做的功 W=Fs=5×10 焦=50 焦。

1294．质量 m=2 千克的物体，放在水平地面上，在 10 牛的水平力作用下，它的 s-t 图线如图所示。求该物体在 4 秒钟内克服摩擦所做的功和 4 秒内拉力的平均功率。

[解答]从图线可知物体作匀速运动，速度 $v=\frac{s}{t}=\frac{20}{4}\text{米}/\text{秒}=5\text{米}/\text{秒}$，作匀速运动时，摩擦力=拉力

即 f=10 牛，

4 秒钟内的位移 s=vt=5×4 米=20 米，

克服摩擦所做的功 W=fs=10×20 焦=200 焦，

平均功率 $P=\frac{W}{t}=\frac{200}{4}\text{瓦}=50\text{瓦。}$

1295．物体的质量 m=2 千克，图(a)是它的 v-t 图，图(b)是它的 F-s 图。试求：

(1)在 0~5 秒内、6~10 秒内、11~15 秒内 F 分别做了多少功？

(2)F 的最大功率是多大？15 秒内的平均功率是多大？

[解答](1)在 0~5 秒内从 v-t 图可知物体作初速度为零的匀加速运动。5 秒内的位移是 2.5 米。再从 F-s 图中可知在这段位移中，物体所受的力为 0.8 牛，因此在 0~5 秒内做了 2 焦的功。

在 6~10 秒内物体作匀速运动。位移为 5 米，作用力为 0.4 牛。因此在 5~10 秒内做了 2 焦功。

在 11~15 秒内物体作匀减速运动。从 F-s 图中可知这时 F=0，所以没有做功。

(2)比较两图线的值，可知在 5 秒末时，F 最大，等于 0.8 牛。速度也最大，等于 1 米/秒。因此这时 F 的功率最大，P=Fv=0.8×1 瓦=0.8 瓦。

15秒内的平均功率 $N=\frac{W}{t}=\frac{2+2+10}{15}\text{瓦}=0.27\text{瓦。}$

1296．质量 m=2 千克的物体放在摩擦系数μ=0.1 的水平地面上，在水平拉力的作用下，拉力所做的功和位移的关系如 W-s 图线所示。试从图线分析这物体的运动情况。并求出

(1)拉力在作用过程中的平均功率以及它的最大即时功率；

(2)物体克服摩擦力共做了多少功？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[分析]从图线的 OA 段，可知做功与位移成正比，说明拉力 F_1 是恒力，

$F_1=\frac{W}{s}=\frac{15}{3}$牛$=5$牛。由于物体运动时所受的摩擦力$f=\mu mg=0.1\times2\times10$牛=2 牛，因此物体所受的合外力 $F_合=F_1-f=(5-2)$牛=3 牛。所以 OA 段表示物体作匀加速直线运动，加速度$a=\frac{F_合}{m}=\frac{3}{2}$米/秒$^2=1.5$米/秒^2。物体到达位移为3米处时的速度$v_3=\sqrt{2as}=\sqrt{2\times1.5\times3}$米/秒$=3$米/秒，到达位移3米处的时间$t_1=\sqrt{\frac{2v_3}{a}}=\sqrt{\frac{2\times3}{1.5}}$秒$=4$秒。

分析图线的AB段，可知拉力F_2仍为恒力，$F_2=\frac{W}{s}=\frac{12}{6}$牛$=2$牛。由于 $F_2=f$，所以 AB 段表示物体作匀速直线运动，速度为 3 秒末时的速度，即$v_{匀速}=v_2=3$米/秒。物体作匀速运动的时间$t_2=\frac{s}{v}=\frac{9-3}{3}$秒$=2$秒，物体到达位移为 9 米处时，拉力不再做功，即拉力已撤去，物体在摩擦力 f 的作用下作匀减速运动，最后静止。

[解答](1)从图线中可知拉力共做功 27 焦，所用的时间为 $t_1+t_2=(4+2)$秒=6 秒，因此

拉力的平均功率　　　$P_平=\frac{W}{t}=\frac{27}{6}$瓦$=4.5$瓦。

当 F 和 v 都最大时，它的即时功率也最大，

(2)从 O 到 B 物体所受摩擦力 f=2 牛，而位移为 9 米，所以物体克服摩擦力做的功

$$W_f=f\cdot s=2\times9\text{焦}=18\text{焦},$$

物体到达位移为 9 米处时，虽然拉力撤去，但物体要继续克服摩擦力做功，直到静止。

物体在摩擦力作用下作匀减速运动$a'=\frac{-f}{m}=-1$米/秒^2。

设它滑行s'后静止，则$s'=\frac{v^2}{2a'}=\frac{3^2}{2\times1}$米$=4.5$米。

物体在匀减速运动过程中克服摩擦所做的功

$$W_{f_2}=f\cdot s'=2\times4.5\text{焦}=9\text{焦},$$

所以物体克服摩擦力共做了(18+9)焦=27 焦的功。

动能　动能定理

填充题

1297．电子的质量是 9.1×10^{-31} 千克，它以 3×10^7 米/秒的速度由阴极射出，这个电子的动能是 <u>4.1×10^{-16}焦</u>。

1298．我国发射的第一颗人造地球卫星的质量是 173 千克，轨道速度为 7.2 千米/秒，则卫星的动能是 <u>4.48×10^9焦</u>。

1299．一个原来静止的物体，在力 F 的作用下，沿着力的方向移动一段距离 s，得到速度 v。如果移动的距离不变，力 F 增大到 n 倍，那末得到的速度增大到$\sqrt{n}$倍。

1300．质量为 2 吨的卡车，以 10 米/秒的速度在水平公路上行驶，突然紧急刹车，如果所受阻力是 5×10^4 牛，那么卡车滑行 2 米后停止。

1301．质量为 15 千克的小车在水平路面上滑行 18 米后速度从 10 米/秒减小到 8 米/秒，则小车所受的摩擦阻力为 15 牛。

1302．质量为 2 吨的汽车匀速前进时，牵引力为 1000 牛，如果牵引力变为 1400 牛，汽车原速度为 4 米/秒，经过 210 米距离，汽车的速度达到 10 米/秒。

1303．用 36 牛的水平力推一个 180 牛重的物体，使它在水平地面上匀速移动 30 米，则物体与地面的摩擦系数为 0.2；推力所做的功为 1080 焦。

1304．质量为 60 千克的人，站在离岸边 30 米远处质量为 240 千克的船上，他用 80 牛的力拉一根绳子，绳子的另一端系在岸边树上，水对船的阻力忽略不计，则船到达岸边时的速度为 4 米/秒，人发出的平均功率为 160 瓦，到达岸边时人的即时功率为 320 瓦。

1305．静止在光滑水平地面上的物体在水平力 F 作用下产生了位移 s，这时物体的速度为 v。

(1)保持位移 s 不变，要使物体的速度达到 nv，则水平拉力的大小应为 n^2F。

(2)如果平面不光滑，物体所受的摩擦力为 $\frac{1}{n}F$，要使物体速度达到 v，它的位移应为 $\frac{n}{n-1}s$。

(3)若保持位移 s 不变，摩擦力仍为 $\frac{1}{n}F$，则水平拉力应为 $\frac{n+1}{n}F$ 才能使物体的速度达到 v。

1306．物体作匀速圆周运动，半径为 R，具有的动能为 E_k，那么作用在物体上的合外力为 $2E_k/R$。该力在 1/4 周内对物体所做的功为 0。

1307．作自由落体运动的物体，降落了 1 米和 2 米时，物体的动能比 $E_{k_1}/E_{k_2}=1/2$。当降落 1 秒后和 2 秒后，物体的动能之比 $E_{k_1}/E_{k_2}=1/4$。

1308．子弹以某速度击中静止在光滑水平桌面上的木块，当子弹进入木块的深度为 x 厘米时，木块相对桌面移动的距离也是 x 厘米，则子弹和木块摩擦产生的热量和子弹损失动能的比为 1/2。

选择题

1309．甲乙两物体质量的比 m_1∶m_2=2∶1，速度的比 v_1∶v_2=1∶2，在相同的阻力作用下逐渐停下，则它们的位移 s_1∶s_2 是

(a)1∶1； (b)1∶2

(c)2∶1； (d)4∶1。

答(b)

1310．甲乙两汽车质量的比 m_1∶m_2=1∶2，在完全相同的水平路面上匀速行驶，它们的速度比 v_1∶v_2=2∶1，关闭发动机后，它们分别滑行了 s_1 和 s_2 的距离后静止，则 s_1∶s_2 为

(a)1∶2；　　　　　　　　(b)1∶1；
(c)2∶1；　　　　　　　　(d)4∶1。

答(d)

1311．汽车在平直公路上行驶，关闭发动机继续运动 s_1 距离后速度由 2v 变为 v，再运动 s_2 距离后速度由 v 变为 v/2。设运动时受到的阻力不变，则 s_2∶s_1 为

(a)1∶1；　　　　　　　　(b)1∶$\sqrt{2}$；
(c)1∶2；　　　　　　　　(d)1∶4。

答(d)

1312．物体在恒力作用下速度从 v 增加到 2v 时，物体移动的距离为 s_1；速度从 2v 增加到 4v 时，物体移动的距离为 s_2。设阻力不变，则 s_1∶s_2 为

(a)1∶1；　　　　　　　　(b)1∶$\sqrt{2}$；
(c)1∶2；　　　　　　　　(d)1∶4。

答(d)

1313．物体在恒力作用下移动 s 距离后，速度从 v 增加到 5v；继续移动 s 距离后，速度将增加到

(a)6v；　　　　　　　　(b)7v；
(c)10v；　　　　　　　　(d)10$\sqrt{2}$v。

答(b)

1314．一枪弹以速度 v 飞行恰好射穿一块钢板。如果枪弹的速度是原来的 3 倍，那么，可射穿上述钢板的数目为

(a)3 块；　　　　　　　　(b)6 块；
(c)9 块；　　　　　　　　(d)12 块。

答(c)

1315．质量相同的 A、B 两物体，它们的动能 $E_{KA}=4E_{KB}$，从同一个粗糙斜面底冲上斜面，在上滑到 C 点时，它们的动能分别为 E'_{KA} 和和 E'_{KB}，如果物体和斜面的摩擦系数相同，则

(a)$E'_{KA}=4E'_{KB}$；　　　　　　　　(b)$E'_{KA}>4E'_{KB}$；
(c)$E'_{KA}<4E'_{KB}$；　　　　　　　　(d)无法确定它们动能的大小关系

答(b)

1316．速度相同的 A、B 两物体，它们的动能 $E_{KA}=4E_{KB}$，从同一个粗糙斜面底冲上斜面，在上滑到 C 点时，它们的动能分别为 E'_{KA} 和和 E'_{KB}，如果两物体和斜面的摩擦系数相同，则

(a)$E'_{KA}=4E'_{KB}$；　　　　　　　　(b)$E'_{KA}>4E'_{KB}$；
(c)$E'_{KA}<4E'_{KB}$；　　　　　　　　(d)无法确定它们间动能的大小关系

答(a)

1317．A、B 两球质量相同，它们的密度 ρ_A 为 9×10^3 千克/米^3，ρ_B 为 3×10^3 千克/米^3，同时由静止出发从河面沉入到河底，水的密度 $\rho=10^3$ 千克/米^3 则它们到达河底时的动能 E_{KA}∶E_{KB} 是

(a)3∶1；　　　　　　　　(b)2∶1；

(c)3∶2；　　　　　　　　　　(d)4∶3。

答(d)

1318．A、B 两颗人造地球卫星，质量分别 m 和 2m，它们的轨道半径分别为 $r_A=2r_B$。则它们动能的比 E_{KA}∶E_{KB} 是

(a)1∶2；　　　　　　　　　　(b)1∶$\sqrt{2}$；

(c)1∶4；　　　　　　　　　　(d)2∶1。

答(c)

1319．一颗子弹以速度 v 射入到固定木块中，深度为 x 厘米，如要使子弹射入木块深度为 2x 厘米，设阻力不变则子弹的速度应为

(a)4v；　　　　　　　　　　(b)3v；

(c)2v；　　　　　　　　　　(d)$\sqrt{2}$v。

答(d)

1320．甲、乙、丙三物体质量分别为 m、2m、3m，动能相等，在水平面上沿着同一方向运动。假设作用于每个物体上的制动力相同，则它们制动距离的比是

(a)1∶2∶3；　　　　　　　　(b)1^2∶2^2∶3^2；

(c)1∶1∶1；　　　　　　　　(d)3∶2∶1。

答(c)

1321．卡车和拖车质量相同，在恒定的牵引力作用下，由静止出发前进 s 米后速度为 v 米/秒，阻力不计。这时拖车突然脱掉，卡车仍在原来牵引力作用下再行 s 米，则卡车的速度为

(a)$\sqrt{2}$v；　　　　　　　　　　(b)$\sqrt{3}$v；

(c)2v；　　　　　　　　　　(d)$3v^2$。

答(b)

1322．一个恒力 F 作用在正在粗糙水平面上运动着的物体上。如果物体作减速运动，则

(a)F 对物体一定做负功；　(b)F 对物体可能做负功；

(c)F 对物体一定做正功；　(d)F 对物体可能做正功；

(e)F 对物体可能不做功。

答(b)、(d)、(e)

1323．质量不等但有相同动能的两物体，在摩擦系数相同的水平地面上滑行直到停止，则

(a)质量大的物体滑行距离大；

(b)质量小的物体滑行距离大；

(c)它们滑行的距离一样大；

(d)质量大的滑行时间短；

(e)质量小的滑行时间短；

(f)它们克服摩擦力所做的功一样多。

答(b)、(d)、(f)

1324．人造地球卫星的质量为 m，轨道半径两倍于地球半径 R_0，即 $R=2R_0$，地面的重力加速度为 g，则

(a)卫星的速度为$\sqrt{2R_0g}$；　　(b)卫星的速度为$\frac{1}{2}\sqrt{2R_0g}$；

(c)卫星的动能为mR_0g；　　(d)卫星的动能为$\frac{1}{4}mR_0g$；

(e)卫星的周期为$2\pi\sqrt{\frac{2R_0}{g}}$；　　(f)卫星的周期为$4\pi\sqrt{\frac{2R_0}{g}}$。

答(b)、(d)、(f)

1325．在光滑水平地面上有一辆平板小车，车上放着一物体，物体在水平恒力 F 作用下从车一端拉到另一端，如图所示。第一次固定于地面上，第二次当物体移动时，由于摩擦力的作用小车也沿地面运动，在二次移动中，下列说法哪些是正确的？

(a)物体所受的摩擦力一样大；　(b)F 做的功一样多；

(c)第一次 F 做的功多；　(d)第二次 F 做的功多；

(e)物体获得的动能一样大；　(f)第一次物体获得的动能多；

(g)第二次物体获得的动能多。

答(a)、(d)、(g)

计算题

1326．水平地面上有一质量 m 为 0.5 千克的物体。水平恒力 F 为 2.5 牛，作用在物体上，使物体由静止出发开始运动。经过一段时间后，力 F 停止作用，物体继续滑行一段距离后静止。如果物体移动的总距离 s 为 4 米，物体和地面间的摩擦系数μ=0.2。求力 F 所做的功。（g 取 10 米/秒^2）

[解答]物体开始时动能为零，终了时动能也为零，所以$\triangle E_k=0$。

由功能定理　$W_{动}-W_{阻}==\triangle E_k$，

$W_{动}=W_{阻}=\mu mgs=0.2\times0.5\times10\times4$ 焦=4 焦，

即力 F 所做的功为 4 焦。

1327．质量 m 为 0.02 千克的子弹以 v_1 为 600 米/秒的速度垂直射穿一块厚度 s 为 10 厘米的固定木板，已知木板对子弹的平均阻力 f 为 2×10^4 牛。求子弹穿过木板后的速度 v_2 为多大？

[解答]根据动能定理

$$-fs=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2,$$

$$v_2=\sqrt{\frac{mv_1^2-2fs}{m}}=\sqrt{\frac{0.02\times600^2-2\times2\times10^4\times0.1}{0.02}}\text{米/秒}=400\text{米/秒}。$$

1328．质量 m 为 0.5 千克的小球，从离地面 h 为 20 米高处落下，着地时小球的速度 v 为 18 米/秒。求下落过程中空气对小球的平均阻力。

[解答]设空气对小球的平均阻力为 f，则小球下落过程中所受的合外力为 mg－f。根据动能定理

$$(mg-f)h=\frac{1}{2}mv^2-0,$$

$$f=mg-\frac{mv^2}{2h}=(0.5\times9.8-\frac{0.5\times18^2}{2\times20})\text{牛}=0.85\text{牛}$$

1329．质量为 4 千克的铅球从离沙坑面 h 为 1.8 米高处自由落下，铅球落入沙坑后在沙坑中运动的距离 s 为 0.2 米后静止。求沙坑对铅球的平均阻力。（g 取 10 米/秒 ²）

[解答]设铅球接触沙坑面时的速度为 v，则 $v^2=2gh$，铅球在沙坑中运动时受重力 mg 和沙坑对铅球的平均阻力 f 的作用，合外力为 f－mg。根据动能定理

$$(f-mg)s=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$f=\frac{\frac{1}{2}mv^2+mgs}{s}=\frac{\frac{1}{2}m\cdot 2gh+mgs}{s}$$

$$=\frac{mg(h+s)}{s}=\frac{4\times10\times(1.8+0.2)}{0.2}\text{牛}=400\text{牛}。$$

1330．以 v_0 的初速竖直上抛一个质量 m 为 0.1 千克的小球，当小球返回出发点时的速度大小为 $3v_0/4$。求小球受到空气的平均阻力为多大？（g 取 10 米/秒 ²）

[解答]首先对小球进行受力分析，在上升过程中，小球受重力 mg 和竖直向下的空气阻力 f 作用，这二个力的合力跟小球位移方向相反，是对小球做负功。设小球上升的高度为 h，根据动能定理

$$-(mg+f)h=0-\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (1)$$

在下落过程中，重力方向不变，阻力 f 方向变为竖直向上，所以重力对小球做正功，阻力对小球做负功。根据动能定理

$$(mg-f)h=\frac{1}{2}m(\frac{3}{4}v_0)^2 \qquad (2)$$

(1)式÷(2)式得 $\frac{mg+f}{mg-f}=\frac{v_0^2}{(\frac{3}{4}v_0)^2}=\frac{16}{9}$。

因为 mg=0.1×10 牛=1 牛，

所以 $\frac{1+f}{1-f}=\frac{16}{9}$，

$$f=\frac{7}{25}\text{牛}=0.28\text{牛}。$$

1331．物体由静止出发从倾角 θ 为30°、摩擦系数 μ_1为 $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 的斜面顶下滑到斜面底端，又在摩擦系数 μ_2 为 0.5 的水平地面上滑行一段距离后静止，如图所示。设物体在水平面上的初速即为物体滑到斜面底端时的速度，已知斜面长 l 为 10 米，求：

(1)物体滑到斜面底端时的速度，

(2)物体在水平地上滑行的距离。

[解答](1)物体在斜面上运动时，受重力、弹力和摩擦力的作用。弹力和位移垂直，不做功；重力对物体做正功；摩擦力对物体做负功。设物体

到斜面底端时的速度为v，物体的初动能$E_{K_1}=0$，末动能$E_{k_2}=\frac{1}{2}mv^2$，重力所做的功 $W_G=mgl\sin\theta$，摩擦力所做的功 $W_f=-\mu mgl\cos\theta$。

根据动能定理

$$mgl\sin\theta-\mu_1 mgl\cos\theta=\frac{1}{2}mv^2\text{。}$$

$$v=\sqrt{2gl\sin\theta-2\mu_1 gl\cos\theta},$$

$$=\sqrt{2\times9.8\times10\times\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2\sqrt{3}}\times9.8\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}\text{米}/\text{秒}$$

=7 米/秒。

(2)物体在水平地面上运动时，受重力、弹力和摩擦力的作用。重力和弹力都和位移方向垂直，所以不做功；只有摩擦力对物体做负功。在(1)中的末动能就是这个运动过程的初动能、末动能为零。设摩擦力为 f，则 $f=\mu_2 mg$，如果物体在地面上滑行的距离为 s，根据动能定理

$$-\mu_2 mgs=0-\frac{1}{2}mv^2,$$

$$s=\frac{v^2}{2\mu_2 g}=\frac{7^2}{2\times0.5\times9.8}\text{米}=5\text{米。}$$

1332．一物体从静止开始先沿倾角θ=45°的斜面下滑，路程 s_1 为 20 米；然后沿水平轨道运动，路程 s_2=20 米；最后又沿倾角α为 30°的轨道上滑 s_2 为 10 米的路程才停止。求物体与轨道间的滑动摩擦系数。（设三段轨道材料相同）

[解答]根据动能定理，整个运动过程中，初动能和末动能都为零，只有沿 45°斜面下滑的一段过程中重力对物体做正功，在其他各段中力对物体做负功或不做功。

$$mgs_1\sin45°=\mu mgs_1\cos45°+\mu mgs_2+\mu mgs_3\cos30°+mgs_3\sin30°,$$

$$mg(s_1\sin45°-s_3\sin30°)=\mu mg(s_1\cos45°+s_2+s_3\cos30°),$$

$$\mu=\frac{s_1\sin45°-s_3\sin30°}{s_1\cos45°+s_2+s_3\cos30°}=\frac{20\times\frac{\sqrt{2}}{2}-10\times\frac{1}{2}}{20\times\frac{\sqrt{2}}{2}+20+10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{10\sqrt{2}-5}{10\sqrt{2}+20+5\sqrt{3}}=0.21\text{。}$$

1333．如果每秒有 10^{16} 个电子撞击显像管的屏，每个电子从静止开始，经过足够大的电压加速，得到 $v=10^9$ 厘米/秒的速率。则维持这电子束要花费多少瓦的功率？（电子质量 $m_e=9.1\times10^{-31}$ 千克）

[解答]每个电子加速后获得的动能

$$E_k=\frac{1}{2}m_e v^2=\frac{1}{2}\times9.1\times10^{-31}\times(10^7)^2\text{焦}=4.55\times10^{-17}\text{焦}$$

$$\text{功率}P=\frac{W}{t}=\frac{10^{16}\times E_k}{t}=10^{16}\times4.55\times10^{-17}\text{瓦}=0.455\text{瓦。}$$

1334．显像管中在屏上引起图象的电子，是在大约 1 厘米的距离内从

静止加速到近似 $v=10^8$ 米/秒的速度。试对电子产生这加速度所需要的力和它的重力作比较。当电子击中屏幕时，它大约在 $s=10^{-7}$ 厘米的距离内停下。试对使电子停止和原来产生加速度的力作比较。（电子质量 $m_e=9.1\times10^{-31}$ 千克）

[解答]电子的初动能为零，使电子加速到 $v=10^3$ 米/秒所需的力假定为 F，则

$$Fs=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$F=\frac{mv^2}{2s}$$，电子的重力为 mg

$$\frac{F}{mg}=\frac{mv^2}{2smg}=\frac{v^2}{2sg}=\frac{10^{16}}{2\times0.01\times9.8}=5.1\times10^{16}。$$

可见，产生加速度所需要的力远大于重力。

设使电子停止下来的力为 F'，则

$$F'\cdot10^{-9}=\frac{1}{2}mv^2=F\times0.01,$$

$$F'=10^7F。$$

可见，使电子停下来的力远大于产生加速度的力。

1335．沿着与水平成60°角斜向上抛出一个动能 E_{k_0} 的物体。求物体到达最高点的过程中克服重力做了多少功？（不计空气阻力）

[解答]设物体抛出时的速度为 v_0，则 $E_{k_0}=\frac{1}{2}mv_0^2$，物体在最高点时的速度 $v_0\cos\theta=v_0\cos60°=\frac{v_0}{2}$，所以物体在最高点的动能 $E_{k_1}=\frac{1}{2}m(\frac{v_0}{2})^2=\frac{1}{4}E_{k_0}$。

设物体克服重力所做的功为 W_G，则

$$W_G=E_{k_0}-E_{k_1}=\frac{3}{4}E_{k_0}。$$

1336．一质量 $m=0.5$ 千克的物体，以 $v_0=4$ 米/秒的初速度沿水平桌面上滑过 $s=0.7$ 米的路程后落到地面。已知桌面高 $h=0.8$ 米，着地点距桌沿的水平距离 $s_1=1.2$ 米。求物体与桌面间的摩擦系数。（g 取 10 米/秒²）

[解答]从平抛运动公式可知物体落地时间

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times0.8}{10}}\text{秒}=0.4\text{秒},$$

抛出时的水平速度

$$v=\frac{s_1}{t}=\frac{1.2}{0.4}\text{米/秒}=3\text{米/秒}。$$

设物体和桌面的摩擦系数为μ，则摩擦力 $f=\mu mg$，根据动能定理，

$$-fs=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$-\mu mgs=\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2),$$

$$\mu=\frac{v_0^2-v^2}{2gs}=\frac{4^2-3^2}{2\times10\times0.7}=\frac{7}{14}=0.5。$$

1337．质量 m=1 千克的物体以初速度 v_0=3 米/秒作直线运动,第一次在运动方向上给物体加一个外力，使它的速度增加到 v_1=5 米/秒；第二次外力与初速度方向垂直，使它得到一个与原运动方向垂直的速度 v_2=4 米/秒；分别求出外力这二次所做的功。

［解答］　根据动能定理，外力所做的功等于物体动能的变化量，第一

$$w_1=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times5^2\text{焦}-\frac{1}{2}\times1\times3^2\text{焦}=8\text{焦}。$$

第二次，物体的未速度 $v=\sqrt{v_0^2+v_2^2}$ 米/秒，外力所做的功

$$w_2=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m(v_0^2+v_2^2)-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_2^2$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times4^2\text{焦}=8\text{焦}。$$

可见，物体动能的变化只和外力做功有关，跟运动的过程和速度变化的方向无关。

1338．工地上的运土车沿山坡轨道下滑。每 13 米坡长降低 5 米，下滑时做匀速运动。倒去泥土后空车的质量 m=260 千克，将空车匀速拉上山坡需要多大的力？

［解答］　物体匀速下滑时，合外力为零，所以

$$Mg\sin\theta=\mu Mg\cos\theta,$$

得 $$\mu=\text{tg}\,\theta=\frac{5}{12}。$$

已知 $\sin\theta=\frac{5}{13}$，$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{12}{13}$，$\text{tg}\,\theta=\frac{5}{12}$。

设将空车匀速拉上小坡需要的力为 F，拉动距离为 l，

则 $$F=\frac{mgl\sin\theta+\mu mgl\cos\theta}{l}$$

$$=260\times10\left(\frac{5}{13}+\frac{5}{12}\times\frac{12}{13}\right)\text{牛}=2000\text{牛}。$$

1339．跨过定滑轮的绳子一端拴一个质量 m=10 千克的物体。一小孩质量 M=30 千克，从另一端拉着绳子向上爬，并保持在一个不变的高度，如图所示。绳的质量和绳跟滑轮间的摩擦都不计，g 取 10 米/秒 ^{2}。求 1 秒末时物体 m 的动能。

［解答］　设小孩拉绳的力为 T，由于小孩保持不变的高度，所以 T=Mg。

物体 m 受二个力作用：重力 mg 和绳对它的拉力 T。由于 M>m，所以 T>mg，设物体上升的加速度为 a，

$$Mg-mg=ma,\ a=\frac{M-m}{m}g；$$

t秒末时物体的速度 $v=at=\frac{M-m}{m}gt$，动能为 $E_{kt}=\frac{1}{2}m\left(\frac{M-m}{m}gt\right)^2$；

1秒末时的动能为

$$E_{k1}=\frac{1}{2}\times\frac{(M-m)^2g^2}{m}=\frac{1}{2}\times\frac{(30-10)^2\times10^2}{10}\text{焦}$$
$$=2000\text{焦。}$$

1340．物体以 v_1=7 米/秒的速度从水平桌面的一端滑向另一端后落在离下落点水平距离为 s 的地面上。如果以 v_2=13 米/秒的速度从桌面的一端滑出，则落在离下落点水平距离为 2s 的地面上，如图所示。已知物体和桌面间的摩擦系数 μ=0.6，求桌面的长度 l。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

［解答］设物体离开桌面时的速度分别为 v_1' 和 v' ，物体离开桌面到落地所需的时间为t。则

$$s=v_1'\,t,\quad 2s=v_2'\,t;$$
$$\frac{v_1'}{v_2'}=\frac{s}{2s}=\frac{1}{2},\qquad \frac{v_1'}{v_2'}=\frac{1}{4};$$

由动能定理知道

$$\frac{1}{2}mv_1'^2=\frac{1}{2}mv_1^2-\mu mgl,$$
$$\frac{1}{2}mv_2'^2=\frac{1}{2}mv_2^2-\mu mgl,$$
$$\frac{v_1'^2}{v_2'^2}=\frac{v_1^2-2\mu gl}{v_2^2-2\mu gl},$$

将已知数据代入得 l=0.75 米。

1341．卡车质量 M=4 吨，拖车质量 m=2 吨，在平直公路上以 v=10 米/秒的速度匀速行驶，阻力为车重的 0.05 倍，途中拖车突然脱掉，从脱掉到驾驶员发现，车已前进了 L=40 米，这时驾驶员立刻关掉发动机让卡车在公路上滑行。求当卡车和拖车都停止时，它们之间的距离为多少米？驾驶员发现拖车脱掉后为什么不能进行急刹车？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

［解答］ 用动能定理解

从拖车脱掉开始到停止，拖车运动的距离为 s_1，卡车运动的距离为 s_2。则

$$\frac{1}{2}mv^2=0.05mgs_1,$$

$$s_1=\frac{v^2}{2\times0.05g}=100\text{米};$$

拖车未脱掉时，卡车的牵引力等于摩擦力，即

$$F=0.05(M+m)g=3000\text{牛};$$

在未发现脱掉的40米路程中，牵引力所做的功

$$W_F=F\cdot L=3000\times40\text{焦}=120000\text{焦};$$

从拖车脱掉到卡车停止，摩擦力所做的功

$$W_f=-0.05Mgs_2=-2000s_2,$$

则
$$\frac{1}{2}Mv^2+W_F+W_f=0,$$

$$\frac{1}{2}\times4000\times10^2+120000-2000s_2=0,$$

$$s_2=160\text{米};$$

所以它们之间的距离$s=s_2-s_1=60$米。

如果驾驶员发现拖车脱掉后立即进行急刹车，并在较短的距离△s内停止，则卡车运动的距离 s_2=L+△s=40+△s。由于 s_2〈s_1，所以拖车会和卡车发生碰撞。

1342．平板小车 m_1=8 千克，平板长度 l=1 米，静止在光滑水平地面上。m_2=4 千克的滑块以 v_0=4 米/秒的水平速度从平板车的一端滑向另一端，如图所示。已知滑块和平板车间的摩擦系数μ=0.5，滑块离开小车的瞬间，小车的速度 v_1=1 米/秒。求：滑块离开小车时的速度 v 为多大？（g 取 10 米/秒 ²）

[解法一]　用运动定律解。

设滑块滑动时的摩擦力为 f，则 f=μm_2g=0.5×4×10 牛=20 牛；

小车运动的加速度$a_1=\frac{f}{m_1}=\frac{20}{8}$米/秒$^2=2.5$米/秒^2；设滑块在小车上滑动的时间为t，则$t=\frac{v_1}{a_1}=0.4$秒；滑块滑动时的加速度$a_2=\frac{f}{m_2}=\frac{20}{4}$米\秒 ²；滑块离开小车时的速度为 v，则 v=$v_0$－$a_2$t=4 米\秒－5×0.4 米/秒=2 米/秒。

[解法二]用动能定理解。

设滑块离开小车时，小车运动的距离为 s

则
$$fs=\frac{1}{2}m_1v_1^2$$

$$s=\frac{m_1v_1^2}{2f}=\frac{8\times1^2}{2\times20}\text{米}=0.2\text{米}$$

以滑块为研究对象

$$\frac{1}{2}m_2v_0^2-f(l+s)=\frac{1}{2}m_2v^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{m_2v_0^2-2f(l+s)}{m_2}}=\sqrt{\frac{4\times4^2-2\times20(1+0.2)}{4}}\text{米/秒}$$

$$=2\text{米/秒}。$$

[解法三]用动量守恒定律解最简单。

以滑块和小车为系统，动量守恒

$$m_2v_0 = m_1v_1 + m_2v$$

$$v = \frac{m_2v_0 - m_1v_1}{m_2} = \frac{4\times4-8\times1}{4}\text{米/秒} = 2\text{米/秒。}$$

1343·在倾角为θ的斜面上，有一个质量为m的物体，以v_0的初速度从斜面底沿斜面向上运动，如图所示。已知物体和斜面间的摩擦系数为μ，而且μmgcosθ〈mgsinθ。当物体在斜面上移动了一段位移s时，它的动能变化为多大？

［解答］ 本题只提出了物体的位置移动了一段距离s,未说明它移动的过程，因此求它的动能变化量时，应分别从下列两种情况来计算。

(1)设物体直接从A移动到B，而且AB=s。则在移动过程中物体所受合外力为mgsinθ+μmgcosθ，方向和v_0方向相反。根据动能定理，合外力所做的功等于物体动能的变化量。所以

$$\triangle E_{k1}=-(mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)s,$$

负号表示动能减少。

(2)设物体先从A点移动到C点,这时速度为零。由于μmgcosθ〈mgsinθ，物体接着就下滑。当它滑到B点时，物体的位移也是s。设BC=s，由于在上滑和下滑的两个过程中，物体受力情况不同，因此物体动能的变化量应用各外力对物体做功的代数和来计算，因为重力做功和路径无关，只跟起点和终点的位置有关。所以它对物体所做的功仍为

$$W_G=-mgs\sin\theta;$$

摩擦力对物体所做功

$$W_f=-\mu mg\cos\theta(s+2s_1);$$

所以物体动能的变化量

$$\triangle E_{k2}=-(mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)s-2\mu mgs_1\cos\theta$$
$$=\triangle E_{k1}-2\mu mgs_1\cos\theta\text{。}$$

这即比直接从A移动到B，又减少了物体从B到C再从C回到B的过程中克服摩擦力所做的功。

1344·质量m＝1千克的物体放在倾角θ=37°的斜面底端。现用F=20牛的水平力由静止将物体推上斜面。已知斜面的机械效率η=50%。求：(1)当物体移动s=2.5米时，它的动能为多大？（g取10米/秒²、sin37°=0.6、cos37°=0.8）

(2)物体和斜面间的摩擦系数为多大？

［解答］ (1)力F对物体所做的功

$$W_F=Fs\cos\theta=20\times0.5\times0.8\text{焦}=40\text{焦};$$

由于机械效率η＝50%，所以有用功$W_{有}=\eta W_F=0.5\times40$焦=20焦；$W_{有}$等于物体克服重力所做的功$W_G$和它的动能增量之和，所以$E_K-0=W_{有}-W_G$，

$$E_K=W_{有}-W_G=20-mgs\sin\theta 37°=(20-1\times10\times2.5\times0.6)\text{焦}$$
$$=5\text{焦。}$$

(2)从η=50%和W_F=40焦，可知物体克服摩擦所做的功W_f=(40-20)焦=20焦，而$W_f=\mu(mg\cos\theta+F\sin\theta)s$,

$$\mu=\frac{W_f}{s(mg\cos\theta+F\sin\theta)}$$
$$=\frac{20}{2.5\ (1\times10\times0.8+20\times0.6)}=\frac{20}{50}=0.4。$$

1345·如图所示，有一物体以某一速度从斜面底沿斜面上滑。当它滑行 4 米后速度变为零，然后再下滑到斜面底。已知斜面长 5 米，高 3 米，物体和斜面间的摩擦系数 μ=0.25。（g 取 10 米/秒 ^{2}）求：

(1)物体开始上滑时的速度；

(2)物体返回到斜面底时的速度。

[解答]（1）设物体开始上滑时的速度为 v_1，已知 h=3 米，l=5 米，$s=4$米。物体初动能的$E_{k1}=\frac{1}{2}mv_1^2$，末动能$E_{k2}=\frac{1}{2}mv_2^2=0$；物体在上滑过 程中克服重力和摩擦力做功，根据动能定理

$$-mgs\sin\theta-\mu mgs\cos\theta=0-\frac{1}{2}mv_1^2,$$
$$v_1=\sqrt{2gs(\sin\theta+\mu\cos\theta)}$$
$$=\sqrt{2\times10\times4\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}\right)}\text{米/秒}$$
$$=8\text{米/秒。}$$

（2）初能为$\frac{1}{2}mv_2^2=0$，设返回到底时的速度为v_3，则末动能为$\frac{1}{2}mv_3^2$。

在下滑过程中重力做正功，摩擦力做负功，根据动能定理

$$mgs\sin\theta-\mu mgs\cos\theta=\frac{1}{2}mv_3^2-0,$$
$$v_3=\sqrt{2gs\left(\sin\theta-\mu\cos\theta\right)}$$
$$=\sqrt{2\times10\times4(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\times\frac{4}{5})}\text{米/秒}$$
$$=4\sqrt{2}\text{米/秒}$$

1346·用锤子把铁钉钉入木块中。如果每次打击时，锤子给于铁钉的动能都相等，铁钉进入木块所受的阻力跟钉入的深度成正比。如果钉子第一次被击入木块的深度为 5 厘米。求第二次打击后，可再进入几厘米？

[解法一]设木块对钉的阻力为 f，则 f=kx。第一次钉子所受的最大阻力 f_{max}=5k，平均阻力 $f_1=f_{max}/2$=2.5k.设锤子给于铁钉的动能为 E_k，则根据动能定理 E_k=fs=2.5k×5=12.5k。

设第二次再击进 x 厘米，则第二次受到的平均阻力为

$$f_2=\frac{5k+(5+x)k}{2}=(5+\frac{x}{2})x,$$
$$E_k=f_2x,\quad \text{即}\quad 12.5k=(5+\frac{x}{2})kx,$$

整理后，得 $\quad x^2+10x-25=0,$

$$x=5(\sqrt{2}-1)\text{厘米}\approx2.1\text{厘米。}$$

[解法二]用图解法

根据阻力跟深度成正比 f=kx，作出 f-x 图线如图所示，第一次钉子

克服阻力所作的功等于 OA 线下面的三角形面积 W_1。第二次所做的功为 AB 下面的梯形面积 W_2。

$$W_1=W_2$$

$$W_1:(W_1+W_2)=1:2=5^2\cdot(5+x)^2,$$

所以 $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5}{5+x}$， $x=5(\sqrt{2}-1)$厘米$=2.1$厘米。

1347．一物体在空气中竖直下落，如果空气阻力是物体重力的 1/5，物体在 A 点时速度 $v_1=5$ 米/秒，再继续下落 h=12.5 米时到达 B 点。求物体在 B 点的速度。(g 取 10 米/秒 ^{2})

[解答]设到达B点时速度为v_2，物体下落时所受的合外力为$mg-\frac{1}{5}mg=\frac{4}{5}mg$。根据动能定理，

$$\frac{4}{5}mg\times h=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

$$v_2=\sqrt{\frac{8gh}{5}+v_1^2}$$

$$=\sqrt{\frac{8\times10\times12.5}{5}+5^2}\text{米/秒}=15\text{米/秒。}$$

1348．子弹的质量 m=0.01 千克，枪管长 l=0.9 米，发射时子弹离枪口的速度 v=600 米/秒。则弹壳内火药爆炸后对子弹的推力为多大？如果枪管长 l′=0.8 时，子弹离枪口的速度 v′将为多大？

[解答](1)设推力为F，则$Fl=\frac{1}{2}mv^2$,

$$F=\frac{mv^2}{2l}=\frac{0.01\times600}{2\times0.9}\text{牛}=2000\text{牛。}$$

(2) $\frac{l'}{l}=\frac{v'^2}{v^2}$,

$$v'=\sqrt{\frac{l'}{l}}v=\sqrt{\frac{0.8}{0.9}}600\text{米/秒}=\frac{2\sqrt{2}}{3}600\text{米/秒}$$

$$=40c\sqrt{2}\text{米/秒。}$$

1349．某人斜向上掷出一个质量 m=0.2 千克的球，4 秒末时被另一个人接住。掷出点与接住点在同一水平面上，且相距 s=60 米，不计空气阻力，g 取 10 米/秒 ^{2}。求某人掷出球的过程中所做的功。

[解答]设小球掷出时的速度为 v_0, 与水平成角。则水平分速度为 $v_0\cos\theta=\frac{s}{t}=\frac{60}{4}$米/秒$=15$米/秒，根据斜抛运动的飞行时间 $t=\frac{2v_0\sin\theta}{g}$，得

$$v_0\sin\theta=\frac{gt}{2}=\frac{10\times4}{2}\text{米/秒}=20\text{米/秒,}$$

$$v_0=\sqrt{(v_0\sin\theta)^2+(v_0\cos\theta)^2}=\sqrt{20^2+15^2}\text{米/秒}=25\text{米/秒。}$$

某人掷出时所做的功 W 等于球掷出时的动能，

所以 $W=\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}\times0.2\times25^2\text{焦}=62.5\text{焦}$。

1350．炮弹内装火药 m=2.5 千克时，发射时的速度 v_0=500 米/秒。如果炮弹发射时的动能与弹内所装的火药量成正比。要使炮弹的最大射程 s=36 千米，弹内应装有多少千克火药？(g 取 10 米/秒)

[解答]根据斜抛运动的射程公式$s=\dfrac{v^2\sin 2a}{g}$，最大射程时$a=45°$，所以$v=\sqrt{gs}=\sqrt{10\times 36\times 10^2}$米/秒$=600$米/秒。

设弹内应装的火药为x，并设炮弹的为M，

则
$$x:m=\frac{1}{2}Mv^2:\frac{1}{2}Mv_0^2,$$
$$\frac{x}{m}=\frac{v^2}{v_0^2},\qquad x=m\frac{v^2}{v_0^2}=2.5\times\frac{600^2}{500^2}\text{千克}=3.6\text{千克。}$$

1351．子弹以某水平速度射入静止在光滑水平桌面上的木块，当进入的深度 s_1=10 厘米时，子弹停止前进，这时木块在桌面上移动 s_2=1 厘米。求：(1)子弹和木块摩擦所产生的热能和子弹损失的动能的比。

(2)如果子弹质量 m=0.1 千克，初速度 v_0=200 米/秒，木块的质量 m=0.9 千克。求它们的共同速度 v。

[解答](1)设子弹与木块间的摩擦力为 f，子弹损失的动能为$\triangle E_k$，则$\triangle E_k=f(s_1+s_2)$。而作用于木块的摩擦力所做的功也使木块的动能增加，数值为 fs_2，因而摩擦所产生的热能为 $W=f(s_1+s_2)-fs_2=fs_1$，由此得
$$\frac{W}{\triangle E_k}=\frac{fs_1}{f(s_1+s_2)}=\frac{10}{11}\text{。}$$

（2）由题意
$$f(s_1+s_2)=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}mv^2$$
$$fs_2=\frac{1}{2}Mv^2$$

解方程组得
$$v=\sqrt{\frac{mv_0^2}{m+\dfrac{M(s_1+s_2)}{s_2}}}=\sqrt{\frac{0.1\times 200^2}{0.1+\dfrac{0.9\times(0.1+0.01)}{0.01}}}\text{米/秒}=20\text{米/秒。}$$

共同速度 v，也可用动量恒定律解，且更方便。

1352．质量m=4 吨的卡车，由静止出发在水平公路上行驶 s =100 米后，速度 v_2 增加到 54 千米/小时，如果发动机的牵引力是 5 千牛。求：

(1)牵引力做了多少功？(2)卡车的动能增加了多少？

(3)阻力做了多少功？

[解答](1)已知牵引力 F=5×10^2牛，位移=100 米，因此发动机牵引力所做的功
$$W_F=Fs=5\times 10^2\times 100\text{焦}=5\times 10^5\text{焦。}$$

(2)卡车的初速度 v_1=0，末速度 v_2=54 千米/小时=15 米/秒，质量 m=4×10^3千克。
$$\triangle E_k=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}\times 4\times 10^3\times 15^5\text{焦}=4.05\times 10^5\text{焦。}$$

(3)由于牵引力所做的功大于卡车动能的增量，所以阻力所做的功

$W_f=W_f-\triangle E_k=5\times10^5$焦$-4.5\times10^5$焦$=5\times10^4$焦。

1353．卡车的质量 m=5 吨，以 $v_1=12$ 米/秒的速度开始爬上坡度为 0.1 的坡路，行驶 s=100 米后速度 $v_2=8$ 米/秒。已知卡车所受的摩擦阻力是车重的 0.04 倍，g 取 10 米/秒。求：

(1)如果牵引力是恒力，那么在这过程中牵引力做了多少功？牵引力为多大？

(2)卡车发动机在这段路程中的平均功率是多少马力？

(3)如果牵引力不变，卡车能在坡路上继续行驶多少米？

[解答](1)由于牵引力和阻力不变，卡车在坡路上作匀减速运动。如果用动力学方法解，先求出汽车作匀减速运动的加速度，再用牛顿第二运动定律求出牵引力，然后再求牵引力所做的功。如用功能原理来解，就比较简便。设牵引力为 F，阻力为 f，上升的高度为 h，

则
$$Fs-fs=mgh+\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

$$f=kmg=0.04mg, h=0.1s,\text{代入得}$$

$$\begin{aligned}Fs&=mg\times0.1s+0.04mgs+\frac{1}{2}m(v_2^2-v_1^2)\\&=0.14mgs+\frac{1}{2}m\left(v_2^2-v_1^2\right)\\&=0.14\times5000\times10\times100+\frac{1}{2}\times5000(8^2-12^2)\text{焦}\\&=5\times10^5\text{焦，}\end{aligned}$$

$$F=\frac{5\times10^5}{100}\text{牛}=5\times10^3\text{牛。}$$

(2)设平均功率为$\overline{P}$，则

$$\begin{aligned}\overline{P}&=F(\frac{v_1+v_2}{2})=5000\times\frac{12+8}{2}\text{瓦}=5\times10^4\text{瓦}\\&=68\text{马力。}\end{aligned}$$

(3)设卡车能继续行驶的距离为 s′，由功能原理得

$$\frac{1}{2}mv_2^2=0.1mgs'+0.04mgs'-Fs',$$

$$\begin{aligned}s&=\frac{mv_2^2}{2(0.14mg-F)}\\&=\frac{5000\times8^2}{2\left(0.14\times5000\times10-5000\right)}\text{米}\\&=80\text{米。}\end{aligned}$$

1354．某物体以初动能 E_0 从倾角 θ=37°的斜面底 A 点沿斜面上滑，物体和斜面间的摩擦系数 μ=0.5，而且 mgsinθ〉μmgcosθ。当物体滑到 B 点时动能为 E，滑到 C 点时动能为零，物体从 C 点下滑到 AB 的中点 D 时动能又为 E。已知 AB=s，求 BC 的长度。

(sin37°=0.6, cos37°=0.8)

[解答]设 BC=s′。物体从 B 点滑到 C 点再从 C 点滑到 D 点的过程中 $E_{KB}=E_{KD}$ 即动能的增为零。在这过程中，重力所做的功和路径无关，它等

mgsin·，摩擦力所做的功为 $mg\cos\theta(\frac{s}{2}+2s)$, 由动能定理

$$mg\sin\theta\cdot\frac{s}{2}-\mu mg\cos\theta(\frac{s}{2}+2s')=0$$

$$s'=\frac{\sin\theta-\mu\cos\theta}{4\mu\cos\theta}s=\frac{1}{8}s。$$

1355·地球的 $m=6\times10^{24}$ 千克，半径 $R=6.4\times10^{6}$ 米/秒，转速是 $\frac{1}{86400}$ 转/秒。假设地球是均匀球体，求它自转时的转动动能。

[解答] $E_k=\frac{1}{2}I\omega^2$, $I=\frac{2}{5}mR^2$

$$E_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\omega^2$$
$$=\frac{1}{5}\times6\times10^{24}\times6.4^2\times10^{12}\times(\frac{2\pi}{86400})^2\text{焦}$$
$$=2.6\times10^{29}\text{焦。}$$

1356·冲床的飞轮质量 m=2 吨，半径 R=1 米。每冲一次转速从每分钟 30 转降为 15 转。求每冲一次轮所做的功。

[解答]飞轮的转动惯量 $I=\frac{1}{2}mR^2=\frac{1}{2}\times2000\times1^2$ 千克·米^2 $=1000$ 千克·米^2。

冲前飞轮具有的转动动能为 E_{k1}

$$E_{k1}=\frac{1}{2}I\omega_1^2=\frac{1}{2}\times1000\times(\frac{30}{60}\times2\pi)^2\text{焦}$$
$$=4.93\times10^2\text{焦。}$$

冲后飞轮具有的转动动能为 E_{k2}

$$E_{k2}=\frac{1}{2}I\omega_2^2=\frac{1}{2}\times1000\times(\frac{15}{60}\times2\pi)^2\text{焦}$$
$$=1.23\times10^2\text{焦。}$$

由动能定理得，每冲一次飞轮所做的功为

$$W=E_{k1}-E_{k2}=(4.93\times10^3-1.23\times10^3)\text{焦}$$
$$=3.7\times10^3\text{焦}$$

1357·一条绳子绕在半径 r=0.4 米，质量 m=100 千克的飞轮的周沿上，飞轮架在无摩擦的水平轴上。如果在绳的一端用 F=100 牛的恒力拉，如图所示。求：

(1)飞轮的转动惯量；

(2)飞轮的角加速度；

(3)当强子被拉下 s=4 米时，飞轮的转动动能为多大？

[解答](1)飞轮的转动惯量$I=\frac{1}{2}mr^2=\frac{1}{2}\times100\times0.4^2$千克·米$^2=8$千克·米^2；

(2)飞轮的角加速度$\beta=\frac{Fr}{I}=\frac{100\times0.4}{8}$弧度/秒$^2=5$弧度/秒^2;

(3)设飞轮的角速度为ω,则$\omega^2=2\beta\theta=2\beta\frac{s}{r}$，

所以飞轮的转动动能$E_k=\frac{1}{2}I\omega^2=I\beta\frac{s}{r}=8\times5\times\frac{4}{0.4}$焦$=400$焦，

实际上飞轮获得的转动动能等于力 F 对它所做的功，即 $E_k=W=F\cdot s=100\times4$ 樵=400 焦。

证明如下：由转动定律 $I=\frac{Fr}{\beta},\omega^2=2\beta\theta=2\beta\frac{s}{r}$,

$$E_k=\frac{1}{2}I\omega=\frac{1}{2}\cdot\frac{Fr}{\beta}\cdot\frac{2\beta s}{r}=Fs=W。$$

说理和谁论证题

1358·质量为 m 的物体，在光滑水平面上以 v_0 的速度运动。受到—个和水平成θ角的外力 F 的作用，经过 s 的位移后速度变为 v_t。如图所示。试证明：

$$Fs\cos\theta=\frac{1}{2}mv_t^2-\frac{1}{2}mv_0^2。$$

[证明]物体所受的合外力为 Fcosθ,设物体运动时的加速度为 a,则 $a=\frac{F\cos\theta}{m}$；

因为 $v_t^2=v_0^2+2as=v_0^2+2\frac{F\cos\theta}{m}s$

整理后得 $F\cos\theta=\frac{1}{2}mv_t^2-\frac{1}{2}mv_0^2$。

1359·质量为 m 的滑块放在摩擦系数为μ的水平地面上，将滑块固定在倔强系数为 k 的弹簧一端，弹簧质量不计，弹簧的另一端固定在墙上，滑块在位置 A 时，弹簧无形变，如图所示。现用水平力将滑块从位置 A 拉到 B 而静止，弹簧伸长 x。试分析当水平突然撤去后，滑块的动能变化情况。

[解答] 要分析滑块的动能变化情况，先要分析滑块的受力情况和这些力对滑块的做功。当水平力撤去后，滑块在运动方向上受弹簧的弹力 F=kx,和摩擦力 f=μmg 的作用，如果开始时弹力 F≤f，则 F 等于静摩擦力，滑块静止，它的动能为零。如果开始时弹力 F〉f，则滑块处于不平衡状态，向左运动。弹力对滑块做正功，摩擦力对滑块做负功，而且正功大于负功，所以滑块的动能不断增大。由于 F 是变力，它随位移 x 的减少而减少，当 F 减小到 $kx_1=\mu mg$ 时，在这瞬时，滑块所受合外力等于零，这时滑块具有最大速度，因而具有最大动能。之后拉移 x 继续减少，kx_2〈μmg，这时弹力 F 做的正功小于摩擦力做的负功，滑块的动能减少。根据动能定理，滑块回到原来位置（x=0）时的动能等于在这段位移中弹力对没块所做的功减去摩擦力对滑块所做的功，即

$$E_{kA}=\frac{0+F}{2}x-\mu mgx=\frac{1}{2}(kx-2\mu mg)x。$$

当$x=\frac{2\mu mg}{k}$时，$E_{kA}=0$，即滑块回到位置时的动能为零。当

$x〉\frac{2\mu mg}{k}$时，滑块回到原来位置时动能不为零，它继续沿原方向

运动，将弹簧压缩，这时弹力和摩擦力都对滑块做负功，直到滑块的动能减少到零。如果这时滑块所受的弹力等于μmg，滑块静止，动能为零，如果弹力大于μmg，则滑块再被弹簧弹回，动能又增大。

当$x〈\frac{2\mu mg}{k}$，但$kx〉\mu mg$时，滑块未回到平衡位置时即已停止运动，

动能为零。

1360．质量为 m 的物体，在和水平方向夹角为θ的拉力的作用下，沿水平面匀速移动了距离 s。该力做了 W 的功。试证物体和地面间的摩擦系数为

$$\mu=\frac{W}{mgs-Wtg\theta}。$$

[证明]设拉力为 F，则 W=Fscosθ，

由于物体作匀速运动，Fcosθ=μ(mg-Fsinθ)，

$$\mu=\frac{F\cos\theta}{mg-F\sin\theta}=\frac{\frac{W}{s}}{mg-\frac{w}{s}tg\theta}=\frac{W}{mgs-Wtg\theta}。$$

1361．物体在高为 h 的斜面顶滑下，又在水平地面上滑行了一段距离而停止。已知停止的地方离出发处的水平距离为 s，如图所示。设物体和接触面间的 摩擦系数为μ，物体在水平面上滑行的初速度等于物体在斜面底端时的速度。试证明

$$\mu=\frac{h}{s}。$$

[证明]设斜面长为 l,斜面的倾角为θ，根据动能定理，各力对物体做功的代数和等于物体动能的增量。得

$$mgsin\mu\cdot l-\mu mg\cos\theta\cdot l-\mu mg(s-l\cos\theta)=0$$

整理后得 $mg\sin\theta\cdot l-\mu mgs=0$，

$$\mu=\frac{l\sin\theta}{s}=\frac{h}{s}。$$

1362．已知地球的质量为 M，半径为 R，万有引力恒量为 G，人造地球卫星的质量为 m，在地球上空 2 倍于地半径的高度的圆形轨道上运转。试 证明卫星的动能 $E_k=\frac{GmM}{6R}$。

[证明]设卫星运转时的速度为 v，则地球对它的引力是卫星运动时所需要的向心力。即

$$G\frac{Mm}{r^2}=m\frac{v^2}{r}，$$

因为 $v=\sqrt{\dfrac{GM}{r}}$，已知 $r=3R$,

所以 $v=\sqrt{\dfrac{GM}{3R}}$，

动能 $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}m\dfrac{GM}{3R}=\dfrac{GmM}{6R}$。

1363·试证明密度为 ρ_1 的物体，全部没入某种密度为 ρ_2 的液体后，从初速度为零开始下沉为距离 s 时的速度

$$v=\sqrt{\frac{2gs(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1}}。$$

[证明]设该物体的体积为 V，则该物体的重力为 $\rho_1 gV$，它受到的浮力为 $\rho_2 gV$，所以合外力（$\rho_1-\rho_2$）gV，根据动能定理

$$(\rho_1-\rho_2)gV\cdot s=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\rho_1 Vv^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{2gs(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1}}。$$

1364·物体从倾角为 θ，摩擦系数为 μ 的斜面上的 A 点以 v_0 速度沿斜面上滑，如图所示。由于 $\mu mg\cos\theta < mg\sin\theta$，所以它滑上斜面后又滑下来。当它下滑 B 点时，速度的大小正好也是 v_0。设 AB=s，试证明

$$s=\frac{\mu v_0^2\cos\theta}{(\sin^2\theta-\mu^2\cos^2\theta)g}$$

[证明]设物体从 A 点上滑到 C 点时速度为零，如果 AC=s'，根据动能定理

$$(mg\sin\theta+\mu mg\cos\theta)s'=\frac{1}{2}mv_0^2,$$

得 $$s'=\frac{v_0^2}{2(\sin\theta+\mu\cos\theta)g} \qquad (1)$$

在物体从 A 上滑到 C，再从 C 下滑到 B 的过程中，因为重力做功只跟起点和终点的位置有关，所以重力对物体做的功

$$W_f=-\mu mg\cos\theta(2s'+s),$$

根据动能定理

$$W_G+W_f=\triangle E_k,$$

即 $$mgs\sin\theta-\mu mg\cos\theta(2s'+s)=0,$$

$$mg(\sin\theta-\mu\cos\theta)s=\mu mg\cos\theta\cdot 2s',$$

$$s=\frac{2\mu\cos\theta\cdot s'}{\sin\theta-\mu\cos\theta} \qquad (2)$$

将(1)式代入(2)式得 $$s=\frac{\mu v_0^2\cos\theta}{(\sin^2\theta-\mu^2\cos^2\theta)g}。$$

图线和作图题

1365·质量 m＝2 千克的物体，以某一速度沿倾角为 30°的斜坡上滑，在斜坡上有相距 s＝5 米的 AB 两点，物体在这两点间动能的变化情况如图所示。求物体在 AB 两点间克服摩擦力所做的功。(g 取 10 米/秒 ^{2})

[解答]运动过程中物体的动能减少了 $E_{kA}-E_{kB}$=（100－25）焦=75 焦，物体克服重力做功为

$$W=mgs\sin30°$$

$$=2\times10\times5\times\frac{1}{2}\text{焦}=50\text{焦},$$

根据动能定理，物体克服摩擦力所做的功为 $W_f=E_{kA}-E_{kB}-W_G$＝(75－50)焦=25 焦。

1336·质量 m=1 千克的物体，在水平拉力 F 的作用下，沿粗糙水平面运动，经过位移 4 米时，拉力 F 停止作用，运动到位移是 8 米时物体静止。运动过程中 E_k-s 的图线如图所示。求：

(1)物体的初速度为多大？

(2)物体和平面间的摩擦系数为多大？(g 取 10 米/秒)

(3)拉力 F 的大小。

[解答](1)从图线可知物体的初动能为 2 焦

$$E_{k0}=\frac{1}{2}mv^2=2\text{焦},v=2\text{米}/\text{秒}。$$

(2)在位移 4 米处物体的动能为 10 焦，在位移 8 米处物体的动能为零，这段运动过程中物体克服摩擦力做功。

$$\text{设摩擦力为}f,\text{则}f\cdot s=0-10\text{焦},f=\frac{-10}{4}\text{牛}=-2.5\text{牛},$$

$$f=\mu mg,\mu=\frac{f}{mg}=\frac{2.5}{10}=0.25。$$

(3)物体从开始到移动 4 米这段过程中，受拉力 F 和摩擦力 F 的作用，其合外力为 F－f.

根据动能定理 $(F-f)\cdot s=\triangle E_k$，

$$F=\frac{\triangle E_k}{s}+f$$

$$=(\frac{10-2}{4}+2.5)\text{牛}$$

=4.5 牛。

1367·质量 m 为千克的物体从倾角为 30 的斜面底冲上斜面，它的动能随位移变化的关系图线如图(a)所示。求物体和斜面间的摩擦系数，并作出该物体到达最高点后开始下滑的过程中，动能随位移的变化图线。（g 取 10 米/秒 ²}

[解答]从图线可知，物体位移为 2 米时，动能减少了 15 焦，由动能定理

$$F\cdot s=\triangle E_k,$$

$$F=\frac{\triangle E_k}{s}=\frac{15}{2}\text{牛}=2.5\text{牛}$$

$$F=mg\sin30°+\mu mg\cos30°$$

$$\mu=\frac{F-mg\sin30°}{mg\cos30°}=\frac{7.5-1\times10\times\frac{1}{2}}{1\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}。$$

物体下滑时 F=5 牛－2.5 牛=2.5 牛，所以下滑时的 E_k-s 图线如图

(b)所示。

图(a)中，坐标原点为斜面的最低点。

图(b)中，坐标原点为物体在斜面上的最高点。

势能　　机械能守恒定律

填充题

1368．以初速度 v_0 沿着光滑斜面上升的物体，它能上升的最大高度为 $\underline{v_0^2/2g}$。

1369．用大小为 3mg 平行于斜面的力，将质量为 m 的物体由静止出发从倾角为 30°的光滑斜面沿斜面向上移动 1 米，这时物体的速度可达到 7 米/秒。

1370．质量为 m 的物体从高为 h 的斜面顶以初速度 v_0 滑下，到达斜面底时速度为 v，在此过程中，物体克服摩擦力所做的功为 $\underline{mgh-\frac{1}{2}m(v^2-v_0^2)}$。

1371．斜面的顶角为 30°，用平行于斜面的力将物沿斜面匀速拉上时物体所受摩擦力为物体重力的 1/8，这个斜面的机械效率是 80%。

1372．将垂直悬挂的长 1 米，粗细均匀，质量为 2 千克的直棒向上转动 60°角如图所示，则它的势能增加了 4.9 焦。

1373．用 v_0 的初速竖直上抛一物体，最高高度为 h。当物体的速度减少到 $v_0/2$ 时，它的高度为 3/4h。

1374.以 14 米/秒的初速度竖直向上抛出一个质量为 1 千克的物体，不计空气阻力时，物体上升的高度是 10 米；如果空气阻力为 1.1 牛，则物体上升的高度是 9 米。

1375．甲乙两物体的质量比 m_A：m_A=2：1，把两物以相同的动能作竖直上抛运动，则甲乙两物体上升的高度比 h_A：h_B=1：2。如果把两物体以相同的速度作竖直上抛运动，则甲乙两物体上升的高度比 h_A：h_B=1：1。

1376．从地面竖直上抛一个质量是 0.2 千克的物体，它经过 8 秒落回地面。不计空气阻力，物体抛出时的动能为 160 焦。从被抛出到最高点，物体克服重力所做的功为 160 焦。物体上升到最高点时的重力势能为 160 焦。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

1377．质量相同的两个物体位于同一高度，一个物体水平抛出，另一个物体自由落下，两个物体落地时间的比为 1：1。两个物体动能变化量的比为 1：1。

1378．气球以 10 米/秒的速度匀速上升，当它上升到离地 15 米高度时，从气球里掉下一个物体，如果不计空气对物体的阻力，则物体落地时的速度为 20 米/秒。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

1379．要使一个球着地后回跳的高度超过原高 5 米，必须用 10 米/秒的初速度将它竖直抛下。（不计空气阻力及球和地面碰撞时的能量损失，g 取 10 米/秒 ^{2}）

1380．质量 m 为 0.1 千克的小球，从 1 米高处自由下落到地板后又跳起 0.8 米高，在这过程中机械能损失了 0.196 焦。

1381．作斜抛运动的物体，已知它在最高点时的动能是抛出时动能

的 1/4，则抛射角为 60°。（不计空气阻力）

1382．某人从 20 米高的平台上抛出一个质量为 1 千克的物体，落地时物体的动能是抛出时动能的 5 倍，则小球抛出时速度为 10 米/秒。人对小球所做的功为 50 焦。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

1383．某人沿着与水平成 60°的方向斜向上抛出一个物体。已知人对物体做的功为 W，则物体到达最高点时克服重力所做的功 0.75W。（不计空气阻力）

1384．某人从离地某高度处抛出一个质量为 m 千克的物体，他对物体做了 W 焦的功。该物体落地时的速度为 v 米/秒。则他抛出点离地面的高度为 $\frac{mv^2-2W}{2mg}$ 米。

1385．以 v_0 的初速度竖直上抛一个物体，能达到最大高度为 h。如果以的 v_0 初速，抛射角为 30°，斜向上抛出同一物体，则它达到的最大高度为 h/4。如果以 v_0 的初速度沿倾角为 30°的光滑斜面向上抛出，则它达到的最大高度为 h。假如斜面不光滑，摩擦系数为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,则它达到的最高为 $h/2$。

1386·A、B 两物体质量相同，动能也相同。A 以抛射角为 60°作斜上抛运动，B 以抛射角为 30°作斜上抛运动，（不计空气阻力），那末抛射到最高点时,它们的动能 E_{kA}：E_{KB} 为 1：3。它们的势能 E_{pA}：E_{pB} 为 3：1。

1387·如图所示，在光滑水平桌面上有一辆质量为 M 的小车，小车跟绳子一端相连，绳子另一端通过滑轮中吊一个为 m 的砝码。砝码离地 h 高，如把小车从静止开始释放，则当砝码着地的瞬间小车的速度为 $\sqrt{\frac{2mgh}{M+m}}$。在这过程中，绳子的拉力对小车所做的功为 $\frac{Mmgh}{M+m}$。

1388·弹簧秤的刻度从 0 到 1000 牛的长度为 0.1 米这个弹簧秤的倔强系数为 10^4 牛/米。当挂上 200 牛重的物体时，弹簧的势能为 2 焦。

选择题

1389·质量为 m 的物体以速度 v 从地面竖直上抛，当它抛到离地面 h 高处，它的动能和势能正好相等，这个高度为：

(a) v_0^2/g; (b) $v_0^2/2g$;

(c) $\frac{v_0^2}{4g}$; (d) $2v_0^2/g$。

答(c)

1390·从离地面 h 高的地方以 v_0 的初速度，分别用水平、竖直向上和斜向抛出相同的三个小球。落地时，它们的

(a)速度相同； (b)动能相同；

(c)落地的时间相同； (d)速度和落地时间都相同。

答(b)

1391·物体沿着如示所示的 4 条不同轨道由离地面某高度的 A 点移到地面上的 B 点，则沿哪条路径移动时重力做功最多？

(a)路径 I；
(b)路径 II；
(c)路径 III；
(d)路径 IV；
(f)无没肯定哪一条路径。
(e)各条路径都一样；

答(e)

1392·某物体在力 F 的作用下，从光滑斜面的底端运动到斜面的顶端，动能的增量为$\triangle E_k$，势能的增量为$\triangle E_p$。下列说法哪些是正确的？

(a)力 F 所做的功等于$\triangle E_k$；
(b)力 F 所做的功等于$\triangle E_p$；
(c)力 F 所做的功等于$\triangle E_k+\triangle E_p$；
(d)合外力对物体所做的功等于$\triangle E_k$；
(e)合外力对物体所做的功等于$\triangle E_p$；
(f)合外力对物体所做的功等于$\triangle E_k+\triangle E_p$。

答(c)、(d)

1393·物体在斜面上作加速运动时，下列说法哪些是正确的？
(a)它的动能一定增大，重力势能也一定增大；
(b)它的动能一定增大，重力势能一定减小；
(c)它的动能一定增大，重力势能一定发生变化；
(d)如果在运动过程中加速度逐渐减小，但 a 仍大于零，则物体的动能也逐渐减小。

答(c)

1394 ·以初速 v_0 竖直上抛一个物体,不计空气阻力,当物体的速度 为初速一半时的高度是

(a)$\frac{1}{8}\cdot\frac{v_0^2}{2g}$;　　(b)$\frac{1}{4}\cdot\frac{v_0^2}{2g}$;
(c)$\frac{1}{2}\cdot\frac{v_0^2}{2g}$;　　(d)$\frac{3}{4}\cdot\frac{v_0^2}{2g}$。

答(d)

1395·作竖直上抛运动的物体，能达到的最大高度为 H，在 H/2 高度时的动能为 E_{k1}，在 H/4 高度时的动能为 E_{k2}，则 E_{k2}∶E_{k2}是

(a)1∶2;　　(b)1∶4;
(c)1∶$\sqrt{2}$;　　(d)2∶3。

答(d)

1396·起重机以 g/4 的加速度将质量为 m 的物体匀减速提升 h，则钢索的拉力对重物所做的功为

(a)$\frac{1}{4}$mgh;　　(b)$\frac{1}{2}$mgh;
(c)$\frac{3}{4}$mgh;　　(d)mgh。

答(c)

1397·如图，在水平台面上的 A 点，一个质量为 m 的物体以初速度 v_0 被抛出。不计空气阻力，当它到达 B 点时物体的动能为

(a)$\frac{1}{2}mv_0^2+mhH$;

(b)$\frac{1}{2}mv_0^2+mgh$;

(c)$mgH-mgh$;

(d)$\frac{1}{2}mv_0^2+mg(H-h)$。

答(b)

1398·物体由静止出发从光滑斜面顶滑下。当所用的时间是下滑到底的时间的一半时，物体的动能与势能之比为（以底端为零势能位置）

(a)1∶4；　　(b)1∶3；

(c)1∶2；　　(d)1∶1。

答(b)

1399·一个斜面的理想机械利益为5，实际机械利益为4。现用0.5mg的力沿斜面向上拉一个质量为m的物体，则物体动能的增量和物体重力势能的增量的比是（机械利益等于机械的有用阻力跟动力的比值）

(a)1∶1；　　(b)5∶4；

(c)3∶2；　　(d)2∶1。

答(b)

1400·一端固定在O点的水平轻质弹簧，原长为OC，受水平拉力作用而伸长，如图所示。当伸长为CA时，外力做功为E_0。现再从A拉伸到B，而且使AB=CA，则由A拉到B的过程中（弹性限度内），外力做功为

(a)E_0；　　(b)$2E_0$；

(c)$3E_0$；　　(d)$4E_0$。

答(c)

1401·一根轻质弹簧，一端固定，另一端栓一个物体放在光滑水平面上，如图所示。用力拉物体使弹簧伸长，放手后，物体在水平面上振动。如果物体在离平衡位置最大位移处的弹性势能为4焦，那末在离平衡位置的距离是最大位移的一半处的动能为

(a)1焦；　　(2)2焦；

(c)$2\sqrt{2}$；　　(d)3焦。

答(d)

1402·绳子一端固定，另一端拴一小球，如图所示。小球分别从水平位置A点和与水平成30°的B点无初速释放，则经过最低点C时，绳子的张力比是

(a)2∶1；　　(b)3∶2；

(c)4∶3；　　(d)4∶1。

答(b)

1403·如图所示，图(1)中m_1和m_2用不计质量的弹簧相连接；图(2)中m_1和m_2用不计质量，不可伸长的细杆相连接；其他条件完全相同。如果都施加相等恒力移动相同的位移，则

(a)图(1)中物体的速度大于图(2)中物体的速度；

(b)图(1)中物体的速度等于图(2)中物体的速度；

(c)图(1)中物体的速度小于力(2)中物体的速度；

(d)无法确定图(1)和图(2)中物体的速度哪个大。

答(c)

1404·从地面竖直向上抛出一物体，在上升和下落过程中不计空气阻力，小球两次经过离地 h 高的某点时，小球具有

(a)相同的速度；　　(b)相同的加速度；

(c)相同的机械能；　　(d)相同的动能。

答(b)、(c)、(d)

1405·以 40 米/秒的初速竖直向上抛出一个物体，经过 t 秒后，物体的势能是动能的 3 倍。不计空气阻力，g 取 10 米/秒 ^{2}，则 t 的大小为

(a)2 秒；　　(b)3 秒；

(c)4 秒；　　(d)6 秒。

答(a)、(d)

1406·质量为 m 的物体，从静止出发以 g/2 的加速度竖直下降 h 米。下列说法中哪些是正确的？

(a)物体的机械能增加 $\frac{1}{2}mgh$；　　(b)物体的机械能减小 $\frac{1}{2}mgh$；

(c)物体的机械能保持不变；　　(d)物体的动能增加 $\frac{1}{2}mgh$；

(e)重力做功 $\frac{1}{2}mgh$；　　(f)物体克服阻力做功 $\frac{1}{2}mgh$。

答(b)、(d)、(f)

1407·作竖直上抛运动的物体，它在上升过程中，如果动能的减少为 A，势能的增加为 B，物体克服重力所做的功为 C，物体克服空气阻力所做的功为 D。下列表示哪些是正确的？

(a)A=C+D;　　(b)A－B=C+D;

(c)A－B=D;　　(d)A+B=C+D。

答(a)、(c)

1408·用绳吊一重物，手拉绳的一端重物匀减速上升，则下列说法哪些是正确的？

(a)物体增加的势能等于物体减少的动能；

(b)物体增加的势能等于物体克服重服重力所做的功；

(c)物体增加的势能等于拉力对它所做的功；

(d)物体增加的势能等于物体减少的动能和拉力对它所做功的和；

(e)物体减少的动能等于拉力和重力对物体所做功的和。

答(b)、(d)、(e)

1409·关于机械能下说法哪些是正确的？

(a)作变速运动的物体，只要有摩擦力存在，机械能一定减少；

(b)如果物体所受合外力不为零，则机械一定发生变化；

(c)作抛体运动的物体，不计空气阻力时机械能是守恒的，因而物体在同一高度，具有相同的速度；

(d)在水平面上作变速运动的物体，它的机械能不一定变化。

答(d)

1411·一质点作匀速率圆周运动，下列说法哪些正确？

(a)拉力对物体所做的功，等于物体动能和势能的增量；

(b)拉力对物体所做的功，等于物体动能的增量；

(c)拉力对物体所做的功，等于物体势能的增量；

(d)物体克服重力所做的功，等于物体势能的增量；

(e)物体克服重力所做的功，等于物体动能的增量。

答(a)、(d)

1412・有两个相同的小球 A 和 B，它们的质量相等，A 球挂在一根长为 l 的绳子上，（绳子伸长不计）B 球挂在可伸长的较短的橡皮筋上，两球都拉到水平位置，如图所示，然后无初速释放，它们到达平衡位置时，橡皮筋的长度等于绳长 l 则小球通过平衡位置时，

(a)A 球的速度大于 B 的速度；

(b)A 球的速度等于 B 的速度；

(c)A 球的重力势能等于 B 球的重力势能；

(d)A 球的重力势能大于 B 球的重力势能；

(e)A 球所受的弹力大于 B 球所受的弹力；

(f)A 球的弹性势能小于 B 球的弹性势能。

答(a)(c)(e)(f)

1413・质量分别为 m_A 和 m_B 可作为质点处理的两个小球，已知 $m_A=2m_B=2m$，两球用不计质量不可伸长的绳子连接，并跨过光滑的固定圆柱，如图所示。使 A 球恰好和圆的轴心同度，B 球接触地面，然后释放，下列说法哪些是正确的？

(a)A 球到达地面以前，以 A 球和地球为系统的机械能守恒；

(b)A 球到达地面前，以 A 球、B 球和地球三者为系统的机械能守恒；

(c)A 球一着地，B 就停在原 A 球的高度处不动了；

(d)A 球着地时，B 球将继续上升；

(e)A球着地时的动能为 $\frac{2}{3}mgR$。

答(b)、(d)、(e)

1414・一根细绳的上端固定于 O 点，下端挂一质量为 m 的小球，在小球的平衡位置 B 点的正上方 C 处钉一枚钉子，BC=R。现把小球拉到等于 B 点 2R 的 A 点，如图所示，无初速地释放，不计空气阻力，小球经过 B 点后开始以 C 为圆心在竖直平面上作圆周运动,如果它能达到的最大高度为 h（离 B 点的高度）。下列说法哪些是正确的？

(a)整个运动过程的机械能守恒；

(b)整个运动过程的机械能不守恒；

(c)h=R;

(d)h=2R;

(e)R<h<2R。

答(a)、(e)

计算题

1415．某人站在离地面 h =10 米处的平台上以水平速度 v_0=5 米/秒抛出一个质量 m=1 千克的小球，如图所示，不计空气阻力，g 取 10 米/秒 ^{2}。求：

（1）人对小球做了多少功？

（2）小球落地时的速度多大？

[解答]（1）设人对小球所做的功为 W，从动能定理可知它应等于小球抛出时的动能，所以

$$W=\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}\times1\times5^2\text{焦}=12.5\text{焦}.$$

（2）由于不计空气的阻力，小球运动过程中只有重力对它做功，机械能守恒。设小球落地时的速度为 v，以地面为零势能位置，则

抛出时动能 $E_{k1}=\frac{1}{2}mv_0^2$，重力势能$E_{p1}=mgh$，

落地时动能 $E_{k2}=\frac{1}{2}mv^2$，重力势能$E_{p2}=0$，

则 $E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}$，即$mgh+\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2$

$$v=\sqrt{2gh+v_0^2}=\sqrt{2\times10\times10+5^2}\text{米/秒}=15\text{米/秒}。$$

1416．质量 m 为 1 千克的物体从轨道的 A 点静止下滑，轨道的 AB 段是弯曲的，BC 段是水平的，A 点高出 B 点 h=0.8 米。如图所示，如果物体在 B 点的速度 v 为 2 米/秒，而停止在离 B 点 s=3 米的 C 点上。求：

（1）物体在 AB 轨道上克服摩擦力所做的功；

（2）物体跟 BC 轨道间的滑动摩擦系数。

[解答]（1）设摩擦力对物体所做的功为 W，则

$$W=\Delta E_p+\Delta E_k=-mgh+\frac{1}{2}mv^2$$

$$=(-1\times9．8\times0．8+\frac{1}{2}\times1\times2^2)\text{焦}=-5.84\text{焦}。$$

即物体在 AB 轨道上克服摩擦力所做的功为 5.84 焦。

（2）设摩擦系数为μ，由动能定理知

$$umgs=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$u=\frac{v^2}{2gs}=\frac{2^2}{2\times9.8\times3}=0.07。$$

1417.物体由静止出发从倾角θ=30°的光滑斜面顶滑到底端时的速度为 v.如果斜面不光滑，则滑到底端时的速度为 0.8v。求物体与斜面间的摩擦系数。

〔解答〕设斜面的斜长为l,因为倾角为30°，所以高度$h=\frac{1}{2}$,在光滑斜面顶滑下时，机械能守恒，

所以 $mgh=\frac{1}{2}mv^2, v=\sqrt{gl}.$

在有摩擦的斜面顶滑下时，机械能不守恒，可用动能定理来解，设摩擦

系数为μ，则

$$mg\sin 30°\cdot l-\mu mg\cos 30°\cdot l=\frac{1}{2}m(0.8v)^2-0,$$

整理后得 $\sin 30°-\mu\cos 30°=0.32$

$$\mu=\frac{\sin 30°-0.32}{\cos 30°}=\frac{\frac{1}{2}-0.32}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=0.21。$$

1418．气球所受空气浮力为重力的 1.5 倍，由静止从地面上升，到 40 米高处时从气球上掉下一物体。问在什么位置物体的动能等于势能的两倍。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

〔解答〕气球上升时的加速度 $a=\frac{1.5mg-mg}{m}=0.5g,$ 当它上升到 40 米高度时的速度为 $v^2=2ah,$

$$v=\sqrt{2ah}=\sqrt{2\times 0.5\times 10\times 40}\text{米/秒}=20\text{米/秒}。$$

设从气球中掉下的物体为 m_0，这时物体的机械能为

$$m_0gh+\frac{1}{2}m_0v^2=400m_0=600m_0.$$

又设气球在离地 h_0 高度时动能等于势能的两倍，那末，物体的势能应为总机械能的 1/3，即

$$E_p=\frac{1}{3}\times 600m_0=200m_0,$$

$$m_0gh_0=E_p=200m_0,$$

$$h_o=\frac{200m_0}{m_0g}=20\text{米}。$$

1419.以 v 为 19.6 米/秒的速度从地面竖直向上抛出一个物体。问：

（1）它的重力势能和动能在什么高度相等？

（2）在什么高度它的动能等于重力势能的一半？

（3）在什么高度它的重力势能等于动能的一半？

[解答]（1）以 19.6 米/秒的速度竖直向上抛出一个物体，到达的最大高度 H 是

$$H=\frac{v^2}{2g}=\frac{19.6^2}{2\times 9.8}\text{米}=19.6\text{米}。$$

物体重力势能等于动能时，物体的重力势能为最大高度处的一半，这时的高度 h_1 是

$$h_1=\frac{H}{2}=\frac{19.6}{2}\text{米}=9.8\text{米}$$

（2）物体动能等于物体重力势能的一半时，物体的重力势能为最大高度处的 2/3，这时的高度 h_2 是

$$h_2=\frac{2}{3}H=\frac{2\times 19.6}{3}\text{米}=13.1\text{米}。$$

（3）物体重力势能等于物体动能的一半时，物体的重力势能为最大高度处的 1/3，这时的高度 h_3 是

$$h_3=\frac{1}{3}H=\frac{19.6}{3}\text{米}=6.5\text{米。}$$

1420.在光滑水平台面上有一根长度 l=1.5 米粗细均匀的绳索。开始时绳索的 1/4 长度垂于平台边缘，其余 3/4 平直地放在平台上，如图所示。由于绳索受重力作用，绳索从静止开始沿着平台面滑出平台，当绳索终端刚刚滑出平台边时，这时绳索的速度为多大？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解答]设绳索的质量为 m，垂下部分的长度为 $\frac{1}{4}l$,所以质量为$\frac{1}{4}m$,重心在平台面下$\frac{1}{8}l$.以平台面为零势能位置，则绳索的势能为

$$E_{p1}=-\frac{1}{8}l\cdot\frac{1}{4}mg=-\frac{1}{32}mgl.$$

全部滑出平台面时的势能为

$$E_{p2}=-\frac{l}{2}mg=\frac{-1}{2}mgl.$$

设这时绳索的速度为v,则动能为$E_{k2}=\frac{1}{2}mv^2$.由机械能守恒定律知

$$E_{p1}=E_{p2}+E_{k2},$$

即

$$-\frac{1}{132}mgl=-\frac{1}{2}mgl+\frac{1}{2}mv^2,$$

$$v=\frac{1}{4}\sqrt{15gl}=\frac{1}{4}\sqrt{15\times10\times1.5}\text{米/秒}=3.75\text{米/秒。}$$

1421.质量 m=1 千克的物体，从离地 h_0=2.4 米高处以 v_0=20 米/秒的速度竖直上抛，运动时受到空气阻力 f_1=0.2 牛，物体落地后陷入泥中 h_2=0.2 米深，如图所示。求泥土对物体的平均阻力。

[解答]设物体能上升的高度为 h_1,根据动能定理

$$(mg+f_1)h_1=\frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$h_1=\frac{mv_0^2}{2(mg+f_1)}=\frac{1\times20^2}{2(1\times9.8+0.2)}\text{米}=20\text{米。}$$

以物体陷入深度处为零势能位置，设泥土对物体的平均阻力为 f_2，根据功能原理，物体在最高点时具有势能 $E_{p1}=mg(h_0+h_1+h_2)$,在最低点时 $E_{p2}=0$,运动过程中空气阻力 f_1 和泥土对物体的阻力 f_2 都做负功，

$$-f_1(h_0+h_1)-f_2h_2=0-mg(h_0+h_1+h_2),$$

$$f_2=\frac{(mg-f_1)(h_0+h_1)+mgh_2}{h_2}$$

$$=\frac{(1\times9.8-0.2)(2.4+20)+1\times9.8\times0.2}{0.2}\text{牛}=1085\text{牛。}$$

1422.体重为 600 牛的人，坐在用滑轮组悬挂的台板上，他用力拉绳使自己由静止出发以 2 米/秒 ^{2} 的速度上升 1 米。不计滑轮质量、台板的质量和摩擦力，g 取 10 米/秒 ^{2}，如图所示。他做了多少功？他的动能增加了多少？

[解答]设绳子的张力为 T，

则
$$3T-mg=ma,$$
$$T=\frac{m(g+a)}{3}=\frac{60(10+2)}{3}\text{牛}=240\text{牛。}$$

当人上升 1 米，绳子移动 3 米，所以他做了 W=3T=3×240 焦=720 焦的功。这时他的势能的变化$\triangle W_p$=mgh=600×1 焦=600 焦。

由机械守恒
$$W=\triangle E_p+\triangle E_k,$$
$$\triangle E_k=W-\triangle E_p=(720-600)\text{焦}=120\text{焦。}$$

1423.质量 m=2 千克的物体，从倾角为 30°的粗糙斜面底以速度 v_0=10 米/秒沿斜面上滑，滑动 s=5 米后，速度变成 v=5 米/秒。求物体所受的摩擦力的大小。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解答]根据功能原理。物体初状态的机械能
$$E_0=\frac{1}{2}mv_0^2$$

末状态的机械能$E_t=mgs\sin 30°+\frac{1}{2}mv^2.$

设物体所受的摩擦力为 f，则
$$-fs=E_0-E_t=mgs\sin 30°+\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$
$$f=\frac{m(v_0^2-v^2)-2mgs\sin 30°}{2s}$$
$$=\frac{2(10^2-5^2)-2\times2\times10\times5\times\frac{1}{2}}{2\times5}\text{牛}=5\text{牛。}$$

1424.滑雪者在重力作用下，从静止开始沿一个倾角为θ的冰坡滑下 100 米，接着又沿相同倾角的另一冰坡上滑，前进 60 米后速度为零。已知 tgθ=0.1，求雪撬和冰面之间的滑动摩擦系数。

[解答]设出发点为 A，最后到达点为 D，如图所示。

根据题意，$s_{AB}=100$米，$s_{BD}=60$米，滑雪者在A点时的机械能$E_A=mg\cdot s_{AB}\sin\theta$,在D点时的机械能$E_D=mg\cdot s_B\sin\theta$.滑雪者在运动过程中克服摩擦力所做的功$W_f=\mu mg(s_{AB}+s_{BD})\cos\theta$.根据功能原理，

$$mg\cdot s_{AB}\sin\theta-mg\cdot s_{BD}\sin\theta=\mu mg(s_{AB}+s_{BD})\cos\theta,$$

$$40\sin\theta=\mu\cdot160\cos\theta,$$

$$\mu=\frac{40}{160}\mathrm{tg}\theta=\frac{1}{40}=0.025.$$

1425.如图所示，平面 AB 和斜面 BC 都为光滑面，h=3 米，BC=l=5 米.用水平推力 F=5 牛推动质量 m=1 千克的物体，在由 A 点推到 B 点后不再用力。试问：要使物体恰好在斜面 C 点静止，AB 应为多长？如果水平推力 F 把物体一直推到 C 点再停止用力,则物体到达 C 点时的动能是多大？物体返回到平面 AB 时的速度为多大？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解答]当力 F 将物体推到 B 后，力停止作用，则物体从 B 滑到 C 的过程机械能守恒。设物体在B点时的速度为v_1,则$\frac{1}{2}mv_1^2=mgh$.

根据动能定理，设 AB=s,则

$$Fs=\frac{1}{2}mv_1^2=mgh,$$

$$s=\frac{mgh}{F}=\frac{1\times10\times3}{5}\text{米}=6\text{米}。$$

如果力 F 把物体一直推到 C 点才停止作用，设到达 C 点时物体的速度为v_2，根据功能原理$E_1=\frac{1}{2}mv_1^2$,在BC段力F做正功$W_F=Fl\cos\theta$,$E_2=mgh+\frac{1}{2}mv_2^2$.所以

$$Fl\cos\theta=mgh+\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2.$$

由于 $$\frac{1}{2}mv_1^2=mgh,$$

所以 $$Fl\cos\theta=\frac{1}{2}mv_2^2,$$

即物体在 C 点时的动能 $E_{k2}=Fl\cos\theta=5\times5\times0.8$ 焦=20 焦。

设物体落地时的速度为 v_2,根据机械能守恒，

$$mgh+\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}mv_3^2,$$

$$v_3=\sqrt{\frac{mgh+\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}m}}=\sqrt{\frac{1\times10\times3+20}{0.5}}\text{米/秒}$$

$$=10\text{米/秒}。$$

1426.质量为 4m 的物体 A 放在倾角为 30°的光滑斜面上，斜面跟地固定。将物体 A 拴在不计质量的细绳一端，绳和斜面平行，并通过无摩擦的定滑轮在绳的另一端挂一个质量为 m 的物体 B，如图所示。A 和 B 离地的高度都是 h，在 B 物体下端另拴一条不计质量的细绳，绳的另一端固定在地面上。试问：

（1）将绳的 C 处突然剪断，能否用机械能守恒定律来计算物体 A 和 B 到达地面时的速度大小？（不计空气阻力）

（2）如果斜面不光滑，摩擦系数为μ，则在 C 处剪断后，是否仍能用机械能守恒定律来计算物体 A 和 B 到达地面时的速度大小？

（3）如果斜面是光滑的，改在绳子的 D 处突然剪断，是否能用机械能守恒定律来计算物体 A 到达地面时的速度大小？

[解答]（1）在 C 处剪断后，整个装置分成了两个系统，一个是由物体 A 和地球所组成的系统 I。另一个是由物体 B 和地球所组成的系统 II。由于系统 I 只有重力做功，所以机械能守恒，即

$$4mgh = \frac{1}{2}4mv_A^2,$$

$$v_A = \sqrt{2gh}.$$

系统 II 中的物体 B 是作自由落地运动，机械能也守恒，即 $mgh = \frac{1}{2}mv_B^2$

$$v_B = \sqrt{2gh}.$$

(2)如果物体 A 和斜面有摩擦，则在 C 处剪断后，系统 I 因系统内有摩擦力做功，所以不能用机械能守恒定律来求它到达地面时的速度大小。应用动能定理来计算，物体从高度为 h，倾角为 30°的斜面滑到底时，物体沿斜面滑动的距离为 2h，根据动能定理

$$4mg\sin 30° \cdot 2h - u4mg\cos 30° \cdot 2h = \frac{1}{2} \cdot 4mv_A^2,$$

$$v_A = \sqrt{2gh - 2\sqrt{3}ugh} = \sqrt{(1-\sqrt{3}u)2gh}.$$

系统II同第（1）小题的情况完全一样 $v_B = \sqrt{2gh}.$

(3)如果在 D 处剪断，对于由物体 A 和地球组成的系统 I，因为绳子的拉力对物体 A 作功，所以机械能不守恒，如果我们把系统扩大到把物体 B 也包括在内，那末绳子的拉力对扩大了的系统来说是内力，它对 A 所做的功与对 B 所做的功的总和是零，即对系统来说不做功，所以机械能守恒，系统初状态的机械能

$$E_1=4mgh+mgh=5mgh$$

由于 4mgsin30°>mg,物体 A 要沿斜面下滑，当它下滑到底时，系统末状态的机械能

$$E_1 = \frac{1}{2}(4m+m)v^2 + mg(h+2h) = \frac{5}{2}mv^2 + 3mgh$$

所以 $$5mgh = \frac{5}{2}mv^2 + 3mgh, \quad v = \frac{2}{5}\sqrt{5gh}.$$

1427.质量 M=3 千克和 m=2 千克的物体拴在绳的两端挂在定滑轮上，

绳的质量和绳跟滑轮间的摩擦不计。求：当 M 从静止出发下降 h=1 米时的速度为多大？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解法一]用运动定律解：

设运动时绳子的拉力为 T，则

$$Mg-T=Ma \qquad (1)$$

$$T-mg=ma \qquad (2)$$

解（1）、（2）式得$a=\frac{M-m}{M+m}g=\frac{3-2}{3+2}\times10\text{米}/\text{秒}^2=2\text{米}/\text{秒}^2$。

从运动学公式　　$v^2=2ah$，

$$v=\sqrt{2ah}=\sqrt{2\times2\times1}\text{米}/\text{秒}=2\text{米}/\text{秒}。$$

[解法二]以 M、m 和地球组成系统，并以 m 的位置为零势能位置，则物体系初状态的机械能为 $E_{pM}+E_{pm}=M_gH+0$，

物体系末状态的机械能为

$$E'_{pM}+E'_{pm}+E_{kM}+E_{km}=Mg(H-h)+mgh+\frac{1}{2}(M+m)v^2.$$

根据机械能守恒定律

$$MgH=Mg(H-h)+mgh+\frac{1}{2}(M+m)v^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{2(M-m)gh}{M+m}}=\sqrt{\frac{2(3-2)\times10\times1}{3+2}}\text{米}/\text{秒}$$

$$=2\text{米}/\text{秒}。$$

1428.如图所示，m_1=3 千克、m_2=4 千克。绳和滑轮间、m_1 和水平桌面间的摩擦都不计，滑轮重量也不计。求当 m_2 由静止出发下降 0.8 米时的速度。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解法一]用运动定律解。

设绳子的张力为 T，m_2 下降的加速度为 a_2，m_1 移动的加速度为 a_1，则

$$T=m_1a_1 \qquad (1)$$

$$m_2g-2T=m_2a_2 \qquad (2)$$

$$a_1=2a_2 \qquad (3)$$

解方程得　$a_1=\frac{2m_2g}{4m_1+m_2}$,　$a_2=\frac{m_2g}{4m_1+m_2}$

设物体下降$h=0.8$米时的速度为v，则

$$v^2=2a_2h,$$

$$v=\sqrt{2a_2h}=\sqrt{\frac{2m_2gh}{4m_1+m_2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2\times4\times10\times0.8}{4\times3+4}}\text{米}/\text{秒}=2\text{米}/\text{秒}。$$

[解法二]用机械能守恒定律解。

由于系统的机械能守恒，以 m_2 下降 h 后的位置为零势能位置，设 m_2 的速度为 v，则 m_1 的速度为 2v，则$m_2gh=\frac{1}{2}m_1(2v)^2+\frac{1}{2}m_2v^2$,

将已知数据代入后解得 v=2 米/秒。

1429.如图所示，质量 m 为 0.5 千克的小球，从半径 R 为 1 米的 1/4 圆弧槽的上端 A 滚下，在离地面 h=1.25 米的 B 点处水平离开圆弧，测得落地点离 B 点的水平距离 s 为 2 米。求：（1）小球落地时的速度大小。（2）小球在圆弧槽滚下时克服阻力所做的功。（不计空气阻力，g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解答]（1）从 h=1.25 米高水平抛出的小球落地时间为

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times1.25}{10}}\text{秒}=0.5\text{秒。}$$

小球离开 B 点时的水平速度

$$v_B=\frac{s}{t}=\frac{2}{0.5}\text{米/秒}=4\text{米/秒。}$$

（2）在从 A 点滚到 B 点的过程中，由动能定理知

$$mgR-W_{阻}=\frac{1}{2}mv_B^2,$$

$$W_{阻}=mgR-\frac{1}{2}mv_B^2=(0.5\times10\times1-\frac{1}{2}\times0.5\times4^2)\text{焦}$$

$$=1\text{焦。}$$

即　　小球克服阻力所做的功为 1 焦。

1430.一根不计质量的棒，长度为 l，一端固定，棒的中点串一个质量为 4m 的球，棒从水平位置下落到竖直位置时，质量为 m 的球的速度为多大？

[解答]以质量为 m 的球在最低点时为零势能位置，由机械能守恒得

$$mgl+4m\cdot g\cdot\frac{l}{2}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\cdot4m\cdot(\frac{v}{2})^2,$$

$$3mgl=mv^2,$$

$$v=\sqrt{3gl}.$$

1431.物体 A 静止在斜面上，如用沿着斜面向下的力 F 推物体，而且 F 的大小等于斜面和物体间的滑动摩擦力，如图所示。求物体从 h 高运动到斜面底时的速度。

[解法一]如果选物体 A 和地球组成系统，则推力 F，摩擦力 f 和斜面对物体的弹力都是系统的外力。其中弹力不做功，推力 F 和摩擦力 f 大小相等方向相反，合外力对系统所做的功为零。而系统内只有重力做功，所以机械能守恒。

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$v=\sqrt{2gh}.$$

[解法二]如果选物体 A，斜面和地球三者组成系统，则除推力仍为系统的外力外，地面对斜面的弹力和地面跟斜面间的静摩擦力也是系统的外力，弹力和静摩擦力由于斜面不动，不做功，推力 F 对系统做正功，

所以系统的机械能要增加。再看系统内，弹力不做功，滑动摩擦做负功使系统的机械能减少（转化为非机械能），但因推力与滑动摩擦力大小相等，外力做功使系统增加的机械能，数值上等于系统内摩擦力做功使系统减少的机械能，所以系统的机械能是不变的，但并不符合机械能守恒定律的条件。可以根据功能原理来求出物体到达底部时的速度.E_0=mgh.W_F=Fl,W=-fl,

$$E_t=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$Fl-fl=-mgh+\frac{1}{2}mv^2,$$

由于 $$F=f,$$

所以 $$mgh=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$v=\sqrt{2gh}.$$

1432.不计质量长为 2l 的细棒，一端用铰链固定。在细棒中点处，穿入一个质量为 4m 的小球 A，并固定在棒上。在细棒的另一端固定一个质量为 m 的小球 B。棒可绕固定的水平轴转动，如图所示。现将棒拉成水平后放开，求小球到达最低位置时的速度，以及这时铰链上受力的大小。

[解答]从放手到 B 球到达最低点的过程中，系统的机械能是守恒的。设小球 B 到达最低点时的速度为 v_B，小球 A 到达最低点时的速度为 v_A。由于它们都做圆周运动，并且角速度相同，它们的半径$R_A=\frac{1}{2}R_B$，由$v=wR$可知$v_A=\frac{1}{2}v_B$,

根据机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}\cdot 4mv_A^2=mg\cdot 2l+4mgl,$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2+\frac{1}{2}\cdot 4m(\frac{v_B}{2})^2=6mgl,$$

$$v_B=\sqrt{6gl},\qquad v_A=\frac{1}{2}\sqrt{6gl}.$$

当细棒转到竖直位置时，小球 A 和 B 分别经过它们各自的最低点，这时 A、B 两球所需要的向民力方向向上，都得由细棒的拉力来提供。细棒下半段对小球B的拉力$F_1=mg+\frac{mv_B^2}{2l}=4mg$,细棒上半段对小球A的拉力

$$F_2=4mg+F_1+\frac{4mv_A^2}{l}=4mg+4mg+6mg=14mg.$$

铰链上所受的力的大小等于 F_2，即等于 14mg.

1433.质量 m=2 千克的物体从半径 R=0.5 米的半圆槽的边缘 A 点沿内

表面由静止开始下滑，到达最低点 B 时的速度为 v=2 米/秒。如图所示。求：

（1）物体在 AB 段所受的平均阻力 f 为多大？

（2）在最低点 B 处物体对球面的压力？

[解答]（1）以 B 处为零势能位置，根据功能原理。

$$-f(\frac{2\pi R}{4})=\frac{1}{2}mv^2-mgR,$$

$$f=\frac{2mgR-mv^2}{\pi R}=\frac{2\times2\times9.8\times0.5-2\times2^2}{3.14\times0.5}\text{牛}$$

$$=7.4\text{牛。}$$

（2）在最低点 B 处物体受重力 mg 和弹力 N 的作用，合外力为向心力，所以

$$N-mg=\frac{mv^2}{R},$$

$$N=mg+\frac{mv^2}{R}=(2\times9.8+\frac{2\times2^2}{0.5})\text{牛}$$

$$=35.6\text{牛。}$$

1434.质量为 m 的物体自静止出发沿着光滑轨道 ABC 滑行，如图所示，已知 AB 段为 1/4 圆弧，C 点的曲率半径为 r，O'点和 B 在同一水平面上，且 O'C⊥O'B。物体滑到 C 点时，轨道对物体的弹力为零。求 AB 段的曲率半径 R 为多大？

[解答]设物体滑到 C 点时的速度为 v，由于轨道是光滑的，滑动过程中只有重力做功，所以机械能守恒.

$$\frac{1}{2}mv^2+mgr=mgR \qquad (1)$$

由于物体在 C 点时弹力为零，所以

$$mg=\frac{mv^2}{r} \qquad (2)$$

解（1）、（2）式得 R=1.5r.

1435.如图所示，半径为 R 的半圆槽木块固定在水平地面上，质量为 m 的小球以某速度从 A 点无摩擦地滚上半圆槽,小球通过最高点 B 后落到水平地面上的 C 点处，已知 AC=AB=2R。求：

（1）小球在 A 点时的速度；

（2）小球在 B 点时半圆槽对它的弹力。

[解答]分析小球的运动情况，可以看出小球从 A 运动到 B 的过程中做变速圆周运动，由于无摩擦，机械能是守恒的。小球从 B 到 C 的过程是做平抛运动，不计空气阻力，机械能也是守恒。设小球在 A 点时速度为 v_A，在 B 点时的速度为 v_B，则

$$\frac{1}{2}mv_A^2=mg\cdot2R+\frac{1}{2}mv_B^2.$$

由上式可知只要求出小球经过 B 点时的速度 v_B，就可求出小球在 A 点时的速度。

小球从 B 到 C 是做平抛运动，$AC=v_B t$，

即 $$v_B = \frac{AC}{t} = \frac{2R}{t},\text{而小球落地时间}t = \sqrt{\frac{4R}{g}},$$

因此 $$v_B = \frac{2R}{\sqrt{\frac{4R}{g}}} = \sqrt{gR}.\text{由此得}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mg \cdot 2R + \frac{1}{2}mgR,$$

$$v_A = \sqrt{5gR}.$$

小球在最高点B时所需的向心力为

$$F_{向} = \frac{mv_B^2}{R} = \frac{mgR}{R} = mg.$$

因此小球在半圆槽的 B 点时，半圆槽对它的弹力为零。

1436.在长度为 2l 的轻杆两端分别固定着质量为 m 和 M 的小球，M＞m，杆的中点有水平转轴 O，整个装置可绕 O 轴在竖直平面内转动。如果先把杆放在水平位置，如图所示，然后从静止开始释放。当杆转到竖直位置时，试分析杆的受力情况。

[解答]整个装置作无摩擦转动时，系统的机械能守恒。选 A 处为零势能位置，设杆转至竖直位置时球的速度为 v，则开始状态系统的机械能

$$E_{k1} = Mgl + mgl,$$

终了状态系统的机械能

$$E_{k2} = mg \cdot 2l + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2,$$

所以 $$Mgl + mgl = mg \cdot 2l + \frac{1}{2}(M+m)v^2,$$

得 $$v = \sqrt{\frac{2(M-m)gl}{M+m}}.$$

先分析大球受力情况，当它以速度 v 经过最低位置作圆周运动时，

杆必须对大球有一个大小为$Mg+\frac{Mv^2}{l}$,方向向上的拉力。由此杆的下端必受一个大球对它的向下作用力$Mg+\frac{Mv^2}{l}$.但杆的上端受力情况如何，要作具体分析。要根据小球所需的向心力与重力的大小相比较来决定。如果$mg=\frac{mv^2}{l}$,则小球对杆无作用力。如果$mg>\frac{mv^2}{l}$,则小球对杆有向下作用力，大小为$mg-\frac{mv^2}{l}$.如果$mg<\frac{mv^2}{l}$,则小球对杆有向上的作用力，大小为（$mg-\frac{mv^2}{l}$).由于向心力的大小取决于小球的速度，又从$v=\sqrt{\frac{2(M-m)gl}{M+m}}$,可知小球的速度在$l$不变时取决于两球质量的大小。当$M=3m$时，$v=\sqrt{\frac{2(3m-m)gl}{3m+m}}=\sqrt{gl}$,向心力$\frac{mv^2}{l}=\frac{mgl}{l}=mg$,这时小球对杆无作用力。当$M<3m$时，$\frac{mv^2}{l}<mg$小球对杆有向下作用力。当$M>3m$时，$\frac{mv^2}{l}>mg$小球对杆有向上作用力。至于转轴对杆在上述三种情况中，都有一个方向向上的作用力

$$\begin{aligned}F&=Mg+\frac{Mv^2}{l}+mg-\frac{mv^2}{l}\\&=Mg+\frac{2M(M-m)}{M+m}g+mg-\frac{2m(M-m)}{M+m}g\\&=\frac{3M^2+3m^2-2Mm}{M+m}g.\end{aligned}$$

当 M=3m 时，F=6mg.

1437.质量为 m 的小球，在轨道上离地 H 高的 A 点由静止出发无摩擦滑下，当小球滑到半径为 r 的环形轨道的最高点时，小球对轨道的压力为零，如图所示。求 H 与 r 的比。

[解答]小球从 A 滑到 B 的过程中只有重力做功，所以机械能守恒

$$mgH=mg\cdot 2r+\frac{1}{2}mv_B^2$$

$$v_B^2=2g(H-2r)$$

当小球的重力等于它作圆周运动所需的向心力时，小球对轨道的压力为零。所以

$$mg=\frac{mv_B^2}{r},v_B^2=gr.$$

代入（1）式得 $$gr=2g(H-2r),$$

$$\frac{H}{r}=\frac{5}{2}.$$

1438.**从光滑斜面底端以**$v_o=5\sqrt{3}$**米/秒的速度沿斜面向上弹出一小球。已知斜面高**$h=2.5$**米，物体离开斜面顶端后落在离斜面顶端水平距离**$s=2.5\sqrt{3}$**米的地面上，如图所示。求斜面倾角θ的大小。（不计空气阻力，**g**取**10**米/秒**^{2}**）**

[解答]设小球到达斜面顶时的速度为v,由机械能守恒定律知

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+mgh,$$

$$v=\sqrt{v_0^2-2gh}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2-2\times10\times2.5}\text{米/秒}=5\text{米/秒。}$$

由斜抛运动公式知，小球落地时间

$$t=\frac{s}{v\cos\theta}=\frac{2.5\sqrt{3}}{5\cos\theta}\text{秒}=\frac{\sqrt{3}}{2\cos\theta}\text{秒，}$$

$$-h=v\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2,$$

$$-2.5=5\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\cos\theta}-\frac{1}{2}\times10\times\frac{3}{4\cos^2\theta},$$

$$-2.5=2.5\sqrt{3}\text{tg}\theta-5\times\frac{3}{4}(1+\text{tg}^2\theta),$$

整理后得 $$3\text{tg}^2\theta-2\sqrt{3}\text{tg}\theta+1=0,$$

$$\text{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\theta=30°.$$

1439.如图（a）所示，物体A和B叠放并在光滑斜面上向下滑动。A和B之间的摩擦系数为μ，为了在下滑时A和B不发生滑动，μ的最小值应为多大？

[解法一]用运动定律解。

由于斜面是光滑的，且A和B不发生滑动，所以物体A下滑时的加速度为a=gsinθ，方向沿斜面向下，如图（b）所示，将a分解为竖直向下的加速度a_v和水平向左的加速度a_x,则

$$a_x=a\cos\theta=g\sin\theta\cos\theta,$$

$$a_v=a\sin\theta=g\sin^2\theta$$

分析A的受力情况，在下滑时物体A受重力mg，B对它的弹力N和静摩擦力f的作用。根据牛顿第二定律得 f=max=mgsinθcosθ,

$$N=mg-ma_v=mg-mg\sin^2\theta=mg(1-\sin^2\theta)=mg\cos^2\theta$$

所以 $$\frac{f}{N}=\frac{mg\sin\theta\cos\theta}{mg\cos^2\theta}=tg\theta.$$

$u=\frac{f}{N}=tg\theta$，如果$u<tg\theta$，则下滑过程中A和B之间要发生滑动，如果$u\geq tg\theta$，A和B就不会发生滑动。

[解法二]设A、B在斜面上滑动l距离后速度为v。以A、B和地球组成的系统，因为只有重力做功所以机械能守恒，$mgl\sin\theta=\frac{1}{2}mv^2$. 根据动能定理，物体A在下滑过程中，摩擦力对A做正功$W_f=fl\cos\theta$，B对A的弹力对A做负功$W_N=-Nl\sin\theta$，重力对A做正功$W_G=mgl\sin\theta$，

$$W_G+W_f+W_N=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$mgl\sin\theta+fl\cos\theta-Nl\sin\theta=\frac{1}{2}mv^2,$$

因为 $$mgl\sin\theta=\frac{1}{2}mv^2,$$

所以 $$fl\cos\theta=Nl\sin\theta,$$

$$\frac{f}{N}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=tg\theta,$$

如果$\mu\geq tg\theta$，A与B就不会发生滑动。

1440．一辆车通过一根跨过定滑轮的绳PQ提升井中质量为m的物体，如图所示。绳的P端拴在车后的挂钩上，Q端拴在物体上。设绳的总长不变，绳的质量、定滑轮的质量、滑轮上的摩擦都忽略不计。

开始时，车在A点，左右两侧绳都已绷紧，并且是竖直的。左侧绳长为H，提升时，车加速向左运动，沿水平方向从A经过B驶向C。设A到B的距离也为H，车过B点时的速度为v_B。求在车由A移到B的过程中，Q端绳的拉力对物体做的功。

[解答]设绳的P端到达B处时，左边绳与水平地面所成夹角为θ，物体从井底上升的高度为h，速度为v，所求的功为W，则

$$W=\frac{1}{2}mv^2+mgh \qquad (1)$$

因绳总长不变，所以

$$h=\frac{H}{\sin\theta}-H \qquad (2)$$

将v_B分解成垂直于绳的速度v_1，和沿绳的方向的速度v_2，即$v_B=v_1+v_2$. 则 $$v_2=v=v_B\cos\theta \qquad (3)$$

将（2）、（3）两式代入（1）式，得

$$W=\frac{1}{2}mv_B^2\cos^2\theta+mg(\frac{1}{\sin\theta}-1)H,$$

因为 $$\theta=\frac{\pi}{4},$$

可得 $$W=\frac{1}{4}mv_B^2+mg(\sqrt{2}-1)H.$$

1441.用细绳悬挂着质量为 m 的小球，绳长 l，如图所示，今将小球拉到水平位置，然后放手。求：

（1）小球到达最低点 B 时的速度；

（2）小球到达最低点 B 时，绳对它的拉力。

[解答]（1）小球在运动过程中受重力 mg 和绳的拉力 T 的作用，由于小球在竖直平面内作圆周运动，T 和小球的位移方向垂直，不做功，只有重力对小球做功，所以机械能守恒。

在 A 点时，动能 $E_{kA}=0$,重力势能 $E_{pA}=mgl$.

在B点时，动能$E_{kB}=\frac{1}{2}mv_B^2$,重力势能$E_{pB}=0$.

$$E_{kA}+E_{pA}=E_{kB}+E_{pB},$$

$$mgl=\frac{1}{2}mv_B^2,$$

$$v_B=\sqrt{2gl}.$$

（2）小球运动到 B 点时，受竖直向下的重力 mg 和竖直向上的拉力 T_B 作用，合力即为小球作圆周运动时所需的向心力，所以

$$T_B-mg=\frac{mv_B^2}{l},\text{而}v_B^2=2gl,$$

所以 $$T_B=mg+m\frac{2gl}{l}=3mg.$$

1442.单摆的摆长为 l，摆角为 θ.求摆球在最低点时的速度。

[解答]摆球受到重力和悬线拉力的作用，悬线的拉力垂直于摆球的运动方向，不做功，只有重力做功，所以机械能守恒。以最低点为零势能位置，则摆球在最高点时，动能 Ek1=0，重力势能 Ep1=（l-lcos θ).在最低点时，动能$E_{k2}=\frac{1}{2}mv_1^2$,重力势能$E_{p2}=0$.

所以 $$mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$v=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}.$$

1443.质量不计长为 l 的杆可绕端点 O 在竖直平面内转动，杆的中点和用一端各有质量都为 m 的小球 A 和 B。开始时，杆处于水平位置，然后让杆自由摆下，如图所示。问当杆摆到竖直位置时，A 球上、下的两段杆所受的张力分别为多大？

〔解答〕设B球在最低点时的速度为v_B,则A球在最低点时的速度$v_A=\frac{1}{2}v_B$,由机械能守恒知,

$$m_A gl+m_B gl=m_A g\frac{l}{2}+\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2,$$

由于 $m_A=m_B=m,\quad v_A=\frac{1}{2}v_B,$

代入得 $\frac{3}{2}mgl=\frac{5}{8}mv_B^2,\quad v_B^2=\frac{12}{5}gl.$

设杆下段所受的张力为$T_下$，则

$$T_下-m_B g=\frac{mv_B^2}{l},$$

$$T_下=m_B g+\frac{mv_B^2}{l},$$

$$=mg+\frac{m\times\frac{12}{5}gl}{l}=\frac{17}{5}mg,$$

设杆上段所受的张力为 $T_上$，则

$$T_上-m_A g-T_下=\frac{mv_A^2}{\frac{l}{2}},$$

$$T_上=m_A g+T_下+\frac{mv_A^2}{\frac{l}{2}},$$

$$=mg+\frac{17}{5}mg+\frac{1}{2}\frac{mv_B^2}{l}$$

$$=mg+\frac{17}{5}mg+\frac{6}{5}mg$$

$$=\frac{28}{5}mg.$$

1444.质量为 m 的小球，在轨道上离地 H 高的 A 点由静止出发无摩擦滑下，当小球滑到半径为 R 的圆形轨道时，该圆形轨道上端有一个 120°的缺口，如图所示。求 H 为多大时才能使小球越过缺口？

[解答]设小球滑到 B 点时的速度为 v_B。由机械能守恒定律

$$mgH=mg(R+R\cos\alpha)+\frac{1}{2}mv_B^2,$$

$$mg(H-\frac{3}{2}R)=\frac{1}{2}mv_B^2,$$

$$v_B^2=2gH-3gR \qquad (1)$$

把 v_B 分解为竖直向上的速度 $v_1=v_B\sin\alpha$和水平速度 $v_2=v_B\cos\alpha$.要使小球越过缺口刚好落在 C 点，由斜抛运动的射程公式得

$$s = 2R\sin\alpha = \frac{v_B^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$v_B^2 = \frac{2gR\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{gR}{\cos\alpha} \quad (2)$$

从（1）式和（2）得 $$2gH - 3gR = \frac{gR}{\cos\alpha}2gR,$$

$$2H = 5R,$$

$$H = \frac{5}{2}R.$$

1445.在固定于 O 点的一根绳子的下端，系一个质量为 m 的小球，绳长 l,在离 O 点 h 的地方钉一枚钉子 C，把绳拉到水平，如图所示。释放后，小球到达最低点后以 C 为圆心作圆周运动。求 h 的最小值。

[解答]小球从水平位置下落时以 l 为半径作圆周运动，到达最低点时的速度为$v_0 = \sqrt{2gl}$,**动能为**$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl$,**要使小球能以**C**为圆心作圆周运动，而且到达最高点时的速度为**v，

则 $mg = \frac{mv^2}{l-h}$, $v = \sqrt{g(l-h)}$,

动能为 $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg(l-h).$

由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 2mg(l-h),$$

$$mgl = \frac{1}{2}mg(l-h) + 2mg(l-h),$$

$$3l - 5h = 0, \quad h = \frac{3}{5}l.$$

1446.在固定于 O 点的一根长 L=2h 的绳上挂一个质量为 m 的小球，在离 O 点 h 的地方钉一个钉子 C，把绳拉到水平，如图所示。释放后，小球到达最低点后能再上升到多大的高度？

[解法一]分析小球的运动情况。

从水平位置到最低点 A，小球以 2h 为半径作圆周运动，从最低点 A 到 B，小球以 C 为中心，h 为半径作圆周运动，设小球到达 B 点时的速度为v，**而且**$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{h}$,**即**$v^2 = gh\cos\theta = gh_1$.**这时**BC**段绳的张力为零。从 B 开始，小球以速度 v，射出角为θ作斜抛运动。设 D 点为斜抛运动的最高点，D 点离 B 点的竖直高度为 h′。整个运动过程中机械能守恒，从水平到**B**点的过程中，**$mg\cdot 2h = mg(h+h_1) + \frac{1}{2}mv^2$,

以 v^2=ghcosθ ,h_1=hcosθ ,代入上式得

$$2mgh = mgh(1+\frac{3}{2}\cos\theta),$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3}, \qquad h_1 = \frac{2}{3}h.$$

从 B 点到 D 点的过程中

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh' + \frac{1}{2}m(v\cos\theta)^2,$$

$$\frac{1}{2}mgh\cos\theta = mgh' + \frac{1}{2}mgh\cos^2\theta,$$

用$\cos\theta = \frac{2}{3}$代入上式得

$$h' = \frac{1}{3}h - \frac{4}{27}h = \frac{5}{27}h.$$

设小球到达最低点后能再上升H高度，则

$$H = h + h_1 + h' = h + \frac{2}{3}h + \frac{5}{27}h$$

$$= \frac{50}{27}h = \frac{25}{27}L.$$

[解法二]设最高点 D 和 O 点的高度差为 x，这时小球的速度为 v_D，由于整个过程机械能守恒，所以$mgx = \frac{1}{2}mv_D^2, v_D^2 = 2gx.$
又设小球在 B 点时绳子的张力为零，小球的速度为 v_B，绳 OB 与竖直方向 OC 的夹角为θ，则

$$mgh(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv_B^2, \quad v_B^2 = 2gh(1-\cos\theta).$$

由于绳子的张力为零，

所以 $mg\cos\theta = \frac{mv_B^2}{h}, \qquad v_B^2 = gh\cos\theta,$

$$2gh(1-\cos\theta) = gh\cos\theta,$$

$$2(1-\cos\theta) = \cos\theta,$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3}.$$

由于小球从 B 点到 D 点是作斜抛运动，最高点时的速度 $v_D=v_B\cos\theta$，所以$v_D^2 = v_B^2\cos^2\theta$,

$$2gx=gh\cos^3\theta,$$

$$x = \frac{1}{2}h\cos^3\theta = \frac{1}{2}\cdot\frac{L}{2}(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{27}L,$$

即小球到达最高点后，能再上升

$$H = L - \frac{2}{27}L = \frac{25}{27}L$$的高度。

1447.如图所示，质量 m 为 0.1 千克的小球系在长 l 为 1 米的绳端，

以绳的另一端 O 为转轴，使小球从水平位置 OA 开始在竖直平面内顺时针方向作圆周运动，到达最高点 B 时，绳子受到 mg 牛的拉力；当小球继续转到 C 点时，绳子被拉断，这时绳子和最低点位置的夹角为∠COD=60°．小球落在 O 点的正下方地面上的 E 点。求：

（1）绳子被拉断的瞬间，绳子受到的拉力有多大？

（2）O 点离地面的高度有多大？

〔解答〕（1）设小球到达最高点时的速度为v_B，则向心力$2mg=\frac{mv_B^2}{l}$，$v_B^2=2gl$.

以 C 点为零势能位置，由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}mv_B^2+mg(l+l\cos 60°)=\frac{1}{2}mv_C^2,$$

$$v_C^2=2gl+2g(l+\frac{l}{2})=5gl,$$

$$v_C=\sqrt{5gl}=\sqrt{5\times 9.8\times 1}\text{米/秒}=7\text{米/秒}。$$

设小球在 C 点时绳子的拉力为 T，则

$$T-mg\cos 60°=\frac{mv_C^2}{l},$$

$$T=mg\cos 60°+\frac{mv_C^2}{l}=\frac{1}{2}mg+\frac{5mgl}{l}=5.5mg$$

$$=5.5\times 0.1\times 9.8\text{牛}=5.39\text{牛}。$$

（2）将 vC 分解为水平速度 v_{Cx} 和竖直速度 v_{Cv}，

则 $$v_{Cx}=v_C\cos 60°=\frac{1}{2}v_C=3.5\text{米/秒}。$$

$$v_{Cv}=v_C\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}v_C=3.5\sqrt{3}\text{米/秒}。$$

由于 E 点在 O 点正下方，所以 C 点和 E 点的水平距离

$$s=l\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}l=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{米}。$$

设小球从 C 落到 E 的时间为 t，则

$$t=\frac{s}{v_{Cx}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3.5}\text{秒}=\frac{\sqrt{3}}{7}\text{秒}$$

设 C 点离地面的高度为 h，则

$$h=v_{Cv}+\frac{1}{2}gt^2=\left[3.5\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{7}+\frac{1}{2}\times 9.8\times(\frac{\sqrt{3}}{7})^2\right]\text{米}$$

$$=1.8\text{米},$$

由此得 O 点离地面的高度为 H=h+lcos60°=(1.8+0.5)米=2.3 米。

1448.如图所示，在圆柱形屋顶中心的天花板上 O 点，挂一根 l 为 3 米的细绳，绳的下端挂一个质量 m 为 0.5 千克的小球。已知绳子能随的

最大拉力为 10 牛，小球在水平面内作圆周运动，当速度逐渐增大到绳子断裂后，小球以 v=9 米/秒的速度落在墙脚边。求这个圆柱形房屋的高度 H 和半径 R。（g 取 10 米/秒 ²）

[解答]设绳子断裂时它和竖直方向的夹角为α，则

$$\frac{mg}{T}=\cos\alpha,\cos\alpha=\frac{0.5\times10}{10}=\frac{1}{2},\alpha=60°.$$

绳子断时小球离地面的高度

$$h=H-l\cos\alpha=H-\frac{l}{2},$$

小球作圆周运动的半径 $r=l\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}l,$

小球作圆周运动时的向心力 $F=mg\mathrm{tg}\alpha=\sqrt{3}mg,$

设绳子断时小球的速度为v_0,根据$F=\frac{mv_0^2}{r}$,得

$$v_0^2=\frac{Fr}{m}=\frac{\sqrt{3}mg\times\frac{\sqrt{3}}{2}l}{m}=\frac{3}{2}gl,v_0=\sqrt{\frac{3}{2}gl}.$$

由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(H-\frac{l}{2})+\frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$H=\frac{v^2-v_0^2+gl}{2g}=\frac{v^2-\frac{3}{2}gl+gl}{2g}$$

$$=\frac{9^2-\frac{1}{2}\times10\times3}{2\times10}\text{米}=3.3\text{米}。$$

小球在绳子断时的高度 $h=H-\frac{l}{2}=(3.3-1.5)\text{米}=1.8\text{米}$，

小球落地时间 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2\times1.8}{10}}\text{秒}=\sqrt{0.36}\text{秒}$，

落地点离抛出点的水平距离 $s=v_0t=\sqrt{\frac{3}{2}\times10\times3\times0.36}\text{米}=\sqrt{16.2}\text{米}$，

圆柱形房屋的半径 $R=\sqrt{s^2+r^2}=\sqrt{16.2+6.75}\text{米}=4.8\text{米}$。

1449.如图所示，水平地面上有一个不计质量，一端固定的弹簧，倔强系数 k=200 牛/米。用质量 m=1 千克的物体将弹簧压缩了长度 x=0.2 米，释放后，物体被弹簧弹出，移动 s=1 米后静止。求地面和物体间的摩擦系数。（g 取 10 米/秒 ²）

[解答]设摩擦系数为μ,由功能原理得

$$0-\frac{1}{2}kx^2=-\mu mgs,$$

$$\mu=\frac{kx^2}{2mgs}=\frac{200(0.2)^2}{2\times1\times10\times1}=0.4.$$

1450.一个不计质量的弹簧，倔强系数 k=100 牛/米，两端分别拴着质量 M=1 千克和 m=0.5 千克的滑块。当弹簧拉伸了 x=0.2 米后，将 M 和 m 分别用不计质量且不可伸长的绳子固定在地面上 A、B 两处，整个装置水平地放在光滑水平地面上，如图所示。如果突然将绳子在 C 处剪断。求滑块 m 的最大速度。

[解答]把整个装置作为系统，绳子剪断后，系统内只有弹力做功，所以机械能守恒。刚剪断时 m 在弹力作用下向左运动，而 M 在弹簧的弹力和绳子的拉力这一对同时逐渐减少的平衡力作用下仍保持静止。随着弹簧伸长量的减少，弹性势能逐渐转变为 m 的动能，当弹簧恢复到原长时，弹簧的弹性势能全部转变为 m 滑块的动能，这时 m 具有最大速度，设最大速度为 v,则

$$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{k}{m}}x=\sqrt{\frac{100}{0.5}}\times0.2\text{米}/\text{秒}=2\sqrt{2}\text{米}/\text{秒}。$$

1451.弹簧 A 和 B，倔强系数 k_A=2000 牛/米，k_B=3000 牛/米，如图所示，连在一起，拉长后并将两端固定。求这时它们的弹性势能之比为多大？

[解答]设两弹簧所受的弹性力为 F，A 弹簧伸长 x_A，B 弹簧伸长 x_B,**则**$F=k_Ax_A,F=k_Bx_B$,**所以**$k_Ax_A=k_Bx_B,\frac{k_B}{k_A}=\frac{x_A}{x_B}$.A**弹簧的弹性势能**$E_{pA}=\frac{1}{2}k_Ax_A^2$,B**弹簧的弹性势能为**$E_{pB}=\frac{1}{2}k_Bx_B{}^2$，$\frac{E_{pA}}{E_{pB}}=\frac{\frac{1}{2}k_Ax_A^2}{\frac{1}{2}k_Bx_B^2}$

$$=\frac{k_A}{k_B}(\frac{x_A}{x_B})^2=\frac{k_A}{k_B}(\frac{k_B}{k_A})^2=\frac{k_B}{k_A}=\frac{3000}{2000}=1.5.$$

1452.粗细不同的二根弹簧，质量都不计，细弹簧比粗弹簧长 0.1 米，细弹簧的倔强系数 k_1=100 牛/米。粗弹簧的倔强系数 k_2=200 牛/米，如图所示。两弹簧一端都固定在 A 点，在细弹簧的另一端拴一个质量为 1 千克的物体 B，并放在水平光滑面上，现用水平力拉物体 B 使弹簧伸长 0.2 米后静止。试求当拉力撤去后

(1) 物体 B 的最大速度；

(2) 物体 B 使粗弹簧产生的最大压缩量。

[解答] (1) 系统在运动过程中只有弹力做功，所以机械能守恒，设最大速度为 v.

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k_1x^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{k_1}{m}}x=\sqrt{\frac{100}{1}}\times 0.2\text{米/秒}=2\text{米/秒}。$$

（2）设粗弹簧的最大压缩量为 x_2,由于细弹簧比粗弹簧长 0.1 米，所以细弹簧的压缩量 $x_1=x_2+0.1$ 米，在压缩过程中系统的机械能守恒，

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k_2x_2^2+\frac{1}{2}k_1x_1^2=\frac{1}{2}k_2x^2+\frac{1}{2}k_1(x_2+0.1)^2,$$

将已知数据代入后解得

$$x_2=0.072\text{ 米。}$$

1453.如图所示，在跨过无摩擦滑轮的细绳的两端分别系二根不计质量的弹簧 p_1 和 p_2，它们的倔强系数分别为 k_1 和 k_2，且 $k_2=2k_1$.弹簧 p_2 下端用细绳固定在地面上，弹簧 p_1 的下端拴一个质量为 m 的物体。已知 $mg=k_1x_1$，用绳拉物体的下端使 p_1 弹簧伸长 $2x_1$，然后将绳的一端固定在地面上。现将物体下面的一段绳子 A 处剪断。求物体上升到平衡位置时的速度。

[解法一]由于 p_2 的倔强系数是 p_1 的 2 倍,在相同的力作用下 p_1 伸长 $2x_1$ 时，p_2 伸长 x_1，总伸长量为 $3x_1$。物体在平衡位置时，p_1 的伸长量为 x_1 而 p_2 的伸长量为 $\frac{1}{2}x_1$,总伸长量为 $1.5x_1$,所以当未剪断时物体的位置是在平衡位置下面 $1.5x_1$ 处，选该处为重力势能零势能位置。由于以弹簧 p_1 和 p_2，物体 m 和地球组成的系统来看，只有重力和弹力做功，系统的机械能守恒。绳子未剪断时，

$$E_0=\frac{1}{2}k_1(2x_1)^2+\frac{1}{2}k_2x_1^2=\frac{1}{2}\cdot 4k_1x_1^2+\frac{1}{2}\cdot 2k_1x_1^2=3k_1x_1^2.$$

物体在平衡位置时，

$$\begin{aligned}E_t&=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}k_2\left(\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}mgx_1+\frac{1}{2}mv^2\\&=\frac{1}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}\cdot 2k_1\frac{x_1^2}{4}+\frac{3}{2}k_1x_1^2+\frac{1}{2}mv^2\\&=\frac{9}{4}k_1x_1^2+\frac{1}{2}mv^2.\end{aligned}$$

$$E_0=E_t,$$

$$3k_1x_1^2=\frac{9}{4}k_1x_1^2+\frac{1}{2}mv^2,$$

$$\frac{3}{4}k_1x_1^2=\frac{1}{2}mv^2,$$

用 $mg=k_1x_1$ 代入 $$v_2=\frac{3}{2}gx_1,$$

$$v=\frac{1}{2}\sqrt{6gx_1}.$$

[解法]设二根弹簧串联后的倔强系数为 k，

则 $$\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2},k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2}=\frac{2k_1^2}{3k_1}=\frac{2}{3}k_1.$$

在平衡位置时，伸长量为 x，则

$$mg=kx,kx=k_1x_1,x=\frac{k_1x_1}{k}=\frac{3}{2}x_1.$$

$$E_0=\frac{1}{2}k(2x)^2,$$

$$E_t=\frac{1}{2}kx^2+mgx+\frac{1}{2}mv^2;$$

所以 $$\frac{1}{2}\cdot 4kx^2-\frac{1}{2}kx^2-kx^2=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$\frac{1}{2}kv^2=\frac{1}{2}mv^2,$$

$$\frac{1}{2}mgx=\frac{1}{2}mv^2,$$

$v=\sqrt{gx}$.如用$x=\frac{3}{2}x_1$代入，

得 $$v=\sqrt{\frac{3}{2}gx_1}=\frac{1}{2}\sqrt{6gx_1}.$$

1454.一根倔强系数为 k 的弹簧上端固定，下端挂一个质量为 m 的物体后，弹簧伸长 x。用力 F 向下拉物体，使弹簧再伸长 x 而静止。将力 F 突然撤去，如图所示。求物体回到平衡位置时的速度。

[解法]弹簧在重力 mg 作用下伸长 x，根据胡克定律，弹力 F=kx,所以 mg=kx.选物体在 A 点时的重力势能为零，则物体在 A 点时具有机械能 $E_A=\frac{1}{2}k(2x)^2$.当力F撤去后物体回到B点时，它具有重力势能mgx，弹性势能$\frac{1}{2}kx^2$,动能$\frac{1}{2}mv^2$。由于运动过程中系统只有重力和弹力做功，所以机械能守恒。

$$\frac{1}{2}k(2x)^2=mgx+\frac{1}{2}kx^2+\frac{1}{2}mv^2.$$

将kx用mg代入得 $$v=\sqrt{gx}.$$

[解法二]当力 F 撤去时，物体受弹力 F=k·2x=2mg 和重力 mg 的作用，合外力为 mg。回到 B 点时，合外力为零。在这过程中合外力的平均值为$\frac{0+mg}{2}=\frac{1}{2}mg$，物体的位移为x，根据动理$\frac{1}{2}mg\cdot x=\frac{1}{2}mv^2$，

$$v=\sqrt{gx}$$ 。

1455．一弹簧原长为 l，倔强系数为 k，上端固定，下端挂一个质量为 m 的物体。这时弹簧伸长了 x，现用手托起物体使弹簧恢复到原长，如

图所示。如果突然将物体释放，求弹簧的最大伸长量 x_1。

[解答]物体在 A 点时重力和弹力平衡，F=kx=mg，将物体托起到 B 点使弹簧恢复到原长，释放后根据机械能守恒定律，物体在 B、C 两处动能都为零，在 B 点时具有重力势能 mgx，（以 C 点为零势能位置），

在C点时重力势能为零，弹性势能为$\frac{1}{2}kx_1^2$，所以

$$mgx_1=\frac{1}{2}kx_1^2，$$

$$x_1=\frac{2mg}{k}=2x。$$

1456．质量 m=2 千克的物体从离弹簧上端 h=1.2 米高处自由落下，接触弹簧后将弹簧压缩，如图所示。已知弹簧的倔强系数 k=200 牛/米，平板和弹簧质量不计，g 取 10 米/秒 ^{2}。求(1)物体的最大速度；(2)弹簧的最大压缩量。

[解答](1)物体接触弹簧后受重力和弹力作用，开始时弹力小于重力，物体仍作加速运动，随着压缩量的增大弹力也增大，当弹力增大到等于重力 mg 时，物体受到的合外力为零，加速度为零，这时物体具有最大速度 v。假如这时弹簧的压缩量为 x_1，根据机械能守恒定律

$$mg(h+x_1)=\frac{1}{2}kx_1^2+\frac{1}{2}mv^2，$$

由于弹力$=mg$，因此$mg=kx_1$，将$x_1=\frac{mg}{k}$代入上式

得
$$mg(h+\frac{mg}{k})=\frac{1}{2}\frac{m^2g^2}{k}+\frac{1}{2}mv^2，$$

$$v=\sqrt{2gh+\frac{mg^2}{k}}$$

$$=\sqrt{2\times10\times1.2+\frac{2\times10^2}{200}}\text{米/秒}=5\text{米/秒。}$$

(2)设最大压缩量为 x_2，则

$$mg(h+x_2)=\frac{1}{2}kx_2^2，$$

$$kx_2^2-2mgx_2-2mgh=0，$$

$$x_2=\frac{mg+\sqrt{m^2g^2+2kmgh}}{k}$$

$$=\frac{2\times10+\sqrt{2^2\times10^2+2\times200\times2\times10\times1.2}}{200}\text{米}$$

$$=0.6\text{米。}$$

1457．质量 m=10 千克的物体，从 h=1.8 米高处落到弹簧支架上时，台板下降的最大距离 x=0.2 米，台板和弹簧的质量不计，如图所示，g 取 10 米/秒 ^{2}，求：

（1）弹簧被压缩 x_1=0.1 米时，物体的速度；

（2）如果把物体放在台板上，当物体静止时，弹簧的压缩量为多大？

[解答]（1）设台板下降 x=0.2 米时的位置重力势能为零，此时物体的速度为零，由机械能守恒定律

$$mg(h+x)=\frac{1}{2}kx^2,$$

$$k=\frac{2mg(h+x)}{x^2}=\frac{2\times 10\times 10(1.8+0.2)}{0.2^2}\text{牛/米}$$

$$=10^4\text{牛/米},$$

即弹簧的倔强系数为 10^4 牛/米。弹簧被压缩 x_1=0.1 米时，设物体的速度为 v，

则
$$mg(h+x_1)=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx_1^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{2mg(h+x_1)-kx_1^2}{m}}=\sqrt{\frac{2\times 10\times 10(1.8+0.1)-10^4(0.1)^2}{10}}\text{米/秒}$$

$$=2\sqrt{7}\text{米/秒}。$$

（2）设把物体放在台板上时弹簧的压缩量为 x_2，根据胡克定律

$$mg=kx_2$$

$$x_2=\frac{mg}{k}=\frac{10\times 10}{10^4}\text{米}=10^{-2}\text{米}。$$

1458．质量分别为 m_1 和 m_2 的板中间用一根弹簧连接，如图所示放在水平地面上。在板 m_1 上加一个竖直向下的力 F，当力 F 突然撤去后，m_1 跳起时，地面对 m_2 的弹力为零。求 F 的大小。（弹簧质量不计）

[解答]以 F 未撤去时 m_1 的位置为重力势能的零势能位置。设这时弹簧的压缩量为x_1，则系统具有的机械能为$E_1=\frac{1}{2}kx_1^2$，式中k为弹簧的倔强系数。根据胡克定律$m_1g+F=kx_1$，即$x_1=\frac{m_1g+F}{k}$。设力F撤去后弹簧的伸长量为x_2。为了要使地面对m_2的弹力为零，弹力$kx_2=m_2g$，即$x_2=\frac{m_2g}{k}$，这时系统的机械能$E_2=m_1g(x_1+x_2)+\frac{1}{2}kx_2^2$，

根据机械能守恒定律
$$E_1=E_2,$$

即
$$\frac{1}{2}kx_1^2=m_1g(x_1+x_2)+\frac{1}{2}kx_2^2。$$

将
$$x_1=\frac{m_1g+F}{k}\text{和}x_2=\frac{m_2g}{k}$$
分别代入上式，

得
$$\frac{1}{2}\frac{(m_1g+F)^2}{k}=\frac{m_1g(m_1g+m_2g+F)}{k}+\frac{1}{2}\frac{(m_2g)^2}{k},$$

化简得
$$F^2=(m_1g+m_2g)^2,$$

$$F=(m_1+m_2)g\ 。$$

1459．如图所示，原长为 l_0；倔强系数为 k 的弹簧，质量不计，一端固定在 A 点另一端拴一个质量为 m 的物体，用变力 F，沿着光滑圆柱面的切线方向将物体慢慢地从原长位置 B 拉到位置 C。试计算拉力 F 所做的功。

[解答] 设BC弧长为x，则$x = 2\pi R \cdot \dfrac{\theta}{2\pi} = R\theta$（θ用弧度表示）。

以 B 点为零势能位置，根据功能原理，

力F所做的功 $W = mgh + \dfrac{1}{2}kx^2$

$$= mgR\sin\theta + \frac{1}{2}kR^2\theta^2。$$

1460．质量 m=2 千克的物体从长 5 米高 3 米的斜面顶以初速 v_0 滑下，接触弹簧将弹簧压缩 0.2 米后速度为零。已知物体和斜面间的摩擦系数 μ=0.5，弹簧的倔强系数 k=1000 牛/米，如图所示。弹簧上端和物体的距离为 3.8 米。（g 取 10 米/秒 ²）求：

（1）初速度 v_0；

（2）物体在弹力作用下移动多大距离后速度又为零。

[解答]（1）以物体将弹簧压缩 0.2 米时的位置为零势能位置，物体在斜面顶时具有动能$E_k = \dfrac{1}{2}mv_0^2$，重力势能$E_p = mg(3.8 + 0.2)\sin\theta = mg \times 4 \times 0.6 = 2.4mg$。当它将弹簧压缩0.2米后静止时，具有弹性势能$E_p' = \dfrac{1}{2}kx^2$，运动过程中摩擦力对物体做负功$W_f = \mu mg\cos\theta \times (3.8 + 0.2) = \mu mg \times 0.8 \times 4 = 3.2\mu mg = 3.2 \times 0.5mg = 1.6mg$。

根据功能原理

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 2.4mg - 1.6mg = \frac{1}{2}kx^2，$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{kx^2 - 1.6mg}{m}} = \sqrt{\frac{1000 \times 0.2^2 - 1.6 \times 2 \times 10}{2}}\text{米/秒}$$

$$= 2\text{米/秒}。$$

（2）设物体被弹簧弹回时移动 s 距离后速度为零。根据功能原理

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgs\sin\theta + \mu mgs\cos\theta，$$

$$s = \frac{kx^2}{2mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}$$

$$= \frac{1000 \times 0.2^2}{2 \times 2 \times 10(0.6 + 0.5 \times 0.8)}\text{米}$$

$$= 1\text{米}。$$

1461．质量 m=2 千克的小球固定在长度 R=0.8 米，质量忽略不计的棒的一端。棒的另一端为转轴，使棒能在竖直平面内转动，开始时，棒

跟竖直方向成θ=60°角如图所示。（g 取 10 米/秒 ²)求：

（1）小球应以多大的速度 v_A 从 A 点出发，到达 C 点时才能有 v_C=1 米/秒的速度；

（2）如果棒改为用不计质量的绳子代替，小球以上一小题中求得的速度 v_A 从 A 点出发，则小球运动到什么位置时绳子的张力为零，这时小球的速度 v_D 有多大？如果要使小球能到达 C 点，则 v_A' 的最小值应为多大？

[解答]（1）以 B 点为零势能位置，由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}v_A^2+mg(R-R\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_C^2+mg\cdot 2R,$$

$$v_A=\sqrt{v_C^2+2gR(1+\cos\theta)},$$

$$=\sqrt{1^2+2\times10\times0.8(1+\frac{1}{2})}\text{米/秒}=5\text{米/秒}。$$

（2）设小球到达 D 点时绳子的张力为零，这时绳和竖直方向的夹角为α，则$mg\cos\alpha=\frac{mv_D^2}{R}$，$v_D^2=gR\cos\alpha$。以B点为零势能位置，由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}mv_A^2+mg(R-R\cos\theta)=\frac{1}{2}mv_D^2+mg(R+R\cos\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}mgR\cos\alpha+mgR(1+\cos\alpha),$$

整理后得

$$\cos\alpha=\frac{v_A^2-2gR\cos\theta}{3gR}=\frac{5^2-2\times10\times0.8\times\frac{1}{2}}{3\times10\times0.8}=\frac{17}{24}=0.708。$$

$$\alpha=45°。$$

$$v_D=\sqrt{gR\cos\alpha}=\sqrt{10\times0.8\times\frac{17}{24}}\text{米/秒}=2.38\text{米/秒},$$

要使小球能到达C点，v_C的最小值

$$v_C=\sqrt{gR}=\sqrt{10\times0.8}\text{米/秒}=2\sqrt{2}\text{米/秒},$$

所以 $$v_A'=\sqrt{v_C^2+2gR(1+\cos\theta)}=\sqrt{8+2\times10\times0.8\times\frac{3}{2}}\text{米/秒}$$

$$=4\sqrt{2}\text{米/秒}。$$

1462．如图所示，一圆盘半径为 R，质量为 m，支于固定轴承，使盘能在竖直平面内转动。盘的边缘绕有不计质量的细绳，绳的一端系有质量也为 m 的重物，不计轴承的摩擦力。试求重物下降 h 后的速度。

[解答]设重物下降 h 后的速度为 v，根据机械能守恒定律，系统势能的减小等于重物平动动能和圆盘转动动能增加之和，即

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2。$$

当转轴通过中心垂直于圆盘时，它的转动惯量

$I=\frac{1}{2}mR^2$，又$v=\omega R$，代入上式得

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{4}mR^2\omega^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{4}mv^2,$$

$$v^2=\frac{4gh}{3},$$

$$v=\sqrt{\frac{4gh}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}。$$

1463．质量为 m、长为 l 的均匀细棒，以一端 O 为水平轴在竖直平面内转动，如图所示。棒原来处于水平位置，然后让它自由下摆，求摆到竖直位置时端点 A 的速度。

[解答]以棒和地球组成系统，在忽略摩擦力做功时系统的机械能守恒。设棒的重心为 C，

水平位置时

$$E_p=mgl，E_k=0。$$

竖直位置时

$$E_p=mg\frac{1}{2}，E_k=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}ml^2\cdot\omega^2$$

$$mgl=mg\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}ml^2\omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}},$$

$$v=\omega l=\sqrt{3gl}。$$

1464．质量为 m，半径为 r 的实心球，由静止出发从离斜面底 h 高处滚下（无滑动）。求它到达斜面底端时的速度。

[解答]球在斜面顶时具有重力势能 Ep=mgh，到达底端时具有平动动能$E_{k1}=\frac{1}{2}mv^2$和转动动能$E_{k1}=\frac{1}{2}I\omega^2$。由于转轴通过球的中心，所以转动惯量$I=\frac{2}{5}mr^2$。

根据机械能守恒

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

$$=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mr\omega^2,$$

因为 v=ωr，

所以 $$mgh=\frac{7}{10}mv^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{10}{7}gh}。$$

如果把球作为质点，则，$v=\sqrt{2gh}$。作为刚体时有一部分动能转换为转动动能，因此作为刚体时，球的平均速度比作为质点时要小。

1465．上题中如果实心球改为质量为 m 半径为 r 的实心圆柱体。则到达斜面底时的速度为多大？

[解答] $$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2,$$

$$I=\frac{1}{2}mr^2,\ v=\omega r,$$

所以 $$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{4}mv^2=\frac{3}{4}mv^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{4}{3}gh}=\frac{2}{3}\sqrt{3gh}。$$

1466．第 1464 题中如果实心球改为质量为 m，半径为 r 的薄壁圆筒。则到达斜面底端时的速度为多大？

[解答] $$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}I\omega^2,$$

$$I=mr^2,\ \ =\omega r,$$

所以 $$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mv^2,$$

$$v=\sqrt{gh}。$$

1467．质量为 2m 的匀质圆板，半径为 R，以过中心的水平轴为转轴，在圆板的边沿上粘有一质量为 m 的物块，它的大小忽略不计。当物块处在和轴心同一水平面时，将圆板由静止释放，如图所示。试求物块到达最低点时的线速度 v。

[解答]取最低点为零势能位置，则开始释放时，物块具有的机械能 $E_p=mgR$。物块到达最低点时，圆板和物块具有的总动能 $E_k=\frac{1}{2}I\omega^2$，而物块和圆板具有的转动惯量 $I=\frac{1}{2}\cdot 2mR^2+mR^2=2mR^2$，

所以 $$E_k=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{1}{2}\times 2mR^2\omega^2=mR^2\omega^2=mv^2。$$

由机械能守恒得 $E_k=E_p$，即

$$mv^2=mgR,$$

$$v=\sqrt{gR}。$$

说理和论证题

1468．质量相同的正立方体木块和铁块，放在同一个水平桌面上，

哪一个具有较大的重力势能？为什么？如果把它们从桌面上搬到同一个橱顶上外力对它们做功哪一个多？为什么？

[解答]木块的重力势能较大，因为质量相同的正立方体木块比铁块的体积大，重心高。

外力对它们做的功一样大，因为重心的高度差是一样的。

1469．起重机将货物举起相同的高度，在下列三种情况下，哪一种情况发动机做功最多？哪一种情况发动机做功最少？为什么？

(1)匀加速举起；

(2)匀速举起；

(3)匀减速举起。

[解答]匀加速举起时，发动机做功最多，因为这时发动机的拉力大于重力，发动机除了克服重力做功外，还使货物增加了动能。

匀减速举起时，发动机做功最少，因为这时发动机的拉力小于重力，克服重力所做的功一部分由货物消耗动能来完成，其余部分由发动机做功来完成，所以发动机做功最少。

匀速举起时，克服重力所做的功全部由发动机做功完成。

1470．下列各实例中，哪些机械能是守恒的？哪些机械能不守恒？简要说明理由。

(1)抛出的小球作斜抛运动（不计空气阻力）；

(2)跳伞员带着张开的降落伞匀速下降；

(3)小球沿光滑圆弧槽滑下；

(4)用不计质量的细棒一端拴一个小球，另一端固定。使小球绕固定点在竖直平面内做匀速率圆周运动，如图所示。

[解答](1)由于只有重力对小球做功，所以机械能是守恒的。

(2)跳伞员匀速下降时，受空气阻力的作用机械能不守恒。

(3)小球在光滑圆弧槽滑下时，只有重力做功，所以机械能是守恒的。

(4)小球在竖直平面内作匀速率圆周运动，动能不变，但重力势能在变化，所以机械能不守恒。

1471．图是物体离地面 h 高处自由下落过程中动能、势能、机械能随高度变化的图象。分别指出图象中(1)、(2)、(3)是表示哪种能随高度变化的图线。

[解答](1)机械能；

(2)势能；

(3)动能。

1472．从同一高度，不同倾角($a_1>a_2$)的 A、B 两个斜面顶上由静止滑下相同的物体，如图所示。

(1)不计摩擦力，物体到达斜面底时的速度大小是否相等？为什么？

(2)考虑斜面对物体的摩擦力，且摩擦系数相同，那末物体到斜面底时的速度大小是否相等？为什么？

[解答](1)不计摩擦力时，物体在运动过程中只有重力做功。而两个物体初状态的机械能都等于 mgh，因此到底时的动能相等，所以速度的大小也相等。

(2)由于摩擦力对物体做功，所以机械能不守恒。根据动能定理，

在斜面A上滑动时，$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh - \mu mg\cos a_1 l_1$，

在斜面B上滑动时，$\frac{1}{2} = mv_2^2 = mgh - \mu mg\cos a_2 l_2$，

由于 $l_2\cos a_2 > l_1\cos a_1$ 故 $\frac{1}{2} = mv_1^2 > \frac{1}{2}mv_2^2$，

即 $v_1 > v_2$。

物体在斜面A上滑到底时的速度大。

1473．人造卫星环绕地球循椭圆轨道运行。试用机械能守恒定律说明：为什么卫星在距离地球最近时速度最大，在距地球最远时速度最小？

[解答]因为卫星距离地球最近时，它的重力势能最小，在机械能保持不变的情况下它的动能最大，因而它的速度最大。在距地球最远时，它的重力势能最大，因而它的动能最小，所以速度也最小。

1474．如图所示，放在光滑水平桌面的斜面，有一个重物从斜面顶无摩擦地下滑。第一次把斜面固定在桌面上，另一次斜面可以在桌面上自由滑动。假定在两种情况下，重物均从同一高度滑下，则重物到达斜面底时的速度是否一样？为什么？

[解答]速度不一样，第一次斜面固定时物体到达底面的速度大，因为在两次滑动中都只有重力做功，系统的机械能守恒。第一次重物的重力势能全部转化为重物的动能，而第二次重物的重力势能转化为重物的动能和斜面滑动时具有的动能。

1475．如图所示，小球从 h 高的光滑斜面上滚下，经过有摩擦的水平地面AB后再滚上另一个光滑斜面，当它到达$\frac{1}{3}$h高时速度为零。设物体改变运动方向时速率不变，试证明小球最后能静止在 AB 的中点 C 处。

[证明]小球从光滑斜面上滚下至 A 点的过程和从 B 点滚上另一光滑斜面的过程中机械能是守恒的。设小球经 A 点时速度为 v_A，经 B 点时速度为 v_B，

则 $$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2,$$

$$\frac{1}{3}mgh = \frac{1}{2}mv_B^2。$$

设小球在 AB 段运动时受到的摩擦力为 f，AB 的距离为 s，根据动能定理

$$-fs = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{3}mgh - mgh = -\frac{2}{3}mgh,$$

所以 $s = \frac{2mgh}{3f}$。

小球从另一光滑斜面再滚下时，到达 B 点时的速度仍为 v_B。设小球在水平地面上运动 s′后停止，则

$$fs'=\frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{3}mgh,$$

$$s'=\frac{mgh}{3f}=\frac{s}{2},$$

即小球静止在 AB 的中点。

1476．质量为 m 的小球拴在长 l 的绳的一端，以绳的另一端 O 为转轴，小球在竖直平面内作圆周运动。如果小球在最低点时绳的张力为 T_1，小球在最高点时绳的张力为 T_2，如图所示。试证：$T_1-T_2=6mg$。

[证明]设小球在最低点时和最高点时的速度分别为 v_1 和 v_2，则，

$$T_1=mg+\frac{mv_2^2}{l},$$

$$T_2=\frac{mv_2^2}{l}-mg,$$

$$T_1-T_2=\frac{mv_1^2}{l}-\frac{mv_2^2}{l}+2mg。$$

由机械能守恒定律，以最低点为零势能位置。

$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_2^2+mg\cdot 2l,$$

$$\frac{mv_1^2}{l}-\frac{mv_2^2}{l}=4mg,$$

$$T_1-T_2=4mg+2mg=6mg。$$

1477．如图所示的装置中，绳子质量，滑轮质量和一切摩擦都不计。试证 A、B 两物体在运动过程中总机械能守恒。

[证法一]设 A、B 两物体静止时距地面的高度分别为 h_A 和 h_B，则初状态物体的总机械能为 $E_0=mgh_A+mgh_B$。当物体 B 下降了一段距离 $\triangle h_B$ 时，设绳子的张力为 T，由牛顿第二运动定律得，

$$T=m_Aa \qquad (1)$$

$$m_Bg-T=m_Ba \qquad (2)$$

当 B 下降 $\triangle h_B$ 时，A、B 的共同速度

$$v^2=2a\triangle h_B=2\frac{m_Bg}{m_A+m_B}\triangle h_B,$$

这时 A、B 具有的机械能为

$$E_1=\frac{1}{2}m_Av^2+\frac{1}{2}m_Bv^2+m_Agh_A+m_Bg(h_B-\triangle h_B),$$

将 $v^2=2\frac{m_Bg}{m_A+m_B}\triangle h_B$ 代入得

$$E_1=\frac{1}{2}(m_A+m_B)\times 2\frac{m_Bg}{m_A+m_B}\times\triangle h_B+m_Agh_A+m_Bg(h_B-\triangle h_B)$$

$$=m_Bg\triangle h_B+m_Sgh_A+m_Bgh_A+m_Bgh_B-m_Bg\triangle h_B$$

$$=m_Agh_A+m_Bgh_B$$

$$=E_0。$$

即总的机械能保持不变。

[证法二]以物体 A、B 和地球所组成的系统为研究对象，由于一切摩擦均不计，所以系统所受的外合力为零。在系统内绳子的拉力对物体 A 做正功，对物体 B 做负功。它们数值上是相等的，所以对系统来说总功为零。这样在系统内只有重力对 B 做功，所以符合机械能守恒定律的条件，即在运动过程中总机械能保持不变。

1478．A、B 两球，A 球从 h 高处作自由落体运动，落地时的速度大小为 v，B 球从 H 高度以初速度为 v 作平抛运动，落地时速度的大小为 2v，试证

$$H=3h。$$

[证明]设 A 球的质量为 m_A，由机械能守恒定律

得 $$m_A gh=\frac{1}{2}m_A v^2，v^2=2gh \qquad (1)$$

设B球的质量为m_B，由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}m_B v^2+m_B gH=\frac{1}{2}m_B(2v)^2，$$

$$m_B gH=3\times\frac{1}{2}m_B v^2，v^2=\frac{2}{3}gH \qquad (2)$$

由(1)式和(2)式得 $$2gh=\frac{2}{3}gH，$$

$$H=3h。$$

1479．从地面竖直向上抛出一质量为 m 的物体。已知初动能为 E_{k0}，物体受到空气的阻力为它重力的$\frac{1}{n}$，物体在某一高度时的动能为E_k，

重力势能为 E_p。试证：

$(1)E_k=E_{k0}-(1+\frac{1}{n})E_p$或

$(2)E_k=\frac{n-1}{n+1}E_{k0}-(1-\frac{1}{n})E_p$。

[证明](1)设所在高度为 h，物体的重力势能 $E_p=mgh$，物体上升到该高度的过程中克服空气阻力所做的功为$\frac{1}{n}mgh$，由有原理得

$$-\frac{1}{n}mgh=E_t-E_0=E_k+E_p-E_{k0}，由于E_p=mgh，$$

所以 $$-\frac{1}{n}E_p=E_k+E_p-E_k，即E_k=E_k-(1+\frac{1}{n})E_p。$$

(2)物体上升到最高点后再下落到 h 高度则物体的重力势能仍为 $E_p=mgh$，

设最高高度为H，则 $E_{k0}=(1+\frac{1}{n})mgH$，

即 $$mgH=\frac{n}{n+1}E_{k0}，$$

由功能原理得 $-\frac{1}{n}mgH-\frac{1}{n}mg(H-h)=E_k+E_p-E_{k0}$，

$$E_k=E_{k0}-E_0-\frac{2}{n}mgH+\frac{1}{n}E_p，$$

$$=E_{k0}-\frac{2}{n}\frac{n}{n+1}E_{k0}-(1-\frac{1}{n})E_p$$

$$=\frac{n-1}{n+1}E_{k0}-(1-\frac{1}{n})E_p。$$

1480．运动员在投掷铅球过程中，手托质量为 m 的铅球，用和水平成 30°的方向从肩上推到出手的距离为 s。已知铅球出手点的高度为 h，铅球落地时的速度为 v。试证运动员推铅球时所做的功

$W=\frac{m[v^2-2g(h-\frac{s}{2})]}{2}$。（不计空气阻力）

[证明]设铅球出手时的速度为 v_0。则由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_0^2+mgh=\frac{1}{2}mv^2，$$

$$v_0^2=v^2-2gh。$$

设运动员肩的高度为h'，则$h'=h-s\sin a=h-\frac{s}{2}$。

如果运动员推铅球时的平均推力为F，则

$$W=Fs=mgh+\frac{1}{2}mv_0^2-mgh'$$

$$=\frac{1}{2}mv^2-mg(h-\frac{s}{2})。$$

所以 $$W=\frac{m[v^2-2g(h-\frac{s}{2})]}{2}。$$

1481．质量分别为 m 和 M 的两物体，用细绳连接，并跨过装在斜面顶端的无摩擦滑轮上，m 放在倾角为θ的光滑斜面上，M 挂在空间，如图所示。开始时，M 和 m 的高度差为 h，求证当 M 下落到和 m 在同一水平面时它的速度

$v=\sqrt{\frac{2(M-m\sin\theta)gh}{(M+m)(1+\sin\theta)}}$。

[证明]设 M 下降 x 后它和 m 在同一水平面上，以 m 原来的位置为零势能位置，则当 M 下降 x 高度后，m 上升的高度为 xsinθ，而这时 M 的高度为 h-x，所以

$$h-x=x\sin\theta \qquad x=\frac{h}{1+\sin\theta}。$$

由于机械能守恒

$$Mgh=Mg(h-x)+mgx\sin\theta+\frac{1}{2}(M+m)v^2,$$

$$Mgx-mgx\sin\theta=\frac{1}{2}(M+m)v^2,$$

$$(Mg-mg\sin\theta)\frac{h}{1+\sin\theta}=\frac{1}{2}(M+m)v^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{2(M-m\sin\theta)gh}{(M+m)(1+\sin\theta)}}。$$

1482．如图所示，小球由静止出发，从半径为 R 的光滑半圆球顶 A 处滑下，滑到 B 处小球开始离开半圆球作斜下抛运动。

试证AB的高度差$h=\frac{1}{3}R$。

[证明]由于半圆球是光滑的，小球从 A 滑到 B 无摩擦力对小球做功。半圆球对小球的弹力和运动方向垂直，不做功，只有重力对小球做功，所以机械能守恒。设小球到达 B 点时速度为 v，AC=h，

则 $$mgh=\frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2=2gh。$$

小球在下滑过程中受重力 mg 和弹力 N 的作用，当 N=0 时小球开始

离开半圆球，小球在圆弧上运动所需的向心力$\frac{mv^2}{R}=mg\cos\theta-N$，

在B点时$N=0$，因此 $m=\frac{v^2}{R}=mg\cos\theta$，

$$v^2=gR\cos\theta。$$

$$2gh=gR\cos\theta=g\cdot OC=g(R-h),$$

$$h=\frac{1}{3}R。$$

实验题

1483．机械能守恒定律可以从研究物体自由下落的实验中（忽略空气阻力），物体动能的增加应等于相应的重力势能的减少来验证。也可以从研究物体在重力作用下沿斜面运动的实验中（忽略摩擦阻力），物体动能的增加应等于相应的重力势能的减少来验证。在这两种实验方法中，实验的误差来自哪些方向？其中哪一种方法实验误差较小？为什么？

[参考解答]两个实验一般都是用打点计时器来测得物体的位移和相应的时间。

实验误差大致来自以下几个方面：

(1)物体不是在纸带上打第一个点的瞬间开始下落。提前下落，物体在打第一个点瞬间的初速度就不等于零。落后下落，则物体在第一、第二两点间运动的时间小于以后相邻两点间运动的时间。而为了计算方便

一般都以第一点为起点来计算时间的。

(2)在测量各点跟第一点的距离 d，或相邻两点间的距离 s 时，不够正确。

(3)实际上自由下落过程中的空气阻力不可能完全避免，以及下落时纸带完全不受任何阻碍也不可能。同样，物体从斜面下滑时所受的摩擦阻力更不可能完全避免，所以都要损失一部分机械能，物体动能的增加略小于重力势能的减小。

其中，物体在重力作用下沿斜面运动的实验中，由于损失的机械能较多，因而实验误差较大。

1484．在物体自由下落的实验中，打点计时器连续打出了四条纸带，A、B、C、D。测得每条纸带上从第 1 点到第 4 点的距离 d_1 为：d_{1A}=1.4 厘米，d_{2B}=1.6 厘米，d_{1C}=1.8 厘米，d_{1D}=2.0 厘米。为什么我们一般选用纸带 C 来进行测量？（打点计时器每隔 0.02 秒打一次点）

[参考解答]因为从第 1 点到第 4 点间隔的时间为

$$t=0.02\times 3\text{ 秒}=0.06$$

物体自由下落时在最初 0.06 秒内下落的距离

$$d_1=\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}9.8\times 0.06^2\text{米}=0.0176\text{米。}$$

四条纸带中，纸带 C 的 d_1 最接近于这个数值，意味着纸带在打第一个点的瞬间开始下落，所以我们应选这条纸带来测量。

1485．利用自由落体运动来验证机械能守恒定律的实验中，以每打 3 次作为一个时间单位，测得第四点、第七点、第十点、第十三点和第一点的距离分别为 d_1=1.8 厘米，d_2=7.1 厘米，d_3=15.8 厘米，d_4=28.1 厘米。打点计时器每隔 0.02 秒打一次点，当地的重力加速度 g=9.8/秒 ²。试根据上述量得的数据计算物体运动到上述各点时重力势能的减少值和动能的增加值，看结果是否跟理论一致。

[参考解答]物体重力势能的减少值为

$$mgd_1=9.8\times 0.018m\text{ 焦}=0.1764m\text{ 焦，}$$

$$mgd_2=9.8\times 0.071m\text{ 焦}=0.6958m\text{ 焦，}$$

$$mgd_3=9.8\times 0.0158m\text{ 焦}=1.5484m\text{ 焦，}$$

$$mgd_4=9.8\times 0.281m\text{ 焦}=2.7538m\text{ 焦。}$$

由公式 $$v_n=\frac{d_{n+1}-d_{n-1}}{2T},$$

得 $$v_1=\frac{d_2-d_0}{2T}=\frac{0.071-0}{0.12}\text{米/秒}=0.59\text{米/秒},$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}m\times0.59^2\text{焦}=0.174m\text{焦};$$

$$v^2=\frac{d_3-d_1}{2T}=\frac{0.158-0.018}{0.12}\text{米/秒}=1.17\text{米/秒}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2=\frac{1}{2}m\times1.17^2\text{焦}=0.684m\text{焦};$$

$$v_3=\frac{d_4-d_2}{2T}=\frac{0.281-0.071}{0.12}\text{米/秒}=1.75\text{米/秒},$$

$$\frac{1}{2}mv_3^2=\frac{1}{2}m\times1.75^2\text{焦}=1.53m\text{焦}。$$

计算结果表明，物体动能的增加值、重力势能的减少值和理论基本一致。其中动能的增加都略小于重力势能的减少，这是因为物体运动过程中克服阻力损失了一部分机械能。

如果求出相邻各计数点的距离 $s_1=d_1-d_0=1.8$ 厘米，

$s_2=d_2-d_1=7.1$ 厘米-1.8 厘米=5.3 厘米，$s_3=d_2-d_2=15.8$ 厘米-7.1 厘米=8.7 厘米，

$s_4=d_4-d_3=28.1$ 厘米-15.8 厘米=12.3 厘米。则计算即时速度时可用公式

$$v_n=\frac{s_n+s_{n+1}}{2T},$$

如，$v^2=\dfrac{s_2+s_2}{2T}=\dfrac{5.3+8.7}{0.12}$米/秒$=1.17$米/秒。

1486．当打点计打出的纸带上初始的一些点模糊不清时，以及避免物体不是在纸带上打第一个点的瞬间开始下落所造成的误差，我们可以选择痕迹比较清楚的一段作为测量范围。但由于所选的起点速度不等于零，在这种情况下，应该怎样计算它的动能增量和减少的势能？

[参考解答]动能的增量为$\dfrac{1}{2}mv_n^2-\dfrac{1}{2}mv_{n-1}^2$，

势能的减少量为mgd_n-mgd_{n-1}。

在上题中如果我们把第四点作为起点，从第四点到第七点的距离 $d_1'=d_2-d_1=71$厘米-1.8厘米$=5.3$厘米，同样求得$d_2'=d_2-d_1=14$ 厘米，$d_3'=d_4-d_1=26.3$厘米，则物体在第七点到第十点的一段路程中，势能的减少为$mgd_2'-mgd_1'=mg(d_2'-d_1')=9.8\times(0.14-0.053)$ m焦$=0.8526m$焦。

动能的增量

$$\frac{1}{2}mv_2^{'2}-\frac{1}{2}mv_1^{'2}=1.53m\text{焦}-0.684m\text{焦}=0.846m\text{焦。}$$

$$[v_1^{'}=\frac{d_2^{'}-d_0^{'}}{2T}=1.7\text{米/秒，}v_2^{'}=\frac{d_3^{'}-d_1^{'}}{2T}=1.75\text{米/秒。}]$$

动量和冲量

填充题

1487．物体的质量和速度的乘积叫做物体的动量。

1488．旧式高射炮的炮筒做得很长，从动量和冲量的角度来看，是为了延长作用时间，以增大冲量，从而使炮弹射击时有较大的动量。

1489．冲量的作用效果是使物体的动量发生变化。

1490．一只乒乓球从某一高度落到台面后又被弹起到另一高度，在这一过程中改变乒乓球量的力有重力、弹力、台面对球的静摩擦力，其中作用时间最短的力是弹力和静摩擦力。

1491．20 千克·米/秒=20 牛·秒。

1492．动量是表征物体运动状态的量，是矢量，它的方向为即时速度的方向。

1493．以 5.0 米/秒的速度作匀速直线运动的物体，质量为 10 千克，它的动量大小为 50 千克·米/秒。

1494．质量为 2 千克的物体，从静止开始以 10 米/秒 ^{2} 的加速度作匀加速直线运动，它在第 5 秒末的动量大小为 100 千克·米/秒。

1495．初速度为 20 米/秒，加速度大小为 5.0 米/秒 ^{2} 的物体，质量为 4 千克。当它作匀减速直线运动时，第二秒末的动量为 40 千克·米/秒，第 5 秒末的动量为—20 千克·米/秒。

1496．始终沿直线运动的物体，原来的动量为 10 千克·米/秒，它在第 1 秒内受到的冲量为 5 牛·秒，第 2 秒内受到的冲量为—3 牛·秒，2 秒内这物体动量的增量数值为 2 千克·米/秒，这物体第 2 秒末的动量大小为 12 千克·米/秒。

1497．一个质点的动量的大小跟时间的关系为 p=(10+5t）千克·米/秒，这个质点在第 4 秒末的动量大小为 30 千克·米/秒，第 4 秒内受到的冲量大小为 5 牛·秒。

1498．质量为 10 千克的物体，以 10 米/秒的初速度在粗糙水平面上滑行，物体跟水平之间的摩擦系数 μ=0.2。此物体在第 4 秒末的动量大小为 20 千克·米/秒，第 10 秒末的动量大小为 0。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

1499．质量为 0.5 千克的小球沿光滑水平面以 5 米/秒向右的速度冲向墙壁，球被弹回时的速率为 4 米/秒。设向右方向为正，此球跟墙作用前的动量为 2.5 千克·米/秒，作用后的动量为—2.0 千克·米/秒，小球动量的增量为—4.5 千克·米/秒，墙受到的冲量为 4.5 牛·秒，方向向左。

1500．以 10 米/秒的初速度作平抛运动的物体，质量为 0.5 千克，g 取 10米/秒^2。它在第一秒末的动量大小为 $5\sqrt{2}$ 千克·米/秒，二秒内

动量增量的大小为 10 千克·米/秒，第二秒内受到的冲量大小为 5

牛·秒，第二秒末它的动量对时间的变化率的大小为 5 牛，方向为竖直向下。

1501．将质量为 0.5 千克的小球以 20 米/秒的初速度作竖直上抛运动，不计空气阻力，则小球从抛出点至最高点的过程中，动量的增量大小为 10 千克·米/秒，方向为竖直向下；从抛出至小球落回出发点的过程中，小球受到的冲量大小为 20 牛·秒。方向为竖直向下。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

1502．质量为 2 千克的物体，沿倾角为 60° 的光滑斜面下滑到斜面底端时的速度大小为 6 米/秒，然后以 2 米/秒的速度沿水平面滑行。在从

斜面进入平面这一过程中，物体受到的冲量大小为 $4\sqrt{7}$ 牛·秒。

1503．作直线运动的质点，原来的动量为 20 千克·米/秒，第 1 秒内受到的冲量为 10 牛·秒，第 2 秒末的动量为—5 千克·米/秒，它在第 2 秒内受到的冲量为—35 牛·秒，2 秒钟内动量的增量为—25 千克·米/秒，2 秒钟内质点受到的平均冲力为—12.5 牛。

1504．汽车作直线运动。在 40 秒内，动量由 8.0×10^4 千克·米/秒减小为 1.6×10^4 千克·米/秒，汽车动量的增量为 -6.4×10^4 千克·米/秒，受到平均冲力的大小为 1.6×10^3 牛，方向为和原运动方向相反。

1505．质点受两个互相垂直的恒力 F_1、F_2 作用。其中 F_1 的大小为 4 牛，作用了 20 秒钟；F_2 的大小为 5 牛，作用了 16 秒钟。则质点受到的

冲量大小为 $80\sqrt{2}$ 牛·秒，其方向跟 F_2 的夹角为 45°。

1506．质点受到变力的作用而作变速直线运动，力和时间的关系为 F=4t 牛，则质点在 0~4 秒内动量的增量大小为 32 千克·米/秒，这段时间内，质点受到的平均冲力的大小为 8 牛。

[提示]利用图线或简单积分求解。

1507．质量为 10 千克的质点，沿直线运动，它的速度的变化规律是 v=（2+4t）米/秒。该质点在 0~4 秒内，动量的变化量大小为 160 千克·米/秒，在这段时间内，该质点受到的平均冲力大小为 40 牛。

[提示]可用图线求解，或先求出作用力的大小。

1508．质量为 0.5 千克的小球，沿 x 方向，以 10 米/秒的速度作匀速直线运动；在 y 方向上保持以 $s=4t^2$ 米的规律作直线运动。此球在任意 2 秒内受到的平均冲力大小为 4 牛，在第 10 秒末，它的动量对时间的变化率大小为 4 牛。

1509．质量为 2 千克的质点，从原点 O 沿 Ox 方向由静止开始作匀加速直线运动，它在任意位置相对于起始位置的动量增量，随位移 x 增

大而变化的规律为 $\triangle p = 4\sqrt{x}$ 千克·米/秒。每秒钟内质点受到的冲

量大小为 4 牛·秒，2 秒钟内质点动量增量的大小为 8 千克·米/秒。

[提示] $\triangle p = m\cdot\triangle v = m\cdot a\cdot\triangle t = m\cdot at = ma\cdot\sqrt{2x/a} = rr\sqrt{2ax}$。

选择题

1510．物体 A 和物体 B 组成一个系统，沿水平方向运动的物体 A 的

动量为 3 千克·米/秒，沿竖直方向运动的物体 B 的动量为 4 千克·米/秒。这个系统的总动量大小为

(a)5 千克·米/秒；　　(b)6 千克·米/秒；

(c)7 千克·米/秒；　　(d)25 千克·米/秒。

答(a)

1511．A、B 两物体相向运动。A 自东向西，动量的大小为 10 千克·米/秒，B 自西向东，动量的大小为 15 千克·米/秒。规定自东向西方向为正，则此两物体动量的差为

(a)5 千克·米/秒；　　(b)-5 千克·米/秒；

(c)25 千克·米/秒；　　(d)-25 千克·米/秒。

答(c)、(d)

1512．小车作直线运动，第一秒内的动量始终为 8 千克·米/秒，第二秒内的动量始终为 10 千克·米/秒，它在两秒钟内动量的增量为

(a)18 千克·米/秒；　　(b)2 千克·米/秒；

(c)-2 千克·米/秒；　　(d)-18 千克·米/秒。

答(b)

1513．质量为 1 吨的小船，在静水中的速度为 2 米/秒，由于受到水流的影响，小船沿跟原方向成 45°角运动。如果小船的功率不变，且设两种情况下的速度都是均匀的，则由于水流的影响小船的动量增量大小为

(a)2000千克·米/秒；　　(b)$2000\sqrt{2}$千克·米/秒；

(c)$1000\sqrt{2}$千克·米/秒；　　(d)2000（$\sqrt{2}-1$）千克·米/秒。

答(a)

1514．用 F=20 牛的拉力竖直向上拉重为 15 牛的物体，2 秒钟内物体受合力的冲量大小为

(a)70 牛·秒；　　(b)5 牛·秒；

(c)40 牛·秒；　　(d)10 牛·秒。

答(d)

1515．物体 A 的质量为 10 千克，原来静止在水平面 B 上，设 A、B 的滑动摩擦系数为 0.4，取 g=10 米/秒^2。现在有水平推力 F=50 牛作用于 A 上，F 作用的持续时间 4 秒钟，物体受到合力的冲量大小为

(a)200 牛·秒；　　(b)900 牛·秒；　　(c)100 牛·秒；

(d)40 牛·秒；　　(e)360 牛·秒。

答(d)

1516．重 100 牛的物体 A，静止在水平面 B 上，已知 A、B 间的摩擦系数为 0.5，取 g=10 米/秒^2。现在用水平推力 F=30 牛作用于 A，在 2 秒钟内，物体受到合力的冲量大小为

(a)80 牛·秒；　　(b)60 牛·秒；　　(c)20 牛·秒；

(d)-20 牛·秒；　　(e)0。

答(c)

1517．用大小为 10 牛的拉力 F，沿倾角为 30°的光滑斜面拉重为 30 牛的物体，设 F 方向为正，斜面足够长，则在 4 秒钟内，物体受到的合力冲量为

(a)80 牛·秒；　　(b)-80 牛·秒；

(c)-20 牛·秒；　　(d)20 牛·秒。

答(c)

1518．作匀减速直线运动的物体，质量为 2 千克，初速度为 10 米/秒，加速度大小为 2 米/秒^2。以初速方向为正，在 10 秒钟内，物体受到的冲量为

(a)40 牛·秒；　　(b)-40 牛·秒；

(c)200 牛·秒；　　(d)0。

答(b)

1519．质量为 4 千克的物体 A，以 v_0=10 米/秒的初速度滑到水平面 B 上，已知 A、B 间的摩擦系数为 0.2，取 g=10 米/秒^2，以 v_0 方向为正，则在 10 秒钟内，物体受到的冲量为

(a)80 牛·秒；　　(b)-80 牛·秒；

(c)40 牛·秒；　　(d)-40 牛·秒；

答(d)

1520．质量为 m 的质点，在水平面内作半径为 r 的匀速率圆周运动，它的角速度为ω，周期为 T。在 T/6 时间内，质点受到的冲量大小为

(a)$m\omega^2 r \cdot T/6$；　　(b)$-m\omega^2 rT/6$；

(c)$m\omega r$；　　(d)$m\omega rT/6$。

答(c)

1521．A、B 两物体叠放在水平面 C 上，水平拉力 F 作用在 B 上。

（1）A、B 一起沿水平面作匀速直线运动，运动方向跟 F 的方向一致，在运动过程中的一段时间内，下列说法哪个是正确的？

（2）如果 A、B 一起沿力的方向作匀加速直线运动，在运动过程中的任一段时间内，正确的说法是

可供选择的答案

(a)A、B 各自受到的冲量都为零；

(b)B 受冲量为零，A 受冲量不为零；

(c)A 受冲量为零，B 受冲量不为零；

(d)A、B 各自受到的冲量都不为零。

（1）答(a)；（2）答(d)

1522．小船原来静止在平静的水面上。当人从船尾走到船头的过程中，小船向后运动。在这个过程中，作用在小船上的冲量来自。

(a)人对小船的静摩擦力；

(b)水对船的推力；

(c)人对小船的静摩擦力以及水对小船的阻力；

(d)所有作用在小船上的外力的合力；

(e)小船在水平方向受到的合外力。

答(c)、(d)、(e)

1523．关于物体的动量，下列说法哪些是正确的？

(a)物体的动量越大，其惯性也越大；

(b)同一物体的动量越大，其速度一定越大；

(c)物体的动量越大，其受到的作用力一定越大；

(d)动量的方向一定是沿物体运动的方向。

答(b)、(d)

1524．关于冲量跟物体受力情况和运动状态的关系，下列说法哪些是正确的？

(a)物体受到的冲量越大，它的动量一定越大；

(b)物体受到的冲量越大，它的动量的增量一定越大；

(c)物体受到的冲量越大，它受到的冲力一定越大；

(d)物体受到的冲量越大，它的加速度一定越大。

答(b)

1525．关于动量的增量$\triangle p=p_2-p_1$，下列各种说法，哪些是正确的？

(a)$|\triangle p|>|p_2|$或$|\triangle p|>|p_1|$是可能的；

(b)$\triangle p\perp p_2$或$\triangle p\perp p_1$是可能的；

(c)如果$|p_2|=|p_1|$，则$|\triangle p|\neq 0$是可能的；

(d)如果$|p_2|=|p_1|$，则$|\triangle p|$一定为零；

(e)$\triangle p$的方向跟（p_2-p_1）的方向不一致是可能的；

(f)$\triangle p$跟$F\cdot\triangle t$大小相等、方向不同是可能的。

答(a)、(b)、(c)

1526．关于物体运动跟它具有的动量、动量的增量之间的关系，下列说法哪些是正确的？

(a)只要物体运动的速率不变，它的动量一定不变；

(b)只要物体运动的加速度不变，它的动量一定不为零；

(c)保要物体受到的合外力为零，它的动量一定不变；

(d)只要物体作曲线运动，它在任意小的时间内动量的变化一定不为零。

答(c)、(d)

1527．如果由A、B两物体所组成的系统的总动量始终为零，则下列说法哪些是正确的？

(a)A、B两物体各自的动量一定始终为零；

(b)A、B两物体所构成的系统受到的合外力一定为零；

(c)A、B两物体各自所受到的合外力一定始终为零；

(d)A、B两物体各自的动量一定保持不变。

答(b)

1528．下列各种说法中，哪些是能够成立的？

(a)某一段时间物体动量的增量不为零，而其中某一时刻物体的动量可能为零；

(b)某一段时间物体受到的冲量不为零，而其中某一时刻物体的动量可能为零；

(c)某一段时间物体受到的冲量不为零，而动量的增量可能为零；

(d)某一时刻物体的动量为零，而动量对时间的变化率可能不为零；

(e)作曲线运动的物体，它的动量对时间的变化率可能为零。

答(a)、(b)、(c)

1529．关于物体受到的冲量，下列说法哪些是正确的？

(a)只要物体受到力的作用，它所受冲量一定不为零；

(b)只要物体受到的合外力不为零，它在任一$\triangle t$内所受冲量一定不

为零；

(c)只要物体动量发生变化，它所受冲量一定不为零；

(d)作曲线运动的物体，在任何△t 时间内的冲量一定不为零。

答(b)、(c)、(d)

1530．跳高比赛中，运动员着地处必须垫上很厚的海绵垫子，这是为了

(a)减小着地过程运动员受到的冲量；

(b)减小着地过程运动员动量的变化；

(c)减小运动员着地时受到的平均冲力；

(d)减小着地的平均加速度；

(e)减小着地时的速度。

答(c)、(d)

1531．由 A、B 两物体所组成的系统，受到的总冲量为 I，A、B 两物体各自所受冲量设为 I_A、I_B，各自动量的增量分别为$\triangle_{pA}$，$\triangle_{pB}$。下列各种说法，哪些是正确的？

(a)$I=I_A+I_B$一定成立；　　(b)$I=\triangle_{PA}+\triangle_{PB}$一定成立；

(c)$I=I_A+I_B$可能不成立；　　(d)$I=\triangle_{PA}+\triangle_{PB}$不一定成立。

答(a)、(b)

1532．原来静止的两个质点 A、B，从同一时刻起受到恒力冲量 I_A、I_B的作用。设 P_A、P_B，$\triangle P_A$、$\triangle P_B$，F_A、F_B，m_A、m_B，a_A、a_B，$\triangle v_A$、$\triangle v_B$，s_A、s_B分别表示它们的动量、动量的增量、平均冲力、质量、加速度、速度的增量，位移。下列各种说法，哪些是正确的？

(a)如果 $I_A=I_B$，则必有 $F_A=F_B$；

(b)如果 $I_A=I_B$，则必有$\triangle P_A=\triangle P_B$；

(c)如果$|I_A|>|I_B|$，则必有$|\triangle v_A|>|\triangle v_B|$；

(d)如果 $I_A=2I_B$，$m_A=2m_B$，则必有 $a_A=2a_B$；

(e)如果 $I_A=2I_B$，$m_A=2m_B$，则必有$\triangle v_A=\triangle v_B$；

(f)如果 $I_A=2I_B$，$m_A=m_B$，则必有 $s_A=2s_B$。

答(b)、(e)

1533．质量为 5 千克的物体，原来 v=5 米/秒的速度作匀速直线运动。现若受到跟运动同方向的冲量 I=15 牛·秒作用，经过 4 秒钟，物体的末动量大小为

(a)85 千克·米/秒；　　(b)160 千克·米/秒；

(c)40 千克·米/秒；　　(d)21.25 千克·米/秒。

答(c)

1534．质点沿自东向西方向运动，动量为 30 千克·米/秒。在 10 秒钟内受到由南向北的冲量 I=40 牛·秒的作用后，物体动量的大小变为

(a)70 千克·米/秒；　　(b)50 千克·米/秒；

(c)401.1 千克·米/秒；　　(d)500 千克·米/秒。

答(b)

1535．质点 m 原来的动量为 20 千克·米/秒，第一秒内受到 $I_1=20$ 牛·秒的冲量作用，第二秒内受到$I_2=20\sqrt{2}$牛·秒的冲量作用，方

向如图所示。则质点在第二秒末的动量大不为

(a)20（$2+\sqrt{2}$）千克·米/秒；

(b)40千克·米/秒；

(c)20（$2-\sqrt{2}$）千克·米/秒；

(d)0。

答(d)

1536．质量为 2 千克的物体作自由落体运动，它在第二秒内受到来自水平方向的 I=20 牛·秒的冲量作用，取 g=10 米/秒 ^{2}，则该物体第二秒末的动量大小为

(a)$20\sqrt{2}$千克·米/秒；　　(b)$10\sqrt{2}$千克·米/秒；

(c)$20\sqrt{5}$千克·米/秒；　　(d)$10\sqrt{5}$千克·米/秒；

答(c)

1537．以 10 米/秒的初速度作平抛运动的物体，质量为 0.5 千克，它在第二秒内受到来自水平方的冲量 I=5 牛·秒的作用，取 g=10 米/秒 ^{2}，则此物体在第二秒内动量增量的大小为

(a)5千克· 米/秒；　　(b)$5\sqrt{2}$千克·米/秒；

(c)10千克·米/秒；　　(d)5（$1+\sqrt{2}$）千克·米/秒。

答(b)

1538．如果物体在任何相同时间内受到的冲量都相同，则此物体的运动

(a)可能是匀变速运动；

(b)可能是匀变速曲线运动；

(c)可能是匀变速直线运动；

(d)可能是变加速运动；

(e)可能是匀速圆周运动。

答(a)、(b)、(c)

1539．关于作平抛运动的物体，下列哪些说法是正确的？

(a)任何相等时间内受到的冲量一定相同；

(b)任何相等时间内动量的增量一定相同；

(c)某两段相等时间内受到的冲量可能不同；

(d)下落的最后一秒内动量的增量比开始下落的第一秒内动量增量大；

(e)下落的最后一秒内动量增量跟水平方向的夹角，比开始下落的第一秒内动量增量跟水平方向的夹角大。

答(a)、(b)

1540．关于作斜上抛运动的物体，下列各种说法中哪些是正确的？

(a)上升过程受到的冲量向上，下落过程受到的冲量向下；

(b)上升的最后一秒内跟下落的最初一秒内动量的增量大小相等方向相反；

(c)运动过程中，任何 1 秒内物体动量的增量都相同；

(d)物体在任何时刻的动量对时间的变化率都相同；

(e)物体通过最高点位置时，动量对时间的变化率为零。

答(c)、(d)

1541．物体以 60 千克·米/秒的动量作斜上抛运动，物体通过最高点位置时的动量大小为 30 千克·米/秒。如以竖直向上方向为正，则物体在上升过程中受到的冲量为

(a)30牛·秒； (b) - 30牛·秒；

(c)90牛·秒； (d) - 90牛·秒；

(e)$30\sqrt{3}$牛·秒； (f) $-30\sqrt{3}$牛·秒。

答(f)

1542．将物体 m 以某一初动量竖直向上抛出。设空气阻力在物体运动中大小始终保持不变，如果物体在上升过程中受到的冲量为 $I_{上}$，下降过程中受到的冲量为 $I_{下}$，它们的大小相比较为

(a)$I_{上}>I_{下}$； (b)$I_{上}<I_{下}$；

(c)$I_{上}=I_{下}$； (d)条件不足，无法比较。

答(a)

1543．如果以相同的冲量分别作用于 A、B 两物体，设：物体的质量分别为 m_A、m_B，动量的增量分别为$\triangle p_A$、$\triangle p_B$速度的增量分别为$\triangle v_A$、$\triangle v_B$。就大小而言，如果 $m_A>m_B$，下列说法哪些是正确的？

(a)$\triangle p_A < \triangle p_B$；

(b)$\triangle v_A < \triangle v_B$；

(c)$\triangle v_A < \triangle v_B$，$\triangle p_A = \triangle p_B$；

(d)$\triangle v_A < \triangle v_B$，$\triangle p_A < \triangle p_B$。

答(b)、(c)

1544．质量为 m 的小球，从距水平硬台面高为 h_1 处由静止开始下落，碰到台面后，被弹起的最大高度为 h_2，设球跟台面的作用时间为$\triangle t$，则小球受到的平均冲力的大小为

(a)$mg + m(\sqrt{2gh_2} - \sqrt{2gh_1}) / \triangle t$；

(b)$m(\sqrt{2gh_2} + \sqrt{2gh_1}) / \triangle t$；

(c)$mg + m(\sqrt{2gh_2} + \sqrt{2gh_1}) / \triangle t$；

(d)$mg + m(\sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gh_2}) / \triangle t$；

(e)$m(\sqrt{2gh_2} - \sqrt{2gh_1}) / \triangle t$；

答(b)

1545．质量为 0.5 千克的质点，作直线运动的规律是 s=（$4t+6t^2$）米，其动量对时间的变化率是

(a)6 牛； (b)1.5 牛；

(c)（2+3t）牛； (d)0。

答(a)

1546．质量为 0.4 千克的质点，它的位移随时间的变化规律是 $s=4t^2$ 米，下列各种说法中哪些是正确的？

(a)物体的动量跟时间成正比；

(b)物体动量对时间的变化率不为；

(c)物体受到的平均冲力跟时间成反比；

(d)物体在任何时间内受到的平均冲力跟它任何时刻动量对时间的变化率相同。

答(a)、(b)、(d)

1547．质量为 2 千克的物体，作直线运动时，它的动量随时间变化的规律是 pt=(20-10t)千克·米/秒，它的动量对时间的变化率是

(a)10 牛；　(b)20 牛；

(c)-10 牛；　(d)-20 牛。

答 9c)

1548．质量为4千克的物体，它的动量对时间的变化率$\frac{\triangle p}{\triangle t}=2$千克·米/秒^{2}保持不变。那么

(a)该物体在任何相同时间内所受冲量一定相同；

(b)该物体一定作匀变速运动；

(c)该物体可能作匀速运动；

(d)该物体一定作匀变速直线运动；

(e)该物体在较长时间内受到的平均冲力跟它在任何短时间内受到的平均冲力一定相同；

(f)无论物体作什么运动，它的加速度一定是 0.5 米/秒^2。

答(a)、(b)、(e)、(f)

1549．质量为 5 千克的物体在直角坐标系中的运动规律是 v_x=2t 米/秒，v_y=4 米/秒，该物体在 2 秒钟内动量的增量大小为

(a)20千克·米/秒；　(b)40千克·米/秒；

(c)$20\sqrt{2}$千克·米/秒；　(d)10千克·米/秒。

答(a)

1550．质量为 2 千克的物体，在水平面内运动。当它经过 A 点时间的速度 v_A=3 米/秒，沿 0_y 方向；经过 B 点时的速度 v_B=4 米/秒，沿 0_x 方向，如图所示。该物体从 A 到 B，动量的增量为

(a)7 千克·米/秒，沿 AB 方向；

(b)7 千克·米/秒，沿 BA 方向；

(c)5 千克·米/秒，沿 AB 方向；

(d)5 千克·米/秒，沿 OC 方向；

(e)5 千克·米/秒，沿 CO 方向。

答(c)

1551．一个质量为 2 千克的质点自原点 O 沿 Ox 轴从静止开始作匀速直线运动，它的动量随位移x的变化规律是$p=8\sqrt{x}$千克·米/秒，则

(a)质点在 1 秒钟内受到的冲量一定是 16 牛·秒；

(b)质点通过 A、B、C、D……各点时，动量对时间的变化率一定是

16 千克·米/秒 ^{2}；

(c)质点通过相同距离的动量增量可能相同；

(d)质点经过相同时间的动量增量一定相同。

答(a)、(b)、(d)

[提示] $p = mv = m \cdot \sqrt{2ax}$，$2a = 16$，$a = 8$米/秒^2。

1552．质量为 0.4 千克的质点，从 0 点由静止开始作匀速直线运动，它的即时速度随位移 x 增大的规律是 $v = \sqrt{x}$ 米/秒。下列各种说法，

哪些是正确的？

(a)质点能过相同的位移的动量增量相同；

(b)质点动量随 x 的增大而增大，但是动量对时间的变化率相同；

(c)任何时间内，质点所受到的平均冲力必为 0.2 牛；

(d)位移越大，所受平均冲力也越大；

(e) $x = 0$ 时，$v = 0$，因而 $p = 0$，$\frac{\triangle p}{\triangle t}$ 也为零。

答(b)、(c)

计算题

1553．一个物体作直线运动，原来的动量 P_0 为 20 千克·米/秒。如果它在 t 为 0.5 秒内在运动方向受到 I 为 30 牛·秒的冲量作用，则

(1)物体的动量变为多少？

(2)物体受到的平均冲力为多少？

[解答]由题意知，物体作直线运动，受到的冲量和动量在一直线上且方向相同，根据

$$I=F\cdot\triangle t=p'-p_0；$$

(1) $p'=F\cdot\triangle t+p_0=(30+20)$ 千克·米/秒=50 千克·米/秒；

(2)平均冲力

$$\bar{F} = \triangle p / \triangle t = F\cdot\triangle t / \triangle t = (30/0.5)\text{牛} = 60\text{牛}。$$

1554．一辆汽车原来的动量 P_1 为 5000 千克·米/秒，受 F 为 80 牛的水平推力作用而作匀加速直线运动。如果运动中小车受到的恒定阻力 f 为 30 牛，则经过 t 为 5 秒钟小车的动量变为多大？

[解答]由动量定理可知，如以 p_2 表示作用后的动量，则有

$$(F-f)\cdot\triangle t=p_2-p_1，$$

$p_2=p_1+(F-f)\cdot\triangle t$

=5000 千克·米/秒+（80-30）×5 千克·米/秒=5250 千克·米/秒。

1555．质量 m 为 0.4 千克的小球，以 v_0 为 10 米/秒的速度从高 h 为 5 米的平台边缘水平抛出，取 g=10 米/秒 ^{2}。求：

(1)小球落地时动量的大小和方向；

(2)小球运动全过程中动量的增量。

[解答] $(1)p=mv_t=m\sqrt{v_0^2+2gh}$

$=0.4\times\sqrt{10^2+2\times10\times5}$千克·米/秒

$=4\sqrt{2}$千克·米/秒；

$tga=\frac{\sqrt{2gh}}{v_0}=\frac{\sqrt{2\times10\times5}}{10}=1$，$a=45°$，动量的方向跟水平成$45°$。

(2)小球动量的增量即为竖直方向动量的增量，这是因为平抛运动中，水平方向运动状态不变。故

$\triangle p=m\cdot\sqrt{2}=0.4\times\sqrt{2\times10\times5}$千克·米/秒$=4$千克·米/秒。

1556．质量 m 为 2 千克的物体，从高 h 为 1.25 米、倾角为 30°的光滑斜面顶端由静止开始下滑。到达底端后接着沿光滑水平面滑行。假设物体进入水平面时没有向上跳起的现象，取 g=10 米/秒^2，则

(1)该物体到达斜面底端的瞬时，动量大小、方向怎样？

(2)物体到达水平面的瞬间，受到的冲量多大？

[解答](1)到达水平面前的瞬时，物体的动量

$p_1=mv_1=rr\sqrt{2gh}=2\times\sqrt{2\times10\times1.25}$千克·米/秒$=10$千克·米/秒。

方向沿斜面斜向下如图所示，跟水平面的夹角为 30°。

(2)如果没有向上跳起，则进入水平面时只有水平方向的动量。由矢量分解知识可知，将 p_1，分解为水平分量 p_2，竖直分量 p_3，则有

$$p_2=p_1\cos30°=\frac{\sqrt{3}}{2}p_1=5\sqrt{3}\text{千克·米/秒；}$$

$$p_3=p_1\sin30°=\frac{1}{2}p_1=5\text{千克·米/秒。}$$

其中 p_2 即进入水平面后的动量，

所以损失的动量为

$$\triangle p=p_1-p_2,$$

$\triangle p=p_1\sin30°=5$ 千克·米/秒，方向竖直向上。

故 $I=F\cdot\triangle t=\triangle p=5$ 牛·秒，

即当物体跟水平面发生作用时受到向上的冲量大小为 5 牛·秒，此后物体沿光滑水平面运动的速度$v_2=\frac{p_2}{m}=4.33$米/秒。

1557．质量 m 为 0.4 千克的小球，沿光滑水平面以 v_1 为 5.0 米/秒的速度冲向墙壁，被弹回时的速率大小 v_2 为 4.0 米/秒。规定作用前的速度方向为正，球跟墙的作用时间△t 为 0.05 秒。试求：

(1)小球动量的增量；

(2)球受到的平均冲力。

[解答]球跟墙作用后，不但球速大小发生了变化而且方向也发生了变化，因而它的动量大小、方向也随之发生变化，注意到正方向的规定，则

$p_1=mv_1=0.4×5.0$ 千克·米/秒=2.0 千克·米/秒，

$p_2=mv_2=0.4×(-0.4)$千克·米/秒=-1.6 千克·米/秒。

所以(1)$△p=p_2-p_1=(-1.6-2.0)$千克·米/秒=-3.6 千克·米/秒。

方向跟 v_2 方向相同。

(2)F=△p/△t=-3.6/0.05 牛=-72 牛。

方向跟△p 方向相同。

1558.假设质量 m 为 20 克的子弹离开枪口时的速率 v_1 为 600 米/秒，子弹在枪膛内受高温气体加速的时间△t 为 0.002 秒，求：

(1)子弹受到的冲量多大？

(2)子弹受到的平均冲力多大？

[解答](1)根据动量定理

$F·△t=△p=mv_1-mv_0=0.02×600$ 千克·米/秒-0，

I=△p=12 牛·秒；

(2)平均冲力

$$\overline{F}=△p/△t=(12/0.002)\text{牛}=6×10^3\text{牛}。$$

1559．由步枪射出的子弹质量 m 为 10 克，子弹离开枪口时的速度 v 为 770 米/秒，假若火药爆炸产生的推力 F 为 $7×10^3$ 牛，求子弹在枪筒中运动的时间。

[解答]由 F·△t=△p，知

$$△t=\frac{△p}{F}=mv/F$$

$$=0.01×770/7×10^3\text{秒}$$

$$=1.1×10^{-3}\text{秒}。$$

子弹在枪筒中运动的时间约为千分之一秒。

1560．质量 M 为 980 克的物体 A 静止在水平面 B 上，一颗质量 m 为 20 克的子弹 C，以 v_0 为 600 米/秒的水平速度射入 A，并停留在 A 内，使物体（连子弹）获得 v 为 11.95 米/秒的速度。设 A、C 相互作用的时间△t 为 0.01 秒，g 取 10 米/秒 ^{2}。试求：

(1)作用后，A、C 共同具有的动量为多少？

(2)作用过程中 C 所受的冲量为多少？

(3)作用过程中 A 受到的冲量为多少？

(4)作用过程中，A、C 各自受到的平均冲力分别为多少？

(5)A、B 间的滑动摩擦系数为多大？

[解答](1)由动量计算公式

得 p=(m+M)v

=(0.02+0.98)×11.95 千克·米/秒

=11.95 千克·米/秒。

(2)由动量定理可知，C 所受冲量在数值上应等于 C 的动量的增量，即

$I_C=△P_C=mv-mv_0=(0.02×11.95-0.02×600)$牛·秒

=-11.761 牛·秒。

(3)A 受到的冲量等于 A 动量的增量

$I_A=\triangle p_A=M_v-0=0.98\times11.95$ 牛·秒=11.711 牛·秒。

(4)由$F=\dfrac{\triangle p}{\triangle t}$可知

$$\overline{F}_A=\triangle p_A/\triangle t=(11.711/0.01)\text{牛}=1171.1\text{牛}$$

$$\overline{F}_C=\triangle p_C/\triangle t=(11.761/0.01)\text{牛}=1176.1\text{牛}。$$

(5)要求 A、B 间的滑动摩擦系数，则必须首先求出 A 受到 B 的滑动摩擦力，为此必须分析 A 的受力及 C 的受力情况。

由于 C 在水平方向上的动量变化情况已知，因此，只要考虑 C 在水平方向上的受力情况即可；同样，对 A 来说，也只要分析它在水平方向上的受力情况即可。分别见图(b)。

其中 F_{AC} 是 A 对 C 的作用力，F_{CA} 是 C 对 A 的作用力，它们是一对作用力和反作用力。f_{BA} 是平面对 A 的阻力即摩擦力。

由以上计算可知

$$F_{AC}=\overline{F}_C=1176.1\text{牛，而}F_{CA}=-F_{AC}，$$

所以 F_{CA}=1176.1 牛，方向水平向右。

由平均冲力的定义可知,A 受到的平均冲力即是它所受到的所有外力合力的平均效果，就是

$$\overline{F}_A=F_{CA}-f_{BA}，$$

所以$f_{BA}=F_{CA}-\overline{F}_A=1176.1\text{牛}-1171.1\text{牛}=5.0\text{牛}。$

而这一滑动摩擦力是 C 进入 A 的过程中共同前进时，A 受到的，所以

$$f_{BA}=\mu\cdot Q_{BA}=\mu(m+M)g，$$

$$\mu=f_{BA}/(m+M)g=5.0/[(0.02+0.98)\times10]=0.5。$$

顺便指出，由本题的解答可知，在这类问题中，A、C 的相互作用力是 A、C 所成系统的内力，而 f_{BA} 则是这一系统所受的外力，且内力远大于外力，即 $F_{CA}\gg f_{BA}$。这一点，对解决后面的动量守恒问题是十分重要的。

1561．一位质量 m 为 60 千克的跳高运动员，越过横杆落地时地速度大小 v 为 10 米/秒。(1)如果落地处为沙坑，则经过$\triangle t_1$为 0.6 秒钟速度减为零；(2)如果落地处为软垫，则经过$\triangle t_2$为 1.2 秒钟速度降为零。试求在这两种情况下，运动员所受的冲量以及平均冲力的大小。

[解答]根据动量定理，且设向下为正，则

$I=F\cdot\triangle t=\triangle p=m\cdot\triangle v=0-60\times10$ 牛·秒=-600 牛·秒。

两种情况下所受的冲量相同。但由于作用时间不同，故所受的平均冲力不同。

$(1)\overline{F}_1=\triangle p/\triangle t_1=-(600/0.6)\text{牛}=-1000\text{牛}。$

$(2)\overline{F}_2=\triangle p/\triangle t_2=-(600/1.2)\text{牛}=-500\text{牛}。$

其中负号表示平均冲力的方向向上。可见两种情况下所受的平均冲力大小是不同的。这就是为什么使用软垫的原因。

1562．A、B 两物体原来贴在一起且静止在光滑水平面 C 上，它们的质量分别为 m_A、m_B。现有一颗水平飞行的子弹质量为 m，以初速度 v 射向 A，并穿过 A、B 后速度变为 v’，如图所示。如果子弹穿过 A 时受到的平

均阻力为 f_1，经历的时间为 t_1；子弹穿过 B 时所经历的时间为 t_2。试求：

(1)子弹穿过 A、B 后，A、B 的速度分别为多大？

(2)子弹穿过 B 的过程中受到的平均冲力为多大？

[解答](1)解答本题的关键是如何利用动量定理。

由题意可知，子弹穿过 A 的过程中，子弹受到的冲量为

$$I_1=f_1\cdot t_1;$$

方向是自右向左，规定此方向为正。

而由牛顿第三定可知，物体A受到子弹的作用力$f_1' = -f_1$，这个力在时间t_1内的冲量为$I_1' = f_1't_1 = -f_1t_1$，方向自左向右。这一冲量将同时使A、B的动量发生变化。设子弹穿过A在进入B之前，A、B的共同速度为v_1，则由动量定理

$$f_1't_1=(m_A+m_B)v_1-0,$$

$$v_1=-f_1\cdot t_1/(m_A+m_B),$$

方向向右，此即 A 的速度。

当子弹进入 B 后，物体 B 因受到子弹的冲击，速度将在 v_1 的基础上增大，直至子弹穿过 B 为止，设此时物体 B 的速度为 v_2，则子弹穿过 B 的过程中引起子弹动量的变化量在数值上等于

$\triangle p_B=m_B\cdot\triangle v_B=-(m_Bv_2-m_Bv_1)$，方向自左向右。

为了求得 v_2，必须知道$\triangle p_B$，而$\triangle P_B$ 等于子弹对 B 的冲量。

子弹穿过 AB 受到的总冲量

$$I=\triangle p=m\triangle v=m(v'-v)=I_1+I_2。$$

式中 I_1 为子弹穿过 A 时受到的冲量，$I_1=f_1\cdot t_1$；I_2 为子弹空过 B 时受到 B 的冲量，$I_2=-\triangle p_B=m_Bv_1-m_Bv_2$，因此

$$m(v-v')=f_1t_1+m_Bv_1-m_Bv_2;$$

$$v_2=\frac{f_1t_1}{m_B}-\frac{f_1t_1}{m_A+m_B}-\frac{m(v-v')}{m_B}$$

$$=-\frac{m(v-v')(m_A-m_B)-f_1t_1m_B}{m_B(m_A+m_B)}。$$

(2)要求 B 对子弹的平均冲力 f_2，则由

$$f_2t_2=I-I_1=m[-v'-(-v)]-f_1t_1,$$

$$f_2=\frac{m(v-v')}{t_2}-\frac{t_1}{t_2}f_1。$$

值得指出的是，本题解答过程中各矢量的方向不能搞错。例如，$f_2t_2=-\triangle p_B$，因为 f_2 是 B 对子弹的作用力，方向向左，而$\triangle p_B$ 是 B 的动量的增量，方向向右。子弹受到的 B 的冲量方向自右向左。而根据牛顿

第三定律，物体B受到子弹的冲量$f_1' \cdot t_2 = f_2 t_2$等于物体B本身动量的增量$\triangle p_B$，所以$f_2 \cdot t_2 = -\triangle p_B$。实际上$f_2 t_2 = \triangle pm$，$f_2' t_2 = \triangle p_B$，因为$f_2' = -f_2$，所以有关系式$f_2 t_2 = -\triangle p_B$。这一式子仅仅表示数量以及方向上的关系，并不是动量定理表达式，等号的左右两边分别表示子弹和物体B两个不同对象的情况。

1563．将质量 m 为 0.4 千克的小球，以 v 为 40 米/秒的初速度竖直上抛，则

(1)小球从抛出到上升到最高点位置的过程中受到的冲量；

(2)小球从抛出到回到出发点位置的过程中受到的冲量。

[解答]设向上方向为正向，当小球到达最高点位置时，动量 p’为零，返回出发点位置时动量为 $p''=m(-v_0)$。

(1)$I_1=\triangle p_1=p'-p_0=0-mv0=-0.4\times 40$ 牛·秒=-16 牛·秒，方向向下。

(2)从抛出到回到出发点过程中动量的增量为$\triangle p_2$，则冲量

$I_2=\triangle p_2=mv'-mv_0=m(v'-v_0)=0.4(-40-40)$牛·秒=-32 牛·秒，方向向下。

1564．质量 m 为 0.5 千克的小球，以 v_0 为 14 米/秒的初速度竖直向上抛出，运动过程中，小球受到的平均阻力 f 为 2 牛。假设阻力在小球运动的全过程中始终不变，取 g=10 米/秒^2。则

(1)小球从抛出到上升到最高点位置的过程中受到的冲量为多少？

(2)小球从抛出到回到出发点过程中受到的冲量为多少？

[解答](1)设向上方向为正，小球上升到最高点时，$p_1=0$，故上升过程中受到的冲量

$I_1=F\cdot\triangle t=\triangle p_1=mv_1-mv_0=0-mv_0=-0.5\times 14$ 牛·秒=-7 牛·秒。

(2)要求出从抛出到返回到出发点的全过程中受到的冲量，必须先求出返回出发点时的速率，或者求出上升、下降过程的时间。

上升过程应用动能定理。设上升的最大高度为 h，返回出发点的速度为 v_t，则

$$0-\frac{1}{2}mv_0^2=-(mg+f)h \qquad (1)$$

下降过程应用动能定理

$$\frac{1}{2}mv_t^2-0=(mg-f)h \qquad (2)$$

(1)式÷(2)式得

$$\frac{v_0^2}{v_t^2}=\frac{mg+f}{mg-f}，$$

代入数据得

$$v_t^2=\frac{0.5\times10-2}{0.5\times10+2}\times14^2米^2/秒^2=84米^2/秒^2，$$

$v_t=-9.16米/秒$，方向向下。

所以 $\triangle p_2=mv_t-mv_0$

$=0.5\times(-9.16)千克·米/秒-0.5\times14千克·米/秒$

$=-11.58千克·米/秒$，

所以，总量$I_2=F·\triangle t=\triangle p_2=-11.58牛·/秒$。

1565．质量 m 为 0.1 千克的小球以 v_0 的初速度竖直向上抛出，由于受到空气阻力的作用，球落回出发点时的速率为 $\frac{3}{4}v_0$。假设在小球运动的全过程中空气阻力保持不变，小球动能的增量为$\triangle E_k$为-8.75 焦，取 g=10 米/秒 ^{2}。试求：

(1)小球从抛出到落回的过程中动量的增量；

(2)运动过程中受到的空气阻力；

(3)小球运动过程中受到的平均冲力。

[解答](1)应用动能定理先求出 v_0

$\frac{1}{2}mv_t^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\triangle E_k$，代入数据

$\frac{1}{2}\times0.1[(\frac{3}{4})^2-1]v_0^2=-8.75$，即

$\frac{1}{2}\times0.1\times\frac{7}{16}v_0^2=8.75$，

所以 $v_0=20米/秒$，方向竖直向上；

$v_t=\frac{3}{4}v_0=15米/秒$，方向竖直向下。

以向上为正，则

$\triangle p=m(v_t-v_0)=0.1\times[(-15)-20]$千克·米/秒=-3.5 千克·米/秒。

(2)把运动过程中受到的空气阻力为 f，上升的最大高度设为 h，上升过程中，应用动能定理，可得

$$-(mg+f)h=-\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (1)$$

下降过程中，应用动能定理，可得

$$(mg-f)h=\frac{1}{2}mv_t^2 \qquad (2)$$

(1)式÷(2)式，得

$\frac{mg+f}{mg-f}=\frac{v_0^2}{v_t^2}$，取$v_t=\frac{3}{4}v_0$，代入数据

得 $\frac{0.1\times10+f}{0.1\times10-f}=\frac{16}{9}$，$f=\frac{7}{25}$牛$=0.28$牛。

(3)运动过程中受到的平均冲力是对总的作用效果而言的。

由$-(mg+f)\triangle t_1=m\cdot\triangle v_1=-mv_0$ （上升过程）

得 $\triangle t_1=[0.1\times20/(0.1\times10+0.28)]$秒$=1.56$秒；

由 $(mg-f)\triangle t_2=m\triangle v_2=mv_t$；

得$\triangle t_2=0.1\times15/(0.1\times10-0.28)=2.08$秒

$$\triangle t=\triangle t_1+\triangle t_2=3.64\text{秒。}$$

$F\cdot\triangle_t=mv_t-mv_0$，设向上为正，有

$\bar{F}=\{0.1[(-15)-20]/3.6\}$牛$=-0.96$牛。

这即为全过程的平均冲力。可以验算，它不等于小球受到的合外力的平均值。

1566．一质点作斜上抛运动，质点到达最高位置时的动量大小是抛出时初动量大小的 0.6 倍，质点落回地面时的动量大小 p_t 为 50 千克·米/秒。试求（不计空气阻力）：

(1)质点上升过程中动量的增量；

(2)从抛出到落回地面的全过程中所受到的冲量。

[解答]斜抛物体到达最高点位置时，只具有水平分速度，因而它的动量也是水平方向，设 p_0 为初动量，p_x 为最高点时动量，由斜抛运动的规律，得

$$p_x=p_0\cos\theta\text{；}$$

$$p_y=p_0\sin\theta\text{。}$$

落地时的动量大小跟初动量大小相同，即 $p_t=p_0=50$ 千克·米/秒。由

题意：$\frac{p_x}{p_0}=0.6$，

所以 $\cos\theta=\frac{p_x}{p_y}=0.6$，$\theta\approx53°$；

(1)上升过程动量的增量

$\triangle p_{上}=m\cdot\triangle v=-p_y=-p0\sin\theta=-50\times\sin53°$千克·米/秒

$=-40$ 千克·米/秒。

负号表示方向跟 p_y 方向相反。

(2)全过程受到的冲量为上升过程所冲量的 2 倍，即

$F\cdot\triangle t=\triangle p=2\triangle p_{上}=2\times(-40)$ 牛·秒=-80 牛·秒。

1567．质量 M 为 4 吨的火箭，竖直向上发射，假定开始点火时，燃料燃烧产生的高温气体的喷发速度 v 为 800 米/秒。试问：开始点火时，每秒钟必须喷出多少千克的气体，才能使火箭离开地面？（设开始喷气时，空气阻力不计，火箭体质量的变化忽略不计。）

[解答]要使火箭离开地面，喷气产生的推力必须大于火箭体的重力，也就是喷气火箭体之间的相互作用力要满足

$$\overline{F}>Mg=4000\times9.8\text{牛}=3.92\times10^{4}\text{牛}。$$

设喷出气体的质量为 m，气体的初速度 $v_0=0$，末速度为 v，由动量定理

$$F\cdot\triangle t=m(v-v_0)=mv，$$

所以 $$m=F\cdot\triangle t/v>(3.92\times10^{4}\times1/800)\text{千克}$$
$$>49\text{ 千克}，$$

即每秒钟至少必须喷出 49 千克的气体。

1568．传动皮带保持 v 为 4 米/秒的恒定速度运动。一个沙斗在每秒钟内有 m 为 50 千克的细沙从距皮带高 h 为 1.25 米处落到皮带上，如图所示。g 取 10 米/秒 ^{2}。试问

(1)细沙对皮带在水平方向上的平均冲力大小为多少？

(2)细沙在竖直方向上对皮带的平均冲力大小为多少？

(3)细沙对皮带的总冲量的大小为多少？

[解答]由题意可知，细沙落入皮带后，将随皮带一起以 4 米/秒的速率运动，所以，

(1)水平方向上，细沙动量的增量为

$\triangle p_x=mv-0=50\times4$ 千克·米/秒=200 千克·米/秒。

这些细沙是在 1 秒钟内落向皮带的，所以，细沙对皮带在水平方向上的平均冲力在数值上为

$$F_x{}'=F_x=\triangle p_x/\triangle t=(200/1)\text{牛}=200\text{牛}。$$

(2)在竖直方向上，细沙落到皮带上的即时速度为

$$v_y=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times10\times1.25}\text{米/秒}=5\text{米/秒}，$$

所以 $$\triangle p_y=m(0-v_y)=-mv_y=-50\times5\text{千克·米/秒}$$
$$=-250\text{千克·米/秒}，$$

负号表示方向竖直向上；

$$F_y=\triangle p_y/\triangle t=-(250/1)\text{牛}=-250\text{牛}，$$

方向竖直向上。

细沙对皮带的平均冲力 $F_y'=F_y=250$ 牛，方向竖直向下。

(3)总冲量为

$$I=\triangle p=\triangle p_x+\triangle p_y，$$

即 $$I=\triangle p=\sqrt{\triangle p_x^2+\triangle p_y^2}$$
$$=\sqrt{200^2+250^2}\text{牛·秒}\approx320\text{牛·秒}。$$

1569．一个物体原来的动量 p_1 为 30 千克·米/秒，方向自西向东；

经过 t 为 10 秒钟，动量变成 p_2 为 40 千克·米/秒，方向变为自北向南。则

(1)物体动量增量的大小为多少？方向怎样？

(2)物体受到的平均冲力的大小、方向怎样？

[解答]按题意作出示意图如图所示。显然

$$\triangle p=p_2-p_1=F\cdot\triangle t$$

(1)物体动量增量的大小为

$$|\triangle p|=\sqrt{|p_1|^2+|p_2|^2}=\sqrt{30^2+40^2}\text{千克·米/秒}=50\text{千克·米/秒},$$

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|p_1|}{|\triangle p|}\right)\approx 37°,$$

表示△P 的方向为西偏南，如图示。

(2)平均冲力

$|F|=|\triangle p/\triangle t|=(50/10)$牛$=5$牛，方向跟$\triangle p$方向相同。

1570．一个质点原来的动量 p_0 为 3 千克·米/秒，方向竖直向上，在 t=0 始，受到跟原运动方向垂直的恒力作用，已知力 F 大小为 1 牛，试求第 4 秒末该质点的动量。

[解答]先作示意图。设第 4 秒末的动量为 p’，

由

$I=F\cdot t=p'-p_0$，可知，

$$p'=p_0+I,$$

$$|p'|=\sqrt{|p_0|^2+|I|^2}=\sqrt{3^2+(1\times 4)^2}\text{千克·米/秒}=5\text{千克·米/秒};$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{|I|}{|P_0|}=\frac{4}{3},$$

$$\theta=\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\approx 53°。$$

表明第 4 秒末，质点动量的大小为 5 千克·米/秒，方向跟原方向的夹角为 53°。

1571．一个质量 m 为 40 克的小球，以跟粗糙水平台面成 30°的倾角斜向下投向台面，击中台面时的速度 v_1 为 5 米/秒，被弹起时的速度 v_2 为 4 米/秒，方向跟台面成 45°。假定小球跟台面的持续作用时间△t 为 0.05 秒，试求小球跟台面作用过程中所受各力大小的平均值。（取 g=10 米/秒²）

[解答]先作示意图如图(a)所示。由题意

$$|p_1| = mv_1 = 0.04 \times 5\text{千克·米/秒}$$
$$= 0.2\text{千克·米/秒}$$
$$|p_2| = mv_2 = 0.04 \times 4\text{千克·米/秒}$$
$$= 0.16\text{千克·米/秒，}$$
$$|I| = |P_2 - P_1| = \sqrt{|P_1|^2 + |P_2|^2 - 2|P_1||P_2|\cos 75°}$$
$$= \sqrt{0.2^2 + 0.16^2 - 2 \times 0.2 \times 0.16 \times \cos 75°}\text{牛·秒}$$
$$\approx 0.22\text{牛·秒，}$$
$$|\bar{F}| = |\bar{I}/\triangle t| = (0.22/0.05)\text{牛} = 4.4\text{牛，}$$

$\bar{F}$是小球受到的平均冲力，它是小球受到的合外力的平均值。由于$\bar{F}$跟 I 方向相同，且跟台面不垂直，这说明小球跟台面作用时，除了受到竖直方向的重力、弹力作用外，还受到水平方向的静摩擦力的作用，如图(b)所示。

由图(a)，根据正弦定理

$$\frac{|P_1|}{\sin a} = \frac{|I|}{\sin 75°}，$$
$$\sin a = \frac{|P_1|}{|I|} \cdot \sin 75°$$
$$= \frac{0.2}{0.22} \times 0.96593$$
$$= 0.87811，$$
$$a = 61°25'；$$

所以 $\angle\beta = 180° - \alpha - 45° = 73°35'$。

将$\bar{F}$分解

$$\bar{F}_y = \bar{F}\sin\beta = 4.22\text{牛，}$$
$$\bar{F}_x = \bar{F}\cos\beta = 1.24\text{牛。}$$

式中$\bar{F}_x = f$即表示小球受到的静摩擦力的平均值。而

$$\bar{F}_y = \bar{N} - G，$$

所以 $\bar{N} = \bar{F}_y + mg = 4.22\text{牛} + 0.04 \times 10\text{牛} = 4.62\text{牛}$，

即小球受到台面的弹力的平均值。

1572．物体 A 静止在光滑水平面 B 上。一颗质量为 m 的子弹 C，以初动能 E_{ok} 沿水平方向射向物体 A，穿过 A 后，子弹的动能变为

$E_k = \frac{1}{4}E_{ok}$。试求：

(1)A 受到的冲量；

(2)如果 A 的质量为 M，则子弹穿过 A 后，A 的速度为多少？

[解答](1)根据动量定理以牛顿第三定律，A 受到的冲量在数值上跟子弹受到的冲量相等且方向相反，即

$$I_A = -I_C，$$

为此，必须求出子弹动量的增量。设子弹的初速度为 v_0，末速度为 v，

则有

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{4}(\frac{1}{2}mv_0^2)$$

$$v=\frac{1}{2}v_0,$$

$$v_0=\sqrt{\frac{2E_{ok}}{m}}。$$

$$I_C=\triangle p_C=m(v-v_0)=-\frac{1}{2}mv_0=-\frac{1}{2}m\sqrt{\frac{2E_{OK}}{m}}=-\sqrt{\frac{mE_{OK}}{2}},$$

方向跟v_0方向相反。

$$I_A=-I_C=\sqrt{\frac{mE_{OK}}{2}},$$

方向跟v_0方向相同。

(2)A 受到的冲量等于 A 动量的增量。设 A 的末速度 v’，则有

$$I_A=\triangle p_A=M(v'-0)=\sqrt{\frac{mE_{OK}}{2}},$$

所以 $$v'=\sqrt{\frac{mE_{OK}}{2}}/M,$$

方向跟 v_0 方向相同。

1573．质量为 M 的物体 A 静止在水平面 B 上，A、B 间的滑动摩擦系数为μ，一颗质量为 m 的子弹 C 以水平速度 v_0。射向 A，经过△t 时间，子弹深入 A 内并随 A 一起沿水平面 B 滑动。试求：开始滑动时，A、C 的共同速度。

[解答]由题意可知，A、C 发生相互作用的过程中，由于各自的受力情况不同，而相互作用的时间相同，因而 A、C 各自所受的冲量是不同的。先作受力分析。如图所示。F_C和 F_A是 A、C 间的相互作用力，且 $F_C=-F_A$，f_A是 B 对 A 的摩擦力。设 v’为 A、C 的共同速度，由动量定理

$$F_C\triangle t=m(v'-v_0)=mv'-mv_0 \quad (1)$$

$$(F_A-f_A)\cdot\triangle t=M(v'-0)$$

$$F_A\cdot\triangle t=Mv'+fA\cdot\triangle t \quad (2)$$

而 $$f_A=\mu(M+m)g \quad (3)$$

$$F_C=-F_A,$$

$$F_C\cdot\triangle t=-F_A\cdot\triangle t,$$

即 $$mv'-mv_0=-[Mv'+\mu(M+m)g\cdot\triangle t]$$

$$v'=\frac{mv_0-\mu(M+m)g\cdot\triangle t}{M+m},$$

此即 A、C 相互作用后的共同速度。

1574．长 l 为 0.8 米细线能承受的最大拉力 T 为 8 牛。线的上端固定在 O 点，下端固定一只质量 m 为 0.4 千克的小球，悬点 O 距地面的高度 H 为 3.55 米。开始时，将小球提到 O 点而静止，然后让它自由下落。当小球到达使细线被拉直的位置时，刚好将细线拉断，经过 t 为 0.5 秒

钟落到地面。如果不考虑线的伸长，且取 g=10 米/秒 ²。试求：

(1)线被拉直且在断裂前小球的动量；

(2)拉断线的瞬时小球的动量；

(3)细线断裂过程所经历的时间。

[解答]小球开始下落是自由落体运动直到线被拉直时；线断裂过程是变速运动过程；细线断裂后，小球作竖直下抛运动。

(1)细线断裂前小球的动量

$$p_1 = mv_0 = m\sqrt{2gl} = 0.4\times\sqrt{2\times10\times0.3}\text{千克·米/秒}$$

$$= 1.6\text{千克·米/秒},$$

方向竖直向下。

(2)细线断裂后的瞬时，小球的速率可由竖直下抛运动的规律求得。设断裂瞬时小球的速率 v_t，则有

$$h = v_t t + \frac{1}{2}gt^2\text{，代入数据有}$$

$$H - l = 3.5\text{米} - 0.8\text{米} = v_t\times0.5\text{秒} + \frac{1}{2}\times10\times0.5^2\text{米},$$

$$v_t = 3\text{米/秒}。$$

故线断裂的瞬间小球的动量

$$p_2=mv_t=0.4\times3\text{ 千克·米/秒}=1.2\text{ 千克·米/秒},$$

方向竖直向下。

(3)线断裂瞬间小球受力如图，它所受平均冲力为 T、G 的合力 F=（T-G），方向竖直向上。

根据动量定理（令向上为正），则

$$\triangle t = \frac{\triangle p}{F} = (p_2 - p_1)/(T - G)$$

$$= -[(1.2 - 1.6)/(8 - 0.4\times10)]\text{秒} = 0.1\text{秒}。$$

1575．一只盛水较浅的大容器的底部有一小孔，距小孔距离 h 为 20 厘米的下方有一块水平放置的玻璃板。当打开小孔后，水通过小孔形成均匀水柱竖直冲向玻璃板,水碰到玻璃板以后形成张角为 120°的漏斗状水花飞向四周如图所示。设水花飞离玻璃板的速率 v_2 为 2.0 米/秒，且设水跟玻璃板接触的面积等于水柱的横截面积，g 取 10 米/秒 ²，试求刚开始放水时，水柱对玻璃板的压强。

[解答]要求压强需先求出压力，这个压力就是水柱对玻璃板的冲击力，此冲力可根据动量定理求得。

设水柱的横截面积为 S，密度为ρ，到达玻璃板时的即时速率

$v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10\times0.2}\text{米/秒} = 2.0\text{米/秒}$，水离开玻璃板时的速率 v_2=2.0 米/秒。则

每秒钟冲到板的水的质量为

$$m=S\cdot v\rho。$$

水和玻璃板作用后动量的增量为

$$\triangle p=mv_2-mv_1=p_2-p_1。$$

而由矢量合成规律可知，反射后的水流动量，在板平面内分量的矢

量和为零。

规定向下为正，则有

$$|\triangle p| = -mv\ \sin 30° - mv_1 = m\cdot(-\frac{3}{2}v_1)$$

$$= -Sv\rho\cdot\frac{3}{2}v = -\frac{3}{2}Sv^2\rho;$$

由动量定理

$$F\cdot\triangle t = \triangle p，\triangle t = 1\text{秒}，$$

$$\bar{F} = \triangle p/\triangle t = -\frac{3}{2}Sv^2\rho/\triangle t，\text{方向为竖直向上}，$$

此冲力是重力和弹力（即支持力）的合力，

$$\bar{F} = \bar{N} - G，$$

$$\bar{N} = \bar{F} + G = -(\frac{3}{2}Sv^2\rho/\triangle t + Sv\rho g)，$$

水对玻璃板的压力$Q = -\bar{N} = \frac{3}{2}Sv^2\rho/\triangle t + S\rho vg$。

水对板的压强

$$P = \frac{Q}{S} = \frac{3}{2}v^2\rho/\triangle t + \rho vg，$$

代入数据得

$$P = \frac{3}{2}\times 2^2\times 10^3/1\text{帕} + 10^3\times 2\times 10\text{帕} = 2.6\times 10^4\text{帕}。$$

1576．一条河道有一个近 90°的拐弯。假设河水以 v 为 2.0 米/秒的平均速率流动，河水的平均密度ρ为 1.001×10³ 千克/米³，试求河水对拐弯的河岸单位面积的冲力。（不计重力产生的静压强以及其他效应的影响。）

[解答]假设受冲刷处的有效截面积为 S,则单位时间内跟河岸发生作用的水的质量为

$$\frac{m}{t} = S\rho v，$$

相应的动量为

$$\frac{p_1}{t} = \frac{m}{t}v = S\rho v^2，$$

$$\frac{p_2}{t} = \frac{m}{t}v = S\rho v^2，\ p_1\perp p_2，(\text{见图})$$

所以 $\bar{F} = \frac{\triangle p}{t} = \frac{p_2 - p_1}{t} = \frac{m}{t}\cdot\triangle v = S\rho v\cdot\sqrt{2}v，$

即 $\frac{\bar{F}}{S} = \rho v\cdot\sqrt{2}v = \sqrt{2}\times 1.001\times 10^3\times 2^2\text{帕} = 5.66\times 10^3\text{帕}。$

这是河岸对水的作用，反之即为水对河岸的冲击作用。正是这种冲击作用，导致拐变处的外侧河岸不断崩塌。

1577．水力采煤是利用高压水枪喷出的高压水柱冲击煤层，到达破碎的目的，如图(a)所示。设水柱呈圆柱形，半径 r 为 20 毫米，喷射速度 v_0 为 60 米/秒，水柱沿水平方向垂直喷射到煤层表面上。假定冲煤层后，水流反射的平均速率 v'为 10 米/秒，跟原来方向的平均夹角为 120°，试求水柱对煤层的平均冲力。

[解答]以水柱为研究对象，单位时间内到达煤层的水流质量为

$$m=Sv_0\rho=\pi r^2 v_0 \rho,$$

作用前的动量

$$p_0=mv_0=\pi r^2\rho v_0^2,$$

作用后的动量

$$p'=mv'=\pi r^2\rho v_0 v'$$

水平方向动量的增量（向左为正）

$$\triangle P=P_x'-P_0=\pi r^2\rho v_0 v'\cos 60°-(-\pi r^2\rho v_0^2),$$

式中$v_0=60$米/秒，$v'=10$米/秒，$r=0.02$米，$\rho=10^3$千克/米^3，故

$$\triangle P=\pi r^2\rho v_0(\frac{1}{2}v'+v_0)$$

$$=3.14\times0.02^3\times10^3\times60\times(\frac{1}{2}\times10+60)\text{千克·米/秒}$$

$$=4898.4\text{千克·米/秒},$$

由 $F\cdot\triangle t=\triangle P$，$\triangle t=1$秒，知

$$\bar{F}=\triangle P/\triangle t=4898.4\text{牛}。$$

1578．在一次暴风雨中，雨滴以跟地面成 45°方向落向地面，落地时的速度 v_0 约为 11.3 米/秒，测得在时间△t 为 10 分钟内的降雨量 h 为 25 毫米。试求面积 S 为 10 米^{2}的水平面每秒钟受到雨滴的平均压力（设雨滴落地后不再溅起，g 取 10 米/秒^2）。

[解答]假设每一滴雨的运动状态以及作用效果相同，可先求出总质量

$$m=S\cdot h\rho=10\times0.025\times1000\text{千克}=250\text{千克},$$

作用前的总动量

$$P_0=mv_0=250\times11.3\text{千克·米/秒}=2825\text{千克·米/秒},$$

方向跟地面成 45°夹角。

作用后总动量为零。根据动量定理

$$F\cdot\triangle t=P'-P_0=-P_0=-2825\text{牛·秒},$$

方向跟 p_0 方向相反。

$$\triangle t=10\text{分钟}=600\text{秒},$$

所以 $\bar{F}=\triangle P/\triangle t,$

$$\bar{F}=-[2825/600]\text{牛}=-4.71\text{牛}。$$

负号表示雨滴受到的平均冲力跟 p_0 方向相反。由于平均冲力是合外力，因此要求出雨滴受到地面的支持力，必须对研究对象进行受力分析。

以每秒钟落到平面上的雨滴 m_t 为研究对象，则其受力图如图(b)所示。图中$\overline{Q}$表示水平地面对m_t的支持力，G为重力，f为地面对m_t的阻力（静摩擦力等）。$\overline{F}$为合力，即上面求得的平均冲力。因此，

$\overline{Q}-G=\overline{F}\cos45°$，其中G为$m_t$受到的重力。

所以，
$$\begin{aligned}\overline{Q}&=G+\overline{F}\cos45°\\&=\frac{250\times10}{600}\text{牛}+4.71\times\frac{\sqrt{2}}{2}\text{牛}\\&=7.50\text{牛，方向竖直向上。}\end{aligned}$$

而雨滴对地压力为$\overline{Q}$的反作用力，大小为7.5牛。

1579．一辆汽车自北向南行驶速度 v 为 54 千米/小时，自东南向西北的速 v_0 为 8 米/秒。假设汽车可近似看作长方体，跟前进方向垂直的横截面积 S 为 5 米^2。不考虑其他效果，求汽车行驶过程中受到迎面而来的空气阻力（空气密度ρ=1.29 千克/米^3）。

[解答]汽车行驶时，由于受到迎面而来的空气的撞击而受到较大的阻力。这里所列的计算方法是比较粗略的方法。

汽车在前进方向上跟空气的相对速度为

$$v'=v+v_0\cos\theta$$

式中 v=15 米/秒，是因汽车运动而跟静止空气间的相对速度，v_0=8 米/秒是风速，

单位时间内跟汽车“相撞”的空气质量为

$$m_t'=\frac{m}{t}=Sv'\rho=S(v+v_0\cos45°)\cdot\rho,$$

假设跟汽车相撞的空气作用后侧后缓慢流出，则这些空气动量的增量大小为

$$\begin{aligned}\triangle Pt&=m_t'\cdot\triangle v=m_t'v'=S\rho(v+v_0\cos45°)^2\\&=5\times1.29(15+8\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})^2\text{千克·米/秒}\\&\approx2752\text{千克·米/秒，}\end{aligned}$$

由于m_t'是单位时间里的质量，所以阻力的大小

$$F=\frac{\triangle P}{t}=2752\text{牛。}$$

上述推导过程中表明，一般情况下汽车行驶时受到的空气阻力跟其速度二次方成正比。

1580．质量 m 为 2 千克的物体作匀加速直线运动，它通过 A、B 两点过程中动量的增量△p 为 12 千克·米/秒，动能的增量$\triangle E_k$为 60 焦。试求该物体通过 A、B 两点时的速率。

[解答]先找出△p 与$\triangle E_k$之间的关系。设物体通过 A、B 两点时的速率分别为 v_A、v_B，以 m 表示物体的质量，则

$$\triangle E_k = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}m(v_B - v_A)\cdot(v_B + v_A)$$

$$= \frac{1}{2}\triangle p\cdot(v_B + v_A),$$

代入数据

$$60 = \frac{1}{2}\times 12\times(v_B + v_A),$$

得 $$v_B + v_A = 10\text{米/秒} \quad (1)$$

而由 $$\triangle p = m(v_B - v_A)$$

得 $$v_B - v_A = \frac{\triangle p}{m} = \frac{12}{2} = 6\text{米/秒} \quad (2)$$

(1)式+(2)式$v_B = 8$米/秒，

代入(1)式得$v_A = 2$米/秒。

1581．质点作匀变速直线运动，通过 A、B 两点过程中，速度的增量△v 为(-10 米/秒)，动量的增量△p 为(-25 千克·米/秒)，动能的增量$\triangle E_k$为 75 焦，试求质点通过 A、B 两点时的速率。

[解答]由于速度增量为负，而动能的增量为正，表明质点在 B 点的速度 v_B 跟通过 A 点时的速度 v_A 方向相反。

由$\triangle p = m\triangle v$得

$$m = \frac{\triangle p}{\triangle v} = \frac{-25}{-10}\text{千克} = 2.5\text{千克。}$$

而 $$\triangle E_k = \frac{1}{2}\triangle p\cdot(v_B + v_A),$$

所以 $$v_B + v_A = 2\triangle E_k/\triangle p$$

$$= [2\times 75/(-25)]\text{米/秒} = -6\text{米/秒},$$

而 $$v_B - v_A = -10\text{米/秒},$$

所以 $$v_B = -8\text{米/秒},\ v_A = 2\text{米/秒。}$$

1582．一艘木帆船，帆的面积 S 为 8 米 ²，当船由南向北行驶时，恰好刮东南风，相对船的风速 v_0 为 8 米/秒，此时帆的平面跟风向垂直，这时，即使不用人力船也能由南向北以 2.0 米/秒的速度作匀速直线行驶。设风吹到帆面后，气流沿跟帆面平行的方向逸向四周。试求此船行驶过程受到的平均阻力的大小和方向（空气密度 ρ=1.29 千克/米 ³）。

[解答]示意图如图所示，O_1O_2 表示帆的平面。由于帆受到空气的冲力作用，因而使船具有了向前运动的“牵引力”，当船体匀速前进时，船体受到的阻力跟牵引力平衡。因此，只要求得风对帆的冲力就知道了阻力。为此可应用动量定理。以某一部分流动的空气（风）为研究对象。作用前它的动量为 mv_0，方向指向西北。作用后这部分空气具有两种运动：一是具有跟原方向垂直的速度 v⊥，二是具有跟船速相同的分速度 v′。因此相应的动量分量也分为 p⊥和 p′，其中引起向垂直方向变化的动量的相应冲力跟帆面平行，因而不产生“牵引力”的作用效果，只有引起向 p′变化的相应冲量才会引起整个船体动量的变化。

设单位时间内吹到帆面上的空气质量为 m，
则

$$m=Sv_0\rho。$$

作用前的动量

$$p_0=mv_0=Sv_0\rho\cdot v_0,$$

作用后的分动量

$p'=mv'=Sv_0\rho\cdot v'$，其方向如图所示。由图可见

$$\triangle p=\sqrt{P_0^2+P'^2-2P_0P'\cos45°}$$

$$=Sv_0\rho\cdot\sqrt{v_0^2+v'^2-v_0v'\sqrt{2}}。$$

代入数据算得

$$\triangle P=8\times8\times1.29\cdot\sqrt{68-16\sqrt{2}}千克·米/秒=556.1千克·米/秒,$$

由 $F\cdot\triangle t=\triangle p$，$\triangle t=1$秒，则

$$\bar{F}=\triangle p/\triangle t=556.1牛。$$

这一冲力是帆对空气（风）的作用力，反之，空气对帆的作用力$F'=-\bar{F}$其方向跟图中$\triangle p$方向相反，而阻力$f=-F'=\bar{F}$，表明船体受到的阻力大小为556.1牛，方向跟图中$\triangle p$方向相同。

值得指出的是,阻力的方向为什么不是沿跟 v' 相反的方向呢？这是因为当船受到东南风作用时，应该沿跟 v_0 相同的方向运动，但是由于帆和舵的作用，使船受到一个侧向的阻力，以克服船向侧向运动。因此，总的阻力方向如图中△p 方向。

1583．质量为 m 为 2 千克的质点，从 O 点由静止开始沿直线 Ox 作匀加速直线运动。其动量随位移x变化的规律$p=4\sqrt{2x}$千克·米/秒，

运动过程中始终受到 f 为 1.5 牛的恒定阻力作用。试求质点

(1)运动后第 4 秒末的动量；

(2)第 3 秒初到第 4 秒末的两秒内受到的冲量；

(3)如果牵引力 T 是沿 Ox 方向，则 T 应为多大？

[解答](1)要求第 4 秒末的动量，必须先找出动量随时间变化的关系。由于质点由静止开始作匀加速直线运动，所以它的动量为

$$p=mv=mat,$$

$$v^2=2ax或v=\sqrt{2ax},$$

所以 $p=mv=rr\sqrt{2ax}$，$4\sqrt{2x}=2\sqrt{2ax}$，

$$a=4米/秒^2;$$

所以 $p=mat=2\times4t千克·米/秒=8t千克·米/秒$，

第4秒末的动量

$$p_4=32千克·米/秒。$$

(2)F·△t=ma·△t=2×4×2 牛·秒=16 牛·秒。

(3)冲力 F=ma=T-f，

牵引力

$$=F+f=ma+f=2\times4牛+1.5牛=9.5牛。$$

1584．质量为 3 千克的质点作匀加速直线运动，它的动量随时间变化的规律$p=6(1+\frac{1}{2}t)$千克·米/秒。试求：

(1)质点受到的合外力；

(2)质点通过位移 s 为 6 米的那一位置时的动量；

(3)运动到第 4 秒末时，要想使质点在△t 为 0.01 秒内停止运动，则平均冲力应为多大？方向如何？

[解答]解决本题必须结合运动学以及牛顿运动定律

$$p=mv，$$

而 $v=v_0+at$，

所以 $p=mv_0+mat=3v_0+3at$；

但 $p=6+3t$，（已知）

相比较可知 $v_0=2$ 米/秒，$a=1.0$ 米/秒^2，因此

(1)质点受到的合外力

$$F=ma=3\times1.0牛=3牛；$$

(2) $v_t^2=v_0^2+2as$，

$$v_t=\sqrt{2^2+2\times1\times6}米/秒=4米/秒，$$

通过位移6米时的动量为

$$p'=mv_t=3\times4千克·米/秒=12千克·米/秒。$$

(3)第4秒末的动量

$$p_4=6(1+\frac{1}{2}\times4)千克·米/秒=18千克·米/秒，$$

经过$\triangle t=0.01$秒，$p_t=0$，则$\triangle p=p_t-p_4=-18$千克·米/秒，

由$F\cdot\triangle t=\triangle p$，得$\overline{F}=\triangle p/\triangle t=-(18/0.01)$牛$=-1800$牛。

负号表示冲力方向跟质点原来的运动方向相反。

图线和作图题

1585．一个质点原来的动量为 10 千克·米/秒。如果它受到的作用力 F 方向跟初动量方向相同，F 随时间变化的规律如图示，则在第 5 秒末，该质点的动量为 72.5 千克·米/秒；从第 2 秒末到第 5 秒末的时间内，质点受到的冲量为 52.5 牛·秒。

1586．质量为 2 千克的物体，受到如图所示的力的作用作直线运动，初速度 v_0 为 5 米/秒。设物体运动的速度方向跟外力方向一致，则

(1)A 时刻(t=0)，物体动量的大小为 10 千克·米/秒；

(2)B 时刻，物体动量的大小为 90 千克·米/秒；

(3)C 时刻，物体动量的大小为 130 千克·米/秒；

(4)从 A 时刻到 C 时刻，物体动量的增量为 120 千克·米/秒；在这段时间内，物体受到的冲量大小为 120 牛·秒，平均冲力的大小为 30 牛；t=3 秒的那一时刻，物体动量对时间的变化率为 20 牛。

1587．质量为 5 千克的物体作变速直线运动的速度图线如图所示。

(1)物体在 A 时刻(t=0)的动量大小为 100 千克·米/秒；

(2)物体在 B 时刻的动量大小为 200 千克·米/秒；

(3)物体在 D 时刻的动量大小为 0；物体在 E 时刻动量的大小为-100 千克·米/秒，方向为跟 v_0 方向相反；

(4)在 AB 时间内，物体受到的冲量大小为 100 牛·秒；这段时间内的平均冲力大小为 500 牛·秒；

(5)在 BD 时间内，物体动量的增量大小为-200 千克·米/秒，方向为跟 v_0 方向相反；

(6)在 AE 时间内，物体受到的冲量大小为-200 牛·秒，平均冲力的大小为 285.7 牛，D 时刻，物体受到的作用力为-1000 牛；

1588．质量为 0.5 千克的小球以某一初速度作斜上抛运动，最大水平射程为 40 米，运动时间为 4 秒，如图所示，取 g=10 米/秒 ^{2}，且不计空气阻力，则

(1)该小球通过 B 点时的动量大小为 5 千克·米/秒，方向为沿 0x 方向；

(2)小球在O点时动量的大小为$5\sqrt{5}$千克·米/秒；

(3)小球通过C点时动量的大小为$5\sqrt{2}$千克·米/秒，方向为沿C点切线方向，跟Ox方向成45°；

(4)从 O 到 A，小球动量的增量为-5 千克·米/秒，方向为-Oy 方向；

(5)从 A 到 C，小球受到的冲量大小为-10 牛·秒，方向为-Oy 方向；

(6)从 O 到 D，小球在水平方向动量的增量为 0，小球在竖直方向动量的增量为-20 千克·米/秒，方向为-Oy 方向；

(7)小球通过 B 点的瞬时，动量对时间的变化率为 5 牛。

1589．质量为 5 千克的物体作直线运动的加速度——时间图象如图所示。可见：

(1)t_0~t_A 时间内，物体受到冲量的大小为 30 牛·秒；

(2)t_0~t_B 时间内，物体动量的增量大小为 120 千克·米/秒；

(3)t_0~t_C 时间内，物体受到的平均冲力的大小为 20.625 牛。

1590．一个质点动量随时间变化的规律如图所示。由图可见，质点动量随时间变化的规律是 p=6t 千克·米/秒，动量对时间的变化率为 6 牛，第 3 秒内质点动量的增量为 6 千克·米/秒。

1591．质点作直线运动，先后通过 A、B 两点时的动量如图所示。试在图上作出质点通过 A、B 两点过程中所受到的冲量。

[解答]利用矢量作图法求动量、增量或冲量，必须选择一点作为“冲力作用的起点”，并以这一点作出作用前后的动量（大小和方向正确），然后作出动量的增量或质点受到的冲量。

根据 $I=F\cdot\triangle t=P_2-P_1=\triangle P$ 由矢量作图法可知，△P 是由矢量 P_1 末端指向矢量 P_2 末端的矢量。本题可选 O 点为“冲力作用的起点”分别作出 P_A、P_B；然后由 P_A 末端指向 P_B 末端的矢量即是△P。又因为

$$I=F\cdot\triangle t=\triangle P=P_B-P_A=P_B+(-P_A),$$

所以也可以将矢量 P_B 加上矢量 $-P_A$，求得 I，见图。

1592．质点冲向墙壁时的动量为 5 千克·米/秒，被弹回时的动量大小也是 5 千克·米/秒。试在图上作出质点跟墙壁作用前后的动量大小、方向以及墙壁对质点的冲量。

[解答]方法如前题所叙，$I=P_2-P_1=P_2+(-P_1)$，矢量图如图示。

1593．物体在第 1 秒末的动量为 P_1，第 2 秒末的动量为 P_2，试根据图示作出第 2 秒内动量的增量。

[解答]由前面各题的分析可知，P_1、P_2 必须由同一点出发，才能作用△P，故不能在原题图中，从 P_1 的始端向 P_2 端作矢量线，而必须如右图所示的那样从 P_1 末端向 P_2 末端作矢量△P。

1594．质点作曲线运动，通过 A、B 两点的动量如图示。试在图上作出质点从 A 到 B 时动量的增量。

[解答]对于作曲线运动的质点，它的动量、动量增量或冲量的矢量作图方法如前。

1595．小球质量为 0.5 千克，从距水平台面高 5.0 米处由静止开始下落，被弹起的最大高度为 4.05 米，取 g=10 米/秒 ²，试在图上作出小球跟台面作用后的动量以及小球跟台面作用时所受到的冲量。

[解答]先求出作用前及作用后小球的动量

$P_1=m\sqrt{2gh_1}=0.5\times\sqrt{2\times10\times5}$千克·米/秒$=5$千克·米/秒，方向竖直向下；

$P_2=m\sqrt{2gh_2}=0.5\times\sqrt{2\times10\times4.05}$千克·米/秒$=4.5$千克·米/秒，方向竖直向上。

作图方法如前题所述，作出 P_1，P_2，I 如图。

1596．一个质点在第 1 秒内受到的冲量大小为 5 牛·秒，方向自西向东；第 2 秒内受到的冲量大小为 4 牛·秒，方向自北向南。试在图上作出 2 秒内质点所受到的冲量。

[解答]冲量是矢量，跟一般矢量一样遵循相同的运算和合成法则。本题实际上要求作出 I_1 和 I_2 的合矢量，即 $I=I_1+I_2$

1597．一个质点在 2 秒内受到的冲量如图中 I 所示，它在第 1 秒内受到的冲量如图中 I_1 所示。

试在图中作出质点在第 2 秒内受到的冲量 I_2。

[解答]按矢量三角形合成法则，分矢量首尾相接，合矢量即为从第一个矢量的始端指向最末一个矢量末端的矢量。

1598．已知质点原来的动量为 P_1，动量的增量为△P，如图所示。试在图上作出质点的末动 P_2。

[解答]根据矢量三角形的关系，必须先将矢量△P 的始端画在 P_1 的末端，然后，由 P_1 的始端指向△P 的末端的矢量即为 P_2。

1599．小球沿曲线冲向台面，并以大小为 10 千克·米/秒、45°方向跟台面发生作用，被弹起后的动量大小为 9 千克·米/秒，方向跟台面也成 45°夹角。试在图上作出小球受到的冲量。

[解答]分别作出 P_1、P_2

由 $I=\triangle P=P_2-P_1=P+(-P_1)$ 作出 I。

1600．质点受到冲量 I 作用后的动量 P_2 如图示，试作出质点原来的动量 P_1；

[解答]仿前题的作法，$I=\triangle P=P_2-P_1$，可用矢量三角形作图。矢量 P_1 就为矢量 I（等于△P）的末端应指向矢 P_2 的末端，所在 $P_1=P_2-I$。

1601．质点原来的动量 P_1，第 1 秒内受到的冲量为 I_1，第 2 秒内受到的冲量为 I_2，如图所示。试在图上作出第 2 秒末的动量 P_2。

[解答]因为 $I_1+I_2=\triangle P$，所以 $P_2=P_1+\triangle P=P_1+I_1+I_2$。由矢量多边形作图可作出 P_2，如图所示。

动量守恒定律　碰撞

填充题

1602．动量守恒的条件是：系统不受外力作用或所受外力的合力为零。

1603．弹性碰撞是指：相互作用的物体系总动量守恒，机械能也守恒的碰撞。

1604．非弹性碰撞是指：机械能不守恒的碰撞。

1605．完全非弹性碰撞是指：机械能不守恒，且作用后相互粘在一起的碰撞。这种碰撞过程损耗的机械能最大。

1606．对心碰撞是指：相互作用的两物体，作用前后两物体的质心始终在同一条直线上。

1607．爆竹在空中爆炸，在这一过程中，守恒的量有动量、能量、质量。

1608．如图所示，A、B 间摩擦系数不为零，且两者原来静止在光滑水平面上，当 A 受到某一个冲量后，自左向右运动时，B 的运动方向为自左向右。

1609．A、B 两物体发生碰撞。碰撞过程中，系统所受的合外力冲量为零，A 和 B 动量的增量分别为 Δp_A 和 Δp_B，则 $\Delta p_A+\Delta p_B=0$。

1610．A、B 两球在光滑水平面内沿一直线发生弹性对心碰撞。碰撞前 A 的动量为 15 千克·米/秒，B 的动量为–25 千克·米/秒；作用后 A 的动量为–2 千克·米/秒，则 B 作用后的动量为–8 千克·米/秒，A 球的动量增量为–17 千克·米/秒。

1611．A、B 两质点在光滑水平面内，沿一直线发生弹性正碰。碰撞前 A 的动量为 10 千克·米/秒，作用过程中 B 动量的增量为 18 千克·米/秒。则作用后，A 的动量为–8 千克·米/秒。

1612．A、B 两球在光滑水平面内沿一直线发生碰撞。碰撞前 A 的动量为 25 千克·米/秒，B 的动量为–30 千克·米/秒；碰撞后两球粘在一起，则碰撞后 A、B 两球的总动量为–5 千克·米/秒。

1613．A、B 两质点发生相互作用的同时，存在着外力作用，作用前

后 A、B 始终在一直线上运动。作用过程中 A 动量的增量为 20 千克·米/秒，A、B 系统总动量的增量为–10 千克·米/秒。则作用过程中 B 动量的增量为–30 千克·米/秒。

1614．A、B 两物体在光滑水平面内发生弹性正碰。A 作用前的动量为 10 千克·米/秒，作用过程中 A 动量的增量为 15 千克·米/秒，则作用后 A 的动量为 25 千克 米/秒 ;作用过程中 B 动量的增量为–15 千克 米/秒。

1615．A、B 两物体发生碰撞，如果作用过程中，A 受到的冲量为 15 牛·秒，则 B 受到的冲量为–15 牛·秒。

1616．质量分别为 2 千克和 3 千克的质点 A、B 在一直线上发生正碰，同时存在一个外力冲量。作用前它们的速度分别为 2 米/秒和 3 米/秒；作用后它们的速度分别为 3 米/秒和 2 米/秒。则作用过程中 A、B 系统受到的冲量大小为 1 牛·秒，系统损失的动能为 2.5 焦。

1617．物体 A 质量为 1.5 千克，以 3 米/秒的速度沿光滑水平面向前运动；另一质量为 1 千克的物体 B 以 5 米/秒的速度，在同一水平面内，沿跟 A 相同的运动方向冲向 A。设相互作用后，A、B 粘在一起，则它们的共同速度为 3.8 米/秒，作用过程中 A 动量增量为 1.2 千克·米/秒，B 受到的冲量为–1.2 牛·秒。

1618．质量为 2 千克的物体 A，以 5 米/秒的速度自左向右作匀速直线运动；质量为 3 千克的物体 B，以 4 米/秒的速度自右向左作匀速直线运动，假若 A、B 作用后粘在一起，并假定作用前后 A、B 的运动方向始终在一直线上，则作用后 A、B 的共同速度大小为 0.4 米/秒，方向为自右向左。

1619．如图所示，A、B 两球沿一直线发生相互作用。m_1 为 2 千克，v_1 为 8 米/秒；m_2 为 6 千克，v_2 为 2 米/秒。规定以 v_1 的方向为正。作用后，A 球被弹回时的速度为–1 米/秒。设水平面是光滑的，则作用后 B 球的速度为 5 米/秒；如果作用后 B 球的速度为 4 米/秒, 则 A 球的速度为 2 米/秒，这个过程中系统损失的动能为 24 焦。

1620．如图所示，A、B 两物体相向运动。以 v_1 的方向为正。作用前 v_1 为 3 米/秒，v_2 为–5 米/秒；作用后物体 A 的速度为–6 米/秒，作用过程中 A、B 系统受到的冲量为 3 牛·秒。设 A、B 质量分别为 2 千克和 3 千克，则作用后 B 的速度为 2 米/秒。

1621．质量为 20 克的子弹以 400 米/秒的水平速度射入质量为 1.98 千克、同向运动速度为 10 米/秒的物体内，并随该物体一起运动，则作用后物体的速度为 13.9 米/秒。

1622．如图所示。质量为 2 千克的物体 A，以 4.0 米/秒的速度在光滑水平面上自右向左运动；一颗质量为 20 克的子弹以 500 米/秒的速度自左向右穿过物体 A，并使 A 处于静止状态。则子弹穿过 A 后的速度为 100 米/秒，子弹穿过 A 的过程中损失的动能为 2.4×10^3 焦，系统的发热量为 2416 焦。

1623．质量为 18 千克的小沙车以 2 米/秒的速度运动，另一质量为 2 千克的铁球，从距沙堆高为 5 米处由静止开始运动并落入沙车中。则铁球落入后沙车的速度为 1.8 米/秒，铁球跟沙作用过程中受到的冲量大小

为 20.32 牛·秒。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

1624．质量为 2 千克的物体，在光滑水平面内沿 0x 方向以 3 米/秒的速度运动；一颗质量为 20 克的子弹，跟物体在同一水平面内沿 0x 垂直的方向，以 600 米/秒的速度垂直于物体运动的方向射击物体，并迅速穿过物体，子弹穿过物体后的速度为 200 米/秒，假定子弹仍沿原方向运动，则物体的速度大小变为 5 米/秒，方向为跟 0x 方向成 53°夹角。

1625．A、B 两物体在光滑水平面内发生相互作用。物体 A 的质量为 2 千克，以 4 米/秒的速度自西向东运动；物体 B 的质量为 3 千克，以 2 米/秒的速度自南向北运动。如果两物体发生完全非弹性碰撞，则作用后两物体的共同速度的大小为 2 米/秒，方向为向东偏北 37°。

1626．物体 A、B，质量的比为 5：3，它们之间有一根已被压缩的弹簧。开始时，A、B 都处在静止状态。当弹簧突然被释放后，A、B 速率的比为 3：5。

1627．如图所示，A、B、C 三块滑块叠放在光滑水平面 D 上。当 A 由静止状态开始下落时，B、C 分别向两侧运动。设 B、C 质量分别为 2 千克和 3 千克。则 B、C 滑动速率的比为 3：2。在 A 由静止下落到水平面 D 的过程。A、B、C 所成系统的总动量不守恒。（用“守恒”、“不守恒”等填写）

1628．实验用小型炸弹静止在坚硬光滑的水平钢板上，爆炸后分裂成两块,它们质量的比为 m_1：m_2=3：2,并分别跟水平面成 30°、45°角在竖直平面内斜向上飞出，如图所示，则它们速率的比，v_1：v_2为 $2\sqrt{6}$：9。

1629．在上题中，如果 m_1=3 千克，m_2=2 千克，v_2=54 米/秒，则在火药爆炸过程中，钢板对炸弹的冲量为 120.47 牛·米。

1630．质量为 0.8 千克的小球，沿光滑水平面冲向墙壁。小球跟墙作用前的速率为 5 米/秒，被弹回时的速率为 4 米/秒。则球跟墙作用的恢复系数为 0.8。小球受到的冲量为 7.2 牛·秒，方向为跟初速度方向相反。

1631．在上题中，小球跟墙作用过程中动量的增量大小为 28.8 千克·米/秒，如果小球跟墙作用前的动量大小为 16 千克·米/秒，则恢复系数 e 为 0.8。

1632．上题中，如果小球作用前的动量为 8 千克·米/秒（球的质量未知），恢复系数为 0.6，则小球跟墙作用后的动量大小为 4.8 千克·米/秒，小球动量的增量大小为 12.8 千克·米/秒。

1633．小球从距水平钢板高为 h_1 处自由下落，碰到钢板后被弹起的最大高度为 h_2，如果 h_1：h_2=0.64，则恢复系数 e 为 0.8。

1634．在上题中，球从 h 为 4.05 米处自由下落，被弹起时的即时速度 v′为 8 米/秒，则恢复系数 e 为 0.89。（g 取 10 米/秒 ^{2}）

1635．A、B 两球沿一直线发生相互作用。作用前 A 球速度 v_1 的大小为 5 米/秒，方向自左向右，B 球静止；作用后，A 球速度 v_1′的大小为 1.5 米/秒,方向自右向左,B 球速度大小为 3 米/秒。则恢复系数 e 为 0.9。

1636．上题中，如果作用前 A 球自左向右的速度为 5 米/秒，B 球自

右向左的速度为 4 米/秒；作用后，A 球具有自右向左的速度 v_1'=2.60 米/秒,B 球自左向右的速度 v_2'=5.05 米/秒。则恢复系数 e 大小为 0.85。

1637．同一只小球，以相同的水平速度抛出，落到不同的水平面后的运动轨迹，如图中的（a）、（b）、（c）所示。如果三种情况下的恢复系数分别为 e_a，e_b，e_c，则它们的大小比较应为 $e_a>e_b>e_c$。

1638．物体 A 跟 B 发生碰撞。作用后 A 的动量大小为 18 千克·米/秒，恢复系数为 0.6，而 B 由于质量非常大，它的速度的变化可忽略不计。则 A 作用前的动量大小为 30 千克·米/秒。

1639．在上题中。如果 A 跟 B 作用过程受到的冲量为 18 牛·秒，其他条件相同，则作用前 A 的动量大小为 11.25 千克·米/秒。

1640．乒乓球从距钢板高为 4.05 米处由静止开始下落，如果恢复系数为 0.9，不计空气阻力，且取 g=10 米/秒 ²，则乒乓球跟钢板作用后能弹起的最大高度为 3.28 米。

选择题

1641．系统的总动量守恒，是指系统

（a）所受合外力为零；

（b）每一对相互作用的物体作用前后都作匀速直线运动；

（c）受到的总冲量为零；

（d）动量的增量为零；

（e）各物体动量增量的矢量和为零。

答（a)、(b)、(c)、(d)、(e)

1642．位于光滑水平面上的一直线的 A、B 两质点发生相互作用。以 Δv_A、Δv_B、Δp_A、Δp_B，ΔE_A、ΔE_B，分别表示各自的速度、动量和动能的增量，I_A、I_B 分别表示各自受到的冲量。则下述关系一定能够成立的是

（a）$\Delta v_A=-\Delta v_B$；　　（b）$\Delta p_A=-\Delta p_B$；

（c）$\Delta E_A=-\Delta E_B$；　　（d）$I_A=I_B$；

（e）$\Delta p_A+\Delta p_B=I_A+I_B$。

答（b)、(d)、(e)

1643．在光滑水平面上运动的小球 A 跟静止的小球 B 发生碰撞后，B 即发生运动。就这一物理现象，下列哪种说法最为确切？作用过程中，A 将

（a）速度传给了 B；　　（b）动量传给了 B；

（c）冲量传给了 B；　　（d）力传给了 B。

答（b)

1644．关于动量守恒，下列哪些说法是错误的？

（a）系统所受到的合外力远小于系统内物体相互作用的内力时，动量近似守恒；

（b）系统内外无动量交换时，总动量一定守恒；

（c）系统总动量不守恒，但在某一方向上动量守恒是可能的；

（d）系统内所有物体一起作曲线运动时，无论系统内物体间的作用

情况如何，总动量一定不守恒。

答 (d)

1645．有下列现象之一发生时，总动量一定不守恒的是

(a) 有永久性形变； (b) 有碎块产生；

(c) 有发热、发声现象； (d) 有机械能损耗；

(e) 相互作用的各物体受到的冲量之和不为零。

答 (e)

1646．在两个物体碰撞前后，下列说法哪些可能成立？

(a) 作用后的总机械能比作用前小，但总动量守恒；

(b) 作用前后总动量均为零，但总动能守恒；

(c) 作用前后总动能为零，而总动量不为零；

(d) 作用前后总动量守恒，而系统内各物体动量增量的矢量和不为零。

答 (a)、(b)

1647．在完全非弹性碰撞中，设系统动量的增量为Δp，系统动能的增量为ΔE_k，下列关系哪些是可能成立的？

(a) $\Delta p=0$，$\Delta E_k\neq 0$； (b) $\Delta p=0$，$\Delta E_k=0$；

(c) $\Delta p\neq 0$，$\Delta E_k=0$； (d) $\Delta p=0$，$\Delta E_k<0$。

答 (a)、(d)

1648．如图所示，活动斜面 B 静止在光滑水平面上，质量为 m 的小球 A 以水平速度 v_0 跟斜面 B 发生碰撞后，小球竖直向上弹起，斜面则沿水平面运动。以 A、B 组成一个系统，下列说法哪些是正确的？作用前后系统

(a) 总动量守恒；

(b) 总动量一定不守恒；

(c) 水平方向的总动量一定守恒；

(d) 所受到的总冲量一定不为零；

(e) 总动量的增量一定不为零。

答 (b)、(c)、(d)、(e)

1649．大炮斜向发射炮弹后，炮身后退。下列说法哪些是比较正确的？

(a) 总动量不守恒，水平方向动量近似守恒；

(b) 由于火药爆炸产生的作用力远大于大炮受到的外力，故总动量近似守恒；

(c) 总机械能增大，水平方向总动量为零；

(d) 炮身的运动是反冲运动。

答 (a)、(c)、(d)

1650．一个小球 A 沿光滑水平面 C 冲向墙壁 B。以 A 为研究对象，讨论它的动量增量的大小Δp 跟动能增量ΔE_k 的关系。下列说法哪些是正确的？

(a) Δp 最大时，ΔE_k 必最大；

(b) Δp 最大时，ΔE_k 必为零；

(c) Δp 最小时，ΔE_k 必最小

(d) Δp 最小时，ΔE_k 必最大；

(e) $\Delta p=0$，$\Delta E_k=0$ 是可能的。

答 (b)、(d)

1651．静止在光滑坚硬、水平放置的钢板上的小型炸弹，爆炸后，所有碎弹片沿圆锥面飞开（如图示）。在爆炸过程中对弹片而言，下列说法哪些是正确的？

(a) 总动量必守恒；　　(b) 受到的总冲量必竖直向上；

(c) 水平方向分动量的和必为零；(d) 恢复系数必为零。

答 (b)、(c)

1652．如图所示，人站在小车上，不断用铁锤敲击小车的一端。下列各种说法，哪些是正确的？

(a) 如果地面水平、坚硬光滑，则小车将在原地附近作往复运动；

(b) 如果地面的阻力较大，则小车有可能断断续续地水平向右运动；

(c) 因为敲打时，铁锤跟小车间的相互作用力属于内力，小车不可能发生运动；

(d) 小车能否发生运动，取决于小车跟铁锤的质量之比，而跟其他因素无关。

答 (a)、(b)

1653．一根不计质量的软绳，跨过不计摩擦和质量的定滑轮，一端悬挂质量为 m 的香蕉，一个质量也为 m 的猴子抓住绳的另一端而处于悬空的静止状态。当猴子以相对绳的速率 v_0 匀速竖直向上爬升时，下列说法哪些是正确的？

(a) 猴子爬动前后，猴子和香蕉的总动量不守恒；

(b) 猴子爬动前后，猴子和香蕉的总动量守恒；

(c) 香蕉上升的速率为 $\frac{1}{2}v_0$；

(d) 香蕉下降的速率为 v_0；

(e) 爬动后，系统受到的合外力的总冲量为 mv_0；

(f) 爬动后，系统受到的合外力的总冲量为 $2mv_0$。

答 (a)、(c)、(e)

1654．物体 A 作斜上抛运动。当它通过轨迹的最高点位置 C 时，恰好被竖直向上飞行的子弹 B 所射穿。那么子弹穿过物体后，A、B 的运动情况分别为

(a) A 作平抛运动，B 作竖直上抛运动；

(b) A、B 都作斜上抛运动；

(c) A 作平抛运动，B 作斜上抛运动；

(d) A 作斜上抛运动，B 的运动情况无法确定；

(e) A、B 的运动情况均无法断定。

答 (b)

1655．小沙车沿光滑水平面以速度 v_0 作匀速直线运动，运动过程中，从沙车上方落入一只质量不可忽略的铁球，使沙车速度变为 v′。下列说法哪些是正确的？

(a) $v'=v_0$，沙车仍作匀速直线运动；

(b) $v' < v_0$，沙车作匀减速直线运动；

(c) $v' < v_0$，沙车仍作匀速直线运动，且水平方向的总动量保持不变；

(d) 铁球落入沙车并深入沙堆过程中，小车受到地面的支持力增大。

答 (c)、(d)

1656．完全相同的 A、B 两个物体，从同一高度，以完全相同的水平初速度同时被水平抛出。下落过程中，A 被水平方向飞来的子弹击中，且子弹留在 A 内一起下落。不计空气阻力，讨论 A、B 落到地面的有关问题。下列各种说法哪些是正确的？

(a) A 比 B 先到达地面；

(b) B 比 A 先到达地面；

(c) A、B 同时到达地面；

(d) 相对于各自的起始点，A 落地点的水平距离比 B 大；

(e) 相对于各自的起始点，A、B 落地点的水平距离一样大。

答 (b)、(d)

[提示] 子弹跟 A 相互作用后，子弹在竖直方向的速度从 0 变到 v_y，因此在竖直方向上，子弹和 A 之间一定有力的作用。

1657．如图所示。小车的质量为 M，小球的质量为 m，悬线长为 l。开始时将小球连线拉成水平，小车静止在光滑水平面上。当释放小球后，小球向下摆到最低点时对地的速率为 v，则

(a) $\upsilon = \sqrt{2gl}$；　　(b) $\upsilon > \sqrt{2gl}$；

(c) $\upsilon < \sqrt{2gl}$；　　(d) υ的大小无法确定。

答 (c)

1658．一个运动员沿地面跳远，最远可跳 l 米。如果他立在船上，船头离河岸的距离为 l 米。他想从船头跳到岸上，下列说法哪些是正确的？

(a) 他决不能跳到岸上；

(b) 他有可能跳到岸上；

(c) 他先从 A 跑到 B，再返身跑回 A 端起跳，可跳到岸上；

(d) 采用(c)的方式，他仍无法跳到岸上。

(e) 如果开始时，他立于 B 端，然后跑到 A 端起跳，可能跳到岸上。

答 (a)、(d)

1659．小船静止在平静的水面上。小船长为 l，质量为 M。一个质量为 m 的人立在船头，以相对于船体的速度 v，从船头 B 走到船尾 A。以 v 的方向为正，则小船后退的速度为（不计水的阻力）

(a) $\frac{m}{M+m}\upsilon$；　　(b) $-\frac{m}{M+m}\upsilon$；

(c) $\frac{-m}{M-m}$；　　(d) $-\frac{m}{M}\upsilon$；

(e) $-\frac{M-m}{M+m}\upsilon$。

答 (b)

1660．在上题中，设从 B 到 A 的方向为正，当人从船头走到船尾时，

船后退的位移 l′为

(a) $\frac{m}{M+m}l$；　　(b) $-\frac{m}{M+m}l$；

(c) $-\frac{m}{M-m}$　　(d) $-\frac{m}{M}l$；

(e) $-\frac{M-m}{M+m}l$。

答 (b)

1661．质量分别为 m_1，m_2 的甲乙两人，分别立在长为 l、质量为 M 的小船的两端，小船静止在平静的水面上，当甲、乙两人相互交换位置时，如果不计水的阻力，则小船发生的位移 l′为

(a) $\frac{m_1+m_2}{M+m_1+m_2}l$；　　(b) $\frac{m_1-m_2}{M+m_1+m_2}l$；

(c) $\frac{M+m_1+m_2}{m_1+m_2}l$；　　(d) $\frac{M+m_1+m_2}{m_1-m_2}l$；

(e) $\frac{M}{M+m_1+m_2}l$。

答 (b)

1662．A、B 两小球在光滑水平面内发生弹性正碰。作用前 A 的动量 $p_A\neq0$,B 静止。作用过程中 A 球动量的增量 Δp_A 在数值上跟 p_A 的关系为 $|\Delta p_A|>|p_A|$。则作用后

(a) A 可能沿原方向运动；

(b) A 可能静止；

(c) A 一定被 B 反弹回去；

(d) B 的动量在数值上一定有 $|p'_B|>|p'_A|$。

答 (c)、(d)

1663．A、B 两球在光滑水平面上沿一直线发生正碰。作用前 p_A 为 10 千克·米/秒，$p_B=0$；碰撞过程中，A 球动量增量 $\Delta p_A=-20$ 千克·米/秒，则作用后 B 球的动量 p'_B 为

(a) –20 千克·米/秒　　(b) –10 千克·米/秒

(c) 20 千克·米/秒　　(d) 10 千克·米/秒

(e) –30 千克·米/秒

答 (e)

1664．光滑水平面上有 A、B 两小球沿一直线发生弹性碰撞。作用前 A 的动量大小为 20 千克·米/秒，B 的动量大小为 30 千克·米/秒。碰撞中，A 动量增量大小为 15 千克·米/秒。由此可知，A、B 两球相互作用前的运动的方式可能为

(a) A、B 两球作用前相向而行，作用后分开；

(b) A、B 两球作用前沿同方向运动且 B 落后于 A，但 B 的速度大于 A 的速度；

(c) A、B 两球作用前沿同方向运动且 A 落后于 B，但 A 的速度大于 B

的速度；

(d) 上述三种情况都有可能，且在作用后两球分开。

答 (b)、(c)

1665．在上题中，作用后 A、B 两球动量可能分别为

(a) 35 千克·米/秒，15 千克·米/秒；

(b) 5 千克·米/秒，45 千克·米/秒；

(c) –35 千克·米/秒，15 千克·米/秒；

(d) –5 千克·米/秒，45 千克·米/秒。

答 (a)、(b)

1666．A、B 两质点在光滑水平面内沿一直线发生弹性碰撞。作用前 A 的动量大小为 15 千克·米/秒，B 的动量大小为 20 千克·米/秒。作用过程中,A 动量增量的最大值为 16 千克 米/秒。下列说法哪些可能成立？

(a) 作用前 A、B 相向运动，作用后，A 被反弹而反向运动；

(b) 作用前 A、B 相向运动，作用后，B 被反弹而反向运动；

(c) 作用前 A、B 同向运动，且 B 落后于 A，作用后 B 被反弹而反向运动；

(d) 作用前 A、B 同向运动，且 A 落后于 B，作用后 A 被反弹而反向运动。

答 (a)、(d)

1667．在上题中，A、B 两质点作用后的动量分别可能为

(a) 31 千克·米/秒，同原方向；4 千克·米/秒，同原方向；

(b) 1 千克·米/秒，反原方向；36 千克·米/秒，同原方向；

(c) 1 千克·米/秒，反原方向；4 千克·米/秒，同原方向；

(d) 31 千克·米/秒，反原方向；4 千克·米/秒，同原方向；

(e) 1 千克·米/秒，同原方向，36 千克·米/秒，反原方向。

答 (a)、(b)、(c)

1668．B 球原来静止在光滑水平面上，A 球以大小为 15 千克·米/秒的动量跟 B 球发生碰撞，作用后，A 球动量大小变为 12 千克·米/秒，方向偏离原来的方向为 37°（如图示）。B 球的动量变为

(a) 9 千克·米/秒，方向由矢量 p_A 末端指向矢量 p'_A 末端；

(b) 9 千克·米/秒，方向跟(a)所描述的方向相反；

(c) 12 千克·米/秒，方向跟 p'_A 方向相反；

(d) 大小如图中 p′所示，方向跟 p′方向相反。

答 (b)

1669．平面 x0y 为光滑水平面。质点 A 沿 0x 方向运动，它的动量为 3 千克·米/秒，当它经过 0 点时，跟来自 0y 方向的质点 B 发生碰撞。作用前，B 的动量大小为 4 千克·米/秒。作用过程为弹性碰撞，作用后

(a) 如果 B 在第 IV 象限内运动，则 A 不可能在第 III 象限内运动；

(b) 如果 A 在第 III 象限内运动，则 B 不可能在第 IV 象限内运动；

(c) 如果 A 在第 II 象限内运动，则 B 不可能在第 I 象限内运动；

(d) 无论 A 在哪一象限内运动，B 不可能在第 II 象限内运动；

(e) 无论 B 在哪一象限内运动，A 不可能在第 IV 象限内运动。

答 (a)、(b)、(d)、(e)

1670．在上题中，如果 A、B 在 0 点发生完全非弹性碰撞，则碰撞后

A、B 一起运动的取向为

(a) 第 I 象限，动量为 7 千克·米/秒；

(b) 第 I 象限，动量大小为 5 千克·米/秒；

(c) 第 I 象限，沿∠xOy 的平分线；

(d) 有可能在第 II 象限内，或沿 Oy 轴；

(e) 有可能在第 IV 象限内，或沿 Ox 轴。

答 (b)

1671．假设一小型火箭沿人造地球卫星的轨道在空中作匀速圆周运动。如果火箭沿跟其速度相反的方向抛出一个质量不可忽略的物体 A，则下述说法哪些是能够成立的？

(a) A 可能竖直落向地球，火箭可能按原轨道运动；

(b) A 跟火箭都可能按原轨道运动；

(c) A 跟火箭都不可能按原轨道运动；

(d) A 运行轨道半径将减小，火箭运行轨道半径将增大；

(e) A 可能沿地球半径方向竖直下落，火箭运行的轨道半径增大。

答 (c)、(d)、(e)

1672．静止的实验火箭，总质量为 M，当它以对地速度为 v_0 喷出质量为 Δm 的高温气体后，火箭的速度为

(a) $\frac{\Delta m}{M-\Delta m}\upsilon_0$；　　(b) $-\frac{\Delta m}{M-\Delta m}\upsilon_0$；

(c) $\frac{\Delta m}{M}\upsilon_0$；　　(d) $-\frac{\Delta m}{M}\upsilon_0$；

(e) $-\frac{\Delta m}{M-2\Delta m}\upsilon_0$。

答 (b)

1673．放射性元素的原子核能够自发地放射出某种微粒子而变成新核。设某原子核的质量为 M，当它放出质量 m 的粒子后，新核反冲运动的速度为 v_0，则放出的微粒的速度为

(a) $-\frac{M}{m}\upsilon_0$；　　(b) $-\frac{M}{M-m}\upsilon_0$；

(c) $-\frac{M-m}{m}\upsilon_0$；　　(d) $-\frac{m}{M-m}\upsilon_0$；

(e) $\frac{m-M}{M}\upsilon_0$。

答 (c)

1674．质量为 M 的光滑物体，沿光滑水平面以速度 v_0 作匀速直线运动。一颗质量为 m 的子弹，以水平速度沿跟 v_0 垂直的方向射入物体内，并立即停留在物体内，这时物体的速度偏离原来的运动方向 30°。那么子弹射入物体前的速率为

(a) $\frac{M}{m}\upsilon_0$；　(b) $\frac{M+m}{m}\upsilon_0$；　(c) $\frac{\sqrt{3}M}{3m}\upsilon_0$；

(d) $\frac{\sqrt{3}M}{2m}\upsilon_0$；　(e) $\frac{m}{M}\upsilon_0$；　(f) $\frac{2\sqrt{3}M}{3m}\upsilon_0$。

答（c）

1675．假设同一支枪发射的所有子弹的质量、速度都相同。现用此枪分别射击原来静止在光滑水平面上的物体 A、B。当射击 A 时，子弹留在 A 内，当射击 B 时，子弹穿过 B。如果 A、B 的质量相同，受射击后，A、B 的速度分别为 v_A、v_B。则 v_A、v_B 大小相比，应该是

(a) $v_A > v_B$；　(b) $v_A < v_B$；

(c) $v_A = v_B$；　(d) 条件不足，无法比较。

答（d）

1676．图为汽锤打桩的示意图。设汽锤的质量为 m_1，桩的质量为 m_2，开始时，汽锤从距桩顶高为 h 处自由下落。在跟桩碰撞过程汽锤对桩的冲量大小为（汽锤落到桩顶时，没有被弹起）

(a) $m_1\sqrt{2gh}$；

(b) $m_1m_2\sqrt{2gh}/(m_1+m_2)$；

(c) $m_1^2\sqrt{2gh}/(m_1+m_2)$；

(d) $m_2^2\sqrt{2gh}/(m_1+m_2)$。

答（b）

1677．质量为 m′的均匀木杆两端搁在支点 A、B 上。一个质量为 m 的小球，从距离板的中点高为 h 处自由落下，并撞击杆后被板弹起的最大高度为 $\frac{1}{2}h$。设球跟板的作用时间为 Δt，则板对两支点压力的变化量 ΔQ 为

(a) $\Delta Q = m\sqrt{gh}(\sqrt{2}+1)/2\Delta t$；

(b) $\Delta Q = m\sqrt{gh}(\sqrt{2}-1)/2\Delta t$；

(c) $\Delta Q < m\sqrt{gh}(\sqrt{2}+1)/2\Delta t$；

(d) $\Delta Q < m\sqrt{gh}(\sqrt{2}-1)/2\Delta t$。

答（c）

1678．甲、乙两船静止在平静的水面上，A、B 两同学分别立在两船上通过细绳相互拉着。当其中一个同学不断地收绳时，两船即向相反方向运动。假设船连人的总质量是 $M_甲 > M_乙$，船行驶时水的阻力不计，则在 Δt 时间内

(a) 两船受到的冲量大小相等，方向相反；

(b) 两船动量的变化量相等；

(c) 两船动能的增量相等；

(d) 两船的位移大小相等、方向相反；

(e) 两船速度的变化量相等。

答（a）、(b)

1679．质量为 m_1 的光滑薄球壳，静止在光滑水平面上（如图所示）。质量为 m_2 的物体从球壳顶部的 A 点由静止开始滑下，到达 B 点时，开始离开球壳。已知球壳半径为 R，∠AOB 为θ，则物体通过 B 点时的速率 v_B 为

(a) $\upsilon_B < \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$；

(b) $\upsilon_B > \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}$；

(c) $\upsilon_B = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)} \cdot \cos\theta$；

(d) $\upsilon_B = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)} \cdot \sin\theta$。

答（a）

1680．静止在光滑水平面上的物体 A 的一侧固定一根水平方向的弹簧。物体 B 在光滑水平面内，沿弹簧的轴线方向冲向弹簧的一端。设它们间的作用为弹性碰撞，则弹簧的压缩量最大发生在

（a）A 的速度最大时；

（b）B 的速度最小时；

（c）A、B 的速率相同时；

（d）A、B 间的相对速度为零时；

（e）A、B 的总动能最小时。

答（c）、(d)、(e)

1681．步枪射击时，采取下列各种不同方式进行，哪一种情况下，子弹离开枪口时相对于地的速度最大？

（a）枪横放在光滑水平面上；

（b）用绳悬在枪身的重心，使枪身处于水平静止状态；

（c）枪托抵住墙壁；

（d）枪托抵住人的肩部。

答（c）

1682．小平板车 B 静止在光滑水平面上，物体 A 以某一水平初速度 v_0 滑向 B 的一端。由于 A、B 间存在摩擦，因而 A 滑上 B 后，A 开始作减速度运动，B 开始作加速度运动。（设 B 足够长）则 B 速度达到最大时，应发生在

（a）A 的速度最小时；　（b）A 在 B 上停止滑动时；

（c）A、B 速率相等时；　（d）B 开始作匀速直线运动时。

答（a）、(b)、(c)、(d)

1683．如图所示。质量为 m 的光滑、坚硬薄板 B 固定在两根完全相同的轻质弹簧的上端，弹簧的下端固定在水平面上，使板 B 水平静止。现有一个质量为 M 的小球 A,在某一高度以水平速度平抛而落到板 B 的右端上。设 M＞m，A、B 间的作用属弹性碰撞，且板不会一端翘起，则 A 跟 B 碰撞结束后的瞬时，A 的运动方向可能为

（a）沿 v_1 方向；　（b）沿 v_2 方向；

（c）沿 v_2（竖直向上）方向；（d）都不可能。

答（a）

1684．设斜上抛物体在通过轨迹的最高点位置时，突然炸裂成质量不等的两块。已知其中一块沿原水平方向作平抛运动，则另一块的运动

可能是

(a) 反方向平抛运动；　　(b) 斜上抛运动；

(c) 自由落体运动；　　(d) 原方向平抛运动。

答 (a)、(c)、(d)

1685．A、B、C 三只大小相同的弹性小球，沿一直线排列在光滑水平面上，它们质量的比为 $M_A:M_B:M_C=2:1:1$。开始时，B、C 静止，A 球以速度 v 沿直线 AB 冲向 B 球。此后三者相互作用为弹性碰撞，当三球相互作用完全结束后，三球速率 v_A、v_B、v_C 相比较，应为

(a) $v_A<v_B$，$v_B=v_C$；

(b) $v_A<v_B<v_C$；

(c) $v_A<v_B$，A 向左运动，$v_B=v_C$ 同时向右运动；

(d) 无法比较。

答 (b)

1686．如图所示，小车的质量为 M，一侧有半径为 R 的光滑圆弧曲面，圆弧AB长为 $\frac{1}{2}\pi R$，底端A点跟光滑水平面KP高度相同。一只质量为 m 的小球，以水平速度 v_0 沿水平面从 A 点冲上圆弧曲面，设水平面 CD 是光滑的，则当小球到达 B 点时，（1）小球的速度 v′大小是

(a) $\frac{m}{M+m}\upsilon_0$；　　(b) $\frac{m}{M}\upsilon_0$；

(c) $\frac{M}{M+m}\upsilon_0$；　　(d) $\sqrt{\frac{m}{M+m}}\upsilon_0$；

(e) $\sqrt{\frac{mv_0^2-2mgR}{M+m}}$；　　(f) 以上都不正确。

答 (f)

（2）小车的速度 v 的大小为

[可供选择的答案同第（1）小题。]

答 (a)

1687．在上题中，当小球跟小车作用完全结束后（即小球第二次通过 A 点向左离开小车后），小车的速度大小为

(a) $\frac{m\upsilon_0}{M+m}$；　　(b) $\frac{m-M}{M+m}\upsilon_0$；

(c) $\frac{2m}{M+m}\upsilon_0$；　　(d) $\frac{2M}{M+m}\upsilon_0$。

答 (c)

1688．质量为 M 的光滑活动斜面原来静止在光滑水平面上，一个质量为 m 的物体从斜面底端以初速度 v_0 滑上斜面。斜面达到最大速度是出现在

(a) 物体处在斜面上的位置最高时；

(b) 物体从斜面上开始下滑时；

(c) 物体跟斜面的相对速度为零时；

(d) 物体从斜面底端离开斜面滑向水平面时。

答（d）

1689．人站在质量为 M 的平板车上，车向右以 v_0 的速度沿光滑水平面匀速运动；如果人的质量为 m，在车运动时从平板车的一端以相对于车的速度 v_0 沿跟车运动相反的方向跳到地面，（不计地面的阻力）则人落地后平板车速度的大小为

(a) 0；　(b) $\frac{M}{M+m}\upsilon_0$；

(c) $\frac{M}{M-m}\upsilon_0$；　(d) $\frac{M-2m}{M-m}\upsilon_0$；

(e) $\frac{M+m}{M}\upsilon_0$。

答（e）

1690．质量为 m 的人，以相对于船的速度 v_0，从船头走到船尾。当船固定不动时，人所用的时间为 t_0；若船不固定，而是原来静止在静水中，且水的阻力忽略不计，则与人以相对于船的速度仍为 v_0 运动时，人从船头走到船尾所用的时间为 t′。则 t′ 跟 t_0 的关系为（设船的质量为 M）

(a) $t'=\frac{m}{M}t_0$；　(b) $t'=\frac{m}{M+m}t_0$；

(c) $t'=\frac{M}{M+m}t_0$；　(d) $t'=t_0$；

(e) $t'=\frac{M}{M-m}t_0$；　(f) $t'=\frac{m}{M-m}t_0$。

答（d）

1691．A、B 两物体质量的比 m_A∶m_B=3∶2，原来静止在台面的边缘。A、B 间有一根先被压缩了的弹簧。当弹簧突然释放后，A、B 两物体离开台面落到地面。设 A、B 两物体落地点跟各自起始点的水平距离分别为 s_A 和 s_B，则 s_A∶s_B 为

(a) 3∶2；　(b) 2∶3；

(c) 1∶1；　(d) 条件不足，无法确定。

答（b）

1692．上题，如果 A、B 两物体原来静止在平板车上，且 A、B 跟平板车表面之间的滑动摩擦系数相同，平板车受水平地面的阻力忽略不计，m_A∶m_B 仍为 3∶2，则当弹簧突然释放后，平板车的运动方向为

(a) 向右；　(b) 向左；

(c) 不动；　(d) 不知道平板车的质量，无法确定。

答（b）

1693．小车 C 质量为 M，静止在光滑水平面上，两侧各有一个光滑斜面。A、B 两物体从小车顶部由静止开始下滑。当 A、B 全部离开小车后，如果

(a) m_A＞m_B，则小车向右运动；

(b) m_A=m_B，则小车静止；

(c)$m_A > m_B$，$\angle\alpha > \angle\beta$，则小车一定向右运动；

(d)$m_A = m_B$，$\angle\alpha > \angle\beta$，则小车一定向右运动；

(e)$m_A > m_B$，$\angle\alpha < \angle\beta$，则小车运动方向无法确定；

(f)$m_A < m_B$，$\angle\alpha = \angle\beta$，则小车可能向左运动。

答（f）

1694．如图所示，设物体 A 的质量为 m，小车的质量为 M，开始时小车静止在光滑水平面上。当物体 A 从处于小车中的高为 h 的光滑斜面顶端滑到斜面底端的瞬时，小车的速度大小为

(a) 0；　　(b) $m\sqrt{2gh}/(M+m)$；

(c) $m\sqrt{2gh}/M$；　　(d) 以上都不正确。

答（d）

1695．总质量为 M 的小车 AB 原来静止在光滑水平面上。小车的 A 端固定一根不计质量的弹簧，弹簧的另一端放置一块质量为 m 的物体 C。已知小车的水平底板光滑，且 M＞m，开始时，弹簧处于压缩状态。当弹簧突然释放后，物体 C 离开弹簧向 B 端冲去，并跟 B 端的非弹性物质油灰发生完全非弹性碰撞。下列说法哪些正确？

(a) 物体离开弹簧时，小车一定向左运动；

(b) 小车运动的速率跟物体相对小车的运动速率的比为 m：M；

(c) 小车运动速率跟物体运动速率之比为 m：M；

(d) 物体跟 B 端油灰发生完全非弹性碰撞后，小车即停止运动；

(e) 物体跟 B 端油灰发生完全非弹性碰撞后，小车向右运动。

答（a）、(c)、(d)

1696．总质量为 M 的小车静止在光滑水平面上，小车两侧 C、D 的内壁装有厚厚一层油灰。在小车的光滑底板上放置有质量分别为 2m 和 m 的物体 A、B。A 距 C 端的距离为 L_2，B 距 D 端的距离为 L_1，且 L_1：L_2=1：2（见图）。当将 A、B 间原来压缩的弹簧突然释放后，A、B 到达小车两侧跟 C、D 发生完全非弹性碰撞。碰撞后，小车的速率

(a) v′=0；　　(b)；v′≠0，小车向左运动；

(c) v′≠0，小车向右运动；(d)以上都不正确。

答（a）

计算题

1697．A、B 两球在光滑水平面内沿一直线发生弹性对心碰撞。已知作用前 A 的动量为 20 千克·米/秒，B 的动量为零。作用后，A 的动量为–30 千克·米/秒，则作用后 B 的动量为多少？

[解答] 由题意可知，作用前后，总动量守恒。

根据　$\Delta p_A = -\Delta p_B$，有

$$-(p'_A - p_A) = p'_B - p_B = p'_B,$$

所以　$p'_B = -(-30-20)$千克·米/秒=50 千克·米/秒，

这就是作用后 B 的动量。

1698．在光滑水平面内，有 A、B 两球发生弹性对心碰撞。作用前，A 的动量为 20 千克·米/秒，B 的动量为–30 千克·米/秒；作用后，A 的

动量变为–5 千克·米/秒，则 B 的动量变为多少？

[解答] 由题意可知，A、B 总动量守恒。有

$$p_A+p_B=p'_A+p'_B，$$

所以 $p'_B=p_A+p_B-p'_A=[20+(-30)-(-5)]$千克·米/秒=–5 千克·米/秒，作用后 B 的动量变为–5 千克·米/秒。

1699．质子的质量是 1.67×10^{-27}千克，速度为 1.0×10^7米/秒，跟一个静止的氦核碰撞后，质子以 6.0×10^6米/秒的速度反弹回来，氦核则以 4.0×10^6米/秒的速度运动。氦核的质量为多少？

[解答] 设质子的质量为 m_1，作用前的速度为 v_1，作用后的速度为 v'_1；氦核的质量为 m_2，作用后的速度为 v_2'，则由题意可知，两粒子的作用前后，总动量守恒

$$m_1\upsilon_1=m_1\upsilon_1'+m_2\upsilon_2'，$$

所以

$$m_2=m_1(\upsilon_1-\upsilon_1')/\upsilon_2'，$$

代入数据，并令 v_1 的方向为正，则

$m_2=\{1.67\times10^{-27}[1.0\times10^7-(-6.0\times10^6)]/4.0\times10^6\}$千克

$=6.68\times10^{-27}$千克，

氦核的质量为 6.68×10^{-27}千克。

1700．子弹的质量为 20 克，以 600 米/秒的速度，水平地射入质量为 1980 克、原来静止在水平面上的物体 A 内。已知 A 跟水平面间的摩擦系数为 0.4，则子弹射入 A 后，物体能沿水平面滑行的最大距离为多少？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解答] 由题意知，子弹跟 A 的作用是完全非弹性碰撞，作用后，A 获得初动能后沿水平面滑行，可用动能定理求解。

先根据动量守恒定律求出作用后 A 的动量、速度。设子弹的初速度为 v_0，质量为 m，物体 A 的质量为 M，不计子弹跟物体 A 作用过程物体 A 所受到的水平面的摩擦力冲量，则

$$m\upsilon_0=(M+m)\upsilon'$$

$$\upsilon'=\frac{m}{M+m}\upsilon_0=\frac{0.02}{1.98+0.02}\times600\text{米/秒}=6\text{米/秒}。$$

设 A 沿水平面滑行的最大距离为 s，由动能定理得

$$0-\frac{1}{2}(M+m)\upsilon'^2=-u(M+m)gs，$$

所以

$$s=\upsilon'^2/2\mu g=\frac{6^2}{2\times0.4\times10}\text{米}=4.5\text{米}。$$

1701．质量为 2 千克的物体 A，原来静止在水平面 B 上，已知 A、B 间的滑动摩擦系数为 0.4，一颗质量为 20 克的子弹，以 600 米/秒的速度水平地穿过 A 后速度变为 100 米/秒，则子弹穿过 A 后，物体 A 沿水平面 B 能够滑行的最大距离为多少？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解答] 由题意知，子弹跟 A 的作用属于非弹性碰撞，可先求出子弹跟 A 作用后，A 的速度。

设子弹跟 A 作用前的速度为 v_0，作用后的速度为 v'，物体 A 作用后的速度为 v，同上题理由，根据动量守恒定律得

$$m\upsilon_0 = M\upsilon + m\upsilon'$$

$$\upsilon = \frac{m}{M}(\upsilon_0 - \upsilon') = \frac{0.02}{2}(600-100)\text{米}/\text{秒} = 5\text{米}/\text{秒}。$$

再根据动能定理求出滑行的最大距离

$$0 - \frac{1}{2}M\upsilon^2 = -\mu Mgs，$$

$$s = \upsilon^2 / 2\mu g = [5^2 / (2\times0.4\times10)]\text{米} = 3.125\text{米}。$$

1702.质量为 20 克的子弹,以 600 米/秒的水平速度射入质量为 1980 克、原来静止在光滑水平面的物体内，并深入物体 A 内 10 厘米而留在 A 内。取 g 为 10 米/秒 ²，试求：

（1）子弹射入 A 后，物体 A 的速度；

（2）子弹跟 A 作用过程中，子弹损失的动能；

（3）子弹跟 A 作用过程中，系统损失的机械能；

（4）子弹跟 A 作用过程中受到 A 的平均阻力。

[解答]

（1）应用非弹性碰撞求出作用后子弹和 A 的共同速度

$$m\upsilon_0 = (m+M)\upsilon'$$

$$\upsilon' = \frac{m}{m+M}\upsilon_0 = \frac{0.02}{1.98+0.02}\times600\text{米}/\text{秒} = 6\text{米}/\text{秒}。$$

（2）应用动能定理求出子弹动能的增量

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m\upsilon'^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\times0.02\times(6^2-600^2)\text{焦} = -3599.64\text{焦}，$$

所以子弹损失的动能为 3599.64 焦。

（3）系统机械能的增量为

$$\Delta E = \frac{1}{2}(M+m)\upsilon'^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2$$

$$= [\frac{1}{2}(1.98+0.02)\times6^2 - \frac{1}{2}\times0.02\times600^2]\text{焦}$$

$$= -3564\text{焦}，$$

所以系统损失的动能为 3564 焦。

（4）应用动能定理求平均阻力

对物体 $\frac{1}{2}M\upsilon'^2 - 0 = fs \qquad (1)$

对子弹 $\frac{1}{2}m\upsilon'^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -f(s+d) \qquad (2)$

(1)式$+(2)$式即为 $\frac{1}{2}(M+m)\upsilon'^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -fd$，

$$\frac{1}{2}(M+m)\upsilon'^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \Delta E$$

所以 $f = \frac{\Delta E}{d} = \frac{3564}{0.1}\text{牛} = 35640\text{牛}。$

1703．长为 1 米的细绳，能承受的最大拉力为 46 牛。现用此绳悬挂

质量为 0.99 千克的物体而静止着，如图所示。一颗质量为 10 克的子弹，以水平速度 v_0 射入物体内，并留在物体内。假若子弹射入物体内时，细绳刚好断裂，取 g=10 米/秒 ²，则子弹射入物体前的初速度 v_0 至少应为多少？

[解答] 子弹射入物体后，物体获得动量而发生摆动。由于物体在最低点摆动的瞬时速度最大，因而所需要的向心力最大。

设拉力为 T，子弹射入物体后的共同速度为 v，则

$$T - mg = m\upsilon^2 / l，m = m' + M = 1\text{千克，}$$

$$\upsilon^2 = \frac{l}{m}T - gl$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{l}{m}T - gl} = \sqrt{\frac{1}{1}\times 46 - 10\times 1}\text{米}/\text{秒} = 6\text{米}/\text{秒}；$$

由动量守恒定律得

$$m'\upsilon_0 = (m' + M)\upsilon，$$

$$\upsilon_0 = \frac{m' + M}{m'}\upsilon = \frac{0.01 + 0.99}{0.01}\times 6\text{米}/\text{秒}$$

$$= 600\text{米}/\text{秒。}$$

v_0 为子弹射入物体前的初速度。

1704．质量为 0.8 千克的物体 A，原来静止在有孔的平板上。一颗质量为 10 克的子弹 B，以 800 米/秒的初速度 v_0，竖直向上，从小孔内穿过物体 A。如果子弹穿过 A 后，A 能上升的最大高度为 0.8 米，不计空气阻力，g 取 10 米/秒 ²，试求：

（1）子弹穿过 A 后的最大速度 v′；

（2）子弹能上升的最大高度 h_{max}。

[解答] （1）由于子弹穿过 A 的过程相互作用的内力远大于重力，故重力冲量可忽略不计，所以 A、B 相互作用前后的总动量守恒。以 M、m 分别表示 A、B 的质量，以 v、v′分别表示 A、B 作用后的最大速度，则

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 10\times 0.8}\text{米}/\text{秒} = 4\text{米}/\text{秒，}$$

由动量守恒定律得

$$m\upsilon_0 = M\upsilon + m\upsilon'，$$

$$\upsilon' = \upsilon_0 - \frac{M}{m}\upsilon = 800\text{米}/\text{秒} - \frac{0.8}{0.01}\times 4\text{米}/\text{秒} = 480\text{米}/\text{秒。}$$

此即子弹穿过 A 后的最大速度。

（2）子弹能上升的最大高度

$$h_{max} = \frac{\upsilon'^2}{2g} = \frac{480^2}{2\times 10}\text{米} = 11520\text{米。}$$

这一高度只是理论高度。实际上，高速运动的子弹受到的空气阻力是不可忽略的，因而实际能上升的最大高度要比这小得多。

1705．一支步枪的质量为 M，每次发射子弹的质量都是 m。如果它每次发射子弹时，火药爆炸所能提供的能量，转化为机械能（动能）的数值都为 E_0，那么，当将枪平放在光滑水平面上发射时，子弹获得的动能

为 E_{ka}；当将枪托紧紧抵住坚硬的墙壁上水平发射时，子弹获得的动能为 E_{kb}。则 E_{ka}：E_{kb} 约为多少？

[解答] 第一种情况下，动量守恒。设发射子弹后，枪身的速度为 v，子弹的速度为 v_1，则

$$m\upsilon_1+M\upsilon=0,$$

$$\upsilon=-\frac{m}{M}\upsilon_1,$$

因为 $$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+\frac{1}{2}M\upsilon^2=E_0$$ 即

$$(1+\frac{m}{M})\cdot\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=E_0$$

所以 $$E_{ka}=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2=\frac{M}{M+m}E_0。$$

第二种情况下，令墙（连地球）的质量为 M′，速度为 v′，子弹的速度为 v_2，将子弹、枪身及地球视为同一系统，则

$$m\upsilon_2+(M+M')\upsilon'=0,$$

则 $$\upsilon'=-\frac{m}{M+M'}\upsilon_2;$$

由于 $M'>>m$，所以$\upsilon'\to 0$，

近似地有

$$E_{kb}=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2=E_0,$$

所以 $$E_{ka}:E_{kb}=(\frac{1}{2}m\upsilon_1^2):(\frac{1}{2}m\upsilon_2^2)=\frac{M}{M+m}。$$

1706．质量为 980 克的飞鸟，以 10 米/秒的速度沿水平方向匀速飞行。飞行过程中被竖直向上运动的子弹所击中。假设飞鸟被击中前的瞬时，子弹的速度为 400 米/秒；击毙后，子弹随飞鸟一起运动。测得子弹的质量为 20 克，飞鸟被击毙后，经 6 秒钟落到地面，取 g=10 米/秒^2，且不考虑空气阻力，则

（1）飞鸟原来的飞行高度为多少？

（2）击中点离落地点的水平距离为多少？

（3）如果枪是竖直向上发射子弹的，则弹头离开枪口时的速度大小为多少？

[解答] 子弹射击飞鸟，在竖直方向的总动量近似守恒，令子弹的质量为 m，射入前的速度为 v_1，飞鸟的质量为 M，被击中后的竖直方向速度为 v_y，则

$$mv_1=(M+m)v_y,$$

$$\upsilon_y=\frac{m}{M+m}\upsilon_1=\frac{0.02}{0.98+0.02}\times 400\text{米/秒}=8\text{米/秒}。$$

（1）子弹射入飞鸟后，一起作斜上抛运动。在竖直方向上的分运动是竖直上抛运动。设 h 为飞鸟原来距地面的高度，则

$$h=\upsilon_y t-\frac{1}{2}gt^2=8\times6\text{米}-\frac{1}{2}\times10\times6^2\text{米}=-132\text{米}。$$

负号表示落地点在抛出点之下。

（2）水平方向为匀速直线运动。飞鸟原速度为 v_0，击中后水平方向速度为 v_x，应用水平方向上的动量守恒定律

$$Mv_0=(M+m)v_x，$$

$$\upsilon_x=\frac{M}{M+m}\upsilon_0=\frac{0.98}{0.98+0.02}\times10\text{米/秒}=9.8\text{米/秒}，$$

所以 $s_x=v_xt=9.8\times6$ 米$=58.8$ 米，

即水平距离。

（3）求子弹出枪口的初速度 v_0'，可根据：

$$v_1^2=v_0'^2-2gh，$$

$$v_0'^2=v_1^2+2gh$$

所以 $$v_0'=\sqrt{v_1^2+2gh}=\sqrt{400^2+2\times10\times132}\text{米/秒}=403.3\text{米/秒}，$$

即子弹离开枪口时的速度。

1707．用长为 L 的细绳吊一个静止的质量为 M 的沙袋。质量为 m 的子弹，以水平速度 v_0 迅速射入沙袋内，并随沙袋一起向一侧摆动，假定悬线的最大摆动角度为θ，试用

（1）M、m、L、θ表示 v_0 的大小；

（2）M、m、L、v_0 表示出悬线受到的最大拉力 T。

［解答］（1）子弹射入沙袋的过程动量守恒，

$$mv_0=(M+m)v'，$$

$$v'=\frac{m}{M+m}v_0；$$

如果沙袋最大摆动角为θ，则由机械能守恒定律，有

$$\frac{1}{2}(M+m)v'^2=(M+m)gh=(M+m)gL(1-\cos\theta)，$$

$$\left(\frac{m}{M+m}\right)^2v_0^2=2gL(1-\cos\theta)，$$

所以 $$v_0=\frac{M+m}{m}\sqrt{2gL(1-\cos\theta)}。$$

（2）沙袋受到拉力 T 及重力 G，在最低位置速度为最大，根据圆周运动的规律

$$T=(M+m)g+(M+m)\frac{v'^2}{L}$$

$$=(M+m)g+\frac{m^2v_0^2}{(M+m)L}，$$

即悬线受到的最大拉力。

1708．质量是 20 克的子弹，水平射入质量是 1.98 千克的沙袋内，并随沙袋一起以 2 米/秒的速度沿光滑水平面滑行。求子弹射中沙袋前的即时速度。

[解答] 由题意知子弹和沙袋的作用是完全非弹性碰撞。令子弹的质量为 m，射入沙袋前的瞬时速度为 v_0，射入后的共同速度为 v′，沙袋质量为 M，则

$$mv_0 = (M + m)v'$$

所以 $$v_0 = \frac{M+m}{m}v' = \frac{1.98+0.02}{0.02} \times 2\text{米}/\text{秒} = 200\text{米}/\text{秒},$$

即子弹射入沙袋前的即时速度。

1709．质量为 4.9 千克的沙袋，静止在光滑水平面上；如果连续有 5 颗质量为 20 克的子弹，分别以 200 米/秒的水平速度射入沙袋，并都留在沙袋内随沙袋一起运动。假设 5 颗子弹射击沙袋的方向始终沿一直线，试求沙袋最后的速度。

[解答] 根据动量守恒的知识可知，分五次射入同样的子弹，跟一次射入 5 颗子弹的作用效果是一样的，即

$$5mv_0 = (M + 5m)v'$$

所以 $$v' = \frac{5m}{M+5m}v_0 = \frac{5 \times 0.02}{4.9 + 5 \times 0.02} \times 200\text{米}/\text{秒}$$
$$= 4\text{米}/\text{秒},$$

表明沙袋的最后速度为 4 米/秒。

1710．质量为 20 克的子弹，以 45 米/秒的初速度沿水平方向射击质量为 2 千克的沙袋。当沙袋被固定时，子弹穿过沙袋后的速度为 5 米/秒；如果沙袋不固定，而是静止在光滑水平面上，当子弹以同样的方式射击，能否穿过沙袋？如果能穿过，则穿过沙袋后的速度为多少？沙袋的速度为多少？

[解答] 当沙袋固定时，子弹穿过沙袋损耗的动能也即系统损失的总机械能，这可由动能定理来计算。

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \times 0.02 \times (5^2 - 45^2)\text{焦} = -20\text{焦},$$

即损耗 20 焦。

当沙袋放在光滑水平面上，则动量守恒，子弹穿过沙袋克服阻力做功而系统损耗的总机械能应该跟沙袋固定时相同。假设子弹可以穿过沙袋，且穿过沙袋后，子弹的速度为 v_1'，沙袋的速度为 v_2'，以 M 表示沙袋的质量，则有

$$mv_0 = mv_1' + Mv_2' \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_2'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta Ek \qquad (2)$$

由(1)式解得 $v_2' = \frac{m}{M}(v_0 - v_1')$ 代入(2)式

$$\frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}M[\frac{m}{M}(v_0 - v_1')]^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \Delta E_k,$$

代入数据并整理得

$$101v_1'^2 - 90v_1' - 475 = 0,$$

所以 $$v_1' = \begin{cases} -1.77\text{米/秒（舍去）}; \\ +2.66\text{米/秒。} \end{cases}$$

表明子弹可以穿过沙袋，且穿过沙袋后的速度变为 2.66 米/秒，代入（1）式解得沙袋的速度为

$$v_2' = \frac{0.02}{2}(45 - 2.66)\text{米/秒} = 0.42\text{米/秒。}$$

（验证：$\frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}Mv_2'^2 + \Delta E_k = 20.25\text{焦} = \frac{1}{2}mv_0^2$）

1711．一门旧式大炮，炮身的总质量为 2 吨，当以 60°斜向上发射一颗质量为 10 千克、速度为 600 米/秒的炮弹后，炮身后退的最大速度为多少？如果大炮后退过程中受到的阻力是它总重力的 25%,则大炮最多能退后多远？（g 取 10 米/秒 ^{2}）

[解答] 大炮以θ=60°角斜向上发射炮弹，在水平方向上，动量近似守恒。以 m、M 分别表示炮弹及炮身的质量，v_0、v′分别表示炮弹及炮身的速度，则

$$mv_{0x} + Mv' = 0\text{或}mv_0\cos\theta + Mv' = 0,$$

所以 $$v' = -\frac{m}{M}v_0\cos\theta = -\frac{10}{2000}\times 600\times\cos 60°\text{米/秒} = -1.5\text{米/秒},$$

这就是炮身后退的最大速度，负号表示 v′的方向跟 v_{0x} 方向相反。

设后退的最大距离为 s，由动能定理得

$$0 - \frac{1}{2}Mv'^2 = -\mu Mgs,$$

所以 $s = v'^2 / 2\mu g = [1.5^2 / (2\times 0.25\times 10)]\text{米} = 0.45\text{米。}$

这就是炮身后退的最大距离。

1712．质量为 2 千克的炸弹，以 20 米/秒的初速度以 60°角斜向上抛出，当炸弹到达轨迹的最高点位置时，炸裂成质量分别为 1.2 千克和 0.8 千克的 A、B 两块，其中 B 块以 100 米/秒的速度沿原方向飞开，求 A 块的速度大小和方向。

[解答] 炸弹作斜上抛运动到达轨道最高点时，虽然所受到的合外力不为零，但由于炸药爆发而产生的作用力（A、B 相互作用的内力），远大于重力，因而总动量可以视为守恒。

以 m_A、m_B 分别表示 A、B 两块的质量，以 v_A、v_B 表示炸裂后 A、B 两块的速度，以 v_x 表示炸弹到达最高点位置时的速度，则

$$v_x = v_0\cos 60° = 20\times\frac{1}{2}\text{米/秒} = 10\text{米/秒};$$

由动量守恒定律，知

$$(m_A+m_B)v_x=m_Av_A+m_Bv_B,$$

即 $$2\times 10\text{米/秒}=1.2v_A+0.8\times 100\text{米/秒},$$

所以 $$v_A = \frac{1}{1.2}(-80+20)\text{米/秒} = -50\text{米/秒。}$$

表明 A 块沿相反方向（即–x 方向）作平抛运动，速度大小为 50 米/

秒。

1713．质量为 2 千克的小球 A，以 10 米/秒的初速度 v_0，沿跟水平方向成 37°角斜向上抛出，然后落入总质量为 6 千克的小沙车 B 内，如图所示。假设沙车 B 原来静止在光滑水平面上，且取 g=10 米/秒^2，试求：

（1）小球落入沙车后，沙车的速度；

（2）沙车受到合外力的冲量；

（3）小球在跟沙车作用过程受到的冲量大小。

[解答] 由题意可知，A、B 相互作用属于完全非弹性碰撞。在水平方向上动量守恒。故

（1） $m_A v_{0x} = (m_A + m_B)v$，

所以 $v = \dfrac{m_A}{m_A + m_B} v_0 \cos 37° = \dfrac{2}{2+6} \times 10 \times 0.8$ 米/秒 $= 2$ 米/秒，

即为沙车的速度。

（2）沙车受到合外力的冲量等于沙车动量的增量

$I_1 = m_B v - 0 = 6 \times 2$ 牛·秒=12 牛·秒；方向为水平向右。

（3）小球受到的冲量于小球动量的增量，即 $I_2 = \Delta p = p' - p_0$，矢量图如右图所示。图中｜p｜=$m_A v_0$=2×10 千克·米/秒=20 千克·米/秒，｜p′｜=$m_A v$=2×2 千克·米/秒=4 千克·米/秒，

由图可见

$$
\begin{aligned}
|\Delta p| &= \sqrt{|p|^2 + |p'|^2 - 2|p||p'|\cos 37°} \\
&= \sqrt{20^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 20 \times 0.8}\text{千克·米/秒} \\
&= 17\text{千克·米/秒，}
\end{aligned}
$$

所以 $|I_2| = |F| \cdot \Delta t = |\Delta p| = 17$牛·秒。

小球跟沙车各自受到的冲量不满足 $I_1 = I_2$，说明系统总动量不守恒。这是由于相互作用时，小球受到的冲量，不论在竖直方向还是水平方向，都来自内力，而沙车受到的冲量除了来自内力外，还有外力，而大小相等、方向相反的仅是内力提供的冲量。沙车在竖直方向受到的合力为零，是内力跟外力共同作用的结果，正是因为受到了外力作用，沙车仅在水平方向受到冲量，而小球在水平和竖直方向都受到冲量的作用。

1714．质量为 60 千克的人，在地面上立定跳远，最多可跳 2.5 米远。如果他立在质量为 100 千克静止的船的船头上，以完全相同的方式跳到跟船头等高的河岸上，则船头距河岸的最大距离可为多少？

[解答] 由动量守恒规律可知，人向前跳，船向后退。如果人以完全相同的方式（相同的动能，相同的抛射角等）跳跃，由于人在用力准备起跳的过程中，船受到人给予向后的推力作用，因而当人以相对于船头的水平速度 v_0 离船时，船已具有反向后退的速度 v′，因而人相对于河岸的速度 $v = v_0 + v'$，写成标量式为 $v = v_0 + v'$，这样，人对地面发生的水平位移比在河岸上立定跳远的最大位移 L 为小，但人相对于船头的位移最大值仍为 L。由动量守恒定律

$$m(v_0+v')+Mv'=0,$$

得 $v'=-\frac{m}{M+m}v_0$ 负号表示方向跟v_0相反。

人跳上岸的运动是斜抛运动，水平距离取决于相对地的水平速度和在空中的时间，后者又取决于竖直方向的分速度。不论人从地面上跳还是船上跳，根据题意两种情况中的竖直方向的分速度相同，因而在空中的时间 t 相同

在地面跳时 $L=v_0t$，

在船上跳时 $d=vt=(v_0+v')t=(v_0-\frac{m}{M+m}v_0)t$

$$=\frac{M}{M+m}v_0t=\frac{M}{M+m}L$$

$$=\frac{100}{100+60}\times 2.5\text{米}=1.56\text{米}。$$

1715．一个质量是 60 千克的人，从河岸上以 4 米/秒的水平速度，跳到质量为 100 千克的小船上。不计水的阻力，船将以多大速度离岸而行？

[解答] 设船的质量为 M，离岸时的速度为 v′，人的质量为 m，初速度为 v_0不计阻力时，总动量守恒，则有

$$mv_0=(m+M)v',$$

所以 $v'=\frac{m}{M+m}v_0=\frac{60}{100+60}\times 4\text{米/秒}=1.5\text{米/秒}$，

此即小船离岸时的速度。

1716．一个质量是 60 千克的人站在质量为 100 千克的小船船头，船静止在岸边，当人相对于船以 4 米/秒的水平速度跳到跟船头等高的河岸上时，小船后退的速率多大？

[解答] 由于人离船前，人、船均处于静止状态，因而总动量为零。人的速度虽然是 4 米/秒，但这是相对于船体的速度，必须换算成相对于河岸的速度。设人相对于河岸的速度为 v，人相对于船的速度为 v_0，船相对于河岸的速度为 v′，则有

$$v=v_0+v',$$

所以 $$m(v_0+v')+Mv'=0。$$

$$v'=-\frac{m}{M+m}v_0=-\frac{60}{100+60}\times 4\text{米/秒}=-1.5\text{米/秒}。$$

负号表示船体的速度方向跟 v_0 方向相反。

1717．质量为 M 的小船，静止在平静的水面上；一质量为 m 的人，立在船的一端，当他以相对于船面的速度 v_0 从船的一端走向另一端的同时，船的速度为多少？

[解答] 当不计水的阻力时，人跟船所成系统的总动量是守恒的。设人行走时，船速为 v′，则人相对于水面的速度 v 为

$v=v_0+v'$，相应的动量为

$p=mv=m(v_0+v')$；

由于上述速度矢量的方向沿一直线，当规定 v_0 方向为正时有

$$0=m(v_0+v')+mv'，$$

所以 $$v'=\frac{-m}{M+m}v_0。$$

说明 v′的方向跟 v_0 方向相反，小船后退。

1718．质量为 M、长为 L 的平板车静止在水平光滑面上。一人质量为 m，立在小车的一端。当他走到另一端时，小车的位移为多少？人相对于地面的位移为多少？

[解答] 由于小车置于光滑水平面上，故人和小车所成系统受到的合外力为零，作用过程总动量守恒。设人相对于小车行走的速度为 v_0，小车运动的速度为 v′，则人相对于地面的速度为

$v=v_0+v'$。由动量守恒知

$0=mv+Mv'$，由于它们在一直线，当规定 v_0 方向为正后，有 $m(v_0+v')+Mv'=0$

所以 $v'=-\frac{m}{M+m}v_0$。负号表示 v' 与 v_0 方向相反。

设作用时间为 t，则 $v_0=\frac{L}{t}$，$v'=\frac{s}{t}$，s 为小车的位移，则

$$\frac{s}{t}=-\frac{m}{M+m}\cdot\frac{L}{t}$$

即 $$s=-\frac{m}{M+m}L。$$

表明小车后退的位移为 $-\frac{m}{M+m}L$，而人相对于地面的位移

$$L'=s+L=L-\frac{m}{M+m}L=\frac{M}{M+m}L。$$

1719．质量为 M 的小船，静止在平静的水面上，有质量 m_1、m_2 的甲、乙两人分别立于船的两端。如果不计水的阻力，当甲、乙两人分别同时以相对于船体的速率 v_0 从船的一端走到另一端的过程中，船体移动的速率为多少？

[解答] 在不计水的阻力的条件下，人和船体所成系统总动量守恒。设向右运动的速度为正。船体的速度为 v′，则甲乙两人相对于地面的速度分别为

$$v_{甲}=(v_0+v')，v_{乙}=(v'-v_0)。$$

根据动量守恒定律

$$Mv'+m_1(v_0+v')+m_2(v'-v_0)=0，$$

所以 $$v'=-\frac{m_1-m_2}{M+m_1+m_2}\cdot v0。$$

由上式可见，当 $m_1>m_2$ 时，船向左运动，当 $m_1<m_2$ 时，船速向右。

1720．如图所示，小车 B 的质量为 16 千克，原来静止在光滑水平面上；另一个质量为 4 千克的小球 A，用长为 1 米的、不计质量的软绳悬挂于 O 点。开始时，连球带绳拉成水平状态而静止，然后自由释放。试求：

（g 取 10 米/秒²）

（1）当小球通过最低点位置时，球和车的速率各为多少？（不计任何损耗）

（2）当小球通过最低点位置时，绳的拉力为多少？

[解答]（1）小球 A 在从水平位置到竖直位置的摆动过程中，A 和 B 组成的系统在水平方向不受外力作用，故水平方向的动量守恒。设小球质量为 m，小车质量为 M，小球通过最低点时的速度为 v_1，这时小车的速度为 v_2，则

$$mv_1+mv_2=0 \qquad (1)$$

又因在这过程中，系统的机械能守恒，则

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}Mv_2^2=mgL \qquad (2)$$

由（1）式得 $v_2=-\frac{m}{M}v_1$，代入（2）式

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}M(-\frac{m}{M}v_1)^2=mgl,$$

$$v_1^2(1+\frac{m}{M})=2gl,$$

所以 $v_1=\sqrt{\frac{2Mgl}{M+m}}=\sqrt{\frac{2\times16\times10\times1}{16+4}}\text{米/秒}=4\text{米/秒}$；

$$v_2=-\frac{m}{M}v_1=-\frac{4}{16}\times4\text{米/秒}=-1\text{米/秒}。$$

可见，小球通过最低点的速率为 4 米/秒，小车反向运动的速率为 1 米/秒。

（2）小球通过最低点位置时，相对于 0 点来说是圆周运动，线速度

$$v=v_1-v_2=[4-(-1)]\text{米/秒}=5\text{米/秒},$$

由圆周运动向心力的公式可得

$$T=mg+m\frac{v^2}{L}=(4\times10+4\times\frac{5^2}{1})\text{牛}$$
$$=140\text{牛},$$

这就是悬绳受到的拉力。

1721．质量为 16 千克的平板车 B，原来静止在光滑水平面上。另一个质量为 4 千克的物体 A 以 5.0 米/秒的水平初速度滑上平板车的一端。假设平板车跟物体间的滑动摩擦系数为 0.5，取 g=10 米/秒²。试问：

（1）如果 A 不会从 B 的另一端落下，则 A、B 的最终速度为多少？

（2）如果 A 不会从 B 的另一端落下，则平板车的板长至少应为多少？

[解答] 当 A 在 B 上滑动时，A 作减速运动，B 作加速运动。A 不会从 B 的一端落下，要求 A、B 最后能保持相对静止，即 A、B 最后必具有完全相同的速度。这一作用过程相当于完全非弹性碰撞。令 v 表示 A、B 的共同速度，则

（1）$mv_0=(m+M)\cdot v$，

所以 $v=\frac{m}{M+m}v_0=\frac{4\times5}{16+4}\text{米/秒}=1\text{米/秒}$，

即小车的最终速度。

（2）因为是完全非弹性碰撞，所以物体跟平板车的总动能不守恒，且物体跟平板车总动能的减少等于它们相互作用时克服摩擦力做功所消耗的能量。设平板车的长度至少为 L，物体跟平板车间的滑动摩擦力为 f，则

$$f=\mu N=\mu mg,$$

$$fL=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}(m+M)v^2,$$

$$L=\frac{mv_0^2-(m+M)v^2}{2\mu mg}=\frac{4\times5^2-(4+16)\times1^2}{2\times0.5\times4\times10}\text{米}$$

$$=2\text{米},$$

即小车的长度至少应为 2 米，否则，A 将从小车的另一端滑落到地面上。

1722．一只质量为 M 的气球静止在距地面高度为 h 处，从气球上放下一架不计质量的软梯刚好到达地面，在软梯的末端立一个质量为 m 的人。不计空气阻力，当人以某一均匀速度沿软梯攀登到气球时，气球离地面为多高？

[解答] 设人沿软梯攀登的速度为 v_0，气球下降的速度为 v′，则人相对于地面上升的速度为 $v=v_0+v'$。由于系统受到的合外力为零，因而总动量守恒：

$$m(v_0+v')+Mv'=0,$$

所以

$$v'=-\frac{m}{M+m}v_0。$$

设人攀登的时间为 t，速度近似均匀，则

$$v_0=\frac{h}{t};$$

以 h′表示气球的位移，则

$$v'=\frac{h'}{t}。$$

代入上式，有

$$h'=-\frac{m}{M+m}h,$$

此为气球下降的距离。最终气球离地面的高度为 $H=h+h'$，即

$$H=h-\frac{m}{M+m}h=\frac{M}{M+m}\cdot h。$$

1723．质量为 M 的气球上有一质量为 m 的人。气球和人共同静止在离地面高为 h 的静止空气中。如果从气球上放下一架不计质量的软梯，以便让人能沿软梯安全地下降到地面。则软梯至少应为多长时，才能达到上述目的？

[解答] 由题意可知，整个系统动量守恒。当人下降时，气球要上升，因而，人要安全到达地面，软梯的实际长度应大于 h。

令 v_0 表示人沿软梯下降的速度，软梯的总长度为 L；气球上升的速度为 v′，则人相对于地面下降的速度为 $v=v_0+v'$。根据动量守恒

$$mv+Mv'=0,$$

即　　　　　　　$m(v_0+v')+Mv'=0$，

所以　　　　$v'=-\frac{m}{M+m}v_0$，负号表示方向跟v_0相反。

当人下降的位移为 h 时，气球上升的位移 h_1 为

$$h_1=-\frac{m}{M+m}h。$$（参见上题的分析）

这时，气球相对于地面的高度增加了 h_1。人再下降 h_1，则气球上升 h_2

$$h_2=-\frac{m}{M+m}h_1=-(\frac{m}{M+m})^2h；$$

由此可以推知

$$h_n=-(\frac{m}{M+m})^nh；$$

令 L 表示软梯的总长度，则

$$L=h+h_1+h_2+\Lambda+h_n$$
$$=h[1+(\frac{m}{M+m})+(\frac{m}{M+m})^2+(\frac{m}{M+m})^3+\Lambda+(\frac{m}{M+m})^n]；$$

应用等比数列求和公式，令$q=(\frac{m}{M+m})$，则

$$L=h(1-q^n)/(1-q)$$
$$=h\cdot[1-(\frac{m}{M+m})^n]/(1-\frac{m}{M+m})；$$

当$n\to\infty$时，　　　$(\frac{m}{M+m})^n\to 0$；

所以　　　　$L=\frac{M+m}{M}h。$

此题也可以应用更简单的办法求解。令 v 表示人下降过程中相对于地面的速度，v′表示气球上升的速度，则由动量守恒定律可知

$$mv+Mv'=0，$$

所以　　　　$v'=-\frac{m}{M}v。$

由于 v 是人相对于地面的速度，而人下降到地面时，相对于地面的位移就是 h，以 h′表示气球上升的高度，则

$$h'=v't=-\frac{m}{M}v\cdot\frac{h}{v}$$
$$=-\frac{m}{M}h，$$

所以软梯的长度 L 应为

$$L=h-h'=h+\frac{m}{M}h=(1+\frac{m}{M})h=\frac{M+m}{M}h。$$

结果相同。

1724．在同步卫星的轨道上，一颗质量为 M 的实验卫星，跟地球处于相对静止状态。当从卫星释放出Δm 的气体时，卫星将作反冲运动。设每次释放的气体质量相同，相对于卫星的速度都是 v_0，试求：

（1）第一次放出Δm的气体后，卫星的速度v_1；

（2）第二次放出Δm的气体后，卫星的速度v_2。

[解答] 由于同步卫星的轨道半径很大，卫星释放气体的过程可近似地视为动量守恒。由题意，被释放的气体相对于地面的速度

$v=v_0+v_1$，如果规定卫星运动方向为正，用标量式表示为$v=v_1-v_0$，得

$$\Delta m(v_1-v_0)+(M-\Delta m)v_1=0，所以v_1=\frac{\Delta m}{M}v_0。$$

第二次释放气体时，卫星的动量为

$$p=(M-\Delta m)v_1，$$

气体相对于地面的速度为

$$v'=v_0+v_2，同样得$$

$$v'=v_2-v_0；$$

因此，由动量守恒定律可得

$$\Delta m(v_2-v_0)+(M-2\Delta m)v_2=(M-\Delta m)\cdot\frac{\Delta m}{M}v_0，$$

所以 $$v_2=\frac{\Delta m^2}{M(M-\Delta m)}v_0=\frac{\Delta m}{M}\cdot\frac{\Delta m}{M-\Delta m}\cdot v_0。$$

1725．质量为M的活动斜面静止在光滑水平面上，另一质量为m的小球，以水平速度v_0跟斜面发生完全弹性碰撞后竖直向上飞出。试求：

（1）作用后斜面的速度；

（2）小球离开作用点的最大高度。

[解答] 本题中，小球和活动斜面所成系统的总动量不守恒，但在水平方向上不受外力作用，因而水平方向的动量守恒。设作用后，斜面的速度为v′，则

（1）$Mv'=mv_0$，

$$v'=\frac{m}{M}v_0，$$

即作用后活动斜面的速度。

（2）要求小球可上升的最大高度，可应用机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}Mv'^2+mgh，$$

$$mgh=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}M(\frac{m}{M}v_0)^2$$

$$=(\frac{M-m}{M})\frac{1}{2}mv_0^2，$$

所以 $$h=\frac{M-m}{2Mg}v_0^2。$$

这里的h即小球离开作用点的最大高度。

1726．质量为2千克的小平板车B静止在光滑水平面上，板的一端静止着一块质量为2千克的物体A。一颗质量为10克的子弹，以600米/秒的水平速度射穿A后，速度变为100米/秒。如果A、B间的滑动摩擦

系数为 0.05，取 g 为 10 米/秒²，则

（1）A 的最大速度为多少？

（2）如果 A 始终不离开 B，则 B 的最大速度为多少？

（3）为使 A 不致从 B 的一端滑落到平面上，则板的长度至少应为多少？

［解答］（1）子弹跟 A 的作用是非弹性碰撞，作用结束后 A 具有最大速度 v_A，由动量守恒定律得

$$mv_0 = M_A v_A + mv'，$$

所以 $$v_A = \frac{m}{M_A}(v_0 - v') = \frac{0.01}{2}(600 - 100)\text{米}/\text{秒} = 2.5\text{米}/\text{秒}。$$

（2）B 的最大速度出现在 A、B 不再发生相对滑动时。仍可应用非弹性碰撞求解。设 A、B 的共同速度为 v，则

$$M_A v_A = (M_A + M_B)v，$$

$$v = \frac{M_A}{M_A + M_B} \cdot v_A = \frac{1}{2} \times 2.5\text{米}/\text{秒} = 1.25\text{米}/\text{秒}，$$

即小车的最大速度。

（3）如果要求板的长度，可应用系统的动能定理：

$$\frac{1}{2}(M_A + M_B)v^2 - \frac{1}{2}M_A v_A^2 = -\mu M_A gL$$

所以 $$L = \frac{M_A v_A^2 - (M_A + M_B)v^2}{2\mu M_A g} = \frac{2 \times 2.5^2 - (2+2) \times 1.25^2}{2 \times 0.05 \times 2 \times 10}\text{米}$$

$$= 3.125\text{米}。$$

1727．如图所示，光滑曲面跟光滑水平面相切。弹性球 A，质量为 m_1，由静止开始下滑，跟静止在光滑水平面上质量为 m_2 的弹性球 B 发生弹性正碰，如果碰撞后两球沿光滑曲面上滑到相同的高度。则 $m_1 : m_2$ 应满足什么条件？

［解答］设 A 球滑到水平面上时的速度为 v_1，碰撞后，A、B 两球的速度为 v_1'、v_2'，则

$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \qquad (2)$$

解得 $$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1；$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{M_1 + m_2} v_1。$$

由于碰撞后两球沿曲面上升的高度 h 相同，

即 $$\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 = m_1 gh，v_1' = \pm\sqrt{2gh}；v_2' = \pm\sqrt{2gh}。$$

根据题意，作用后两球速度方向相反，即取

$$v_1' = -v_2'$$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1,$$

所以

$$m_1 - m_2 = -2m_1,$$

$$3m_1 = m_2,$$

$$m_1 : m_2 = 1 : 3。$$

1728．在光滑水平面上，有 A、B、C、D……n 个大小相同的弹性小球静止地排成一条直线。其中，B、C、D…各球质量都为 m，A 球的质量为 2m。现在 A 球沿各球球心的连线以初速度 v_0 冲向 B 球，假设各球相互作用都是弹性碰撞。试求各球间不再发生相互作用时，各球的速率。

[解答] 先看 A、B 间第一次碰撞。由于

$$\begin{cases} m_A v_0 = m_A v_{A1} + m_B v_{B1}, \\ \frac{1}{2} m_A v_0^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2; \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} v_{A1} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_0 = \frac{2m - m}{2m + m} v_0 = \frac{1}{3} v_0, \\ v_{B1} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_0 = \frac{2 \times 2m}{2m + m} v_0 = \frac{4}{3} v_0; \end{cases}$$

B、C、D 间的相互作用，由于质量相等，根据上述结果，作用后动量完全传递给最后一个球，因此，A、B 第一次碰后，A 球的速度为

$v_{A1} = \frac{1}{3} v_0$，B、C、D……各球速度为零，第n个球的速度为

$$v_n = \frac{4}{3} v_0。$$

A、B 第二次碰撞后

$$\begin{cases} v_{A2} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_{A1} = (\frac{1}{3})^2 v_0, \\ v_{B2} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} v_{A1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} v_0; \end{cases}$$

这时第 n 个球已不再跟其他球发生碰撞，

因而第 n–1 个球的速度为

$$v_{n-1} = \frac{4}{3} \cdot (\frac{1}{3}) v_0。$$

同理，第三次碰撞后

$$\begin{cases} v_{A3} = (\frac{1}{3})^3 v_0, \\ v_{n-2} = \frac{4}{3} (\frac{1}{3})^2 v_0; \text{（第} n-2 \text{个球的速度）} \end{cases}$$

A 跟 B 总共能发生 n-1 次碰撞，在第 n-1 次碰撞后，A 球的速率：

$$v_A = (\frac{1}{3})^{n-1} \cdot v_0,$$

B球的速率 $v_B=\frac{4}{3}(\frac{1}{3})^{n-2}\cdot v_0$。

顺次下来，第k个球的速率 $v_k=\frac{4}{3}(\frac{1}{3})^{n-k}\cdot v_0$

最后一个（第n个）球的速率 $v_n=\frac{4}{3}(\frac{1}{3})^{n-n}\cdot v_0=\frac{4}{3}v_0$。

1729．小球A的质量为m_1，从光滑圆弧曲面上由静止开始下滑，到达光滑水平面之后，跟原来静止的、质量为m_2的小球B，发生弹性对心碰撞，。试分析讨论：

（1）如果A、B能发生第二次碰撞，则m_1：m_2应满足什么条件？

（2）如果A、B在发生第二次碰撞后，A能被B弹回，则m_1：m_2应满足什么条件？

[解答]（1）设碰撞前A的速度为v_0，碰撞后A的速度为v'_1，B的速度为v'_2，规定向右为正，则有

$$\begin{cases}m_1v_0=m_1v_1'+m_2v_2', \\ \frac{1}{2}m_1v_0^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2,\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}v_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_0, \\ v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_0;\end{cases}$$

要使A、B能发生第二次碰撞，即要使A被弹回时的速度大于B的速度，即

$$-v_1'>v_2',$$

因而有

$$-\frac{m_1-m_2}{m_2+m_2}v_0>\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_0,$$

即 $m_2-m_1>2m_1$，

所以 $3m_1<m_2$或$\frac{m_1}{m_2}<\frac{1}{3}$。

即能发生第二次碰撞的条件。

（2）设第二次碰撞后，A的速度为v_A，B的速度为v_B，则有

$$\begin{cases}m_1v_A+m_2v_B=m_1v_1'+m_2v_2', \\ \frac{1}{2}m_1v_A^2+\frac{1}{2}m_2v_B^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2,\end{cases}$$

解得

$$v_A=\frac{(m_1-m_2)v_1'+2m_2v_2'}{m_1+m_2},$$

$$v_B=\frac{(m_2-m_1)v_2'+2m_1v_1'}{m_1+m_2},$$

将上述 $\begin{cases} -v_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0, \\ v_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0 \end{cases}$，代入可得

$$\begin{cases} v_A = \dfrac{4m_1 m_2 - (m_2 - m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} v_0, \\ v_B = \dfrac{2m_1(m_2 - m_1) - 2m_1(m_1 - m_2)}{(m_1 + m_2)^2} v_0 = \dfrac{4m_1(m_2 - m_1)}{(m_1 + m_2)^2} v_0 \end{cases};$$

根据题意，要使 A 球被反弹回去，即指

$$v_A < 0,$$

也即

$$4m_1 m_2 - (m_2 - m_1)^2 < 0,$$

所以

$$m_1^2 - 6m_1 m_2 + m_2^2 > 0,$$

即 $[m_1 - (3 + \sqrt{8})m_2] \cdot [m_1 - (3 - \sqrt{8})m_2] > 0$，

其解为

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{m_2} > (3 + 2\sqrt{2}); \\ \dfrac{m_1}{m_2} < (3 - 2\sqrt{2}). \end{cases}$$

其中 $\dfrac{m_1}{m_2} > (3 + 2\sqrt{2})$ 应舍去，因为在此条件下，不可能发生第二次碰撞。故满足本题要求的正确答案应是

$$\frac{m_1}{m_2} < (3 - 2\sqrt{2}) = 0.172。$$

1730．用长为 L 的不可伸长的细绳，将质量为 m 的小球 C，悬挂在质量为 M_1 的小车 A 的顶部，小车静止在光滑水平面上。现有质量为 M_2 的小车 B，以某一水平初速度 v_0 跟 A 发生完全非弹性碰撞。碰撞后，悬挂小球的细绳最大摆动角为 $\dfrac{\pi}{2}$，试求：

（1）v_0 应满足的条件；

（2）悬绳受到的最大拉力。

[解答]（1）A、B、C 相互使用可分为两个阶段考虑：先看 A、B 的相互作用，为完全非弹性碰撞；然后是 A、B 结合以后与 C 的相互作用。

设作用前 B 的速度为 v_0，作用后 A、B 的共同速度为 v'，A、B 跟 C 作用后悬挂小球的细绳达到最大摆角后，小球跟 A、B 相对静止，设它们的共同速度为 v_1，则

$$M_2 v_0 = (M_1 + M_2)v' \qquad (1)$$

由于 A、B 和 C 组成的系统在水平方向上的合外力为零，水平方向的总动量守恒，则

$$(M_1 + M_2)v' = (M_1 + M_2 + m)v \qquad (2)$$

由于系统内只有重力和弹力做功，系统的机械能守恒，

则 $$\frac{1}{2}(M_1+M_2)v'^2=\frac{1}{2}(M_1+M_2+m)v^2+mgL \qquad (3)$$

由（1）、（2）两式得

$$\begin{cases} v'=\dfrac{M_2}{M_1+M_2}v_0, \\ v=\dfrac{M_2}{M_1+M_2+m}v_0,\text{代入（3）式得} \\ v_0=\dfrac{1}{M_2}\cdot\sqrt{2(M_1+M_2)\cdot(M_1+M_2+m)g\cdot L}。\end{cases}$$

（2）悬绳受到的最大拉力出现在球 C 刚刚开始摆动时，也即 A、B 相互作用结束的瞬时，此时球 C 相对于地面处于静止状态，悬点的速度为 v′，因此相对于车厢为参考系有

$$T=mg+m\frac{v'^2}{L}=mg+\frac{m}{L}\left(\frac{M_2}{M_1+M_2}\right)^2v_0^2=\frac{m(M+M_2)^2gL+mM_2^2v_0^2}{(M_1+M_2)^2\cdot L},$$

将v_0代入得 $$T=\frac{3M_1+3M_2+2m}{M_1+M_2}\cdot mg。$$

这就是悬绳受到的最大拉力。

1731．在上题中，如果小车 A、B 的质量相等，均为 4 千克，小球质量为 0.8 千克，悬绳长为 1 米，能承受的最大拉力为 11.2 牛，取 g=10 米/秒²，则

（1）如果 A、B 的相互作用仍为完全非弹性碰撞，且在 A、B 碰撞粘在一起的瞬间，悬绳刚好断裂，那么，小车 B 的初速度 v_0 为多大？

（2）如果小车 A 的底板上铺有厚厚的油灰，则小球落下后，A、B、C 的共同速度为多少？

[解答] A、B、C 相互作用仍分为两个阶段考虑：第一阶段，A、B 发生完全非弹性碰撞时，悬绳断裂；第二阶段，C 跟 A 发生完全非弹性碰撞，最后三者完全粘在一起。

（1）设 B 的初速度为 v_0，A、B 作用后的瞬时，共同速度为 v′，则

$$M_2v_0=(M_1+M_2)v' \qquad (1)$$

对于车厢为参考系有

$$T=mg+m\frac{v'^2}{L} \qquad (2)$$

由（1）式

$$v'=\frac{M_2}{M_1+M_2}v_0,$$

代入（2）式 $$T=mg+m\frac{M_2^2}{L\cdot(M_1+M_2)^2}v_0^2,$$

代入数据

$$11.2\text{米/秒}=0.8\times10\text{米/秒}+\frac{0.8\times4^2}{1\times(4+4)^2}\cdot v_0^2,$$

$$v_0=\sqrt{16}\text{米/秒}=4\text{米/秒}。$$

（2）由题意可知，小球 C 落下后，跟 A 发生完全非弹性碰撞，在水平方向动量守恒，即

$$(M_1+M_2)v'=(M_1+M_2+m)v=M_2v_0,$$

所以 $v=\dfrac{M_2}{M_1+M_2+m}v_0=\dfrac{4\times4}{4+4+0.8}$米/秒$=1.82$米/秒。

这就是作用完全结束后，A、B、C 的共同速度。

1732．质量为 3 千克的小车 A，原来静止在光滑水平轨道 CP 上。小车的前侧的钉子上用长为 0.8 米的、不可伸长的细绳（质量不计）悬挂一只质量为 2 千克的小球 B。开始时，把绳向左侧拉成水平，小车被轨道左端的固定挡块挡住，如图所示。当由静止释放小球 B 时，小球下落到最低点后向右摆动。取 g=10 米/秒 ²，求小球能向右侧摆动的最大高度。

[解答] 小球从水平位置摆动到最低点位置的过程中，小车由于受挡块的阻挡，始终处于静止状态。当小球从最低点向右侧摆动时，小车因受绳的拉力作用而开始沿轨道向右运动。当 A、B 相对速度为零时，小球向右侧摆动到最大高度，此时，A、B 具有共同的水平向右速度 v′。小球从最低点向右摆到最大高度的过程，小球跟车的水平方向动量守恒，机械能也守恒。故有

$$mv_0=(M+m)v'$$

$$v_0=\sqrt{2gl}$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}(M+m)v'^2+mgh$$

代入数据

$$v_0=\sqrt{2gl}=\sqrt{2\times10\times0.8}\text{米/秒}=4\text{米/秒},$$

$$v'=\frac{m}{m+M}v_0=\frac{2}{2+3}\times4\text{米/秒}=1.6\text{米/秒},$$

$$h=[\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}(M+m)v'^2]/mg$$

$$=\left\{\left[\frac{1}{2}\times2\times4^2-\frac{1}{2}\times5\times1.6^2\right]/(2\times10)\right\}\text{米}$$

$$=0.48\text{米}。$$

这就是小球向右侧摆动的最大高度。

1733．质量为 M 的小车，静止在水平光滑的轨道上，两根长各为 l 的细绳，分别固定质量为 m 的、完全相同的小球 A、B，绳的另一端分别固定在挡块 C 及小车 M 上，如图所示。静止时，两小球刚好相切，且切点跟两球心都在同一水平面内。如果将 A 球连球带绳拉成水平，然后松手。设 A、B 间的作用是弹性碰撞，则作用后，B 球向右摆动可上升的最大高度为多少？

[解答] 小球A下落到最低点时，速度$v_A=\sqrt{2gl}$，A跟B的作用是弹性碰撞，在水平方向上的动量是守恒的。由于两球完全相同，故作用后，B 球的水平速度 $v_B=v_A$。此后 B 球向右摆动时，小车受细绳拉力作用而作加速运动。因为 B 跟 M 间的作用力是内力，合外力仍为零，所以由 B 跟 M 组成的系统，水平方向动量仍守恒。且当 B 球向右摆到最高点时，B 跟 M

的水平速度必相同。设为 v，而 B 的竖直方向速度为零，有

$$\begin{cases}mv_B=(m+M)v, \\ \frac{1}{2}mv_B^2=\frac{1}{2}(M+m)v^2+mgh\text{；}\end{cases}$$

解得 $$h=\frac{M}{M+m}l。$$

1734．如图所示。小车 A 的质量为 3 千克，原来静止在光滑的水平轨道上。小车的前侧的钉子上，用长为 1 米的不可伸长的细绳悬挂一质量为 2 千克的物体 B。现有一颗质量为 10 克的子弹 C，以 v_0 为 600 米/秒的水平速度射穿 B 后，速度 v′为 100 米/秒。试求物体 B 向右摆动的最大高度。

［解答］A、B、C 相互作用分为两个阶段考虑。第一阶段，C 跟 B 发生非弹性碰撞，求出 B 的动量；第二阶段，B、A 相互作用，系统能量无损失，可以视为弹性碰撞，且 B 向右摆动最大高度时，A、B 必具有完全相同的水平速度，即相对速度为零。

设 C、B 作用后 B 的速度为 v_B，则

$$mv_0=M_Bv_B+mv',$$

得 $$\begin{aligned}M_Bv_B&=mv_0-mv'=0.01\times(600-100)\text{千克·米/秒}\\&=5\text{千克·米/秒},\end{aligned}$$

$$v_B=\frac{m}{M}(v_0-v')=2.5\text{米/秒。}$$

A、B 相互作用时，动量守恒，机械能守恒。

故有

$$\begin{cases}M_Bv_B=(M_A+M_B)v & (1)\\ \frac{1}{2}M_Bv_B^2=\frac{1}{2}(M_A+M_B)v^2+M_Bgh & (2)\end{cases}$$

由（1）式得

$$v=\frac{M_B}{M_A+M_B}v_B=\frac{2}{2+3}\times2.5\text{米/秒}=1.0\text{米/秒},$$

代入（2）式，得

$$\frac{1}{2}\times2\times2.5^2\text{米}=\frac{1}{2}(3+2)\times1^2\text{米}+2\times10\times h,$$

所以 $$h=0.1875\text{米},$$

即 B 向右摆动的最大高度。

1735．质量为 m 的小炸弹，以速度 v_0 作匀速直线运动，在某一瞬时，突然炸裂成质量相等的两块。其中之一以 v_1 沿跟原方向成α角飞出。设它们都在同一水平面内运动。求另一块的速度 v_2 的大小和方向。

［解答］依据题意，本题中炸弹的两个碎块总动量守恒。

设 $m_1=m_2=\frac{1}{2}m$，m_2 沿跟原方向成β角运动。按两个方向分别列式。

原方向的总动量守恒

$$mv_0 = m_1v_1\cos\alpha + m_2v_2\cos\beta \qquad (1)$$

竖直方向总动量为零

$$m_1v_1\sin\alpha + m_2v_2\sin\beta = 0 \qquad (2)$$

由（1）式及 $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}m$，

得 $$v_2\cos\beta = 2v_0 - v_1\cos\alpha \qquad (3)$$

由（2）式

$$v_2\sin\beta = v_1\sin\alpha \text{（数量关系）} \qquad (4)$$

$\frac{(4)\text{式}}{(3)\text{式}}$ $$\mathrm{tg}\beta = v_1\sin\alpha/(2v_0 - v_1\cos\alpha)，$$

所以 $$v_2 = \sqrt{4v_0^2 + v_1^2 - 4v_0v_1\cos\alpha}，$$

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{v_1\sin\alpha}{2v_0 - v_1\cos\alpha}。$$

1736．质量为 m_1，动能为 E_0 的小质点 A，跟原来静止的、质量为 m_2 的质量较大的质点 B 发生弹性对心碰撞之后，A 以反方向飞出，动能为 E_1。B 的动能为 E_2。求 E_1、E_2、E_0、m_1，m_2 之间的关系。

[解答] 依题意，A、B 总动量守恒，总动能守恒。设作用前 A 的速度为 v_0，B 的速度为零；作用后 A 的速度为 v'_1，B 的速度为 v'_2，则

$$\begin{cases} E_0 = E_1 + E_2， \\ \frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2， \\ m_1v_0 = m_1v_1' + m_2v_2'； \end{cases}$$

得 $$\begin{cases} v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0， \\ v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0； \end{cases}$$

所以 $$E_2 = \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0\right)^2 = \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2}E_0，$$

$$E_1 = E_0 - E_2 = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)^2E_0。$$

1737．质量为 m、速度为 v_0 的弹性小球 A，射入分布均匀的、相互有一定距离的一群小球 B 中，设这群小球中的每一小球的质量均为 nm，（n 为正整数）且假定 A 跟 B 中任一小球的作用都是弹性、对心碰撞，每一次都只跟一个小球发生作用。试求 A 的初动能和每一次跟 B 中任一小球作用后的动能的比值。

[解答] 由动量守恒、动能守恒，得第一次作用后 A 球的速度

$$v_1' = \frac{m - nm}{m + nm}v_0 = \frac{1 - n}{1 + n}v_0。$$

第一次作用前后，A的动能的比值

$$k_1=\frac{E_0}{E_k'}=\frac{\frac{1}{2}mv_0^2}{\frac{1}{2}mv_1'^2}=(\frac{v_0}{v_1'})^2=(\frac{1+n}{1-n})^2。$$

同理可得A球初动能和第二次作用后的动能比值为

$$k_2=(\frac{n+1}{1-n})^{2\times 2}；$$

第Q次作用后　　$k_Q=(\frac{1+n}{1-n})^{2Q}$。

可见，n越小，动能减小得越快，当n=1时，$v'_1=0$，即经过一次碰撞动能完全传递给B。

1738．如图所示。质量为M的小车，右侧有半径为R的1/4圆弧曲面，曲面底端跟光滑水平面相切，光滑水平面上有质量为m的小球A以初速度v_0冲上小车，并刚好能到达小车圆弧曲面的最高点D。如果小车原来静止在光滑水平面上，不计任何损耗，则v_0应满足什么条件？

[解答] 小球刚好能滑到D点时，小车具有某一速度v′，这时，小球A在竖直方向上的速度应刚好为零，因此，小球在水平方向上的速度也是v′。由动量守恒定律得

$$mv_0=(m+M)v' \qquad (1)$$

由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}(m+M)v'^2+mgR \qquad (2)$$

从（1）式得

$v'=\frac{m}{M+m}v$，代入（2）式

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}(m+M)\cdot(\frac{m}{M+m}v_0)^2+mgR，$$

所以　$v_0=\sqrt{\frac{2(m+M)gR}{M}}$，

即小球的初速度应满足的条件。

1739．在上题中，如果小球冲上小车后，离开D点能上升的最大高度为R，则

（1）小球的初速度v_0应为多少？

（2）自小球冲出D点到重返D点，小车运动的距离为多少？

（3）小球第二次通过C点离开小车时，两者的速度为多少？

[解答] 根据上题的分析，有

$$\begin{cases}mv_0=(m+M)v',\\ \frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}(m+M)v'^2+2mgR。\end{cases}$$所以

（1）　$v_0=2\sqrt{\frac{(M+m)gR}{M}}$。

（2）小球第一次离开D后，作斜上抛运动。由题意可知，小球离开

D 点在竖直方向上的速度

$$v_{yD}=\sqrt{2gR},$$

在水平方向上的速度

$$v_{xD}=v'=\frac{m}{M+m}v_0=\frac{m}{M+m}\cdot 2\sqrt{\frac{(M+m)gR}{M}},$$

所以小球从离开 D 点到重返 D 点所经历的时间为

$$t=2\cdot\frac{v_{yD}}{g}=2\cdot\sqrt{\frac{2R}{g}},$$

而小车沿水平运动的速度跟 v_{xd} 相同，故小车的位移即为小球的水平位移

$$\begin{aligned}s_x&=v_{xD}\cdot t\\&=4mR\cdot\sqrt{\frac{2}{M\cdot(M+m)}}。\end{aligned}$$

(3) 小球第二次通过 C 点离开小车，即两者不再发生作用时，根据

$$\begin{cases}mv_0=mv_1'+Mv_2'\\\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_1'^2+\frac{1}{2}Mv_2'^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}v_1'=\frac{m-M}{M+m}v_0\\v_2'=\frac{2m}{M+m}v_0\end{cases}$$

将上述 v_0 的关系代入即可得到

$$v_1'=2(m-M)\sqrt{\frac{Rg}{M(M+m)}},$$

$$v_2'=4m\sqrt{\frac{Rg}{M(M+m)}}。$$

1740．一个宇航员，连同装备的总质量为 100 千克，在空间跟飞船相距 45 米处相对飞船处于静止状态。他带着一个装有 0.5 千克氧气的贮氧筒，贮氧筒上有一个可以使氧气以 50 米/秒的速度喷出的喷嘴。宇航员必须向着跟返回飞船方向相反的方向释放氧气，才能回到飞船上去，同时又必须保留一部分氧气供他在返回飞船的途中呼吸。已知宇航员呼吸的耗氧率为 2.5×10^{-4} 千克/秒。试问：

(1) 如果他在准备返回飞船的瞬时，释放 0.15 千克的氧气，他能安全地回到飞船吗？

(2) 宇航员安全地返回飞船的最长和最短时间分别为多少？

[解答] 宇航员释放氧气之后，根据动量守恒定律，宇航员将获得一定的速度飞向飞船。如果他返回飞船所需时间为 t，则只要剩余氧气的质量大于或等于他呼吸所需要的氧气即可安全地返回。令释放氧气的质量为 Δm，释放的速度为 v，宇航员连同装备的总质量为 M，释放氧气后的速度为 v′，则

(1) 由动量守恒定律

$$\Delta m(v+v')+(M-\Delta m)v'=0,$$

其中负号表示 v′的方向跟 v 方向相反。宇航员返回飞船所需时间为

$$t=\frac{s}{v'}=\frac{45}{0.075}\text{秒}=600\text{秒};$$

途中所需氧气

$$m=R\cdot t=2.5\times10^{-4}\times600\text{千克}=0.15\text{千克},$$

由于 m+△m=0.15 千克+0.15 千克=0.3 千克＜0.5 千克，所以可安全地返回。

(2)设释放的氧气△m 未知，原来携带的氧气质量为 m_0，途中所需时间为 t，则

$$Rt+\Delta m=m_0,$$

为宇航员返回飞船的极限条件。

由以上讨论

$$t=\frac{s}{v'}=\frac{M}{\Delta m}\cdot\frac{s}{v}=\frac{100}{\Delta m}\cdot\frac{45}{50}\text{秒}=\frac{90}{\Delta m}\text{秒},$$

将数据代入

$$Rt+\Delta m-m_0=0\text{ 中，得}$$

$$2.5\times10^{-4}\times\frac{90}{\Delta m}+\Delta m-0.5=0,$$

即 $$2\Delta m^2-\Delta m+0.045=0,$$

得 $$\begin{cases}\Delta m_1=0.45\text{千克},\\ \Delta m_2=0.05\text{千克},\end{cases}$$

分别代入 $t=\frac{s}{v'}=\frac{90}{\Delta m}$ 中，得

$$\begin{cases}t_1=200\text{秒},\\ t_2=1800\text{秒}。\end{cases}$$

可见,宇航员安全地返回飞船的最长时间为 1800 秒,最短时间为 200 秒。

1741．如图所示。质量为 m 的物体，静止在高 h 为 0.20 米的平台边缘。长 L 为 0.80 米的细线，一端固定在 O 点，另一端拴一个质量为 M 的小球，且 M=3m。当线静止在竖直方向时，小球恰能跟物体接触。现将悬线拉到水平位置，由静止释放小球，当小球下落到最低点位置时，跟物体发生正碰。碰撞后，小球恰能绕固定在 O′点的钉子作圆周运动到 D 点，而物体则落在地面上的 C 点，测得 s 为 0.40 米。取 g=10 米/秒 ^{2}，试求：

(1)小球绕 O′作圆周运动的半径 r；

(2)判断小球跟物体间的碰撞属于什么碰撞。

[解答]小球从 A 到 B，机械能守恒，由此求得小球跟物体作用前的速度 v_0

$$v_0=\sqrt{2gl}=\sqrt{2\times10\times0.80}\text{米/秒}=4.0\text{米/秒};$$

球跟物体碰撞后的速度可以倒过来计算。先求物体的初速度 v′

$$v'=\frac{s}{t}，\qquad t=\sqrt{\frac{2h}{g}}，$$

所以 $$v'=s/\sqrt{\frac{2h}{g}}=(0.40/\sqrt{\frac{2\times 0.20}{10}})\text{米}/\text{秒}=2.0\text{米}/\text{秒}。$$

即为碰撞后，物体的速度。

球恰能绕 O′作圆周运动的条件是小球到达最高点 D 时的小球的重力即为向心力

$$Mg=M\frac{v_D^2}{r}，$$

$$v_D=\sqrt{rg}，$$

设小球在最低点跟物体碰撞后的速度为 v，则由机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}Mv_0^2+Mg\cdot 2r=\frac{5}{2}Mgr，$$

所以 $$v=\sqrt{5rg}。$$

同时，根据动量守恒定律

$$Mv_0=Mv+mv'，$$

即 $$3mv_0=3mv+mv'，$$

所以 $$v=v_0-\frac{1}{3}v'=(4-\frac{2}{3})\text{米}/\text{秒}=3.33\text{米}/\text{秒}；$$

代入上式，即

$$v^2=5rg，$$

$$3.33^2\text{米}^2/\text{秒}^2=5r\times 10\text{米}/\text{秒}^2，$$

所以 $$r=0.22\text{米}。$$

即上球绕 O′作圆周运动的半径。

(2)小球跟物体作用前的机械能为

$$E_1=\frac{1}{2}Mv_0^2=\frac{1}{2}M\times 4.0^2\text{焦}=8M\text{焦}=24m\text{焦}，$$

小球跟物体作用后的机械能为

$$E_2=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}mv'^2$$

$$=\frac{1}{2}\times 3m\times 3.33^2\text{焦}+\frac{1}{2}m\times 2^2\text{焦}=18.63m\text{焦}；$$

因为 $E_2<E_1$，所以属于非弹性碰撞。

1742．光滑水平面上有物体 A，质量为 m_1，动能为 E_{kA}；物体 B 质量为 m_2，原来静止，在它一个侧面固定有不计质量的、处于水平静止的弹簧，倔强系数为 k。如果 A 沿光滑水平面冲向弹簧的一端，如图所示，且不计作用过程中的任何损耗。试问：

(1)E_{kA} 为一定时，m_1，m_2 之间的关系满足什么条件，A 传给 B 的动能最多？最多为多少？

(2)E_{kA} 为一定时，m_1、m_2 之间的关系满足什么条件，A 传给 B 的动能

最少？

(3)如果作用结束后，A、B 速率相等，则 $m_1:m_2$ 为多少？

(4)如果作用结束后，A、B 动能相等，则 $m_1:m_2$ 为多少？

(5)作用过程中，弹簧的最大压缩量为多少？

[解答]设作用前 A 的速度为 v_0，作用后 A、B 的速度分别为 v'_1，v'_2，根据题意

$$m_1v_0=m_1v_1'+m_2v_2'，$$

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2=\frac{1}{2}m_1v'^2_1+\frac{1}{2}m_2v'^2_1，$$

解得

$$v_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_0，$$

$$v_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_0。$$

(1)A 传给 B 的动能，即作用后 B 的动能

$$E'_{kB}=\frac{1}{2}m_2v_2'^2=\frac{1}{2}m_2(\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_0)^2=\frac{E_{kA}}{\frac{(m_1-m_2)^2}{4m_1\cdot m_2}+1}，$$

当 $m_1=m_2$ 时，$E'_{kB}=E_{kA}$，最大。

(2)因为$E'_{kB}=\frac{1}{2}m_2(\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_0)^2=\frac{E_{kA}}{\frac{m_2}{4m_1}+\frac{1}{2}+\frac{m_1}{4m_2}}$，

所以当 $m_1>>m_2$ 或 $m_1<<m_2$ 时，$E'_{kB}\to0$，最小。

(3)令$v_1'=-v_2'$，得$m_1:m_2=1:3$。

(4)令$\frac{1}{2}m_1v_1'^2=\frac{1}{2}m_2v_2'^2$，即$m_1^2-6m_1m_2+m_2^2=0$，得$m_1:m_2$

$$=3\pm2\sqrt{2}，或m_1=(3+2\sqrt{2})m_2，m_1=(3-2\sqrt{2})m_2$$

都合题意。

(5)当 A、B 相对速度为零时，弹簧压缩量最大。此时

$$m_1v_0=(m_1+m_2)v，v=\frac{m_1}{m_1+m_2}v_0。$$

而$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m_1v_0^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2=\frac{m_2}{m_1+m_2}E_{kA}$，

所以

$$x=\sqrt{\frac{2m_2E_{kA}}{k(m_1+m_2)}}。$$

说理和论证题

1743．某实验者在利用气垫导轨研究碰撞的实验中，测得 A 球的质量为 0.2 千克，B 球的质量为 0.3 千克。作用前 A 球的速度为 5.0 米/秒，B 球静止。作用后，A 球的沿原方向运动速度为 0.62 米/秒，B 球的速度为 4.2 米/秒。请你判断一下，他测得的数据合理吗？

[解答]判断的依据应从两方面入手：一看动量是否守恒，二看作用

后的总动能是否小于或等于作用的总动能。

先看动量。作用前总动量

$$p_1=m_1v_1=0.20\times5\text{千克·米/秒}=1.0\text{千克·米/秒},$$

作用后的总动量

$$p_2=m_1v_1'+m_2v_2'=(0.2\times0.62+0.3\times4.2)\text{千克·米/秒}$$
$$=1.38\text{千克·米/秒},$$

再看动能，作用前总动能

$$E_{k1}=\frac{1}{2}m_1v_1^2=\frac{1}{2}\times0.2\times5^2\text{焦}=2.5\text{焦},$$

作用后，总动能

$$E_{k2}=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$
$$=(\frac{1}{2}\times0.2\times0.62^2+\frac{1}{2}\times0.3\times4.2^2)\text{焦}$$
$$=(0.0384+2.646)\text{焦}=2.6844\text{焦};$$

说明：$p_1\neq p_2$，$E_{k2}>E_{k1}$，这是不合理的。可见他测得的数据肯定不准确。

1744．一辆底板光滑的小平板车的质量为 M，原来静止在光滑水平面上，车的两侧端附有一层厚厚的油灰。车厢底板上放 A、B 两物体，其质量为 $m_A>m_B$，物体间原来有一根已被压缩的弹簧，当突然释放弹簧后，A、B 两物体可分别离开弹簧向车的两端冲去。并跟油灰发生完全非弹性碰撞。试分析并证明：A、B 跟小车作用后，小车仍将处于静止状态。

[解答]设 A、B 离开弹簧时的速度为 v_A、v_B，则 A、B 所成系统的动量守恒

$$m_Av_A=m_Bv_B=0。$$

(1)由于 $m_A>m_B$，所以$|v_B|>|v_A|$。

假设 B 先跟小车发生碰撞，则 B 跟小车所成系统的动量守恒

$$m_Bv_B=(m_B+M)v_1,$$

所以 $$v_1=\frac{m_B}{m_B+M}v_B,\text{方向向右。}$$

然后，A 跟小车发生完全非弹性碰撞，此时，总动量守恒。设作用后车跟 A、B 的共同速度为 v_2，则

$$m_Av_A+(m_B+M)v_1=(M+m_A+m_B)v_2,$$
$$(m_B+M)v_1=m_Bv_B,$$

所以 $$(M+m_A+m_B)v_2=m_Av_A+m_Bv_B=0,$$

得 $$v_2=0。$$

说明作用后小车停止运动。

1745．在光滑水平面内有两球发生碰撞，作用过程中两球速度的增量分别为$\triangle v_1$，$\triangle v_2$；如果两球质量分别为 m_1 和 m_2，试用牛顿定律证明：$\frac{\Delta v_1}{\Delta v_2}=-\frac{m_2}{m_1}$。

[证明]如图所示。设作用前 A 球的速度为 v_1，B 球的速度为 v_2；作用后 A 球的速度为 v'_1，B 球的速度为 v'_2，作用过程所经历的时间为△t，A 球受到 B 球的平均作用力为 F_1，B 球受到 A 球的平均作用力为 F_2，根据牛顿第二定律得

$$F_1 = m_1 a_1 = m_1 \cdot \frac{v'_1 - v_1}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v_1}{\Delta t}$$

$$F_2 = m_2 a_2 = m_2 \cdot \frac{v'_2 - v_2}{\Delta t} = m_2 \cdot \frac{\Delta v_2}{\Delta t},$$

由牛顿第三定律得

$$F_1 = -F_2,$$

即 $$m_1 \cdot \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = -m_2 \cdot \frac{\Delta v_2}{\Delta t},$$

所以 $m_1 \Delta v_1 = -m_2 \cdot \Delta v_2$，即 $\frac{\Delta v_1}{\Delta v_1} = -\frac{m_2}{m_1}$

1746．质量分别为 m_1、m_2 的物体 C、D 静止在光滑、水平的长板 A、B 上。C、D 间有一根已被压缩的、不计质量的弹簧。长板的 B 端可绕固定轴转动，A 端用细绳悬于 O 点。当突然释放弹簧后，C、D 分别离开弹簧滑向长板的两端。试证明：在 C、D 滑动过程中，悬绳 AO 的拉力保持不变。

[证明]设弹簧松开前，C、D 距固定轴的距离分别为 CB、DB，板长为 AB，绳的拉力为 T，根据力平矩平衡的条件，有

$$T \cdot AB = m_1 gCB + m_2 gDB,$$

所以 $$T = \frac{CB}{AB} m_1 g + \frac{DB}{AB} m_2 g。$$

弹簧松开后，C、D 组成的系统动量守恒。设离开弹簧时的速度分别为 v_C、v_D，则有

$$m_1 v_C + m_2 v_D = 0$$

即 $$\frac{v_C}{v_D} = \frac{-m_2}{m_1}。$$

设 C、D 在△t 时间内向左右滑动的位移分别为 x_1、x_2，则

$$\frac{x_1 \cdot \Delta t}{x_2 \cdot \Delta t} = -\frac{m_2}{m_1},$$

即 $\frac{x_1}{x_2} = -\frac{m_2}{m_1}$，或 $m_1 x_1$ 跟 $m_2 x_2$ 数值相等。

此时，设绳的拉力为 T′，两物体对 B 点的力分别为

$M_1 = m_1 g(CB - x_1)$，$M_2 = m_2 g(DB + x_2)$；

根据平衡条件

$T'AB = M_1 + M_2 = m_1 g(CB - x_1) + m_2 g(DB + x_2)$

$= m_1 gCB + m_2 gDB + (m_2 gx_2 - m_1 gx_1)$，

但 $$m_1 gx_1 = m_2 gx_2,$$

所以 $$T' = m_1g\cdot\frac{CB}{AB}+m_2g\cdot\frac{DB}{AB}=T$$

说明绳的拉力保持不变。

1747．A、B 两球，质量分别为 m_1、m_2 且 $m_1=3m_2$，速度分别为 v_1、v_2，且 $v_1=-v_2$。两球在光滑水平面内发生正碰后 $v'_1=0$，$v'_2=2v_2$。试证明：A、B 相互作用是弹性碰撞。

[证明]作用前动量

$$p_1=m_1v_1+m_2v_2=3mv+m(?\ v)=2mv,$$

作用后动量

$$p_2=m_1v'_1+m_2v'_2=m\cdot 2v=2mv=p_1,$$

总动量守恒。

作用前总动能

$$E_{k1}=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}\cdot 3mv^2+\frac{1}{2}mv^2=2mv^2,$$

作用后总动能

$$E_{k2}=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}mv_2'^2=0+\frac{1}{2}m(2v)^2=2mv^2=E_{k1},$$

总动能守恒。所以为弹性碰撞。

1748．如图所示。A、B 两球静止时，球面刚好相切，两球球心恰好在同一水平面内。设两球质量分别为 m_A、m_B。如果将 A 球向一侧拉开，然后释放。假定两球的碰撞是弹性对心碰撞，试证明：两球碰撞后能上升相同高度的条件是：m_A：m_B=1：3。

[证明]设 A 球跟 B 球发生碰撞前的速度为 v_0，碰撞后 A、B 速度分别为 v_A，v_B。由于水平方向上总动量守恒，有

$$m_Av_0=m_Av_A+m_Bv_B \qquad (1)$$

由于是弹性碰撞，所以机械能守恒

$$\frac{1}{2}m_Av_0^2=\frac{1}{2}m_Av_A^2+\frac{1}{2}m_Bv_B^2 \qquad (2)$$

由(1)、(2)式解得

$$\begin{cases} v_A=\dfrac{m_A-m_B}{m_A+m_B}v_0, \\ v_B=\dfrac{2m_A}{m_A+m_B}v_0, \end{cases}$$

如果两球作用后上升的高度均为 h，即

$$\frac{1}{2}m_Av^2{}_A=m_Agh,\ \frac{1}{2}m_Bv_B^2=m_Bgh,\text{则}$$

$$v^2{}_A=v^2{}_B,$$

所以 $$v_A=\pm v_B。$$

vA=+vB，不合题意，所以取 $v_A=?\ v_B$，有

$$\frac{m_A-m_B}{m_A+m_B}v_0=-\frac{2m_A}{m_A+m_B}v_0,$$

即　　　　　　$m_B=3m_A$ 或 $m_A:m_B=1:3$。

实验题

1749．将一块砖头平托在手掌上，另一只手持铁榔头用力敲打砖块，即使将砖块敲碎，你也不会感到有什么危险。如果不拿砖块，你敢用铁榔头直接敲打手掌吗？试一试，说明你的感受。

[参考解答]假设每次敲打时的冲量相同（都为 I）。当手托砖块时，铁榔头跟砖块的作用时间为$\triangle t_1$，而砖块跟手掌的作用时间为$\triangle t_2$，则榔头的平均冲力 $F_1=I/\triangle t_1$，而砖对手掌的平均冲力为 $F_2=I/\triangle t_2$，由于$\triangle t_2>>\triangle t_1$，所以 $F_2<<F_1$。如果用榔头直接敲打手掌，作用时间为$\triangle t_3$，则$\bar{F}_2=I/\Delta t_3$。由于$\Delta t_2>\Delta t_3$，所以$\bar{F}_3>F_2$，甚至能敲碎手指骨呢！

1750．给你两只带孔的小球，一根弹性很好的篾片、一根直尺，细线若干，火柴等，如何利用光滑台面来粗略地验证动量守恒定律？请你写出原理和主要实验步骤。

[参考解答]利用细线将蔑片变成 U 形，平放于光滑台面上，再将两小球放在蔑两端的外侧如图示。当突然烧断缚线时，蔑片弹开，小球向左右飞开。如果动量守恒定律成立，数值上应满足 $m_Av_A=m_Bv_B$，即

即$\dfrac{v_A}{v_B}=\dfrac{m_A}{m_B}$。由于两球同时平抛落地，设落地点的水平距离分别为

s_A和s_B，则$\dfrac{s_A}{s_B}=\dfrac{m_B}{m_A}$。如果测出的$s_A$，$s_B$，$m_B$和$m_B$满足这一关系式

，即证明它们的动量是守恒的。因此，验证动量守恒定律，即变

为验证关系式：$\dfrac{s_A}{s_B}=\dfrac{m_B}{m_A}$能否成立。

实验的主要步骤是

(1)将线穿过球孔，将两小球分别挂在直尺的两端，再用一根线系住直尺的中点而悬挂如图(c)，适当调节 L_A 或 L_B。使直尺处于水平静止状态。此时有$m_AgL_A=m_BgL_B$，即$\dfrac{m_B}{m_A}=\dfrac{L_A}{L_B}$，得到了两球质量之比。

(2)将蔑片缚成 U 形如图(a)所示，选择适当宽的小台面（可用架起的玻璃板），使小球位于台面边缘。当烧断缚线后，小球平抛落到地面的 A′、B′点，在此两点做上记号，如图(b)所示。

(3)再取一小球，用线穿过小孔，分别找出两球在台面上时对地的投影点 A′′、B′′。用直尺测出 A′′A′，B′′B′，即为 sA，sB。看看

$\dfrac{s_A}{s_B}=\dfrac{m_B}{m_A}=\dfrac{l_A}{L_B}$是否成立。

1751．下图是 A、B 两滑块碰撞前后的闪光照片示意图（部分）。图中滑块 A 的质量为 0.14 千克，滑块 B 的质量为 0.22 千克，所用标尺的最小刻度是 0.5 厘米，闪光快慢为每秒 10 次。试根据图示回答：

(1)作用前后滑块 A 动量的增量为多少？方向如何？

(2)碰撞前后总动量是否守恒？

(3)碰撞属于什么类型的碰撞？

[参考解答]作用前，B 是静止的，作用后，B 向右运动，A 向左运动。

(1)v_A=0.05/0.1 米/秒=0.5 米/秒，v'_A=? 0.005/0.1 米/秒=? 0.05 米/秒。

$\triangle p_A=m_A v'_A$? $m_A v_A$=0.14×(? 0.05)千克·米/秒? 0.14×0.5 千克·米/秒=? 0.077 千克·米/秒。方向向左；

(2)碰撞前总动量 $p=p_A=m_A v_A$=0.14×0.5 千克·米/秒=? 0.077 千克·米/秒。

碰撞后总动量 $p'=m_A v'_A+m_B v'_B$

=0.14×(? 0.05)千克·米/秒+0.22×(0.035/0.1)千克·米/秒=0.07 千克·米/秒。

所以作用前后总动量守恒。

(3)将有关数据代入可知

$$\frac{1}{2}m_A v^2{}_A > (\frac{1}{2}m_A v'^2_A + \frac{1}{2}m_B v'^2_B)$$

所以为非弹性碰撞。

1752．利用如图装置的斜槽研究在弹性碰撞的实验中，如果小球 A 的质量 m_A 小于小球 B 的质量 m_B，实验会出现什么结果？

[参考解答]A跟B作用前，A的速度为$v0=\sqrt{2gh}$，作用后A、B的速度分别为 v_A，v_B。根据弹性碰撞的公式

$$\begin{cases} v_A = \dfrac{m_A - m_B}{m_A + m_B} v_0, \\ v_B = \dfrac{2m_A}{m_A + m_B} v_0。 \end{cases}$$

如果 $m_A<m_B$ 则 $v_A<0$，即 A 跟 B 作用后将被反弹回到斜槽上，然后再滑下而作平抛运动。由于 A 球沿斜槽运动时，阻力不可避免，因而当 A 球重新回到 C 点的速率 $v'_A<v_A$，这将增大实验误差。

设 A 球不跟 B 球作用而直接作平抛运动，落地点的水平距离为 s_0，A 球与 B 球作用后落地点的水平距离为 s_A，B 球落地点的水平距离为 s_B，如果小球 A 被反弹后，在运动过程中受到的摩擦力不考虑，A 球落地点的水平距离应为 s'_A。根据动量守恒，则有

$$m_A\frac{s_0}{t} = m_B\frac{s_B}{t} + m_A(-\frac{s'_A}{t})$$

即 $m_A s_0=m_B s_B$? $m_A s'_A$。

但由于实际上存在摩擦，实测的数据 s_A 小于 s'_A，即 $s_A<s'_A$，因此实际上是

$m_A s_0>m_B s_B$? $m_A s_A$。 (1)

再从能量角度考虑，应有

$$\frac{1}{2}m_A(\frac{s_0}{t})^2 > [\frac{1}{2}m_B(\frac{s_B}{t})^2 + \frac{1}{2}m_A(\frac{s_A}{t})^2],$$

即 $m_A s^2_0>[m_B s^2_B+m_A s^2_A]$ (2)

(1)、(2)两式表明，如果 $m_A<m_B$，则碰撞后的总动量跟总动能都比

作用前小。

此外，如果实验中仍用书本上原来的表达式（即 s_A 仍取正号），则会出现

$$m_A s_0 < m_B s_B + m_A s_A,$$

这显然是不合理的。所以，为了使实验的误差尽量小，应取 $m_A > m_B$，不能取 $m_A < m_B$。

简谐振动

填充题

1753．物体（或者物体的一部分）在平衡位置附近来回做往复运动，叫做机械振动。产生机械振动的第一个必要条件是当物体离开平衡位置时就会受到回复力（指向平衡位置的力）的作用。产生机械振动的第二个必要条件是阻力足够小。

1754．弹簧振子振动时受到的回复力是弹簧形变产生的弹力。单摆振动时受到的回复力是重力沿圆弧切线方向的分力。一端固定在台钳上的钢条振动时受到的回复力是钢条弯曲形变产生的弹力。浮在水面上的木块上下振动时受到的回重力是浮力和重力的合力。

1755．物体在和离开平衡位置的位移成正比，而方向指向平衡位置的回复力作用下的振动，叫做简谐振动。

竖直方向的弹簧振子是由上端固定的弹簧和悬挂在弹簧下端的重物组成。当重物静止时，弹簧伸长 x_0，如果弹簧倔强系数为 k，则此时弹力 $F_0=kx_0$，且和重力 G 相等，此时重物所在位置就是平衡位置。

如果以竖直向下为正方向，把重物自平衡位置向下移动 x，这时弹簧伸长为 x_0+x，弹力为 $k(x+x_0)$，方向向上，弹力和重力的合力为 $G? k(x+x_0)$。由于 $G=F_0$，合外力就等于$? kx$，和物体离开平衡位置的位移成正比，方向和位移方向相反。

如果重物自平衡位置向上移动 x，此时位移 $x<0$，弹簧伸长为 $x_0? |x|$，弹力为 $k(x_0? |x|)$，方向向上，弹力和重力的合力为 $G? k(x_0? |x|)$，由于 $G=F_0$，合外力的大小就等于 $k|x|$，和物体离开平衡位置的位移成正比，方向和位移方向相反，仍可以把合外力表述为 $F=? kx$。

因此竖直方向弹簧振子的振动是简谐振动。

1756．在简谐振动中，加速度大小跟位移大小成正比，而加速度方向和位移方向相反。

如图所示水平方向的弹簧振子，小球质量为 100 克，弹簧每伸长 1 厘米弹力增加 1 牛，k=100 牛/米，以弹簧为原长时，小球位置 O 为原点，用手拉球到+4 厘米的 A 处，小球的加速度 $a_A=40$ 米/秒 ^{2}，方向和位移 OA 相反。当小球无初速释放后，运动到+3 厘米的 B 处，加速度 $a_B=30$ 米/秒 ^{2}，方向和位移 OB 相反。当小球继续运动平衡位置时，位移为零，加速度 $a_0=0$。

小球从 A 点向 O 点运动的过程中，加速度随位移的减小而减小，而速度不断增大。

1757．在忽略空气阻力的情况下，弹簧振子作简谐振时，可以具有动能和弹性势能，在振子离开平衡位置的运动阶段中，速度减小，动能转化为弹性势能。在振子趋向平衡位置的运动阶段，速度增大，弹性势能转化为动能。在两者转化的过程中，总能量保持不变，遵守机械守恒定律。

单摆作简谐振动时具有动能和重力势能，在单摆离开平衡位置的运动阶段中速度减小，位置升高，动能转化为重力势能。在单摆趋向平衡位置的运动阶段中速度增大，位置降低，重力势能转化为动能。在两者转化的过程中，机械能是守恒的。

1758．水平方向的弹簧振子的周期由振子质量 m 和轻弹簧的倔强系数 k 来决定。如果振子质量变大，振子在相同位移 x 处受到的回复力 F=? kx 的值不变，振子获得的加速度就减小，振子回到平衡位置所需的时间增大，因而周期增大。

如果轻弹簧的倔强系数 k 变大，振子在相同位移 x 处受到的回复力 F=? kx 的值变大，振子获得的加速度就增大，振子回到平衡位置所需的时间减小，因而周期减小。

可以证明，弹簧振子的周期公式为$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$。

1759．有一辆童车，车身质量为 4 千克，当质量为 12 千克的小孩坐上以后，车身下沉了 1.2 厘米，则此时童车的振动周期是 0.25 秒，而空车时的振动周期为 0.127 秒。

1760．一质点在 O 点附近做简谐振动，它离开 O 点向 M 点运动 3 秒后，第一次到达 M 点，再经过 2 秒后，第二次到达 M 点。则还要经过 14 秒，它才能第三次到达 M 点。

1761．将弹簧振子的弹簧取下截去一半后，再装回振子上，则它的振动频率变为原来的$\sqrt{2}$倍。如果不截弹簧，而把振子质量减小一半，则它的振动频率变为原来的$\sqrt{2}$倍。

1762．弹簧振子的质量为 50 克，振动频率是 5 赫，则弹簧的倔强系数是 49 牛/米。如果要使它的最大加速度为重力加速度的 10 倍，则它振动的振幅必须是 0.10 米。（g=10 米/秒^2）

1763．一个弹簧振子的质量为 1 千克，弹簧的倔强系数是 100 牛/米，把振子从平衡位置拉开 0.02 米，然后释放，这振子的振动周期是π/5 秒，最大加速度是 2 米/秒^2，最大速度是 0.2 米/秒，在最大位移的一半处的动能是 0.015 焦。

1764．有一弹簧振子，质量为 m，弹簧的倔强系数为 k，当它以振幅A作简谐振动时，具有的能量为$\frac{1}{2}kA^2$。它离开平衡位置的距离为$\frac{A}{4}$时，势能为$\frac{1}{32}kA^2$，动能为$\frac{15}{32}kA^2$，速度为$\sqrt{\frac{15k}{16m}}\cdot A$，振子获得的最大的速度为$\sqrt{\frac{k}{m}}A$，在获得这一个速度的时刻，振子应在平衡位置。

1765．有两根倔强系数相等的弹簧分别系住质量为 m_1 和 m_2 的物体组

成两个水平方向的弹簧振子，当它们以相同的振幅作简谐振动时，两者的周期之比$T_1/T_2=\underline{\sqrt{m_1/m_2}}$，两者的能量的比$E_1/E_2=\underline{1/1}$，两者的最大速度的比$v_1/v_2=\underline{\sqrt{m_2/m_1}}$

1766．如图所示，在两端固定的水平光滑杆 BD 上，套一个质量为 m，可视为质点的小球。用轻弹簧将球和固定点 O 连接，可以组成一个振动系统。如果从 O 点到杆 BD 的垂直距离 OC 等于弹簧原长 L_0，弹簧的倔强系数为 k，则小球离开平衡位置的位移为 x 时，小球受到的回复力为$\underline{-k(1-\frac{L_0}{\sqrt{L_0^2+x_2}})x}$。如果将球移到距O点为$2L_0$的A点无初速释放，则球滑到C点时的速度为$\underline{\sqrt{\frac{k}{m}}L_0}$，加速度的大小为$\underline{0}$。这样的振动系统<u>不是</u>简谐振动。（填是，不是）

1767．单摆的摆长为 l，摆球质量为 m，在最高点时，摆线与竖直方向成α角，此时摆球所受的合力为 <u>mgsinα</u>，摆球所受向心力的大小是 <u>0</u>，摆球往返运动时，摆线上最大张力为<u>(3? 2cosα)mg。</u>

1768．有一个秒摆，摆球的质量为 0.04 千克，当摆球质量增加至 0.08 千克时，它的周期是 <u>2 秒</u>，当摆长增加 3 倍时，它的振动频率是 <u>0.25 赫</u>。

1769．地球半径约为火星半径的 2 倍，地球质量约为火星质量的 9 倍，在地球上和火星上摆长相同的两个单摆的周期的比为 <u>2∶3</u>。

1770．如图所示，摆长为 l 的单摆安置在倾角为α的光滑斜面上，设重力加速度为g，这个单摆的周期T等于$\underline{2\pi\sqrt{\frac{1}{g\sin\alpha}}}$。

1771．在光滑水平地面上有一辆小车，车上安装了一个摆长为 l 的单摆，当小车以加速度α向前加速运动时，如果当地重力加速度为 g，则单摆平衡位置的悬线和竖直方向的夹角为$tg^{-1}\frac{a}{g}$，单摆的周期为

$2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2+a^2}}}$。

选择题

1772．关于简谐振动，下列说法中错误的是

(a)回复力方向总指向平衡位置；

(b)做简谐振动的物体向平衡位置运动时，加速度越来越小，所以速度也越来越小；

(c)加速度和速度方向总是跟位移方向相反；

(d)速度方向有时跟位移方向相同，有时相反。

答(b)、(c)

1173．下列各种情况中是简谐振动的有

(a)织布机的梭子在两边冲力作用下往返运动；

(b)细线悬一个小球，小球在水平面上作匀速圆周运动；

(c)浮在水面的均匀矩形木块，用力将它部分按入水中，然后松手，

木块作上下浮动；

(d)浮在水面的木制圆锥体，锥顶向上在水中上、下浮动。

答(c)

1774．以下几种运动哪些是简谐振动？

(a)拍皮球时球的运动；

(b)一只小球在半径很大的光滑凹球面上来回滑动，且假设它经过的弧线很短；

(c)质点作匀速圆周运动时，它在直径上的投影点的运动；

(d)竖直悬挂的弹簧上挂一重物，在弹性限度内，将重物拉开一定距离，然后放手任其运动。

答(b)、(c)、(d)

1775．一个物体的初速度为 v_0，在一个恒力 F 作用下，它可能作

(a)匀变速直线运动； (b)抛体运动；

(c)匀速圆周运动； (d)简谐振动

答(a)、(b)

1776．作简谐振动的物体每次通过同一位置时，都具有相同的

(a)加速度； (b)动量；

(c)动能； (d)位移；

(e)回复力； (f)速度。

答(a)、(c)、(d)、(e)

1777．把一个物体和轻弹簧相连做成弹簧振子，使它沿水平方向作简谐振动，如图所示。O 点是平衡位置，A、B 点是它的运动路径上的两个端点。下述几种说法中正确的是

(a)在 A、B 点物体加速度最小，动能也最小；

(b)在 O 点物体的加速度最大，动能也最大；

(d)在 O 点物体的加速度最小，动能最大；

(d)上述三个答案都不对。

答(c)

1778．有一根很轻的弹簧，一端固定，另一端连一个物体，使该物体在光滑水平面上做简谐振动，物体在平衡位置时的弹性势能为 0，动能为 4 焦，在最大位移的一半处，动能的瞬时值为

(a)2 焦； (b)1 焦；

(c)$2\sqrt{2}$焦 (d)3焦。

答(d)

1779．小球 m 连着轻质弹簧，放在光滑水平面上，弹簧的另一端固定在墙上。O 点为它的平衡位置。把 m 拉到 A，OA=1 厘米，轻轻释放后，经 0.2 秒运动到 O 点。如果把球 m 拉到 A′，使 OA′=2 厘米，则释放后运动到 O 点所需的时间为

(a)0.2 秒； (b)0.4 秒；

(c)0.3 秒； (d)0.1 秒。

答(a)

1780．一个水平放置的弹簧振子，它的振子由两个粘连在一起的小球和一根轻弹簧组成。起振后由于粘合剂失效使两球分离，则后来的弹簧振子

(a)周期比原来大；　　(b)周期比原来小；

(c)周期和原来一样；　　(d)无法比较。

答(b)

1781．有一个倔强系数为 k_1 的弹簧系住一个物体，组成的弹簧振子周期为 T_0，如图(1)所示。如果用另一个长度相同的，倔强系数为 k_2 的弹簧，按下列情况连接

(1)系在物体另一侧如图(2)所示，则新的弹簧振子周期是

(a)$\sqrt{k_1+k_2}T_0$；　　(b)$\sqrt{k_2/k_1}T_0$；

(c)$\sqrt{\dfrac{k_1}{k_1+k_2}}T_0$；　　(d)$\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{k_2}}T_0$。

答(c)

(2)连在 k_1 和物体之间，如图(3)所示，则新的弹簧振子周期是[可供选择的答案同第(1)小题。]

答(d)

(3)和 k_1 并联再和物体相连，如图(4)所示，则新的弹簧振子的周期是[可供选择的答案同第(1)小题。]

答(c)

1782．有两个弹簧振子，振子质量 $m_2=8m_1$，弹簧的倔强系数 $k_2=2k_1$，在不受外力作用的情况下发生振动。(1)它们的振动周期 T_1 和 T_2 之比为

(a)1∶1　　(b)1∶2

(c)1∶4　　(d)1∶8

答(b)

(2)当两振子在振动过程中，具有的机械能相同时，它们通过平衡位置的速度 v_1 和 v_2 之比为

(a)1∶2；　　(b)2∶1；

(c)1∶$2\sqrt{2}$　　(d)$2\sqrt{2}$∶1。

答(d)

(3)当两振子以相同振幅作简谐振动时，它们的最大速度 v_{1max} 和 v_{2max} 之比为

(a)2∶1；　　(b)1∶2；

(c)$2\sqrt{2}$∶1；　　(d)1∶$2\sqrt{2}$。

答(a)

1783．实验室里有四根完全相同的弹簧和两个完全相同的小球，如果允许同学任意选取其中部分或全部器材组成一个弹簧振子。则

(1)可以获得最高的振动频率的方法是

(a)取一根弹簧系上一个小球；

(b)取四根弹簧串联系上一个小球；

(c)取四根弹簧串联系上两个固定在一起的小球；

(d)取四根弹簧并联系上一个小球；

(e)取二根弹簧并联系在一个小球的一端，另二根弹簧并联系在该小

球的另一端；

(f)取三根弹簧并联系在一个小球的一端，另一根弹簧系在该小球的另一端。

答(d)、(e)、(f)

(2)可以获得最低振动频率的方法是

[可供选择的答案同第(1)小题。]

答(c)

1784．在一个光滑水平的直槽内，放着一个质量是 m 的小球，小球两边各紧靠着一根弹簧，它们的倔强系数分别是 k_1 和 k_2，弹簧保持原长，另一端和其他物体固定。小球和弹簧并不连接。

当小球发生振动时，频率应该是

(a)$f=\dfrac{\sqrt{k_1k_2}}{\pi\sqrt{m}(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2})}$；　　(b)$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1}{m}}$；

(c)$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_2}{m}}$；　　(d)$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$。

如果小球和 k_1 系住，和 k_2 并不连接，则振动频率应该是

(a)$f=\dfrac{\sqrt{k_1k_2}}{\pi\sqrt{m}(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2})}$；

(b)$f=\dfrac{\sqrt{k_1(k_1+k_2)}}{\pi\sqrt{m}(\sqrt{k_1}+\sqrt{k_1+k_2})}$；

(c)$f=\dfrac{\sqrt{k_2(k_1+k_2)}}{\pi\sqrt{m}(\sqrt{k_1+k_2}+\sqrt{k_2})}$；

(d)$f=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$。

答(b)

1785．单摆振动达到其平衡位置时

(a)速度最大，势能最小，摆线张力最小；

(b)速度最小，势能最小，摆线张力最大；

(c)速度最大，势能最小，摆线张力最大；

(d)速度最大，势能最大，摆线张力最小。

答(c)

1786．有一个单摆，摆球质量为 m，摆长为 l，最大摆角为 α，摆动过程中摆球的最大速度为 v。摆动时，摆线张力最大值和最小值分别是

(a)$mg\sin\alpha$和$m(g+\frac{v^2}{t})$；

(b)$m(g+\frac{v^2}{l})$和$mg\cos\alpha$；

(c)$mg\sin\alpha$和$m(g-\frac{v^2}{l})$；

(d)$m(g-\frac{v^2}{l})$和$mg\cos\alpha$。

答(b)

1787．一单摆的摆球偏离到最大位移时正好遇到空中落下的雨滴，雨滴均匀附着在摆球表面，下列哪种说法正确？

(a)摆球经过平衡位置时速度要增大，周期也增大，振幅也增大；

(b)摆球经过平衡位置速度没有变化，周期减小，振幅也减小；

(c)摆球经过平衡位置时速度没有变化，周期也不变，振幅要增大；

(d)摆球经过平衡位置时速度要增大，周期不变，振幅要增大。

答(d)

1788．有两个单摆，它们的摆长 $l_1=4l_2$，质量 $m_1=2m_2$。如果它们以相同的摆角作简谐振动，则(1)它们的周期之比为

(a)$\sqrt{2}$∶1；　(b)2∶1；

(c)4∶1；　(d)8∶1。

答(b)

(2)它们的振幅之比为

[可供选择的答案同第(1)小题。]

答(c)

(3)它们的最大势能之比为

[可供选择的答案同第(1)小题。]

答(d)

(4)它们的最大速度之比为

[可供选择的答案同第(1)小题。]

答(b)

1789．火星的半径约为地球半径的一半，火星的质量约为地球质量的 1/9，在地球上周期都是 T 的单摆和弹簧振子，如果放到火星上去，则

(a)单摆和弹簧振子的周期都变为 3T/2；

(b)单摆的周期为 T，弹簧振子的周期为 2T/3；

(c)单摆的周期为 3T/2，弹簧振子的周期为 T；

(d)单摆和弹簧振子的周期都为 2T/3。

答(c)

1790．把一个在地球上准确的摆钟拿到月球上去，已知月球上的重力加速度为地球上的重力加速度的 1/6，则钟面指示的 1 小时，实际上将是

(a)6小时；　(b)$\sqrt{6}$小时；

(c)$\frac{1}{6}$小时；　(d)$\frac{\sqrt{6}}{6}$小时。

答(b)

1791．下列情况中，哪一个会使单摆的周期变大？

(a)将摆的振幅减为原来的一半；

(b)将摆从高山移到平地上；

(c)将摆从北极移到赤道；

(d)将摆放在向上加速的电梯中；

(e)用一个装满砂的漏斗和长细线做成一个单摆，在摆动时砂从漏斗中慢慢漏出；

(f)将摆的质量增大。

答(c)、(e)

1792．在如图所示的利用单摆测重力加速度值的实验中，如果测得 g 值偏大，可能产生系统误差的原因是

(a)取 L_2 为摆长；

(b)取 L_1 为摆长；

(c)测定周期（$\frac{时间}{全振动次数}$）时少算了一次全振动；

(d)测定周期（$\frac{时间}{全振动次数}$）时多算了一次全振动；

(e)摆球质量过大。

答(a)、(d)

1793．如图所示，A、B 两小球半径相同，但质量为 $m_B>m_A$，用长度相同的细绳分别悬起，静止时两球刚好相切于 C 点，且重心在同一水平面内。现如果把两球拉开，使 $\alpha>\beta$，然后同时释放。不考虑任何损耗及绳的长度变化，则 A、B 两球发生碰撞的作用点位置应该

(a)在 C 点的左侧；

(b)在 C 点的右侧；

(c)每次都在 C 点；

(d)若第一次在 C 点左侧，则第二次正好在 C 点；

(e)若第一次在 C 点，则第二次在 C 点右侧；

(f)无法确定。

答(c)

1794．长为 l 的单摆，周期为 T_0，如果在悬点 O 的正下方的 B 点固定一光滑钉子，$BO=\frac{1}{4}l$，使摆球A通过最低点向左摆动时，悬线被钉子挡住成为一个新的单摆。这样，单摆在振动过程中的周期将为

(a)$\frac{1}{4}(\sqrt{3}+2)T_0$； (b)$\frac{1}{2}(\sqrt{3}+2)T_0$；

(c)$(\sqrt{3}+1)T_0$； (d)$(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)T_0$

答(a)

1795．把竖直方向的弹簧振子和单摆放到匀加速上升的电梯里。

(1)弹簧振子的固有频率将

(a)增大；　　　　　　　　　(b)减小；

(c)不变；　　　　　　　　　(d)无法确定。

答(c)

(2)单摆的固有频率将

[可供选择的答案同第(1)小题。]

答(a)

1796．升降机内有一个摆长为 l 的单摆

(1)当升降机以速度 v 匀速上升时，单摆的周期为

(a)$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$；

(b)$2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$；

(c)$2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$；

(d)由于单摆不再作振动，不存在单摆周期

答(a)

可供选择的以下各小题答案全部同第(1)小题

(2)当升降机以加速度 a 匀加速上升时，单摆周期为

答(b)

(3)当升降机以加速度 a 匀减速上升时，单摆的周期为

答(c)

(4)当升降机以速度 v 匀速下降时，单摆的周期为

答(a)

(5)当升降机以加速度 a 匀加速下降时，单摆的周期为

答(c)

(6)当升降机以加速度 a 匀减速下降时，单摆的周期为

答(b)

(7)升降机以加速度 g 自由下落时，单摆周期为

答(d)

1797．倾角为α的光滑斜面上有一辆挂有单摆的小车，开始时单摆位于竖直位置当小车由静止状态释放后，发生的变化是

(a)小车以加速度 gsinα下滑,小球平衡位置到悬点的连线和竖直方向成α角，单摆周期变为$2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}}$；

(b)小车以加速度 gsinα下滑,小球平衡位置到悬点的连线和竖直方向成α角，单摆周期变为$2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$；

(c)小车以加速度 gcosα下滑,小球平衡位置到悬点的连线和竖直方向成$tg^{-1}\sin\alpha$，单摆周期变为$2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sin\alpha}}$；

(d)小车以加速度 gcosα下滑,小球平衡位置到悬点的连线和竖直方

向成$tg^{-1}\cos\alpha$，单摆周期变为$2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}}$；

答(b)

计算题

1798．四个乘客的总质量为 200 千克，当他们上了汽车后，使汽车弹簧压缩了 2 厘米。如果这时汽车的总负载为 1600 千克。并且把这系统作为简谐振子，求汽车的振动周期。(g 取 10 米/秒²)

[解答]弹簧的倔强系数

$$k=\frac{200\times10}{2\times10^{-2}}\text{牛/米}=10^5\text{牛/米},$$

可得 $$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1600}{10^5}}\text{秒}\approx0.794\text{秒。}$$

1799．一根弹簧秤的标尺 0~180 牛之间的长度为 9 厘米。一个物体悬在弹簧秤的下端，使物体作简谐振动，如果它的频率为 1.5 赫，问该物体的质量是多少？

[解答]

因为 $$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}},\quad k=\frac{F}{\Delta l},$$

所以 $$m=\frac{k}{4\pi^2f^2}$$

$$=\frac{180/0.09}{4\pi^2\cdot(1.5)^2}\text{千克}=22.5\text{千克。}$$

1800．两个弹簧具有相等的倔强系数，如果在它们的下端各悬挂一个物体，两个物体的质量比为 4∶1，如果它们都在竖直方向上作振动，振幅的比是 1∶2。试求两者的周期比及振动能量比。

[解答]由简谐振动的周期公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

可知周期和质量的平方根成正比，有

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{4m}{k}},\ T_2=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

所以 $$T_1:T_2=\sqrt{4m}:\sqrt{m}=2:1\text{。}$$

振动的总能量$E=\dfrac{1}{2}kA^2$，当k一定时，总能量E和振幅的平方面正比，

所以 $$E_1:E_2=A_1^2:A_2^2=1:4\text{。}$$

1801．一个小盘悬在螺旋弹簧的下端，如图所示。设在盘中没放砝码时的振动周期为 T_0，加上磕码 m_1 时的振动周期为 T_1，而改加质量未知的砝码 m 在盘内（砝码 m_1 取出）时的振动周期为 T，试求后一次所加砝码的质量 m。

[解答]设盘的质量为 m_0，根据简谐振动的周期公式可写出如下三个

关系式

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}} \qquad (1)$$

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_0+m_1}{k}} \qquad (2)$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m_0+m}{k}} \qquad (3)$$

式中的 k 为弹簧的倔强系数。

(2)式÷(1)式得

$$T_1=\sqrt{1+\frac{m_1}{m_0}}T_0 \qquad (4)$$

(3)式÷(1)式得

$$T=\sqrt{1+\frac{m}{m_0}}T_0 \qquad (5)$$

由(4)式和(5)式消去 m_0 得

$$T^2-T_0^2=(T_1^2-T_0^2)\frac{m}{m_1},$$

所以 $$m=\frac{T^2-T_0^2}{T_1^2-T_0^2}m_1。$$

1802．如图所示，一个质量未知的托盘悬挂在弹簧上，当盘上放质量为 m_1 的物体时，测得它的周期为 T_1。如果盘上放一质量为 m_2 的物体时，测得它的周期为 T_2。求弹簧的倔强系数。

[解答]设托盘的质量为 m，弹簧的倔强系数为 k。当盘上放质量为 m_1 的物体时，弹簧振子总质量为 m_1+m，其振动周期为

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m+m_1}{k}} \qquad (1)$$

当盘上放有质量为m_2物体时，盘和物体的总质量为 $m+m_2$。则振动周期为

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{m+m_2}{k}} \qquad (2)$$

解(1)、(2)式得

$$T_1^2-T_2^2=\frac{4\pi^2}{k}(m_1-m_2)$$

$$k=\frac{4\pi^2(m_1-m_2)}{T_1^2-T_2^2}。$$

1803．质量为 2 千克的物体，悬在弹簧的下端，使弹簧伸长 0.10 米，弹簧质量不计，如果这时再用力把物体向下拉动 0.10 米，当释放后物体振动周期和振幅各多少？

[分析]如图所示，设弹簧原长为 l_0，取竖直向下为坐标正方向，悬重物后弹簧伸长 x_1，这时物体处于平衡位置，如果再向下拉动物体，使

弹簧再伸长 x_2，这时物体受到弹簧的拉力 F=? $k(x_1+x_2)$，同时受到重力 $mg=kx_1$，物体受到的合力为

F 合=F 弹+mg

=? $k(x_1+x_2)+kx_1$=? kx_2。

如果取物体的平衡位置为坐标原点，上式中 kx_2 就是释放后的回复力。在振动过程中 x_2 随时间 t 而变化，作用在物体上的合力 $F_{合}$ 也随时间 t 而变化，方向指向悬重物后的平衡位置，所以这个振动系统满足作简谐振动的条件。

[解答]由 $mg=kx_1$ 求出倔强系数

$$k=\frac{mg}{x_1}。$$

代入周期公式得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{x_1}{g}}$$

$$=2\times3.14\times\sqrt{\frac{0.10}{9.8}}\text{秒}=0.63\text{秒},$$

这时振动的振幅 A=0.10 米。

1804．一根竖直悬挂、质量不计的弹簧，在 30 牛的力作用下伸长了 0.10 米。

(1)将一重物悬在弹簧下端，如果测得振动周期为 $\frac{\pi}{5}$ 秒，则物体的重力是多少？

(2)当物体在平衡位置的下方 0.02 米，并向上运动时，弹簧作用在物体上的力如何？

[解答]　(1)由简谐振动周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，

得物体的质量　$m=\frac{kT^2}{4\pi^2}$，

倔强系数　$k=\frac{F}{x_1}$。

所以　$m=\frac{F\cdot T^2}{4\pi^2x^1}=\frac{30\times\frac{3.14^2}{25}}{4\times3.14^2\times0.10}$ 千克

$=3$ 千克，

$$G=3.0\times9.8\text{牛}=29.4\text{牛}。$$

(2)无论向何方运动，合力都指向平衡位置，这个合力的大小就是 $kx_2=\frac{30}{0.1}\times0.02\text{牛}=6\text{牛}$。

所以　F'? $mg=kx_2$，

$F'=mg+kx_2=(3.0\times9.8+6)$牛

=35.4 牛，

这就是弹簧作用在物体上的弹力，方向向上。

1805．图中杆 AB 质量不计，可绕 A 点自由转动，AC=a，AB=b，C 点处有一根弹性系数为 k_1 的弹簧，挂一个质量为 m 的物体，B 点则通过弹性系数为 k_2 的弹簧悬在固定点，求物体振动时的频率为多大？

[解答]弹簧 1 在质量为 m 物体的作用下伸长为

$$x_1=\frac{mg}{k_1}$$

弹簧2在杠杆AB的作用下伸长量为$\frac{mga}{k_2 b}$，因此C点下降的距离

$$x_2=\frac{a}{b}(\frac{mga}{k_2 b})=\frac{a^2 mg}{b^2 k_2}。$$

重物下降了(x_1+x_2)，

$$x_1+x_2=\frac{mg}{k_1}+\frac{a^2 mg}{b^2 k_2}$$

$$=(\frac{1}{k_1}+\frac{a^2}{b^2 k_2})mg=\frac{a^2 k_1+b^2 k_2}{b^2 k_1 k_2}mg,$$

所以 $$mg=\frac{b^2 k_1 k_2}{a^2 k_1+b^2 k_2}(x_1+x_2)=k(x_1+x_2)。$$

式中的$k=\frac{b^2 k_1 k_2}{a^2 k_1+b^2 k_2}$为等效倔强系数，根据简谐振动的周期公式得$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{b^2 k_1 k_2}{m(a^2 k_1+b^2 k_2)}}$，

所以$f=\frac{b}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(a^2 k_1+b^2 k_2)}}$。

1806．一根倔强系数为 k 的弹簧，下端固定在地面上，上端放一个质量为 m 的重物，重物使弹簧压缩的长度 b=9.8 厘米，如图所示。如果给物体一个向下的瞬时冲击力，使它以 1 米/秒的速度向下运动，当物体上下振动时它的运动规律如何？求出振动的频率和振幅。

[分析]当重物放在弹簧上时，弹簧压缩了b，可直接求得$k=\frac{mg}{b}$。取这一位置为坐标原点，它也是振动中的平衡位置，设 x 轴正方向向下。当物体的位移为 x 时，求出物体所受弹力和重力的合力，根据力的变化规律可知它是否是简谐振动。

[解答]由所给条件可求得合力

F=mg? k(b+0x)，

因为 $k=\frac{mg}{b}$，

所以 $F=mg-(\frac{mg}{b}\cdot b+\frac{mg}{b}x)$

$=-\frac{mg}{b}x$。

上式满足简谐振动的条件，因此物体作简谐振动。

由周期公式 $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，

得 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{mg}{b}/m}=\sqrt{\frac{g}{b}}$

$=\sqrt{\frac{9.8}{0.098}}$弧度/秒$=10$弧度/秒。

频率 $f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{10}{2\times3.14}$赫$=1.59$赫。

因为 t=0 时 x=0，v_0=1 米/秒，由速度公式 $v_0=A\omega$得

$$A=\frac{v_0}{\omega}=\frac{1}{10}\text{米}=0.1\text{米}。$$

1807．如图所示弹簧振子，m=3 千克，k_1=200 牛/米，k_2=100 牛/米。求弹簧振子的振动周期。

[分析]取向右方向为位移正方向，使物体 m 从平衡位置向右移动 x，弹簧 k_1 拉长了 x，产生回复力 F_1=? k_1x；弹簧 k_2 压缩了 x，产生回复力 F_2=? k_2x。其合力如图所示，求出等效的倔强系数，再求其周期。

[解答]因为 $F_合=F_1+F_2$=? $(k_1+k_2)x$，

所以 $k=k_1+k_2$。

将 k 代入振动周期公式得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{l}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{3}{200+100}}\text{秒}=0.628\text{秒}。$$

1808．用一根倔强系数为 k 的轻质弹簧，将两个质量分别为 m_1 和 m_2 的木块连结起来，放在光滑的水平桌面上。再用细线将木块拉紧使弹簧处于压缩状态，而后将线烧断，如果木块作简谐振动，试求木块振动周期。

[分析]物体 m_1 和 m_2 由弹簧连成一体，m_1 和 m_2 跟桌面间没有摩擦，因此 m_1 和 m_2 作振动时系统的质心位置不变。设体系的质心为 O，木块 m_1 右侧面的平衡位置为 A，离 O 点为 L_1；木块 m_2 左侧面的平衡位置为 B，离 O 点为 L_2；而 $L_1+L_2=L$。如果把质心作为坐标原点，则在这坐标系中质心的坐标为零，因此有

$$m_1L_1=m_2L_2 \quad (1)$$

当木块 m_1、m_2 受细线拉紧时，弹簧处于压缩状态，m_1 离平衡位置 A

为 x_0：m，离平衡位置 B 为 y_0。它们相对于系统质心 O 的关系为

$$m_1(L_1? \ x_0)=m_2(L_2? \ y_0) \qquad (2)$$

弹簧压缩量$\triangle L=x_0+y_0$，根据胡克定律 F=? kx 可解得 F 和 x_0 及 y_0 的关系，再由简谐振动周期公式求得 m_1 和 m_2 的振动周期。

[解答]由分析知质心 O 位置不变，平衡位置 A、B 的位置不变，并由(1)和(2)式解得

$$m_1x_0=m_2y_0,$$

弹簧的压缩量

$$\Delta L = x_0 + y_0 = x_0 + \frac{m_1}{m_2}x_0 = \frac{m_1+m_2}{m_2}x_0,$$

弹簧因压缩而作用在木块 m_1 上的力大小为

$$F_1 = k(\Delta L) = k\frac{m_1+m_2}{m_2}x_0,$$

$$= k_1x_0,$$

式中$k_1 = k\frac{m_1+m_2}{m_2}$，为一个新的常数，由简谐振动条件可知

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}},$$

振动周期$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}$。

木块 m_2 受到弹簧的弹力 F_2 和 F_1 大小相等方向相反，同理可得

$$F_2=k(\triangle L)=k(x_0+y_0)$$

$$= k\frac{m_1+m_2}{m_1}y_0 = k_2y_0。$$

式中$k_2 = k\frac{m_1+m_2}{m_1}$为一个常数，可以得

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}},$$

所以 m_2 的振动周期

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}。$$

由上面的结果可知：木块 m_1 和 m_2 属于同一个振动系统，它们的振动周期均为

$$2\pi\sqrt{\frac{m_1m_2}{k(m_1+m_2)}}。$$

1809．用两根倔强系数都为 k 且长度相同的弹簧，把两个质量都为 m 的木块 A 和 B 连结起来，放在光滑的水平面上，如图所示。再用一根细线将两木块拉紧并使弹簧处于压缩状态，而后将线烧断，求木块振动的周期。

[分析]由题设条件知木块和水平面间无摩擦，系统的质心恰在中点O，在振动中位置不变。弹簧没有形变时A、B处在位置a和b，a和b也分别为木块A、B的平衡位置。

A、B木块是完全对称的，只要分析研究其中之一即可。现取A木块进行研究。使A右移任意位移x，B也左移x，这时并联弹簧对A木块的弹力为F=?（2k)(2x)。所以木块A受到一个和位移大小成正比的回复力作用，A在平衡位置附近作简谐振动。根据简谐振动的周期公式可求得A物体的周期。

[解答]由分析知木块在平衡位置a附近振动，它受到的回复力为

F=? 4kx，

其等效倔强系数为K=4k。由简谐振动周期公式得

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}。$$

木块B和A相同，故它的振动周期$T_B=T_A$，如果木块A的振幅为L时，木块B的振幅也为L，A、B两物体和两根弹簧组成的振动系统的振幅就等于2L。

1810．弹簧A、B、C水平地联接质量为m的物体D，物体D放在光滑的水平面上，弹簧A、C各有一端固定在壁上，如图(a)所示。如果三个弹簧的质量以及水平面和物体D间摩擦都可不计，当 D处于平衡位置时，弹簧都处于自由状态。试求：

(1)当弹簧A、B、C的倔强系数都等于k，

(a)加外力使物体从静止位置向右移动x_0距离时,作用在物体上的弹力为多少？在移动过程中弹力所作的功又为多少？

(b)除去外力，物体以$|x_0|$为振幅作简谐振动，它通过原点的速度大小为多少？

(c)除去外力后物体振动的周期多少？

(2)弹簧A、B、C的倔强系数分别为k、2k、3k时

(a)加外力使物体从静止位置向右移动x_0时，弹簧A、B连结点从其静止位置移动了多少？

(b)除去外力，这时物体振动周期为多少？

(3)如果把弹簧C也移到左边使弹簧A、B串联又与弹簧C并联，如731页中图(b)所示。把物体D右移x_0，则在除去外力后

(a)振动系统的总能量为多少？

(b)振动系统的振动周期为多大？

[解答](1)取水平向右为x轴的正方向，以物体D静止时的位置为原点，这位置也是系统的平衡位置。

(a)当物体向右任意移动x_0时，弹簧A、B共伸长x_0，由于弹簧的倔强系数相等，因此每一根弹簧伸长了$\frac{1}{2}x_0$，而弹簧C被压缩了x_0，但它们对物体的作用力方向相同。作用在物体上的合力

$$F = -kx_0 - \frac{1}{2}kx_0 = -\frac{3}{2}kx_0，$$

如果把三个弹簧作为一个等效弹簧处理，则其倔强系数$K=\frac{3}{2}k$，上式可写为

$$F=?\ Kx_0。$$

弹力所作的功

$$F\cdot x_0=\frac{F}{2}x_0=-\frac{3}{4}kx_0^2。$$

(b)由简谐振动的速度公式 $v_{max}=\omega A$

得 $$v_{max}=\omega A=\sqrt{\frac{K}{m}}x_0,$$

所以 $$v=x_0\sqrt{\frac{3k}{2m}}。$$

或由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{3}{4}kx_0^2,$$

$$v=x_0\sqrt{\frac{3k}{2m}}。$$

(c)除去外力后，物体作简谐振动，其周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}=2\pi\sqrt{\frac{2m}{3k}}。$$

(2)(a)当物体 D 向右移动 x_0 时，假定弹簧 A 伸长 x_1，弹簧 B 伸长 x_2，因弹簧 A、B 间相互作用力相等，即

$$kx_1=2kx_2。$$

$$\frac{x_1}{x_2}=2。$$

所以 A、B 弹簧的伸长比是 2∶1，弹簧 A、B 连结点从静止点右移的距离就是弹簧A的伸长，即弹簧A的伸长为$\frac{2}{3}x_0$。

(b)由于三个弹簧的倔强系数不等，故它们的等效倔强系数应由下式决定，即

$$F'=?\ K'x_0$$

$$=-\frac{2}{3}kx_0-3kx_0-=-\frac{11}{3}kx_0。$$

$$K'=\frac{11}{3}k。$$

这时振动周期 T′应为

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{m}{K'}}=2\pi\sqrt{\frac{3m}{11k}}。$$

(3)当弹簧 C 移到左边，设 C 的原长等于弹簧 A、B 原长的和，如图(b)所示。m 右移 x_0 时，弹簧 A、B 产生的弹力向左，弹簧 C 的弹力也向左，不过在第(2)小题中 C 处于压缩状态，而现在为拉伸状态，因此物体 D 受的合力和第(2)小题相同，即

$$F'' = F' = ?\ K''x_0$$

$$= -\frac{11}{3}kx.$$

$$K'' = K' = \frac{11}{3}k\text{。}$$

(a)弹簧振子振动总能量等于最大的弹性势能，即

$$E = \frac{1}{2}K''x_0^2$$

$$= \frac{11}{6}kx_0^2$$

(b)振动系统的周期也和第(2)小题相同，即

$$T'' = T' = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{11k}}\text{。}$$

1811．两只原长都为 0.20 米的弹簧，具有不同的倔强系数 k_1 和 k_2，在光滑水平面上，将这两个弹簧连接在质量为 m 的物块两侧面上。两支柱 P_1 和 P_2 距两弹簧外端为 10 厘米，如图所示。设 k_1=1 牛/米，k_2=3 牛/米，m=0.1 千克。

(1)如果把每只弹簧外端固定在 P_1 和 P_2 上，则物块将到达一定的位置。求这时每只弹簧的长度。

(2)在第(1)小题的条件下使物块离开平衡位置到达中心点，然后释放，求物块振动的周期。

(3)当物块通过平衡位置时，有一个质量为 0.10 千克的油灰团竖直地落在物体上并与它粘在一起，求新的周期和振幅；

(4)如果物块运动到最大位移处，油灰团竖直落在物块上，则周期和振幅各是多少？

(5)讨论在第(3)、(4)小题中机械能损失情况。

[解答](1)两弹簧原长均为 0.20 米，当外侧端点都固定在支柱 P_1 和 P_2 上时，设

k_1 弹簧长为 l_1，

k_2 弹簧长为 l_2，

由题意知 l_1+l_2=0.60 米(1)

k_1 弹簧的伸长量为 l_1? 0.20 米；

k_2 弹簧的伸长量为 l_2? 0.20 米。

由于物体 m 处于平衡状态，两弹簧对物体的弹力是一对平衡力，所以

$k_1(l_1?\ 0.20$ 米$)=k_2(l_2?\ 0.20$ 米$)$　　　　(2)

由(1)、(2)两式解得 l_1=0.35 米；

l_2=0.25 米。

(2)系统等效的倔强系数 $k=k_1+k_2$，故系统振动的周期应为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}=2\pi\sqrt{\frac{0.10}{1+3}}\text{秒}$$

$$=0.99\text{秒}$$

(3)设油灰团的质量为 m′，发生碰撞后物块的质量增加为 m+m′，故新的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m+m'}{k_1+k_2}}=2\pi\sqrt{\frac{0.1+0.1}{1+3}}\text{秒},$$

$$\approx 1.4\text{秒。}$$

油灰和物块发生完全非弹性碰撞，碰撞前物块在平衡位置的速度为 $v_{max}=\omega_A$，

即 $$v_{max}=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\cdot A\text{。} \qquad (2)$$

油灰在下落过程中水平方向的速度为零，且无外力作用，因此在这个方向上动量守恒。

由 $(m+m')v'_{max}=mv_{max}+m'v'=mv_{max}$

得 $$v'_{max}=\frac{m}{m+m'}v_{max} \qquad (2)$$

碰撞后，在平衡位置的速度和振幅关系为 $v'_{max}=\omega'A'$，

可得 $$A'=\sqrt{\frac{m+m'}{k_1+k_2}}v'_{max} \qquad (3)$$

解(1)、(2)、(3)式得

$$A'=\sqrt{\frac{m+m'}{k_1+k_2}}\cdot\frac{m}{m+m'}\cdot\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}\cdot A$$

$$=\sqrt{\frac{m}{m+m'}}A\text{。}$$

因为 A=(0.30? 0.25)米=0.05 米，

所以 $$A'=(\sqrt{\frac{0.1}{0.1+0.1}})\cdot(0..05)\text{米}$$

$$=0.035\text{米。}$$

(4)当物块在最大位移时，油灰团下落，由于它们在水平方向的速度均等于零，故碰撞后在这个方向上速度仍为零，这时物块的质量增加，因此它的周期增大为 T’，

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{m+m'}{k_1+k_2}}=1.4\text{秒},$$

而它的振幅不变，仍为 0.05 米。

(5)碰撞中，油灰竖直方向运动的动能全部损失。水平方向运动的动能在第(4)小题无损失；在第(3)小题中系统水平方向运动的动能有损失，设损失为△E.,

则
$$\Delta E=\frac{1}{2}mv_{max}^2-\frac{1}{2}(m+m')v'_{max}$$
$$=\frac{1}{2}(k_1+k_2)A^2-\frac{1}{2}(k_1+k_2)A'^2$$
$$=\frac{1}{2}(k_1+k_2)(A^2-A'^2)$$
$$=\frac{1}{2}(1+3)(0.05^2-0.035^2)\text{焦}$$
$$=2.55\times10^{-3}\text{焦。}$$

1812．在 g=9.80 米/秒 ^{2} 的地方有一只单摆，振动周期为 1 秒，求摆长。

[解答]因
$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$
所以
$$l=\frac{gT^2}{4\pi^2}=\frac{9.80\times1^2}{4\times3.14^2}\text{米}=0.248\text{米。}$$

1813．用摆长为 70.0 厘米的单摆测量某处重力加速度，使单摆做小振幅的振动，测得振动 100 次所用时间为 168.0 秒。试求重力加速度是多少？

[解答]由单摆振动的周期公式
$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$
得
$$g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}\text{。}$$
又因
$$T=\frac{168.0}{100}\text{秒，}$$
代入后得
$$g=\frac{4\times(3.14)^2\times0.70}{(1.68)^2}\text{米/秒}^2$$
$$=9.78\text{米/秒}^2\text{。}$$

1814．秒摆的摆长为 1.00 米，当摆长改为 0.81 米时，振动周期为多少？要使周期变为 4 秒时，摆长应是多少？

[解答]凡秒摆的周期必定是 2 秒，即 T_0=2 秒，又知 l_0=1.00 米，l=0.81 米。由周期公式可求得
$$\frac{T}{T_0}=\sqrt{\frac{l}{l_0}}=\sqrt{\frac{0.81}{1.00}}=0.90,$$
$$T=0\quad 90T_0=1.8\text{秒。}$$
又因为
$$\frac{l''}{l_0}=(\frac{T'}{T_0})^2=(\frac{4}{2})^2=4,$$
所以
$$l'=4l_0=4\text{米}$$

1815．如图所示，有一个双线摆，它是在水平天花板上用两根等长细线挂一个小球而构成的，线的质量不计，小球直径和摆线长相比也不计。设 l 为摆线长，摆线和水平天花板间夹角为 60°，当小球垂直于纸

面作简谐振动时，小球振动的周期为多少？

[分析]双线摆组成一个等边三角形，AO 线和 BO 线作用在小球上的力大小相等，它们的合力方向沿 OO′，使摆在垂直于纸面方向作小角度简谐振动，可以把双线摆看作摆长为 OO′的一个单摆。

[解答]等效单摆的摆长

$$l'=OO'=l\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}l,$$

周期 $$T'=2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2g}l}=5\quad 84\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

1816．如图所示的一只吊灯 A。如果灯的大小和线的长度相比是很小的。B、C 两点是在水平的天花板上，OB 和天花板间的夹角为α，而且 OB=OA=l。当吊灯在垂直于纸面的平面内作小振幅的振动时，振动频率应多大？

[分析]当吊灯静止时，作用于 O 点的三个力平衡，线 OB 和线 OC 作用在 O 点的合力沿 OO′，因此可以用等效的线段 OO′来代替 OB 和 OC。这样吊灯作小振幅振动时，其有效摆长应等于 AO+OO′。

[解答]

等效摆长 L=OA+OO′=l+lsinα

=l(l+sinα)。

因为 $$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

所以 $$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l(1+\sin\alpha)}}。$$

1817．一根绳子吊一重锤，可看作单摆，用实验测定它的振动周期 T。从悬点到重锤重心的长度为 88.7 厘米，来回摆动 100 次需 3 分 9.2 秒。设长度误差为±1 毫米，时间误差为±0.2 秒。试求重力加速度 g 的范围。

[解答]t=10T=3 分 9.2 秒=189.2 秒，

T=1.892 秒。

由单摆周期公式得

$$g=4\pi^2\frac{l}{T^2}=\frac{4\times(3.1416)^2\times 0.887}{(1.892)^2}\text{米}/\text{秒}^2$$

$$=9.7822\text{米}/\text{秒}^2。$$

$\Delta l=\pm 1.0\times 10^{-3}$米，相对误差 $\frac{\Delta l}{l}=1.0\times 10^{-3}/0.887=0.113\times 10^{-2}$。

周期T的相对误差 $\frac{\Delta T}{T}=\frac{\Delta t}{t}=\frac{0.20}{189.2}=0.106\times 10^{-2}$。

g 的相对误差是 l 的相对误差和 T 的相对误差的二倍之和。所以 g

的相对误差为(0.113+0.106×2)×10? ^{2}=0.325×10? ^{2}，g 的绝对误差△

g=9.782×0.325×10? ^{2} 米/秒 ^{2}=3.18×10^2 米/秒 ^{2}。

得　　　　　　　　　　g=9.782±0.032 米/秒 ^{2}。

1818．有一摆钟，在走时准确时，摆的振动周期为 2 秒，现在它在一昼夜快 5 分钟，为使它走得准确，应该使它的摆长增加原来长度的多少倍？

[解答]走时准确时摆钟的振动周期 T=2 秒，每昼夜振动的次数 N=24 $\times 60\times 60\times\frac{1}{2}$次 $=43200$次。如果摆钟在一昼夜内快了5分钟，则每昼夜振动的效数$N'=(24\times 60\times 60\times\frac{1}{2}+5\times 60\times\frac{1}{2})$次，它的周期为

$$T'=\frac{24\times 60\times 60}{24\times 60\times 60\times\frac{1}{2}+5\times 60\times\frac{1}{2}}\text{秒}=1.99308\text{秒}$$

根据周期公式$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，得准确钟的摆长

$$l=\frac{T^2}{4\pi^2}g,$$

快5分钟的钟的摆长$l'=\frac{T'^2}{4\pi^2}g$。

应使钟的摆长增加量为原来长度的倍数

$$\frac{l-l'}{l}=\frac{T^2-T'^2}{T^2}=1-\frac{T'^2}{T^2}$$

$$=1-(\frac{1.993}{2})^2=0.007。$$

1819．在北京和上海的重力加速度约为 9.801 米/秒 ^{2} 和 9.795 米/秒 ^{2}，把在北京周期为 2 秒的准确的摆钟拿到上海，它是快了还是慢了，一昼夜差多少秒？怎样调整？

[解答]变慢了。因为上海的重力加速度 g_2 小于北京的重力加速度 g_1，所以摆钟在上海的周期 T_2 大于在北京的周期 T_1。由于周期变大，摆钟在一昼夜内的振动次数减少，钟就走得慢了。

设一昼夜时间 24×3600 秒为 t，

在北京一昼夜振动的效数$N_1=\frac{t}{T_1}$,

在上海一昼夜振动的效数$N_2=\frac{t}{T_2}$。

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}},$$

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}},$$

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{\sqrt{g_2}}{\sqrt{g_1}}，T_2=\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}\cdot T_1。$$

$$\Delta N=N_1-N_2=\frac{t}{T_1}-\frac{t}{T_2}=\frac{t}{T_1}-\frac{t}{T_1}\cdot\sqrt{\frac{g_2}{g_1}}=\frac{t}{T_1}(1-\sqrt{\frac{g_2}{g_1}})$$

$$=\frac{24\times3600}{2}(1-\sqrt{\frac{9.795}{9.801}})\text{次}=13.22\text{次}。$$

每昼夜走慢时间

$$\Delta t=\Delta N\cdot T_1=\frac{t}{T_1}(1-\sqrt{\frac{g_2}{g_1}})\cdot T_1=t(1-\sqrt{\frac{g_2}{g_1}})$$

$$=24\times3600\times(1-\sqrt{\frac{9.795}{9.801}})\text{秒}=26.44\text{秒}。$$

为了使在上海时的摆钟周期也等于 2 秒，必须缩短它的摆长。

在北京时的摆长$l_1=\frac{T_1^2g_1}{4\pi^2}=\frac{4\times9.801}{4\times9.87}$米

$=0.9930$米。

在上海时的摆长$l_2=\frac{T_2^2g_2}{4\pi^2}=\frac{4\times9.795}{4\times9.87}$米

$=0.9924$米。

在上海调整后的摆长应为 0.9924 米，它比在北京时缩短了△$l=l_1$？ l_2=0.0006 米=0.6 毫米。

1820．把地球上的一个秒摆拿到月球上去，如果这个秒摆是一个单摆，它的振动周期为多大？已知地球质量 $M_{地}=5.98\times10^{24}$千克；半径 $R_{地}=6.4\times10^{6}$米，月球质量 $M_{月}=7.34\times10^{22}$千克；半径 $R_{月}=1.74\times10^{6}$米。

[解答]由单摆周期公式可知

$$T_{地}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{地}}}，T_{月}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g_{月}}},$$

所以 $$\frac{T_{地}}{T_{月}}=\sqrt{\frac{g_{月}}{g_{地}}}，T_{月}=T_{\pm}\sqrt{\frac{g_{\pm}}{g_{月}}}。$$

根据万有引力定律可得

$$mg_{地}=G\frac{mM_{地}}{R^2{}_{地}}，$$

$$mg_{月}=G\frac{mM_{月}}{R^2{}_{月}}，$$

$$\frac{g_{地}}{g_{月}}=\frac{M_{地}R^2{}_{月}}{M_{月}R^2{}_{土}}。$$

$$T_{月}=T_{地}\sqrt{\frac{g_{地}}{g_{月}}}=T_{地}\sqrt{\frac{M_{地}R^2{}_{月}}{M_{月}R^2{}_{地}}}$$

$$=2\times\sqrt{\frac{5.98\times10^{24}\times(1.74\times10^6)^2}{7.34\times10^{22}\times(6.4\times10^6)^2}}\text{秒}\approx4.91\text{秒}。$$

1821．在北极的地面上有一单摆，周期为 T，如果使单摆升高到北极上空，离地面的距离为地球半径的千分之一，单摆周期变为多大？

[分析]在北极上空地球自转的影响可以忽略；地球对单摆引力减小而使重力加速度减小。根据单摆周期公式可求得该处的周期 T′。

[解答]根据单摆周期公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}，\ T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}，$$

得
$$T'=\sqrt{\frac{g}{g'}}T。\qquad(1)$$

又
$$mg=G\frac{M\cdot m}{R^2}，$$

$$mg'=G\frac{M\cdot m}{(R+\frac{R}{1000})^2}，$$

得
$$\frac{g}{g'}=(1+\frac{1}{1000})^2。\qquad(2)$$

将(2)式代入(1)式

得
$$T'=(1+\frac{1}{1000})T=1.001T。$$

1822．摆钟在山脚处的摆动周期是 1 秒，把这摆钟搬到山顶上，一昼夜慢了 20 秒，如果摆长不变，山脚处离地球中心的距离为 6400 千米，摆钟可看作单摆，求山顶离山脚的高度 h。

[分析]把钟从山脚下搬到山顶处，钟的走时不准，说明钟摆的周期发生变化。设摆长变化不计，地球自转对重力加速度影响也不计，则摆的周期变化是由于山顶和山脚重力加速度不同而引起。造成重力加速度不同是因为山顶和山脚和地心距离不等。

一昼夜的时间是 86400 秒，因为这只钟摆在山脚下的周期为 1 秒，所以一昼夜摆动 86400 次。

在山顶上一昼夜里少摆动 20 次，也就是只摆动了 86380 次。

设钟摆在山脚处的周期为 T_1=1 秒，重力加速度为 g_1，在山顶处的周

期为 T_2，重力加速度为 g_2，由题设条件可求得 T_2。

根据万有引力定律和周期公式求得山顶的高度 h。

[解答]由分析知

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{\frac{4320}{4319}}{1}=\frac{4320}{4319},$$

设摆锤的质量为 m，在山脚的重力为 mg_1，在山顶的重力为 mg_2，由万有引力定律得

$$mg_1=G\frac{Mm}{R^2};$$

$$mg_2=G\frac{Mm}{(R+h)^2}。$$

$$g_1=G\frac{M}{R^2};$$

$$g_2=G\frac{M}{(R+h)^2}。$$

所以
$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}}}=\sqrt{\frac{g_1}{g_2}}$$

$$=\frac{R+h}{R}。$$

解得
$$h=(\frac{T_2}{T_1}-1)R$$

$$=(\frac{4320}{4319}-1)\times 6400\times 10^3\text{米}=1481.6\text{米}。$$

1823．有一单摆在山顶和在矿井底部的振动周期相同。求山顶高度 H 和矿井深度 h 之间的关系。

[解法一]如果在山顶和矿井底部的周期相同，由周期公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

得
$$g_H=g_h,$$

式中 g_H，g_h 分别为山顶和井底的重力加速度。

设摆锤质量为 m，地球质量为 M，半径为 $R_地$，根据万有引力定律可得

$$mg_H=G\frac{mM_地}{(R_地+H)^2},$$

$$g_H=G\frac{M_地}{(R_地+H)^2}, \qquad (1)$$

设地球是密度为 ρ 的均匀球体，则

$M_{地}=\frac{4}{3}\pi\rho R^{3}_{地}$，代入(1)式得

$$g_{H}=\frac{4}{3}\pi\rho G\frac{R^{3}_{地}}{(R_{地}+H)^{2}} \qquad (2)$$

当摆锤位于深度为 h 的井底时，它只受到在半径为 R 地? h 的球面内的质量的吸引力，因为在厚度为 h 的球壳层中各相对部分质点对摆的引力相互抵消。

设 h 深度以内地球的质量为 M′地，则有

$$mg_{h}=G\frac{mM'_{地}}{(R_{地}-h)^{2}}，$$

因为

$$M'_{地}=\frac{4}{3}\pi\rho(R_{地}-h)^{3}，$$

所以

$$g_{h}=\frac{4}{3}\pi\rho G(R_{地}-h)(3)$$

因为 $g_{H}=g_{h}$，由(2)、(3)式可得

$$\frac{4}{3}\pi\rho G\frac{R^{3}_{地}}{(R_{地}+H)^{2}}=\frac{4}{3}\pi\rho G(R_{地}-h)，$$

$$h=R_{地}-\frac{R^{3}_{地}}{(R_{地}+H)^{2}}。$$

为了进一步讨论，把上式改写为

$$h=R_{地}\left[1-\frac{1}{(1+\frac{H}{R_{地}})^{2}}\right]。$$

当$H<<R_{地}$时，可略去$(\frac{H}{R_{地}})$的高次项，则

$$h\approx R_{地}\left[1-\frac{1}{1+\frac{2H}{R_{地}}}\right]=\frac{R_{地}\cdot 2H}{R_{地}+2H}，$$

因为 R 地≈R 地+2H，则得

$$h=2H$$

[解法二] $mg_0 = G\frac{Mm}{R^2}$，$g_0 = G\frac{M}{R^2}$，

$$mg_h = G\frac{M'm}{(R-h)^2} = \frac{Gm}{(R-h)^2}\cdot\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^2}\cdot\frac{4}{3}\pi(R-h)^2 = G\frac{Mm}{R^2}(R-h)，$$

所以 $$g_h = g_0\cdot\frac{R-h}{R} = g_0(1-\frac{h}{R})。$$

而 $$g_H = G\frac{M}{(R+H)^2} = \frac{GM}{R^2}\cdot\frac{1}{(1+\frac{H}{R})^2} \approx g_0(1-2\frac{H}{R})，$$

由$g_h = g_H$得 $$1-\frac{h}{R} = 1-2\frac{H}{R}，$$

即 $$h = 2H。$$

1824．两小球分别悬在长度都是 l 的两根线上。将第一个球沿竖直方向向上举到悬点，而将第二个球移开平衡位置，使它能作简谐振动。如果把两球同时放开，问哪个球先到达平衡位置？

[解答]第一个球作自由落体运动，下落 l 距离所需的时间为

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} = 1.41\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

第二个球作简谐振动，从最大位移回到平衡位置所需的时间为周期的四分之一。即

$$t_2 = \frac{T}{4} = \frac{1}{4}\times 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

$$= 1.57\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

$t_2 > t_1$，所以竖直下落的小球先到达平衡位置。

1825．悬挂小球的细线长 2 米，偏离竖直方向 4°，如果小球作无阻尼的简谐振动。先用振动的知识求小球通过平衡位置时的速度值，再用机械能守恒定律求此速度值。

[解答]球很小时，振动周期$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2.8$秒。由于摆角θ很小，振幅 A=lsinθ=2×sin4°米=0.14 米。

当球经过平衡位置时速度最大，可得

$$v_m = \omega A = \frac{2\pi}{T}A$$

$$= \frac{2\times\pi}{2.8}\times 0.14\text{米/秒} = 0.31\text{米/秒}。$$

再由机械能守恒定律得

$$mgh = \frac{mv^2}{2}，$$

式中 h 为球上升的高度，h=l(1? cosθ)，

所以 $v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}$

$$=\sqrt{2\times 9.8\times 2(1-\cos 4°)}\text{米}/\text{秒}=0.31\text{米}/\text{秒}。$$

1826．小立方体在竖直平面内，沿球形碗底作无摩擦的微小振动。如果碗以 g/3 的加速度下落，碗的内径 R 远大于立方体的边长，求小立方体振动的周期 T′和碗静止时小立方体振动周期 T 的比。

[解答]小立方体在碗内作无摩擦微小振动可视为单摆的振动，半径 R 就是单摆的摆长。碗静止时周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}。$$

当碗以 $g/3$ 的加速度向下运动时，此时单摆系统的 $g'=g-\frac{g}{3}=\frac{2}{3}g$。

所以此时小立方体的振动周期

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}=2\pi\sqrt{R/\frac{2}{3}g}=2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}},$$

可得
$$T':T=2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}:2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$=\sqrt{3}:\sqrt{2}。$$

1827．有一个摆长为 l 的单摆，它的摆球质量为 m，从和竖直方向成 θ 角的位置无初速开始运动。重力加速度为 g，试求：

(1)摆球经过最低位置时的速率是多少？

(2)在 θ 很小，摆球运动可看作简谐振动的情况下，从开始运动到摆球第一次通过最低位置，需要多少时间？

[解答](1)根据机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}mv^2=mgl(1-\cos\theta),$$

得
$$v=\sqrt{2gl(1-\cos\theta)}。$$

(2)当 θ 很小，摆球作简谐振动时，周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

从题设条件可知所需的时间为 $\frac{T}{4}$，

$$t=\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

1828．一个小弹丸水平射入一个单摆的摆球，摆球原来静止，弹丸射入摆球后和摆球一起作简谐振动。设振幅为 10 厘米，周期为 3 秒，摆球质量和小弹丸质量之比为 5∶1。求小弹丸射入摆球前的速度值。

[解答]根据动量守恒定律有

$$mv=(m+M)V$$

$$v=\frac{m+M}{m}\cdot V=\frac{m+5m}{m}\cdot V=6V \qquad (1)$$

式中 v 为小弹丸射入摆球前的速度，V 为射入后的共同速度。根据机

械能守恒定律有

$$(m+M)gh=\frac{1}{2}(m+M)V^2\text{，}V=\sqrt{2gh} \qquad (2)$$

而$h=l(1-\cos\theta)=l(1-\sqrt{1-\sin^2\theta})=l(1-\sqrt{1-\frac{A^2}{l^2}}) \qquad (3)$

把(3)式代入(2)式再代入(1)式得

$$v=6\sqrt{2gl(1-\sqrt{1-\frac{A^2}{l^2}})} \qquad (4)$$

根据单摆周期公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\text{，}l=\frac{T^2}{4\pi^2}\cdot g \qquad (5)$$

把(5)式代入(4)式得

$$v=6\sqrt{\frac{2g^2T^2}{4\pi^2}(1-\sqrt{1-\frac{16\pi^4A^2}{T^4g^2}})}$$

$$=6\sqrt{\frac{9.8^2\times3^2}{2\times3.14^2}\times(1-\sqrt{1-\frac{16\times3.14^4\times0.1^2}{3^4\times9.8^2}})}\text{米/秒}$$

$$=1.26\text{米/秒。}$$

1829．两个完全相同的弹性小球分别挂在不会伸长的轻绳上。两绳互相平行，第一个球的绳长l，第二个球的绳长$\frac{l}{4}$。两球的重心位于同一水平面上，且两球静止时恰好接触，把第二个球拉开不大的距离后由静止释放，如图所示。经多长时间两球会发生五次碰撞？

[分析]弹性小球发生对心碰撞，如果小球质量相同，碰撞后它们的速度将交换。当球2从最大位移释放经$\frac{1}{4}T_2$时间后和球1发生弹性碰撞，碰撞后球2静止，球1则获得速度向左摆动，经$\frac{1}{2}T_1$后返回和球2再次碰撞，以后每经过$\frac{1}{2}(T_1+T_2)$碰撞两次。

[解答]由分析得第一次发生碰撞需时间

$$t_1=\frac{1}{4}T_2=\frac{1}{4}(2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}})$$

$$=\frac{1}{4}(2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}})=\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{l}{g}}\text{。}$$

第一次碰撞后每经过$\frac{1}{2}(T_1+T_2)$时间又要发生二次碰撞，所以自第一次发生碰撞后到第五次碰撞共需时间为

$$t_2 = 2[\frac{1}{2}(T_1 + T_2)] = T_1 + T_2$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + 2\pi\sqrt{\frac{l}{4g}} = 3\pi\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

从第二个小球由静止释放到发生五次碰撞所用时间

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + 3\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$= \frac{13}{4}\pi\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

1830.如图(a)所示,AB 为半径 R=7.50 米的光滑圆弧,BC 为长 s=0.900 米的光滑水平平台，在 B 点和圆弧相切，平台离地面高度 h=1.8 米，质量 m_1=0.100 千克的小球置于 C 点，质量 m_2=0.200 千克的小球置于 B 点。如果给 m_1 一个打击力，使它获得大小为 0.900 米/秒的水平速度，当 m_1 运动到 B 点时和 m_2 发生弹性正碰。求：

(1)两球落地的时间差；

(2)两球落地点间的距离。（g 取 10 米/秒²）

[分析]m_1 以 0.900 米/秒的速度和 m_2 发生弹性碰撞，m_1 在 BC 上返回作匀速运动，经历时间$t_1 = \frac{s}{|v'_1|}$。

m_2 在圆弧上做圆周运动，上升的高度 h′=v′$_2^2$/2g。设 m_2 到达圆弧的 D 点为最高，OD 线和 OB 线间的夹角为θ，如图(b)所示，

则 h′=R? Rcosθ，

$$\cos\theta = \frac{R - h'}{R} = 1 - \frac{{v'_2}^2}{2 \times g \times R}，$$

又 $$v'_2 = \frac{2m_1v_1}{m_2 + m_1} = \frac{2}{3}v_1 = 0.600\text{米}/\text{秒}，$$

得 $$\cos\theta = 1 - \frac{0.3600}{150} = 0.9976。$$

可见θ＜5°，这样小球 m_2 在圆弧上来回运动可看作简谐振动的一部份。它的平衡位置在 B 点，运动时间正好等于单摆振动的半周期。

m_2在BC上运动也是匀速运动，运动时间$t_2 = \frac{s}{v'_2}$。

两球从 C 点落地都作平抛运动，高度相等，落地所用时间也相等。所以两球落地的时间差就是两球各从碰撞时算起到达 C 点的时间之差值。

两球落地点间的距离就是平抛运动射程的差值。

[解答](1)根据弹性碰撞的规律

$$m_1v_1=m_1v'_1+m_2v'_2 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m2v_2'^2 \qquad (2)$$

解(1)、(2)式得 $v'_1=\frac{(m_1-m_2)v_1}{m_1+m_2}=\frac{-1}{3}v_1=-0.300$米/秒，

$$v'_2=\frac{2m_1v_2}{m_1+m_2}$$

$=0.600$米/秒。

由单摆周期公式可求得 m_2 在圆弧上运动的时间

$$t'_2=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{R}{g}}。$$

两球落地的时间差为

$$\triangle t=t_2+t'_2-t_1$$

$$=\frac{s}{v'_2}+\pi\sqrt{\frac{R}{g}}-|\frac{s}{v'_1}|$$

$$=(\frac{0.900}{0.600}+3.14\sqrt{\frac{7.5}{10}}-\frac{0.900}{0.300})\text{秒}$$

$$=1.22\text{秒}$$

(2)已知平台的高度 h=1.8 米，作平抛运动的小球落地时间

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}。$$

所以 $s_1=v'_1\cdot t=0.300\times\sqrt{\frac{2\times1.8}{10}}$米

$=0.18$米，

$$s_2=v'_2t=0.600\times\sqrt{\frac{2\times1.8}{10}}\text{米}$$

$$\Delta s=s_2-s_1=0.36\text{米}-0.18\text{米}=0.18\text{米}。$$

1831．摆长为 l 的单摆，在竖直平面内以很小的摆角振动时，振动的频率为$f_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{g/l}$，现在要这单摆在以下条件下作振动：

如图(a)和(b)所示,和水平面 AO 成θ角的 BO 斜面上有一固定点 P，过 P 点插有一根垂直于 BO 的直棒 PQ。设斜面倾角θ可以从 0°~90°之间变化。先使小球质量为 m，摆长为 l 的单摆上端固定于 P 点，小球可以在斜面上作无摩擦的振动。试求：

(1)小球在斜面上平衡位置附近摆动时，其振动频率 f_p 和斜面倾角θ的函数关系；

(2)如图(c)所示，保持单摆长度 l 不变，单摆上端固定点从 P 点移到

和P相距为 $\frac{l}{\sqrt{2}}$ 的Q点。当θ $=30°$，小球静止在平衡 位置时，细线的张力 T 和小球受到斜面的支持力 N 各是多大？如果此时在平衡位置附近作小角度的振动，期振动频率又为多大？

[分析]单摆的摆球在斜面上振动，共受到三个力的作用，如图(d)

所示，mg 为重力，N 为斜面对摆球的支持力，T 为线的张力。其中重力可分解为垂直于斜面的分力 mgcosθ和沿斜面向下的下滑力 mgsinθ，下滑力和线的拉力在同一平面内其合力就是振动的回复力。把相应的加速度量值 g′=gsinθ代入振动周期公式即得振动的周期。

如图(e)所示，当摆的固定点移到 Q 点时，由题设条件摆线 l 和 PQ 间的夹角为 45°，摆球在斜面上仍受三个力的作用，即重力 mg、张力 T 和斜面支持力 N。当摆球静止在平衡位置时三力处于平衡，用正交分解求得张力 T 和支持力 N。

摆球在斜面上作小角度的振动，可视为简谐振动，但这时的摆长为 lcos45°。摆球在和斜面垂直的方向上合力为零，下滑力和绳子张力沿斜面的分力，合成产生回复力，使单摆产生振动，可以由周期公式求得周期。

[解答](1)由单摆周期公式得

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sin\theta}},$$

所以
$$f_p = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sin\theta}{l}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}\cdot\sqrt{\sin\theta}$$
$$= f_0\sqrt{\sin\theta}。$$

(2)小球在斜面上静止时，合力为零，从图(e)可知

$$mg\sin\theta = T\cos45° \qquad (1)$$
$$N + T\sin45° = mg\cos\theta \qquad (2)$$

所以
$$T = \sqrt{2}mg\sin\theta,$$
$$N = mg(\cos\theta - \sin\theta)。$$

因为
$$\theta = 30°$$

所以
$$T = \frac{1}{\sqrt{2}}mg,\ N = \frac{\sqrt{3}-1}{2}mg。$$

摆球在斜面上振动时，由周期公式得

$$T_Q = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos45°}{g\sin\theta}} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos45°}{g\sin30°}}$$
$$= 2\pi\sqrt{\frac{l/\sqrt{2}}{g\times\frac{1}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt[4]{2},$$

所以
$$f_Q = \frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}/\sqrt[4]{2} = f_0/\sqrt[4]{2} = 0.84f_0。$$

1832．两根长为 l 的细线，一端各拴一个质量为 m 的小球。设小球的半径和长度 l 比较可以略去不计，如图(a)所示。现将两根线的另一端固定在 C 点，把两球吊起来，先让 B 球静止在竖直线 CO 的 O 点。然后将 A 球移到使 CA 和竖直线 CO 成某一角度θ的位置，再无初速释放。于是 A 球开始运动，并在 O 点和 B 球发生对心碰撞。如果θ很小，则可以认为 A 球在水平直线 x 轴上运动。设 A 球开始运动时的位置是在 x 轴上坐轴上坐标为？b 处，b 为正值。试回答下列问题：

(1)试用 l 和 b 表示 A 球和 B 球相碰撞前瞬时 A 球的速率。取重力加速度为 g；

(2)用图线表示 A 球从开始运动的位置到 O 点的过程中，x 方向的加速度和 x 的关系；

(3)A、B 如果发生完全非弹性碰撞，用图线表示，从 O 点到最大位移处，x 方向的加速度和坐标 x 之间的关系。

[分析]当偏角θ很小时，A 球作简谐振动，这时 A 球所受回复力 $F = mg\sin\theta \approx mg\frac{x}{l}$。

由牛顿第二定律可知加速度和力成正比，可得

$$a = -\frac{g}{l}x。$$

完全非弹性碰撞时，A、B 粘合一起运动，根据动量守恒定律求出碰后的速度 v′，再由简谐振动的速度公式和加速度公式求得加速度 a′和 x 的关系。

[解答](1)由分析可知

$$F = -\frac{mg}{l}x,$$

得

$$k = \frac{mg}{l}。$$

由简谐振动的速度公式可知 $v_{max}=\omega A$，

$$A = b，\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{l}},$$

得

$$v_{max} = b\sqrt{\frac{g}{l}}。$$

或用简谐振动中的机械能守恒关系

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kb^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{mg}{l}b^2,$$

得

$$v_{max} = b\sqrt{\frac{g}{l}},$$

(2)设 A 球在位置 x 时的加速度为 a，由于 F=ma=? kx，

所以$a = -\frac{k}{m}x = -\frac{mg/l}{m}x = -\frac{g}{l}x$。

当 x=0 时，a=0；x=? b 时，a=bg/l。其函数关系为通过原点的一条直线，见图(b)所示。

(3)A、B 两球发生完全非弹性碰撞，根据动量守恒定律得

$$mv=(m+m)v',$$

$$v' = \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{g}{l}}。$$

设A、B在粘合后共同前进的最大距离为b'，由前分析可知k' $= \frac{2mg}{l}$。由简谐振动的速度公式可得

$$v' = \omega' A' = b'\sqrt{\frac{g}{l}}，$$

$$b' = v'\sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{2}b\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = \frac{1}{2}b。$$

设 A、B 球在位置 x 时的加速度为 a′，由牛顿第二定律得

2ma′=? k′x，

所以
$$a' = -\frac{k'}{2m}x = \frac{\frac{2mg}{l}}{2m}x = -\frac{g}{l}x。$$

当$x = 0$时，$a' = 0$；$x = \frac{b}{2}$时，$a' = -\frac{bg}{2l}$，a'和x的关系如图(c)所示。

1833．如图所示，当小球在两个光滑斜面上来回滑动时，小球将作振动。如果在运动中小球经过两斜面接口处能量损失不计。求：

(1)小球的振动是否是简谐振动？

(2)小球的振动周期。

[分析]小球在斜面上运动时所受的合外力 F_1=mgsinα和 F_2=mgsinβ都为常量。因此小球的振动为非简谐振动。小球振动周期等于它在斜面上下运动一次所需时间的和。

[解答](1)小球在两斜面分别所受合外力 F_1=mgsinα和 F_2=mgsinβ虽然指向平衡位置，但不与位移成正比，故不是简谐振动。

(2)设小球从左边高度为h处下滑，其末速应为$v = \sqrt{2gh}$，滑行时间

$$t_1 = \frac{\sqrt{2gh}}{g\sin\alpha}。$$

小球在右边上滑到 h 高处时末速为零，所需时间

$$t_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{g\sin\beta}。$$

可以证明在同一光滑斜面上、下滑行时间是相同的，小球完成一次全振动的时间

$$\begin{aligned} T &= 2t_1 + 2t_2 \\ &= 2\frac{\sqrt{2gh}}{g\sin\alpha} + 2\frac{\sqrt{2gh}}{g\sin\alpha} \\ &= 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right)。\end{aligned}$$

1834．一个质量为 10 千克的球，在一个倾角为 30°的光滑斜面上，从高为 10 米处，由静止开始下滑，如果球和光滑地面作弹性碰撞，如图(a)所示。（g 取 10 米/秒^2），求：

(1)球对地的冲量多大？

(2)球在地面上的运动是什么运动？它在竖直方向上是简谐振动吗？周期多大？

[解答](1)小球沿斜面无摩擦地下滑机械能守恒，得$mgh=\frac{1}{2}mv^2$，

$$v=\sqrt{2gh}。$$

小球和地面发生弹性碰撞，无机械能损失。

即 $$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}mv'^2，$$

故 $$v=v'。$$

小球和地面碰撞时，水平方向分速度不变，即水平分动量不变。而竖直方向冲量值 I 等于竖直方向动量的增量，如图(b)所示。

$$I=\triangle mv=? \ mv'\sin30°? \ mv\sin30°=? \ 2mv\sin30°，$$

所以，小球对地的冲量为

$$I'=-I=2mv\sin30°=2\times10\times\sqrt{2\times10\times10}\times\frac{1}{2}\text{牛·秒}$$

$$=141\text{牛·秒}，$$

方向竖直向下。

(2)小球着地后跟地发生弹性碰撞，轨迹如图(b)所示，在两着地点间的运动均为斜抛运动，此运动作周期性的重复，所以竖直方向上是一种振动。它的回复力为重力和弹力，不符合简谐振动的条件，所以它不是简谐振动。这个振动的周期等于抛体运动从小球弹起到落地所经历的时间，即

$$T=\frac{2v\sin30°}{g}=\frac{2\sqrt{2gh}\sin30°}{g}$$

$$=\frac{2\times\sqrt{2\times10\times10}\times\frac{1}{2}}{10}\text{秒}=14.1\text{秒}。$$

说理和论证题

1835．简谐振动的基本特征是什么？

[解答]作简谐振动的物体的动力学特征是：物体所受的回复力 F 跟位移 x 成正比且方向相反。

即 $$F=-kx。$$

或作简谐振动物体的加速度跟位移成正比且方向相反。即

$$a=-\frac{k}{m}x。$$

作简谐振动的物体的运动学特征是：物体在平衡位置附近作周期性运动，位移和时间的函数关系为

$$\begin{aligned} x &= A\cos(\omega t+\varphi_0) \\ &= A\cos(2\pi ft+\varphi_0) \\ &= A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right)。\end{aligned}$$

1836．一个质点在一个使它返回平衡位置的力作用下，它是否一定作简揩振动？

［解答］ 质点作简谐振动时，它所受到的回复力，一定跟位移成正比且方向相反。题中质点受到指向平衡位置的作用力，并不一定能满足与位移成正比的条件，所以这个质点不一定作简谐振动。

1837．有一个弹簧振子，先使它在光滑的水平面上作简揩振动，再将它竖直悬挂起来作简谐振动，问这两种情况的振动频率是否相同？

［解答］ 相同的。弹簧振子的振动频率只跟 k 和 m 有关，和振幅的大小、放置的位置无关。因此两种情况的振动频率相同。

1838．有一个弹簧振子，分别把它拉离平衡位置 5 厘米和 1 厘米无初速释放,并让它作简谐振动,问前后两次振动的周期和振幅是否相同？为什么？

［解答］ 振幅不相同，前者为 5 厘米，后者为 1 厘米。

周期相同。从公式$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$**中可知，弹簧振子的周期仅决定于振动系统的固有参数，即跟弹簧振子质量的平方根成正比，跟弹簧的倔强系数的平方根成反比，而和振幅大小无关。**

1839．两个相同的弹簧挂着不同质量的物体，当它们以相同的振幅作简揩振动时，问振动的总能量是否相同？

［解答］ 简谐振动的总质量$E=\frac{1}{2}kA^2$**，只跟弹簧的倔强系数**k**和振幅 A 有关，而和振子的质量 m 无关。本题中两个弹簧的 k 是一样的，振幅 A 也是相同的，所以它们各自的振动总能量是相同的。**

1840．一弹簧的倔强系数为 k，把质量为 m 的物体挂在它的下面，可制成一个弹簧振子；如果把弹簧分为相等的两段，把物体挂在分割后的半根弹簧下面，也可以制成一个弹簧振子。问这两个弹簧振子的振动频率是否一样？

［解答］ 一根弹簧的倔强系为 k，半根弹簧的倔强系数为 k_1。用力F**使整根弹簧伸长**x**，而用同样的力只能使半根弹簧伸长**$\frac{1}{2}x$**，故有**

$$kx=\frac{1}{2}k_1x,$$

即 $$k_1=2k。$$

因为 $$f=\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}}。$$

所以 $$f_1=\sqrt{2}\,f$$

1841．一个重物挂在两根串联着的相同的弹簧下面作简谐振动，如果把这两根弹簧并联起来，使重物做简谐振动。在这两种情况物体的振动周期有什么关系？

［解答］　两根弹簧串联起来，在外力 F 的作用下，总的伸长量设为ΔL,则每根相同的弹簧的伸长量为$\frac{\Delta L}{2}$.如果每根弹簧的倔强系数为k,串联后两根弹簧总的倔强系数$k_{串}=\frac{1}{2}k$.此时串联后的振动周期$T_{串}=\sqrt{2}T$,T 为一根弹簧情况下的振动周期。

两根弹簧并联时，要使每根弹簧都伸长ΔL，需力为 2F，因此并联系统的倔强系数$k_{并}=\frac{2F}{\Delta L}=2k$。它的周期$T_{并}=\frac{1}{\sqrt{2}}T$。

由此可见$T_{并}=\frac{T_{串}}{2}$，即并联后的振动周期是串联后振后周期的一半。

1842．把待测重力的物体挂在倔强系数为 k 的弹簧上，观察这振动系统的振动，假定在观察的时间内振动是无阻尼的，怎样在振动的过程中求出物体的重力？

［解答］　由　$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

得　$$m=\frac{kT^2}{4\pi^2}。$$

又　$$G=mg,$$

所以　$$G=\frac{kT^2}{4\pi^2}\cdot g。$$

从上式可知，要求出 G，只要测出其振动周期 T 即可。

1843．在简谐振动中 t=0 是质点开始运动的时刻，还是开始观察的时刻？

［解答］　简谐振动中物体开始运动的时刻和为了研究运动开始观察的时刻是两回事，当然运动的开始时刻也可以是观察的开始时刻。简谐振动方程中的 t=0 一般是指开始观察计时的时刻。

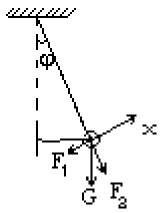
1844．在悬线下端挂一个小球，组成一只单摆。把它从平衡位置拉开，使悬线和竖直方向成一个很小的夹角φ，然后无初速释放，开始振动。如果从开始振动时计时，有人认为角φ就是振动的初相角，试分析这种说法是否正确。

［解答］　这种说法不对。此处的φ角是单摆的角振幅，它是悬线和铅直方向间的夹角。

1845．如图所示，当φ很小时，摆球的重力的切向分力 $F_1=mg\sin\varphi$，

或者　$$F_1\approx mg\,tg\varphi\approx mg\varphi, \qquad (1)$$

切向分力和φ成正比，这是一种准弹性力，所以小球可近似看作简谐振动，它的振动方程用余弦函数表示为



$$l\theta = l\varphi\cos(\omega t+\delta),$$

即
$$\theta = \varphi\cos(\omega t+\delta) \qquad (2)$$

式中θ为单摆在摆动过程中任意位置摆线和铅直线的夹角。φ为角振幅。

在本题中开始时刻，θ=φ，这时 t=0，从(2)式可知

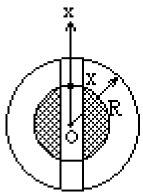
$$\varphi=\varphi\cos(0+\delta)$$

所以
$$\delta=0,$$

即初相角为零，而不是φ。

1846．设想沿着地球的自转轴线挖通一个从北极经地心到南极的通道，如果把物体放入通道里，物体将怎样运动？

［解答］　以地球中心为原点，自转轴线为 x 轴。如果物体的质量为 m，离地心 O 的距离为 x，此时物体受到的万有引力



$$F = -G\frac{mM'}{x^2} \qquad (1)$$

方向指向地心，所以应为负值。式中的 M’不是地球的全部质量，而是以 x 为半径的地球内层质量，如图所示的斜线部分。半径 x 为半径的地球内层质量，如图所示的斜线部分。半径 x 以外的地球外壳对物体的引力因相互抵消不必计算。设地球的总质量为 M，半径为 R，

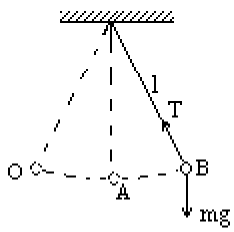
则
$$M' = M\cdot\frac{\frac{4}{3}\pi x^3}{\frac{4}{3}\pi R^2} = M\frac{x^2}{R^3}$$

把(2)式代入(1)式得

$$F = -G\frac{M'm}{x^2} = -\frac{GmM}{R^3}x \qquad (3)$$

(3)式说明作用在物体上的力和位移成正比，方向相反，恒指向 O 点，所以物体将在洞里以 O 点为平衡位置作往复运动，且是简谐振动。

1847．如图所示，在单摆从 B 向 A 方向运动过程中，它的加速越来越小；从 A 到 C 方向运动过程中加速度越来越大，于是有人就说：在从 B 到 A 的过程中，它的速度越来越小；从 A 到 C 的过程中，它的速度越来越大，但事实恰和这种说法相反，试指出他的错误所在。



［解答］　物体运动速度的变大还是变小，要看加速度的方向和速度的方向是相同还是相反。

单摆从 B 向 A 运动时，切向加速度方向与速度方向相同，所以不论加速度的数值多大，速度值总是增加的。而在单摆从 A 向 C 方向运动过程中，切向加速度方向和速度方向相反，加速度的数值在逐渐变大，使摆的速度减小且越来越减小得快。这种说法的错误之处就是没有注意到加速度和速度的方向关系。

1848．伽利略曾提出并解决了这样的一个问题：一根很长的细线挂在很高很暗的城堡中，既看不到它的上端，又无法爬到高处去测量它的长度，只能看见它的下端，问用什么方法很快的测出它的长度？

［解答］　只要在线的下端挂一物体，使它成为一个单摆，然后拉开一小角度，让它自由摆动，测出其摆动的周期，再根据单摆周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 就可以算出线的长度 l 值，即

$$l = \frac{T^2}{4\pi^2}g。$$

1849．在一个单摆装置中，摆动物体是一只装有沙子的漏斗。当摆开始以小角度摆动时，让沙从漏斗连续不断地漏出来。问在摆动过程中，单摆的周期是否会发生变化？

［解答］根据单摆周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 可知，沙子从漏斗中漏出，质量虽然减少，但并不影响它的周期。

而沙子从漏斗中漏出，使漏斗质量减少的同时，它的重心逐渐在下降。因为单摆的摆长并不是摆线的长度，而是悬点到物体重心的距离，因此在不断漏沙过程中，实际摆长的不断增加，因而单摆周期也在增大。

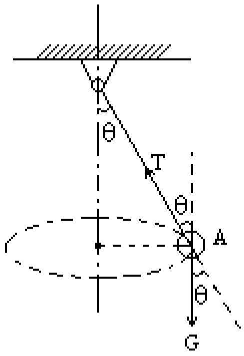
1850．如图所示的圆锥摆。小球 A 在水平面内作匀速圆周运动。小球受到绳子的拉力 T 和重力 G。有同学在竖直方向列出式

$$T\cos\theta - G = 0 \qquad (1)$$

另一个同学在 T 方向上列出式

$$G\cos\theta - T = 0 \qquad (2)$$

显然(1)式和(2)式不能同时成立，试指出哪一个式子有错误？为什么？



［解答］　由题意可知，重力 G 和绳子的拉力 T 的合力为向心力 F，F 指向圆心 O 点。(1)式把 T 正交分解为 Tcosθ和 Tcosθ两个力，其中 Tcosθ和重力 G 合力，决定了竖直方向加速度，因为在重力方向上没有加速度所以两力平衡，就是(1)式，Tcosθ和重力正交，这个力就是 T 和 G 的合力，也就是向心力，所以是正确的。

(2)式是错误的。这位同学实际上是把 G 正交分解为 Gcosθ和 Gsinθ两个力，其中 Gcosθ方向和 T 相反。Gsinθ的方向和 T 垂直，跟水平方向的夹角为θ，如果(2)式成立，则 $F_{合}=G\sin\theta=ma_{向}$，但这两个等号都不能成立，所以 Gsinθ不是 T 和 G 的合力，(2)式也当然是错误的。

1851．一个质量为 m 的物体悬于一根竖直的弹簧上，使弹簧拉伸了 l 长度而达到新的平衡位置。如果使此系统作简谐振动，试证明它的振动周期和一长为 l 的单摆振动周期相等。弹簧质量不计。

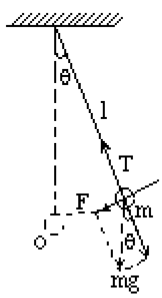
［证明］将弹簧上端固定，下端挂有质量为 m 的重物，弹簧伸长了 l，故它的倔强系数$k=\frac{mg}{l}$。求得振动周期

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

摆长为l的单摆，其周期$T_2=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，

所以 $$T_1=T_2。$$

1852．只要单摆的摆角θ很小，则单摆的振动是简谐振动，试证明之。



［证明］　如图所示，当小球静止在平衡位置时，线的张力和重力相平衡。当小球有一摆角θ时，重力 mg 在切线方向上产生一个分力 F，不难看出这个力总是指向平衡位置 O 点，它就是使小球作往复运动的回复

力。由于小球所受的回复力 F=mgsinθ，一般并不和它偏离平衡位置的位移成正比，所以小球的振动一般不是简谐振动。只有当摆角很小的情况下，取θ≤5°时，sinθ≈θ，这时小球运动的轨迹也可近似看作直线，回复力

$$F = mg\sin\theta \approx mg\theta = \left(\frac{mg}{l}\right)s。$$

式中 s=lθ表示小球在弧线上的位置，设从 O 点向右方向为 x 轴的正方向，因为θ很小，所以 s≈x_0 回复力大小的表达式为

$$F = \left(\frac{mg}{l}\right)x,$$

考虑回复力方向，当 x 向右时，F 向左；当 x 向左时，F 向右，F 的方向始终与x相反，所以回复力$F = -\frac{mg}{l}x$。单摆在θ很小时，符合简谐振动条件。

1853．在简谐振动中，任意时刻的速度$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$，式中ω为简谐振动角频率，A 为振幅，x 为任意时刻的位移，试证明之。

[证明]　质点作简谐振动时，所受力 F= –kx，是保守力，机械能守恒，所以有

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2,$$

由

$$E_{总} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}, k = \omega^2 m,$$

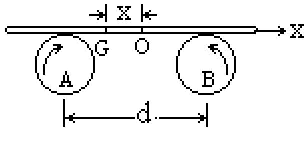
得

$$\omega^2A^2 = v^2 + \omega^2x^2$$

即

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}。$$

1854．如图所示，两个相反方向旋转的小轮 A 和 B 之间的距离为 d，轮上水平放置一块木板。已知木板质量为 m，板和小轮之间的静摩擦系数和滑动摩擦系数都是μ，开始时板的重心 G 靠近 A 轮，则板在轮上将要来回运动。试证明：



(1)板的运动是简谐振动；

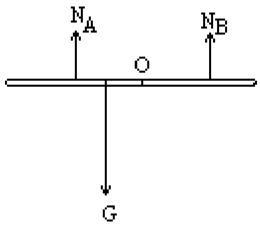
(2)板的振动周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{2\mu g}}.$$

[分析]　木板放置在两轮上，由于重心靠近图中的 A 轮，可知木板和 A 轮间的压力将大于和 B 轮间的压力。当两轮转动时板和 A、B 轮的摩

擦力方向相反，合力方向始终指向中点（平衡位置），合力的大小可用有固定转动轴物体的平衡条件和摩擦力公式求得。可证这个合力大小和位移成正比，方向总是指向平衡位置，因此木板的运动是简谐运动，并可用周期公式直接求出其周期的大小。

［证明］ (1)二轮的中点 O 为平衡位置，因为当木板重心 G 与 O 重合时，木板对 A、B 轮的压力相等，摩擦力相等而反向，合力为零。取通过 O 点水平向右的方向为 x 轴的正方向。当板运动到任一位置时板的重心 G 对 O 的位移为 x，就有



$$N_A+N_B=mg \quad (1)$$

$$N_A\left(\frac{d}{2}-x\right)=N_B\left(\frac{d}{2}+x\right) \quad (2)$$

联立(1)式、(2)式解得

$$N_A=\frac{\left(\frac{1}{2}d-x\right)mg}{d} \quad (3)$$

$$N_B=\frac{\left(\frac{1}{2}d+x\right)mg}{d} \quad (4)$$

又因摩擦力的合力

$$F_{合}=\mu N_A-\mu N_B=\mu(N_A-N_B) \quad (5)$$

把(3)、(4)式代入(5)式

得 $$F_{合}=\mu\left[\frac{\left(\frac{1}{2}d-x\right)mg}{d}-\frac{\left(\frac{1}{2}d+x\right)mg}{d}\right]$$

$$=\frac{-2\mu mg}{d}\cdot x,$$

令 $\frac{2\mu mg}{d}=k$，则$F_{合}=-kx,$

可见木板作简谐振动

(2)由简谐振动周期公式得

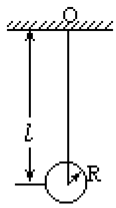
$$
\begin{aligned}
T &= 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \\
&= 2\pi\sqrt{m\Big/\frac{2\mu mg}{d}} \\
&= 2\pi\sqrt{\frac{d}{2\mu g}}
\end{aligned}
$$

1855．我们在做单摆实验时把半径为 R 的小球当作质点，悬点到小球质心间的距离为 l，算出的周期为 T_1。现用实验方法测得一个物理摆（大球）的周期为T_2。试证明：当$R=\frac{1}{2}$时，

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{1.1}\text{.}$$

［证明］　根据单摆周期公式知周期

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}\text{，} \tag{1}$$



$R=\frac{1}{2}l$**振动系统不能作为单摆处理，它是一个物理摆根据物理摆周期公式知其周期**

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

式中 I 为小球对支点 O 的转动惯量，l 为质心离支点的距离。

因为

$$
\begin{aligned}
I &= I_C + ml^2 \\
&= \frac{2}{5}mR^2 + ml^2,
\end{aligned}
$$

所以

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}mR^2+ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\left(\frac{R^2}{l}\right)+l}{g}}\text{.} \tag{2}$$

(2)式÷(1)式得

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\left(\frac{R^2}{l}\right)+l}{g}}\Bigg/\sqrt{\frac{l}{g}}\text{。}$$

即

$$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{2}{5}\left(\frac{R}{l}\right)^2+1}\text{.}$$

当$R=\frac{l}{2}$时，

得 $$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{\frac{2}{5}\left(\frac{\frac{l}{2}}{l}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{1}{10}+1}.$$

得 $$\frac{T_2}{T_1}=\sqrt{1.1}.$$

1856．有一根细而长的均匀棒，悬在穿过棒的水平轴上，现用它作为物理摆测量出它的周期 T。用试验法找第二个支点，测出其周期和第一支点的周期相同，试证明周期 T 只和两点间的距离 L 有关，其公式为$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$。

［证明］ 设第一支点为 O，棒的转动惯量 I_0 为

$$I_0=I_C+a^2m,$$

式中的 a 为质心离支点 O 的距离。由物理摆的周期公式得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mg\cdot a}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}l^2m+ma^2}{mga}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{l^2+12a^2}{12ga}}$$

式中的 a'为质心离支点 O'的距离。由物理摆的周期公式得

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{I_{0'}}{mg\cdot a'}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}l^2m+ma'^2}{mga'}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{l^2+12a'^2}{12ga'}}$$

因为 $T=T'$，

所以 $$2\pi\sqrt{\frac{l^2+12a^2}{12ga}}=2\pi\sqrt{\frac{l^2+12a'^2}{12ga'}},$$

$$\frac{l^2+12a^2}{ga}=\frac{l^2+12a'^2}{ga'}$$

$$12a'^2a-a'(l^2+12a^2)+al^2=0$$

解得 $$a'=\frac{l^2+12a^2+\sqrt{(l^2+12a^2)^2-4\times12a^2l^2}}{2\times12a}$$

$$=\frac{l^2}{12a}.$$

由题意知 $$L=a+a'=a+\frac{l^2}{12a},$$

得 $$l^2=12a(L-a)$$

(3)式代入(1)式得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{12a(L-a)+12a^2}{12ag}}=2\pi\sqrt{\frac{12aL}{12ag}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}。$$

1857．一均匀的等边三角形薄板 ABC，质量为 m，高为 h。如图(a)所示。当它绕水平边 AB 作小角度振动时，它的振动周期

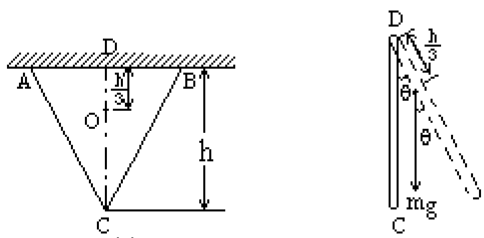
$$T=2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}。$$

试证明之。已知薄板以AB为转动轴的转动惯量$I=\frac{1}{6}mh^2$。

[证明] 均匀三角形的质心O离转轴AB为$OD=\frac{h}{3}$。重力使薄板转动的力矩为

$$M=mg\cdot\frac{h}{3}\sin\theta,$$

式中的θ为薄板的摆角，当θ很小时，



(a) (b)

$$M=mg\frac{h}{3}\sin\theta\approx mg\frac{h}{3}\theta \qquad (1)$$

由转动定律得

$$M=I\beta=\frac{1}{6}mh^2\cdot\beta \qquad (2)$$

由(1)、(2)式得

$$\frac{1}{6}mh^2\beta=mg\frac{h}{3}\theta,$$

$$\beta=\frac{2g}{h}\theta \qquad (3)$$

如图(b)所示，如果以逆时针方向为正方向，当θ为正时，β为负，θβ为负时，则β为正。所以表达式可写为

$$\beta=-\frac{2g}{h}\cdot\theta \qquad (4)$$

如果把质点动力学和刚体动力学相比较的话，则α和β相当；θ和 x 相当，所以有

$$\frac{k}{m}=\frac{2g}{h}\text{．而}\frac{k}{m}=\omega^2\text{，}$$

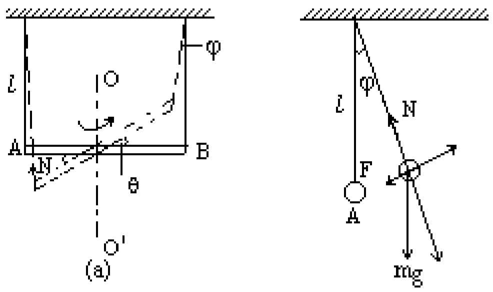
得 $$\omega=\sqrt{\frac{2g}{h}}\text{。}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}\text{．}$$

1858．如图(a)所示，一根长为 L 的均匀细棒两端，用长度都是 l 的细线悬挂着，当细棒以微小的角度绕中心轴 OO'振动时，求证它的振动周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}\text{。}$$

［**证明**］**当细棒处平衡状态时,两根细线的张力均等于**$\frac{1}{2}mg$,**其中**m**为棒的质量。如果使细线偏过一微小角度**φ**时，棒绕 OO' 轴转过微小的角度**θ。



由图(b)**可知，因为**φ**很小，棒端点**A(**或**B)**摆过的弧线长**$x=\frac{1}{2}L\cdot\theta$ $=l\varphi$,(θ、φ**均用弧度表示)。于是张力 N 在 x 轴上的分力为 N**$\sin\varphi$**，这个力对轴 OO'的力矩为**

$$M_A=N\sin\varphi\cdot L/2,$$

同样可得在 B 端的张力的分力绕 OO’轴的力矩为

$$M_B=N\sin\varphi L/2,$$

合力矩$M=N\sin\varphi\cdot\frac{L}{2}+N\sin\varphi\cdot\frac{L}{2}=N\sin\varphi\cdot L$。

当θ**和**φ**均很小时，得** $M=N\sin\varphi\cdot L\approx NL\varphi$ **(1)**

又 $$M=I\beta=\frac{1}{12}mL^2\cdot\beta \qquad (2)$$

式中 I 为棒绕 OO’轴的转动惯量，β**为绕 OO’转动的角加速度，N 为张力。**

因为 $$I=\frac{1}{12}mL^2,N\approx\frac{1}{2}mg,$$

由(1)式和(2)式得 $NL\varphi=\frac{1}{12}mL^2\cdot\beta,$

所以 $$\beta=\frac{NL\varphi}{\frac{1}{12}mL^2}=\frac{\frac{1}{2}mg\varphi}{\frac{1}{12}mL}=\frac{6g\varphi}{L}.$$

又由于 $l\varphi=\frac{1}{2}L\theta$，得 $\varphi=\frac{L\theta}{2l}$，

所以 $$\beta=\frac{6g\cdot\frac{L\theta}{2l}}{L}=\frac{3g}{l}\theta.$$

由于β和θ方向相反，所以表达式应写为

$$\beta=-\frac{3g}{l}\theta。$$

比较简谐振动条件 $a=-\frac{k}{m}x$，β和a相当，θ和x相当，

所以 $$\omega^2=\frac{k}{m}=\frac{3g}{l};\omega=\sqrt{\frac{3g}{l}}=\frac{2\pi}{T},$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{3g}}$$

振动　振动方程和图象

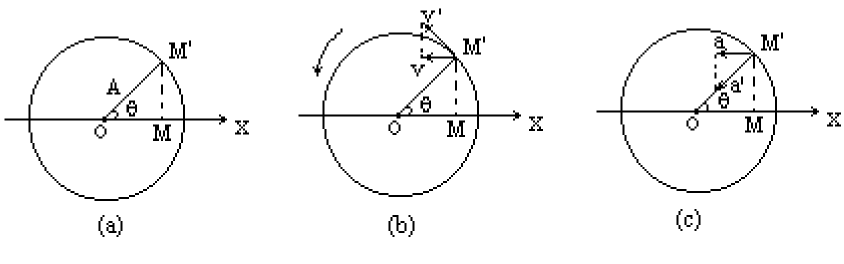
填充题

1859．一个振动系统开始振动以后，就只受系统内部的弹力或重力作用，这样的振动，叫做自由振动，又叫做固有振动。它的频率称为固有频率。

在周期性外力（策动力）作用下的振动，叫做受迫振动。物体做受迫振动的频率等于策动力的频率，而跟物体的固有频率没有关系。在阻尼很小且这两个频率相等时，受迫振动的振幅最大，这种现象叫做共振。

1860．实际的振动系统不可避免地要受到阻力，系统的机械能就要随着时间逐渐减少，振动的振幅也随着时间逐渐减小。这种振动叫做阻尼振动。

1861．实验表明，作匀速圆周运动的质点在直径上投影的运动是简谐振动。



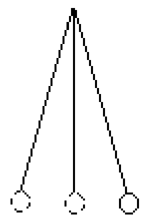
图(a)中的圆周是作匀速圆周运动质点 M’的轨迹。圆周半径为 A，圆

心为 O。如果 M'逆时针方向作匀速圆周运动，并从$\theta=0$ 的时开始计量时间，那么经过时间 t，OM'转过的角度$\theta=\underline{\omega t}$。质点 M'在 x 轴上的投影 M 所作的运动就是简谐振动。M 点的位移方程为 $x=\underline{A\cos\omega t}$。

如图(b)所示 M 的速度为 M'的速度 v'在 x 方向的投影，则 M 的速度方程为 $v=\underline{-\omega A\sin\omega t}$。

如图(c)所示 M 的加速度为 M'的加速度 a'在 x 方向的投影，则 M 的加速度方程为 $a=\underline{-\omega^2 A\cos\omega t}$。

1862．如图所示，有一个单摆，设以平衡位置为坐标原点，向右为正方向，振幅为 A。如果单摆在正向最大位移处开始计时，振动方程为 $x=A\cos\omega t$，这时初相为 $\underline{0}$；如果单摆在反向最大位移处开始计时，则振动方程为 $x=\underline{A\cos(\omega t\pm\pi)}$，这时初相为$\underline{\pm\pi}$；如果单摆向正向运动通过平衡位置时开始计时，则振动方程为$\underline{x=A\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}$，这时初相为$\underline{-\frac{\pi}{2}}$。



1863．一个简谐振动的方程是$x=5\cos\left(2\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$厘米，这个简谐振动的最大位移值为 5 厘米，最大速度值为 $\underline{10\pi}$ 厘米/秒，最大加速度值为 $\underline{20\pi^2}$ 厘米/秒^2，频率 1 赫，初相为$\underline{\pi/2}$，在 1 秒内物体运动的路程是 20 厘米。

1864．一物体作简谐振动，周期为 T，它在第一个周期内

(1)由平衡位置到位移最大处需要的时间是 $\underline{T/4}$；

(2)由平衡位置到最大位移的 1/2 处需要的时间是 $\underline{T/12}$；

(3)由最大位移的 1/4 处到最大位移处需要的时间是 $\underline{0.21T}$。

1865．有一个周期 T=6 秒的简谐振动，从正向最大位移处开始振动，它第一次到达正向位移为振幅二分之一处的时间是 $\underline{1}$ 秒，它每次到达该处的时间一般表达式是$\underline{t_1=\left(n+\frac{1}{6}\right)T,(n=0,1,2,3\cdots);t_2=\left(n-\frac{1}{6}\right)T,(n=1,2,3\cdots)}$。

1866．周期为 T 的一个简谐振动，当它的位移为 x_0 时，速度为 v，那么它的振幅$\underline{A=\sqrt{x_0^2+\frac{T^2v^2}{4\pi^2}}}$，最大速度的绝对值$|v_{max}|=\underline{\sqrt{\frac{4\pi^2x_0^2}{T^2}+v^2}}$.

最大加速度的绝对值$|a_{max}|=\underline{\frac{2\pi}{T}\sqrt{\frac{4\pi^2x_0^2}{T^2}+v^2}}$。

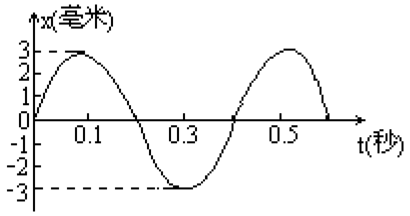
1867．自同一时刻开始计时的四个简谐振动的方程是

$x_1 = 5\cos 628t$ 厘米；　　$x_2 = 10\sin\left(628t + \frac{\pi}{2}\right)$ 厘米

x_3=10cos314t 厘米；　　x_4=10cos157t 厘米。其中，

振相同的是 $\underline{x_2、x_3和x_4}$,频率相同的是 $\underline{x_1和x_2}$，相位相同的是 $\underline{x_1和x_2}$。

1868．已知某弹簧振子的振动图象如图所示，振子质量为 8.1 克，则此振子的振幅为 <u>3 毫米</u>，频率为 <u>2.5 赫</u>，弹簧的倔强系数为 <u>2 牛/米</u>；当 t=0.2 秒时，振子的位移为 <u>0</u>，速度为 <u>0.047 米/秒</u>，加速度为 <u>0</u>；当 t=0.3 秒时，振子的位移为 <u>-3 毫米</u>，速度为 <u>0</u>，加速度为 <u>0.74 米/秒²</u>。

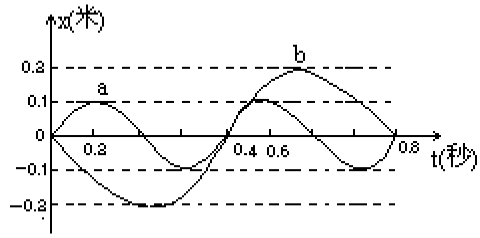


1869．如图所示，有 a、b 两个质点的振动图象。

(1)质点 a 的振动方程为

$\underline{x_a = 0.1\cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{2}\right)}$米。

质点 b 的振动方程为

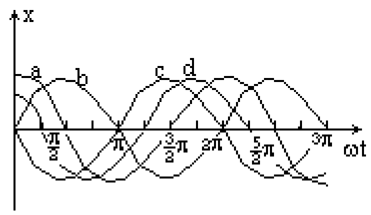


$\underline{x_b = 0.2\cos\left(2.5\pi t + \frac{\pi}{2}\right)}$米。

(2)如果 a、b 是两个弹簧振子，m_a：m_b=1：2，它们的倔强系数的比 $\underline{k_a：k_b=2：1}$,振动能量的比 $\underline{E_a：E_b=1：2}$。

(3)如果 a、b 是两个单摆的摆球，摆球质量的比 m_a：m_b=1：2，它们的摆长的比 l_a：l_b=<u>1：4</u>。

1870．如图所示，a、b、c、d 是四个振动的图象，如果振动方程的形式是$x = A\cos(\omega t + \varphi)$，则它们的初相角$\varphi_a = \underline{0}, \varphi_b = \underline{-\frac{\pi}{2}}, \varphi_c = \underline{+\frac{\pi}{2}}, \varphi_d = \underline{+\frac{\pi}{4}}$。



它们之间相位关系是

(1)a振动<u>超前</u>b振动$\frac{\pi}{2}$。

(2)c振动<u>超前</u>d振动$\frac{\pi}{4}$。

(3)b振动<u>超前（或落后）</u>c振动π。

(4)a振动<u>落后</u>c振动$\frac{\pi}{2}$。

(5)d振动<u>超前</u>b振动$\frac{3\pi}{4}$。

1871．如图所示，x_1和x_2是两个简谐振动的图象，它们的振动方程分别为$x_1=A_1\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$，$x_2=A_2\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$，且$A_1>A_2$。则它们的合振动方程为$\underline{x=(A_1-A_2)\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}$。周期为$\underline{\frac{2\pi}{\omega}}$，振幅为$\underline{A_1-A_2}$。并在图上画出合振动的振动图象。

1872．一个质点同时参加两个同一直线上的简谐振动，$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$；$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$，则合振动的振幅为

$$\begin{aligned}A&=\sqrt{A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos[180-(\varphi_2-\varphi_1)]}\\&=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},\end{aligned}$$

合振动的初相角

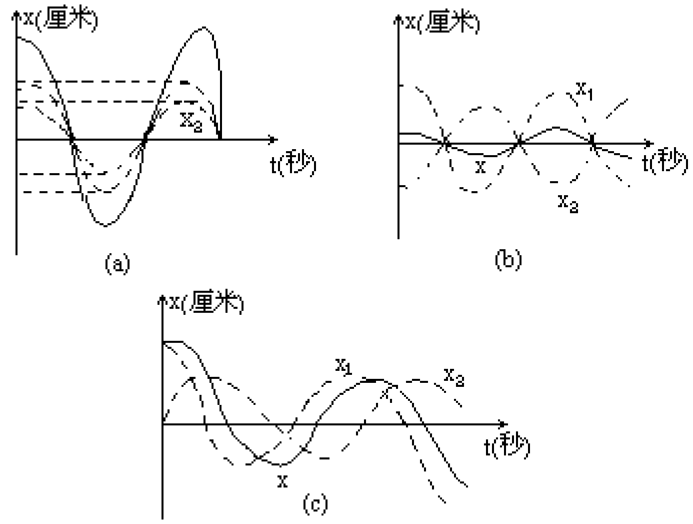
$$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2},$$

合振动方程为 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$。

(1)现在有一质点参加的两个同一直线上的简谐振动为：$x_1=4\cos\times\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$厘米，$x_2=3\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$厘米，则合振动的振幅$A=\underline{7}$<u>厘米</u>，合振动的初相角$\varphi=\underline{\frac{\pi}{6}}$，合振动方程为$x=\underline{7\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)}$<u>厘米</u>，在图(a)上画出合振动的图象。

(2)如果质点参加的两个同一直线上的简谐振动为$x_1=4\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$

厘米，$x_2=3\cos\left(2t-\frac{5}{6}\pi\right)$厘米，则合振动的振幅$A=$ 1厘米，合振动的初相角$\varphi=\frac{\pi}{6}$，合振动的方程为$x=1\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$厘米。在图(b)上画出合振动的图象。



(3)如果质点参与的两个同一直线上的简谐振动为$x_1=4\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)$厘米，$x_2=4\cos\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$厘米，则合振动的振幅$A=$ 4厘米，合振动的初相角$\varphi=-\frac{\pi}{6}$，合振动的方程为$x=4\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)$厘米，在图(c)上画出合振动的图象。

选择题

1873．作受迫振动的物体到达稳定状态时 [ ]

A．一定作简谐振动；

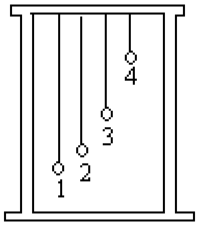
B．可能阻尼振动；

C．一定按策动力的频率振动；

D．一定发生共振。

答 C

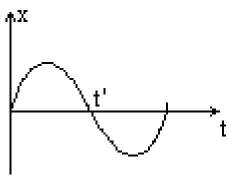
1874．如图所示。四个摆的摆长分别为 l_1=2 米，l_2=1.8 米，l_3=1 米，l_4=0.5 米。现用一个周期等于 2 秒的策动力，使它们作受迫振动，那么当它们的振动稳定时，下列判断中正确的是 [ ]



A．四个摆的周期和振幅都相等；
B．四个摆的周期不等，但振幅相等；
C．四个摆的周期相等，但振幅不等；
D．摆 3 的周期的 2 秒，振幅最大。

答 C、D

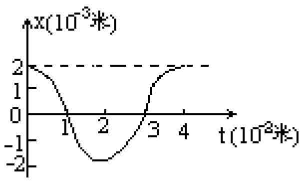
1875．如图所示，在振动图象的 t’时刻，正确的说法是



A．质点速度最大。加速度最大；
B．质点速度最大，加速度等于零；
C．质点速度等于零，加速度最大；
D．质点速度等于零，加速度等于零。

答 B

1876．一个质点作简谐振动的图象如图所示。下列判断中正确的是



A．在 $t=4\times10^{-2}$ 秒时质点速度达到最大值；
B．振幅为 2×10^{-2} 米，频率为 25 赫；
C．质点在 0 到 1×10^{-2} 秒的时间内，其速度和加速度方向相同；
D．在 $t=2\times10^{-2}$ 秒时，质点的位移为负值，加速度也为负值。

答 B、C

1877．有一个周期为 12 秒的简谐振动，从正向最大位移处开始振动，它到达反向位移等于振幅二分之一处，所用的时间可能是

A．4 秒；	B．8 秒；
C．12 秒；	D．16 秒；
E．20 秒；	F．24 秒。

答 A、B、D、E

1878．起始时刻相同的四个简谐振动，它们的方程是

$$x_1 = 4\cos 120\pi t$$ **厘米；**

$$x_2 = 4\cos\left(60\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$ **厘米；**

$$x_3 = 8\cos\left(120\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$ **厘米**

$$x_4 = 8\left(60\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$ **厘米**

(1)这四个简谐振动中，振幅相等的是

A．x_1x_2；　B．x_3x_4；　C．x_1x_3；

D．x_2x_4　E．$x_1x_2x_3$　F．$x_2x_3x_4$

答 A、B

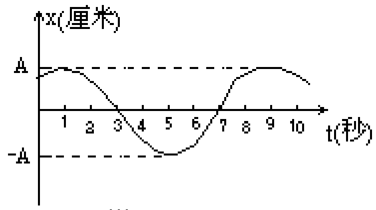
(2)这四个简谐振动中，频率相同的是
[可供选择的答案同第(1)小题。]

答 C、D

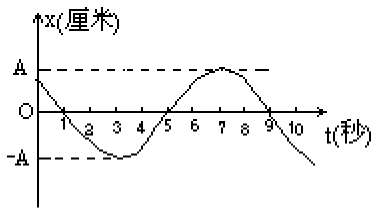
(3)这四个简谐振动中，相位相同的是
[可供选择的答案同第(1)小题。]

答 D

1879．由简谐振动的图象选出对应的振动方程。



(1)



(2)

(1)图 1 所对应的振动方程是

A．$x = A\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)$ **厘米；**

B．$x = A\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$ **厘米；**

C．$x = 2A\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)$ **厘米；**

D．$x = 2A\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$ **厘米；**

E．$x = A\sin\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{4}\right)$ **厘米；**

F．$x = A\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$ **厘米；**

答 A、F

(2)图(2)所对应的振动方程是
[可供选择的答案同第(1)小题。]

答 B

1880．有一个简谐振动的振动图线如图所示。正确的判断是

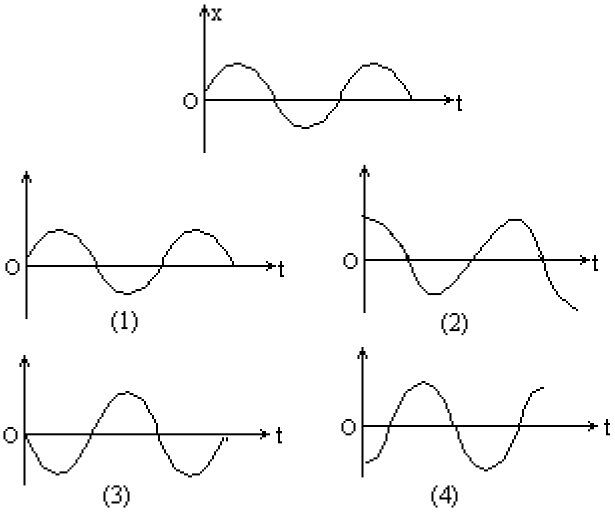
A．图(2)可作为速度—时间图象；

B．图(3)可作为加速度—时间图象；

C．图(4)可作为回复力—时间图象；

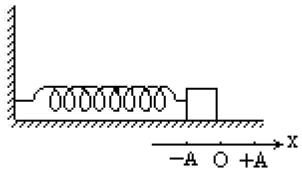
D．图(1)可作为加速度—时间图象；

E．图(3)可作为回复力—时间图象。

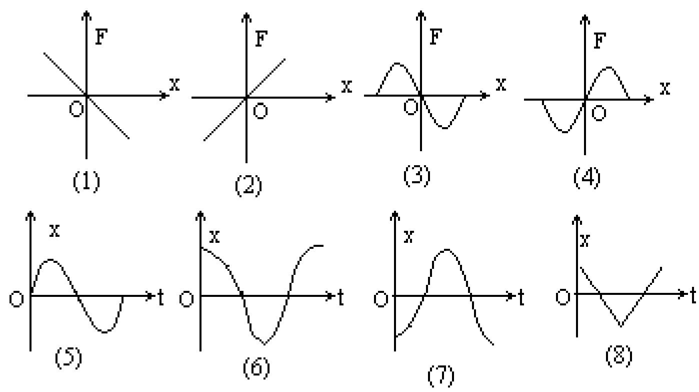


1881．如图所示，一个弹簧一端固定，一端拴一木块，台面光滑，O 点是平衡位置。

图(1)—图(4)表示力 F 和位移 x 的不同关系；图(5)—图(8)表示位移 x 和时间的不同关系。



为了表示图中物体 m 的 F–x，x–t 关系，正确的选择是



A．图(1)和图(5)；　　　　　　B．图(1)和图(6)；

C．图(2)和图(7)；　　　　　　D．图(4)和图(8)；

E．图(3)和图(5)；　　　　　　F．图(4)和图(7)；

1882．有一个弹簧振子，振子质量为 100 克，弹簧的倔强系数为 0.1 牛/米，如果把振子拉到位移为+5 厘米处无初速释放，则它的振动方程是

A．x=5cost 厘米；

B．x=5sint 厘米；

C．x=10cos2πt 厘米

D．x=10sin2πt 厘米。

答 A

如果上述弹簧振子静止在平衡位置，当用锤子冲击，使它以 0.1 米/秒的初速度向负位移方向运动，则弹簧振子的振动方程是

A．$x=5\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$厘米；

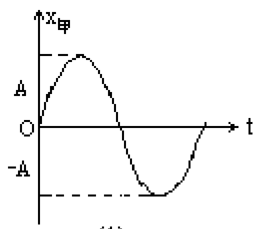
B．$x=5\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$厘米；

C．$x=10\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$厘米；

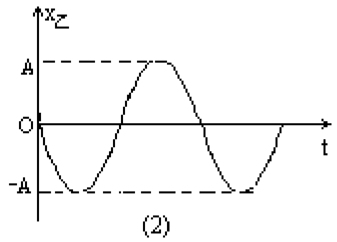
D．$x=10\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)$厘米；

答 C

1883．甲、乙、丙三个单摆的振动图象如图(1)、(2)、(3)所示。这些图象表明正确的关系判断为



(1)



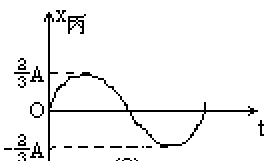
(2)

A．质量关系一定是 $m_甲=m_乙>m_丙$；

B．摆长关系一定是 $l_甲=l_丙>l_乙$；

C．最大偏角关系一定是$\alpha_乙=\alpha_甲>\alpha_丙$；

D．周期关系一定是 $T_甲=T_乙>T_丙$。



(3)

答 B、C

1884．判断质点运动轨迹

(1)质点沿 x 方向的振动方程为 $x=A_1\cos\omega t$；沿 y 方向的振动方程为 $y=A_2\sin\omega t$，$A_1\neq A_2$。

A．直线；　　　　　B．双曲线；

C．椭圆；　　　　　D．圆。

答 C

(2)质点沿 x 方向和 y 方向的振动方程分别是 $x=A_1\cos\omega t$、$y=A_2\cos\omega t$，则合振动轨迹是

[可供选择的答案同第(1)小题。]

答 A

(3)质点沿 x 方向和 y 方向的振动方程分别是 $x=A_1\cos\omega t$、$y=A_1\sin\omega t$，则合振动轨迹是

[可供选择的答案同第(1)小题。]

答 D

1885．两个同方向的简谐振动具有相同的振幅和周期，当它们的合振动的振幅和一个分振动的振幅相等，则两个分振动的相位差为

A．$\frac{\pi}{6}$；　　　　　B．$\frac{\pi}{3}$；

C．$\frac{\pi}{2}$；　　　　　D．$\frac{2\pi}{3}$。

答 D

计算题

1886．火车在铁路上行驶时，每次经过接轨处就受到一次震动，迫使车厢上下振动。如果车厢放在倔强系数 $k=6.13\times10^5$ 牛/米的等效弹簧上面，每根铁轨长为 12.5 米，车厢质量为 5.5 吨。问火车行驶速度多大时，车厢的振动特别强烈？

[分析]　车厢和弹簧组成一个振动系统，它们的固有振动周期由弹簧振子的周期公式决定，即

$$T_{固}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}。$$

如果车厢发生特别强烈的振动，表示系统已发生共振，这时的策动力由车厢在运动中车轮和铁轨接头处撞击而产生。共振条件是 $T_{固}=T_{策}$。

[解答]　因为

$$T_{固}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}。$$

$$T_{策}=\frac{s}{v}$$

所以

$$\frac{s}{v}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

$$v=s/2\pi\sqrt{m/k}=\frac{12.5}{2\times3.14\times\sqrt{\frac{5500}{6.13\times10^5}}}\text{米/秒}$$

$$=21.0\text{米/秒}。$$

1887．一个用余弦函数表示的简谐振动的周期为12秒，初相位为$-\frac{\pi}{2}$，这个简谐振动自$t=0$起，至少经多少时间，位移才达到振幅的一半？

［解答］ 设其振动方程为

$$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)。$$

由题设要求得

$$\pm\frac{1}{2}A=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}=\pm\frac{\pi}{3},$$

$$t_1=\frac{5}{12}T=\frac{5}{12}\times12\text{秒}=5\text{秒；}$$

$$t_2=1\text{秒。}$$

所以至少经1秒钟位移才达到振幅的一半。

1888．有一个简谐振动，开始计算时间时的位移为x_0，速度为v_0，速度为v_0，如果振动周期为T，求它的振幅和初相角。

［解答］简谐振动的位移的表示式为$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right)$，速度的表示式为$v=-A\frac{2\pi}{T}\sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0)$。

在开始时刻 $t=0$

得 $$x_0=A\cos\varphi_0 \qquad (1)$$

$$v_0=-\omega A\sin\varphi_0,\quad \text{因}\omega=\frac{2\pi}{T}$$

得 $$\frac{v_0T}{2\pi}=-A\sin\varphi_0 \qquad (2)$$

由(1)、(2)式解

得 $$x_0^2+\frac{v_0^2T^2}{4\pi^2}=A^2(\sin^2\varphi_0+\cos^2\varphi_0)=A^2。$$

所以振幅 $$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2T^2}{4\pi^2}}.$$

(2)式÷(1)式得

$$\frac{\frac{v_0T}{2\pi}}{x_0}=-\frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0}=-tg\varphi_0,$$

所以初相角 $$\varphi_0=tg^{-1}\left(-\frac{v_0T}{2\pi x_0}\right)。$$

1889．某一系统作简谐振动，周期为T，初相位为零。问哪些时刻物体的动能和势能相等。

［解答］振动物体的动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2\omega t$，

振动物体的势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$，

由题意，$E_k=E_p$

得 $\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$，因为 $\omega^2 = \frac{k}{m}$

得 $tg^2(\omega t)=1$，$tg\omega t=\pm 1$。

所以 $\frac{2\pi}{T}t = (2n+1)\frac{\pi}{4}$，

$$t = \frac{1}{8}(2n+1)T, n = 0、1、2、3\cdots\cdots。$$

1890．有一个物体悬于弹簧的下端并作简谐运动。简谐振动方程为 $x=A\cos\omega t$。

(1)当物体的位移为振幅的一半时,这个振动系统的动能和势能各占总能量的百分之几？

(2)当物体在平衡位置时，弹簧的长度经原长伸长了 s。试求其周期。

［解答］ (1)设初相为零，由简谐振动速度公式得

$$v = -\omega A\sin\omega t = -\omega\sqrt{A^2 - A^2\cos^2\omega t},$$

所以 $v = -\omega\sqrt{A^2 - x^2}$。当 $x = \frac{A}{2}$ 时，

即得 $|v| = \sqrt{\omega^2\left[A^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2\right]} = \sqrt{\frac{k}{m}\cdot\frac{3A^2}{4}}$,

此时的动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left[\frac{k}{m}\cdot\frac{3A^2}{4}\right] = \frac{3}{8}kA^2$

总能量应为 $E = \frac{1}{2}kA^2$,

得 $\frac{E_k}{E} = \frac{3}{4} = 75\%$。

此时振动系统的势能 $E_p = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}kA^2$,

得 $\frac{E_p}{E} = \frac{1}{4} = 25\%$。

(2)已知物体在平衡位置时，弹簧伸长了 s，

则有 $mg-ks=0$

$$k = \frac{mg}{s},$$

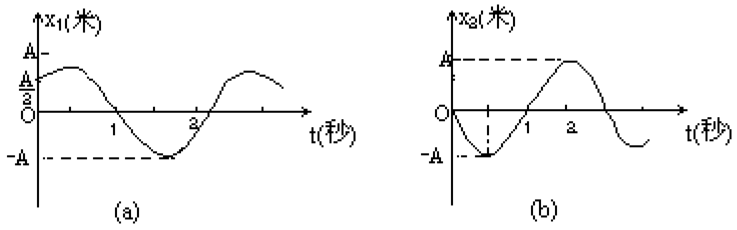
得 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{s}}} = 2\pi\sqrt{\frac{s}{g}}$.

1891．根据图(a)、(b)所示的振动图线，分别写出这两个简谐振动

的振动方程。

［解答］　如果用余弦函数表示简谐振动的振动方程式，从图(a)得

$$\frac{A}{2}=A\cos(0+\varphi_0),$$



$\varphi_0=\pm\frac{\pi}{3}$，因为在 $t=0$ 时，质点沿正方向运动，应舍去正号，$\varphi_0=-\frac{\pi}{3}$，

即初相角等于 $-\frac{\pi}{3}$。由图(a)可知 $t=1$ 秒时相位角应为 $\frac{\pi}{2}$，

即
$$A\cos\left(\omega\cdot 1-\frac{\pi}{3}\right)=0,$$
$$\omega\cdot 1-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},$$
$$\frac{2\pi}{T}\cdot 1=\frac{5\pi}{6},T=\frac{12}{5}\text{秒。}$$

所以
$$x_1=A\cos\left(\frac{5\pi}{6}t-\frac{\pi}{3}\right).$$

从图(b)中得

$$0=A\cos(\omega\cdot 0+\varphi_0),$$

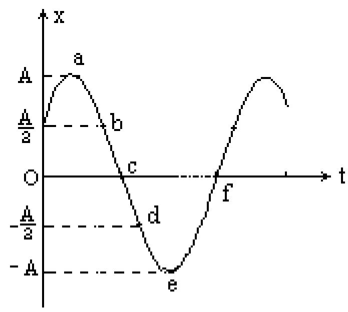
$\varphi_0=\pm\frac{\pi}{2}$，又因为在 $t=0$ 时质点沿 x 轴负方向运动，应舍去负值，

即 $\varphi_0=+\frac{\pi}{2}$。从图(b)可知当 $t=1.5$ 秒时相位角 $\omega t+\frac{\pi}{2}=2\pi$，

即
$$A\cos\left(\omega\times 1.5+\frac{\pi}{2}\right)=A,$$
$$\omega\times 1.5+\frac{\pi}{2}=2\pi,$$
$$\omega=\pi,\qquad T=2\text{ 秒。}$$

所以
$$x_1=A\cos\left(\pi t+\frac{\pi}{2}\right)\text{。}$$

1892．已知周期为 T_0，试分别写出图中所示简谐振动振动方程的正弦及余弦表达式。并分别写出 a、b、c、d、e、f 各点的位相；分别指出 a、b、c、d、e、f 各点对应的时刻 t 是多少？



[解答] 由图可知，当$t=0$时，质点的位移为$+\frac{A}{2}$，由余弦振动方程得

$$\frac{A}{2}=A\cos\varphi_0,\quad \cos\varphi_0=\frac{1}{2},$$

得 $$\varphi_0=\pm\frac{\pi}{3}。$$

由于质点沿x正方向运动，φ_0应取负值，即$\varphi_0=-\frac{\pi}{3}$。

余弦振动方程是 $x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{3}\right)$。

由正弦振动方程得

$$\frac{A}{2}=A\sin\varphi_0,\quad \sin\varphi_0=\frac{1}{2}$$

$$\varphi_0=+\frac{\pi}{6}\text{或}+\frac{5\pi}{6},$$

由于质点沿x正方向运动，φ_0取$+\frac{\pi}{6}$值。

正弦振动方程是$x=A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{6}\right)$。

取余弦函数时，

相位角$\varphi_a=0,\varphi_b=\frac{\pi}{3},\varphi_c=\frac{\pi}{2},\varphi_d=\frac{2}{3}\pi,\varphi_e=\pi,\varphi_f=\frac{3}{2}\pi$或$-\frac{\pi}{2}$。

时刻$t_a=\frac{T}{6},t_b=\frac{T}{3},t_c=\frac{5}{12}T,t_d=\frac{T}{12},t_e=\frac{2}{3}T,t_f=\frac{11}{12}T$。

取正弦函数时，

相位角$\varphi_a=\frac{\pi}{2},\varphi_b=\frac{5}{6}\pi,\varphi_c=\pi,\varphi_d=-\frac{5}{6}\pi,\varphi_e=-\frac{\pi}{2},\varphi_f=0$。

时刻和取余弦函数时相同。

1893．一个振动物体，它的位移 x 和时间 t 的关系如图(a)所示。试根据此图象和相应的 v–t、a–t 图(b)，求：

(1)它的振动周期、频率和振幅；

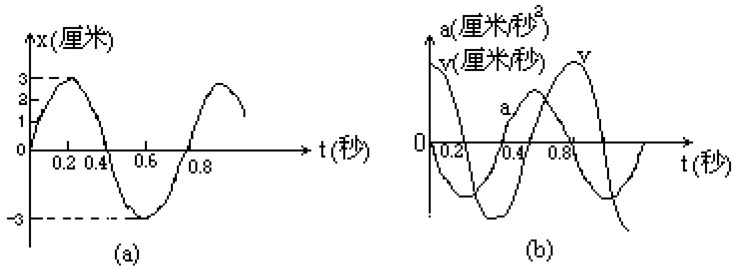
(2)它的振动方程；

(3)速度最大的时刻，速度最小的时刻。

(4)加速度最大的时刻，加速度最小的时刻。

[解答] (1)由图象(a)可知，完成一次全振动的时间 T=0.8 秒，

频率$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{0.8}$赫$=1.25$赫



振幅 A=3 厘米=3×10^{-2}米。

(2)设物体的振动方程为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

由$A=3$厘米，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0.8}$秒$^{-1}=2.5\pi$秒$^{-1}$，

又当 t=0.2 秒时，x=A。

得 $$A=A\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right),\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=1,$$

所以 $$\varphi=-\frac{\pi}{2}。$$

运动方程为 $$x=3\cos\left(2.5\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\text{厘米} \qquad (1)$$

(3)简谐振动的速度公式为

$$v=-7.5\pi\sin\left(2.5\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\text{厘米/秒} \qquad (2)$$

由公式或图象(b)都可知在 t=0 秒、0.4 秒、0.8 秒时速度最大；在 t=0.2 秒、0.6 秒时速度最小。

(4)由 $$a=\frac{F}{m}=\frac{-kx}{m}=-\omega^2x,$$

得 $$a=-18.75\pi^2\cos\left(2.5\pi t-\frac{\pi}{2}\right)\text{米/秒}^2 \qquad (3)$$

由公式或 a–t 图象(b)可知在 t=0.2 秒、0.6 秒时加速度最大；在 0 秒、0.4 秒、0.8 秒时加速度最小。

1894．如图(a)所示是简谐振动的 v–t 图线。试求该简振动的振幅和它的余弦形式的振动方程，并画出它的 x–t 图线。

[解答]由图(a)可知振动的周期$T=8$秒，$v_{max}=1$米/秒，频率$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{4}$弧度/秒。

所以 $$A=\frac{v_{max}}{\omega}=\frac{4}{\pi}\text{米。}$$

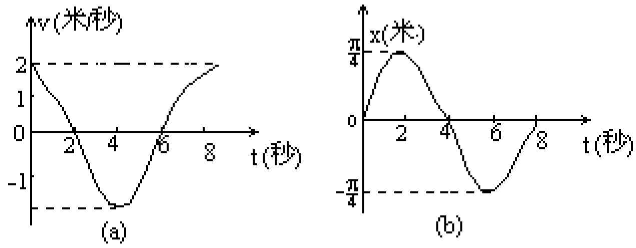
由简谐振动速度公式

$$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)$$

得 t=0 时 $v_{max}=-\omega A\sin\varphi_0$，而 $v_{max}=\omega A$，

所以 $$\sin\varphi_0=-1,\varphi_0=-\frac{\pi}{2}.$$

简谐振动方程为



$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$
$$=\frac{4}{x}\cos\left(\frac{\pi}{4}t-\frac{\pi}{2}\right)\text{米。}$$

x–t 图如图(b)所示

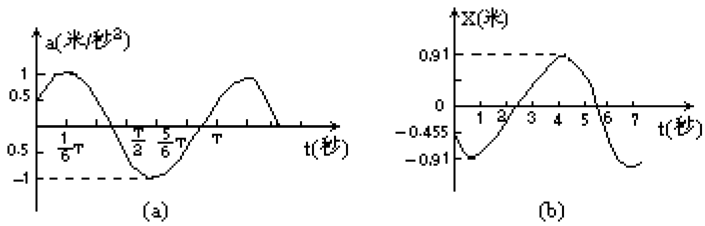
1895．图(a)中所示是简谐振动的 a–t 图象。如果图中的 T=6 秒。试求：

(1)简谐振动的振幅 A 和最大速度 v_{max}。

(2)如果用余弦函数表示该振动的方程，则初相角为多少？

(3)画出该振动的振动图线。

[解答] (1)根据简谐振动的加速度公式



$$a_{max}=\omega^2A=\frac{4\pi^2}{T^2}A,$$

得 $$A=\frac{T^2}{4\pi^2}a_{max}=\frac{6^2}{4\pi^2}\times1\text{米}=0.91\text{米。}$$

根据简谐振动的速度公式

$$v_{max}=\omega A=\frac{2\pi}{T}A=\frac{Ta_{max}}{2\pi}$$
$$=\frac{6\times1}{2\times3.14}\text{米/秒}=0.96\text{米/秒}$$

(2)简谐振动的加速度公式

$$a=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi),$$

当 t=0 时 a=0.5 米/秒^2，

即 $$0.5=-\cos\varphi$$

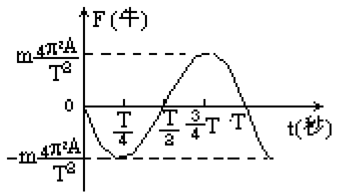
得 $\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}$，因a在$t=0$附近，随着t增大而增大，因此应取正值，$\varphi=+\frac{2\pi}{3}$。

(3)把简谐动方程写出为

$$x=0.91\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{2\pi}{3}\right)\text{米。}$$

图(b)为振动图线。

1896．某一质点的质量为m，其振动方程为$x=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t-\frac{\pi}{2}\right)$。试绘出作用在质点上的力 F 随时间 t 的变化图线。



[解答] 由简谐振动的加速度公式

$$a=-\omega^2x,$$

得 F=ma

$$=-m\omega^2A\cos\left(\frac{2\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=-m\omega^2A\sin\frac{2\pi}{T}t$$

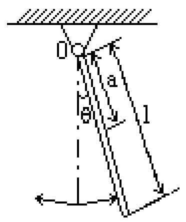
$=-m\frac{4\pi^2A}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}t$。由此式可作$F-t$图线如图。

1897．如图所示，一根长度为 l，质量为 m 的均匀细棒，上端挂在光滑的水平轴线上。使细棒作小角度摆动，求它的周期和同长度单摆周期的比。

[解答] 质量均匀分布的细棒的端点O的转动惯量$I=\frac{1}{3}ml^2$。细棒绕0点摆动的周期为

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

式中 I 为转动惯量，a 为质心离转轴 0 点的距离，所以周期



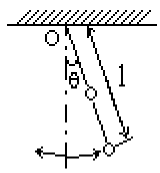
$$T=2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ml^2}{mg\frac{1}{2}l}}=2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}。$$

单摆的周期

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

所以 $$\frac{T}{T'}=\frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}。$$

1898．有一根长为 l 的轻质细棒，在中点和下端固定的质量都是 m 的小球，棒的上端悬挂在光滑的水平轴 O 上，使棒绕细轴 O 作小角度的摆动，求这一装置的振动周期。



［解答］　这是一个物理摆，它的振动周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mga}},$$

式中转动惯量 $I=m\left(l^2+\frac{l^2}{4}\right)=\frac{5}{4}ml^2$,

a 为系统的质心离 O 点的距离

$$a=\frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}l,$$

所以 $$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mga}}=2\pi\sqrt{\frac{\frac{5}{4}ml^2}{2mg\times\frac{3}{4}l}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{5l}{6g}}。$$

1899．一根质量为 m、长为 l 的均匀细棒，在下端固定一个半径为 R、质量为 m 的均匀圆盘，上端挂在方向垂直于纸面的转轴 O 上，如图所示。求这一装置作小角度振动时的周期。

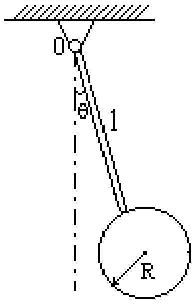
［解答］　细棒对 O 点的转动惯量

$$I_1=\frac{1}{3}ml^2$$

圆盘对 O 点的转动惯量

$$I_2=\frac{1}{2}mR^2+m(l+R)^2$$

该装置质心离 o 的距离。



$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}+l+R\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}l+R\right),$$

所以 $$T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mga}}=2\pi\sqrt{\frac{I_1+I_2}{2mga}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{4}ml^2+\frac{3}{2}mR^2+2mlR}{2mg\times\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}l+R\right)}}$$

$$=2\pi\sqrt{\frac{8l^2+9R^2+12lR}{3(3l+2R)g}}$$

1900．试求下列两组简谐振动合成后所得的合振幅

(1) $x_1=5\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)$厘米；

$x_2=5\cos\left(3t+\frac{7}{3}\pi\right)$厘米。

(2) $x_1=5\cos\left(3t+\frac{\pi}{3}\right)$厘米；

$x_3=5\cos\left(3t+\frac{4}{3}\pi\right)$厘米；

［分析］ 当两个同频率的简谐振动的振动方向相同时，合振动的振幅由它们的初相位差所决定。如果它们的初相位差为(2kπ)，合振幅为两个振动振幅之和。如果它们的初相位差为(2k+1)π，合振幅为两个振动振幅之差。式中的 k 是整数。

［解答］ 第(1)组中相位差等于 2π，

所以 $A=A_1+A_2=(0.05+0.05)$米$=0.10$ 米

第(2)组中的相位差等于π，

所以 $A=A_1-A_2=0$。

1901．一质点参与两个具有相同周期和相同初相角的简谐振动。振动的振幅 $A_1=40$ 厘米，$A_2=30$ 厘米。求以下两种情况合振动的振幅

(1)两振动是同方向的；

(2)两振动是相互垂直的。

[解答] (1)两振动同相时，合振幅 $A=A_1+A_2=$（40+30）厘米=70 厘米。

(2)两振动垂直时，

因为 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$

所以 $A=\sqrt{(40)^2+(30)^2}$厘米$=50$厘米。

1902．有两个方向一致，并具有相同振幅和周期的简谐振动，它们产生的合振动的振幅和分振动的振幅相同，求分振动相位差。

[解答] 因为 $A_{合}=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$，$A_{合}=A_1=A_2$。

所以 $A=\sqrt{A^2+A^2+2A^2\cos\Delta\varphi}$

$1=2+2\cos\Delta\varphi$

$$\cos\Delta\varphi=-\frac{1}{2}，$$

$$\Delta\varphi=\pm\frac{2\pi}{3}。$$

1903．一个质点同时参与两个沿同一直线上的简谐振动，两个振动方程分别为

$$x_1=4\cos\left(2t+\frac{\pi}{6}\right)、x_2=3\cos\left(2t-\frac{5}{6}\pi\right)。$$

试求合振动的振幅和初相位。式中 x 以厘米为单位，t 以秒为单位。

[解答] 由公式

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$
$$=\sqrt{4^2+3^2+2\times4\times3\cos(-\pi)}\text{厘米}$$
$$=1\text{厘米}=0.01\text{米}，$$

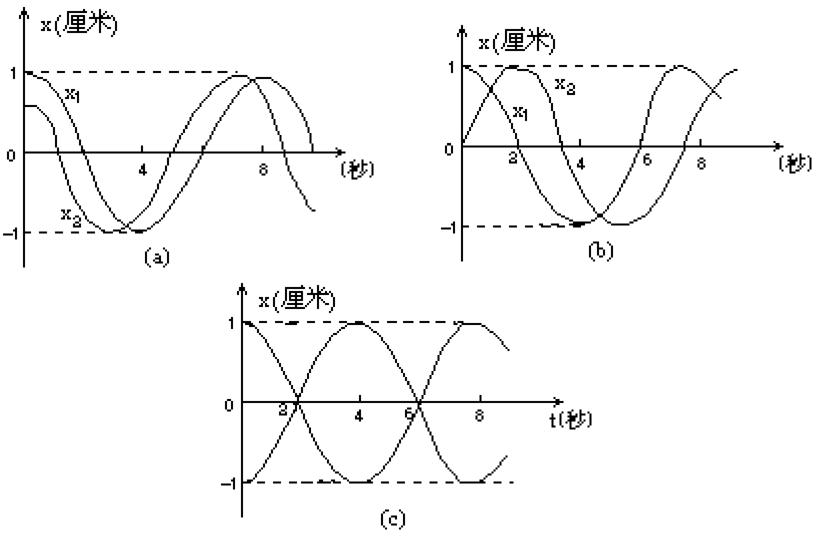
$$\varphi=tg^{-1}\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$
$$=tg^{-1}\frac{4\times\frac{1}{2}+3\times(-\frac{1}{2})}{4\times\sqrt{3}/2+3\times(-\sqrt{3}/2)}=tg^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{\pi}{6}。$$

1904．两个简谐振动的振幅相同，$A_1=A_2=1$ 厘米，周期也相同，$T_1=T_2=8$ 秒。它们的相位差 $\varphi_2-\varphi_1$ 分别等于(1)$\pi/4$；(2)$-\pi/2$；(3)π。

画出它们相应的位移—时间图线。（规定振动方程为余弦形式）

[解答] (1)设 x_1 的初相角为0，则 x_2 的初相角为 $\frac{\pi}{4}$，图象如图(a)所示。

(2)x_1 的初相角为 0，x_2 的初相角为 $-\frac{\pi}{2}$，图象如图(b)所示。



(3)x_1的初相角为 0，x_2的初相角为π，图象如图(c)所示。

1905．一个质点同时参与两个同方向的振动，振动方程分别为

$$x_1 = A_1\cos\left(10\pi t + \frac{3}{4}\pi\right)；$$

$$x_2 = A_2\cos\left(10\pi t + \frac{y}{4}\pi\right)。$$

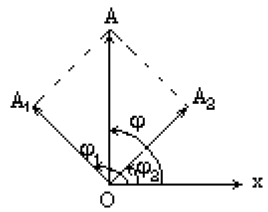
设 $A_1=A_2$，试求：

(1)当 y=1 时合振动的振幅和初相；

(2)当 y 为何值时，合振动的振幅最大？y 为何值时振幅为最小？

［解答］　(1)根据题意可知

$A_1 = A_2$；$\varphi_1 = \frac{3}{4}\pi$，$\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$，如图所示，用合成法可求出合振动的大小和初相位值，即$A = 2A_2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}A_2$，



$$\angle AOA_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{4},$$

合振动的初相　　$\varphi = \varphi_2 + \angle AOA_2 = \frac{\pi}{2}$。

(2)由合成振幅公式可知

当　$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = 1$ 时，$A=2A_1$ 达到最大，

即　　　　　　$\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$　(k=0,±2,±3…)

$$\frac{3}{4}\pi-\frac{y}{4}\pi=2k\pi,$$

所以　　　　　y=3−8k。(k=0,±1,±2…)

当　　　　　cos($\varphi_2-\varphi_1$)=−1 时，A=0，达到最小，

即　　　　　　$\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi$　(k=0±1,±2…)

$$\frac{3}{4}\pi-\frac{y}{4}\pi=(2k+1)\pi$$

所以　　　　　y=−1−8k，　(k=0,±1,±2…)

1906．有两个互相垂直的振动 x=0.10cos(10πt+60°)米，y=0.05cos(10πt+60°)米。如果这二个振动叠加起来，求合振动的轨迹和合振动的方程。

[解答]　有两个具有相同周期的互相垂直的简谐振动被叠加时，质点合振动的轨迹方程是

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)。$$

本题中已知$\varphi_2-\varphi_1=0$，因此轨迹方程为

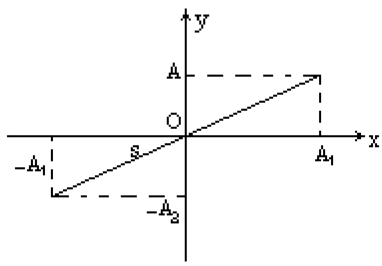
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}=0$$

得　　　　$$y=\frac{A_2}{A_1}x=\frac{0.05}{0.10}x=0.5x,$$

由此可见,合振动将沿斜率$k=\frac{A_2}{A_1}$,过原点的一条直线进行,如图所示.

因为斜率 k=0.5,求得 a=26°34'。a 为合振动方向与 x 方向夹角。

合振动的周期等于分振动的周期；合振动的振幅



$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}=\sqrt{(0.10)^2+(0.05)^2}\text{米}$$
$$=0.112\text{米}。$$

如果以轨迹直线斜上方向为正方向，合振动的振动方程为

$$s=0.112\sin\left(10\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\text{米}。$$

1907．一个质点同时参与两个互相垂直的振动，这两个振动的方程是 x=2sinωt 米和 y=2cosωt 米。求这一质点的运动轨迹。

[解答]　质点的轨迹方程是

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1),$$

因为$x=2\sin\omega t=2\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$,得$\varphi_2=0,\varphi_1=-\frac{\pi}{2},\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$.

可得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1$。

此式表示为半径是 2 米的圆。所以这一质点运动的轨迹是半径为 2 米的圆。

1908．一质点同时参与两个互相垂直的简谐振动，振动方程分别为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_1),$$

$$y=2A\cos(2\omega t+\varphi_2)。$$

如果$\varphi_1=45°$，$\varphi_2=90°$，试求合振动的轨迹方程，并判断这是一条什么曲线。

［解答］ 根据题设条件两振动方程为

$$x=A\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right) \quad (1)$$

$$y=2A\cos\left(2\omega t+2\times\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2A\left[2\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)-1\right] \quad (2)$$

把(1)式代入(2)式得

$$y=\frac{4x^2}{A}-2A \quad (3)$$

由(3)式可知合振动的轨迹是一条抛物线。

1909．质量为 m 千克的质点同时参与互相垂直的两个振动，它的振动方程分别为

$$x=0.06\cos\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)\text{米，}$$

$$y=0.03\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)\text{米。}$$

求：(1)质点的运动轨迹；

(2)质点在任一位置所受的作用力。

[解答](1)从题设条件知:$A_1=0.06$米,$A_2=0.03$米,$\varphi_1=\frac{\pi}{3},\varphi_2=-\frac{\pi}{6}$。

轨迹方程为

$$\frac{x_2}{A_1^2}+\frac{y_2}{A_2^2}-2\frac{xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)\sin^2(\varphi_2-\varphi_1),$$

因为 $$\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\cos\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=0,$$

$$\sin(\varphi_2-\varphi_1)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)=1,$$

所以 $$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1,$$

即 $$\frac{x^2}{(0.06)^2}+\frac{y^2}{(0.03)^2}=1。$$

这是一个长轴为，2×0.06 米，短轴为 2×0.03 米的椭圆。

(2)由简谐振动的加速度公式

$$a_x=\omega_x^2 x,$$

$$a_y=\omega_y^2 y,$$

而$\omega_x=\omega_y=\frac{\pi}{3}$,

所以 $$a_x=-\frac{\pi^2}{9}x,$$

$$a_y=-\frac{\pi^2}{9}y,$$

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=\frac{\pi^2}{9}\sqrt{A_1^2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)+A_2^2\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)}\text{米/秒}^2。$$

$$F=ma=\frac{m\pi^2}{9}\sqrt{0.0036\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t+\frac{\pi}{3}\right)+0.0009\cos^2\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{6}\right)}\text{牛}。$$

1910．两个质点在 Oy 轴上作简谐振动，两质点的振动方程分别为

$$y_1=A\sin(\omega t+\varphi);$$

$$y_2=A\cos(\omega t+\varphi)。$$

(1)求这两个振动之间的相位差；

(2)在参考圆上怎样表示这两个振动？

[解答] (1) $y_1=A\sin(\omega t+\varphi)$

$$=A\cos\left(\omega t-\varphi-\frac{\pi}{2}\right),$$

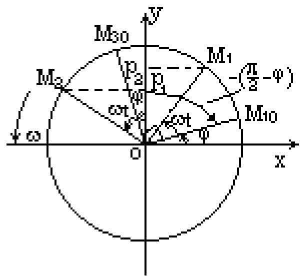
可以看出 y_1 的初相位

$$\varphi_1=\varphi-\frac{\pi}{2}=-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),$$

y_2的初相位$\varphi_2=\varphi$，振动2和振动1间的位相差$\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}$

即振动2比振动1超前$\frac{\pi}{2}$。

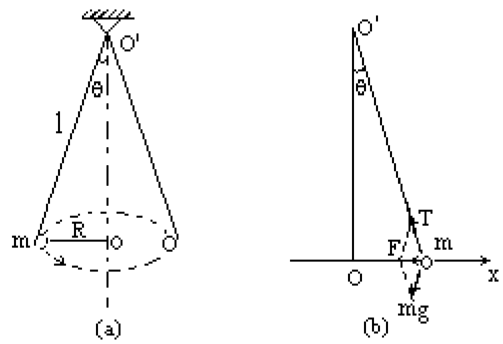
(2)如图所示，参考圆的半径为 A，动点 M_1 在 Oy 轴上的投影 P_1 作简揩振动。所以 OM_1 就是第一个振动在参考圆上对应的矢径。它的初相角$\varphi_1=-\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$。在参考圆上动点$M_2$就是第二个振动在参考圆上对应的矢径，其初位相$\varphi_2=\varphi$。$M_1$ 和 M_2 都以均匀的角速度ω逆时针方向运动，M_2 超前 $M_1 90°$，或者说 M_1 落后于 $M_2 90°$。



1911．如图(a)所示，长为 l 的轻质细线和质量为 m 的小球组成一圆锥摆。如果 l 和竖直方向夹角为θ时，这个圆锥摆的周期为多少？在过 O'O 的任一平面上质点 m 的投影是一种什么振动？

如果 m 的投影起始位置在平面的正向最大位移处，写出这一振动的振动方程。

［解答］ 对 m 作受力分析，可知向心力 F=mgtgθ，如图(b)所示。如果 m 作圆周运动的角速度为ω，由ω^2R=mgtgθ，R=lsinθ，



可得 $$\omega=\sqrt{\frac{g}{R}\mathrm{tg}\theta}=\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}},$$

周期 $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\theta}{g}}.$$

以图(b)中 Ox 轴正向最大值为质点 m 的起始位置，任何时刻 t，质点所在位置和 O 点的连线和 x 轴的夹角φ=ωt，则 m 在 x 轴上的投影

$$x=R\cos\varphi=R\cos\omega t,$$

向心力在 Ox 轴上的投影为

$$F_x=-F_{向}\cos\varphi=-m\omega^2R\cos\varphi$$

$$=-\frac{mg}{l\cos\theta}\cdot x。$$

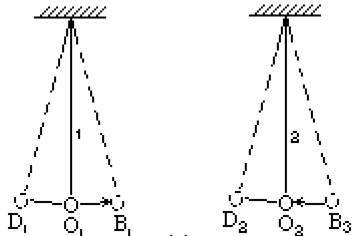
由简指振动的条件可知这是一种简谐振动。

振动方程为 $$x=l\sin\theta\cos\omega t$$

$$=l\sin\theta\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l\cos\theta}}\cdot t\right)。$$

1912．如图(a)所示，有两个摆长相等的单摆，摆 1 在 B_1D_1 之间摆动，摆 2 在 B_2D_2 之间摆动。当 t=0 时，摆 1 在 O_1 点，并向 B_1 点运动。

摆 2 在 B_2 点。



(a)

(1)列出它们的振动方程，要求用余弦形式表示；

(2)画出它们的振动图象；

(3)求出它们的相位差。

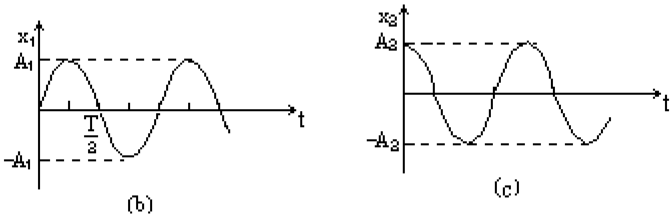
[解答]　(1)设向右为坐标正方向，它们的振动方程分别为

$$x_1 = A_1 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x_2 = A_2 \cos \omega t$$

(2)它们的振动图象如图(b)和(c)所示。

(3)它们之间的相位差为π/2，摆 2 超前摆 1 或摆 1 比摆 2 落后。



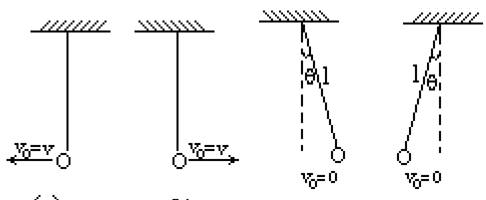
(b)　(c)

1913．图(a)、(b)、(c)、(d)所示是四个单摆在 t=0 时的位置和速度。如果以向右运动的方向为正方向，在经过平衡位置时的速度大小都等于 v，摆长都为 l_0。求：

(1)四个单摆的振动方程；

(2)画出对应的振动图象。

[解答]　(1)用余弦函数表示它们的振动方程，由题设条件得



(a)　(b)　(c)　(d)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad A = \frac{v}{\omega} = v\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

所以

$$x_a = v\sqrt{\frac{l}{g}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \frac{\pi}{2}\right),$$

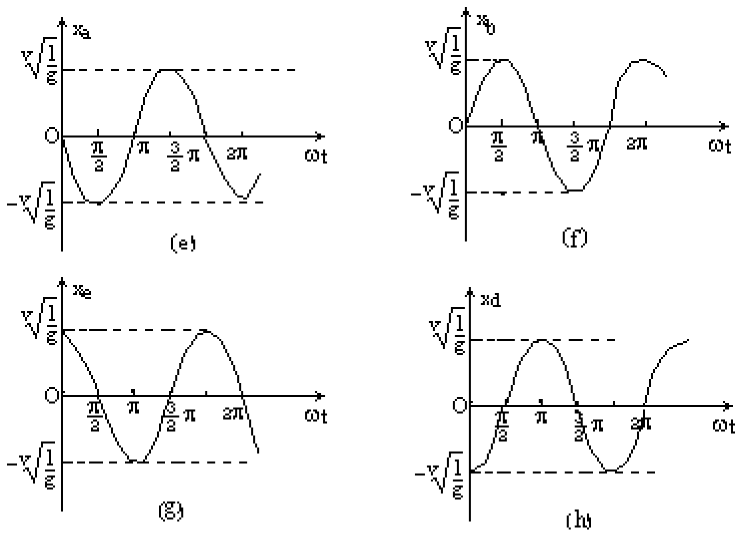
$$x_b = v\sqrt{\frac{l}{g}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$x_c = v\sqrt{\frac{l}{g}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + 0\right),$$

$$x_d = v\sqrt{\frac{l}{g}}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \pi\right)。$$

它们的初相角分别是$\varphi_a = \frac{\pi}{2};\varphi_b = -\frac{\pi}{2};\varphi_c = 0;\varphi_d = \pi$。

(2)它们的振动图象如图(e)、(f)、(g)、(h)所示。



1914．一个物体沿 x 轴作简谐振动，振幅为 12 厘米，周期为 2 秒。当 t=0 时，位移为 6 厘米，且向 x 轴正方向运动。求：

(1)初相位；

(2)t=0.5 秒时物体的位置、速度和加速度；

(3)在 x=–6 厘米处，且向 x 轴负方向运动时，物体的速度和加速度，以及从这一位置回到平衡位置所需的时间。

[解答]　(1)设这一简谐振动方程为

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)。$$

已知$A = 12$厘米，$T = 2$秒，$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$秒$^{-1}$，$t = 0$时，$x = 6$厘米。

代入得 6 厘米=12cos(0+φ)厘米。

$$\cos\varphi = \frac{1}{2},\text{即}\varphi = \pm\frac{\pi}{3}。$$

当物体沿 x 轴正方向运动时，φ应取负值，所以

$$\varphi = -\frac{\pi}{3}。$$

(2) 因为 $x=12\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)$厘米，

$$v=-12\pi\sin\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\text{厘米/秒，}$$

$$a=-12\pi^2\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\text{厘米/秒}^2\text{。}$$

t=0.5 秒时可求得

$$x=12\cos\left(0.5\pi-\frac{\pi}{3}\right)\text{厘米}=12\cos\frac{\pi}{6}\text{厘米}$$

=10.4 厘米=0.104 米；

$$v=-12\pi\sin\frac{\pi}{6}\text{厘米/秒}=-6\pi\text{厘米/秒}$$

=–18.8 厘米/秒=–0.188 米/秒；

$$a=-12\pi^2\sin\frac{\pi}{6}\text{厘米/秒}^2=-6\pi^2\sqrt{3}\text{厘米/秒}^2$$

=–102 厘米/秒 ^{2} =–1.02 米/秒 ^{2}。

(3)当 x=–6 厘米，且向 x 轴负方向运动，由振动方程得

$$-6\text{厘米}=12\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\text{厘米，}$$

$$\cos\left(\pi t-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\pi t-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3},$$

因物体向x轴负方向运动，所以舍去$\pi t-\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$这个解。

求得 t=1 秒。

此时物体速度值

$$v=-12\pi\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\text{厘米/秒}=-6\sqrt{3}\pi\text{厘米/秒}$$

$$=-32.6\text{厘米/秒}=-0.326\text{米/秒；}$$

加速度 $a=-12\pi^2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\text{厘米/秒}^2=6\pi^2\text{厘米/秒}^2$

$$=59.2\text{厘米/秒}^2=0.592\text{米/秒}^2\text{。}$$

从x=– 6厘米处回到平衡位置,就是回到位相为$\frac{3\pi}{2}$处,在此时的时间为t',则$\pi t'-\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$,

$$t'=\frac{11}{6}\text{秒。}$$

所以从 x=–6 厘米处回到平衡位所需要的时间为

$$t'-t=\frac{11}{6}\text{秒}-1\text{秒}=\frac{5}{6}\text{秒。}$$

1915．一个物体作简谐振动，振幅为 15 厘米，频率为 4 赫，试计算振动过程中的

(1)最大加速度；

(2)位移为 9 厘米时的加速度；

(3)从平衡位置运动到位移为 12 厘米处所需的最少时间。

［解答］ (1)由 $a_{max}=A\omega^2$，$\omega=2\pi f$，

得 $a_{max}=4\pi^2f^2A=4\times(3.14)^2\times4^2\times15\times10^{-2}$ 米/秒 ^{2}

$=94.65$ 米/秒 ^{2}。

(2) $a=\omega^2x=4\pi^2f^2x$

$=4\times(3.14)^2\times4^2\times9\times10^{-2}$ 米/秒 ^{2}

$=56.79$ 米/秒 ^{2}。

(3)设在平衡位置时，质点向正方向运动，t=0，则 x=0，运动方程为

$$x=A\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=A\sin\omega t。$$

$$t=\frac{1}{2\pi f}\sin^{-1}\frac{x}{A}$$

$$=\frac{1}{2\times3.14\times4}\cdot\sin^{-1}\frac{0.12}{0.15}\text{秒}$$

$$=\frac{0.927}{25.12}\text{秒}=0.037\text{秒}$$

1916．质量为 10 克的物体作简谐振动，振幅为 24 厘米，周期为 4 秒；当 t=0 时坐标为+24 厘米，试求：

(1)当 t=0.5 秒时的位置。

(2)当 t=0.5 秒时作用在物体上力的大小和方向。

(3)物体从初始位置到 x=-12 厘米处所需的最短时间。

(4)当 x=-12 厘米时，物体的速度。

［解答］ (1)当 t=0 时，$x_0=+24$ 厘米，这是最大位移，所以 v=0。振动方程为

$$x=24\cos\omega t\text{ 厘米。}$$

又因为 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{4}\text{弧度/秒}=\frac{\pi}{2}\text{弧度/秒}$，

得 $x=24\cos\frac{\pi}{2}t$ 厘米。

当 t=0.5 秒时，

$$x=24\cos\left(\frac{\pi}{2}\times0.5\right)\text{厘米}=24\cos\frac{\pi}{4}\text{厘米}=16.97\text{厘米}\approx17\text{厘米。}$$

(2)t=0.5 秒时的加速度，

$$a=-\omega^2x=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot17.0\times10^{-2}\text{米/秒}^2=-0.419\text{米/秒}^2，$$

$F=ma=0.01\times(-0.419)$ 牛 $=-4.19\times10^{-3}$ 牛。

这里的负号表示力的方向和位移 x 的方向相反。

(3)当$x=-12$厘米时，有 $-12=24\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$,

$$\frac{\pi}{2}t=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\pi\text{秒。}$$

所以最短时间 $$t=\frac{4}{3}\text{秒}\approx 1.33\text{秒。}$$

(4)由简谐振动速度公式得

$$v=-A\omega\sin\omega t$$

$$=-0.24\times\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right)\text{米/秒。}$$

由(3)知 t=1.33 秒，所以

$$v=-0.12\pi\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\text{米/秒}=-0.326\text{米/秒。}$$

方向和位移 x 同向。

1917．一个质量 m=0.01 千克的质点，按余弦规律作简揩振动，它的振动周期为 2 秒、初相为零，质点振动的总能量为 1×10^{-4} 焦。求：

(1)该质点的振动方程；

(2)作用于振动质点上的力的最大值；

(3)质点在 t=T/6 时的位移和速度。

［解法一］ (1)由简谐振动的速度公式

$$v=-A\omega\sin\omega t,$$

所以，质点动能 $$E_k=\frac{1}{2}mv^2$$

$$=\frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2\omega t$$

质点的总能量等于它的最大动能，即

$$E=E_{k\max}=\frac{1}{2}mA^2\omega^2.$$

所以， $$A=\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{2E}{m}}=\frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{2E}{m}}=\frac{2}{2\times3.14}\times\sqrt{\frac{2\times10^{-4}}{0.01}}\text{米}$$

$$\approx 0.045\text{米。}$$

而 $$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}\text{弧度/秒}=\pi\text{弧度/秒},\ \varphi=0,$$

所以，振动方程是 $x=A\cos\omega t=0.045\cdot\cos\pi t$ 米。

(2)由简谐振动加速度公式。

$$a=-A\omega^2\cos\omega t,$$

得最大加速度的绝对值 $A\omega^2$,所以

$$|F_{max}|=mA\omega^2=mA\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$=\frac{0.01\times0.045\times(3.14)^2\times4}{2^2}\text{牛}$$

$$=4.44\times10^{-3}\text{牛。}$$

(3) 当$t=\frac{T}{6}$时，由简谐振动的位移公式

得 $$x=A\cos\omega t=0.045\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{6}\right)\text{米}$$

$$=0.045\cos\frac{\pi}{3}\text{米}=0.0225\text{米}$$

$$v=-A\omega\cdot\sin\omega t$$

$$=-0.045\times3.14\sin\frac{\pi}{3}\text{米/秒}$$

$$=-0.12\text{米/秒。}$$

［解法二］ (1)质点的简谐振动可看作是在某种等效的弹性力作用下进行的，它的倔强系数为 k，则由简谐振动的周期公式

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

求得 $$k=\frac{4\pi^2m}{T^2}=\frac{4\times(3.14)^2\times0.01}{2^2}\text{牛/米}=0.0986\text{牛/米。}$$

由总能量 $$E=\frac{1}{2}kA^2$$

得 $$A=\sqrt{\frac{2E}{k}}=\sqrt{\frac{2\times1\times10^{-4}}{9.89\times10^{-2}}}\text{米}=0.045\text{米。}$$

得 $x=A\cos\omega t=0.045\cos\pi t$ 米。

(2)由 $F=-kx$，得

$$|F_{max}|=0.0986\times0.045\text{牛}=4.44\times10^{-3}\text{牛。}$$

(3) 当$t=\frac{T}{6}$时，

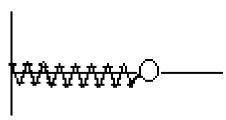
$$x=A\cos\omega t=0.045\cos\frac{\pi}{3}\text{米}$$

$$=0.0225\text{米。}$$

$$v=-A\omega\sin\omega t=-0.045\times\pi\sin\frac{\pi}{3}\text{米/秒}$$

$$=-0.12\text{米/秒。}$$

1918．图中弹簧套在光滑的水平直杆上，一端固定，另一端拴着穿在杆上的，质量为 0.10 千克的小球。用手拉球使弹簧伸长 4 厘米，然后释放，让小球自由振动。已知弹簧伸长 1 厘米时弹簧的弹力增加 1 牛。试求：



(1)小球在最大位移处和位移为 3 厘米处的加速度；

(2)弹簧振子的周期和频率；

(3)从释放小球开始计时，弹簧振子的振动方程；

(4)小球经过平衡位置时的速度大小。

[解答] 弹簧的倔强系数 k 为

$$k=\frac{F}{\Delta l}=\frac{1}{10^{-2}}\text{牛/米}=100\text{牛/米},$$

小球在弹簧弹力 F 作用下作简谐振动，它的回复力 F=–kx.

(1)小球在最大位移处的加速度

$$a_{max}=-\frac{k}{m}x_{max}=-\frac{100}{0.10}\times4\times10^{-2}\text{米/秒}^2$$

=–40 米/秒 ²，负号仅表示方向。

小球在位移为 3 厘米处的加速度

$$a=-\frac{k}{m}x=\frac{-100}{0.10}\times3\times10^{-2}\text{米/秒}^2$$

$$=-30\text{米/秒}^2$$

式中的负号表示加速度方向和位移方向相反。

(2)由周期公式得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.10}{100}}\text{秒}\approx0.199\text{秒},$$

$$f=\frac{1}{T}=5.03\text{赫}。$$

(3)当 t=0 时，位移 $x=A=4\times10^{-2}$ 米，用余弦函数表示振动方程

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)。$$

因为 $\varphi_0=0$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\times3.14}{0.199}\text{弧度/秒}=31.6\text{弧度/秒}$，

所以 $x=4\times10^{-2}\cos31.6t$ 米

(4)由速度以式

$$v_{max}=A\cdot2\pi f=4\times10^{-2}\times31.6\text{米/秒}=1.26\text{米/秒},$$

或用能量公式 $\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_{max}^2$,

$$v_{max}=\sqrt{\frac{k}{m}}A=4\times10^{-2}\sqrt{\frac{100}{0.1}}\text{米/秒}$$

$$=1.26\text{米/秒}。$$

1919．一质量为 0.20 千克的物体悬在弹簧的下端，把物体从平衡位置向下拉 10 厘米，然后轻轻释放，测得系统的振动周期为 2 秒。问：

(1)物体经过平衡位置时的速度多大？

(2)物体在平衡位置上方 5 厘米处的加速度多大？

(3)物体从平衡位置下方 5 厘米处向上运动到平衡位置时所需的时间是多少？

[分析] 从位移为 x 处运动到平衡位置需要的时间可以这样计算，先求出从起始位置到位移为 x 处所需时间 t’及到平衡位置所需时间 t''，然后求 t=t''–t'，t 就是本题要求的时间。

[解答] 物体经平衡位置时速度最大，即

$$v = A\omega = A \times \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{0.10 \times 6.28}{2} \text{米/秒} = 0.31 \text{米/秒}$$

(2)由加速度公式得

$$a = \omega^2 x = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot x = \frac{4\pi^2 x}{T^2}$$

$$= \frac{4 \times \pi^2 \times 0.05}{4} \text{米/秒}^2 = 0.49 \text{米/秒}^2\text{。}$$

(3)从起始位置到平衡位置所需时间$\frac{T}{4}$;从起始位置运动到平衡位置下方 5 厘米处所需时间为 t'。

因为　　　　x=Acosωt'，

所以　　　　$t' = \frac{1}{\omega}\cos^{-1}\frac{x}{A}$

$$t = \frac{T}{4} - t' = \frac{T}{4} - \frac{1}{\omega}\cos^{-1}\frac{x}{A}$$

$$= \frac{T}{4} - \frac{1}{\omega}\cos^{-1}\frac{5}{10} = \frac{T}{4} - \frac{1}{\omega} \times \frac{\pi}{3} = \frac{T}{4} - \frac{T}{2\pi} \times \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{T}{12} = 0.17\text{秒}$$

实际上不论时间的起始点怎样取，这振动的位移总可以表示成

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

当 $x=x_1$ 对应的时间为 t_1

$$x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi_0), \qquad \cos(\omega t_1 + \varphi_0) = \frac{x_1}{A} = \frac{1}{2}$$

当 $x=x_2=0$，对应的时间为 t_2

$x_2=A\cos(\omega t_2+\varphi_0)$，　$\cos(\omega t_2+\varphi_0)=0$。

$$\omega t_1 + \varphi_0 = \frac{\pi}{3}, \omega t_2 - \varphi_0 = \frac{\pi}{2}\text{。}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{\pi}{6} \times \frac{1}{\omega} = \frac{\pi}{6} \times \frac{T}{2\pi} = \frac{T}{12}\text{。}$$

1920．有一轻质弹簧，上端固定，下端挂有质量为 100 克的物体时，弹簧伸长了 4.9 厘米，如果使用这个弹簧和一个质量为 800 克的小球构成一个弹簧振子。当体系处于平衡时将小球由平衡位置向下拉开 1.0 厘米，并给以向上的初速 v_0=–5.0 厘米/秒（以向下为正方向）。试求小球的振动周期及振动方程。

［分析］　由所给条件可求得弹簧的倔强系数 k；由振动周期公式直接求得系统的周期。

要写出物体的振动方程，还需要知道两个条件，即振幅 A 和初相位φ，它们均可从振动的初始条件求得。

［解答］　由胡克定律　$F_0=kx_0$，得

$$k=\frac{F_0}{x_0}=\frac{0.100\times 9.8}{4.9\times 10^{-2}}\text{牛}/\text{米}=20\text{牛}/\text{米}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{0.800}{20}}\text{秒}=0.40\pi\text{秒}$$

$$=1.26\text{秒}$$

由于在振动过程中机械能守恒，且振动系统的机械能和振幅平方成正比，根据初始条件 $t=0, x_0=1.0\times 10^{-2}$ 米，$v_0=-5\times 10^{-2}$ 米/秒。

由 $\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}mv_0^2$，

可得 $A=\sqrt{x_0^2+\frac{m}{k}v_0^2}=\sqrt{(1.0\times 10^{-2})^2+\frac{0.80(-5\times 10^{-2})^2}{20}}\text{米}$

$$=\sqrt{2}\times 10^{-2}\text{米，}$$

$$tg\varphi=\frac{-v_0}{\omega x_0}=\frac{-v_0}{x_0\sqrt{\frac{k}{m}}}=-\left(\frac{-5\times 10^{-2}}{1.0\times 10^{-2}\sqrt{\frac{20}{0.8}}}\right)$$

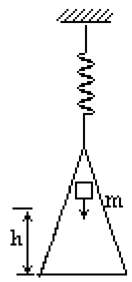
$$=1,$$

$\varphi=\pm\frac{\pi}{4}$，从题设条件知，取 $+\frac{\pi}{4}$，

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{20}{0.8}}\text{弧度}/\text{秒}=5\text{弧度}/\text{秒。}$$

所以 $x=\sqrt{2}\times 10^{-2}\cos\left(5t+\frac{\pi}{4}\right)$ 米。

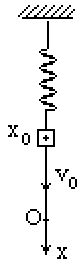
1921．如图所示，一个盘子挂在倔强系数为 k 的弹簧下，一个质量为 m 的物体从高为 h 处的空中落到盘内并和盘粘在一起，于是盘就开始振动。求振动的振幅并写出物体振动的方程。设盘子和弹簧的质量可忽略不计，以弹簧开始运动时作为时间的起点，位移以向下为正。



[分析] 物体从高h处自由落下到盘时的速度为$v=\sqrt{2gh}$，和盘发生完全非弹性碰撞，碰撞后得到一个共同速度 $v_0=v$，弹簧和物体组成的振动系统开始作简谐振动。

系统作简谐振动的平衡位置就是物体放在盘内静止时的位置，这个位置和原来位置之间的距离为$x_0=\frac{mg}{k}$。由振动能量公式可求得系统的

振幅 A。



如图所示，取新的平衡位置为原点，物体开始振动的初始位置为 $x_0=-\frac{mg}{k}$，初始速度 $v_0=\sqrt{2gh}$，根据简谐振动的位移公式和速度公式可解得初相角φ，最后写出振动方程。

［解答］由分析知 $v_0=\sqrt{2gh}, x_0=-\frac{mg}{k}$，根据振动能量公式

$$\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}kA^2,$$

即
$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{m}{k}v_0^2}=\sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2}+\frac{m\times 2gh}{k}}$$
$$=\sqrt{\frac{mg}{k}\left(2h+\frac{mg}{k}\right)}。$$

由周期公式得 $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$。由初始条件得

$$x_0=A\cos(\varphi_0) \qquad (1)$$
$$v_0=-A\omega\sin(\varphi_0) \qquad (2)$$

$$\varphi_0=tg^{-1}-\frac{v_0}{x_0\omega}=tg^{-1}\cdot\sqrt{\frac{2kh}{mg}},$$

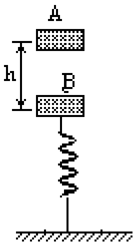
因为 $x_0<0, v_0>0$，可知 $\pi<\varphi_0<\frac{3}{2}\pi$，

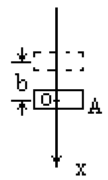
振动方程为 $x=\sqrt{\frac{mg}{k}\left(2h+\frac{mg}{k}\right)}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+tg^{-1}\sqrt{\frac{2kh}{mg}}\right)$。

1922．如图所示，弹簧下端固定在水平桌面上，当质量为 m_1 的 A 物体联接在弹簧的上端并保持静止时，弹簧被压缩了长度 a。现有质量为 m_2 的 B 物体，从高为 h 处自由落下，试求

(1)B 物体和 A 物体发生完全非弹性碰撞，弹簧振子的振幅和初位相各多少？周期多大？

(2)B 物体和 A 物体发生完全弹性碰撞，弹簧振子的振幅和周期各是多大写出振动方程。（只考虑一次碰撞）





设弹簧的质量可以略去不计，把弹簧开始运动时作为时间的起点，x 轴以向下为正。

[分析] 由胡克定律求弹簧的倔强系数$k=\dfrac{m_1 g}{a}$,振动周期$T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$。为求振幅可先求单独放上物体 A 时的平衡位置，碰撞就发生在这一位置。然后求出 A 和 B 一起压上弹簧时的平衡位置，再根据 A、B 物体碰撞后的速度，用能量守恒定律求取振幅。

为了求初位相，先要知道振动物体的初始条件，即开始振动时离平衡位置的距离 x_0 和初速度 v_0，其中初速可用碰撞公式求得。

要写出物体的振动方程，必须知道振幅、周期（或频率）和初相角，这可从前面求得的值获得。

[解答]　(1)B 和 A 粘在一起运动，总质量为 m_1+m_2，振动周期

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{a(m_1+m_2)}{m_1 g}},$$

设平衡位置为O点,B和A发生碰撞处离O点的位移$b=-\dfrac{m_2 g}{k}$,$b=x_0$为初始位置。

碰撞中时间极短，在这段时间内弹簧的长度尚未发生变化，用动量守恒定律求得共同速度$v_0=\dfrac{m_2\sqrt{2gh}}{m_1+m_2}$，它的方向和x轴方向相同。

由振动能量公式

得
$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2=\frac{1}{2}kA^2,$$

所以
$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{m_1+m_2}{k}\right)v_0^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}a\right)^2+\frac{a(m_1+m_2)}{m_1 g}\times\left(\frac{m_2\sqrt{2gh}}{m_1+m^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{m_2^2a^2}{m_1^2}+\frac{2m_2^2ha}{m_1(m_1+m_2)}}。$$

由初始条件

$x_0=A\cos\varphi_0$　　　　　　$v_0=-\omega A\sin\varphi_0$

得　$\operatorname{tg}\varphi_0=-\dfrac{v_0}{x_0\omega}$,　　$\varphi_0=\operatorname{tg}^{-1}-\dfrac{v_0}{x_0\omega}$。

所以 $$\varphi_0 = tg^{-1}\frac{m_2\sqrt{2gh}\cdot k}{(m_1+m_2)m_2 g\sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}}}$$
$$= tg^{-1}\frac{m_1}{m_2}\sqrt{\frac{2m_1 h}{a(m_1+m_2)}}$$

而$x_0 < 0, v_0 > 0$，得$\pi < \varphi_0 < \frac{3}{2}\pi$。

(2)B 和 A 发生完全弹性碰撞，碰撞后 B 和 A 又分开，A 物体作简谐振动，周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}。$$

A 物体振动的平衡位置是原来 A 和 B 碰撞的位置，所以初始位置 $x_0=0$。

B 和 A 发生弹性碰撞，所以

$$m_2\sqrt{2gh} + m_1\cdot 0 = m_2 v_2' + m_1 v_1' \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}m_2(2gh) + 0 = \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2}m1 v_1'^2 \qquad (2)$$

由(1)、(2)式解得

$$v_1' = \frac{2m_2\sqrt{2gh}}{m_1+m_2}。$$

式中的 v_1'为 A 物体振动的初始速度 v_0。由振动的能量公式得

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}kA^2,$$

所以 $$A = \sqrt{\frac{m_1}{k}}v_0 = \sqrt{\frac{a}{g}}\cdot\frac{2m_2\sqrt{2gh}}{m_1+m_2}$$
$$= \frac{2m_2\sqrt{2ah}}{m_1+m_2}。$$

由于 v_0 方向和 x 方向相同，起始位置就是平衡位置，所以在用余弦函数表示的振动方程中初相角为$-\frac{\pi}{2}$。振动方程为

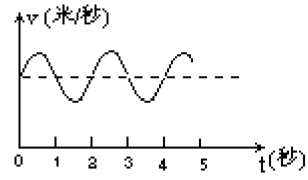
$$x = A\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \frac{2m_2\sqrt{2ah}}{m_1+m_2}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t - \frac{\pi}{2}\right)。$$

1923．在平坦的地面上，有一个以 5 米/秒的速度匀速前进的台子，台面上有一个物体，在和台子前进方向平行的直线上相对台子作简谐振动。物体的速度和时间关系如图(a)所示。

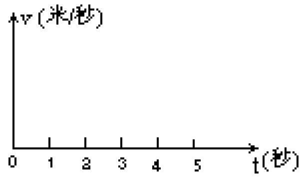
(1)在一个周期内物体相对于地面前进的距离是多少？

(2)试将物体相对于地面的加速度和时间的关系表示的图(b)上；

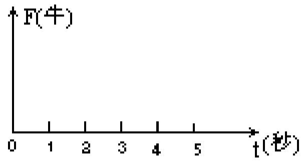
(3)把物体受到的回复力和时间的关系表示在图(c)上。



(a)



(b)



(c)

［分析］　台子对地面作匀速运动，所以物体在台面上遵守牛顿运动定律。物体相对台面的运动，经一个周期又回到原来位置，因此物体在一个周期内相对于地面的位移，等于台子在一个周期内前进的距离。

由简谐振动的速度公式和加速度公式可知，物体速度最大时，它的加速度为零，相对于台面的速度为零时，它的加速度最大。根据牛顿第二定律，加速度和力成正比，所以 a–t 图和 F–t 图相似。

［解答］　(1)小物体在一个周期内前进的距离

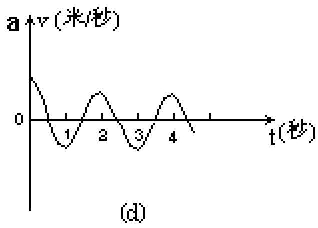
$$s=vT,$$

式中 v 为台子前进的速度，T 为简谐振动的周期，由图(a)可知 T 等于 2 秒，所以

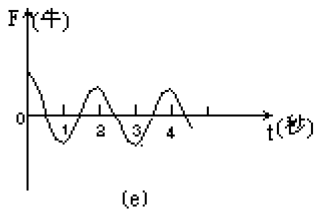
$$s=5\times2\text{ 米}=10\text{ 米。}$$

(2)由分析可作 a–t 图如图(d)所示。

(3)由分析可作 F–t 图如图(e)所示。

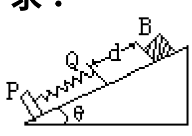


(d)



(e)

1924．和水平面成θ角的光滑斜面上放一个弹簧 PQ，其一端 P 固定在斜面上，另一端 Q 为自由端，如图所示。在 Q 的上方距离为 d 处，有一个质量为 m 的物体 B 从静止开始下滑，B 碰到 Q 连接在一起，又向下滑行了 b 后停止，以后就做简谐振动。假设弹簧质量可以略去不计，试求：



(1)弹簧的倔强系数；

(2)简谐振动的周期；

(3)简谐振动的振幅。

[分析]物体 B 和弹簧组成的系统遵循机械能守恒定律，由此可得求弹簧的倔强系数，从而就可求出振动的周期。由题设条件知物体与弹簧作间谐振动，如果以弹簧的 Q 端处为原点，求出物体振动的平衡位置 x_0 后，即可求得振幅 $A=b-x_0$。

[解答](1)设弹簧的倔强系数为 k，当 B 撞击 Q 且下滑 b，则弹簧的弹性势能$E_p=\frac{1}{2}kb^2$，而重力势能$\Delta E'_p$减小为$mg(d+b)\sin\theta$。根据机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}kb^2=mg(d+b)\sin\theta,$$

得
$$k=\frac{2mg(d+b)\sin\theta}{b^2}。$$

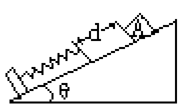
$$(2)T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=\frac{2\pi b}{\sqrt{2g(d+b)\sin\theta}}$$
$$=\pi b\sqrt{\frac{2}{g(d+b)\sin\theta}}。$$

(3)当物体 B 压缩弹簧并处于平衡时，它的压缩量为 x_0，根据力的平衡条件可得

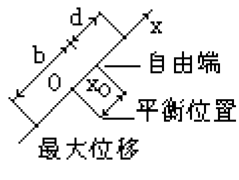
$$kx_0=mg\sin\theta$$

$$x_0=\frac{mg\sin\theta}{k}=\frac{b^2}{2(d+b)}。$$
$$A=b-x_0=b-\frac{b^2}{2(d+b)}=\frac{b(2d+b)}{2(d+b)}。$$

1925．图(a)中有一个和水平面成θ角的光滑斜面，下端固定一弹簧，现有物体 A 从离弹簧距离为 d 处下滑。A 和弹簧的自由端撞击后压缩弹簧，最后又被弹回去。设物体 A 的质量为 m，重力加速度为 g，弹簧的倔强系数为 k，撞击中的能量损失不计。求：



(a)



(b)

(1)弹簧的最大压缩量 b；

(2)物体和弹簧间两次撞击的时间间隔 t。

[分析]由于斜面是光滑的，所以可用机械能守恒定律直接求得压缩量 b。

设物体的平衡位置和弹簧自由端的距离为 x_0，则振动的振幅 $A=b-x_0$。物体的运动应分二个阶段，第一阶段是从撞击弹簧开始，到反弹物体使它和弹簧分离为止，这阶段可认为是简谐振动阶段；第二阶段是从物体脱离弹簧作匀减速运动开始到落回弹簧为止。

第一阶段，弹簧的振动未满一个周期，只要先算出周期 T，再把缺少

的部分运动时间求出来，两者之差即为物体和弹簧相互作用的时间。物体 A 下滑距离 d 的时间可用匀加速运动公式直接算出，上升距离 d 的时间和下滑时间相等。

[解答]（1）应用机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}kb^2 = mg(d+b)\sin\theta,$$

所以 $$b = \frac{mg\sin\theta}{k}(1+\sqrt{1+\frac{2dk}{mg\sin\theta}})。$$

（2）由分析得振幅为

$$A = b - x_0 = \frac{mg\sin\theta}{k}\sqrt{1+\frac{2dk}{mg\sin\theta}},$$

（式中$x_0 = \frac{mg\sin\theta}{k}$）

振动周期为$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$，如图(b)所示弹簧系统的振动方程应为

$$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi),$$

取 x=A 时为时间的起点，则得

$$x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t)。$$

所以 $$x_0 = A\cos(\frac{2\pi}{T}t_1)。$$

$$t_1 = \frac{T\cos^{-1}\frac{x_0}{A}}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}}\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2dk}{mg\sin\theta}}})。$$

t_1 为从最大位移处回到距离平衡位置 x_0 处所需要的时间，所以作简谐振动的物体 A 在一周期内所缺少的时间为 $2t_1$，

即 $$2t_1 = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\cos^{-1}(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2dk}{mg\sin\theta}}}),$$

物体 A 在弹簧上共同运动的时间应为

$$T-2t_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} - 2\sqrt{\frac{m}{k}}\cos^{-1}(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2dk}{mg\sin\theta}}})$$

$$= 2\sqrt{\frac{m}{k}}[x-\cos^{-1}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2dk}{mg\sin\theta}}}]。$$

物体被弹簧弹出而脱离弹簧，然后再回到弹簧并和弹簧一起开始冲击，需要的时间为

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}},$$

所以 $t=T-2t_1+t_2$

$$=2\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot[\pi-\cos^{-1}(\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2dk}{mg\sin\theta}}})]+2\sqrt{\frac{2d}{g\sin\theta}}。$$

1926．一台筛沙机有一个振动筛，它在竖直方向上的振动方程为 $y=0.01\sin(4\pi+\frac{\pi}{4})$ 米。

(1)振动筛的振幅、频率、周期和初位相各多少？

(2)振动筛向上和向下的两个最大位移处的加速度各是多大？

(3)一个质量为 1 千克的物体放在振动筛上，当振动筛在上下两个最大位移处时，物体对振动筛的压力各是多大？在平衡位置时压力又是多大？

(4)这个筛应该有怎样的周期，才能使筛在最高位置时物体和筛刚好不致分开？

[分析]由筛的振动方程可知这是一个简谐振动。物体放在振动筛上，受到重力和振筛的弹力作用，其中弹力和振动筛的位置有关，而重力是恒量。物体运动到平衡位置上方时，物体的加速度方向向下，这时重力大于弹力。由牛顿第二定律 mg-N=ma，可求得弹力 N，物体对筛的压力的大小等于 N。当物体到达上面最大位移处时，振动物体的加速度值也达到极大值，但不能超过重力加速度值。如果振动物体的加速度值等于它的重力加速度，则物体对筛的压力为零，只要振动筛的周期再缩短，物体和筛就要分开。

[解答](1)由振动方程得

振幅　　A=0.01 米；

频率　　$f=\frac{\omega}{2\pi}=2$ 赫；

周期　　$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.5$ 秒；

初相位 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，如果把振动方程改写成 $y=0.01\cos(4\pi t-\frac{x}{4})$，则方程的初相位 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$。

(2)由加速度公式 $a=A\omega^2$ 得最上（下）端的加速度大小

$a_{max}=A\omega^2=0.01\times(4\times3.14)^2$ 米/秒$^2=1.6$ 米/秒^2。

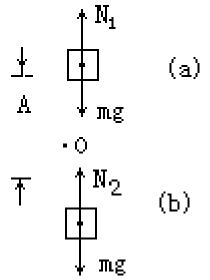
(3)物体运动到最高位置受力情况如图(a)所示，根据牛顿第二定律得

$mg-N_1=ma$，

$N_1=m(g-a)=1\times(9.8-1.6)$ 牛

$=8.2$ 牛。

物体在最低位置时受力情况如图(b)所示，根据牛顿第二定律得



N_2-mg=ma，简便起见，最高最低位置的加速度大小都用 a 表示。

$$N_2=m(g+a)$$

$$=1\times(9.8+1.6)\text{牛}=11.4\text{牛}，$$

物体处在平衡位置时，用 N 表示筛对物体支持力，合力为零，即

$$N = mg = 9.8\text{牛}。$$

根据牛顿第三定律可知，物体对筛的压力，是筛对物体支持力 N 的反作用力，它们大小相等而方向相反。

(4)由分析可知

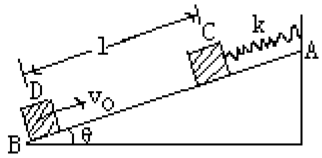
$a=A\omega^2=g$，

所以 $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{A}{g}}$$

$$=2\times3.14\times\sqrt{\frac{0.01}{9.8}}\text{秒}\approx0.2\text{秒}。$$

即当振动筛的周期 T＞0.2 秒时，物体和振动筛不会分开。

1927．有一个和水平方向成θ角的光滑斜面 AB。将弹簧的一端固定于 A 点，另一端拴一质量为 2m 的物体 C，静止时距斜面下端 B 为 l。在 B 点有一个质量为 m 的物体 D，以速度 v_0 沿斜面上向上运动。设弹簧的倔强系数为 k，重力加速度为 g。C，D 物体积不计，试回答下列问题：



(1)设物体 D 和 C 间发生碰撞，求碰撞前瞬间物体 D 的速度 v_1。

(2)假设 D 和 C 发生完全弹性碰撞，求碰撞后瞬间两者的速度 v_1'和v_2'。以沿斜面向上为正方向。

(3)物体 C 在斜面上作简谐振动，求它的振幅 A。

(4)求 C 物体振动时加速度的最大值 a_{max}。

[解答](1)D 物体在光滑斜面上向上运动时机械能守恒。即

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgl\sin\theta+\frac{1}{2}mv_1^2。$$

$$v_1=\sqrt{v_0^2-2gl\sin\theta}。$$

(2)由完全弹性碰撞公式直接求出

$$v_1' = \frac{(m-2m)v_1}{m+2m} = \frac{-1}{3}v,$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{v_0^2 - 2gl\sin\theta},$$
$$v = \frac{2mv_1}{m+2m} = \frac{2}{3}v_1$$
$$= -\frac{1}{3}\sqrt{v_0^2 - 2gl\sin\theta}。$$

(3)以物体 C 的平衡位置为原点，物体 C 作简谐振动的振幅可直接从速度公式求得

$v_{max} = A\omega$，$v_{max} = v_2'$，

而 $v_2' = A\omega = A\sqrt{\frac{k}{2m}}$，

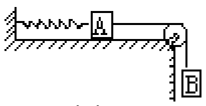
所以 $A = \sqrt{\frac{2m}{k}} \times v_2' = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}(v_0^2 - 2gl\sin\theta)}$。

(4)由简谐振动加速度公式可知，当物体 C 在最大位移处时加速度为最大。

因为 $a_{max}=\omega^2A$

所以 $$a\max = \frac{k}{2m} \times \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2m}{k}(v_0^2 - 2gl\sin\theta)}$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2k}{m}(v_0^2 - 2gl\sin\theta)}。$$

1928．将弹簧一端固定在光滑水平板上，弹簧的另一端拴一个质量为 0.30 千克的物体 A，如图(a)所示。在 A 上系一根细绳，通过光滑的滑轮拴一重物 B。如果 B 的质量为 0.20 千克，使弹簧由自然长度伸长 4 厘米后达到平衡。设重力加速度 g 为 10 米/秒 ²，绳子质量不计且长度不会伸缩。



(a)

(1)求弹簧的倔强系数。

(2)如将重物 B 再往下拉 1.5 厘米，释放后 B 开始振动。求振动的周期。

(3)在(2)的条件下，把 B 的速率和时间的函数，用图线表示出来。

[解答](1)处平衡时，弹簧受到的拉力

$F=m_Bg$，

由 $f=kx$，

得 $k = \frac{m_Bg}{x} = \frac{0.2\times10}{0.04}$ 牛/米

$= 50$ 牛/米。

(2)由弹簧振子的周期公式可求得

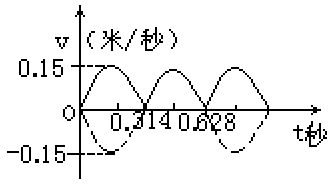
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_A + m_B}{k}} = 2 \times 3.14 \times \sqrt{\frac{(0.30+0.20)}{50}}\text{秒}$$
$$= 0.628\text{秒}。$$

(3)物体 B 作简谐振动，由简谐振动的速度公式

$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$，

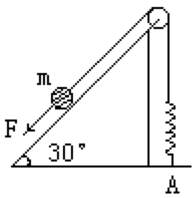
即 $$v = -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0)$$
$$= -0.15 \times \sqrt{\frac{50}{0.2+0.3}}\sin(\sqrt{\frac{50}{0.2+0.3}} \cdot t + \varphi_0)$$
$$= -0.15\sin(10t + \varphi_0)\text{米/秒}$$，初始条件，$\varphi_0 = 0$。

由上式可知速率的最大值为 0.15 米/秒，速率和时间关系为正弦曲线关系，其周期为 0.628 秒。又因为速率仅表示速度的大小，所以把曲线负的部分翻转到正的方向，周期变为 0.314 秒，如图(b)所示。



(b)

1929．如图所示，弹簧的一端固定在 A 处，另一端用绳中跨过滑轮拴着一个小球，小球放在和水平方向成 30°角的斜面上，质量为 m。平衡时弹簧的伸长量为 l。如果再用 F 力将小球沿斜面向下拉，等静止后去掉拉力 F。金属小球振动的最大动能为多大？小球质量增加时它的周期如何变化？斜面的倾角增大时，周期又将如何变化？（斜面和滑轮摩擦均不计）



[解答]由题设条件可求得

$$k = \frac{mg\sin 30°}{l}，$$

即 $$k = \frac{mg}{2l}。$$

弹簧在拉力 F 作用下再伸长 $l' = \frac{F}{k}$。根据机械能守恒定律，如果以 F 将小球下拉 l' 时为初状态，以小球回到平衡位置时为末状态。则有

$$\frac{1}{2}k(l+l')^2=\frac{1}{2}mv^2+mgl'\sin\theta+\frac{1}{2}kl^2,$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}k(l')^2=\frac{1}{2}\left(\frac{mg}{2l}\right)\left(\frac{F}{\frac{mg}{2l}}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\quad\frac{2F^2l}{mg}=\frac{F^2l}{mg}。$$

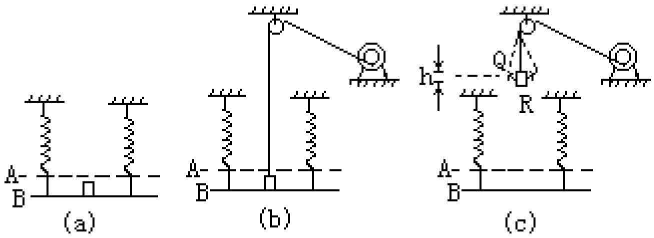
金属球经过平衡位置时速度最大，动能也最大。故最大动能为

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kl'^2,$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{F^2l}{mg}。$$

由弹簧振子的周期公式$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$可知，系统的周期仅跟m、k有关，所以当金属球质量 m 增大时，它的周期将变大。而斜面倾角的变化对振动周期没有影响。

1930．在 A 处有一个用弹簧吊挂的轻质托盘，弹簧系统的倔强系数为 k。如果在盘上轻轻地放上质量为 m 的重物，则在图(a)中的 B 处静止下来。设重力加速度为 g。



(1)将重物固定在托盘上，如果从平衡位置 B 把托盘稍向下拉，再轻轻放开，重物和托盘开始作简谐振动。试求振动的周期。

(2)使重物静止在平衡位置 B 处，上方拴一根轻质而无伸缩的细线，线通过光滑的小滑轮用马达竖直拉起重力，如图(b)所示。试求马达将重物缓慢地从 B 片拉到 A 片所做的功。

(3)如果马达将重物提升到 R 处静止。然后使重物在这个位置附近作单摆振动，如图(c)所示，设振动最高点 Q 比 R 高出 h，试求重物通过 R 点时的速率。

(4)调节线的长度，使单摆的振动周期和第(1)小题中求得的弹簧振子的振动周期相同，摆线的长度 l 应是多少？

[解答](1)由题意可知 B 为振动系统的平衡位置,倔强系数 k 和物体的质量为已知，所以周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}。$$

(2)设 AB 间的长度为 x_0，线拉重物上升过程中做功为 W，在上升 x_0 中重力做负功，弹簧的弹力做正功。

可得 $$mgx_0=\frac{1}{2}kx_0^2+W,$$

即 $$W = mgx_0 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

$$= mg\frac{mg}{k} - \frac{1}{2}k\frac{(mg)^2}{k^2} = \frac{(mg)^2}{2k}。$$

(3)设所求的速率为 v'，根据机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2}mv'^2 = mgh，$$

得 $$v' = \sqrt{2gh}。$$

(4)如果线的长度为 l，根据单摆周期公式得

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}，$$

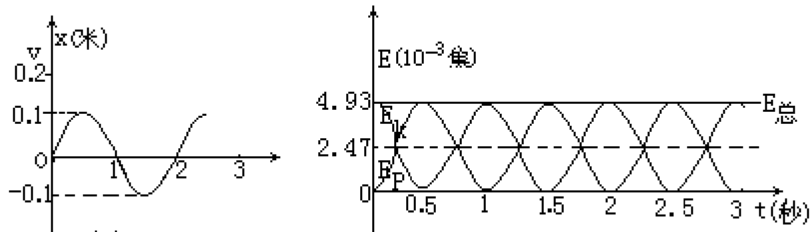
$$l = mg/k。$$

1931．质量为 0.1 千克的物体在平衡位置附近作简谐振动，振动图象如图(a)所示。试绘出物体的动能、势能及总能量随时间变化的图象。

[解答]根据图(a)可知，振动的振幅 A=0.1 米，周期 T=2 秒，初相位$\varphi_0 = -\frac{\pi}{2}$。所以物体的振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = 0.1\cos(\pi t - \frac{\pi}{2})米。$$

由简谐振动速度公式得



(a) (b)

v_{max}=ωA=0.1 米/秒=0.314 米/秒，

物体的最大动能 $$E_{k\max} = \frac{1}{2}mv^2{}_{\max}，$$

$$E_{k\max} = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (0.1\pi)^2 焦$$

$$= 4.93 \times 10^{-3} 焦。$$

最大势能 E_{pmax}=E_{kmax}=4.93×10^{-3}焦。

动能的一般形式为

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0)，$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2A^2[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos2(\omega t + \varphi_0)]$$

$$= \frac{1}{4}m\omega^2A^2 - \frac{1}{4}mv^2A^2\cos2(\omega t + \varphi_0)$$

$$= 2.47 \times 10^{-3}焦 - 2.47 \times 10^{-3}\cos2(\pi t - \frac{\pi}{2})焦，$$

势能的一般形式为

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t+\varphi_0),$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2A^2[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2(\omega t+\varphi_0)]$$

$$=\frac{1}{4}m\omega^2A^2+\frac{1}{4}mv^2A^2\cos2(\omega t+\varphi_0)$$

$$=2.47\times10^{-3}\text{焦}+2.47\times10^{-3}\cos2(\pi t-\frac{\pi}{2})\text{焦},$$

总能量 $$E=E_k+E_p=2.47\times10^{-3}\text{焦}+2.47\times10^{-3}\cos2(\pi t-\frac{x}{2})\text{焦}$$

$$+2.47\times10^{-3}\text{焦}-2.47\times10^{-3}\cos2(\pi t-\frac{\pi}{2})\text{焦}$$

$$=4.94\times10^{-3}\text{焦。}$$

E_k-t、E_p-t、E-t 图象见图(b)。

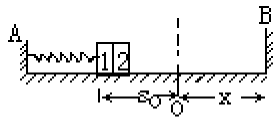
1932．如图所示，在光滑水平面的两端对立着两堵竖直的墙 A 和 B，把一根倔强系数是 k 的弹簧的左端固定在墙 A 上，在弹簧的右端系一个质量是 m 的小物体 1。用外力压缩弹簧使物体 1 从平衡位置 o 向左移动距离 s_0，紧靠着 1 再放一个质量也是 m 的小物体 2，开始时系统处于静止状态，然后撤去外力，由于弹簧的作用物体开始向右滑动。求：

(1)在什么位置物体 1 和物体 2 分离？分离时物体 2 的速率多大？

(2)物体 2 离开物体 1 后继续向右滑动，和墙 B 发生完全弹性碰撞。B 和 O 之间的距离 x 应满足什么条件，才能使物体 2 在返回时恰好在 O 点和物体 1 相遇？

设弹簧的质量以及物体 1 和 2 的大小都可忽略不计，弹簧在弹性限度内被压缩。

[分析]当撤去外力时，弹簧的弹力把物体 1 和物体 2 推向右方，加速度方向指向 O 点，物体速度不断增大直到物体到达 O 点为止。由于物体 1 和 2 不连在一起，当物体冲过平衡位置时，弹簧的弹力作用使物体 1 减速，物体 2 则匀速前进，并到达墙 B 发生完全弹性碰撞，又以同样的速率向 O 点运动，这时物体 1 在平衡位置 O 附近作简谐振动。物体 1 和物体 2 到达 O 点时的速率可用机械能守恒定律或简谐振动的速度公式求得。



物体 1 和物体 2 在 O 点相遇需要的时间为物体 1 作简谐振动半周期的整数后，所以物体 2 在距离 x 上往返时间也要等于物体 1 振动半个周期的整数倍。

[解答](1)根据机械能守恒定律

$$\frac{1}{2}(m+m)v^2=\frac{1}{2}ks_0^2,$$

$$v=\sqrt{\frac{k}{2m}}\cdot s_0\text{。}$$

或由速度公式 $v = A\omega$，振幅$A = s_0$，$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$，

得 $v = s_0\sqrt{\dfrac{k}{2m}}$，1、2两物体在o点分离。

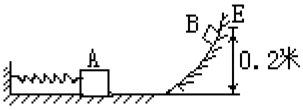
(2)物体2离开物体1后，物体1作简谐振动的周期$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$，由分析知

$$\frac{2x}{v} = nT/2,$$

$$x = \frac{1}{4}nTv = \frac{1}{4}n\cdot 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot s_0\sqrt{\frac{k}{2m}} = \frac{\sqrt{2}}{4}n\pi s_0。$$

式中的 n=1、2、3…。

1933．在水平面上有一根倔强系数 5 牛/米的弹簧，联接一个质量为 0.05 千克的物体 A，开始时弹簧没有伸长。一个质量为 0.04 千克的物体 B，由静止出发，从高 0.2 米处沿圆弧滑下，和物体 A 碰撞后静止，如图所示。而物体 A 向左运动又返回再次和物体 B 相碰，于是物体 B 又沿圆弧上升到某一高度。摩擦和弹簧质量可以略去不计，试求：



(1)物体 B 在第一次碰撞前的速度、弹簧被压缩的最大值；

(2)两物体从第一次碰撞到第二次碰撞相隔的时间；

(3)第二次碰撞后物体 B 沿圆弧上升的高度是 0.128 米，则第二次碰撞时损失百分之几的机械能？(g 取 10 米/秒 ^{2})

[分析]物体 B 在圆弧上无摩擦地下滑，机械能保持守恒，因此在和物体A发生碰撞前的速度应等于$\sqrt{2gh}$，h为B物在圆弧上的高度。A、B间发生碰撞，因无外力（水平方向）作用，动量守恒，可用动量守恒定律求出 A 物体碰撞后的速度。物体 A 和弹簧组成一个振动系统，在平衡位置的速度已知时，可用简谐振动速度公式求出振幅值，也是弹簧被压缩的最大值。

物体 A 和 B 在平衡位置发生第一次碰撞后，物体 B 停在 A 的平衡位置，因此 A 经过半周期的运动回到平衡位置再次和 B 发生碰撞，两次碰撞的时间间隔等于 A 物体振动的半个周期。

A、B 第二次碰撞也遵守动量守恒定律，B 碰撞后的速度由机械能守恒定律求得，应为$\sqrt{2gh'}$，h'为上升的高度0.128米。从而再算出A在第二次碰撞后的速度，比较机械能的损失量。

[解答]

(1)由 $m_B gh = \dfrac{1}{2}m_B v_B^2$

得 $v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 10\times 0.2}$米/秒

$= 2$米/秒。

A 和 B 发生碰撞，由动量守恒定律

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'，$$

$$v_A = 0，v_B' = 0，$$

所以 $v_A' = \frac{m_B}{m_A} v_B = \frac{0.04}{0.05} \times 2$ 米/秒

$= 1.6$ 米/秒。

由简谐振动速度公式

$v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot A$。而 $v_{max} = v_A'$，

得 $A = \sqrt{\frac{m}{k}} \cdot v_A' = \sqrt{\frac{0.05}{5}} \times 1.6$ 米

$= 0.16$ 米 $= 16$ 厘米。

(2)由简谐振动周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ 得

$$t = \frac{T}{2} = x\sqrt{\frac{m}{k}} = 3.14\sqrt{\frac{0.05}{5}}\text{秒} = 0.314\text{秒}。$$

(3)由 $m_B gh' = \frac{1}{2} m_B v_B''^2$。

得 $v_B'' = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 0.128}$ 米/秒 $= 1.6$ 米/秒。

在碰撞前B的速度为零，碰撞后的速度 $v_B'' = 1.6$ 米/秒。A在碰撞前的速度就是回到平衡位置时的速度，也是 1.6 米/秒。由动量守恒定律求得 A 碰撞后的速度

$$v_A'' = \frac{m_A v_A' - m_B v_B''}{m_A} = \frac{(0.05 - 0.04)1.6}{0.05}\text{米/秒} = 0.32\text{米/秒}。$$

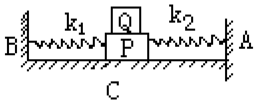
因为碰撞前机械能 $W_1 = \frac{1}{2} m_A v_A'^2$，碰撞后机械能 $W_2 = \frac{1}{2} m_A v_A''^2 + \frac{1}{2} m_B v_B''^2$。

所以 $$\frac{W_1 - W_2}{W_1} \times 100\% = \frac{m_A v_A'^2 - m_A v_A''^2 - m_B v_B''^2}{m_A v_A'^2} \times 100\%$$

$$= \frac{0.05(1.6^2 - 0.32^2) = 0.04 \times 1.6^2}{0.05 \times 1.6^2} \times 100\%$$

$= 16\%$。

1934．图中所示的装置中，倔强系数分别为 k_1、k_2 的两根弹簧把质量为 M 的滑块 P 连接起来，把 P 拉到平衡位置 d 后，从静止释放。



(1)求滑块 P 的振动周期 T、振幅 A、最大速度和最大加速度的值；

(2)物体 P 的振动方程；

(3)由P的振动方程求出释放后经过 $\frac{1}{8}$T，P对平衡位置的位移x；

(4)由P的振动方程求出从开始振动起向平衡位置运动$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$d距离时经过的时间 t；

(5)如果在滑块 P 上放上质量为 Q 的物体，滑块仍然从位移 d 处由静止释放开始振动，为使振动过程中 Q 和 P 之间不会产生相对滑动，则 Q 和 P 之间的静摩擦系数 μ 至少为大？

设 P 和水平面 C 间无摩擦,P 在平衡位置时两弹簧的长度都是自由长度。

[解答](1)Q 未放到 P 上时，P 受到两根弹簧的共同作用发生简谐振动。简谐振动的周期由这两根弹簧的等效倔强系数 k 和振动物体的质量 M 决定，所以只要从 k_1 和 k_2 求得等效的 k，就可以得到 P 的振动周期 T。

取坐标轴 x 的正方向由 B 向 A，坐标原点是 P 的平衡位置，设 P 发生右边的位移，则回复力为-kx，

由$-kx=-(k_1x+k_2x)$，

$k=k_1+k_2$，

由周期公式求得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{M}{k_1+k_2}}$$
$$=2\pi\sqrt{M(k_1+k_2)}/(k_1+k_2)。$$

由于滑块从离开平衡位置的 d 处从静止开始振动，所以 d 是 P 的最大位移，即振幅 A=d。

由简谐振动的速度公式得

$$v_{max}=\omega A=\frac{2\pi}{T}A=d\sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}。$$

由简谐振动的加速度公式得

$$a_{max}=\omega^2A=\frac{4\pi^2}{T^2}A=\frac{k_1+k_2}{M}d。$$

(2)设简谐振动方程为

$x=A\cos(\omega+\varphi)$，

因为 A=d，

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{M}}=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}},$$

当 t=0 时 x=A=d，$d=d\cos\varphi$，即 $\cos\varphi=1$，$\varphi=0$，

所以方程为

$$x=\mathrm{dos}(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}t)。$$

(3)由振动方程可求得在$t=\frac{T}{8}$时的位移x为

$$x=d\cos(\frac{2\pi}{T}t)=d\cos(\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{8})$$
$$=d\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}d。$$

(4)由振动方程可求得从开始振动起向平衡位置运动$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$d距离所经过的时间t，但应注意$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$d不是P离开平衡位置的位移，而位移x应为

$$x = d - \frac{2-\sqrt{3}}{2}d = \frac{\sqrt{3}}{2}d,$$

所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}d = d\cos(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}t)$，而$\sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}t = \frac{\pi}{6}$，

解得 $t = \frac{\pi\sqrt{M(k_1+k_2)}}{6(k_1+k_2)}$。

(5)在P上放Q后，两物体间无相对滑动，可把P和Q作为一个整体，在振动中最大加速度

$$a_{max} = \omega^2 A = \frac{k_1+k_2}{M+m} \cdot d。$$

物体Q随P一起作简谐振动的回复力是P对Q的静摩擦力。所以要使Q在具有最大加速a_{max}时不发生相对滑动，静摩擦系数必须满足如下条件

$$\mu mg \geq ma_{max},$$

即 $$\mu \geq \frac{a_{max}}{g} = \frac{d(k_1+k_2)}{g(M+m)},$$

在题设条件下，Q和P间的最小静摩擦系数为

$$\mu = \frac{d(k_1+k_2)}{g(M+m)}。$$

波动

填充题

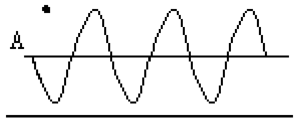
1935．机械振动在媒质中的传播叫做机械波。机械波传播的只是运动形式和能量，媒质本身并不随波迁移。

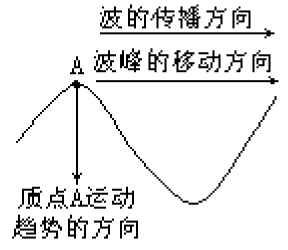
振动方向和波的传播方向垂直的波叫做横波。振动方向和波的传播方向在同一直线上的波叫做纵波。

沿着波的传播方向，两个相邻的同相质点间的距离，叫做波长。波速等于频率和波长的乘积。

1936．在均匀媒质中有一波源A，振动频率为3赫。如果A点从初始时刻开始向上振动，1秒内完成3次全振动，这段时间内将有3个波峰沿传播方向传播。这时，振动传送到的地点离开波源A的最大距离为3个波长。也就是单位时间内波的传播距离为3λ，即v=fλ。

1937．如图所示有一列机械横波，波峰恰在媒介质中的质点A处。波的传播方向向右。在这以后，波峰（一个特定的振动状态）将沿波的传播方向向右移动，A点垂直于波的传播方向振动。这里可以说明，机械波向外传播的只是运动形式和能量，媒质本身并不随波迁移，只是在平衡位置附近作振动。



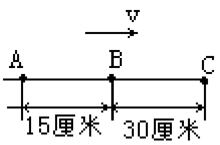


1938．某机械波在 A 媒质中的波长是 0.25 米，传播的速度是 140 米/秒，当它传入 B 媒质时，波长变为 1.25 米。则它在此媒质中传播的速度是 700 米/秒。波从一种媒质传播到另一种媒质时，它的频率保持不变。

1939．某地区一个地震波的纵波和横波在地表附近传播，速率分别是 8 千米/秒和 3.2 千米/秒。一个观测站离震源 16 千米，则纵波和横波从震源传到这个观测站的时间相差 3.0 秒。

1940．机械波在某种媒质中传播的速度为 v，波长为λ，在某一时刻媒质中一个质点刚好处于平衡位置，那么当它再要经过平衡位置所需的时间至少应为$\frac{\lambda}{2v}$。

1941．沿着波传播的方向上看有 A、B、C 三点，波速 v=120 米/秒，频率 f=400 赫。从图中三点的位置可以判断 A、B 两点振动的相位关系是反相；B、C 两点振动的相位关系是同相。

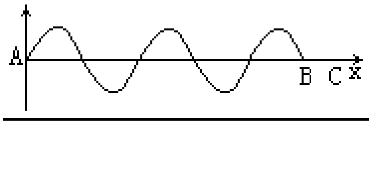


1942．一列波的频率是 3 赫，波的速度是 2.4 米/秒。在传播方向上有相距 40 厘米的两点，在振动过程中后一点和前一点的相位差等于-x。

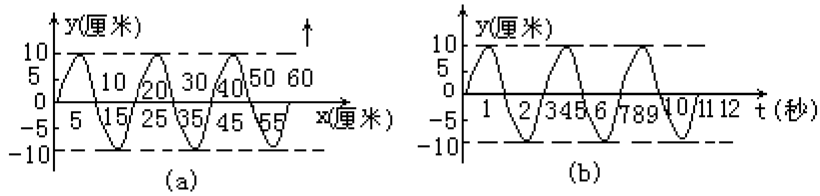
1943．有一波源振动方程为 y=0.05sin20πt 米，由它产生的简谐波在媒质中传播速度为 30 米/秒，那么简谐波的波动方程为 y=0.05sin20π$(t-\frac{x}{30}$米)，离振源21米处的质点的振动方程为$y=0.05\sin 20\pi t$米，离振源 25.5 米处的质点的振动方程为 y=0.05sin20π(t-0.05)米。

1944．有一列简谐波的波动方程为 y=0.02cos180π(t-4x)米，这列波的振幅为 0.02 米，频率为 90 赫，波长为 0.25 米，波速为 22.5 米/秒。

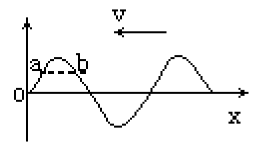
1945．图中所示是由 A 向 C 行进的波，在某一给定时刻的波形的一部分，BC 部分波形未画出，AB 的长度为 20 厘米，振动从 A 传播到 B，所用的时间是 0.5 秒，在 AB 范围内，这个波长为 8 厘米，波速为 40 厘米/秒；过 B 点后这列波进入另一种媒质，在区域 BC，它的速度减小为原来的一半，则在这一区域中，这列波的频率为 5 赫；波长为 4 厘米。



1946．图(a)是一列简谐横波在某时刻的图象，图(b)是这列波传播过程中某一点的振动图象。从图象中可知，这列波的波长是20厘米，周期是4秒，频率是0.25赫，振幅是10厘米，波速是5厘米/秒。

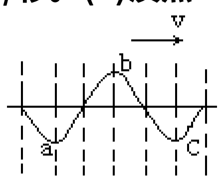


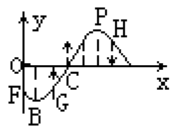
1947．图中所示为一个横波的波形图象，传播方向向左。a、b两质点中先回到平衡位置的是b点，a质点的加速方向向下，b质点的加速度方向向下，a质点的加速大小等于b质点加速度的大小（填在于、等于或小于）。



1948．一列波在均匀媒质中的传播方向如图所示，已知c点为波谷的时刻比b点为波谷的时刻落后0.5秒，ab间的水平距离为2米，那么波速为4米/秒，波的频率为1赫。

1949．图中所示为一列波在某时刻的波形图象。质点C的速度方向如图中箭头所示。则(1)此波的传播方向是从右到左（填左或右）。(2)在图中用箭头标出质点F、G、H此时的速度方向。(3)如果质点振动周期T=0.4秒，每隔T/8波向前推进0.1米，则此波的波长为0.8米，波速为2米/秒。(4)质点F经过0.15秒才能回到平衡位置。





1950．图中虚线所示为某一时刻一列横波的部分波形，该波的频率为2赫，已知质点A此时的速度是向上的，则该波的传播方向自左向右，它的波长为12厘米，波速为24厘米/秒。图中实线为再经过$4\frac{1}{4}$周期后的波形，并标出质点B、C的位置。到此时该波前进了51厘米。

1951．频率相同的两列波叠加，使某些区域的振动加强，某些区域的振动减弱，并且振动加强和振动减弱的区域互相间隔，这种现象叫干涉现象，形成的图样叫干涉图样。

要得到稳定的干涉图样，两个波源必须是频率相、相差恒定、振动方向一致；这样的波源叫相干波源。

1952．两列机械波的波源是s_1和s_2，下图是它们叠加的示意图，实线表示波峰，虚线表示波谷。当两列波发生干涉时，图中所注的8个点中，振动最强的点是a、b、c、h，振动最弱的点是d、e、f、g。

在图上把振动最强的点用实线连接起来，把振动最弱的点用虚连接起来。

1953．波绕过障碍物的现象，叫做波的衍射。能够发生明显衍射现象的条件是障碍物或孔的尺寸跟波长相差不多。

选择题

1954．关于机械波的以下说法中，正确的是 [ ]

A．波动是指振动质点在媒质中传播的过程；

B．波动是传播能量的一种运动形式；

C．波动的过程中，媒质的质点仅在各自的平衡位置附近作振动，并未在波的传播方向上发生迁移；

D．机械波在真空中也存在。

答：B、C

1955．一个小石子投向平静的湖水中，圆形波纹一圈圈向外传播，如果此时湖畔树上的一张树叶落在水面上，则树叶 [ ]

A．渐渐飘向湖心；

B．渐渐飘向湖畔；

C．在落下处上下振荡；

D．沿着波纹作圆周运动。

答 A

1956．有两个波源，在甲波源振动 50 次的时间内，乙波源振动了 60 次，它们发出的机械波在同一媒质中传播时，波长之比为 [ ]

A．6∶5；

B．5∶6；

C．12∶60

D．6∶1。

答 A

1957．一列波从一种媒质进入另一种媒质时 [ ]

A．只有频率发生变化；

B．只有波长发生变化；

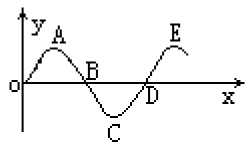
C．频率和波长都发生了变化；

D．波长和传播速度都发生了变化。

答 D

1958．右图为一列波在某一时刻的波形图，以下说法正确的是

[ ]



A．A、B 两质点振动的振幅相等；

B．A、C 两点的平衡位置间的距离为半波长；

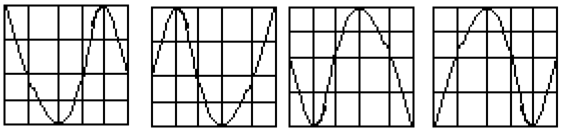
C．A、C 两质点的位移相同；

D．波在 C、D 两点间传递的时间为 1/4 周期。

答 A、B、D

1959．图(1)为某一时刻的横波波形图，传播方向向右，那么经 1/4

周期后，波形图应是　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

A．图(2)；　　　　　　B．图(3)；

C．图(4)；　　　　　　D．不能确定。

答 A

1960．一列波的波长为 4 米，波速为 2 米/秒，在 t=0 时，波形图线如图所示，此时媒质中一个振动质点在位置 A，运动速度等于零，当 t=4.5 秒，该质点的位置及速度方向是　　　　　　　　　　　　[　　]

A．在 A 处，速度为零；

B．在 B 处，速度方向向下；

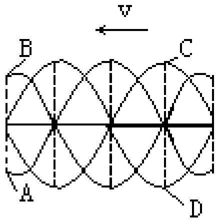
C．在 C 处，速度等于零；

D．在 B 处，速度方向向上。

答 B

1961．如图所示，图线 A 是一列横波在某一时刻的波形图。

(1)从这一时刻开始经过 3/4 周期后的波形图是　　　　　　[　　]



A．A 图线；B．B 图线；

C．C 图线；D．D 图线。

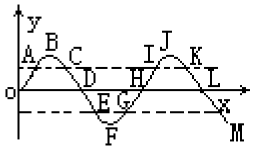
答 C

(2)如果波的传播方向相反，则 3/4 周期后的波形图是　　[　　]

[可供选择的答案同第(1)小题。]

答 D

1962．一列简谐波的波形图象如图所示，



(1)图中振幅相等的点是　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

A．A、C、I、K；

B．O、D、H、L；

C．E、G、M；

D．A、I；

E．C、K；

F．B、J。

答 A、B、C、D、E、F

(2)图中相位相同的点是　　　　　　　　　　　　　　　　　[　　]

[可供选择的答案同第(1)小题。]

答 D、E、F

(3)图中速度达到最大的点是 [ ]

[可供选择的答案同第(1)小题。]

答 B

1963．海面上有一列沿某一个固定方向传播的正弦波，波长为λ，振幅为 A，传播速度为 v。有一块小木片由于该波的作用而上下运动。

(1)木片上下运动的周期是 [ ]

A．λ/2πv； B．λ/v；

C．v/λ D．A/v。

答 B

(2)有一艘小船以速度 u，（u＜v），沿波的传播方向前进，则相邻两波峰到达船所需的时间 t，为 [ ]

A．λ/u； B．λ/(v-u)；

C．λ/(v+u)； D．λ(v+u)。

答 B

(3)如果小船以速度 u 逆着波的传播方向前进时，相邻两个波峰到达船头的时间间隔 t_2，则下列关系中正确的是 [ ]

A．$t_1+t_2=2T$； B．$\frac{t_1t_2}{t_1t_2}=2T$；

C．$\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}=\frac{T}{2}$； D．$t_1+t_2=\frac{2A}{v}$。

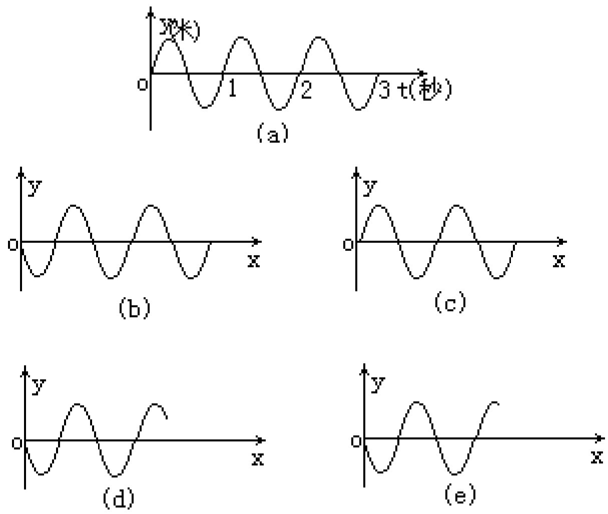
答：C

[提示](1)由$v=\frac{\lambda}{T}$,得$T=\frac{\lambda}{v}$；

(2)船沿波的传播方向行驶，相对速度为$v-u$，则$t_1=\frac{\lambda}{v-u}$；

(3)船逆着波的传播方向行驶，船和波的相对速度为 v+u，则 $t_2=\frac{\lambda}{u+v}$。所以$v+u=\frac{\lambda}{t_2}$，$\frac{2v}{\lambda}=\frac{t_1+t_2}{t_1t_2}$，$\frac{t_1t_2}{t_1+t_2}=\frac{\lambda}{2v}=\frac{T}{2}$。

1964．图(a)是一个振动物体的振动图象，振动物体位于 x=0 处，波沿 x 方向传播。则该物体开始振动以后的 2 秒末在媒质中传播的机械波的波形图象是以下图象中的 [ ]

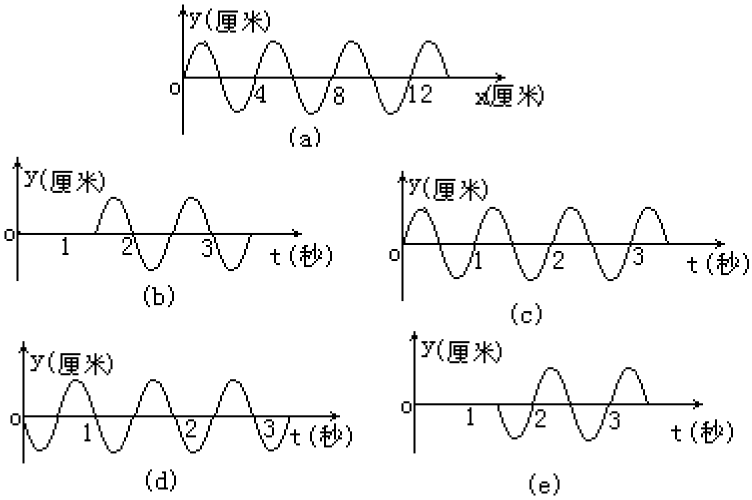


[提示]从波源振动图象可见，振动周期 T=1 秒，振源开始振动后 2 秒末，波应该向外传播 2 倍波长。

且振源开始是向上运动的（从振动图象 0 点可见），所以在波形图象中 0 点也该先向上运动。

答 D

1965．图(a)是一列机械波在 t=3.5 秒时的完整波形图象，该波在媒质中的传播速度是 v=4 厘米/秒，如果波是在 t=0 秒时开始振动的，则在离波源 6 厘米的 A 点的振动图象是 [ ]



[提示]振源的振动周期$T=\frac{\lambda}{v}=\frac{4厘米}{4厘米/秒}=1秒$，

振源开始振动以后，要经过$t_1=\frac{OA}{v}=\frac{6厘米}{4厘米/秒}=1.5秒$才能使A点开始振动，因此图象的起始点该在 1.5 秒处。

又从波形图象中可以看到振源是先向上运动的（即从现在的 14 厘米处将向上运动），因此 1.5 秒时开始运动的 A 点也该向上运动。

答 B

1966．关于波的叠加和干涉，下列说法中正确的是 [ ]

A．只有两列横波才能产生干涉；

B．任意两列波都可以产生稳定干涉；

C．两列波叠加，相位相反的地方，振动加强

D．两列波叠加，相位相同的地方，振动加强。

答 D

1967．一列水波穿过小孔产生衍射。衍射后水波的强度减弱是因为 [ ]

A．水波的波长增大；

B．水波的周期增大；

C．水波的频率减小；

D．水波的振幅减小。

答：D

计算题

1968．振源开始振动后，在简谐波传播的方向上，以下各点的相位差是多少？ [ ]

A．相距离 1/4 波长的两个质点；

B．相距 1/2 波长的两个质点；

C．相距 3/4 波长的两个质点；

D．相距一个波长的两个质点。

[解答]

(1)$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$；

(2)$\Delta\varphi=\pi$；

(3)$\Delta\varphi=\frac{3}{2}\pi$；

(4)$\Delta\varphi=2\pi$。

1969．如果一个波的频率是 8 赫，传播速度是 2.4 米/秒，求在这个波的传播方向上相距为 20 厘米的两个质点之间有多少个波长？这两点的相位差是多少？ [ ]

[解答]由题意得波的频率 f=8 赫

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{2.4}{8}\text{米}=0.30\text{米}。$$

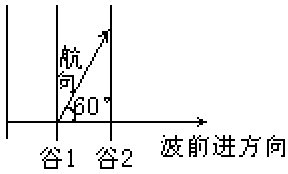
相距 l=0.20 米的波长数

$$n=\frac{l}{\lambda}=\frac{0.20}{0.30}=\frac{2}{3},$$

即距离为$\frac{2}{3}\lambda$。

相位差 $\Delta\varphi=\frac{2}{3}\times 2\pi=\frac{4}{3}\pi$。

1970．在有波浪的水面上行驶着一艘模型船，船速为 3 米/秒，水面波的速度为 1 米/秒。如果这只小船航行的方向和水波传播方向成 60°角，通过水面波的一个波谷到下一个波谷所需的时间为 1 秒。求水面波的波长和振动周期。



[解答]相邻的波谷间距离为一个波长λ。由图得船航行的距离为 $v_{船}\times t$ 时，波前进了 $v_{水}\times t$ 路程。船在波前进的方向上的速度分量为 $v'=v_{船}\cos60°$，

所以 $$\lambda=(v_{船}\cos60°-v_{水})t$$

$$=(3\times\frac{1}{2}-1)\times1米=0.5米。$$

振动的周期

$$T=\frac{\lambda}{v_{水}}=\frac{0.5}{1}秒=0.5秒。$$

1971．有一块木块落入水中，使圆形波纹沿水面向外传播，当第一波峰的半径扩展为 6 米时，第十个波峰恰在圆心形成。如果第一个波峰传到 5 米远处需要 40 秒钟，试求此波的波长、波速、周期和频率。

[解答]设水面波传播的速度为 v

$$v=\frac{s}{t}=\frac{5}{40}米/秒=0.125米/秒。$$

波在传播过程中第 10 个波峰到第 1 个波峰之间的距离等于(10-1)λ。

$$\lambda=\frac{s'}{(10-1)}=\frac{6}{(10-1)}米=0.667米；$$

$$T=\frac{\lambda}{v}=\frac{0.667}{0.125}秒=5.34秒；$$

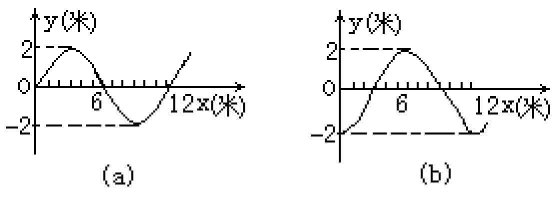
$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{5.33}赫=0.187赫。$$

1972．波形图(a)经 0.1 秒后变为波形图(b)。如果波的传播方向向右。求

(1)该波的波长λ；

(2)该波的波速 v；

(3)该波的频率 f。



[解答](1)从波形图象可知它的波长λ=12 米。

(2)比较两个波形图象，可以看出图(b)中的波峰比图(a)中的波峰向前推移了 3 米，所以得

$$v=\frac{s}{t}=\frac{3}{0.1}米/秒=30米/秒。$$

(3)由 $f=\dfrac{v}{\lambda}$

得 $f=\dfrac{30}{12}$赫$=2.5$赫。

1973．一列平面波沿 x 轴负方向传播，它的振幅为 0.010 米，频率为 550 赫，速率为 330 米/秒，试写出它的波动方程。

[解答]从振动出发先后建立波动方程，当波从原点沿 x 轴的负方向传播时，x 轴负方向上任一点的振动比原点滞后，如果在 t 时刻，原点 x=0 的振动为 y=Acosωt，则 x 处的振动在时间上较 x=0 处的振动滞后一段时间，而 x＜0，所以在 t 时刻，x 处的振动为

$$y=A\cos\omega(t+\frac{x}{v})。$$

现 A=0.010 米，f=550 赫，v=330 米/秒，

所以$y=0.010\cos(1100\pi t+\dfrac{10\pi}{3}x)$米。

1974．有一列沿绳传播的横波，它的方程为 y=10cos(0.01πx-2πt)米。式中各量全部用国际单位制表示。求：

(1)波的振幅、频率、速度和波长；

(2)求绳中任一点的最大振动速度值。

[解答](1)波动方程一般式为

y=Acos(kx-ωt)。

和一般式相比较得

$A=10$米，$\omega=2\pi f$，得$f=\dfrac{\omega}{2\pi}=\dfrac{2\pi}{2\pi}$赫$=1.0$赫，

因为 $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$，而$k=0.01\pi$，

所以 $\lambda=\dfrac{2\pi}{k}=\dfrac{2\pi}{0.01\pi}$米$=200$米。

$$v=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{0.01\pi}\text{米}=200\text{米}/\text{秒}。$$

v=f·λ=1×200 米/秒=200 米/秒。

(2)任一点的最大振动速度就是质点在平衡位置时的速度。直接从简谐振动速度公式得

$$v\max=\omega\cdot A=2\pi\cdot 10\text{米}/\text{秒}=62.8\text{米}/\text{秒}。$$

1975．频率为 500 赫的波，它的波速为 350 米/秒。求：

(1)在它的传播的方向上有相位差为 60°的两点，则该两点的距离有多大？

(2)如果任选媒质中的一个质点，求出该质点在经历史 10^{-3} 秒前后的相位差。

[解答](1)相位差$\Delta\varphi$和时间的关系为$\Delta x=x_2-x_1$间的关系

$\Delta\varphi=\dfrac{2\pi}{\lambda}(x_2-x_1)$，

所以 $x_2 - x_1 = \dfrac{\lambda}{2\pi}\Delta\varphi = \dfrac{v}{2\pi f}\Delta\varphi$

$$= \frac{350}{2\pi \times 500} \times \frac{\pi}{3}\text{米} = 0.12\text{米}。$$

(2)相位差$\Delta\varphi$和时间的关系为

$\Delta\varphi = 2\pi f(t_2 - t_1)$

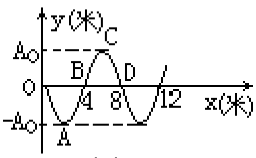
$= 2\pi \times 500 \times 10^{-3}$弧度$= \pi$弧度

$= 180°$

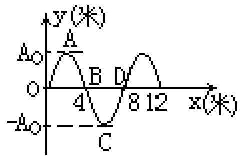
1976．图(a)是一列横波在某一时刻的波形图象，图象中 x 轴的正方向表示波传播方向，y 轴表示质点的位移。已知波速 v=32 米/秒。试问：

(1)波长λ是多少？

(2)波前向 x 方向传播半个波长距离后波形图象如何？此时 A、B、C、D 质点振动方向又如何？



(a)



(b)

(3)周期 T 是多少？

(4)如果图(a)所给出的是起始时刻的波形图，则 A 点的振动方程如何？

[解答](1)由图(a)可知 O、D 间的距离为一个波长，所以波长λ=8米。

(2)波前向 x 正方向传播半个波长，A 质点的振动经过半个周期，到达正位移最大值，同理 C 质点到达负位移最大值，O、B、D 质点仍在平衡位置，据此作出波形图(b)。B 质点向上运动，D 质点向下运动，A、C 质点速度为零。

(3)由$\lambda = vT$，

得 $T = \dfrac{\lambda}{v} = \dfrac{8}{32}\text{秒} = 0.25\text{秒}。$

(4)当 t=0，A 质点在负位移的最大值，振幅应为 A_0 米，

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0.25} = 8\pi$弧度/秒。

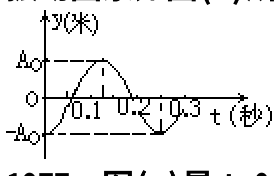
$-A_0 = A_0\cos(\omega \times 0 + \varphi)$

$\cos\varphi = -1$，$\varphi = \pm\pi$。

所以振动方程为

$x = A_0\cos(8\pi t \pm \pi)$米。

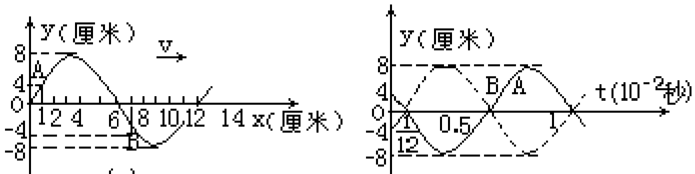
振动图象如图(c)所示。



1977．图(a)是 t=0 时一列波的图象。已知振动由质点 A 传到质点 B 需要时间 0.005 秒。求：

(1)波速；

(2)画出由该时刻起质点 A 和 B 的振动图象。



(a) (b)

[解答] (1)由波形图象可知该波的波长λ=12 厘米，波从 A 传到 B 所需时间为0.005秒，A和B相距为$\frac{1}{2}$λ，所以振动的周期T = 0.01秒。由

由公式

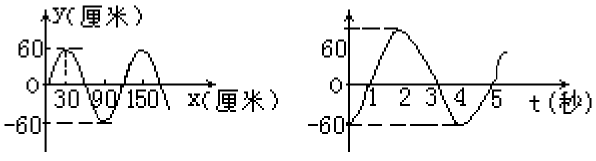
$$v=\frac{\lambda}{T},$$

得 $v=\frac{12\times 10^{-2}}{0.01}$米/秒 = 12米/秒。

(2)由波形图象可知A、B两质点相距为$\frac{1}{2}$波长，所以A、B两质点的振动是反位相的。质点 A 和 B 的振幅 A=8 厘米，周期 T=0.01 秒。在 t=0 时质点A的位移y = 4厘米，运动方向向下，经$\frac{T}{12}$到达平衡位置，据此条件可作出它的振动图象。图(b)实线所示就是 A 质点的振动图象，虚线表示 B 质点的振动图象。

1978．图(a)是一列简谐波在 t=6 秒时间的波形图象，如果此波沿 x 方向传播的速度 v=30 厘米/秒。试作出波在传播方向距 O 点 30 厘米处 P 点的振动图象，并列出它的振动方程。

[解答]由波形图象可得波长



(a) (b)

λ=1.20 米。

$T=\frac{\lambda}{v}=\frac{1.20}{0.30}$秒 = 4秒。

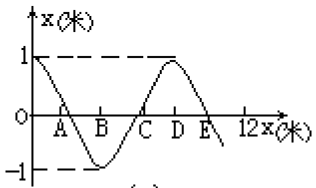
A=0.6 米。

P 点在经过 1.5T 后位移在 y 轴正向最大位移处，因此在 t=0 时，P 点在 y 轴反向最大位移处。它的振动图象如图(b)所示。

P 点的振动方程为

$y=0.6\cos(\frac{\pi}{2}t\pm\pi)$米

1979．图(a)是一列纵波在某一个时刻的波形图象。图中的 x’表示媒质点离平衡位置的位移，x 表示波的传播方向，A、E 表示媒质密部的中心，如果此波的周期为 0.2 秒，求：



(a)

(1)哪个质点的速度最大？哪个质点的速度最小？A、C 质点的速度方向如何？

(2)该波的波速和波和各是多少？

(3)画出经 1/4 周期的波形图象。

(4)画出题中某一个时刻起 A 点的振动图象。

[解答](1)根据简谐振动的振动方程和速度公式，可知质点在位移最小（即平衡位置）处的速度最大，在位移最大处速度最小。所以 A、C、E 质点的速度最大，B、D、O 质点的速度最小，即 $v_B=v_D=V_0=0$。

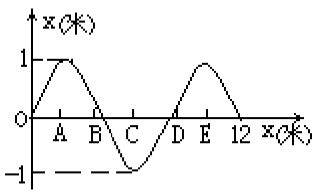
因为波的传播方向为x轴正方向，在图(a)的时刻起再经 $\frac{1}{4}T$，质点 A 将达到正位移最大值，而 C 质点将达到负位移最大值。因此 A 质点在该时刻的速度方向沿 x 轴正方向，而 C 点的速度将沿 x 轴负方向。

(2)O 质点和 D 质点都处在正向最大位移处，且是位移相同的最靠近的两点，根据波长的定义这列纵波的波长就是 O、D 间的距离，即

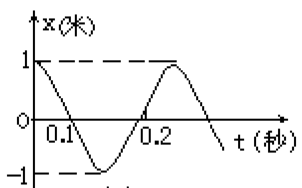
$$\lambda = OD = 8\text{米}。$$

波速 $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{8}{0.2}\text{米/秒} = 40\text{米/秒}$。

(3)纵波在波的传播方向经 $\frac{1}{4}T$ 后共前进 $\frac{1}{4}\lambda$。这时质点A的位移正向最大，B 质点的位移为零。波形图象如图(b)所示。



(b)



(c)

(4)A质点在平衡位置，速度沿正向达到最大，经 $\frac{1}{4}T$ 后位移正向最大，它的振动图象如图(c)所示。

1980．波源位于媒质中的 O 点，它的振动周期为 T，振幅为 A_0 在 t=0 时，O 点有正向最大位移，此波源所激起的波的波长是 λ。试求：

(1)O 点的振动方程；

(2)以 O 点为原点，取 x 轴正方向为传播方向写出此波的波动方程。

(3)距波源 $\frac{1}{2}\lambda$ 处的一个质点的振动方程。

[解答](1)设 O 点的振动方程为

$$y = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi)，$$

因为 $t = 0$ 时，$y = A$，

所以　　A=Acosφ，
即时　　φ=0。
得　　$y = A\cos(\frac{2\pi}{T}t)$。

(2)在 x 轴上任取一点，它的坐标为 x。因为波从 0 点传播到该点所需的时间为 x/v，所以在同一时刻，0 点的相位是ωt，则该点的相位为 $\omega(t-\frac{x}{v})$。因此该点的振动方程为

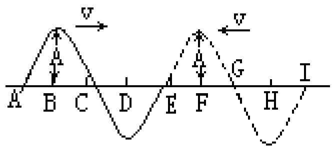
$$\begin{aligned} y &= A\cos\omega(t-\frac{x}{v}) \\ &= A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}), \end{aligned}$$

这就是沿 x 轴传播的波动方程。

(3)由波动方程可知，当$x = \frac{1}{2}\lambda$时，振动方程为

$$\begin{aligned} y &= A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{1}{2}) \\ &= A\cos(\frac{2\pi}{T}t-\pi)。 \end{aligned}$$

1981．如图(a)所示。在均匀媒质中 AI 直线上有等距离的点 A、B、C、D、E、F、G、H、I，它们间的距离均等于λ/4。现有两列波，波长同λ，振幅同为 A，速率同为 v，振动方向也相同，但传播方向相反。在 t=0 时刻从左向右传播的一列波的波前正好到达 E 点；同时从右向左的那列波的波前也正好到达 E 点。



(a)

(1)分别画出$t = \frac{T}{4}$、$\frac{T}{2}$时刻这两列波的波形图象。

(2)分别用粗实线表示在$t = \frac{T}{4}$、$\frac{1}{2}T$。时刻在两列波重叠的区域内所有质点的位移大小。

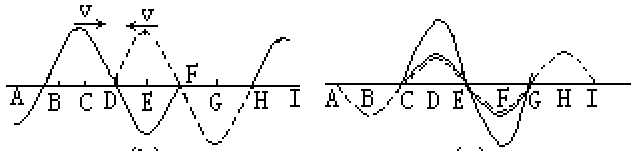
(3)画出$t = \frac{T}{2}$时刻起质点D、E的振动图象，由此得出什么结论？

[解答](1)已知$t = 0$时的波形图象，求$t = \frac{1}{4}T$时刻的波形图象，只要将原波形图象沿波的传播方向平移$\frac{1}{4}\lambda$就可得到，见图(b)所示。

同理把$t = 0$时刻两波形图象分别向右和向左平移$\frac{1}{2}\lambda$就可得到$t = \frac{T}{2}$时刻的波形图象，如图(c)所示。

(2)在$t = \frac{1}{4}T$时刻，在D和F间两列波叠加，在叠加区域内每个质点

同时参于两上振动，它们位移大小相等而方向相反，叠加后这些质点的位移都等于零，如图(b)中的粗实线 DF 所示。



(b) (c)

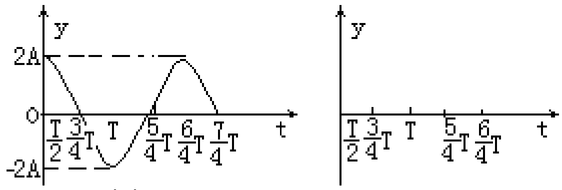
在$t=\frac{T}{2}$时刻，两列波在C和G之间区域内叠加。因为区域内有两个振动，它们位移大小和方向均相同，因此叠加后各质点的位移要比参与一个振动时位称大一倍，如图(c)的粗实线所示。

(3)一个质点参于两个同频率的简谐振动时，它的合振动也是简谐振动，合振动的频率和发振动的频率相同。

从$t=\frac{1}{4}T$时刻起，质点D就参与了两个同频率的简谐振动，当$t=\frac{T}{2}$在 D 点叠加时，它们的相位也相同，所以 D 点的位移等于 2A，D 点的振幅也等于2A。从$t=\frac{1}{2}T$时刻起，D质点的振动图象如图(d)所示。

E 点从 t=0 时刻起就参与了两个振动，而且一开始两个振动是反相的，

所以从$\frac{1}{2}T$时刻起E点的位移始终是零，它的振动图象与时间轴t重合，如图(e)所示。



(d) (e)

1982．A、B 为两个同相位、同频率、同振幅振动的相干波源，它们在同一媒质中。设频率为f，波长为λ，A、B间相距为$\frac{3}{2}$λ，P在为过 AB 的直线上，并位于 A、B 外侧的一个任意点。试求：

(1)从 A 点发出的波在 P 点的振动和从 B 点发生的波在 P 点的振动的相位差。

(2)P 点的合振动振幅。

[解答](1)因为 P 点在 AB 的连线上，不论在 A 的外侧还是在 B 的外侧，其波程差$\Delta=\frac{3}{2}\lambda$。

$$\Delta\varphi=2\pi\frac{\Delta}{\lambda}=2\pi\frac{\frac{3}{2}\lambda}{\lambda}=3\pi。$$

(2)因为$\Delta\varphi$=3π，AB 在 P 的振动正好反位相，因此合振动的振幅 A=｜A_1-A_2｜=0。

1983．如图所示，A、B 是两个振动方向相同、频率相同，相位相同的波源，A、B 间的距离是 1 米。当 A 和 B 发生振动时产生的波在右侧媒

质里叠加，用一个探测器在 P_0 点测到一个强振动，到 P 点又测到了下一个较强的振动。如果 l=5 米，P_0P=85 厘米，v=17 米/秒，试求 A、B 产生的波的波长和频率。

[分析] 波源 A 和 B 同频率同相位，产生的波在同一媒质里叠加，符合相干条件。根据波的干涉条件，两列波的波程差应满足

$\Delta r=r_1-r_2=k\lambda$ (k=0，±1，±2，±3…)。

根据题设条件，当 k=1 时，P 点为一个加强点，用公式可求得波的频率和波长。

[解答]因为$r_1^2=l^2+(\frac{d}{2}+x)^2$，$r_2^2=l^2+(\frac{d}{2}-x)^2$，

所以 $r_1^2-r_2^2=l^2+(\frac{d}{2}+x)^2-[l^2+(\frac{d}{2}-x)^2]$，

$(r_1+r_2)(r_1-r_2)=2xd$，

又因为 $r_1+r_2\approx 2l$，

所以 $r_1-r_2=\frac{xd}{l}$。

根据干涉条件得

$$r_1-r_2=k\lambda=\frac{xd}{l},$$

所以 $\lambda=\frac{d}{kl}\cdot x$。

当 k=1 时，

$$\lambda=\frac{1\times 0.85}{1\times 5}\text{米}=0.17\text{米};$$

$$f=\frac{v}{\lambda}=\frac{17}{0.17}\text{赫}=100\text{赫}。$$

1984．s_1和s_2为初相不相等的两相干波源，相距$d=\frac{1}{4}\lambda$，若s_1的位相较s_2超前$\frac{\pi}{2}$。设两波在s_1s_2连线上的强度相同且不随距离而变化，问 s_1s_2 连线上在 s_1 外侧各点的合成波的强度如何？又在 s_2 外侧各点的强度如何？

[解答] 设 s_1 的初相角为φ_1，s_2 的初相角为φ_2，则在 s_1 外侧各点两列波的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda}。$$

$$=-\frac{\pi}{2}-2\pi\frac{\lambda/4}{\lambda}=-\pi。$$

所以在 s_1 外侧各点其分振动是反相的，由于两波在连线方向上强度相同，振幅也相同，所以合成波的振幅 A=0，波的强度也为零，即在 s_1 外侧无波传播。

在 s_2 外侧各点的相位差为

$$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2-2\pi\frac{r_1-r_2}{\lambda}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0,$$

可见在 s_2 外侧各点的分振动是反相的，所以合成波的振幅为

$A=A_1+A_2=2A_0$，

式中 A_0 为相干波源的振幅。所以，波的强度

$$I\infty A^2=(2A_0)^2=4A_0^2,$$

即在 s_2 外侧合成波的强度 I 正比于相干波源振幅 A_0 平方的 4 倍。

1985．在同一媒质中有两个波源分别位于 A、B 两点，在传播中两列波的振动方向相同，振幅相等，频率都等于 100 赫，两波源的相位差为 π。如果 A、B 两点相距为 30 米，波在媒质中传播的速度都是 400 米/秒。试求 AB 连线上因波的干涉而静止的各点位置。

[解答] 以 A 点为坐标原点，x 轴方向向右。在 A、B 之间取任意点 C 距 A 点为 x 米，距 B 点为(30-x)米。

由题设条件知　$\varphi_A=\omega t-\frac{\omega x}{v}$，

$$\varphi_B=\omega t-\omega(\frac{30-x}{v})+x,$$

所以　$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A=[\omega t-\omega(\frac{30-x}{v})+\pi]-[\omega t-\frac{\omega x}{v}]$

$$=\frac{2\omega x}{v}-\frac{30\omega}{v}+\pi,$$

当 x 满足 $\Delta\varphi=(2k+1)x$ 时，则相应的点振幅为零，保持静止。

所以　$\Delta\varphi=-\frac{\omega\cdot 30}{v}+\frac{2\omega x}{v}+\pi=(2k+1)\pi$，

$$\frac{2\omega}{v}\cdot x=2k\pi+\frac{30\omega}{v},$$

得　$x=15+\frac{v}{\omega}k\pi=15\text{米}+\frac{400}{2\pi\times 100}k\pi\text{米}$

=15 米+2k 米(k=0，±1，±2，…±7)，

即　x=1、3、5、7、9……29 米等点为静止的点。

在 A、B 连线的外侧，如 B 的外侧，相位差

$$\Delta\varphi=[\omega t-\omega(\frac{x-30}{v})+\pi]-[\omega t-\frac{\omega x}{v}]$$

$$=\frac{30\cdot\omega}{v}+\pi=16\pi,$$

在 A 的外侧，相位差

$$\Delta\varphi=[\omega t-\omega(\frac{x-30}{v})+\pi]-[\omega t-\frac{\omega x}{v}]。$$

由上分析可知在 A、B 外侧不可能形成干涉相消，因此没有静止点。

说理和论证题

1986．机械波产生的条件是什么？波速、周期、振幅、波长各由什么决定？

[解答] 机械波产生的条件有两个：首先要有按一定规律振动的振源，第二要有能传递振动的弹性媒质。

波动中的周期和振幅由振源决定。波速由媒质决定，当媒质一定时，波速也确定。

$\lambda = \frac{v}{f}$，说明波长由波速和频率决定。而波速决定于媒质，频率决定于振源，所以说波长由媒质和振源所决定。当媒质确定时，波长和振源频率成反比。当振源频率一定时，波长则完全由媒质的性质来决定。

1988．振动和波的关系如何？简谐振动和简谐波的关系如何？

[解答]波动是振动在媒质里的传播，没有振动就不存在波动。就构成媒质的每个质点来看，所呈现的现象是振动；而就媒质的全体来看，所呈现的现象是波动。振动是波动的成因，波动是振动的传播。

波在媒质里传播，各质点作简谐振，振动的振幅、周期就是简谐波的振幅、周期。但简谐波的传播速度只同媒质的物理性质有关、和振幅、频率无关。

1988．波在媒质中传播时波的速度和质点的振动速度有何区别？

[解答]波速是波在媒质里传播的速度，它的大小只和媒质的性质有关。在一般情况下当媒质确定后，在该媒质中波速是个常数。

而质点的振动速度，随着时间 t 的变化而变化，如在简谐波中 v=-ωA(ωt+φ)，它的大小在 0 到ωA 之间。因为ω=2πf，可见振动频率越高，振动幅度越大,v 越大。

当媒质里传播的是横波时，则质点振动的速度方向和波速方向垂直；当媒质里传播的是纵波时，则质点振动的速度方向和波速方向在同一条直线上。但它们两者之间没有数量上的关系。

1989．简谐振动表达式和简谐波的表达式有什么联系？有什么不同？

[解答]简谐振动的表达式为

y=Acos(ωt+φ)(1)

简谐波的表达式为

$$y = A\cos(t - \frac{x}{v}) \qquad (2)$$

首先，(1)式仅表示一给定点的简谐振动，(2)式能表示空间(x)任一点的简谐振动，而不同点的简谐振动的差别仅是初相位的差别。其次(1)式只给出的是一个振动，它的位相只随时间而变化，(2)式则表示相位和时间 t、空间距离 x 的关系，(2)式不仅表明了给定 x 处的简谐振动，而且反映了振动的传播过程。

1990．波形图象和振动图象在物理函义上有何区别？

[解答]波形图象是描述波在媒质中传播时，某一个给定时刻各质点的位移，所以波形图象是位移 y 随 x 的变化的图线。

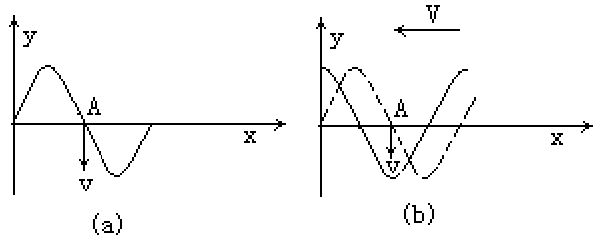
振动图象是描述媒质中，某一个给定质点在各不同时刻的位移，所以振动图象是位移 y 随时间 t 的变化的图线。

1991．波在媒质中传播速度 v=fλ，那么是否可以利用提高频率 f 的方法来提高波在媒质中传播的速度？

[解答]不能。因为波的传播速度只决定于媒质的性质，和波的频率无关。如果提高振动频率，则波长λ一定相应减小，但波速并不一定变化。

1992．图(a)所示为一列横波的波形图象，试在图上标出波的传播方向，并画出经过 1/4 周期后它的波形图象。

[解答]一点的振动状态（位移、速度）是由邻近点传播来的。先假定波从左向右传播，可知左边邻近 A 点的质点位移为正，振动速度方向亦在 y 轴正方向，下一时刻 A 点也具有正的位移和正的速度，这和已知条件不符。而设波自右向左传播，则 A 点右侧邻近点的位移为负，速度方向也为负，和已知条件符合，从而可以断定波是自右向左传播的。经过 1/4 周期波向左传播 1/4 波长，波形图象如图(b)实线所示。



1993．波在媒质中传播，平时说“媒质中某处是波峰”，是不是指任何时刻在那里都出现波峰？波峰和波谷是怎样传播的？

[解答]波动在媒质里传播时，波峰和波谷是以波速向前传播的，并不是固定在某一个地方。媒质中某处在某一时刻出现波峰，不等于在任何时刻该处都出现波峰，确切地说，每经一个周期波峰才会在该处重现。

1994．什么叫波在空间上的周期性？什么叫波在时间上的周期性？

[解答]波动在媒质空间中传播时，在任一个时刻 t，空间中都周期性地出现相同位移的现象，这称为波的空间的周期性，空间周期即波长 λ，具体由波形图象表示。在波动传播的媒质空间中每一个质点的振动，在时间上具有周期性，时间周期即振动周期 T。

空间周期性和时间周期性存在一定的联系，即 $\lambda=vT$。

1995．紧张的弦线有一个持续扰动，就可以观察到波在弦线上传播。如何以简易的实验方法确定弦上波节和波腹的位置？

[解答]用细小而轻质纸片对折后，骑置于弦线上，当弦线振动时，波腹处的纸片被振掉，在波节处则仍留有纸片，这样就可确定波腹波节位置。

1996．驻波是怎样产生的？驻波的特点是什么？

[解答]两列振动方向相同、振幅相等、频率相同、传播方向相反的波叠加后就形成驻波。驻波有下列主要特点

(1)有固定的波节（两列波叠加时，相位始终相反，合位移为零的点）、波腹（两列波叠加时，相位始终相同，合位移最大的点），也可看成是一种特殊的振动。

(2)从能量的角度看，因为输入和输出的能量相等，能量只是从波节处转移到波腹处，再由波腹处转移到波节，能量不会向外传播，也没有损失。

1997．在平面波的传播方向上，任意时刻下列各振动质点的位移是否相同？

(1)相距半个波长的两个质点；

(2)相距一个波长的两个质点；

(3)相距半个波长的奇数倍的两个质点；

(4)相距半个波长的偶数倍的两个质点。

[解答](1)相距半个波长的两质点，它们的位移的大小相等，但方向相反；

(2)相距一个波长的两质点，它们是同相位的，故位移的大小和方向都相同；

(3)相距半波长奇数倍的两质点，其相位差$\Delta\varphi=(2k+1)\pi$，k 为 0、±1、±2……，所以它们的位移大小相等，但方向相反；

(4)相距半个波长的偶数倍，实际上是波长的整数倍，这样两个质点的振动是同相的，所以它们的位移大小和方向都相同。

声学

填充题

1998．发出声音的物体叫做声源，它们一定在作振动。由它们发出的声波是通过媒质传播到人耳的，声波在真空中是不能传播的。

1999．一列声波在空气中的波长是 25 厘米，速度是 340 米/秒；当它传入另一种媒质时，波长变成了 106 厘米，它在这种媒质中的传播速度为 1442 米/秒。当声波从一种媒质进入另一种媒质时，频率是不变的。

2000．人耳能听到的声音频率范围约为 20～20000 赫，0°C时声波在空气中传播的速度为 332 米/秒,这时声波在空气中的波长范围是 16.6～0.166 米。

声波在空气中的传播速度随温度升高而增大,20°C时声速增大到 344 米/秒，这时声波在空气中的波长范围是 17.2～0.0172 米。

低于 20 赫的声波叫做次声波，0°C时它在空气中的波长大于 16.6 米。

高于 20000 赫的声波叫做超声波，0°C时它在空气中的波长小于 0.0166 米。

2001．每个人能听到的声音的波长范围略有差异。如果某人只能听到波长为 0.020 米～8.5 米范围的声音，那么当声速为 340 米/秒时，他能听到的声音的最低频率为 40 赫，最高频率为 17000 赫。

2002．第一次测定声音在水中的传播速度是 1827 年在日内瓦湖上进行的。两只船相距 14 千米，在一只船上实验员向水里放一只钟，当他敲钟的时候，船上的火药同时发光，在另一只船上，实验员向水里放一个听音器，他看到火药发光后 10 秒钟听到了水下的钟声，如果不考虑光传播这段距离所花的时间，那么由此测出的水中的声速是 1400 米/秒。

2003．声波在空气中传播的速度是 340/秒，在钢铁中传播的速度是 4900 米/秒。一个人用锤子敲击一下铁桥的一端而发出声音，分别经过空气和铁桥传到另一端，相差的时间为 2 秒。则铁桥的长度是 731 米。铁中的声波波长和空气中声波波长的比为 245:17。

2004．利用超声波可以探测鱼群的位置。在一只装有超声波发射和接收装置的渔船上，当它向选定的方向发射出频率为 5.8×10^4 赫的超声波后，经过 0.64 秒收到从鱼群反射回来的反射波，已知 5.8×10^4 赫的超声波在水中的波长为 2.5 厘米，则这群鱼跟渔船的距离为 464 米。

2005．旅游者发现前方有一座山峰，他从拍手到听到由山坡反射回来的回声，历时 1 秒钟，如果当时空气中的声速为 340 米/秒，则旅游者距山峰的距离为 170 米。

如果旅游者走过一个山谷，他拍手以后经过 0.5 秒听到右边山坡反射回来的声音，经过 1.5 秒以后听到左边山坡反射回来的声音，则这个山谷的宽度大约是 340 米。

2006．声波在空气中的传播速度为 340 米/秒。一木匠在屋顶上敲钉每秒 2 下，一观察者恰巧在看到木匠把锤举到最高时，听见敲钉的声音，如果木匠上举和下击锤的时间相等，则观察者和木匠之间的最短距离是 85 米。如果观察者在远处借助仪器仍能看到木匠的动作和听到敲钉的声音，则它们之间可能的距离的一般表达式为 s=(2n+1)·85 米(n=0，1，2，3……)

2007．好听的悦耳的声音叫做乐音，它是由周期性振动的声源发出的。乐音有音调、响度、音品三种特性。

音调是指声音的高低。人们对音调的感觉客观上决定于振动的频率。

响度是指声音的强弱。人们对响度的感觉客观上决定于声强，也就是决定于单位时间内通过垂直于声波传播方向上单位面积的能量。

音品是指声音的品质。音品是由泛音的多少、泛音的频率和振幅决定的。

2008．小孩声音的音调比成人高，这是由于小孩声音的频率较高。大提琴发出的声音可以很响，但音调总比小提琴低，这是由于大提琴声音的频率较低。

2009．人耳能感受的最大声强为 1 瓦/米^2，则声强级为 12 贝耳或 120 分贝。

闹市某处测定的噪声达到 78 分贝，则该处的声强为 6.31×10^{-5} 瓦/米^2。

[提示]声强就是单位时间内垂直通过单位面积的声波能量。人耳所能感受的最小声强为 10^{-12} 瓦/米^2，最大声强为 1 瓦/米^2。在比较声音强度时常用单位为贝耳（和分贝）的声强级来表示。

规定 $I_0=10^{-12}$ 瓦/米^2（人耳所能感受的最小声强）作为声强的标准。当某声波的声强为 I 时以 I 和 I_0 的比值的对数值 β 来量度声音的强弱，叫做声强级。

$$\beta=\log\frac{I}{I_0}。$$

如果声强为 10^{-6} 瓦/米^2，$\beta=\log\frac{10^{-6}}{10^{-12}}=6$。

β 的单位为贝耳（B），通常还用 1/10 贝耳为单位，叫做分贝（dB）。这里声强 I 是 I_0 的 10^6 倍，用声强级来表示就是 6 贝耳或 60 分贝。

2010．在空中有一点声源，它的发射功率为 2×10^{-7} 瓦，则距离声源 10 米处的声强为 1.59×10^{-10} 瓦/米^2，声强级为 22 分贝。

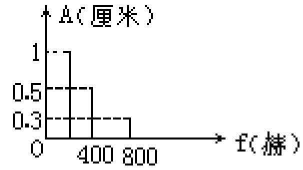
声强减弱到 10^{-12} 瓦/米^2 时，就听不到声源发出的声音了，则该处距离声源为 126 米。

有一点声源发出的球面声波，在距离声源 20 米处声强级为 20 分贝，则该处声强为 1×10^{-10} 瓦/米^2，距离声源 80 米处的声强为 6.25×10^{-12} 瓦/米^2，声强级为 7.96 分贝。

[提示]如果声音传播的距离比声源的线度大得多，就可以把声源看作是点声源，其发射的声波为球面声波。在不考虑媒质吸收的理想条件下，如果声源的发射功率为 P，则距声源 r 处的声强 I_r 可表述为

$$I_r=P/4\pi r^2。$$

2011．某声的振动图象是由图所示的三个简谐振动叠加而成的。该声的基音的频率是 200 赫，泛音的频率是 400 赫和 800 赫。



画出这一声音的频谱图。

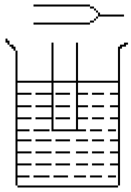
2012．声波在室内传播时，被障碍物反射和吸收，在消失之前会在室内存留，这种现象叫做<u>交混回响</u>。我们规定声强减弱到原值的百分之一的时间叫做交混回响时间。一个会声，<u>空</u>座时和满座时这一时间是不同的，<u>空</u>座时的时间较长，<u>满</u>座时较短。

2013．噪声从物理性质上来看，是由声源做<u>无规则的非周期性</u>振动而产生的。但从环境保护角度所说的噪声，还要包括一切对人们生活和工作有妨碍的声音。

2014．利用气柱共振可以帮助判断热水瓶内的水充满到什么程度。在给热水瓶充水时，可以听到瓶内共鸣声音的频率逐渐<u>增大</u>，这是由于<u>瓶内空气柱长度逐渐减小，振动频率逐渐增大</u>造成的。

2015．音叉和空气柱也可以发生共鸣，跟某一声波共鸣的空气柱的最短长度等于该声波波长的 1/4。如果常温下的声速为 340 米/秒，则要为频率为 440 赫的音叉配一个共鸣箱，箱内空气柱的长度应该是 <u>19.3</u> 厘米。

2016．如图所示，在空气柱共鸣实验中，如果测出能跟某音叉发生共鸣的空气柱的最短长度为 33 厘米，则该音叉发出的声波波长为 <u>132 厘米</u>。如果该音叉的固有频率是 256 赫，则这时空气中的声速是 <u>338 米/秒。</u>



2017．围绕正发声的音叉运动一圈，就会发现声音忽强忽弱，这是声波的<u>干涉</u>现象。产生这一现象的两个波源是<u>音叉的两个叉股</u>，它们符合<u>相干</u>波源的条件。

2018．“闻其声而不见其人”是由声波的<u>衍射</u>造成的。声波比其他波容易发生这一现象，是由于<u>声波的波长跟障碍物或孔的尺寸比较相近。</u>

2019．以速度为 72 公里/小时奔驰的火车，鸣笛声频率为 275 赫，已知常温下空气中的声速为 340 米/秒。当火车驶来时，站在铁道旁的观察者听到的笛声频率为 <u>292 赫</u>。当火车驶去时，站在铁道旁的观察者听到的笛声频率为 <u>260 赫</u>。

观测者坐在 90 公里/小时的火车上，迎面驶来一列速度为 72 公里/小时的火车，鸣笛频率为 300 赫，则观察者在对方列车驶来听到的声音频率为 342 赫，驶去听到的声音频率为 263 赫。

[提示]发射波的物体和观测者之间存在相对运动时，观测或接收到的波频相对于波源的发射频率发生变化的现象叫做多普勒效应。

如果波源、观测者和媒质相对静止时，波源发出频率为 f 的机械波，观测者接收到波的频率也为 f，设波速为 V，则波长 $\lambda=V/f$。

如果波源静止于媒质，观察者相对于媒质以速度 v 向波源运动，则波相对观察者的速度为$V+v$，他观察到的频率$f'=\frac{V+v}{\lambda}=\frac{V+v}{V}\cdot f$。

观察者静止于媒质，波源以速度 u 向观察者运动，以媒质为参照物，波长将缩短$\lambda-uT=(V-u)T$，则观察者观察到的频率$f'=\frac{V}{\lambda'}$

$=\frac{V}{V-u}\cdot f$。

当波源和观察者都相对媒质运动时，$f'=(\frac{V+v}{V-u})\cdot f$。

2020．有一种用钢丝操纵作圆周飞行的模型飞机，装有两冲程的活塞式发动机作为动力。操纵者站在圆心，在他听来，发动机工作时发出的声音是平稳不变的。场边的观察者则听到发动机的声音忽高忽低地作周期性变化，这是由于声源和观察者有相对运动，这种现象叫做多普勒效应。

模型飞机的飞行速度是 90 公里/小时，单缸发动机的转速是 9000 转/分，则观察者听到的声音的最高频率是 162 赫，最低频率是 140 赫，操纵者听到的声音频率是 150 赫。

选择题

2021．声音在固体、液体、气体中传播的速度，在一般情况下是 [ ]

A．固体＞液体＞气体；

B．液体＞气体＞固体；

C．气体＞固体＞液体；

D．固体＜液体＜气体。

答 A

2022．机械波有纵波和横波两类。试问声波

(1)在气体中是哪一类？ [ ]

A．纵波；

B．横波；

C．纵波和横波并存；

D．有时为纵波，有时为横波。

答 A

(2)在液体中是哪一类？ [ ]

A．纵波；

B．横波；

C．纵波和横波并存；

D．有时为纵波，有时为横波。

答 A

(3)在固体中是哪一类？ [ ]

A．纵波；

B．横波；

C．纵波和横波并存；

D．有时为纵波，有时为横波。

答 C

2023．如果声音的音调越高，那么产生这声音的声源 [ ]

A．频率一定越大；

B．振幅一定越大；

C．频率和振幅一定都越大

D．频率和振幅一定都越小。

答 A

2024．如果甲声音的声强为 10^{-4} 瓦/米 ^{2}，乙声音的声强为 10^{-3} 瓦/米 ^{2}，那么甲、乙两声音的声强比为 [ ]

A．10^1；　B．10^2；

C．10^3；　D．10^4。

答 D

甲乙两声音的声强级比为 [ ]

A．1；　B．2；

C．3；　D．4。

答 D

2025．剧场的交混回响时间，在满座时和空座时是不一样的。设满座时的交混回响时间为 t_1，空座时的交混回响时间为 t_2，则 t_1 和 t_2 关系为 [ ]

A．$t_1=t_2$；　B．$t_1>t_2$；

C．$t_1<t_2$；　D．无一定的规律。

答 C

2026．超声波的频率一定 [ ]

A．大于 20000 赫；　B．小于 20000 赫；

C．等于 20000 赫；　D．在 20～20000 赫之间。

答 A

超声波的波长

A．比声波长；　B．比声波短；

C．和声波一样长；　D．无一定规律。

答 B

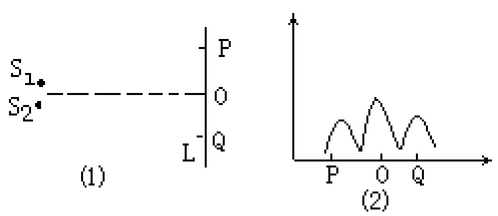
跟声波相比超声波的穿透能力 [ ]

A．比较大；　B．比较小；

C．一样大小；　D．可能较大，也可能较小。

答 A

2027．如图(1)所示，在点 S_1 和 S_2 处，放置从同一个音频讯号发生器接出的两个扬声器。在平行线段 S_1、S_2 前方的直线 L 上离 S_1 和 S_2 等距的点 O 附近，测定声波的强度，其结果如图(2)所示。



(1)在点 O，声波强度所以加强，不仅是由于 S_1O 和 S_2O 的长度相等，

同时由于在点 0 处来自 S_1 和 S_2 的两列声波有相同的 [ ]

A．波长； B．相位；

C．周期； D．音色。

答 B

(2)在点 P，声波强度所以加强是因为 S_2P 和 S_1P 的长度之差等于

[ ]

A．波长的 $\frac{1}{2}$； B．波长；

C．振幅； D．振幅差。

答 B

(3)在 P 点来自 S_1 和 S_2 的两列声波中哪个物理量等于 2π？ [ ]

A．频率； B．频率差；

C．相位； D．相位差。

答 D

2028．波长为 0.01 米的超声波，经过某一个小孔时，发生了明显的衍射现象，则这个小孔的直径大约为 [ ]

A．0.01 毫米左右； B．0.01 厘米左右；

C．0.01 千米左右； D．0.01 米左右。

答 D

2029．产生共鸣的原因是 [ ]

A．有两种声音同时存在；

B．一列声波遇到了反射；

C．作受迫振动而发声的物体的固有频率和另一正在发声的声源的频率相同；

D．两列声波发生了干涉。

答 C

2030．跟某一声波共鸣的空气柱最短的长度与该声波波长 λ 的关系是 [ ]

A．λ/2；B．λ/4；

C．λ/6；D．λ/8。

答 B

2031．一根两端固定的弦振动发声时的基频 [ ]

(1)跟它的长度；

(2)跟它的截面积；

(3)跟组成它的材料的密度；

(4)跟作用在弦上的作用力。

供选择的答案如下：

A．成正比； B．成反比；

C．平方根成正比； D．平方根成反比。

(1)答 B；(2)答 D；(3)答 D；(4)答 C

[提示]两端固定的振动弦的基频 $f_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{TL}{m}}$，其中 T 为弦的张力，

L为弦的长度，m为弦的质量。因为$m = SL\rho$，所以$f_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho S}}$，其中S为弦的截面积，ρ为组成弦的材料密度。

2032．一只鼓皮张紧的甲鼓，和一只鼓皮张得并不太紧的乙鼓，用同样的棒和同样大小的力去敲击，则甲鼓发出的声音比乙鼓出发的声音 [ ]

A．频率、振幅都大；
B．频率、振幅都小；
C．频率大、振幅小；
D．频率小、振幅大。

答C

2033．有人站在火车轨道旁，一列迎面高速驶来的火车正在鸣笛，则他听到的鸣笛声的频率将 [ ]

A．变大；B．变小；
C．不变；D．不能确定。

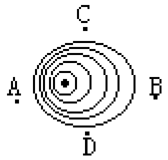
答A

如果火车是高速离他而去，则他听到的鸣笛声的频率将 [ ]

A．变大；B．变小；
C．不变；D．不能确定。

答B

2034．图表示一个产生机械波的波源O作匀速运动的情况，图中的圆表示同相位的波峰。



(1)图表示的是 [ ]

A．干涉现象；
B．衍射现象；
C．多普勒效应；
D．偏振现象。

答C

(2)波源正在移向 [ ]

A．A点； B．B点；
C．C点； D．D点。

答A

(3)观察到波的频率最低的点是 [ ]

A．A点； B．B点；
C．C点； D．D点。

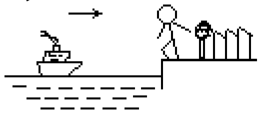
答B

(4)如果振源又开始作加速运动，则跟原来作匀速运动情况相比，振源前方的波长将 [ ]

A．增长； B．不变；
C．减短； D．先增长再减短。

答 C

2035．汽船沿向岸边的方向以 15 米/秒的速度航行。汽船跟站在岸边的人连线的延长线上有一座工厂，如图所示。汽船的汽笛振动频率为 650 赫，工厂内报警器的振动频率为 679 赫，声速 340 米/秒。



(1)汽船鸣笛时，岸边静止的人听到的声音频率是　　[　　]

A．621 赫；　　B．650 赫；

C．680 赫；　　D．702 赫。

答 C

(2)汽笛和报警器同时发声，岸边静止的人每秒能听到的差拍的次数是　　[　　]

A．0.5 次；　　B．3 次

C．1 次；　　D．6 次。

答 C

(3)汽笛和警报器同时发声，对在汽船和工厂连成的直线上运动的人而言，差拍消失，此人向工厂方向的运动速度是　　[　　]

A．0.25 米/秒；B．0.5 米/秒；

C．1.25 米/秒；D．1.75 米/秒。

答 A

(4)汽笛和报警器同时发声，有风吹过，对岸边静止的人而言，差拍消失。风吹的方向和风速是　　[　　]

A．自汽船向工厂方向，0.5 米/秒；

B．自汽船向工厂方向，11.2 米/秒；

C．自工厂向汽船方向，3.4 米/秒；

D．自工厂向汽船方向，11.2 米/秒。

答 B

计算题

2036．声音的速度 v 为 340 米/秒，光的速度 c 为 3×10^8 米/秒，我们看到闪光后经过 t 为 3 秒钟听到雷声，问打雷处离我们有多远？

[解答]光速远比声速大，光由闪电处传到人眼的时间可以略去不计。

$$s=vt=340\text{ 米/秒}\times3\text{ 秒}=1020\text{ 米。}$$

2037．有一个方法可以用来确定闪电处到你那里的距离。这个方法就是数出从你看见闪光的时刻起一直到听见雷声为止的秒数，然后用三除你数出的秒数，所得的结果就是以千米计算的距离。试说明这个方法，并确定在标准状态时这个结果的百分误差。

[解答]设所测得的时间为 t 秒，则按题意计算距离

$$s=\frac{t}{3}=0.333t\text{千米。}$$

在标准状态下，声音在空气中的传播速度为 331 米/秒即 0.331 千米/秒，在 t 秒内传播的距离为 $s=v_0t=0.331t$ 千米≈0.333t 千米。

百分误差 $A=\frac{|0.331-0.333|}{0.331}=0.6\%$。

2038．两个观众在大体育场上观看足球赛，他们看到场中一球员踢球的动作后，过了一会才听到声音。如果对于其中一个观众，在看到动作和听到声音之间的延迟时间为 0.6 秒，而对于另一个观众，延迟时间为 0.3 秒，并且两个观众跟这个球员的踢球处的两条连线成直角，试问这两个观众彼此相距多远。

[解答]设两观众与球员的距离分别为 s_1、s_2 则

s_1=0.6×331 米 199 米；

s_2=0.3×331 米=99.3 米

两观众相距 $s=\sqrt{s_1^2+s_2^2}=222$米。

2039．周期 T 为 0.005 秒的振动能在水中激起波长 λ 为 7.175 米的声波，求声波在水中的传播速度。

[解答] $v=\frac{\lambda}{T}=\frac{7.175}{0.005}$米/秒$=1435$米/秒。

2040．振动频率是 f 的声音在第一种媒质中传播的波长为 λ_1，在第二种媒质中传播的波长为 λ_2。如果 $\lambda_1=2\lambda_2$，试问声波从第一种媒质进入第二种媒质时，它的传播速度将如何变化？

[解答]声波从一种媒质进到另一种媒质时，其频率是不变的。

因为 $v_1=f\lambda$，$v_2=f\lambda_2$，

所以 $\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{2\lambda_2}{\lambda_2}=2$，

$v_2=\frac{1}{2}v_1$。

即声波从上述第一种媒质进入第二种媒质后，其传播速度减半。

2041．已知声波在水中和空气中的速度分别是 v_1 为 1480 米/秒和 v_2 为 340 米/秒。声音从空气进入水中时，波长等于原来的几倍？

[解答]声波从一种媒质进入另一种媒质时，其频率保持不变。

因为 $f=\frac{v_1}{\lambda_1}$，$f=\frac{v_2}{\lambda_2}$，

所以 $\frac{v_1}{\lambda_1}=\frac{v_2}{\lambda_2}$，$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{1480}{340}\approx4.35$。

2042．声音在空气中的传播速度是 $v_空$为 340 米/秒，在水中传播速度是 $v_水$为 1450 米/秒。求：

(1)声波从空气传入水中后，波长变为原来的多少倍？

(2)声波自水中进入铁中后，波长增加到原来的$\frac{10}{3}$，声波在铁中的传播速度是多少？

[解答]声音从一种媒质进入另一种媒质时频率不变，由式子

$\lambda=\frac{v}{f}$可知，波长和速度有关。

(1) $\lambda_{水}\frac{v_{水}}{f}$，$\lambda_{空}=\frac{v_{空}}{f}$，

$$\frac{\lambda_{水}}{\lambda_{空}}=\frac{v_{水}}{v空}=\frac{1450}{340}\approx 4.26。$$

(2) $\frac{v_{铁}}{v_{水}}=\frac{\lambda_{铁}}{\lambda_{水}}=\frac{10}{3}$，

$$v铁\frac{10}{3}v_{水}=\frac{10}{3}\times 1450米/秒=4833米/秒。$$

2043．子弹在离人的距离 L 为 5 米处以速度 u 为 680 米/秒飞过，设声音在空气中速度 v 为 340 米/秒。问当人听到子弹的啸叫声时，子弹前进了几米？

[解答]子弹啸声从 5 米远处传到人处的时间为

$$t=\frac{L}{v}=\frac{5}{340}秒=0.0147秒，$$

子弹前进的距离为 s，

s=ut=680×0.0147 米=10 米。

2044．一个人打靶，目标和人相距 s 为 280 米，枪弹离枪口后经过 t 为 1.3 秒听到枪弹击中靶声。取声速 v 为 340 米/秒。求枪弹的速度。

[解答]设枪弹的速为 u。近似地把它的运动看作匀速直线运动，它的运动时间为 t_1，

$$t_1=\frac{s}{u}。$$

声音传播所用时间为 t_2，

$$t_2=\frac{s}{v}=\frac{280}{340}秒=0.823秒。$$

$$t_1=t-t_2=1.3秒-0.823秒=0.477秒，$$

$$u=\frac{s}{t_1}=\frac{280}{0.477}米/秒=587米/秒。$$

2045．在和实验者相距 s 为 715 米处，有人用铁锤敲击铁轨。实验者用耳贴近铁轨时听到敲击声比他从空气中听到的敲击声早 2 秒，空气中的声速取 $v_{空}$为 333 米/秒，试问声音在铁轨中传播的速度 v 为多大？

[解答]在空气中

$s=v_{空}t$(1)

在铁轨中 $s=v(t-\Delta t)$(2)

由(1)、(2)式可解得

$$v=sv_{空}/(s-v_{空}\cdot\Delta t)=\frac{715\times 333}{(715-666)}米/秒=4859米/秒。$$

2046．射击运动员射击目标时，在子弹发射后经过 t 为 6 秒钟，听到射击时发出的声音的回声。设声音的速度 v 为 340 米/秒，求反射声音的障碍物离射击有多远？

[解答]因为 2s=v·t，

所以 $s=\frac{vt}{2}=\frac{340\times6}{2}$米$=1020$米。

2047．一个有用石子测井深，如果石子在井口无初速释放后经过 t 为 3.0 秒钟听到水声。取声速 v 为 340 米/秒，则水面离井口的距离是多少米？

[解答]井口水面之间的距离为 h，石子自由下落到水面的时间为 t_1，石子击水声由空气传到人耳的时间为 t_2，则有

$$h=\frac{1}{2}gt_1^2,$$

$$h=vt_2=v(t-t_1),$$

$$v(t-t_1)=\frac{1}{2}gt_1^2,$$

$$340(3.0-t_1)=4.9t_1^2$$

$$t_1=2.88\text{ 秒},$$

$$h=40.6\text{ 米。}$$

2048．在两个平行峭壁间的山谷中放了一枪，2.0 秒后听到由一边峭壁反射回来的声音，又经过 2.0 米/秒，听到另一边峭壁反射的回声。0℃时声速 v_0=331.5 米/秒，温度每升高 1℃声速增加 0.6 米/秒，当时气温 20℃。问山谷的宽度是多少？

[解答]在 20℃时声音在空气中的速度

v=(331.5+0.6×20)米/秒=343.5 米/秒。

设两峭壁间相距 s，放枪位置离峭壁左右距离分别为 s_1 和 s_2，而 $s=s_1+s_2$。

因为 $2s_1=v\cdot t$，$s_1=\frac{1}{2}v\cdot t$，

$2s_2=v\cdot t_2$，$s_2=\frac{1}{2}v\cdot t_2$，

所以 $s=s_1+s_2=\frac{1}{2}vt_1+\frac{1}{2}vt_2$

$=\frac{1}{2}v(t_1+t_2)=\frac{1}{2}\times343.5\times(2+4)$米$=1030.5$米。

2049．在高 h 为 200 米的悬崖上，让一块石子自由落下，设声波在空气中传播的速度 v 为 340 米/秒，取 g=10 米/秒 ^{2}。问经过多少时间才能听到石头冲击地面的声音？

[分析]设从石子开始下落到听到声音为止的时间为 t。t_1 为自由落下的时间，t_2 为声音传播的时间，而 $t=t_1+t_2$。

[解答]由自由落体公式得

$$h=\frac{1}{2}gt_1^2$$

$$t_1=\sqrt{2h/g}\,; \qquad (1)$$

由声音传播的距离得

$h=v\cdot t_2$.

t_2=h/v；(2)

解(1)式和(2)式得

$t=t_1+t_2$=(6.32+0.588)秒=6.91 秒。

2050．枪的射击声和子弹同时到达 h 是 680 米高处，问子弹的初速 v_0 是多少？设枪竖直向上射击，子弹运动的阻力不计。声音在空气中的速度取 v 为 340 米/秒。

[解答]声波到达 680 米高处的时间

$$t=\frac{h}{v}。$$

在时间 t 内子弹以 v_0 为初速竖直上抛，上升的高度也是 h。

$$h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2=v_0\frac{h}{v}-\frac{1}{2}g(\frac{h}{v})^2，$$

$$v_0=v+\frac{gh}{2v}$$

$$=(340+\frac{9.8\times680}{2\times340})\text{米/秒}=349.8\text{米/秒}。$$

2051．从 A 点发出频率 f 为 50 赫的声音，以 v 为 330 米/秒的速度向 B 点传播。AB 两点间的距离等于这时声波的波长λ的 n 倍。当温度升高△t=20℃时，重复这个实验，发现在 AB 距离上的波数是(n-2)个。已知温度每升高 1℃，声速增加.5 米/秒，求 AB 两点相距多少？

[解答]设第一次实验时声波波长为λ，那么

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{330}{50}\text{米}=6.6\text{米}。$$

温度升高 20℃时，声音的速度为

v'=(330+20×0.5)米/秒=340 米/秒。

这时的波长为

$$\lambda'=\frac{v'}{f}=\frac{340}{50}\text{米}=6.8\text{米}。$$

A、B 间的距离为

l=nλ=(n-2)λ'，

所以 $$n=\frac{2\lambda'}{\lambda'-\lambda}=\frac{2\times6.8}{6.8-6.8}=68，$$

l=nλ=68×6.6 米=448.8 米。

2552．一条汽船向悬崖匀速行驶，通过某一个标记时鸣汽笛，经过 t_1 为 10 秒钟听到回声；继续行驶 t 为 1 分钟后，第二次鸣笛，经过 t_2 为 8 秒钟听到回声。当时空气中声速为 340 米/秒，求汽船的速度、该标记和悬崖间的距离。

[解答]设该标记跟悬崖相距为 s_1，则

$2s_1=v\cdot t_1+ut_1$(1)

式中 v 为声音的速度，u 为船速。

经 1 分钟后汽船前进了 u·t，

$2(s_1-ut)=vt_2+ut_2$(2)

由(1)、(2)式得

$$u=\frac{v(t_1-t_2)}{(2t-t_1+t_2)}=\frac{340\times(10-8)}{120-10+8}\text{米}/\text{秒}=5.76\text{米}/\text{秒}，$$

$$s_1=\frac{vt_1+ut_1}{2}=\frac{340\times10+5.76\times10}{2}\text{米}=1.73\times10^3\text{米}。$$

2053．某船的前面有一座高崖，船在下列三种不同情况下对高崖发射声波，都在 5 秒钟后听到回声。如果声音在空气中传播的速度 v 为 340 米/秒，问在发声时高崖和船之间的距离各是多少？

(1)船静止不动（相对于地球）；

(2)船向高崖航行的速度 u 为 10 米/秒；

(3)船静止不动，自船向崖吹的风的风速 u’为 10 米/秒。

[解答](1)当船静止不动,声音在船和高崖之间在返一次所经过的路程为高崖和船之间的距离 s_1 的两倍。$2s_1=vt$，

$$s_1=\frac{1}{2}vt=\frac{1}{2}\times340\times5\text{米}=850\text{米}。$$

(2)船向高崖航行，在 5 秒钟内船航行的距离为

$$s'=ut，$$

$$s'=10\times5\text{米}=50\text{米}；$$

声波在 5 秒内前进了 s″，

船跟高崖间的距离为

$$s_2=\frac{s'+s''}{2}=\frac{50+1700}{2}\text{米}=875\text{米}。$$

(3)声音向高崖方向传播的速度等于原来声速跟风速的和

$$v_1=v+u'=(340+10)\text{米}/\text{秒}=350\text{米}/\text{秒}，$$

声音由高崖返回时的速度等于原来声速跟风速的差

$$v_2=v-u'=(340-10)\text{米}/\text{秒}$$

$$v_2=330\text{米}/\text{秒}；$$

声波来回一次需要的时间是 5 秒，高崖和船之间的距离为 s_3

$$\frac{s_3}{350}+\frac{s_3}{330}=5，$$

$$s_3=849\text{米}。$$

2054．正在报警的警钟，每隔 T 为 0.5 秒钟响一声，声波在空气中的速度 v 为 340 米/秒。问在 t 为 5 分钟内，

(1)如果警钟不动，某人乘坐速度 u 为 20 米/秒的汽车向警钟接近，这个人能听到几响？

(2)如果这人不动，速度 u 为 20 米/秒的汽车带着警钟向人接近，人能听到几响？

(3)如果人和警钟都以 72 公里/小时的速度相互接近或相互远离，人能听到几响？

[解答](1)声波在空气中以 340 米/秒的速度向前传播，在 0.5 秒内前进 170 米；人乘车前进（向声源接近），声 波相对于人的速度为 v+u=（340+20）米/秒=360 米/秒。每一次响声传到人的耳处时间为

$$\tau=\frac{170}{360}\text{秒}；$$

5 分钟内的次数为

$$n_1=\frac{t}{\tau}=\frac{5\times 60}{\frac{170}{360}}次=635次。$$

(2)如果把警钟放在汽车上，声波相对于人的速度未变，但因警钟前一声响和第二个声响的波列距离近了，即当第一个钟响的声波在 0.5 秒内前进 170 米的同时，汽车也前进了 10 米，所以第一波列和第二波列相距只有△s=(v-u)T=(340-20)×0.5 米=160 米；在 5 分钟内波列共前进

$$s=vt=340\times 5\times 60\text{ 米}=102\times 10^3\text{ 米；}$$

人能听到的次数为

$$n_2=\frac{s}{\triangle s}=\frac{102\times 10^3}{160}次\approx 637次。$$

(3)人和警钟都以 72 公里/小时的速度相互接近，由于声波在空气中速度未变，两次钟响的波列相距△s=160 米。又由于人向声源方向运动，所以声波相对于人的速度 v+u=360 米/秒。这样人听到两次钟响的时间间隔

$$\tau'=\frac{\triangle s}{v+u}=\frac{160}{360}秒$$

5 分钟听到的次数为

$$n_3=\frac{t}{\tau'}=\frac{5\times 60}{\frac{160}{360}}次=675次。$$

人和警钟都以 72 公里/小时的速度相互远离，由于声波在空气中的速度未变，两次钟响的波列间相距△s=（v+u）T=（340+20）×0.5 米=180 米；又因人在以 20 米/秒的速度远离，故声波相对于人的速度为 v-u=320 米/秒；每一次钟响声传入人耳需要的时间

$$\tau''=\frac{\triangle s}{v-u}=\frac{180}{320}秒；$$

5 分钟内听到的次数

$$n_4=\frac{t}{\tau''}=\frac{5\times 60}{\frac{180}{320}}次=533次。$$

2055．声波在钢中传播，声速 v 为 5000 米/秒。如果同一时刻相位差△φ为π/2，相邻两点之间的距离为 l 为 1.54 米，求钢中声波的频率。

[解答]

$$f=\frac{v}{\lambda}，\triangle\phi=2\pi\frac{l}{\lambda}，$$

$$f=\frac{v\cdot\triangle\phi}{2\pi\cdot l}=\frac{5000\times\frac{\pi}{2}}{2\pi\times 1.54}赫$$

$$=812赫。$$

2056．声波的频率 f 为 680 赫，声速 v 为 340 米/秒，求传播声波的媒质中彼此相距 l 为 25 厘米两点间声波的相位差。

[解答]

$$\lambda=\frac{v}{f}，\triangle\phi=2\pi\frac{l}{\lambda}，$$

$$\triangle\phi=2\pi\cdot\frac{l\cdot f}{v}=2\pi\times\frac{0.25\times680}{340}$$

$$=\frac{2\pi}{2}=\pi。$$

2057．两只喇叭安放的位置如图所示，θ角很小。将它们接在 f 在 100 赫的音频振荡器上，声速 v 为 340 米/秒。要使在 P 点的观察者收听到最强的音响，L 应取什么值？要收听到最弱的音响，L 又应取什么值？

［解答］ 要在 P 点听到最强的音响，A、B 两喇叭发出的声音到 P 点的波程差必须等于半波长的偶数倍，即为 nλ，这样两列波到达 P 点时，具有同相位，从而加强。

L=10 米±nλ

$$\lambda=\frac{v}{f}=\frac{340}{100}米=3.4米，$$

得 L=(10±3.4n)米。(n=0，1，2…)

要得到最弱音响，A、B 的波程差必须等于半波长的奇数倍，即为（2n+1）$\frac{1}{2}\lambda$，这样两列波到达 P 点时，具有反相位，互相削弱。

L=10 米±(n×3.4+1.7)米

=[10±(1.7+3.4n)]米。（n=0，1，2…）

2058．一个发生球面波的声源放在反射墙 AB 附近的 P_1 点上，有小孩在 P_2 处收听这一声音，如图所示。如果空气中声波的传播速度为 331 米/秒，声源 P_1 的频率从低到高连续变化，求小孩在 P_2 处能听到的最大声音强度时的两种不同频率。

［解答］ 从声源发出的声波在传播到 AB 面上要发生反射，根据反射定律，声波的反射角β等于入射角α，设入射点 P_3，入射线 P_1P_3，反射线 P_3P_2。则

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{d}{10}，\mathrm{tg}\beta=\frac{50-d}{90}，$$

$$\frac{d}{10}=\frac{50-d}{90}，90d=500-10d，$$

$$d=5.0米。$$

由图可知声波从 P_1 直射 P_2 的波程为 P_1P_2，跟经反射后的波程之差为

$$\triangle=P_1P_3+P_3P_2-P_1P_2$$

$$=(\sqrt{10^2+5.0^2}+\sqrt{(50-5.0)^2+(80+10)^2}-\sqrt{80^2+50^2})米$$

$$=(11.18+100.62-94.34)米$$

$$=17.46米。$$

声波在墙上发生反射时，反射波与直射波相位差为π，这是因为在反射墙上发生半波损失的原因，所以实际的波程差为

$$\triangle' = \triangle - \frac{\lambda}{2}。$$

当△′为波长整数倍时，反射波和直射波在 P_2 处加强，小孩可以听到最大声强的声音。即

$$\triangle - \frac{\lambda}{2} = k\lambda，k = 0，1，2\cdots；$$

$$k = 0，\triangle = \frac{\lambda_0}{2}，\lambda_0 = 2\cdot\triangle = 2\times 17.46\text{米}$$
$$= 34.92\text{米}；$$

$$k = 1，\triangle = \frac{3}{2}\lambda_1，\lambda_1 = \frac{2}{3}\triangle = \frac{2}{3}\times 17.46\text{米}$$
$$= 11.64\text{米}；$$

$$k = 2，\triangle = \frac{5}{2}\lambda_2，\lambda_2 = \frac{2}{5}\triangle = \frac{2}{5}\times 17.46\text{米}$$
$$= 6.98\text{米}；$$

$$k = 3，\cdots$$

跟λ对应的频率为 f，则

$$f_0 = \frac{v}{\lambda_0} = \frac{331}{34.92}\text{赫} = 9.48\text{赫}；$$

$$f_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{331}{11.64}\text{赫} = 28.4\text{赫}；$$

$$f_2 = \frac{v}{\lambda_2} = \frac{331}{6.98}\text{赫} = 47.42\text{赫}；$$

……

由于听觉不能听到频率为 9.60 赫的声音，所以声源从低频到高频时，小孩能听到 28.4 赫以后的最大声强的音频，本题只要求两种不同频率，这两种频率可取 28.4 赫和 47.42 赫。

2059．如图所示一种用来测定声速的装置，AB 为一根长约一米一端封闭的玻璃管，称为孔特管。当孔特管右边铜杆振动时，在管内形成声波，从 A 端振源发出的波传至 B 端后发生反射；满足一定条件时，入射波和反射波发生叠加形成驻波。波腹处振动激烈，波节处几乎无振动。只要在管内均匀地散布一些锯木屑，调节管长 L，使形成驻波，就会发现有的地方木屑变稀，有的地方木屑变密，这就是波腹和波节处。很明显最右端是振动激烈的波源处，是波腹，在最左端则是波节处。现在测得管长 L=0.65 米，共 6 个半波形。如果声波在空气中传播的速度 v=340 米/秒。求铜杆振动的频率。

[解答]　驻波的相邻波节（或波腹）间的距离等于 $\frac{1}{2}\lambda$。现有 6.5 个波形，从图可知有 7 个节点和 7 个波腹，即有 6.5 个相邻波节（或波腹），所以有

$$\frac{\lambda}{2}\times 6.5 = L,$$

$$\lambda = \frac{2L}{6.5} = \frac{2\times 0.65}{6.5} = 0.20\text{米};$$

$$v = f\lambda,$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0.20}\text{赫} = 1700\text{赫}。$$

2060．音叉发出的声波在玻璃管内的空气中产生驻波，波的两个相邻波节之间的距离△s 为 40 厘米，声速 v 为 340 米/秒，求音叉的振动频率。

［解答］ 在空气中产生驻波时，两波节的距离必等于 $\frac{1}{2}\lambda$ 的整数倍，而相邻两波节间只相离 $\frac{1}{2}\lambda$。

$$\triangle s = \frac{1}{2}\lambda,$$

$$\lambda = \frac{v}{f},$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2\triangle s} = \frac{340}{2\times 0.4}\text{赫} = 425\text{赫}。$$

2061．一根两端开放的管子，长 L 为 80 厘米，声音的速度 v 为 340 米/秒，它将对什么样频率的声波发生共振？

［解答］ 管子开口端必定是波腹。因此发生共振条件是

$$L=n\left(\frac{\lambda}{2}\right),\ n=1,2,\cdots。$$

共振波长应为

$$\lambda = \frac{2L}{n} = \frac{1.6}{n}\text{米}$$

又因为

$$f = \frac{v}{\lambda},$$

所以共振频率

$$f = \frac{v\cdot n}{1.6} = \frac{340\times n}{1.6}\text{赫} = 212.5n\text{赫}。$$

其中最低频率为 212.5 赫，其他如 212.5×2 赫，212.5×3 赫等等，都是这根管的共振频率。

2062．长 l 为 1 米的管子，管内充满标准大气压的空气。如果第一次管子的一端打开，第二次管子的两端都打开，第三次管子的两端都封闭，如果声波速度 v 为 340 米/秒，试问上述三种情况下，管内形成驻波的最低频率应各等于多少？

［解答］ 两列同频率、同振幅而反向传播的波叠加后产生的驻波，其相邻的两个波节（或波腹）之间的距离应等于原波波长的一半。当驻波在管内空气中形成时，如果管两端封闭，则在两端点是波节；如果两端均开口，则在管内两端是波腹；如果一端封闭另一端开口，则在封闭

端是波节，在另一端是波腹。

第一次，管内的驻波一端是波节另一端是波腹，最少应产生半个驻波波形。

$$l=\frac{1}{4}\lambda_1=\frac{1}{4}\times\frac{v}{f_1},$$

所以

$$f_1=\frac{v}{4l}=\frac{340}{4\times1}\text{赫}=85\text{赫。}$$

第二次在管内两端都是波腹，最少应在管的中点产生一个波节，共有一个驻波波形。

$$l=\frac{1}{2}\lambda_2=\frac{1}{2}\times\frac{v}{f_2},$$

$$f_2=\frac{v}{2l}=\frac{340}{2\times1}\text{赫}=170\text{赫。}$$

第三次在管内两端都是波节，在管中最少应有一个波腹，共有一个驻波波形。

$$l=\frac{1}{2}\lambda_3=\frac{1}{2}\times\frac{v}{f_3},$$

$$f_3=\frac{v}{2l}=\frac{340}{2\times1}\text{赫}=170\text{赫。}$$

2063．在圆柱形容器内逐渐灌水，同时将发声的音叉置于容器口。当液面和容器口相距 h_1 为 75 厘米和 h_2 为 25 厘米时，由音叉发出的声音连续两次得到明显加强。如果声速 v 为 340 米/秒，求音叉振动的频率。

[分析]　这是一共鸣现象。当音叉振动时，引起空气振动，声音就沿圆柱形容器内空气柱传播，在水面处发生反射，则反射声波和入射声波叠加合成驻波。通过灌水使液面升高调节了管内空气柱长度，当空气柱长度正好是四分之一波长的奇数倍时，发生共鸣。通过测定相邻两次共鸣声液柱的高度变化，就可求得半波长，从而由已知的声速求得声音的频率。

[解答]　当发生共鸣时

$$h=\frac{2n+1}{4}\lambda,\ (n=0,1,2,3\cdots)$$

所以相邻两次共鸣的高度差为

$$\triangle h=\frac{2n+1}{4}\lambda-\frac{2(n-1)+1}{4}\lambda$$

$$=\frac{1}{2}\lambda,$$

$$\lambda=\frac{v}{f},\ f=\frac{v}{\lambda},$$

$$f=\frac{v}{2\triangle h}=\frac{v}{2(h_1-h_2)}$$

$$=\frac{340}{2\times(0.75-0.25)}\text{赫}=340\text{赫。}$$

2064．一根长 l_1 为 25 厘米、直径 d_1 为 0.50 毫米的弦，另一根长 l_2

为 100 厘米、直径 d_2 为 0.25 毫米的弦，当把它们两端分别张紧，并且在张力相等的情况下发声，问它们发声基频率谁高，它们的比值为多少？

［解答］ 根据弦的振动定律

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{l_2}{l_1}，\quad \frac{f_1}{f_2}=\frac{d_2}{d_1}，$$

在其他条件不变的情况下，基频跟弦的长度和直径的关系为

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{d_2 l_2}{d_1 l_1}。$$

根据题意可以知道，长度较短的一根弦的基频较高。它们的比值为

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{d_2\cdot l_2}{d_1\cdot l_1}=\frac{0.25\times 100}{0.50\times 25}=\frac{2}{1}。$$

2065．一根两端固定受 50 牛拉力的弦，发出 261.6 赫的基频声音，为了使弦能发出频率加倍的基频声音，必须在弦上加多大的拉力？

［解答］ 第一次声音的基频 f_1 为 261.6 赫，第二次发出声音的基频 f_2 应为 523.2 赫。在其他条件不变的情况下，由弦的张力定律得

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\sqrt{F_1}}{\sqrt{F_2}}，\quad \text{（参见2087题）}$$

$$F_2=\frac{F_1\cdot f_2^2}{f_1^2}=\frac{50\times(523.2)^2}{(261.6)^2}\text{牛}=200\text{牛}。$$

2066．有两根长度都为 155 厘米的完全相同的弦线，两端固定，它们的振动的基频都是 300 赫。把其中一根长度减短 5 厘米，其他条件不变，那么这两根弦振动时发生的拍频是多少？

［解答］ 拍频数等于两发声体基频数的差。基频跟弦长成反比，即

$$\frac{155}{155-5}=\frac{f'}{300}，$$

$$f'=310\text{赫}，$$

$$f'-f=(310-300)\text{赫}=10\text{次}/\text{秒}。$$

2067．如果将二胡上的弦用手指压到 l_1 为 25.4 厘米长时，能拉出一个频率 f_1 为 440 赫的基音,问要使它产生频率 f_2 为 523.3 赫基音的声音，必须把弦缩短多少？

［解答］ 弦线发生振动，它的基音频率跟长度成反比。设它的长度缩短为 l_2 时，能发出 f_2 的基音则

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{l_2}{l_1}，$$

$$l_2=\frac{f_1}{f_2}\times l_1=\frac{440}{523.3}\times 25.4\text{厘米}=21.4\text{厘米}，$$

所以 l_1-l_2=25.4 厘米-21.4 厘米=4.0 厘米,必须把弦缩短 4.0 厘米。

2068．一根 l_1 为 0.500 米长的弦线，在用 F_1 为 2.50×10^2 牛的力绷紧时，它的基频 f_1 为 440 赫。如果把这根弦缩短到 l_2 为 0.400 米而张力增加到 F_2 为 5.00×10^2 牛，那末它的新基频是多少？

［解答］ 根据弦的振动定律（参见 2087 题）

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{l_2}{l_1}，\frac{f_1}{f_2}=\frac{\sqrt{F_1}}{\sqrt{F_2}}。$$

在其他条件不变的情况下，基频跟弦长和张力的关系为

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{l_2}{l_1}\frac{\sqrt{F_1}}{\sqrt{F_2}}。$$

由题中给出条件，可求得它的新基频 f_2

$$f_2=\frac{l_1\times\sqrt{F_2}}{l_2\times\sqrt{F_1}}\times f_1=\frac{0.500\times\sqrt{5.00\times10^2}}{0.400\times\sqrt{2.50\times10^2}}\times440\text{赫}$$

$$=778\text{赫}。$$

2069．对 200 赫的声频，它的听觉阈声强约为 10^{-12} 瓦/米^2。在某处测量到这一声频的声音的声强为 3×10^{-8} 瓦/米^2,问该处声音的强度级为多少？

［解答］ $\beta=10\log\frac{I}{I_0}$，$\beta$ 是强度为 I 的声音用分贝表示的强度级，I_0 是听觉阈的强度，这里用 10^{-12} 瓦/米^2。

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0}=10\log\frac{3\times10^{-8}}{10^{-12}}\text{分贝}$$

$$=10\log3\times10^4\text{分贝}=44.8\text{分贝}。$$

2070．两个声音强度分别是 5×10^{-6} 瓦/米^2 和 3×10^{-3} 瓦/米^2。求人耳能感觉到它们的强度级的比。

［解答］ 人类的耳朵对声音的强弱的感觉接近分贝标度。

因为声强级 $\beta=10\log\frac{I}{I_0}=10\log(\frac{I}{10^{-12}})=[10\log(I)+120]$ 分贝，式中的 I 必须用瓦/米^2 表示。所以这里的两个强度不同的声音有

$$\beta_1=10\log(5\times10^{-6})+120$$

$$=10\times(-5.302)\text{分贝}+120\text{分贝}=67\text{分贝}$$

$$\beta_2=10\log(3\times10^{-3})+120$$

$$=10\times(-2.523)\text{分贝}+120\text{分贝}=95\text{分贝}，$$

强度级的比值为

$$\frac{67}{95}=0.71。$$

2071．一个体积很小的声源，以 1.2 瓦的固定功率向周围各个方向均匀地辐射出声波，求：

(1)距离声源 25 米处的声强是多少？

(2)在这个接收点的声强级是多少？

（假设传播声波的媒质不吸收声能。）

［解答］ (1)声源以球面波的方式向四周传递声能，功率 P 为 1.2 瓦的声音通过半径 R 为 25 米的球面，声强 I 为

$$I=\frac{P}{S}=\frac{P}{4\pi R^2}$$

$$=\frac{1.2}{4\pi\times(25)^2}\text{瓦/米}^2=1.53\times10^{-4}\text{瓦/米}^2\text{。}$$

(2)声强级β为

$$\beta=10\log\frac{I}{I_0},$$

式中 I_0 为参考声强，$I_0=10^{-12}$ 瓦/米 ^{2}，

$$\therefore\beta=10\log\frac{1.53\times10^{-4}}{10^{-12}}\text{分贝}=82\text{分贝。}$$

2072．一面积为 1 平方米的窗户，当窗开着时，室外噪音进入室内。如果在窗口的声强级为 60 分贝，求进入窗口的“声功率”为多少？

[解答]　常用的参考声强 $I_0=10^{-12}$ 瓦/米 ^{2}，由题设条件得

$$10\log\frac{I}{I_0}=60\text{分贝}=6\times10\text{分贝},$$

即

$$10\log\frac{I}{I_0}=10\log10^6,$$

$$\frac{I}{I_0}=10^6,$$

$$I=I_0\times10^6\text{瓦/米}^2=10^{-12}\times10^6\text{瓦/米}^2$$

$$=10^{-6}\text{瓦/米}^2,$$

通过1平方米窗口的功率

$$P=I\cdot S=10^{-6}\times1\text{瓦}=10^{-6}\text{瓦。}$$

2073．由若干个独立的声源产生的声强是单个声源产生的声强之和；那么，当五个声强相同的婴儿同时啼哭时，比单一个婴儿啼哭时的声强级大多少分贝？如果啼哭的声强级又增大了上述分贝数，这说明了又多了几个婴儿在啼哭？

[解答]　设每个婴儿啼哭时的声强均为 I,五个婴儿同时啼哭时的声强为 5I，声强级为

$$\beta_1=10\log\frac{5I}{I_0}\text{分贝},$$

单独一个婴儿啼哭时的声强级为

$$\beta_0=10\log\frac{I}{I_0}\text{分贝},$$

$$\beta_1-\beta_0=(10\log\frac{5I}{I_0}-10\log\frac{I}{I_0})\text{分贝}$$

$$=10\log5=7\text{分贝。}$$

当声强级再增加 7 分贝时，声强级增为 14 分贝，则有

$$\beta_2-\beta_0=(10\log\frac{nI}{I_0}-10\log\frac{I}{I_0})\text{分贝}$$

$$=14\text{分贝。}$$

$$14=2\times10\log5$$

$$=10\log n,$$

$$n=25\text{个。}$$

$$n-5=20\text{个。}$$

说明又多了 20 个婴儿在啼哭。

2074．有扬声器以球面波的形式向外传递声能，如果测得在离声源 10 米处，声音的声强级是 10 分贝，不计空气对声音的吸收，求：

(1)离声源 1 米处的声强级；

(2)离声源多远处，声音刚好听不到？

[解答]　声波以球面波形式传播，恒定功率的声源，在不同地方的声强跟该处离声源的距离平方成反比，即

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}\text{。}$$

(1)已知 $r_2=10$ 米，$r_1=1$ 米。则

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{r_2^2}{r_1^2}=\frac{10^2}{1^2}=100\text{。}$$

因为$\beta=10\log\frac{I}{I_0}$，

所以$\beta_1=10\log\frac{I_1}{I_0}$，$\beta_2=10\log\frac{I_2}{I_0}$；

$$\beta_1-\beta_2=10\log\frac{I_1}{I_0}-10\log\frac{I_2}{I_0}$$

$$=10[\log I_1-\log I_0-\log I_2+\log I_0]$$

$$=10[\log I_1-\log I_2]=10\log\frac{I_1}{I_2}$$

$$=10\log10^2\text{分贝}=20\text{分贝；}$$

$$\beta_1=\beta_2+20\text{分贝}=(10+20)\text{分贝}=30\text{分贝。}$$

(2)设离声源 x 米处正好听不见，这处的声强级为零级即零分贝。

$$\beta_1-\beta_x=10\log\frac{I_1}{I_0}-10\log\frac{I_x}{I_0}$$

$$=10\log\frac{I_1}{I_x}=10\log(\frac{x}{r_1})^2,$$

$$10-0=\log(\frac{x}{10})^2,$$

$$\log(\frac{x}{10})=\frac{1}{2},\quad\frac{x}{10}=10^{\frac{1}{2}},$$

$$x=10\sqrt{10}\text{米}=31.62\text{米。}$$

2075．如图所示，一架声音干涉仪，用它来研究声波的干涉。S 为一架声频发生器，P 为探测声音的仪器，如用话筒等。图中 SBP 的长度可由管 B 的滑动来改变，SAP 为固定的声音通道。实验中 S 发出某一频率的声音，由 A 和 B 两空气柱传到 P，调节 SBP 管的长度，使在 P 处听到最弱的声音，并测得这时的声强为 100 单位。然后慢慢向右移到 B 管，到第一次听到最强的声音，测得 B 管移动的距离为 1.50 厘米，这时的声音强度为 1000 单位，如果声音在空气中的速度为 340 米/秒，求：

(1)声源发出声波的频率；

(2)经 A、B 管到达 P 的两次声强级的差值。

[解答]　声音经过两个空气通道 A 和 B 传到 P 时，由于路程不同而使 P 处接收到两列相位不同的波，叠加后产生了干涉现象。

(1)当 A、B 的波程差为 $\frac{1}{2}\lambda$ 的奇数倍时，P 处声音最弱；当 A、B 的波程差为 λ 的整数倍时，P 处声音最强。现在 A 管长度不变，B 管每边伸长 $\frac{1}{4}\lambda$，B 管内空气柱总长增加 $\frac{1}{2}\lambda$，则

$$\frac{1}{2}\lambda = 2\times 1.50\text{厘米}$$

$$\lambda = 6.00\times 10^{-2}\text{米，}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{6.00\times 10^{-2}}\text{赫} = 5667\text{赫。}$$

$$(2)\text{因为}\beta_2 - \beta_1 = 10\log\frac{I_2}{I_1}$$

$$= 10\log\frac{1000}{100}\text{分贝} = 10\text{分贝，}$$

所以两次声强级的差值为 10 分贝。

2076．有一个声源沿 x 轴方向运动，速度 u 为 10 米/秒，风跟声源运动方向相同，风速 $v_{风}$为 10 米/秒。如果声源以 f_0 为 1000 赫的频率振动，声音在静止的空气中传播的速度 v 为 340 米/秒。求在声源前后顺运动方向和逆运动方向声波的波长。如果声源速度 u′为 20 米/秒，则结果如何？

[解答]　风速就是空气对地移动的速度，大小为 10 米/秒；声源沿风速方向运动，对地的速度也为 10 米/秒；所以声源相对于空气的速度为

$$v' = u - v_{风} = 0\text{，}$$

即声源相对于空气静止。沿运动方向，声源前后声波的波长均相等

$$\lambda = \frac{v}{f_0} = \frac{340}{1000}\text{米} = 0.34\text{米。}$$

当声源速度 u 增大到 20 米/秒时，在声源前面声源相对于空气的速度为

$$v'' = u' - v_{风} = (20-10)\text{米/秒} = 10\text{米/秒。}$$

在声源前面顺运动方向的声波波长为

$$\lambda=\frac{v-v''}{f_0}=\frac{340-10}{1000}\text{米}=0.33\text{米。}$$

在声源后面逆运动方向的声波波长为

$$\lambda'=\frac{v+v''}{f_0}=\frac{340+10}{1000}=0.35\text{米。}$$

2077．如果接收器接收到的声音的频率只是声源的频率的三分之一，则声源必须以声速的几分之几向后运动？

［解答］　设 u 为声源离开接收器的后退速度，v 为声速，接收器接收到的频率 f 与声源频率 f_0 的关系由多普勒效应公式得出

$$f=\frac{v}{v+u}f_0,\quad \frac{f}{f_0}=\frac{1}{1+\frac{u}{v}},$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{1+\frac{u}{v}},$$

$$\frac{u}{v}=2,$$

$$u=2v\text{。}$$

2078．蝙蝠在洞穴中飞来飞去，是利用超声脉冲导航。它发射的超声脉冲持续时间不到 10^{-3} 秒或 10^{-3} 秒，且每秒内发射多次。假定蝙蝠的超声发射频率为 3.9×10^4 赫，在一次飞向表面平直的墙壁时，它的速度 v_0 为声速 v 的 1/40。试问它自己接收到的从墙壁反射回来的脉冲频率是多少？

［解答］　蝙蝠即是声源，又是接收者。相对于媒质的速率都是 $\frac{1}{40}v$。

根据多普勒效应，蝙蝠接收到的频率为

$$f=f_0\left(\frac{v+v_0}{v-v_0}\right)=3.9\times10^4\times\left(\frac{v+\frac{1}{40}v}{v-\frac{1}{40}v}\right)$$

$$=3.9\times10^4\times\frac{41}{39}\text{赫}=4.1\times10^4\text{赫。}$$

2079．火车以 u 为 72 公里/小时的速度向一静止的观察者驶近，机车鸣汽笛 t 为 2 秒钟之久，声速 v 为 340 米/秒。问观察者听到的汽笛声将持续多久？如果火车以同样的速度从观察者身边驶过，则观察者前后听到的声音频率的比为多少？

［解答］　如果声源静止，汽笛响了 2 秒钟，波传播的距离可由下式计算，$s=v\cdot t$。现在声源以 72 公里/小时即 20 米/秒的速度向前移动，在 2 秒内前进的距离为 $s'=u\cdot t$，这时在空气中存在一个波列，长度变短为

$$s-s'=(v-u)t\text{。}$$

虽然汽笛只响了 2 秒，但是这一个波列仍将以波速 v 向前传播。这个波列经过观察者的时间就是听到汽笛声的持续时间

$$t' = \frac{s - s'}{v} = \frac{(v - u) \cdot t}{v}$$

$$= \frac{(340 - 20) \times 2}{340} 秒 = 1.88 秒。$$

声源接近观察者时，由多普勒效应得到频率为

$$f_1 = \frac{v}{v - u} f_0，$$

当声源远离观察者时，应得到

$$f_2 = \frac{v}{v + u} f_0，$$

式中的 f_0 为声源和观察者都静止时听到的声音的频率。

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{v + u}{v - u} = \frac{340 + 20}{340 - 20} = \frac{9}{8}。$$

这说明火车鸣笛经过观察者时，观察者听到汽笛声的声调从高变低，火车运动速度越大，这种感觉越明显。

2080．有一个发声器，以半径 r 作匀速圆周运动，它的转动角速度为ω，发出声波频率为 f_0，声速为 v。问在 A 点的观察者听到声音的最高频率跟最低频率相差多少？

［分析］ 发声器的线速度 u 为ωr，如图所示。声源在圆周上运动到 D、E 点时，对观察者来说声源没有接近和远离的现象，也就不存在多普勒效应，因此听到声音频率跟声源振动的频率相同。运动到 B 点时，声源以速度 u 远离观察者 A，远离的速度达到最大值，这时听到的声音频率最低。运动到 C 点时，声源以速度 u 接近观察者 A，接近的速度达到最大值，观察者听到的声音频率最高。只要求出 B、C 处观察者听到声音的频率，即可知道观察者听到的声音的最高频率跟最低频率的差值。

［解答］ 在 B 点声源远离 A，所以听到的声音频率应为

$$f_1 = \frac{v}{v + u} f_0 \quad (1)$$

在 C 点声源接近 A，所以听到的声音频率应为

$$f_2 = \frac{v}{v - u} f_0 \quad (2)$$

(2)式减(1)式得 A 点观察者听到声音的最高频率跟最低频率的差值。

$$\triangle f = f_2 - f_1 = \frac{v}{v - u} f_0 - \frac{v}{v + u} f_0$$

$$= \left(\frac{v}{v - u} - \frac{v}{v + u}\right) f_0 = \frac{2uv}{v^2 - u^2} f_0$$

$$= \frac{2\omega r v}{v^2 - \omega^2 r^2} f_0$$

2081．有一个振动频率 f_0 为 2040 赫的声源 O，以速度 u 向高大的墙壁 CD 接近，如图所示。有一个观察者 A，听到拍音的频率为 3 赫，如果这时声音的传播速度 v 为 340 米/秒，求声源 O 运动的速度 u 为多大？

［解答］　声源的频率为 f_0，由声源直接传到 A 的声波频率为 f_0，由于声源在作远离观察者的运动，所以根据多普勒效应有

$$f_1=\frac{v}{v+u}f_0;$$

从声源发出的声波经墙反射后的这部分波，相对 A 来说，好象波源以速度 u 接近观察者 A，根据多普勒效应观察者听到声音频率 f_2 为

$$f_2=\frac{v}{v-u}f_0;$$

拍频　$\triangle f=f_2-f_1$，

$$\triangle f=\left(\frac{v}{v-u}-\frac{v}{v+u}\right)f_0=\frac{2uv}{v^2-u^2}f_0,$$

$$3=\frac{2\times u\times 340}{340^2-u^2}\times 2040,$$

解得　$u=0.25$ 米/秒。

说明和论证题

2082．为什么我们能同时听到各种声音，而且能辨别各种声音传来的方向？

［解答］　人耳能同时听到各种声音，这是由于波动具有独立性的缘故，使每一列波在传播时能保持自己原有的特性不变。人的耳朵能把混合在一起的声音再分开来。因此，我们能同时听到各种声音。

由于声音到达双耳的时间不同，所以耳朵能同时辨别不同方向传来的声音。

2083．把一只电铃接上干电池，放入抽成真空的玻璃罩内，可以看到电铃在振动而听不见声音，这是为什么？

［解答］　声音是靠媒质来传播的，电铃处在玻璃罩内的真空中，没有能传播电铃声音的空气或任何其他媒质，所以在玻璃罩外虽然能看到电铃锤在振动，但是却听不到声音。

2084．同一个音叉，一次固定在台虎钳上，另一次固定在共鸣箱上。如果在两种情况下音叉受到的打击力相同，试问音叉在哪一种情况下响得长久些？

［解答］　对于固定在台虎钳上的音叉，由于台虎钳的质量大，又是刚性的，所以对声能的吸收很少；而且音叉发声时，音叉存贮的能量是逐渐辐射出去的，比有共鸣箱时要弱得多，这样音叉在单位时间内消耗的声波辐射能量小；所以固定在台虎钳上的音叉将响得长久些。

2085．二胡演奏家拉出的曲子非常悦耳，初学者拉同样的曲子，在同样的弦上得到的则是刺耳的声音。试回答这是什么缘故？

［解答］　用弓拉二胡的弦时，发出的声波不会是单一频率的声波，除了有一个最低频率的基音外，同时还有许多其他频率的声音，即泛音，弦的振动实际上是几个不同频率的振动的合振动。由于弓弦的拉法不同、施力轻重不同、拉的位置不同，产生振动的成分不同，音品也就不同，人耳听起来的感觉就大不一样。演奏家有熟练的拉弓技巧：拉弓的位置、用弓的方法、施力的轻重，处处恰到好处，使二胡发出的谐音丰富，因此音质美妙，听来悦耳。而刚学者，没有这些技巧，当然拉出来的声音令人刺耳。

2086．把原来每秒钟放映 24 幅的电影胶片改为每秒钟放 18 幅，这

样电影中本来是女的讲话声，听起来好象是男的在讲话，这是为什么？

［解答］　男子发出的声音比较低沉，频率较女的低。电影胶片中记录着的讲话声音，当每秒钟 24 幅放映时，设女的发音频率为 f_1，现在又以每秒钟 18 幅放映，则女的发音频率变为 f_2，$f_2=\frac{18}{24}f_1=\frac{3}{4}f_1$。可见后来的频率 f_2 只有原来 f_1 的 $\frac{3}{4}$ 倍。所以听起来就好像男声了。

2087．钢琴是一种重要的乐器，这是因为钢琴的弦能产生频率宽广的音域和丰富的谐音，弦的频率随着它的长度、直径、张力和组成弦的材料的密度的改变而改变，那么它究竟有什么规律呢？

［解答］　物理学指出，弦振动频率变化有四条规律：

(1)长度定律。小提琴手为了提高弦产生的音调，用手指缩短弦的长度。在其他条件不变的情况下，弦的频率和它的长度成反比。

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{l_2}{l_1},$$

式中 f_1 和 f_2 是弦长分别为 l_1 和 l_2 所对应的频率。

(2)直径定律。在二胡和提琴上可以看到产生低频率的弦线较粗，例如直径为 0.1 厘米的弦的频率比直径为 0.2 厘米同样长弦线的频率高两倍。在其他条件不变的情况下，弦的频率和它的直径成反比

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{d_2}{d_1},$$

式中 f_1 和 f_2 是弦的直径分别为 d_1 和 d_2 所对应的频率。

(3)张力定律。二胡和提琴等弦乐器是通过调节弦的张紧程度来调音的。乐器的弦紧张时振动频率较高，放松时频率降低。在其他条件不变的情况下，弦的频率和作用在弦上的张力的平方根成正比。

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\sqrt{F_1}}{\sqrt{F_2}}。$$

式中的 f_1 和 f_2 是弦的张力分别为 F_1 和 F_2 所对应的频率。

(4)密度定律。组成弦的材料的密度越大，它的振动频率越低。在其他条件不变的情况下，弦的频率和材料的密度的平方根成反比。

$$\frac{f_1}{f_2}=\frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}}$$

式中的 f_1 和 f_2 分别对应于材料密度为 ρ_1 和 ρ_2 的弦的频率。

2088．据说某歌唱家唱一首特别的曲调时，能把酒杯震落，这可能吗？

［解答］　从理论上讲是可能的。酒杯具有一定的固有频率，只要声音的频率跟酒杯的固有频率相同，由于共振使酒杯振动得很厉害，但它不能偏离自身的质心（重心）位置，所以酒杯不能震落下来。歌唱家在歌唱时发出的不会只有一种频率的声音，有可能使放酒杯的桌子也发生共振，因而有可能使杯子震落。

实际上，歌唱家发出的声音没有这样大的能量，也不能持续相当长久，因此不足以使酒杯和桌子贮存相当能量而震落。

2089．在体育馆比赛场的中央点燃一只爆竹后，爆炸声持续了一段时间后才消失，这是什么原因？

［解答］　爆竹在炸裂时发出短促的爆炸声，如果比赛场四周没有墙壁，声波形成一段波列传向远处。现在四周存在墙壁，而且有一定的距离，声波从中央传到四周，被反射回来，要经过好几个来回后，声能不断被吸收，声音才逐渐减弱到听不见。可见，爆炸声在比赛场内要保持一段时间。

2090．在演奏厅里如果只有几个人，听到音乐声很响亮，但当坐满了人时，却没有那么响亮，这是为什么？

［解答］　声音在大厅里传播，遇到墙壁就有一部分声能被吸收，余下的反射回来，所以能听到较响亮的音乐声。当大厅里坐满人时，声音的大部分遇到人体，为人体所吸收，在大厅里的反射波明显地减少，所以没有原来的那样响亮。

2091．墙壁的传音性能比空气好得多，但是把门窗关闭后，外面传入室内的声音却显著地减弱，这是为什么？

［解答］　声波原来在空气里传播，如果没有什么障碍，能直接传入室内。当把门窗关闭后，声波遇到墙壁和门窗，在界面上发生反射和透射现象，因墙壁和门窗传音性能好而反射性能也好，所以大部分声波被反射出，室内的声音就显著地减弱了。

2092．超音速飞机低空气行时可以产生一种声震，如果有很大的声强，就可能造成较大的破坏作用，这是什么道理？

［解答］　当飞机的飞行速度超过声音传播速度时，所有声波的能量被压缩在声源（飞机）前方很小的区域内，造成一个激波。

激波的形状取决于飞机速度大小。一般情况下，激波形如一个锥体，锥顶位于飞机的头部，锥角 θ 决定于飞机的速度 u 对声速 v 的比值，关系为

$$\sin\theta = \frac{v}{u}。$$

比值 $\frac{u}{v}$ 叫做马赫数。当飞机的速度 u 增大，锥角 θ 就减小。

因激波是声能很集中的区域，前进中的激波遇到某一物体，就能对物体造成极大的破坏作用。

2093．声学中的强度、响度和强度级都能表示听到声音的轻和响，那么这三个量各表示什么意义？

［解答］　声音的强度是指单位时间内通过垂直地传播方向上单位面积的声音的能量，即

$$I = \frac{P}{S}。$$

这里的 P 表示声波通过面积 S 的功率，单位为瓦；S 为面积，单位为平方米；声强 I 的单位为瓦每平方米。

响度是声音传入人的耳朵而引起人的主观听觉，声音轻还是响依赖于人的主观感觉。一般说来，强度较高的声音其响度也较响。但人耳对各种频率的声音的感觉并不相同，较高频率的声音比同样强度而较低频率的声音来得轻。同一频率的声音响度随强度的增加不具有线性关系，它更接近于对数关系。所以声音轻响的程度不能用仪器直接测量。同一声音对不同人来说，轻响的主观感觉也可能是不一样的。

强度级是声学中可以用仪器直接测量的物理量，它不依赖于人的听觉。人们一般可以听到的最弱声音的强度叫听觉阈，在 1000 赫时是 10⁻

^{12}瓦/米^{2}。强度级就是用声音强度跟这个听觉阈强度的比值的对数表示，公式为

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0}，$$

式中β为强度级，单位为分贝（dB），I 为强度，I_0为听觉阈。

2094．有人说：“在同一媒质里，波长较长的声波要比波长较短的声波传播快些，这是因为在相同的时间里前者所走的路程比后者大。”这种说法有没有错误？如果有错，则错在哪里？

［解答］　这种说法是错误的。声波波长λ的长短与媒质里的传播速度确有这样的关系式

$$\lambda = vT = v / f。$$

由于把公式理解为速度 v 与波长λ成正比，所以认为波长较长的声波传播的速度较大。应当指出，声波在媒质里传播时，对给定媒质来说，其传播速度 v=λf=恒量，它不依赖于声波的波长。当波长λ大了，频率 f 则小，它们的乘积不变；反之波长λ短了，则频率 f 就大，它们的乘积仍没变，这个乘积就是波在媒质里传播速度，因此对不同的λ以相同的 t 求得 s=vt 是不变的，即不同的波长的声波在相同的时间里所走过的路程是相同的。

流体力学

静力学

填充题

2095．液体内部由于本身所产生的压强大小跟深度成正比，又跟液体密度成正比，而跟液体的重力、体积等都没有关系。在同一深度，液体向各个方向的压强相等。

2096．1 个标准大气压=1.013×10^{5}帕=760 毫米汞柱。

190 毫米汞柱=0.25 标准大气压=2.533×10^{4}帕。

2097．一个棱长为 a 的立方体容器里，灌满了密度为ρ的液体。如果忽略壳厚，液体对底面的压力 F 等于ρga^{3}，对一个侧面的压力等于$\rho ga^{3}/2$。

2098．如图所示，在容器中盛有同一种液体，内有 A、B、C、D、E 五点。A 点的压强和 D 点的压强相等，计算它们的压强时，液体的深度应为 CD。B 点和 E 点的压强相等，计算它们的压强时，液体的深度应为 CE。液体在 B 处作用于器壁的压力方向是向上的，液体在 E 处作用于器壁的压力方向是水平向右的。

2099．四个不同容器盛有同种液体，放在水平桌面上，液面高度都相等，用 G 表示容器内液体的重力，已知$G_a > G_b > G_c = G_d$，底面积$S_a = S_b = S_c > S_d$，试用“＞”、“=”、“＜”符号填入空格。（四个容器重力不计）

四个图中，液体对容器底的压强$p_a = p_b = p_c = p_d$；

四个图中，液体对容器底的压力$F_a = F_b = F_c > F_d$；

四个图中，容器对桌面的压力$F_a > F_b > F_c = F_d$；

四个图中，容器对桌面的压强$p_a > p_b > p_c < p_d$。

2100．一个正六面体的箱子，边长 10 厘米，箱顶上插有一根横截面积是 1

厘米 ^{2} 的管子，管口比箱顶高 100 厘米。当六面体灌满水而管子空着的时候，六面体的顶面、一个侧面和底面分别受到水的压力是 0 牛、4.9 牛和 9.8 牛。要从管口倒入 100 克水就可以把水面加至管口，这时顶面、一个侧面和底面受到水的压力分别是 98 牛、102.9 牛和 107.8 牛。

2101．几个底部相连通的容器叫做连通器。连通器中只有一种液体时，在液体不流动的情况下液面总相平（即在同一水平面上）。

2102．下列的图中，玻璃管内装的液柱都是水银柱，h 和 ι 的单位都是厘米，如果大气压强为 h_0 厘米汞柱，求密封在管内的气体的压强（以厘米汞柱为单位）。

2103．加在密闭液体或气体上的压强，可以通过液体或气体按原来大小向各个方向传递。这个定律叫做帕斯卡定律。

2104．使用帕斯卡定律的条件是密闭容器内充满液体或气体。

液压机是帕斯卡定律具体应用之一，它的规律是作用在大、小活塞上的压力的比等于它们的面积的比。

2105．水压机大小活塞半径的比为 3∶1，大小活塞面积的比为 9∶1，大小活塞压强的比为 1∶1，大小活塞压力的比为 9∶1。

2106．一个水压机模型的小活塞面积是 S_1，大活塞面积是 S_2。小活塞上放一个砝码；大活塞上放一个物体，大小活塞的质量及其和器壁的摩擦都忽略不计。大小活塞的位置是等高的。如已知放在小活塞上砝码的质量为m，则在小活塞下面 h_1 深处的A点的压强等于 $p_{大气压}+\frac{mg}{S_1}+h_1\rho_{水}g$ 在大活塞下面 h_2 深处的B点的压强等于 $p_{大气压}+\frac{mg}{S_1}+h_2\rho_{水}g$ 。

2107．离地面越高，大气压越小，在海拔 2000 米高度以内，每升高 12 米，大气压降低 1 毫米高水银柱。

通过托里拆利实验可以测出大气压的数值。常用的气压计有水银气压计和无液气压计。

2108．在水下 10 米处，水的重力产生的压强有 9.8×10^4 帕斯卡。如果水面上恰好是标准大气压，该处的实际压强是 1.993×10^5 帕斯卡。

2109．物体浸在液体里，受到液体对它向上和向下的压力的差，就是液体对物体的浮力，浮力的方向总是竖直向上的。浮力大小的计算，通常采用阿基米德定律来进行。

2110．浸在液体里的物体的浮沉，决定于它受到的浮力和重力。如果受到的浮力大于它的重力，物体就上浮；如果浮力小于它的重力，物体就下沉；如果浮力等于它的重力，物体就可以停留在液体里任何深度的地方。

2111．A、B、C 是三个体积相同、材料不同的实心球，在液体中保持静止，如图所示，则 C 球受到的浮力最大，A 球受到的浮力最小。B 球的密度等于液体密度的二分之一。（B 球的球心位于液面上）

2112．体积为 1 立方米，密度为 0.5×10^3 千克/米 ^{3} 的木块，浮在水上受到的浮力是 4900 牛，浮在煤油上受到的浮力是 4900 牛。如果用力

把木块全部按入水中受到的浮力是 9800 牛，用力把木块全部按入煤油中受到的浮力是 7840 牛。（水的密度为 1×10^3 千克/米 ^{3}，煤油的密度为 0.8×10^3 千克/米 ^{3}。）

2113．在水平桌面上有一薄玻璃杯（不计杯重），如所示，开口部分和下底的面积分别是 80 厘米 ^{2} 和 60 厘米 ^{2}。将 1050 克纯水倒入杯中，水面和杯口齐。这时水对杯底的压力等于 8.82 牛，杯对桌面的压力等于 10.29 牛。如果将一块质量 100 克的木块放入杯内，多余的水溢出，木块浮在水面上静止，这时水对杯底的压力等于 8.82 牛，杯对桌面的压力等于 10.29 牛。如果将一重 0.98 牛、密度为 5103 千克/米 3 的金属球放入水中，多余的水溢出，水面仍与杯口齐，这是底的压力等于 8.82 牛，金属球对杯底的压力为 0.784 牛，杯对桌面的压力等于 11.07 牛。

[提示]水的平均截面积 $\overline{S}=\frac{S_1+S_2}{2}=70$ 厘米 ^{2}，体积 $V=\overline{S}\cdot h$，

重力 $G=\rho gV$，高度 $h=\frac{V}{\overline{S}}=\frac{G}{\rho g\overline{S}}=\frac{1050\times10^{-3}\times9.8}{1\times10^{-3}\times9.8\times70\times10^{-4}}$ 米 $=$

15×10^{-2} 米。

水对杯底的压力 $F=p\cdot S_1=\rho ghS_1=15\times10^{-2}\times1\times10^3\times9.8\times60\times10^{-4}$ 牛 $=8.82$ 牛，而杯对于桌面的压力则等于水的重力 10.29 牛。

木块浮在水面上，多余的水被排出杯外，水面高度不变，所以杯底压强和压力都不变。浮力等于木块的重力，又等于被木块排开的水的重力，杯内的水和木块的总重量等于原有水的重力 10.29 牛。

重 0.98 牛的合金块体积 $V=\frac{G}{\rho g}=\frac{100\times10^{-3}\times9.8}{5\times10^3\times9.8}$ 米 $^3=20\times10^{-6}$ 米 $^3=$

20 厘米 ^{3} 排开了 20 克水，杯重增为 $(1.05+0.1-0.02)\times9.8$ 牛 $=11.074$ 牛。

2114．一艘轮船浸在水中的部分平均长 150 米，宽 30 米，载货 6.00×10^3 吨后，在淡水中比空载时下沉 1.33 米，在海水中比空载时下沉 1.29 米。（海水密度为 $\rho=1.03\times10^3$ 千克/米 ^{3}，设船下沉时排水的横截面积不变。）

2115．图中 A 是一块质量为 M 的木块，A 上放一块质量为 m 的小铁块 B，浮在水面上，如果将铁块取下，直接放在水内，最后杯中水面的高度将下降。

2116．一个无盖的水桶，盛水后放在光滑斜面上，斜面和水平面成倾角 α。当水桶在斜面上静止时，桶内水面和水平面的夹角为 0°；当水桶在斜面上匀速下滑时，桶内水面和水平面的夹角为 0°；当水桶在斜面上无摩擦地下滑时，桶内水面和水平面的夹角为 α。

2117．在水平公路上行驶的汽车里有一水桶，如果发现桶中的水面倾斜，和水平方向成 30°，如图所示。则汽车向前的加速度是 5.66 米秒 ^{2}。

如果发现桶内面左低右高，汽车一定是在向左转弯。

选择题

2118．放在地面上的三个容器具有相同的底面积，并且自重相等，形状如图所示。当它们装了同样高度的同种液体后，数值相等的量是：

(a)容器内底面受到的压力；

(b)容器内底面受到的压强；

(c)地面受到的压力；

(d)地面受到的压强。

答(a)、(b)

2119．如图所示的连通器内，$S_I=S_J=S_K=S_L$，A、B、C、D 在同一水平面内，E、F、G、H 在同一水平面内，I、J、K、L 在同一水平面内，则

(a)$p_A=p_B=p_C=p_D$；

(b)$p_E=p_F=p_G=p_H$；

(c)$p_I=p_J=p_K=p_L$；

(d)$F_I=F_J=F_K=F_L$。

答(b)、(c)、(d)

2120．第一个测定大气压强的科学家是

(a)托里拆利；　(b)阿基米德；

(c)帕斯卡；　(d)牛顿。

答(a)

2121．某人做托里拆利实验，测定当天的大气压强。他把 1 米长的一端封闭的玻璃管装满水银，倒插入水银槽中 10 厘米，管内外水银面的高度差为 75 厘米。如果此人再向槽内倒入 1 厘米高的水银，则此时管内外水银面的高度差是

(a)75 厘米；　(b)74 厘米；

(c)76 厘米；　(d)无法判断。

答(a)

2122．图中容器 A 通过 C 管和大气相通，容器 B 通过 D 管和大气相通，弯管 E 使 A、B 两容器的上部相通。当 A、B 容器装有同种液体，A、B、C 内液面的高度如图所示时，D 管内液面和 B 容器内液面的高度差 h 为

(a)0 米；　(b)1.5 米；

(c)2.5 米；　(d)4 米。

答(b)

2123．物理课外小组开展了一场关于水压机在空间实验室的作用的讨论，请你判断，其中正确的议论是

(a)由于空间实验室内失重，液体内部不再有液体重力产生的压强，所以帕斯卡定律失效，水压机也不能工作了；

(b)虽然没有液体重力产生的压强，还是存在小活塞施加的压强，帕斯卡定律依然有效，水压机仍可以用来挤压被加工的材料；

(c)空间情况十分复杂，在地面上无法确定；

(d)以上说法都是有道理的。

答(b)

2124．飘浮在液面上的物体所排开液体的：

(a)质量等于物体的质量；

(b)密度等于物体的密度；

(c)重力等于物体的重力；

(d)体积等于物体的体积。

答(a)、(c)

2125．在试管里放一些重物，试管就能竖直地浮在水里，也能竖直地浮在其他液体里，只是浸没在各种液体里的深度不同，这是因为

(a)在不同液体里，试管排开的液体的重力相同，但体积不同；

(b)在不同液体里，试管排开的液体的重力不同；

(c)在不同液体里，试管受到的浮力不同；

(d)在不同液体里，试管受到的浮力相同，但排开的液体的体积不同。

答(a)、(d)

2126．图中水盆里的甲、乙、丙三物体体积相同，甲漂浮于液面，乙悬浮在液体中，丙沉在容器底部，且下表面和容器底贴紧无缝隙，那么三个物体受到浮力的大小关系为

(a)$F_{乙}>F_{甲}>F_{丙}$；

(b)$F_{甲}<F_{乙}=F_{丙}$；

(c)$F_{甲}=F_{乙}>F_{丙}$；

(d)$F_{甲}=F_{乙}=F_{丙}$。

答(a)

2127．将同一支比重计分别放在不同的液体中，比重计静止后

(a)在密度较大的液体中，比重计浸入液面下的体积较大；

(b)比重计浸入液面下的体积和液体的密度成反比；

(c)在密度小的液体中，比重计所受的浮力也小；

(d)在不同的液体中，比重计所受的浮力大小一样。

答(b)、(d)

2128．一个盛有沙粒的试管先后放到三种液体中时，情况如图所示。则

(a)图(1)中的液体密度最大；

(b)图(2)中的液体密度最大；

(c)图(3)中的液体密度最大；

(d)无法判断三种液体密度的大小。

答(a)

2129．在盛满水的杯中放进一木块，木块浮在水面，并溢出一些水，如果木块重 0.98 牛，则杯底的

(a)压强增大；　　(b)压强不变；

(c)压强减小；　　(d)压力增加 0.98 牛。

答(b)

2130．把一块木块放入密度为ρ的液体中，它露出液面的体积为 1/5，把它放入另一种密度未知的液体中，它露出 1/9 体积，则后一种液体的密度为

(a)$\frac{1}{5}\rho$；　　(b)$\frac{9}{10}\rho$；

(c)$\frac{1}{10}\rho$；　　(d)$\frac{4}{5}\rho$。

答(b)

2131．在压力磅秤的秤盘上，放一只盛水的烧杯，磅秤的读数是 10.8 牛。将一块重 4.3 牛，体积 60 厘米^{3}的金属块用细线挂在弹簧秤下，并使金属块完全浸没在烧杯里的水中，但又不跟烧杯接触如图所示。g 取 10 米/秒^2，这时

弹簧秤的读数将是

(a)3.7 牛；　　(b)4.3 牛；

(c)4.9 牛；　　(d)11.4 牛。

答(a)

压力磅秤的读数将是

(a)10.2 牛；　　(b)10.8 牛；

(c)11.4 牛；　　(d)15.1 牛。

答(c)

2132．由实验测定物体 X 和 Y 以及液体 Z 的密度时，一位粗心的同学把测量值和读数记录在一张碎纸片上。晚上在家里计算 X、Y 和 Z 的密度时，起先以为“漏记”了一些数据，后来认真思考了一下，把物体 X 和 Y 以及液体 Z 的密度算出来了。请你根据图示(他所记录的全部数据)，在下列各组答案中选择合适的答案：

物体 X 和 Y 的体积是

(a)30 厘米^3，40 厘米^3；

(b)40 厘米^3，50 厘米^3；

(c)50 厘米^3，40 厘米^3；

(d)70 厘米^3，30 厘米^3。

答(b)

液体 Z 的密度是（单位为千克/米^3）

(a)0.5×10^3；　　(b)0.66×10^3；

(c)1.00×10^3；　　(d)1.20×10^3。

答(d)

物体 Y 的密度是（单位为千克/米^3）

(a)0.10×10^3；　　(b)0.17×10^3；

(c)0.24×10^3；　　(d)0.30×10^3。

答(c)

物体 X 的密度是（单位为千克/米^3）

(a)4.60×10^3；　　(b)5.60×10^3；

(c)7.10×10^3；　　(d)8.00×10^3。

答(d)

如果在实验中用水代替液体 Z,量筒的读数和弹簧秤的读数将发生的变化是

(a)不变，增大；　　(b)不变，不变；

(c)减小，增大；　　(d)增大，不变。

答(a)

2133．在天平两盘中各放一只盛有水的烧杯，天平恰能平衡。将质量相等的铅块和铝块各用一根轻而细的线拴牢，分别放入两个烧杯中，并使它们全部没入水中，而水并未溢出。在下述四种情况中，会使天平

的平衡受到破坏的情况是

(a)放手使铅块和铝块都沉在水底；

(b)用手提住两根线，使它们都不和杯底接触；

(c)把两根线都挂在天平的挂钩上，使铅块和铝块都不和杯底接触；

(d)使铅块沉在杯底，并把系铝块的线挂在天平挂钩上。

答(b)

在上题中，换用体积相等的铅块和铝块放入烧杯中，会使天平的平衡受到破坏的情况将是（可供选择的四种情况同上题）。

答(a)、(c)、(d)

2134．在灵敏天平的两边盘内各放半杯水，左边挂一块铁块 A，右边挂一块铅块 B，调节水量使天平平衡。如果 m_A=200 克，m_B=100 克，现将 A 的挂线增长，使 A 全部浸入水中，但不和杯底接触，B 物仍挂在上面不动，则

(a)需在左边放 20 克砝码才能恢复平衡；

(b)需在右边放 20 克砝码才能平衡；

(c)保持平衡不变；

(d)需在左边放(200/7.8)克的砝码才能平衡。

答(c)

2135．由支点支持的均匀的米尺上，用线吊着 x 和 y 两个物体。物体 y 的质量是 55 克，密度是 11×10^3 千克/米 ^{3}，它全部浸在水里，如图所示。物体 x 挂在 60 厘米刻度处，使米尺恰成水平。x 的质量是

(a)20.83 克； (b)55 克；

(c)125 克； (d)137.5 克。

答(c)

2136．在图中的水坝坡面倾角为θ，一个密度为ρ(ρ＞$\rho_水$)的物体在水中沿坡面匀速下滑（忽略水的阻力）。这时，坡面和物体间的摩擦系数为

(a)$\mathrm{ctg}\,\theta$； (b)$\mathrm{tg}\,\theta+\dfrac{\sec\theta}{\rho}$；

(c)$\mathrm{tg}\,\theta$； (d)$\mathrm{ctg}\,\theta+\dfrac{\sec\theta}{\rho}$。

答(c)

2137．一艘轮船由内河行驶进入大海行驶，则

(a)轮船排开的液体的体积变小，轮船受到的浮力变小；

(b)轮船排开的液体的体积变小、重力不变，轮船受到的浮力不变；

(c)轮船排开的液体的体积变小、重力变大，轮船受到的浮力变大；

(d)轮船排开的液体的体积不变、重力不变，轮船受到的浮力不变。

答(b)

2138．一块正方体木块浮在水面上 A 处，如右图所示，力 F 使木块匀速地浸入水中 B 处。则表示力 F 的大小和木块没入的深度的关系图线（设木块在 A 处时，x=0）是

(a)图(1)； (b)图(2)；

(c)图(3)； (d)图(4)。

答(a)

2139．浸在液体内的重物在开始下沉的最初阶段，下列结论中正确的是

(a)物体重力势能减小，动能增大，液体重力势能不变；

(b)物体重力势能减小，动能不变，液体重力势能增大；

(c)物体重力势能减小，动能不变，液体重力势能不变；

(d)物体重力势能减小，动能增大，液体重力势能增大。

答(d)

[提示]物体下沉，相当于跟物体同体积的下层的液体和原在上层的物体发生了位置的交换，所以液体的重力势能将增大。

2140．如图所示，体积相同的两物体 A 和 B 都是用密度为 2×10^3 千克/米 ^{3} 的材料制成的。物体 A 放在倾角为 30°的光滑斜面上，物体 B 的一半体积浸在水中，A、B 间有细绳通过定滑轮相连，细绳已经张紧。当让两物体自由运动后，B 物体受到的浮力，A 物体的速度和杯内的液体的势能发生的变化将是（答案简称浮力、速度和势能）

(a)浮力将变小，速度将变小，势能将变小；

(b)浮力将变小，速度将变大，势能将变大；

(c)浮力将变大，速度将变小，势能将变小；

(d)浮力将变大，速度将变大，势能将变大。

答(d)

2141．有一实心重球自液面下沉，其能量随位移的变化关系对应的图象是(a)、(b)、(c)、(d)中的哪一条：

重球的重力势能；　　答(b)

重球的动能；　　答(a)

液体的势能；　　答(c)

系统的机械能。　　答(d)

[提示]以重球球心和液面相平时的液面为坐标原点和零势能点，不计阻力。

2142．一个密闭的钢质的高压容器的内部盛满了轻质润滑油，容器内的顶部挂有一个铅球。当悬线断裂后，铅球将

(a)以加速度 g 向下作加速运动；

(b)以小于 g 的加速度向下作加速运动；

(c)静止不动；

(d)向上作加速运动。

答(b)

如果把这个容器移至绕地球作圆周运动的人造卫星内，当悬线断裂后，铅球将

[可供选择的答案与上同。]　　答(c)

2143．有一位同学在电梯内做托里拆利实验，测得管内外水银柱的高度差为 68 厘米，而当时实际大气压为 76 厘米汞柱，这可能是由于

(a)实验操作时，有空气进入托里拆利管上部；

(b)托里拆利管顶部有小孔；

(c)电梯在向上作加速运动；

(d)电梯在向下作加速运动。

答(a)、(c)

2144．在升降机的地板上放有一个水桶，水面上飘浮着一块木头。

(1)当升降机向上作加速运动时，木块受到的浮力将

(a)增大；　　(b)不变；

(c)减小；　　(d)等于零。

答(a)

(2)这时木块排开的水的体积将

(a)增大；　　(c)不变；

(c)减小；　　(d)等于零。

答(b)

(3)当升降机向下作加速运动时，木块受到的浮力将

(a)增大；　　(b)不变；

(c)减小；　　(d)等于零

答(c)

(4)这时木块排开的水的体积将

(a)增大；　　(b)不变；

(c)减小；　　(d)等于零。

答(b)

(5)当升降机以加速度 g 向下作加速运动时，木块受到的浮力将

(a)增大；　　(b)不变；

(c)减小；　　(d)无法确定。

答(c)、(d)

2145．盛水的玻璃杯的底部放着一个钢球。

(1)当玻璃杯向上作加速运动时，钢球受到的浮力将

(a)增大；　　(b)不变；

(c)减小；　　(d)无法确定。

答(a)

(2)此时，杯底受到的压力将

(a)增大；　　(b)不变；

(c)减小；　　(d)无法确定。

答(a)

(3)当玻璃杯向下作加速运动时（加速度值小于 g），钢球受到的浮力将

(a)增大；　　(b)不变；

(c)减小；　　(d)无法确定。

答(c)

(4)此时，杯底受到的压力将

(a)增大；　　(b)不变；

(c)减小；　　(d)无法确定。

答(c)

2146．如图所示，一支盛水的 U 形管绕其 A 管的中心竖直轴旋转，则可能出现的情况是

(a)B 管水面将上升，A 管水面将下降，这是离心现象；

(b)转动时需要向心力，水受到向心力作用将使 A 管水面升高，B 管

水面将降低；

(c)根据连通器原理，两管液面仍保持同一水平；

(d)以上情况都不对。

答(a)

计算题

2147．在大气压强为 70 厘米汞柱的地方，离心式水泵抽水的最大高度是多少？

[解答]$p_0=\rho gh=13.6\times10^3\times9.8\times70\times10^{-2}$ 帕

$=932.96\times10^2$ 帕。

$p_0=\rho_{水}gh_{水}$

$$h_{水}=\frac{p_0}{\rho_{水}g}=\frac{932.96\times10^2}{1\times10^3\times9.8}\text{米}$$

$$=9.52\text{米。}$$

2148．试估计高 1.75 米的人的脑与脚之间的血压差。设血的密度为 1.06×10^3 千克/米^3，血压差用流体静力学公式计算。

[解答]$\Delta p=\rho g\Delta h=1.06\times10^3\times9.8\times1.75$ 帕

$=1.82\times10^4$ 帕。

2149．拦河坝长 1 千米、高 10 米。水面距坝顶 4 米时，坝受的压力是多少？

[分析]因坝的另一面也受大气压力，所以只需计算水对坝产生的压力。计算总压力时，采用坝所受到的平均压强，乘以面积，平均压强等于一半深度处的压强。

[解答]$\overline{p}=\frac{h}{2}\rho g=\frac{(10-4)}{2}\times10^3\times9.8$帕$=29.4\times10^3$帕，

$S=1000\times(10-4)$米^2=6000 米^2，

$F=\overline{p}S$

$=29.4\times10^3\times6000$ 牛

$=1.764\times10^8$ 牛。

2150．一座水库的水闸为等腰梯形，上底为 8 米，下底为 4 米，高为 10 米。求当水面和上底相平时，水闸所受水的压力。

[分析]求取水闸侧面的几何中心，是解决本题的关键问题。由于梯形侧面上下不是对称的图形，所以在求平均压强时，几何中心点不在 5 米高处。为此，我们可以用分割法，把它分成两个三角形和一个矩形，如图所示。G1 为矩形 CDEF 的中心，OG_1=5 米；G_2为两个三角形的共同

中心，$O'G_2=\frac{1}{3}OO'=\frac{1}{3}\times10$米$=\frac{10}{3}$米。矩形面积为$4\times10$米$^2=40$米^2，两个三角形面积为$2\times\frac{1}{2}\times2\times10$米$^2=20$米^2。根据物体平衡条件，设G为整个梯形的几何中心，有$G_1G\times40=G_2G\times20$，$GG_2=2G_1G$，所以$GG_2=\frac{2}{3}G_1G_2$，$O'G=O'G_2+GG_2=\frac{10}{3}$米$+\frac{2}{3}\left(5\text{米}-\frac{10}{3}\text{米}\right)=\frac{40}{9}$米。

[解答] $F=\bar{p}\cdot S$，

$$\bar{p}=\bar{h}\rho g=O'G\times\rho g$$

$$=\frac{40}{9}\times10^3\times9.8\text{帕}=43.56\times10^3\text{帕},$$

$S=20$ 米^2+40 米^2=60 米^2，

$F=43.56\times10^3\times60$ 牛

$=2.614\times10^6$ 牛。

2151．在半径是 R 的竖直放置的圆柱形容器内，需装有多高 H 的液体，才能使液体对容器侧面的压力 F 等于液体对容器底的压力？

[解答]先根据题意作出圆柱形容器截面示意图。

$$F_{侧}=\bar{p}_{侧}\cdot S_{侧}$$

$$\frac{H}{2}\cdot\rho\cdot g\cdot H\cdot2\pi R$$

$$=\pi\rho gH^2R,$$

$$F_{底}=p_{底}\cdot S_{底}$$

$$=H\cdot\rho\cdot g\cdot\pi R^2,$$

$$=\pi\rho gHR^2,$$

$$F_{侧}=F_{底},$$

$$\pi\rho gH^2R=\pi\rho gHR^2,$$

$H=R$。

2152．在装满水的一个大容器盖上有一圆孔，圆孔用一个木塞紧密无摩擦地盖住，穿过木塞插一根内半径 r 为 5 厘米的竖直管。木塞半径 R 为 10 厘米，木塞和管的总重力 G 为 19.6 牛。求水在管中的高度为多少时，木塞平衡。

[解答]当管中水柱引起的对木塞下方的压力（方向向上），等于木塞和管的总重力时，木塞平衡。

压力　$F=pS=\rho_{水}\cdot gh\pi(R^2-r^2)$，

重力　$G=mg$，

$$\rho_{水}gh\pi(R^2-r^2)=mg,$$

得　$h=\frac{m}{\rho_{水}\pi(R^2-r^2)}=\frac{2}{10^3\times3.14\times(0.1^2-0.05^2)}$米$=8.5\times10^{-2}$米。

2153．在一内径是 8 厘米的桶内盛水，水深 20 厘米，水面上放一个

质量为 0.8 千克的活塞，活塞和桶壁无摩擦接触。在侧壁上距桶底高 10 厘米处有个半径为 0.2 厘米的小圆孔，用木塞塞着。试求：(1)活塞对它所接触的水的压强；(2)塞住侧壁小孔的木塞所受到的压力；(3)桶底上受到的压力。

[解答]

$$(1)p1=\frac{F}{S}=\frac{G}{S}$$

$$=\frac{0.8\times9.8}{3.14\times\left(\frac{8}{2}\right)^2\times10^{-4}}\text{帕}$$

$$=1560\text{帕。}$$

$$(2)F_{水塞}=p\cdot S_{小孔}=(p1+p_{水}gh1)\cdot S_{小孔}$$

$$=(1560+10^3\times9.8\times10\times10^{-2})\times3.14\times(0.2)^2\times10^{-4}\text{牛}$$

$$=3.19\times10^{-2}\text{牛。}$$

$$(3)F_{底}=p_{底}\cdot S_{底}$$

$$=(p1+\rho_{水}gh_2)\cdot S_{底}$$

$$=(1560+10^3\times9.8\times20\times10^{-2})\times3.14\times\left(\frac{8}{2}\right)^2\times10^{-4}\text{牛}$$

$$=17.68\text{牛。}$$

2154．正方形的箱子每边长 10 厘米，箱顶插内孔截面积为 1 厘米^{2}的管子。箱内装水，管内水面高出箱顶 20 厘米，如图所示。求(1)A、B、C 各点所受水的压强（已知 C 点距箱底 6 厘米）；(2)箱顶、箱的一侧及箱底所受水的压力。

[解答](1)因为 A 点处于液面下 20 厘米处水

$p_A=\rho_{水}gh_A=20\times10^{-2}\times10^3\times9.8$ 帕=1960 帕。

由于 A 和 B 处在同一水平面

所以 $p_B=p_A=1960$ 帕，

C 点处于液面下，h_C=20 厘米+(10－6)厘米=24 厘米，

$p_C=\rho_{水}gh_C$

$=24\times10^{-2}\times10^3\times9.8$ 帕=2352 帕。

(2)箱顶的面积 $S_{顶}=(10\times10-1)$厘米^2=99 厘米^2，

$F_{顶}=p_BS_{顶}$

$=1960\times99\times10^{-4}$牛=19.4 牛。

因侧壁各部分所受压强不同，求侧压力时，应取侧壁中心处的压强作为平均压强，再乘以侧壁的面积。

$$\overline{p}_{侧}=\rho_{水}gh_{中}=\left(20+\frac{10}{2}\right)\times10^{-2}\times10^3\times9.8\text{帕}$$

$$=2450\text{帕，}$$

$$F_{侧}=\overline{p}_{侧}S_{侧}=2450\times(10\times10)\times10^{-4}\text{牛}=24.5\text{牛，}$$

因为箱底距液面的垂直距离为 30 厘米，

$p_{底}=\rho_{水}gh_{底}$

$=10^3\times9.8\times30\times10^{-2}$帕

$=2940$帕，

$F_{底}=p_{底}\cdot S_{底}=2940\times(10\times10)\times10^{-4}$牛

$=29.4$牛。

2155．图中的容器内装水，深为 H。求水的重力和容器底受的水的压力，比较它们的大小。

[解答]水的重力 G=ρgV，V 为水的体积，ρ为水的密度。

$$V=\frac{H}{3}\pi(R_2^1+R_2^2+R_1R_2)，$$

得 $$G=\frac{\rho gH\pi}{3}(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)。$$

容器底受的水的压力 $F=\rho gHS_2$

$$=\rho gH\pi R_2^2。$$

比较 G 和 F，

$$F=\rho gH\pi R_2^2=\frac{\rho gH\pi}{3}\cdot3R_2^2，$$

因 $$R_1>R_2，$$

所以 $$R_1^2+R_2^2+R_1R_2>3R_2^2，$$

G＞F，这时，水的一部分重力由容器侧壁对它的压力的向上分量所“抵消”。

如果容器是下面积大，上面积小，则

$$R_1<R_2，$$

$$R_1^2+R_2^2+R_1R_2<3R_2^2，$$

$$G<F。$$

这时容器侧壁对水的压力的向下分量，也由容器底承担。

2156．两个锥柱状容器里分别灌有重量都为 G、密度都为ρ的液体。容器底面积为 S_1 和 S_2，液面高都等于 h，求在这两种情况下液体作用于器壁的力。

[解答]在图(a)所示的情况下，液体受到的力有：向下重力 G；容器底的向上作用力 $F=\rho ghS_1$；器壁各部分的作用力 f，它的合力的大小等于所求的力 R_1，由于器壁的各个相对部分的作用力均垂直于侧壁，矢量合成的结果，它的方向向上。所以

$$R_1=G-\rho ghS_1。$$

用同样方法讨论图(b)的情况，因为侧壁的反作用力 R_2 方向向下，所以

$$R_2=\rho ghS_2-G。$$

2157．把横截面积等于 4 厘米 ^{2} 的管子，竖直装在立方体箱子的顶面上，并且使管子和了内部相通，管长等于 10 厘米，箱子每边长 10 厘米，把箱子放在水平桌上，并在箱内装水直到管子顶部。求：(1)箱内底部所受到的液体总压力。(2)设箱和管的重力不计，桌面上受到箱子的总压

力。

[解答] (1)箱底部所受到水的总压力

$p=\rho gh$

$=20\times10^{-2}\times10^{3}\times9.8$ 帕=1960 帕，

$F=pS$

$=1960\times10\times10\times10^{-4}$ 牛=19.6 牛。

(2)桌面上受到箱子的总压力

$F_0=\rho V_1g+\rho V_2g=\rho g(V_1+V_2)$，

式中 V_1 和 V_2 分别为管子和了内水的体积，ρ为水的密度，所以

$F_0=(4\times10+10^{3})\times10^{-6}\times10^{3}\times9.8$ 牛

$=10.19$ 牛。

比较(1)和(2)结果，可知桌面所受的压力和箱内底部所受压力大小，是不相同的。

2158．圆柱形容器内倒入质量相等的水和水银，液柱的总高度 H 为 143 厘米。容器底上因液体自重产生的压强 p 等于多大？水银密度 $\rho_{水银}=13.6\times10^{3}$ 千克/米 ^{3}。

[解答]设 h_1、h_2 分别是水柱和水银柱的高度，

$H=h_1+h_2$ (1)

$m_{水}=m_{水银}$，$\rho_{水}h_1S=\rho_{水银}h_2S$ (2)

$p=\rho_{水}gh_1+\rho_{水银}gh_2$ (3)

解(1)式、(2)式得

$$h_1=\frac{H\rho_{水银}}{\rho_{水}+\rho_{水银}} \quad (4)$$

$$h_2=\frac{H\rho_{水银}}{\rho_{水}+\rho_{水银}} \quad (5)$$

将(4)、(5)式代入(3)式得

$$p=\rho_{水}g\frac{H\rho_{水银}}{\rho_{水}+\rho_{水银}}+\rho_{水银}g\frac{H\rho_{水}}{\rho_{水}+\rho_{水银}}$$

$$=\frac{2gH\rho_{水}\rho_{水银}}{\rho_{水}+\rho_{水银}}$$

$$=\frac{2\times9.8\times1.43\times1\times10^{3}\times13.6\times10^{3}}{1\times10^{3}\times13.6\times10^{3}}\text{帕}$$

$$=2.61\times10^{4}\text{帕。}$$

2159．油压千斤顶的小活塞、大活塞直径分别为 10 毫米和 50 毫米。要在大活塞上举起 980 牛的物体，小活塞上需加多大的力？

[解答]$\frac{F_A}{S_A}=\frac{F_B}{S_B}$，　　$F_A=F_B\frac{S_A}{S_B}$，

$$\frac{S_A}{S_B}=\frac{x\left(\frac{d_A}{2}\right)^2}{x\left(\frac{d_B}{2}\right)^2}=\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2，$$

$$F_A=F_B\times\left(\frac{d_A}{d_B}\right)^2=980\text{牛}\times\left(\frac{10\text{毫米}}{50\text{毫米}}\right)^2$$

$$=39.2\text{牛。}$$

2160．一个油压千斤顶，油泵活塞和主活塞的直径的比为 1∶5，手柄上动力臂 L_1 为 100 厘米，阻力臂 L_2 为 4 厘米，如图所示。当在手柄上加 9.8 牛向下的力 F_1 时，主活塞能顶起的重物是多少？

[解答]根据杠杆平衡条件

$$F_1\cdot L_1=F_2\cdot L_2，$$

$$F_2=\frac{F_1\cdot L_1}{L_2}=\frac{9.8\times100}{4}\text{牛}=245\text{牛。}$$

根据帕斯卡定律

$$\frac{F_2}{S_2}=\frac{F_3}{S_3}，$$

$$F_3=F_2\cdot\frac{S_3}{S_2}，$$

$$D_3∶D_2=5∶1，S_3∶S_2=5_2∶1_2，$$

$$F_3=245\times\frac{5_2}{1_2}\text{牛}=6125\text{牛。}$$

2161．有一座油压机大活塞的直径是小活塞直径的 2 倍，如果在小活塞上加压力 147 牛，并使小活塞下移 1 厘米，问大活塞上移动多大的距离？

[解答]设加在小活塞上的力为 $F_{小}$，作用在大活塞上的力为 $F_{大}$，

$$\frac{F_{大}}{S_{大}}=\frac{F_{小}}{S_{小}}，F_{大}=F_{小}\cdot\frac{S_{大}}{S_{小}}\qquad(1)$$

$$\frac{S_{大}}{S_{小}}=\left(\frac{d_{大}}{d_{小}}\right)^2=4，$$

$F_{大}$=147×4 牛=588 牛。

根据功的原理，

$F_{小}\times h_{小}=F_{大}\times h_{大}$，

147 牛×1 厘米=588 牛×$h_{大}$，

$h_{大}$=0.25 厘米。

2162.利用液压机使质量 m 为 2 吨的重物升高时所作的功 W 为 40 焦，同时小活塞经过了 n 为 10 的作功冲程,每一个作功冲程移动距离 h 为 10

厘米。求大活塞的面积是小活塞的几倍？

[解答]设 $S_{大}$和 $S_{小}$分别为大活塞的面积和小活塞的面积。

$$\frac{S_{大}}{S_{小}}=\frac{F_{大}}{F_{小}} \qquad (1)$$

$W=F_{小}\cdot h\cdot n$，

$$F_{小}=\frac{W}{hn} \qquad (2)$$

把(2)式代入(1)式，

$$\frac{S_{大}}{S_{小}}=\frac{F_{大}}{W}\cdot hn$$

$$=\frac{2\times1000\times9.8}{40}\times0.1\times10\text{倍}$$

$$=490\text{倍。}$$

2163．U 形管的底部装有水银，在其中一个管中装入密度为 0.8×10^3 千克/米 ^{3} 的酒精，在另一个管中装入密度为 1.2×10^3 千克/米 ^{3} 的某种溶液。如果溶液的高度为 30 厘米，而且两管上端的酒精液面和溶液面在同一水平面上。求两管中水银面的高度差。

[解答]设两水银面的高度差为 x。在左管中溶液和水银的交界处作一水平面，左管中液柱的压强必然和右管中同一水平面上酒精柱的压强和高度为 x 的一段水银柱的压强和相等

即 $h\rho_a g=h_a\rho_b g+x\rho_H g$，

可得 $x=0.94$ 厘米。

[提示]解有关这类连通器平衡问题，要从各管中同一液体内任一水平面上各液柱产生的压强相等去考虑。首先选好连通器内液体处于平衡状态时的基准面，分析各液柱的高度，再根据液体压强公式列出平衡方程求解。

2164．右图是倾斜式微压计。如果用密度为 0.8×10^3 千克/米 ^{3} 的煤油，量得 ι 为 20 厘米，当时大气压强 $p_{大}$为 77 厘米汞柱，问和 A 管相通的容器内气体的压强是多大？

[解答]在同一水平面上取 E、F 点。

$p_E=p_F$，$p_E=p_{大}$，$p_F=p+\rho gh$

$p_{大}=p+\rho gh$，

$p=p_{大}-\rho gh$

$=p_{大}-\rho g\iota\sin30°$

$$=77\times10^{-2}\times13.6\times10^3\times9.8\text{帕}-20\times10^{-2}\times\frac{1}{2}\times0.8\times10^3\times9.8\text{帕}$$

$=1.018\times10^5$ 帕。

2165．如图所示，把灌满水银的玻璃管倒入水银槽中，使管底和槽内水银面的距离为 h，已知 h 为 30 厘米，大气压强 p_0 为 76 厘米汞柱，求：

(1)水银对玻璃管顶的压强；

(2)如果在管顶开一个小孔，水银能否从小孔喷出？为什么？

[解答](1)取在同一水平面上 A、B 两点，因为 $p_A=p_B$，

所以 $p_0=p_{顶}+\rho gh$，

$$p_{顶}=p_0-\rho gh$$
$$=(76-30)厘米汞柱$$
$$=46 厘米汞柱。$$

(2)当管顶开一小孔，因为 $p_0>p_{顶}$，所以水银不会喷出。这时 $p_A=p_0+\rho gh$，$p_A>p_B$，水银面下降，直到答内水银面跟槽内的水银面相平为止。

2166．如图所示，把一根两端开口的内径相当大的玻璃管竖直插入装有水银的玻璃筒里，这时玻璃管内外的水银面在同一水平面上，然后向玻璃管内注入 25 厘米高的密度为 0.8×10^3 千克/米 ^{3} 的煤油，接着向玻璃筒注入 26.8 厘米高的密度为 1×10^3 千克/米 ^{3} 的水，求这时玻璃管内的水银面比玻璃管外的水银面高出多少？（水银的密度为 13.6×10^3 千克/米 ^{3}）

[分析]本题是连通器内液体平衡的问题。由于有几种密度不同的液体，所以选取研究平衡时的基准面是解答本题关键性的问题。如果只是片面地记住在开口的连通器里同一水平面上各点的压强相等，错误地选取玻璃管内煤油和水银交界处 B 点为基准面则有 $\rho_{油}gh_0'=\rho_{水}gh_0'$。解得 $h_0'=20$ 厘米，$h=h_0-h_0'=6.8$ 厘米，这个结论是错误的。这是因为基准面以下有两种密度不同的液体，这样管内外 B 和 B′的两点压强不可能是相同的。所以，正确的选择应以 A 和 A′点（即玻璃管外水银面）为基准面。

[解答]对 A 点

$$p_A=p_{油}+p_{水银}+p_{大气压}。$$

对 A′点

$$p_{A'}=p_{水}+p_{大气压}。$$

因 $p_A=p_{A'}$，

所以 $p_{油}+p_{水银}=p_{水}$，

$$p_{油}gh'+p_{水银}gh=p_{水}gh_0，$$

$$h=\frac{\rho_{水}gh_0-\rho_{油}gh'}{\rho_{水银}g}=\frac{1\times26.8-0.8\times25}{13.6}厘米$$
$$=0.5厘米。$$

2167．如图所示的双 U 形管，从两边装进不同的液体，A—B 是水，C—D 是油液，B—C 是空气。在大气压 76 厘米汞柱时，以管底为标准测得 A 液面高 19 厘米，B 液面高 4 厘米，C 液面高 2 厘米，D 液面高 22 厘米，求：(1)空气柱压强是多少？(2)油液的密度是多少？

[分析]本题属于在连通器中封有空气的问题，因为空气是封闭的，所以它也遵循帕斯卡定律。由于密封空气柱内各处的压强相等，所以 B、C 处的压强是相等的。

[解答](1)空气柱压强 $p_{气}=p_0+\rho_{水}gh_{AB}$，$p_0$ 是大气压，取厘米汞柱为压强单位，则

$$p_{气}=\left(76+\frac{19-4}{13.6}\right)\text{厘米汞柱}$$

$$=77.1\text{厘米汞柱}$$

(2)由于 B、C 处压强相等，即

$\rho_{水}gh_{AB}=\rho_{油}gh_{CD}$，

$$\rho_{油}=\frac{\rho_{水}\cdot h_{AB}}{h_{CD}}$$

$$=\frac{(19-4)\times1}{(22-2)}\times10^3\text{千克/米}^3=0.75\times10^3\text{千克/米}^3\text{。}$$

2168．高 h 为 1 米的圆柱形容器，沉没在水池内，容器的底水平向上，这个容器内盛满密度为 $\rho_{油}$的油 900 千克/米 ^{3}。已知容器的开端离水面的深度 H 为 3 米，求容器内的底上 A 点处的压强。大气压 $p_0=10^5$ 帕。

[解答]容器开端处油和水界面上 B 点处的压强

$p_B=p_0+\rho_{水}gH$　　　　　　　　(1)

$p_B-p_A=\rho_{油}gh$，

$p_A=p_B-\rho_{油}gh$　　　　　　　　(2)

把(1)式代入(2)式，得

$p_A=p_0+\rho_{水}gH-\rho_{油}gh=p_0+g(\rho_{水}H-\rho_{油}h)$

$=10^5$ 帕$+9.8\times(1\times10^3\times3-0.9\times10^3\times1)$帕

$=10^5$ 帕$+0.206\times10^5$ 帕$=1.206\times10^5$ 帕。

2169．容器内盛水银和水，假使放入体积为 100 厘米 ^{3} 的铁球，求球浸没在水银中的体积。（铁的密度为 7.8×10^3 千克/米 ^{3}，水银的密度为 13.6×10^3 千克/米 ^{3}。）

[分析]铁球受到三个力的作用：重力 G，水银的浮力 $F_{水银}$和水的浮力 $F_{水}$。这三个力的关系是 $G=F_{水银}+F_{水}$。

[解答]设球浸没在水银中的体积为 V_1，则有

$V\rho_{铁}g=V_1\rho_{水银}g+(V-V_1)\rho_{水}g$，

$$V_1=\frac{V(\rho_{铁}-\rho_{水})}{\rho_{水银}-\rho_{水}}$$

$$=\frac{100(7.8-1)}{13.6-1}\text{厘米}^2$$

$$=54\text{厘米}^2\text{。}$$

2170．U 形管内注入水银，然后在一个管内倒入水并放进质量等于 m 的球。如果管的截面积是 S，倒入管内水的体积是 V，已知水银和水的密度分别是 $\rho_{水银}$和 $\rho_{水}$，试问另一个管内的水银面上升的高度 h 为多大？

[分析]由于 U 形管的左管加进了水和球，所以左管水银面下降 h，右管水银面上升 h，两水银面高度差为 2h。取 A、A 为基准面，则有 $p_A=p_A{}'$。

[解答]

$$p_A=\frac{G_{球}+G_{水}}{S}$$

设A′上面的一段水银重为 $G_{水银}$，$p_{A'}=\frac{G_{水银}}{S}$，

$$p_A=p_{A'},$$

$$\frac{G_{球}+G_{水}}{S}=\frac{G_{水银}}{S},$$

$$mg+\rho_{水}Vg=\rho_{水银}2hSg,$$

$$h=\frac{m+\rho_{水}V}{2S\rho_{水银}}。$$

2171．一支 U 形管左管的截面积是右管的三分之一，管内装有水银，细管中水银面距管的上端是 30 厘米。如果在左管（细管）的上部装满水，那么右管中的水银面要上升多高？

[分析]从图可知水的深度为$(30+h_1)$厘米，右管水银面上升高度为 h_2。设 A_1 和 A_2 在同一水平面，则 $p_{A1}=p_{A2}$。又因为液体不可压缩，所以 $h_1S_{细}=h_2S_{粗}$。

[解答]$p_{A1}=(30+h_1)\rho_{水}g$，$p_{A2}=(h_1+h_2)\rho_{水银}g$，

$$(30+h_1)\rho_{水}=(h_1+h_2)\rho_{水银} \qquad (1)$$

又 $$h_1S_{细}=h_2S_{粗},$$

$$h_1=\frac{h_2}{S_{细}}S_{粗}=3h_2 \qquad (2)$$

把(2)式代入(1)式，

$$(30+3h_2)\rho_{水}=(3h_2+h_2)\rho_{水银}，h_2=0.58 厘米。$$

2172．一块正立方体的铁块，每边长 5 厘米，浸没在水中。上表面距液面 4 厘米，它的上表面和下表面受到水的压力各是多大？根据求出的压力数值算出它所受的浮力。如果上表面距液面 14 厘米，上表面和下表面所受的压力各是多少？再根据求出的压力数值算出它所受的浮力，试说明浮力的大小跟深度有没有关系。

[解答]上表面距液面 4 厘米时，

$F_{上}=p_{上}S=\rho_{水}gh_{上}S$

$=1000\times9.8\times0.04\times0.05\times0.05$ 牛

$=0.98$ 牛。

$F_{下}=p_{下}S=\rho_{水}gh_{下}S$

$=1000\times9.8\times(0.04+0.05)\times0.05\times0.05$ 牛

$=2.205$ 牛。

$F_{浮}=F_{下}-F_{上}=2.205$ 牛-0.98 牛

$=1.225$ 牛。

上表面距液面 14 厘米时

$F_{上}=\rho_{水}gh_{上}S$

$=1000\times9.8\times0.14\times0.05\times0.05$ 牛

$=3.43$ 牛。

$F_{下}=\rho_{水}gh_{下}S$

$=1000\times9.8\times(0.14+0.05)\times0.05\times0.05$ 牛

$=4.655$ 牛。

$F_{浮}=F_{下}-F_{上}=4.655$ 牛-3.43 牛

$=1.225$ 牛。

可见浸没在液体的物体，所受浮力大小跟深度没有关系。

2173．有一块纯金属，长 5 厘米，宽 4 厘米，厚 3 厘米，质量 534 克。求出这种金属的密度，并且指出它是哪一种金属？

[解答]

这块金属的体积

$V=5$ 厘米$\times4$ 厘米$\times3$ 厘米

$=60$ 厘米$^3=60\times10^{-6}$ 米^3。

这块金属的密度

$\rho=\frac{m}{V}=\frac{534\times10^{-3}\text{千克}}{60\times10^{-6}\text{米}3}=8.9\times10^3$ 千克/米^3，这块纯金属是铜。

2174．由 20 条木料组成一个木筏，每条木料的体积为 0.8 立方米，设木料的密度为 0.7×10^3 千克/米^3，求木筏的载重力？

[分析]解此题，首先要明确何为木筏的载重量？其次要求出木筏的重力和水对它的浮力大小。

[解答]木筏的体积 0.8 米$^3\times20=16$ 米^3。

木筏的重力　$0.7\times10^3\times9.8\times16$ 牛$=109760$ 牛。

木筏全部浸没在水中所受浮力

$1\times10^3\times9.8\times16$ 牛$=156800$ 牛。

木筏的载重量

156800 牛－109760 牛=47040 牛。

2175．一座冰山，水上部分体积估计是 2000 米^3。问它水下部分的体积约是多少？已知海水密度 1.03×10^3 千克/米^3，冰的密度 0.9×10^3 千克/米^3。

[解答]设冰山水下部分体积为 V，则浮力

$F=V\rho_{海水}g$。

冰山重力

$G=(V+2000)\rho_{冰}g$，

因为冰山浮在液面上平衡，所以

$G=F$。

$(V+2000)\rho_{冰}g=V\rho_{海水}g$，

$(V+2000)\times0.9=V\times1.03$，

$V\approx1.38\times10^4$ 米^3。

2176．将体积 V_2 为 0.1 米^3 的铝块，放在浮于水中的冰块上，使冰块和铝块刚好一起沉入水中。冰块的体积 V_1 等于多少？冰的密度 $\rho_{冰}=900$ 千克/米^3，铝的密度 $\rho_{铝}=2700$ 千克/米^3。

[解答]冰块的重力为 $V_1\rho_{冰}g$；

铝块的重力为 $V_2\rho_{铝}g$；

冰块和铝块一起浸没在水中受到浮力为 $(V_1+V_2)\rho_{水}g$；

浮力大小等于冰块和铝块的重力，

所以 $$(V_1+V_2)\rho_{水}g=V_1\rho_{冰}g+V_2\rho_{铝}g,$$

$$V_1=\frac{\rho_{铝}-\rho_{水}}{\rho_{水}-\rho_{冰}}\cdot V_2$$

$$=\frac{2700-1000}{1000-900}\times 0.1\text{米}^3$$

$$=1.7\text{米}^3$$

2177．长方体的冰块浮在水面上，它露出水面的高度 h 为 2 厘米。冰块的底面积 S 为 200 厘米 ^{2}，冰的密度 $\rho_{冰}=0.92\times10^3$ 千克/米 ^{3}。冰的重力 G 等于多少？

[解答]设冰块浸在水面下的深度为 d，则冰块的重力

$$G=(h+d)S\rho_{冰}g \qquad (1)$$

浮在水面上的冰块重力等于它受到的浮力，

$$(h+d)S\rho_{冰}g=dS\rho_{水}g,$$

$$d=\frac{h\rho_{冰}}{\rho_{水}-\rho_{冰}} \qquad (2)$$

把(2)式代入(1)式

$$G=\left(h+\frac{h\rho_{冰}}{\rho_{水}-\rho_{冰}}\right)S\rho_{冰}g$$

$$=\frac{h\rho_{水}S\rho_{冰}g}{\rho_{水}-\rho_{冰}}$$

$$=\frac{0.02\times1\times10^3\times200\times10^{-4}\times0.92\times10^3\times9.8}{(1-0.92)\times10^3}\text{牛}$$

$$=45.08\text{牛。}$$

2178．一个体积为 0.03 米 ^{3} 的救生圈浸入水中时，恰能把质量为 70 千克的人（设人的密度 $\rho_{人}=1.1\times10^3$ 千克/米 ^{3}）的 1/5 身体体积浮在水面上，问救生圈的密度 ρ 为多少？

[解答]把人和救生圈作为一个整体，人和救生圈受到的浮力等于它们的重力。救生圈的体积为 V，水的密度为 $\rho_{水}$，有

$$V\rho g+m_{人}g=V\rho_{水}g+\left(\frac{4}{5}\frac{m_{人}}{\rho_{人}}\right)\rho_{水}g,$$

整理后得 $\rho=\rho_{水}+\frac{4}{5}\frac{m_{人}\rho_{水}}{\rho_{人}V}-\frac{m_{人}}{V}$

$$=[1.0\times10^3+0.8\times70\times10^3/(1.1\times10^3\times0.03)$$

$$-70/0.03]千克/米^3$$

$$=364千克/米^3。$$

2179．探测深海的潜水球，球壳钢板厚为 10 厘米，求它的最小半径。（钢的密度 $\rho_{钢}$ 为 7.8×10^3 千克/米^3，海水密度 $\rho_{海水}$ 为 1.03×10^3 千克/米^3。）

[分析]潜水球的最小体积就是指它在无负载时，在海里受的浮力恰好等于它的重力时的体积。

[解答]设球的半径为R，则内半径为R－d，球的体积 $V_1=\frac{4}{3}\pi R^2$。

设球壳钢板的体积 V_2 和重力 G，则

$$V_2=\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi(R-d)^3$$

$$=\frac{4}{3}\pi[R^3-(R-d)^3],$$

$$G=V_2\rho_{钢}g=\frac{4}{3}\pi[R^3-(R-d)^3]\rho_{钢}g。$$

球受到浮力

$$F=V_1\rho_{海水}g=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{海水}g。$$

$$F=G,$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{海水}g=\frac{4}{3}\pi[R^3-(R-d)^3]\rho_{钢}g$$

因为 d、$\rho_{钢}$、$\rho_{海水}$ 都已知，

解得 R=2.2 米。

2180．密度是 ρ_1 的材料制成的空心球，浮在密度等于 ρ_2 的液面上。球的半径等于 R，空腔的半径等于 r。球的空腔内应用密度 ρ 为多大的物质填满，刚好使球悬浮在液体的内部？

[分析]球浮在液体内部，根据物体平衡条件可知，球的重力等于它所受到的浮力。球的重力应该是空心球的重力和填料的重力的和。

[解答]空心球的重力 $\left(\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho_1 g$。

填料的重力 $\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$。

浮力大小 $\frac{4}{3}\pi R^3\rho_2 g$

$$\left(\frac{4}{3}\pi R^3-\frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho_1 g+\frac{4}{3}\pi r^3\rho g=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_2 g,$$

$$(R^3-r^3)\rho_1+r^3\rho=R^3\rho_2,$$

$$r^3\rho=R^3\rho_2-(R^3-r^3)\rho_1,$$

$$\rho=(\rho_2-\rho_1)\frac{R^3}{r^3}+\rho_1。$$

2181．一个空心铜球全部浸入水中，刚好不下沉也不浮起，如果球内空心部分体积 V_1 为 17.75 厘米^3，求：

(1)空心铜球的铜的体积是多少？

(2)铜球的重力是多少？（铜的密度为 8.9×10^3 千克/米^3）

[解答](1)设整个铜球的体积为 V，则铜球的重力

$$G=(V-V_1)\rho_{铜}g。$$

铜球在水中处于平衡状态，所以浮力和重力相等。

$$F=G，F=V\rho_{水}g，$$

$$(V-V_1)\rho_{钢}g=V\rho_{水}g，$$

$$V=\frac{V_1\rho_{铜}}{\rho_{铜}-\rho_{水}}=\frac{17.75\times8.9}{8.9-1}厘米^3=20厘米^3。$$

(2)制成铜球的铜体积

$$V_2=V-V_1=(20-17.75)厘米^3=2.25厘米^3，$$

铜球的重力 $G=V_2\rho_{钢}g=2.25\times10^{-6}\times8.9\times10^3\times9.8$ 牛=0.196 牛。

2182．已知物体 A 重 2.45 牛，浸在液体内，浸没的体积正好为该物体体积的一半。如果加一个体积和 A 相同的物体 B 在 A 上，使其一起没入液体内，问物体 B 最少应该多重？

[解答]根据题意可知 A 物重力等于它受到的浮力

$$G_A=\frac{1}{2}V_A\rho_{液}g \qquad (1)$$

B 物体最少多重，是指 B 物加在 A 物上后，二者刚好全部浸入液体。A、B 两物重力的和也应该等于它们受到的浮力

$$G_A+G_B=(V_A+V_B)\rho_{液}g。$$

$$V_A=V_B，$$

$$G_A+G_B=2V_A\rho_{液}g \qquad (2)$$

(1)式除以(2)式得

$$\frac{G_A}{G_A+G_B}=\frac{1}{4},$$

$$G_A+G_B=4G_A,$$

$G_B=3G_A=3\times 2.45$ 牛$=7.35$ 牛。

2183．要想使一个装满空气的橡皮球能够在碳酸气（二氧化碳的俗称）和空气的混合气中不下降也不上升，那么碳酸气和空气的体积比应该是多少？（已知球的体积 V 为 5×10^{-3} 米^3，球的重力 G 为 0.0147 牛，空气的密度 ρ_1 为 1.29 千克/米^3，碳酸气的密度 ρ_2 为 1.98 千克/米^3）

[解答]气球不上升也不下降时，球的重力必须等于浮力。

G+G′=F，G′为球内空气的重力，F 为浮力。

$$G+V\rho_1g=V\rho_{混}g,$$

$$\rho_{混}=\frac{G+V\rho_1g}{Vg}=\frac{14.7\times10^{-3}+5\times10^{-3}\times1.29\times9.8}{5\times10^{-3}\times9.8}千克/米^3$$

$$=1.59千克/米^3$$

设空气的体积为 V1，碳酸气的体积为 V2，空气和碳酸气的总重力为混合气的重力。

$$V_1\rho_1g+V_2\rho_2g=(V_1+V_2)\rho_{混}g,$$

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\rho_{混}-\rho_2}{\rho_1-\rho_{混}}=\frac{1.59-1.98}{1.29-1.59}=\frac{0.39}{0.3}=1.3。$$

2184．人体的密度近似地等于 10^3 千克/米^3。如果空气中人的重力是 600 牛，问他的实际重力是多少？（空气的密度为 1.29 千克/米^3）

[解答]设人的实际重力为 G，人在空气中称重为 G′，人所受到的空气浮力为 F，则

G′=G－F，G′+F，

$$F=V_人\rho_空g=\frac{G}{\rho_人g}\cdot\rho_空g=\frac{G\rho_空}{\rho_人},$$

$$G=G'+\frac{G\rho_空}{\rho_人},$$

$$G\rho_人=G'\rho_人+G\rho_空,$$

$$G=\frac{G'\rho_人}{\rho_人-\rho_空}$$

$$=\frac{600\times10^3}{10^3-1.29}牛=600.77牛。$$

2185．一把装有木柄的铁锤，在空气中重 4.4 牛，在水中重 2.9 牛，已知木柄密度 $\rho_木$=400 千克/米^3，铁的密度 $\rho_铁$=800 千克/米^3，水的密度 $\rho_水$=1000 千克/米^3。问此铁锤的木柄、铁块各重多少牛？

[解答]设木柄重为 $G_木$，铁块重为 $G_铁$，根据题意有

$G_木+G_铁=4.4$ 牛　　　　　　　　　　(1)

浮力　　F=4.4 牛－2.9 牛=1.5 牛，

浮力　　$F=\left(\frac{G_{木}}{\rho_{木}g}+\frac{G_{铁}}{\rho_{铁}g}\right)\cdot\rho_{水}g$，

$$\left(\frac{G_{木}}{\rho_{木}g}+\frac{G_{铁}}{\rho_{铁}g}\right)\cdot\rho_{水}g=1.5\text{牛} \qquad (2)$$

解得

$G_{木}=0.4$ 牛，

$G_{铁}=4$ 牛。

2186．把一个开口向上的小铁盒放入盛有水的圆筒内，当它平稳地浮在水面时，筒内水位升高 h 为 2 厘米，如果使铁盒全部沉没在水中，则水位又会降落多少？铁的密度 $\rho_{铁}$ 为 7.8×10^3 千克/米 ^{3}。

[解答]铁盒浮在水面时，由于它排开水的体积而使筒内水面上升 h，设筒的横截面积为 S，则排开水的体积 hS，如图(b)所示。

根据题意，铁盒所受浮力等于铁盒的重力

$$hS\rho_{水}g=V_{铁}\rho_{铁}g \qquad (1)$$

式中 $V_{铁}$ 为制成铁盒的铁的体积。

如果使铁盒全部沉没在水中，水面上升高度为 x，如图(c)所示，则排开水的体积等于铁的体积。$x\cdot S=V_{铁}$　　(2)

解(1)、(2)式得　　$x=\frac{hS\rho_{水}}{\rho_{铁}S}=\frac{h\rho_{水}}{\rho_{铁}}$。

水面降落　　$\Delta h=h-x=h-\frac{h\rho_{水}}{\rho_{铁}}$

$$=h\left(1-\frac{\rho_{水}}{\rho_{铁}}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{10^3}{7.8\times10^3}\right)\text{厘米}$$

$$=1.74\text{厘米}。$$

2187．圆筒内盛有密度 $\rho_{液}=0.95\times10^3$ 千克/米 ^{3} 的液体，质量 m=1.9 千克的冰块浮在液面上。筒的底面积 S=40 厘米 ^{2}。冰熔解后筒内的液面改变了多少？

[解答]冰熔解前浸没在液体中的体积为 V 液，则有

$V_{液}\rho_{液}g=mg$，

$$V_{液}=\frac{m}{\rho_{液}} \qquad (1)$$

冰熔解后，变后水的体积为 $V_{水}$，则有

$V_{水}\rho_{水}g=mg$，

$$V_{水}=\frac{m}{\rho_{水}} \qquad (2)$$

设 $V_{水}$与 $V_{液}$的差为 ΔV，则

$$\Delta V = \Delta h \cdot S, \quad \Delta h = \frac{\Delta V}{S}。$$

$$\Delta h = \frac{V_{水} - V_{液}}{S} = \frac{\dfrac{m}{\rho_{水}} - \dfrac{m}{\rho_{液}}}{S}$$

$$= \frac{m(\rho_{液} - \rho_{水})}{S\rho_{水}\rho_{液}}$$

$$= \frac{1.9 \times (0.95 - 1) \times 10^{3}}{40 \times 10^{-4} \times 1 \times 10^{3} \times 0.95 \times 10^{3}} 米$$

$$= -0.025 米 = -2.5 厘米。$$

因此液面下降 2.5 厘米。

从(1)、(2)两式可得

$$V_{水}\rho_{水} = V_{液}\rho_{液},$$

$$V_{水} = \frac{\rho_{液}}{\rho_{水}} \cdot V_{液}。$$

本题 $\rho_{液} < \rho_{水}$，所以 $V_{水} < V_{液}$，说明冰块熔化成水的体积小于原来冰块排开液体的体积 $V_{液}$，所以液面下降。

如果，$\rho_{液} > \rho_{水}$，则 $V_{水} > V_{液}$，说明冰块熔化成水的体积大于原来冰块排开液体的体积 $V_{液}$，这时液面上升。

2188．一个比重计质量为 14 克，放在水中，水面在它的刻度 A 处[图(a)]，放在煤油中，油面在它的刻度 B 处[图(b)]。已知煤油的密度为 $\rho_{油}=0.8\times10^{3}$千克/米^{3}，比重计刻度部分的玻璃管粗细均匀，外径为 R=0.75 厘米，求 A、B 间的距离。

[分析]比重计在不同液体中平衡时所受浮力，都等于比重计的重力 G。由于水和煤油密度不同，所以比重计浸入水中和煤油中的体积也不同，比重计两次排开液体的体积的差就是 A、B 间的体积，即 $\Delta V=\pi R^{2}h_{AB}$。

[解答]在水中平衡时，

$$\rho_{水}V_{水}g = mg, \quad V_{水} = \frac{m}{\rho_{水}} \qquad (1)$$

在煤油中平衡时，

$$\rho_{油}V_{油}g = mg, \quad V_{油} = \frac{m}{\rho_{水}} \qquad (2)$$

$$\Delta V = V_{油} - V_{水} = \pi R^{2} h_{AB},$$

又

$$h_{AB} = \frac{V_{油} - V_{水}}{\pi R^{2}} \qquad (3)$$

解(1)、(2)、(3)式得

$$h_{AB} \approx 2 厘米$$

2189．比重计上半部的圆柱形玻璃管长 10 厘米，截面积 0.5 厘米^2，下半部有一段较粗的管子还有一个玻璃泡，质量共为 2.4 克，玻璃泡内封闭 1.0 厘米^{3}的水银。把这一支比重计插入水中，则露出水面部分长 5.0 厘米。求它能测的液体的最大密度和最小密度。

[解答] 比重计的重力

$$G=\rho_{水银}gV_{水银}+mg$$
$$=(13.6\times10^3\times9.8\times1.0\times10^{-6}+2.4\times10^{-3}\times9.8)牛$$
$$=0.1568牛$$

设比重计下半部体积为 $V_下$，则比重计插入水中时，根据题意有

$$G=[V_下+(10-5)\times0.5\times10^{-6}]\rho_水 g$$

$$V_下=\frac{G-2.5\times10^{-6}\rho_水 g}{\rho_水 g}$$

$$=\frac{0.1568-2.5\times10^{-6}\times10^3\times9.8}{10^3\times9.8}米^3$$

$$=1.35\times10^{-5}米^3。$$

比重计能测最大密度液体，是指用它测量时，它的上半部正好全部露出液面。这时

$$G=V_下\rho_{最大}g$$

$$\rho_{最大}=\frac{G}{V_下 g}=\frac{0.1568}{1.35\times10^{-5}\times9.8}千克/米^3$$

$$=1.185\times10^3千克/米^3。$$

比重计能测最小密度液体，是指用它测量时，它的上半部正好全部浸入液体。这时

$$G=(V_下+10\times0.5\times10^{-6})\rho_{最小}g,$$

$$\rho_{最小}=\frac{G}{(V_下+10\times0.5\times10^{-6})g}$$

$$=\frac{0.1568}{(1.35\times10^{-5}+5\times10^{-6})\times9.8}千克/米^3$$

$$=0.865\times10^3千克/米^3。$$

2190．下页图是某比重计的示意图，它的有刻度部分的横截面积是均匀的，而且 1.00×10^3 千克/米^{3}和 1.10×10^3 千克/米^{3}这两个刻度之间的距离为 1.8 厘米，试问 1.10×10^3 千克/米^{3}和 1.20×10^3 千克/米^{3}这两个刻度间的距离为多少？

[分析] 比重计的自身重力 G 是一定的，当它在液体中悬浮时，说明浮力等于它的重力。而浮力大小等于排开液体的重力。设比重计在密度 ρ_1 为 1×10^3 千克/米^{3}的液体里时，排开液体的体积为 V_1 米^3，则有 $G=\rho_1V_1g$。同样在别的液体里时，也有这种关第式成立，即 $G=\rho_2V_2g=\cdots$，根据这一关系就可以求出本题提出的问题。

[解答] $G=\rho_1V_1g==\rho_2V_2g=\rho_3V_3g=\cdots$

$$V_2=\frac{\rho_1V_1}{\rho_2}，V_3=\frac{\rho_1V_1}{\rho_3}$$

$$\triangle V_{12}=V_1-V_2=V_1-\frac{\rho_1 V_1}{\rho_2} \qquad (1)$$

$$\triangle V_{13}=V_1-V_3=V_1-\frac{\rho_1 V_1}{\rho_3} \qquad (2)$$

设比重计有刻度部分的横截面为 S，$\rho_1=10^3$ 千克/米 ^{3}、$\rho_2=1.1\times10^3$ 千克/米 ^{3}、$\rho_3=1.2\times10^3$ 千克/米 ^{3}。

上面两式可写作，

$$\triangle L_{12}\cdot S=V_1-\frac{V_1}{1.1}=\frac{1}{11}V_1 \qquad (3)$$

$$\triangle L_{13}\cdot S=V_1-\frac{V_1}{1.2}=\frac{1}{6}V_1 \qquad (4)$$

(3)、(4)两式相除可得

$$\frac{\triangle L_{12}}{\triangle L_{13}}=\frac{6}{11},$$

$$\triangle L_{13}=\frac{11}{6}\times\triangle L_{12},$$

$\triangle L_{12}=1.8$ 厘米，

$$\triangle L_{13}=\frac{11}{6}\times 1.8\text{厘米}=3.3\text{厘米}。$$

[提示] 这里的$\triangle L_{13}$是指 1.00 的刻度到 1.200 的刻度间的距离，这样 1.10 与 1.20 间的距离

$$\triangle L_{23}=\triangle L_{13}-\triangle L_{12}$$
$$=3.3\text{ 厘米}-1.8\text{ 厘米}=1.5\text{ 厘米}。$$

从而可知比重计的刻度是不均匀的，上疏下密。

2191．利用阿基米德定律求比水的密度小的固体的密度。有一木块在空气中用弹簧秤称得重力 G=1.2 牛，然后在木块下端悬挂一个重锤，当重锤浸入水中时弹簧秤读数为 2.7 牛，再把木块和重锤一起浸入水中，弹簧秤读数为 0.9 牛。求该木块的密度。

[解答] 如图(a)所示，木块和重锤组成的系统共受到四个力的作用：弹簧向上拉力 T_1、木块的重力 $G_木$、重锤的重力 $G_重$、重锤所受浮力 F_1，因为系统处于平衡状态，所以

$$T_1+F_1=G_木+G_重 \qquad (1)$$

如图(b)所示，系统共受五个力的作用：重力 $G_木$、$G_重$，弹簧拉力 T_2，浮力 F_1、F_2，同上列出方程

$$T_2+F_1+F_2=G_木+G_重 \qquad (2)$$

从(1)式和(2)式可得

$F_2=T_1-T_2$

$=2.7$ 牛-0.9 牛$=1.8$ 牛。

$F_2=\rho_水 V_木 g$，

$G_木=\rho_木 V_木 g$，

$$\rho_{木}=\frac{G_{木}\rho_{水}}{F_2}$$

$$=\frac{1.2\times10^3}{1.8}千克/米^3$$

$=0.667\times10^3$千克/米^3。

2192．利用阿基米德定理求比水的密度大的固体的密度。有一个重物在空气中用弹簧秤称得重力 G=7.8 牛，在水中称时，弹簧秤读数为 6.8 牛，求重物的密度。

[解答] $G=\rho_{重}V_{重}g$　　(1)

在水中称时，重物受到三个力：重力 G，浮力 F，弹簧拉力 T，有

$G=F+T$　　(2)

又　$F=\rho_{水}V_{重}g$　　(3)

解(1)、(2)、(3)式得

$$\rho_{重}=\frac{G}{G-T}\rho_{水}$$

$$=\frac{7.8}{7.8-6.8}\times10^3千克/米^3$$

$=7.8\times10^3$千克/米^3。

2193．利用阿基米德定律可以测出液体的密度。今测出一块金属块在空气中重 G=1.2 牛，在水中重 1.08 牛，在酒精中重 1.1 牛。求酒精的密度。

[解答] 金属块浸没在水中时所受浮力为 F_1，

$F_1=G-G_1$　　(1)

$F_1=\rho_{水}Vg$　　(2)

由(1)、(2)式得$V=\dfrac{G-G_1}{\rho_{水}g}$　　(3)

金属块浸没在酒精中时所受浮力为 F_2，

$F_2=G-G_2$　　(4)

又　$F_2=\rho_{酒}Vg$　　(5)

由(4)、(5)式得$V=\dfrac{G-G_2}{\rho_{酒}g}$　　(6)

由(3)、(6)式得$\dfrac{G-G_1}{\rho_{水}g}=\dfrac{G-G_2}{\rho_{酒}g}$，

$$\rho_{酒}=\frac{G-G_2}{G-G_1}\rho_{的}$$

$$=\frac{1.2-1.1}{1.2-1.08}\times10^3千克/米^3$$

$=0.83\times10^3$千克/米^3。

2194．有一匀质的实心物体，当它浸入密度为 ρ_1 液体时，称得重力为 T_1，浸入密度为 ρ_2 的液体时，则称得重力为 T_2，求物体的密度 ρ 为多

大？

[解答] 浸入密度为ρ_1的液体时

$G=T_1+F_1$，G 是物体在空气中的重力，F_1为浮力。设物体的体积为 V，则 $G=\rho Vg$，$F_1=\rho_1 Vg$，所以

$$T_1=G-F_1=Vg(\rho-\rho_1) \qquad (1)$$

浸入密度为ρ_2的液体里，同理有

$$T_2=Vg(\rho-\rho_2) \qquad (2)$$

解(1)式和(2)式得

$$\rho=\frac{T_2\rho_1-T_1\rho_2}{T_2-T_1}。$$

2195．一块木块浮在水面上时，有$\frac{3}{5}$的体积露于空气中，求木块的密度。

[解答] 设木块的体积为 V，则

$$V_{露}=\frac{3}{5}V，V_{水}=V-V_{露}=\frac{2}{5}V。$$

木块浮在水面时，所受浮力等于重力，所以

$$G=F=\rho_{水}V_{水}g=\frac{2}{5}\rho_{水}Vg \qquad (1)$$

$$G=\rho_{木}Vg \qquad (2)$$

从(1)、(2)式得

$$\rho_{木}Vg=\frac{2}{5}\rho_{水}Vg，$$

$$\rho_{木}=\frac{2}{5}\rho_{水}=0.4\times10^3\text{千克}/\text{米}^3。$$

2196．一木块浮在水面时，有 7/10 的体积浸入水中，假如把此木块浮在某液体的液面时，有 1/2 体积露在空气中，求此液体的密度。

[解答] 浮在液面的物体，它的浮力大小等于它所受到的重力，物体在水中和某液体中所受浮力分别为 F、F′，则

$$F=G，F'=G，$$

$$F=F'，\frac{7}{10}\rho_{水}Vg=\frac{1}{2}\rho_{液}Vg，$$

$$\rho_{液}=\frac{7}{5}\rho_{水}=\frac{7}{5}\times10^3\text{千克}/\text{米}^3$$

$$=1.4\times10^3\text{千克}/\text{米}^3。$$

2197．如图(a)所示，浸在油杯里的一个物体，它直接压在杯底上的力是它重力的九分之一。如果用漏斗从油的下面注入水，物体将浮起，直到它的一半浸在水中、另一半浸在油中时，恰好平衡如图(b)所示。求物体和油的密度各是多少？

[分析] 当物体浸在油里时，物体受重力 G、浮力 $F_{油}$、杯底的支持力 N；当物体浸在油和水的分界面时，受重力 G、油和水的浮力 $F'_{油}$和 F

水，我们可以根据三力平衡条件列出方程求解。

[解答] $F_{油}+N=G$ (1)

$F'_{油}+F_{水}=G$ (2)

设物体的密度为$\rho_{物}$，油的密度$\rho_{油}$，水的密度$\rho_{水}$，则有

$$F_{水}=\frac{1}{2}\frac{G}{\rho_{物}g}\cdot\rho_{水}g，F'_{油}=\frac{1}{2}\frac{G}{\rho_{物}g}\cdot\rho_{油}g，$$

$$F_{油}=\frac{G}{\rho_{物}g}\cdot\rho_{油}g。$$

$$N=\frac{1}{9}G，$$

将$F_{水}$、$F'_{油}$、$F_{油}$代入(1)、(2)式

$$\frac{1}{9}G+\frac{G}{\rho_{物}}\cdot\rho_{油}=G， \quad (3)$$

$$\frac{1}{2}\frac{G}{\rho_{物}}\cdot\rho_{水}+\frac{1}{2}\frac{G}{\rho_{物}}\rho_{油}=G。 \quad (4)$$

联立(3)、(4)式解得

$\rho_{物}=0.9\times10^3$千克/米^3，

$\rho_{油}=0.8\times10^3$千克/米^3。

2198．如图所示，把音叉形的玻璃管的两端插在容器 A 和 B 中，A 中已知密度ρ_A的液体，B 中装未知密度的液体。从管的上端 C 抽去一些空气，平衡时左管的液柱高为h_A，右管的液柱高度为h_B，求 B 中液体的密度ρ_B。

[解答] 设大气压强为p_0，C 内空气压强为p_C。

平衡时，有 $p_0=p_c+h_A\rho_Ag$，

$p_0=p_c+h_B\rho_Bg$，

得 $h_A\rho_A=h_B\rho_B$，

$$\rho_B=\frac{h_A}{h_B}\rho_A。$$

测量出h_A、h_B，就可测出ρ_B。这种测定液体的密度的方法，叫做海尔法。

2199．长 l 为 2.3 米，横截面积 S 为 100 厘米^{2}的铝制圆柱体，用绳子由水内慢慢地匀速吊起。当圆柱露出水面的长度l_1为 l/4 时，绳子被拉断。求绳子能承受的最大张力 T。（铝的密度ρ铝为2.7×10^3千克/米^3。）

[解答] 根据题意可知，铝制圆柱体受到三个力的作用：向下重力 G、向上浮力 F 和绳子张力 T。列出方程有

$$G=T+F，$$

$$T = G - F = \rho_{铝} glS - \rho_{水} g(l - l_1)S$$
$$= gS[\rho_{铝} l - \rho_{水}(l - l_1)]$$
$$= 9.8 \times \frac{100}{10^4} \times [2.7 \times 10^3 \times 2.3 - 1 \times 10^3 \times (2.3 - \frac{2.3}{4})]\text{牛}$$
$$= 439.5\text{牛}。$$

2200．如图(a)所示，有一个薄壁圆筒容器，漂浮在水银中，容器中装有 8 厘米深的水银时，它浸入水银 10 厘米（容器壁厚不计）。求：(1)若往容器内放一个密度比水银小的金属块，测得容器浸入水银 11 厘米，问此时容器内水银深度 h 是多少[图(b)]。(2)若往容器内放一个密度比水银大的合金块，测得容器浸入水银 12.5 厘米，容器内水银深度为 10 厘米，问此合金的密度是多少[图(c)]。

[解答] (1)设容器重为 G，横截面积为 S。从图(a)可知，容器受重力、容器内水银的压力和容器外水银对它的浮力作用而平衡，所以

$$0.08\rho_{水银} gS+G=0.10\rho_{水银} gS，$$

当金属块放入容器后，从图(b)可知，

$$h\rho_{水银} gS+G=0.11\rho_{水银} gS，$$

[提示] 8 厘米高的水银柱和金属块对容器底的压力和 h 厘米高的水银柱产生的压强所形成的对容器底的压力是相等的。

联立上列两式解得

$$h=0.09\text{ 米}=9\text{ 厘米}。$$

(2)比较图(c)和(a)可求得合金块体积 V′的大小和它的重力 G′的大小，

$$V'=(0.10-0.08)S=0.02S，$$
$$G'=(0.125-0.10)\rho_{水银} gS=0.025\rho_{水银} gS。$$

由此可求合金块的密度

$$\rho' = \frac{G'}{V'g} = \frac{0.025\rho_{水银} gS}{0.02Sg} = \frac{2.5 \times 13.6 \times 10^3}{2}\text{千克/米}^3$$
$$= 17 \times 10^3\text{千克/米}^3。$$

2201．有一重为 9.8 牛的玻璃杯 B，内装重为 14.7 牛的液体 C。杯 B 置于一台秤 E 盘上。今有一体积是 3 立方分米的物体 A 以一细绳悬挂于弹簧秤 D 下端并沉入液体 C 中，如图(a)所示，此时，D 秤的读数是 24.5 牛，E 秤的读数是 73.5 牛。问：(1)液体 C 的密度是多少？(2)如果将物体 A 提出液面，D 秤的读数是多少？

[分析] 从题意知，玻璃杯和液体 C 总重 24.5 牛，而 E 秤的读数是 73.5 牛，这说明 A 物体浸入 C 液体中后，对液体 C 的竖直向下的压力 73.5 牛-24.5 牛=49 牛。根据牛顿第三定律可知，物体 A 所受的浮力（竖直向上）一定为 49 牛。

[解答] (1)因为物体 A 所受的浮力大小等于和物体 A 等体积的液体 C 的重力。

所以 $F_{浮}=\rho_c V_c g=\rho_c V_A g$，

$$\rho_c = \frac{F_{浮}}{V_A g} = \frac{73.5 - 9.8 - 14.7}{3 \times 10^{-3} \times 9.8}\text{千克/米}^3 = 1.67 \times 10^3\text{千克/米}^3。$$

(2) A 物体在液体 C 中的受力情况如图(b)所示，根据平衡条件有

$G=F_{浮}+T=49$ 牛+24.5 牛=73.5 牛。

所以　当物体 A 从液体中提出后，因浮力的消失，D 秤的读数应为 73.5 牛。

2202．天平两端分别挂铜块和铁块，它们的质量都是 100 克，这时天平恰好平衡，如果把它们同时浸入水中，如图所示，欲维持天平平衡需在铁块端加上多少砝码才行？

[分析] 相同重力的铁块体积比铜块体积大，所以当它们同时浸入水中时，铁块受到的浮力大于铜块受到的浮力，天平平衡破坏。要维持平衡，应在铁块端加上适量的砝码，使砝码的重力等于两者的浮力差。

[解答] 铜块受到浮力 $F_{铜}$ 为

$$F_{铜}=\rho_{水}V_{铜}g=\frac{G_{铜}}{\rho_{铜}g}\rho_{水}g。$$

铁块受到的浮力 $F_{铁}$ 为

$$F_{铁}=\frac{G_{铁}}{\rho_{铁}g}\rho_{水}g。$$

两边浮力差为

$$\triangle F=F_{铁}-F_{铜}=\left(\frac{G_{铁}}{\rho_{铁}g}\cdot\rho_{水}g-\frac{G_{铜}}{\rho_{铜}g}\cdot\rho_{水}g\right)$$

$$=\left(\frac{0.1\times9.8}{7.8\times10^{3}}-\frac{0.1\times9.8}{8.9\times10^{3}}\right)\times10^{3}\text{牛}=0.016\text{牛}。$$

2203．天平左盘上放一盛水的烧杯，右盘上放砝码使之平衡。将挂在弹簧秤下的小球没入水中，如图，天平是否仍平衡为什么？若小球在空气中时，弹簧秤示数是 0.81 牛，小球没入水中时，示数减为 0.51 牛。问怎样能使天平再平衡？

[解答] 当小球浸入水中时，它受向上浮力 F，根据牛顿第三定律，这时小球对水有向下反作用力 F′，大小等于浮力 F。正由于这个 F′的作用将破坏天平的平衡。

小球在水中时，受到三个力的作用：向下重力 G=0.81 牛，弹簧秤向上拉力 T=0.51 牛和向上浮力 F。

G=T+F，

F=G-T=0.81 牛-0.51 牛=0.3 牛。

小球对水向下反作力 F′为

F′=F=0.3 牛。

所以天平右边须加 0.3 牛重的砝码，天平才能保持平衡。

2204．有一杠杆，在 A、B 处分别挂有体积都是 10 厘米^{3}的铁块和铜块，离支点 O 的距离人别为 l_2 和 l_1，这时杠杆恰好平衡。现把它们都浸入水中，问：

(1)杠杆还平衡吗？

(2)要使杠杆维持平衡，在 A 处应加多重的砝码？

[解答] (1)铁块和铜块未浸入水中，据题意有

$$\rho_{铁}Vgl_2=\rho_{铜}Vgl_l \qquad (1)$$

浸入水中后，左右两边对 O 点的力矩分别为

$$M_{左}=(\rho_{铁}V-\rho_{水}V)gl_2=\rho_{铁}Vgl_2-\rho_{水}Vgl_2,$$

$$M_{右}=(\rho_{铜}V-\rho_{水}V)gl_1=\rho_{铜}Vgl_1-\rho_{水}Vgl_1。$$

因为 $\rho_{铜}>\rho_{铁}$，从(1)式可知 $l_2>l_1$，

所以 $$\rho_{水}Vgl_2>\rho_{水}Vgl_1,$$

$M_{左}<M_{右}$，天平平衡破坏。

(2)设在 A 处所加砝码重力为 G，根据杠杆平衡条件可列下式

$$(\rho_{铁}V-\rho_{水}V)gl_2+Gl_2=(\rho_{铜}V-\rho_{水}V)gl_1,$$

$$\rho_{铁}Vgl_2-\rho_{水}Vgl_2+Gl_2=\rho_{铜}Vl_1-\rho_{水}Vgl_1,$$

$$(\rho_{水}Vg-G)l_2=\rho_{水}Vgl_1,$$

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{\rho_{水}Vg}{\rho_{水}Vg-G} \qquad (2)$$

从(1)式可知

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{\rho_{铜}}{\rho_{铁}} \qquad (3)$$

把(3)式代入(2)式，

$$\frac{\rho_{铜}}{\rho_{铁}}=\frac{\rho_{水}Vg}{\rho_{水}Vg-G},$$

$$G=\frac{\rho_{水}Vg(\rho_{铜}-\rho_{铁})}{\rho_{铜}}=\frac{10\times10^{-6}\times1\times10^{3}\times9.8\times(8.9-7.8)\times10^{3}}{8.9\times10^{3}}\text{牛}$$

$$=1.211\times10^{-2}\text{牛。}$$

2205．立方体浮在水里，有 3/4 体积在水下。用细线将立方体一个面的中心吊在离杠杆支点为 8 厘米的臂上，并用重为 G′=0.31 牛的砝码吊在离杠杆支点为 4 厘米的臂上，如图所示杠杆处于平衡，这时立方体只有 2/3 的体积在水下。求立方体的边长 d。

［解答］立方体未吊在杠杆上时，它所受浮力大小等于它的重力，

所以 $$G=F,$$

即 $$\rho d^3g=\rho_{水}\frac{3}{4}d^3g,\ \rho_{物}=\frac{3}{4}\rho_{水} \qquad (1)$$

立方体吊在杠杆上，依据题意和杠杆平衡条件可列出方程：

$$(G-F')l_1=G'l_2,$$

$$(\rho d^3g-\rho_{水}\frac{2}{3}d^3g)l_1=G'l_2,$$

$$d^3gl_1(\rho-\frac{2}{3}\rho_{水})=G'l_2, \qquad (2)$$

把(1)式代入(2)式，

$$d^3gl_1(\frac{3}{4}\rho_{水}-\frac{2}{3}\rho_{水})=G'l_2,$$

$$\frac{d^3gl_1\rho_{水}}{12}=G'l_2,$$

$$d=\sqrt[3]{\frac{12G'l_2}{gl_1\rho_{水}}}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{12\times0.31\times0.04}{9.8\times0.08\times1\times10^3}}$$

$$=0.057\text{米。}$$

2206．一个半径 R 为 0.5 厘米的铝球，用线挂在质量 m 为 4 克的均匀棒的一端，棒放在盛有水的杯子的边上。当小球的一半浸在水里，棒处于平衡。求这支点将棒分为两部分的长度之比。（铝的密度 $\rho_{铝}$为 2.7×10^3 千克/米 ^{3}）

［解答］根据题意，作出示意图。O_1 为杯子边，O_2 为棒的重心位置。以 O_1 为转轴列出杠杆平衡方程

$$G'x=(G-F)l_1 \qquad (1)$$

式中 x 为棒的重心到杯边的距离，F 为球在水中受到的浮力，

$$l_2=\frac{l}{2}+x \qquad (2)$$

$$l_1=\frac{1}{2}-x \qquad (3)$$

由(2)式和(3)式得

$$l_2-l_1=2x$$

即 $$x=\frac{1}{2}(l_2-l_1) \qquad (4)$$

由(1)、(4)式得

$$G'\cdot\frac{1}{2}(l_2-l_1)=(G-F)l_1,$$

即得 $$\frac{l_2}{l_1}=\frac{2(G-F)+G'}{G'}$$

$$=1+\frac{2(G-F)}{G'}=1+\frac{2(\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{铝}g-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{水}g)}{mg}$$

$$=1+\frac{4\pi R^3}{3m}(2\rho_{铝}-\rho_{水})$$

$$=1+\frac{4\times3.14\times(0.005)^2}{3\times4\times10^{-3}}(2\times2.7\times10^3-1\times10^3)$$

$$=1.58\text{。}$$

2207．均匀棒长 2a，重为 G，A 端用细绳（竖直方向）悬挂，

B端浸入液体中（如图）。已知液体密度是棒的密度的$\frac{4}{3}$倍，求静止时，浸入液体内的棒长和绳对棒的拉力。

[分析] 棒在平衡时受到三个力的作用：重力 G、浮力 F、细绳的拉力（即弹力）T。浮力 F 的作用点在棒浸没在液体部分的中点，根据物体平衡条件即可求解。

[解答] 设棒浸没在液体部分长度为 x，密度为$\rho_{棒}$、截面积为 S，平衡时棒与水平方向成α角，以 A 为转轴，根据有固定转动轴物体的平衡条件有

$$F(2a-\frac{x}{2})\cos\alpha = G\cdot a\cdot \cos\alpha \qquad (1)$$

由于 $F = x\cdot S\cdot \rho_{液}g$，$\rho_{液} = \frac{4}{3}\rho_{棒}$，$G = 2aS\rho_{棒}g$,

代入(1)式得

$$\frac{4}{3}x\cdot S\cdot \rho_{棒}g(2a-\frac{x}{2})\cos\alpha = 2a\cdot S\cdot \rho_{棒}g\cdot a\cdot \cos\alpha,$$

$$\frac{4}{3}x(2a-\frac{x}{2}) = 2a^2, x = a,$$

就是说棒的一半浸没在液体中。

$$F = aS\frac{4}{3}\rho_{棒}g = \frac{2}{3}\cdot 2aS\rho_{棒}g = \frac{2}{3}G,$$

$$F + T = G,$$

$$T = G - F = G - \frac{2}{3}G - \frac{G}{3}。$$

2208．如图所示，把圆柱体用弹簧悬挂起来，弹簧的伸长为 2 厘米，若把水注入杯中，当浸没圆柱体三分之一时，弹簧的伸长变为 1.5 厘米，求圆柱体的密度。

[解答] 圆柱体未浸入水中时，弹力与重力平衡

$$G=V\rho g=k\triangle l_1, \qquad (1)$$

圆柱体浸入水中时，重力、弹力、浮力三力平衡

$$F_{浮}+k\triangle l_2=G=V\rho g$$

$$V\rho g-F_{浮}=k\triangle l_2$$

$$V\rho g-\frac{V}{3}\rho_{水}g=k\triangle l_2 \quad (2)$$

(1)式÷(2)式

$$\frac{V\rho g}{V\rho g-\frac{V}{3}\rho_{水}g}=\frac{k\triangle l_1}{k\triangle l_2},$$

$$\frac{\rho}{\rho-\frac{\rho_{水}}{3}}=\frac{\triangle l_1}{\triangle l_2},$$

$$\rho=(\rho-\frac{\rho_{水}}{3})\ \frac{\triangle l_1}{\triangle l_2},$$

$$\rho=(\rho-\frac{1\times10^3}{3})\frac{2}{1.5}千克/米^3,$$

$$\rho=1.33\times10^3千克/米^3。$$

2209．一根轻小弹簧原长为 8 厘米，两端分别连结在容器底部和物体 A 上，将水逐渐注入容器，当物体 A 的一半浸入水中时，如图(a)所示，弹簧长为 9 厘米。把水倒出，改用密度为 0.8×10^3 千克/米 ^{3} 的油注入容器，当物体 A 全部浸入油中时，如图(b)所示，弹簧长为 12 厘米，求：(1)在这两种情况下，物体 A 受到的浮力之比，(2)物体 A 的密度。

[解答]

(1)物体A在第一种情况中所受浮力为 $\frac{V}{2}\cdot\rho_{水}g$，在第二种情况下所受浮力为 $V\cdot\rho_{油}g$，所以在两种情况下浮力之比为

$$\frac{F1}{F2}=\frac{\frac{V}{2}\rho_{水}g}{V\rho_{油}g}=\frac{1\times10^3}{2\times0.8\times10^3}=\frac{5}{8},$$

(2)从图(a)、(b)可列方程

$$k\triangle l_1=\frac{V}{2}\rho_{水}g-\rho Vg \quad (1)$$

$$k\triangle l_2=V\rho_{油}g-\rho Vg \quad (2)$$

(2)式除以(1)式

$$\frac{\triangle l_1}{\triangle l_2}=\frac{\rho_{油}-\rho}{\frac{\rho_{水}}{2}-\rho},$$

因为 $\triangle l_2=(12-8)\times10^{-2}$ 米 $=4\times10^{-2}$ 米，

$\triangle l_1=(9-8)\times10^{-2}$ 米 $=10^{-2}$ 米。

所以 $$\frac{4}{1}=\frac{0.8\times10^3-\rho}{0.5\times10^3-\rho},$$

$$2\times10^3-4\rho=0.8\times10^3-\rho,$$

$$\rho=\frac{(2-0.8)\times10^3}{3}\text{千克}/\text{米}^3$$

$$=400\text{千克}/\text{米}^3\text{。}$$

2210．密度为 2.5×10^3 千克/米^{3}的石块，在水中下落时，加速度是多少？（不计水对运动的阻力）

[解答] 设石块的质量为m，则石块体积V为 $\frac{m}{\rho_{石}}$，

在水中石块受重力和浮力的作用，合力

$$F_{合}=mg-F_{浮}$$

$$=mg-\frac{m}{\rho_{石}}\cdot\rho_{水}g$$

$$=mg(1-\frac{\rho_{水}}{\rho_{石}}),$$

因为 $F_{合}=ma$，

所以 $$a=\frac{F_{合}}{m}=\frac{mg(1-\frac{\rho_{水}}{\rho_{石}})}{m}=g(1-\frac{\rho_{水}}{\rho_{石}})$$

$$=9.8(1-\frac{1}{2.5})\text{米}/\text{秒}^2=5.88\text{米}/\text{秒}^2\text{。}$$

2211．一个质量为 m，体积为 V 的球，以恒定速度 μ 在密度为 ρ 的液体中下降。要使球以 $u_1=a\mu$ 的速度在同一液体中上升，需要用多大的力向上拉它？（粘性液体对球的运动阻力与球的速度成正比。）

[分析] 球在液体中以恒定速度 μ 下降所受的力为重力 mg，浮力 $F_{浮}=\rho Vg$、阻力 $f=ku$，它们的合力为零，可求得 k 的函数式。球在液体中匀速上升，所受的力为重力 mg、阻力 ku_1、浮力 $F_{浮}$、拉力 F、加速度为零，它们的合力为零可列出平衡方程。

[解答] 根据牛顿第二定律列方程

(1)球匀速下降[图(a)]

$$mg-\rho Vg-ku=0\text{；}k=\frac{mg-\rho gV}{u}=\frac{(m-\rho V)g}{u} \quad (1)$$

(2)球匀速上升[图(b)]

$$F+\rho gV-mg-ku_1=0 \quad (2)$$

已知 $$u_1=au \quad (3)$$

把(1)、(3)式代入(2)得 $F=(a+1)(m-\rho V)g$。

2212．有密度为 0.75×10^3 千克/米^{3}的物体，以 36 公里/小时的初速

度由河面竖直投入水中，在水中下降一段距离后，开始上浮，最后又回到河面，整个运动过程需要多少时间？下降多少米？（g 取 10 米/秒 ^{2}，水的阻力不计）

［分析］物体在水中所受的浮力大于物体的重力，所以在水中作匀减速运动，到物体的速度减小为零时开始上升作匀加速运动，在整个运动过程中加速度为恒量，方向向上，所以下沉的时间等于上升的时间。

［解答］设物体质量为 m 密度为 ρ，水的密度为 ρ_0。根据牛顿第二定律得

$$F_{浮} - mg = ma \qquad (1)$$

$$F_{浮} = \frac{m}{\rho} \cdot \rho_0 g \qquad (2)$$

由(1)、(2)式得 $\frac{m}{\rho} \cdot \rho_0 g - mg = ma$，

$$a = (\frac{\rho_0}{\rho} - 1)g = (\frac{10^3}{0.75\times 10^3} - 1)\times 10米/秒^2 = \frac{10}{3}米/秒^2，$$

由运动学公式 $v_0 = at_{下}$

得 $t_{下} = \frac{v_0}{a} = \frac{10}{\frac{10}{3}}秒 = 3秒$，

$$t = 2t_{下} = 3\times 2秒 = 6秒，$$

$$h = \frac{1}{2}at^2_{上} = \frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times 3^2米$$

$$= 15米。$$

2213．从高出深水湖的湖面 1.8 米处，自由下落一木球，这木球落到水面后，在水中要下沉多少米才开始上浮，在水中下沉时间为多少？（木球的密度 ρ_1 为 0.4×10^3 千克/米 ^{3}，水的密度 ρ_2 为 1×10^3 千克/米 ^{3}，g 取 10 米/秒 ^{2}，水对木球运动的阻力不计。）

［解答］木球落水时的速度

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$= \sqrt{2\times 10\times 1.8}米/秒 = 6米/秒。$$

落水后作匀减速运动，根据牛顿第二定律

$$F_{浮} - mg = ma，$$

$$a = \frac{F_{浮} - mg}{m} = \frac{V(\rho_2 g - \rho_1 g)}{V\rho_1} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}g$$

$$= \frac{1-0.4}{0.4}\times 10米/秒^2 = 15米/秒^2。$$

球在水中下沉的时间 $t = \frac{v}{a} = \frac{6}{15}秒 = 0.4秒$。

球在水中下沉的深度 $h = \frac{v^2}{2a} = \frac{6^2}{2\times 15}米 = 1.2米$。

2214．两个杯子质量各为 10 克，悬于线的两端，线跨过定滑轮[图(a)]，杯中分别放了 10 克和 20 克的水，如果水深都是 2 厘米，求两杯底受到水对它的压强各为多大？（线的重力、空气的阻力、滑轮的重力和摩擦力都不计，g 取 10 米/秒^2。）

［解答］根据牛顿第二定律

$T-(m_1+m_0)g=(m_1+m_0)a$ (1)

$(m_2+m_0)g-T'=(m_2+m_0)a$ (2)

其中 $T=T'$，

(1)、(2)式相加，整理得

$$a=(\frac{m_2-m_1}{2m_0+m_1+m_2})g$$
$$=\frac{(0.02-0.01)\times 10}{0.02+0.01+0.02}\text{米/秒}^2$$
$$=2\text{米/秒}^2。$$

取右边的杯中的水为研究对象，其受力情况如图(b)所示。根据牛顿第二定律有

$F-m_1g=m_1a$，

$F=m_1(g+a)$。

F 在数值上等于水对杯底的压力，所以可得压强

$$\rho_{右}=\frac{F}{S}=\frac{m_1(g+a)}{S}$$
$$=\frac{\rho Sh(g+a)}{S}=\rho h(g+a)$$
$$=10^3\times 2\times 10^{-2}\times(10+2)\text{帕}$$
$$=240\text{帕}。$$

同理讨论左边那个杯，有

$\rho_{左}=\rho h(g-a)$

$=10^3\times 2\times 10^{-2}\times(10-2)$帕

$=160$ 帕。

2215．用一根细线竖直悬挂一根长为 l 的均匀细木杆，置于水桶内水平面上方，如图(a)所示。当水桶缓慢上提时，细木杆逐渐浸入水中，当木杆浸入水中的部分超过某一值 l′时，木杆开始出现倾斜现象。求 l′。（已知木杆的密度为 ρ，水的密度为 ρ_0）

［解答］当木杆浸入水中后，除了受到重力 G 和线的拉力 T 外，还受到浮力 F 的作用。浮力的作用点在排开水的重心处，即图(b)中的 C′（DB 的中点）处。当有微小的扰动（这随时都可能发生）使杆发生微小的倾斜时，即由图(b)中虚线所示位置变为实线位置时，对悬点 A 来说，将出现重力和浮力的力矩 M_G 和 M_F，二者的方向是相反的。当木杆浸入水中较浅时，$M_G>M_F$，杆将重新回到平衡位置。当 $M_G<M_F$ 时，杆将继续倾斜。因此存在一个临界值 l'_c，当没入深度大于此临界值时，杆将开始出现倾斜现象。此临界值可令 $M_G=M_F$ 而解得。

设杆的截面积为 S。

$$M_G=lS\rho g\cdot\frac{1}{2}\sin\theta \qquad (1)$$

$$M_F=l'S\rho_0 g(l-\frac{l'}{2})\sin\theta \qquad (2)$$

当 $M_G=M_F$ 时，由(1)、(2)式，解得

$$l'=l(1\pm\sqrt{\frac{\rho_0-\rho}{\rho_0}}，$$

取合理值，得 $l'=l(1-\sqrt{\frac{\rho_0-\rho}{\rho_0}}$。

2216．一个密度ρ为 500 千克/米^{3}的光滑木块，在离水面高 1 米处，沿与水平面方向成 30°角的光滑斜面下滑，并进入水中，如图所示。当木块从水中开始上浮时，恰好达到池底，求(1)水池的深度。(2)木块从开始下滑到返回水面所需的时间。(3)木块返回水面时离开进入水面处的水平距离。（水的阻力不计）

[分析] 木块在斜面上下滑，到达水面前在重力 mg 和弹力 N 作用下作加速运动。而进入水中后，木块在浮力和重力的作用下作曲线运动，而它们的合力($F_浮$-G)的方向竖直向上，所以木块在水中沿水平方向作匀速运动，沿竖直方向作匀减速运动，木块开始上浮时，就是木块在竖直方向的速度为零的时刻。木块在斜面上和水中的受力情况如图所示。

[解答] (1)木块在斜面上，根据牛顿第二定律得

$mg\sin30°=ma_1,a_1=g\sin30°$。

进入水中时的速度 v 可由运动学公式得

$$v=\sqrt{2a_1\frac{h_0}{\sin30°}}=\sqrt{2gh_0}=\sqrt{2\times9.8\times1}米/秒=4.43米/秒。$$

进入水面时木块速度 v 的竖直分量 $v_y=v\sin30°$，

水平分量 $v_x=v\cos30°$。

木块在水中的加速度 a_2，可根据牛顿第二定律得 $\rho_水 gV-\rho_木 gV=\rho_木 Va_2$，

$$a_2=\frac{\rho_{水}-\rho_{木}}{\rho_{木}}\cdot g=\frac{1000-500}{500}\times g=g,$$

加速度的方向竖直向上。木块到达池底时的竖直分速度为零，设水池深为h，根据运动学公式得

$$h=\frac{v_y^2}{2a_2}=\frac{v^2\sin^2 30°}{2g}=\frac{2gh_0\sin^2 30°}{2g}$$

$$=h_0\sin^2 30°=\frac{1}{4}h_0=0.25\text{米。}$$

在斜面上滑行的时间

$$t_1=\frac{v}{g\sin 30°}=\frac{1}{\sin 30°}\sqrt{\frac{2h_0}{g}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{9.8}}\text{秒}$$

(2)木块在水中运动的时间

$$t_2=\frac{2v_y}{a_2}=\frac{2v\sin 30°}{a_2}=\frac{\sqrt{2gh_0}}{g}=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}=0.45\text{秒。}$$

木块从开始下滑到返回水面的时间

$$t=t_1+t_2=0.9\text{秒}+0.45\text{秒}=1.35\text{秒。}$$

(3)木块返回水面时离开入水面处的水平距离

$$s=v\cos 30°\cdot t_2$$

$$=4.43\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 0.45\text{米}$$

$$=1.73\text{米。}$$

2217．滑轮沿着与水平成〈角的绳索 AB 无摩擦地滑下，滑轮上挂着水桶，水桶内水的高度等于 h。滑轮运动时，桶底所受到的压强等于多少？

［分析］滑轮沿绳运动时，水桶内的所有液元都沿着与水平面成α角的方向作直线运动，这与物体沿斜面的运动一样，因此所有液元均以加速度 a=gsinα运动，在液面上任取一小液元，其加速度也应为 gsinα，故液面与水平面（静止时）的夹角为α，即液面与斜向绳索平行。这里的加速度 a=gsinα是重力在绳索方向的分力所产生的。桶底对水的压力和运动方向垂直，与重力在垂直绳索方向的分力平衡，即 N=mgcosα。

［解答］据题意，m=ρSh，其中 S 是面积，ρ是水的密度，根据牛顿第三定律，水对桶底的压强

ρ=N/S=ρshgcosα/S=ρhgcosα。

2218．质量为 100 克的木块浮在水面上，求下列三种情况下，木块受到的浮力大小和木块浸入水中部分的体积。

(1)盛水容器静止不动；

(2)盛水容器以a为$\frac{g}{2}$匀加速上升；

(3)盛水容器以a为$\frac{g}{2}$匀加速下降。（g取10米/秒^2）

[解答] (1)作出木块受力情况如图。F 为浮力。mg 为木块重力，则

$$mg-F=0, F=mg=0.1\times10\text{牛}=1\text{牛},$$

$$F=\rho_{水}V_{排}g，V_{排}=\frac{F}{\rho_{水}g}=\frac{1}{1\times10^3\times10}\text{米}^3=10^{-4}\text{米}^3。$$

(2)根据牛顿第二定律列出方程

F-mg=ma，F=m(g+a)，

这时，水处于超重状态，被木块排开的水的“重力”是$\rho_{水}\cdot V_{排}(g+a)$。

$$F=\rho_{水}V_{排}(g+a),$$

$$V_{排}=\frac{m}{\rho_{水}}=10^{-4}\text{米}^3\text{不变。}$$

(3)列出方程

$$mg-F=ma, F=m(g-a),$$

$$F=\rho_{水}V_{排}(g-a),$$

$$V_{排}=\frac{m}{\rho_{水}}=10^{-4}\text{米}^3\text{，不变。}$$

2219．两个气球分别将同样的重物升起，第一个气球以 a 为 g/2 的加速度运动，第二个气球作匀速运动。两个气球内的气体密度 ρ 相同，并等于空气密度 ρ_1 的一半，如果第一个气球的体积为 V_1，求第二个气球的体积 V_2 是多大？已知两气球外壳的质量相同，空气阻力不计。

[解答] 作出第一个气球的受力图(a)，根据牛顿第二定律列出方程

$$F_1-(m_B+m_{A1})g-m_Mg=(m_B+m_{A1}+m_M)a。$$

$$F_1=V_1\rho_1g, m_{A1}=\rho V_1，\rho=\frac{\rho_1}{2}，a=\frac{g}{2},$$

$$V_1\rho_1g-(m_B+\frac{\rho_1}{2}V_1)g-m_Mg=(m_B+\frac{\rho_1}{2}V_1+m_M)\frac{g}{2} \quad (1)$$

解(1)式得

$$m_B+m_M=\frac{V_1\rho_1}{6} \quad (2)$$

作出第二个气球的受力图(b)，根据物体平衡条件列出方程

$F_2-(m_B+m_{A2})g-m_Mg=0$。

因为 $F_2=V_2\rho_1 g, m_{A2}=\rho V_2, \rho=\frac{\rho_1}{2}$,

所以 $V_2\rho_1 g-(m_B+\frac{\rho_1}{2}V_2)g-m_M g=0$,

$$\frac{1}{2}V_2\rho_1=m_B+m_M \tag{3}$$

比较(2)、(3)式得

$$\frac{1}{2}V_2\rho_1=\frac{V_1\rho_1}{6},$$

$$V_2=\frac{V_1}{3}。$$

2220．如果质量 m 为 0.5 千克、直径 d 为 24 厘米的球在外力作用下从水面沉到 h 为 4 米深处，球与水组成系统势能改变了多少？球的形变不计。

[解答] 球下降 h 势能变化量为-mgh，

与球体积相等的水上升 h 势能变化量为 $V_{球}\rho_{水}gh$，

系统势能增量

$$\begin{aligned}\triangle E_p&=V_{球}\rho_{水}gh-mgh\\&=(V_{球}\rho_{水}-m)gh\\&=[\frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3\rho_{水}-m]gh\\&=[\frac{\pi d^3}{6}\rho_{水}-m]gh\\&=[\frac{3.14\times0.24^3}{6}\times1\times10^3-0.5]\times9.8\times4\text{焦}\\&=264\text{焦},\end{aligned}$$

即系统势能增加 264 焦。

2221．质量 m 为 100 克的玻璃球从甘油表面由静止开始下沉到深度 H 为 1 米处。求：(1)玻璃球与甘油组成系统的势能变化量 $\triangle E_p$；(2)玻璃球在 1 米处时的即时速度。（已知甘油的密度 $\rho_{甘}$ 为 1.2×10^3 千克/米 ^{3}，玻璃的密度 $\rho_{玻}$ 为 2.4×10^3 千克/米 ^{3}，甘油的粘滞阻力不计。）

[分析] 玻璃球下沉 H 势能减少 mgH，同时与玻璃球同体积的甘油上升 H，势能增加 $m_{甘}gH$。系统势能变化量是二者之和。

[解答] (1)玻璃球势能变化量为-mgH，

甘油势能变化量为 $m_{甘}gH=(\frac{m}{\rho_{玻}}\cdot\rho_{甘})gH$，

所以系统势能变化量

$$\triangle E_p=(\frac{m}{\rho_{玻}}\cdot\rho_{甘})gH-mgH$$

$$=mgH(\frac{\rho_{甘}}{\rho_{玻}}-1)$$

$$=0.1\times9.8\times1\times(\frac{1.2}{2.4}-1)\text{焦}$$

$$=-0.49\text{焦},$$

负号说明系统势能减小。

(2)(解一)系统势能减小转化为玻璃球的动能，所以

$$\frac{1}{2}mv_{球}^2=0.49,$$

$$v=\sqrt{\frac{2\times0.49}{0.1}}\text{米/秒}=3.13\text{米/秒}。$$

(解二)玻璃球下沉，加速度为a

$$mg-F=ma\text{（式中}F\text{是浮力）}$$

$$a=\frac{mg-F}{m}=\frac{mg-(\frac{m}{\rho_{玻}}\cdot\rho_{甘})g}{m}$$

$$=g(1-\frac{\rho_{甘}}{\rho_{玻}})$$

$$=9.8\times(1-\frac{1.2}{2.4})\text{米/秒}^2=4.9\text{米/秒}^2,$$

$$v^2=2aH,$$

$$v=\sqrt{2aH}=\sqrt{2\times4.9\times1}\text{米/秒}$$

$$=3.13\text{米/秒}。$$

2222．将质量为 m、半径为 R 的橡皮球浸入水中，直到深度 h 再放开。求该球在空气中跳起的高度。

[解法一] 设球在空气中跳起的高度为 H,从图(a)所示可知，该球机械能的增加为

$$\triangle E_{球}=mg(g+H)。$$

当球从水面下 h 处，上浮至水面的同时，有和球的体积相同的水从液面下降至 h 处，这部分水的势能减少，换取球的势能和动能的增加；当球自水面上升到 H 高度，是以它本身的动能减少来换取势能的增加。设与球同体积水的质量为 M，其机械能的减少为

$$-\triangle E_{水}=Mgh，M=\rho_{水}V_{球}=\rho_{水}\frac{4}{3}\pi R^3，$$

$$\triangle E_{水}=-\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{水}gh。$$

根据机械能守恒有

$$\triangle E_{球}+\triangle E_{水}=0，$$

$$mg(h+H)=\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{水}gh,$$

$$H=\frac{(\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{水}-m)\cdot h}{m}。$$

［解法二］球在水中的受力情况，如图(b)所示。浮力 F 的大小为$\rho_{水}gV_{球}$，根据牛顿第二定律

$$\rho_{水}gV_{球}-mg=ma，$$

$$a=\frac{\rho_{水}V_{球}g-mg}{m}=\frac{(\rho_{水}V_{球}-m)\cdot g}{m} \qquad (1)$$

球从h深入加速到水面时的速度为v

$$v^2=2ah \qquad (2)$$

球离开水面作竖直上抛运动，它上升高度为H

$$v^2=2gH \qquad (3)$$

从(2)、(3)式知

$$2ah=2gH,$$

$$H=\frac{ah}{g} \qquad (4)$$

把(1)式代入(4)，

$$H=\frac{(\rho_{水}V_{球}-m)g\cdot h}{mg}=\frac{(\rho_{水}V_{球}-m)h}{m}$$

$$=\frac{(\frac{4}{3}\pi R^3\rho_{水}-m)h}{m}。$$

2223．如图所示，粗细均匀的 U 形玻璃管内装有某种液体，设法使一端的液面高于另一端液面，由此液面开始自由振动。设摩擦不计。

(1)试证明液柱的振动是简谐振动；

(2)若 U 形管内液体柱的总长度为 l，求液柱的振动周期多大（设液体的密度为ρ，玻璃管的横截面为 S。）

［解答］液面的平衡位置为 0，这时玻璃管内的液面等高。设液面离开平衡位置的位移为 x，并设向上方向为 x 轴正方向，液体受到指向平衡位置的力 F，就是右管高出左管的液柱的重力，方向与 X 方向相反；则

$$F=-2\rho gS\cdot x=-kx \qquad (1)$$

因为 $k=2\rho gS$ 为一常量，所以上式表明液柱受到一个大小与位移 x 成正比，方向与位移方向相反的作用力，因此液柱的振动是简谐振动。

(2)简谐振动的周期公式是

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

式中 k=2ρSg，因为作振动的是整个 U 形管的液体，所以 m 为液柱总质量 m=ρSl。

所以 $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho Sl}{2\rho Sg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2g}}。$$

2224．边长 l 为 25 厘米，密度ρ为 0.80×10^3 千克/米^3 的木块，浮在水面上。今把木块完全压入水中并使上表面与水平面相平，然后突然放手，如不计水对木块的阻力，问木块将作什么振动？写出木块的振动方程（水的密度ρ′为 1.0×10^3 千克/米^3）。

[分析] 木块开始时浮在水面上处于平衡状态，它所受浮力与重力平衡。设浸没在水中部分高度为 b，木块的横截面为 S，浮力 F 为 bSρ′g，重力为$lS\rho g$，求得$b = \frac{\rho}{\rho'}l$，露出水面部分高度为a，$a = l - b = l - \frac{\rho}{\rho'}l$。如图所示，O点为木块振动的平衡位置，也是坐标轴Y的原点，在振动中木块处于某一位置时，由木块中 C 点位置的高低求得浮力与重力的合力，经分析可知是简谐振动。

[解答] C 点对水面 O 点的位移为 y，木块所受合力为浮力与重力的差，沿 x 轴方向的合力为

F=-(b+y)ρ′Sg+lSρg

=-Sρ′gy=-ky。（其中 k=Sρ′g）

由上式可知 F 与位移 y 成正比而方向相反，所以木块作简谐振动。

由周期公式 $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

得 $$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{S\rho' g}{\rho Sl}} = \sqrt{\frac{\rho' g}{\rho l}},$$

又因 $$b = \frac{\rho}{\rho'}l = \frac{0.80\times10^3}{1.0\times10^3}\times0.25\text{米} = 0.20\text{米},$$

所以 $$\omega = \sqrt{\frac{g}{b}} = \sqrt{\frac{9.80}{0.20}}\text{秒}^{-1} = 7\text{秒}^{-1},$$

简谐振动方程为

$$y = A\cos(\omega t + \varphi),$$

式中的A为振幅，就是前面求得的a，即

$$A = a = l - b = 0.05\text{米},$$

当$t = 0$时，$y = +0.05$米，所以有

$$0.05\text{米} = 0.05\cos(0 + \varphi)\text{米}。$$

$$\cos\varphi = 1, \varphi = 0。$$

所以木块振动方程为

$$y = 0.05\cos 7t\text{米}。$$

2225．如图(a)所示，细绳两端分别挂以砝码和冰块，冰块部分浸入水中，天平处于平衡。问：在冰熔解过程中，天平是否仍保持平衡？为什么？（设滑轮光滑）

[解答] 设冰、水、盛水的杯和砝码的质量分别为 m_1、m_2、m_3 和 M，并把冰、水、杯看作一个整体，画出这个整体和砝码的受力图(b)。

因 $T+N=(m_1+m_2+m_3)g$，

$T'+N'=Mg$。

$T=T'$，天平平衡时，两托盘对物体的支承力相等，即 $N=N'$，

所以 $(m_1+m_2+m_3)g=Mg$ (1)

当冰熔解时，冰的质量减少△m，等于水的质量增加△m，天平左盘上整体质量未改变，仍为 $m_1+m_2+m_3$。

绳子的张力随冰的熔解而减小△T，则这时绳的张力变为(T-△T)和(T′-△T)，且

$T-\triangle T=T'-\triangle T$ (2)

设这时天平左盘对物体的支承力为 N_1，则

$N_1=(m_1+m_2+m_3)g-(T-\triangle T)$ (3)

天平右盘对物体的支承力为 N_1'，则

$N_1'=Mg-(T'-\triangle T)$ (4)

从(1)、(2)式可知，(3)、(4)式等号右边的项是相等的，所以

$N_1=N_1'$。

这表明在冰的熔解过程中，天平左、右托盘对物体的支承力 N 与 N′同时发生变化，但始终相等，天平仍保持平衡。

说理和论证题

2226．将一玻璃杯压入水中，第一次杯底朝天，第二次杯底向下（未进水），杯端面都刚好在水表面上，如图所示。试问在这两种情况下对杯子所作的功是否相同？

[解答] 判断这个问题的最简单方法是从液面的升高来考虑。第一种情况，杯口朝下，压入水中时，杯内空气受到压缩，部分水进入杯内。第二种情况，因杯口朝上，压入时水不能进入杯内。比较两种情况，不难发现在第二种情况下杯子排开的液体比第一种多，因而水面升高较多，因此在第二种情况下，对杯子所作的功较第一种情况为多。

2227．做托里拆利实验时，如果把盛满水银的玻璃管的开口端不放入水银槽里，而放入水槽中，实验可以做得成吗？

[解答] 实验做不成功。因为水银的密度大于水的密度，水银在水中要下沉，水升至水银面，直至水银全沉在水槽底部，水充满玻璃管。

2228．如图所示，在瓶子液面下端的侧壁上，有三个带塞的小孔 A、B、C。有一根两端开口的玻璃管通过软木塞竖直插入瓶内水中，管中液面与 B 孔等高，瓶内空气压强比大气压小，问：(1)只拔去 A 孔木塞；(2)只拔去 B 孔木塞；(3)只拔去 C 孔木塞，会看到什么现象？

[解答] (1)由于 A 孔右边压强小于外界大气压，当拔去 A 孔木塞后，水不流出，空气反而从 A 孔被吸入瓶内；

(2)由于 B 孔左边与右边压强相等，都等于大气压，所以水不流出，空气也不被吸入瓶内；

(3)由于 C 孔右边压强大于左边大气压，水从 C 孔流出。

2229．一个锥柱形玻璃管下端用板 AA′盖住，浸在水中，AA′板被水的压力托住不下落。如果取 1 千克的水注入管内，这些水的压力刚好使 AA′板下沉，如图所示。问：

(1)假如不注水,而改用 1 千克的砝码压在 AA′板上,板会不会下沉？

(2)假如取 1 千克的水银注入管里，AA′板会不会下沉？

(3)假如把 1 千克的煤油注入管里，AA′板会不会下沉？

[解答] (1)由于锥柱形玻璃管截面下端大，上端小，当倒入 1 千克水时，AA′板受到的水的压力要大于 1 千克力，这时 AA′板刚好下沉，放上 1 千克砝码时 AA′板所受压力仅为 1 千克力，因此不会下沉。

(2)当倒入 1 千克水银时，它对板的压力比 1 千克水对板的压力小，所以 AA′板同样不会下沉。

(3)当倒入 1 千克煤油时，煤油对板的压力比 1 千克的水对板的压力要大，因此 AA′板下沉。

2230．有一平底 U 形管，其左、右管横截面积都是 S_1，底面积为 S_2。将密度为ρ的液体倒入管中，液高 h，如图志示。现把质量为 m，密度小于液体密度的木块投入左管，问：

(1)左、右两管液面高度是否在同一水平面上？

(2)左、右两管液面高度是否发生变化？

(3)U 形管底部所受的液体压力是否发生变化？

[解答] (1)因为左、右管是同一种液体，根据连通器原理，两管液面高度仍在同一水平面上。

(2)均发生了升高变化，设液面升高为 H，则有

$$2HS_1=V \qquad (1)$$

V 为木块浸入液体中的体积，根据阿基米德定律有

$$\rho Vg = mg, \qquad V=\frac{m}{\rho} \qquad (2)$$

把(2)式代入(1)式得

$$H=\frac{m}{2S_1\rho}。$$

(3)发生了变化。未投入木块时，U 形管底部受到的液体压力为

$$F=\rho S_2=h\rho gS_2。$$

木块投入后，U 形管底部受到的液体压力为

$$F'=(H+h)\rho gS_2。$$

压力变化值为

$$\begin{aligned}\triangle F &= F'-F\\ &=(H+h)\rho gS_2-h\rho gS_2\\ &=H\rho gS_2\\ &=\frac{m}{2S_1\rho}\cdot\rho gS_2\\ &=mg\cdot\frac{S_2}{2S_1}。\end{aligned}$$

2231．潜水艇迅速下沉到泥土或沙土的深海海底时，有时竟像被粘住

的，升不起来。试解释这种现象。

［解答］潜水艇没入水中后，在它四周都有水，因水的压强随深度而增加，所以作用于底部的压力总大于上顶部的压力，这个压力差就是潜艇受到的水对它的向上浮力。当潜艇落到一般凹凸不平的海底时，浮力的存在可使它上浮。如果它迅速落到泥土或沙土的平坦海底时，将艇底的水排挤出去，以致艇底不再有与外面的海水相通的水层存在，于是底面就没有直接受海水的压力，浮力消失，而潜艇顶面仍受有水的向下压力，如果是很深，这个压力很大，就把潜艇紧紧地压进泥里，就像被粘住一样。

2232．在空气中重力相等的铁块和铜块，在水中称哪一个重？在真空中称哪一个重？

［解答］铜的密度是 8.9×10^3 千克/米 ^{3}，铁的密度是 7.8×10^3 千克/米 ^{3}，当在空气中称重一样时，说明铁块的体积比铜块的体积大。所以在水中铁块受到的浮力比铜块大，故在水中称时，铜块重铁块轻。如果在真空中称时，空气浮力消失，铁块比铜块重了，这是因为原先在空气中时，铁块受到的空气浮力比铜块受到的空气浮力要大。

2233．水桶的水面上浮着一块内嵌有石头的冰块，如图所示，问在冰块熔化后，水面的高度有何变化？如果这冰块内嵌着的是木头，则冰熔化后水面高度又将怎样变化？

［解答］要判断冰在熔化前后水面高度有何变化，主要看冰块浸没在水中的体积在熔化前后是否发生变化；体积变大水面上升，体积变小水面下降，体积不变水面高度没有变化。

冰块中嵌石头，在冰块没有熔化时，设冰块浸没在水的体积为 V_0，根据题意有

$$F_{浮}=G_{冰}+G_{石},$$

$$V_0\rho_{水}g=V_{冰}\rho_{水}g+V_{石}\rho_{石}g,$$

$$V_0=\frac{\rho_{冰}}{\rho_{水}}\cdot V_{冰}+\frac{\rho_{石}}{\rho_{水}}\cdot V_{石} \qquad (1)$$

设冰块熔化成的水和石块的总体积

$$V_0{}'=\frac{\rho_{冰}gV_{冰}}{\rho_{水}g}+V_{石},$$

$$V_0{}'=\frac{\rho_{冰}V_{冰}}{\rho_{水}}+V_{石} \qquad (2)$$

比较(1)和(2)两式

$$\frac{\rho_{石}}{\rho_{水}}>1,\ V_0>V_0{}',$$

因此水面下降。

冰块中含有木头，设熔化前浸没在水中的体积为V_1，用上述同样方法可得

$$V_1=\frac{\rho_{冰}}{\rho_{水}}\cdot V_{冰}+\frac{\rho_{冰}}{\rho_{水}}\cdot V_{木} \qquad (3)$$

冰块熔化成水的体积为

$$\frac{\rho_{冰}V_{冰}g}{\rho_{水}g}=\frac{\rho_{冰}V_{冰}}{\rho_{水}}。$$

木头浸没在水中的部分体积（因木头浮在水面，这一体积只是木头体积的一部分）为

$$\frac{\rho_{木}V_{木}g}{\rho_{水}g}=\frac{\rho_{木}V_{木}}{\rho_{水}}。$$

则冰块熔化成的水和木头，浸没在水中的部分的总体积

$$V'=\frac{\rho_{冰}V_{冰}}{\rho_{水}}+\frac{\rho_{木}V_{木}}{\rho_{水}} \qquad (4)$$

比较(3)和(4)两式，

可知 $V_1=V_1'$，

因此水面高度不变。

2234．两端封闭的 U 形管内装有水银，两端水银面高度差如所示，现令其竖直下落，问两端水银面高度差有没有变化？

[解答] 当 U 形管竖直下落过程中，处在“失重”状态，这时管内水银不会产生静压强。由于起初左管水银面上的气体压强大于右管水银面上的气体压强，为了使 U 形管两端的气体压强达到平衡，右管气体柱要减小，水银面上升，左管气体柱要扩大水，水银面下降。

2235．质量均匀分布的长方木条，竖直地放进水中，它会十分快地翻转到水平位置。试解释这一现象。

[解答] 长方木条的重心位置 O 高于浮力 F_A 的作用点 A，因为 F_A 作用于长方木条浸入水中部分的重心。由此可见，当长方木条稍微偏离竖直线，就能引起转动力矩，它能使长方木条翻转到水平位置。

2236．将挂在细线上的金属球浸在盛有液体的玻璃杯中，如图所示，小球由位置 1 提到位置 2 处，小球势能增加了，但与小球同体积的液体，从位置 2 降到位置 1 处，液体的势能减少了，整个系统（球和液体）的势能改变了，怎样从这些能量的关系导出阿基米德定律？

[分析] 球和液体看成是一个系统，它的势能改变可看作两部分：物体上升高度 h，物体的势能增加了 mgh；原来在 2 位置上的同体积液体下降到 1 位置，液体的势能减少了 $m'gh=\rho_0 Vgh$，m' 为这部分液体的质量，ρ_0 为它的密度。根据功能原理可知，外力对系统作的功等于系统机械能的增量，即

$$W=\triangle E_p+\triangle E_k,$$

$$\triangle E_k=0,\ W=\triangle E_p。$$

[解答] $W=Fh$，$\triangle E_p=mgh+(-m'gh)$，

$$Fh=mgh+(-m'gh)$$

$$=mgh-\rho_0 Vgh,$$

$$F=mg-\rho_0 Vg \quad (1)$$

根据物体的受力情况可知

$$F=mg-F_{浮} \quad (2)$$

比较(1)式与(2)式，得

$$F_{浮}=\rho_0 Vg,$$

上式就是阿基米德定律的数学表达式。

2237．有两个大小、质量一样的气球，里面装着一样多的氢气。一个气囊用伸缩性极小的橡皮布做的，一个是用可伸缩的橡皮膜做的，它们所升的高度是否相同？（设气囊是封闭的，并且不会爆破。）

[解答] 因为 $F_{浮}=V(\rho_{大}-\rho_{氢})g$，

又 $F_{浮}-mg=ma$，

所以 $V(\rho_{大}-\rho_{氢})g-mg=ma$。

(1)用橡皮布做的气囊，V 不变、$\rho_{氢}$不变，$\rho_{大}$随高度略有减小，a 减小（方向仍向上），v 增大。

当 $V(\rho_{大}-\rho_{氢})g=mg$ 时，a=0，v 最大。

再上去 $\rho_{大}$进一步减小，a 增大（方向将向下），v 减小。

所以气球是先作加速度向上，大小不断减小的加速运动，然后作减速向上的运动，直到 v=0。

(2)用可伸缩的橡皮膜做的气囊，V 可变。

①气球开始的 V 决定于材料及 $p_{氢}$、$p_{大}$，

②$V(\rho_{大}-\rho_{氢})g-mg=ma$。

上升过程中，$\rho_{大}$减小，$p_{大}$减小，$p_{氢}$也减小。因为 pV=C,所以 V 增大。如果不破，可一直上升。

2238．气垫船的重力为G，试证从船身下面将水排开的体积$V=\frac{G}{\rho g}$。（ρ为水的密度）

[证明] 设气垫船的底是平的，其面积为 S。当气垫船向下喷射高压气体时，在船与水面之间形成一个“气垫”。若要船被气垫托起不下沉，它必须受到来自下面（水）的向上压力，有

$$\triangle p\cdot S=G \qquad (1)$$

$\triangle P$ 为气压。

根据牛顿第二定律，船底面积范围内的水，也应存在这种压力，数值上也等于$\triangle p\cdot S$。我们在水中划出如图所示的那样形状的“容器”ABCD，它如同“连通器”，并研究其中的液体的情况。因为 B、C 在同一水平面上，所以

$$p_C=p_B \qquad (2)$$

$$p_A=p_{大气压}，p_D=p_{大气压}+\triangle p。$$

$$p_C=p_D+\rho gh_{CD}=P_{大气压}+\triangle p+\rho gh_{CD}，$$

$$p_B=p_A+\rho gh_{AB}=p_{大气压}+\rho gh_{AB}。$$

(2)式可作

$$p_{大气压}+\triangle p+\rho gh_{CD}=p_{大气压}+\rho gh_{AB}，$$

$$\triangle p=\rho g(h_{AB}-h_{CD})=\rho gh，$$

$$h=\frac{\triangle p}{\rho g} \qquad (3)$$

整个“被排开的”体积

$$V=h\cdot S \qquad (4)$$

联立(1)、(3)、(4)式得

$$V=\frac{G}{\rho g}。$$

2239．一个上下截面 S 相同的水桶（如图），里面水深为 h_1。投进一个重 G 的木块后，水深增为 h_2。证明 $G=(h_2-h_1)\rho_水 gS$。

[证明] 未投进木块时，桶内水受到向下重力和桶底对它向上压力（弹力）的作用而平衡，所以

$$G_水=\rho_水 gh_1S \qquad (1)$$

投进木块，木块浮在水面，木块受向下重力 G 和水对它浮力 F 而平衡，所以

$$F=G \qquad (2)$$

这时水受向下重力 $G_水$、木块对它向下作用力 F'（是浮力 F 的反作用力）和桶底对它向上压力 $\rho_水 gh_2S$，三力而平衡，所以

$$G_水+F'=\rho_水 gh_2S，$$

$$F'=F。$$

$$G_水+F=\rho_水 gh_2S \qquad (3)$$

把(1)、(2)式代入(3)式，

$$\rho_水 gh_1S+G=\rho_水 gh_2S，$$

$$G=\rho_水 g(h_2-h_1)S。$$

[提示] 上面(1)、(3)式只适用于侧壁是竖直的容器，否则的话侧壁对水的压力不在水平方向上，因而在竖直方向上也有分力。

2240．如图所示，有一根两端密封的截面积处处相等的玻璃管，如果它能竖直地浮在两种不同密度的液体中，管子浸入密度为ρ_1的液体中的高度为h_1，浸在密度为ρ_2的液体中的高度为h_2，试证明

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{h_2}{h_1}。$$

[证明] 从(a)图可知，浮力等于重力，所以

$$h_1S\rho_1g=G \qquad (1)$$

从(b)图可知，浮力等于重力，所以

$$h_2S\rho_2g=G \qquad (2)$$

从(1)、(2)式可得

$$h_1S\rho_1g=h_2S\rho_2g,$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{h_2}{h_1}。$$

2241．一木块浮于水面，当质量为m的铁块放在上面时，木块恰在水面下[图(a)]；当质量为M的铁块系于木块下端时，则木块也恰好在水面下[图(b)]。（铁的密度为7.8×10^3千克/米^3）求证：

$$\frac{m}{M}=\frac{6.8}{7.8}。$$

[证明] 从图(a)可知，木块和铁块的重力等于木块所受的浮力。设木块质量为m′，密度为ρ′

所以 $$mg+m'g=\frac{m'}{\rho'}\cdot\rho_水\cdot g \qquad (1)$$

从图(b)可知，木块和铁块的重力等于木块和铁块所受的浮力，所以

$$Mg+m'g=\left(\frac{m'}{\rho'}+\frac{M}{\rho_铁}\right)\cdot\rho_水\cdot g,$$

$$Mg+m'g-\frac{M}{\rho_铁}\rho_水 g=\frac{m'}{\rho'}\rho_水 g \qquad (2)$$

从(1)、(2)式可得

$$mg+m'g=Mg+m'g-\frac{M}{\rho_铁}\cdot\rho_水 g,$$

$$mg=M\left(1-\frac{\rho_水}{\rho_铁}\right)g,$$

$$\frac{m}{M}=\frac{\rho_铁-\rho_水}{\rho_铁}=\frac{7.8\times10^3-1\times10^3}{7.8\times10^3}$$

$$=\frac{6.8}{7.8}。$$

2242．由两种不同的均匀物质制成的半球组成的一个实心球，如图所

示。其密度分别ρ_1、ρ_2，如果实心球完全浸入静水中能保持加速度等于零，求证：两种物质密度之和的算术平均值恰等于水的密度

$$\frac{\rho_1+\rho_2}{2}=\rho_{水}。$$

［证明］实心球完全浸入水中时 a=0，所以实心球的重力 G 必等于它受到的浮力 F

$$G=\rho_1\times\frac{V}{2}g+\rho_2\times\frac{V}{2}g=V(\frac{\rho_1+\rho_2}{2})g,$$

$$F=V\rho_{水}g,$$

$$V(\frac{\rho_1+\rho_2}{2})g=V\rho_{水}g,$$

$$\frac{\rho_1+\rho_2}{2}=\rho_{水}。$$

动 力 学

填充题

2243．用来测量流体速度的毕托管流速计，它的构造如图所示，它是由两个连在一起的同轴细管组成，内管在 A 处开口，另一端和直立玻璃管 T′相连通；外管两头做成流线型，使管子放入后对待测液体的流动没有什么影响，管侧开小孔 M 与管口 A 等高。使用时，将流速计放在液流中，让管轴与流速方向一致，A 端迎着液流，孔 M 位于待测流速处，液体由 M 进入外管。在液流稳定后若测得两管液面的高度差为△H，那么该处的流速就是$v=\sqrt{2g\triangle H}$。

2244．人靠近疾驶的火车时，会出现被吸向火车的现象，这是由被火车带动的空气流速大，压强小造成的。

2245．水壶向茶杯冲水，从水壶流出的水流下落时会逐渐变细，这是由水流受重力作用不断加速，在流量不变的前提下，由于流速变大横截面积变小的缘故。

计算题

2246．有一只盖子带孔的不透明容器，内盛水 H 高，放在高 h 的台子边缘处，如图所示。在靠近容器底部的侧壁开有小孔并用木塞塞紧。请你想一个办法求出容器内的水高 H 的大小（不能掀盖测量）。

［解答］分以下步骤可求得 H 的大小。

(1)拔去木塞，水从侧壁小孔喷出，做平抛运动，测出水刚着地处距小孔的水平距离 s；

(2)因为水做平抛运动，所以水下落时间

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}。$$

(3)求出水从小孔喷出的初速度

$$v=\frac{s}{t}=\frac{\varepsilon\sqrt{g}}{\sqrt{2h}}。$$

(4)根据托里拆利定理求取 H，

$$v=\sqrt{2gH},$$

$$H=\frac{v^2}{2g}$$

$$=\frac{1}{2g}\cdot\frac{s^2g}{2h}=\frac{s^2}{4h}。$$

2247．自来水管的半径是 2 厘米，水在管中的流速是 30 厘米/秒，求管内的流量。

［解答］流量是指单位时间内流过管内任一截面的流体体积，所以它的大小为 Sv。

$S=\pi r^2=3.14\times 2^2$ 厘米^2=12.56 厘米^2，

流量=Sv=12.56×30 厘米^3/秒=377 厘米^3/秒。

2248．水平自来水管粗处的直径是细处的 3 倍，如果水在粗处的流速是 8 厘米/秒，在细处的流速是多少？（假定水在管子中的流动是稳流）

［解答］因为水具有不可压缩性，根据液流的连续性原理，有

$$S_1v_1=S_2v_2,$$

$$\therefore\quad v_2=\frac{S_1v_1}{S_2}=\frac{\pi(\frac{3d}{2})^2\times 8}{\pi(\frac{d}{2})^2}\text{厘米/秒}$$

$$=72\text{厘米/秒}。$$

2249．水流以流速 v 为 10 米/秒，从截面积 S 为 4 厘米^{2}的管内水平射在竖直的墙上。水流对墙壁的压力多大？设水和墙壁碰撞后沿墙壁流动。

［分析］设墙壁对水流的作用力为 F，则在△t 内，墙壁对水流的作用力的冲量为 F·△t，根据动量定理可知它的大小等于△t 时间内水流的动量减少。水在△t 内流过管的横截面积的质量 m 为 $vS\rho_{水}\triangle t$。从题意可知，水的水平末速度等于零。所以△t 内水流的动量减少为$\triangle p=mv=v^2S\rho_{水}\triangle t$。

［解答］$F\cdot\triangle t=v^2S\rho_{水}\triangle t$，

$F=v^2S\rho_{水}$

$=10^2\times 4\times 10^{-4}\times 1\times 10^3$ 牛=40 牛。

根据牛顿第三定律,水流对墙壁的作用力在数值上等于墙壁对水流的作用力，即 40 牛。

2250．水均匀地流入池内，它的流量 Q 是 2 升/秒，池底有面积 S 为 2 厘米^{2}的小孔,试问池内的水面能保持多大的高度 h？(g 取 10 米/秒^2)

［分析］池内水面高度保持不变的条件是，从小孔流出的水量等于流入池内的水流量。而流出的水量，等于水从小孔流出的速度 v 乘以小孔的面积。

［解答］根据托里拆利定理，水从小孔流出速度$v=\sqrt{2gh}$。

$$\sqrt{2gh}\cdot S=Q,$$
$$2ghS^2=Q^2,$$
$$h=\frac{Q^2}{2gS^2}$$
$$=\frac{(2\times10-3)^2}{2\times10\times(2\times10^{-4})^2}\text{米}$$
$$=5\text{米}。$$

2251．在水平桌面上，放着一个盛水的宽口容器。容器里的水的高度为 h，水和容器总重为 G。靠近容器底的侧壁上，有一个面积为 S 的用塞子塞着的小孔。问如果打开塞子，容器与桌面之间的摩擦系数为多大时容器仍保持静止？

［解答］根据托里拆利定理，从小孔流出的水速 $v=\sqrt{2gh}$，在时间 $\triangle t$ 内，水流的质量 $\triangle m=\rho vS\triangle t=\rho S\times\sqrt{2gh}\times\triangle t$。

设与孔相对的容器的侧壁通过水给水流△m 的力为 F，如图所示中初态为(a)，末态为(b)，△m 在力 F 作用下经△t 后得到的冲量为

$$F\cdot\triangle t=\triangle mv-\triangle mv_0=\triangle mv-0,$$

所以 $$F\cdot\triangle t=\rho S\sqrt{2gh}\cdot\sqrt{2gh}\cdot\triangle t,$$

$F=2\rho ghS$（注意这个值是静压力 ρghS 的两倍）。

根据牛顿第三定律,水流△m 以同样大小的力通过水作用在容器侧壁上。为使容器保持静止必须有条件 $F\leq\mu G$。

所以 $$\mu\geq\frac{F}{G},$$

即 $$\mu\geq\frac{2\rho ghS}{G}。$$

2252．直径为 D 的圆柱形容器的底上，有一直径为 d 的小圆孔。求容器中水面下降的速度 v_1，对水面高度的关系。

［分析］本题可根据能量守恒和连续原理求解。

［解答］列出伯努方程

$$h_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=h_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g},$$
$$h_2=0,h_1=h,p_1=p_2=p_{\text{大气压}},$$
$$v_1^2+2gh=v_2^2\qquad(1)$$

列出水流的连续性方程

$$S_1v_1=S_2v_2`,$$
$$v_2=\frac{S_1v_1}{S_2}\qquad(2)$$

把(2)式代入(1)式得

$$v_1=\frac{S_2\sqrt{2gh}}{\sqrt{S_1^2-S_2^2}}=\frac{d^2\sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4-d^4}}，$$

因为 $d^4 \ll D^4$，

所以 $v_1 \approx \frac{d^2}{D^2}\cdot\sqrt{2gh}$。

2253．一自来水管的干线埋于地下，其内水压为 39.2×10⁴帕，水由干线经水管送到楼上，问比干线高 h 为 10 米处的水管里，水压为多少？在此处打开龙头，水流出的速度为多大？

[解答] 列出伯努利方程：

$$h_{下}+\frac{p_{下}}{\rho g}+\frac{v_{下}^2}{2g}=h_{上}+\frac{p_{上}}{\rho g}+\frac{v_{上}^2}{2g} \qquad (1)$$

当龙头没有打开时，因为 $v_{下}=v_{上}=0$，$h_{下}=0$ $h_{上}=10$ 米，$p_{下}=39.2\times10^4$ 帕，所以(1)式简化为

$$\frac{p_{下}}{\rho g}=h_{上}+\frac{p_{上}}{\rho g}，$$

$$p_{上}=p_{下}-\rho g h_{上}$$

$$=(39.2\times10^4-10^3\times9.8\times10)\text{帕}=29.4\times10^4\text{帕}。$$

当龙头打开时，因为 $v_{下}$很小，近似看作为零，$p_{上}=p_{大气压}$，(1)式可写作：

$$\frac{p_{下}}{\rho g}=h_{上}+\frac{p_{大气压}}{\rho g}+\frac{v_{上}^2}{2g}，$$

$$v_{上}=\sqrt{\frac{2(p_{下}-p_{大气压}-\rho g h_{上})}{\rho}}$$

$$=\sqrt{\frac{2(39.2\times10^4-10.1\times10^4-10^3\times9.8\times10)}{10^3}}\text{米/秒}$$

$$=19.6\text{米/秒}。$$

2254．为了使机车的水箱加水时不需要停车，在铁轨间的地面下修建一个很长的水槽，在火车行驶中从水箱伸下一根弯成直角的管子，把管子浸到水里，管口对着火车开行的方向，如图所示。问火车速度 u 多大时才能把水升高 h 为 3.5 米？

[解法一] 设火车不动，水以 u 速度向管口冲进，后又升高 h。说明水的动能转变为势能，根据机械能守恒定律有

$$mgh=\frac{1}{2}mu^2，$$

$$u=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times9.8\times3.5}\text{米/秒}=8.28\text{米/秒}。$$

[解法二] 取水槽水面为基准水平面，对 A、B 两处列伯努利方程

$$h_A+\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_A^2}{2g}=h_B+\frac{p_B}{\rho g}+\frac{v_B^2}{2g},$$

因为 $h_A=0$，$v_A=u$，$p_A=p_B=p_{大气压}$，$v_B=0$，$h_B=h$，

所以 $$\frac{u^2}{2g}=h,$$

$$u=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times9.8\times3.5}米/秒=8.28米/秒。$$

两种解法结论一样，其道理是很简单的。因为伯努利方程就是能量守恒定律在流体动力学中的表达形式，所以应用能量守量守恒定律求解与应用伯努利定律求解是一致的。

2255．如图所示，虹吸管的最高点 C 比液在高 5 厘米，虹吸管的出口 B 比 C 点低 15 厘米。如果被吸的液体是水银，求它在虹吸管中的流速及管内 A 点和 C 点的压强。（设管内没有摩擦，管径均匀，大气压强 ρ_0 为 76 厘米汞柱。）

［解答］本题讨论时，设盆中液面很大，在流动时液面下降很慢，且系统内能量没有损耗，遵循伯努利定律。

取液面为基准水平面，列出伯努利方程

$$h_D+\frac{p_D}{\rho g}+\frac{v_D^2}{2g}=h_A+\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_A^2}{2g} \quad (1)$$

$$h_D+\frac{p_D}{\rho g}+\frac{v_D^2}{2g}=h_B+\frac{p_B}{\rho g}+\frac{v_B^2}{2g} \quad (2)$$

$$h_A+\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_A^2}{2g}=h_C+\frac{p_C}{\rho g}+\frac{v_C^2}{2g} \quad (3)$$

因为 $h_D=h_A=0$，$\rho_D=p_B=p_0$，$h_B=h_1-h_2$，$v_D=0$，$v_A=v_C=v_B=v$，所以(1)、(2)、(3)式可写作

$$\frac{p_0}{\rho g}=\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v^2}{2g} \quad (4)$$

$$\frac{p_0}{\rho g}=(h_1-h_2)+\frac{p_0}{\rho g}+\frac{v^2}{2g} \quad (5)$$

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}=h_C+\frac{p_C}{\rho g}+\frac{v^2}{2g} \quad (6)$$

从(5)式得

$$\begin{aligned}v&=\sqrt{2g(h_2-h_1)}\\&=\sqrt{2\times9.8\times(0.15-0.05)}米/秒\\&=1.4米/秒。\end{aligned}$$

从(4)式得

$$p_A = p_0 - \frac{1}{2}\rho v^2$$
$$= (76 \times 13.6 \times 9.8 \times 10^3 - \frac{1}{2} \times 13.6 \times 10^3 \times 1.4^2)\text{帕}$$
$$= (1.012 \times 10^5 - 0.13 \times 10^5)\text{帕} = 0.882 \times 10^5\text{帕}$$
$$= 66\text{厘米汞柱。}$$

从(6)式得

$$\frac{p_A}{\rho g} = h_C + \frac{p_C}{\rho g},$$
$$p_C = p_A - \rho g h_C$$
$$= (0.882 \times 10^5 - 13.6 \times 10^3 \times 9.8 \times 0.05)\text{帕}$$
$$= 0.82 \times 10^5\text{帕}$$
$$= 61\text{厘米汞柱。}$$

[提示] 流体流动时的压强和流体静止时的压强不相同。

2256．恒力 F 作用在喷雾器内面积是 S_1 的活塞上。如果液体的密度等于ρ,试问液体在水平方向从面积 S_2 的孔内喷出时的速度 v 应等于多少？

[解法一] 设活塞在时间 t 内移动的距离为 u·t，u 是活塞在力 F 作用下移动的速度。所以力 F 在时间 t 内作的功

$$W=Fut+p_0S_1(ut)-p_0s_2(vt)=Fut \qquad (1)$$

在时间 t 内，喷射出的液体质量 m 为 $\rho S_1 ut$。这部分液体在筒内速度为u，所以动能为$E_{k1} = \frac{1}{2}\rho S_1 ut \cdot u^2$；从孔喷出时速度为v，动能$E_{k2} = \frac{1}{2}\rho S_1 ut \cdot v^2$，因此动能改变量

$$\triangle E_k = \frac{1}{2}\rho S_1 ut \cdot (v^2 - u^2) \qquad (2)$$

根据动能定理$W = \triangle E_k$，

$$Fut = \frac{1}{2}\rho S_1 ut \cdot (v^2 - u^2) \qquad (3)$$

液体流动速度u和v的关系是

$$S_1 u = S_2 v,\ u = \frac{S_2 v}{S_1} \qquad (4)$$

把(4)式代入(3)式得

$$v = \sqrt{\frac{2F}{S_1\rho} \cdot \frac{1}{1 - S_2^2/S_1^2}}。$$

因为通常情况$S_2 \ll S_1$，所以

$$v = \sqrt{\frac{2F}{S_1\rho}}。$$

[解法二] 由动量定理，力 F 在时间 t 内的冲量等于喷出流体 m 的动

量增量，

$$Ft = m(v-u)，$$

$$Ft = \rho S_1 ut(v-u) = \rho S_1 S_2 vt(v-\frac{S_2}{S_1}v)，$$

$$v=\sqrt{\frac{2F}{S_1\rho}\cdot\frac{1}{(1-\frac{S_2^2}{S_1^2})}}。$$

［解法三］列出伯努利方程

$$h_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}=h_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v^2}{2g} \qquad (1)$$

$$h_1=h_2, p_1=\frac{F}{S_1}+p_{大气压}，\ p_2=p_{大气压} \qquad (2)$$

$$\frac{\frac{F}{S_1}+p_{大气压}}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}=\frac{p_{大气压}}{\rho g}+\frac{v^2}{2g}， \qquad (3)$$

$$\frac{F}{S_1}+\frac{\rho u^2}{2}=\frac{\rho v^2}{2} \qquad (4)$$

水流的连续性条件是

$$S_1u=S_2v \qquad (5)$$

解（4）、(5)式

$$v=\sqrt{\frac{2F}{\rho S_1(1-\frac{S_2^2}{S_1^2})}}，当S_2<<S_1，$$

有
$$v=\sqrt{\frac{2F}{\rho S_1}}。$$

2257．有一半径为 r，密度为ρ的小球，在密度为ρ′(ρ＞ρ′)，粘滞系数为η的静止流体中下落，如果它受的阻力遵从斯托克斯定律，试求小球达到匀速下落状态时的收尾速度 v。

［解答］小球在下落过程中受到三个力的作用：重力 mg、浮力 F、阻力 f，如图所示，列出方程

mg-f-F=ma。

最初阶段 mg＞f+F，所以小球加速下落，随着速度增大，阻力 f 也增大，直到三力平衡为止，这时小球速度不再增大，达到最大速度，称之为收尾速度。

$$mg-f-F=0 \qquad (1)$$

根据斯托克斯定律　f=6πηrv，

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g-6\pi\eta rv-\frac{4}{3}\pi r^3\rho' g=0，$$

$$v=\frac{2}{9\eta}(\rho-\rho')gr^2，$$

2258．从受淹的地下室中，以 5 米/秒的速率通地半径为 10 厘米的均

匀软管把水不断抽出来。软管要从比水面高 3.0 米的窗口穿出来，问水泵所供给的功率为多大？

［解答］每秒钟抽出水的质量为 $m=\rho\pi r^2v$。

这些水出管口时的动能为 $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\rho\pi r^2v^3$，

势能增加了 $mgh=\rho\pi r^2vgh$。

所以水泵供给的功率为

$$p=\frac{1}{2}\rho\pi r^2v^3+\rho\pi r^2vgh=\pi r^2\rho v(\frac{1}{2}v^2+gh)$$

$$=3.14\times(0.1)^2\times10^3\times5\times(\frac{5^2}{2}+9.8\times3)\text{瓦}=6.6\times10^3\text{瓦}。$$

2259．对飞机的起飞来说，无风、顺风与逆风那一种条件较为有利？

［解答］飞机要从跑道上飞起来，只有在它的机翼上所受的举力达到并超过机重时才有可能。而飞机机翼的举力和飞机对空气的相对速度有关，相对速度愈大，举力愈大。飞机对空气的相对速度，等于飞机速度和风速的矢量和：无风时，即等于飞机速度；逆风时等于飞机速度与风速的和；顺风时等于飞机速度与风速之差。可见，要达到同样的相对速度，即飞机所需的速度，顺风时最大，无风时其次，逆风时最小。因此，飞机在逆风的条件起飞较为有利。

2260.一个以匀角速度ω绕水平轴自旋的乒乓球自由下落的轨道是直的还是弯的？若是弯的，弯向哪一边？

［解答］乒乓球在下落过程中，因自转在空气中形成环流，这就使球的一侧气流速度大，压强小；球的另一侧速度小，压强大。结果球向压强小的一边飘过来，形成一条弯的下落轨道。

说理和论证题

2261．一横截面积为 S_1 的圆柱形水槽，槽内水面下 h 处的侧面有一面积为 S_2 的小孔，求孔中水流射出的速度公式，并证明：当 $S_1>>S_2$ 时，此公式可化简为托里拆利定理，即

$$v=\sqrt{2gh}。$$

［证明］取若干条流线，如图所示。每一条流线在截面 1 处的速度都是 v_1，在 2 处的速度都是 v_2，因此选择任意一条流线，列出伯努利方程

$$h_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=h_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}。$$

取 2 处为基准水平面，则 $h_1=h$，$h_2=0$。又因为 p_1、p_2 是流线中分别在 1、2 处具有的压强，这个压强在数值上等于外加压强，即大气压 p_0，所以 $p_1=p_2=p_0$，这样上式变为

$$h+\frac{p_0}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{p_0}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g}，$$

$$v_2=\sqrt{v_1^2+2gh}。$$

当 $S_1>>S_2$ 时，$v_1<<v_2$，可取 $v_1=0$，得

$$v_2=\sqrt{2gh}。$$

2262．下图是一种专门测量流体流速的仪器叫流速计。试运用流体动力学基本定律证明如果 U 形管两端水银高度差为 h 米，待测液体密度为ρ千克/米^3，那么待测液体和流速

$$v=\sqrt{\frac{27.2\times 10^3 gh}{\rho}}\text{米/秒。}$$

[证明] A、B 两点，在同一水平面上，以该面为基准面，列出伯努利方程

$$h_A+\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_A^2}{2g}=h_B+\frac{p_B}{\rho g}+\frac{v_B^2}{2g},$$

因为 $h_A=h_B, v_B=0$，

所以

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_A^2}{2g}=\frac{p_B}{\rho g},$$

$$p_A+\frac{\rho v_A^2}{2g}=p_B,$$

$$v_A^2=\frac{2(p_B-p_A)}{\rho}。$$

因为 $p_B-p_A=h\cdot\rho_{水银}g$，

所以

$$v_A^2=\frac{2h\rho_{水银}g}{\rho}=\frac{2\times 13.6\times gh}{\rho}\text{米/秒，}$$

$$v=v_A=\sqrt{\frac{27.2\times 10^3 gh}{\rho}}\text{米/秒。}$$

非惯性系中的若干问题

2263．什么叫惯性参照系？什么叫非惯性参照系？

[解答] 描写物体的运动，必须选定参照系，而且参照系的选取是可以任意的。然而，在应用牛顿运动定律研究动力学问题时，对参照系的选择就有一定的限制。例如，在地面上放一个物体。一个站在地球上静止不动的观察者（即以地球为参照系），他看到物体是静止不动的。这个观察结果，满足牛顿运动定律。物体在水平方向上没有受到其他物体对它的作用，所以它仍保持静止。另一个站在水平向右作加速运动的车上的观察者（即以水平向右作加速直线运动的车为参照系），他看到的物体是在作水平向左的加速直线运动。这个观察结果，不符合牛顿运动定律。

显然，上例中的两个参照系是完全不同的两种类型参照系。我们把非加速的参照系叫惯性参照系，或者说凡是牛顿运动定律适用的参照系叫做惯性参照系，简称惯性系；加速参照系或者说凡是牛顿运动定律不能成立的参照系叫做非惯性参照系，简称非惯性系。

要确定一个参照系是不是惯性参照系，只能根据观察和实验的结果来判断。比较严格地说，太阳是惯性系。地球在自转，同时绕着太阳公转，它不是惯性系。但是，如果不考虑地球的自转，且研究地面上或地面附近的物体在短时间内的运动，就可以把地球看作惯性系，应用牛顿运动定律可以得到和实际相符的结果。由于在其他相对于地球作匀速直

线运动的参照系中，一切力学现象都是等同的，所以相对于一个惯性系作匀速直线运动的参照系也是惯性参照系，而相对于一个惯性系作加速运动的参照系则是非惯性参照系。

2264．什么叫惯性力？它和牛顿力学中的牛顿力有什么区别？

如图所示，火车以加速度 a_0 向右运动，在光滑桌面上的小球相对于火车有 $-a_0$ 的加速度，沿火车前进的反方向运动。这时在火车里的观察者看来，好象小球受到一个跟火车前进方向相反的力的作用，这个力大小等于 ma_0，我们把这个假想的力叫做惯性力。在非惯性参照系中引入了这个惯性力后，又可以应用牛顿运动定律来分析力学现象了。

惯性力是在非惯性参照系中虚设的力，它和牛顿力不同。(1)牛顿力是物体间的相互作用，因此有受力物体和施力物体；惯性力没有施力物体。(2)牛顿力存在反作用力；惯性力不存在施力物体，因而也不存在反作用力。

2265．选取合适的非惯性系解决力学问题有什么优越性？

[解答] 物体的运动是普遍的、绝对的，但对运动的描述却是相对的。即对同一个运动，选择不同的参照系，描述的结果一般不相同。选择合适的参照系，可以使研究对象在该参照系中的运动描述变得简单、明了。

例如，图中所示，在水平桌面上放一个质量为 M 的劈，劈的倾角为 α，在劈的顶端放一个质量为 m 的滑块。如果劈和桌面及劈和滑块之间都没有摩擦，滑块由静止开始下滑，同时劈向左作加速运动。在解这类问题时（如求劈和滑块之间的相互作用力、劈的运动加速度等），如果取桌面为参照系（惯性），滑块在该惯性系中加速度的方向难以确定，问题非常复杂，一时无法用牛顿定律建立运动方程。

如果我们取相对劈静止的参照系，即该参照系和劈一起加速运动，那末，在这个非惯性参照系中，劈和滑块的运动就很简单。

(1)劈和非惯性系相对静止，处于平衡状态，可以应用平衡条件求解；

(2)滑块在该非惯性系中沿斜面匀加速下滑，加速度的方向沿斜面向下，很容易建立运动方程。

可见，选取恰当的非惯性系解决力学问题，可以把复杂的问题转化为简单的问题；可以解决一些用中学所学的知识在惯性系中还不能解决的问题，扩大了我人解决力学问题的范围和深度。

下面把我们涉及到的一些力学问题，分以下几类，试用非惯性系来处理。

(1)物体在非惯性系中处于静止状态，可按平衡条件处理。把在惯性系中的动力学问题转化为非惯性系中的静力学问题。人们把这种方法叫做“动静法”。

(2)物体相对于惯性系的加速度很复杂，通过选取合适的非惯性系后，可以使物体在非惯性系中的运动简单化。

(3)在非惯性系中应用动能定理，解决一些在惯性系中无法解决的问题。

(4)物体在加速运动的系统中作振动，当选取该系统作为非惯性系后，可以的把惯性系中复杂的振动简化为非惯性系中的简谐振动。

(5)流体力学中的一些问题也可采用类似“动静法”的处理方法。

2266．在非惯性系中如何处理力学问题？

[解答] (1)选取合适的非惯性参照系，使研究对象在其中的运动描述简化，计算出该非惯性系相对于惯性系的加速度；

(2)在非惯性系中对研究对象进行受力分析，它除了受到各种相互作用的力以外，还受到一个惯性力的作用，这个惯性力的大小等于该研究对象的质量和非惯性系的加速度的乘积，它的方向和非惯性系加速度的方向相反，作用在物体的质心上；

(3)根据研究对象在非惯性系中的运动状态，借用牛顿运动定律的数学形式，建立方程

$$F+F_{惯}=ma,$$

式中 a 是物体相对于非惯性系的加速度,F 是研究对象所受到的各相互作用力的合力

如果研究对象在非惯性系中保持相对静止，则借用物体平衡条件的数学形式：

$$F+F_{惯}=0,$$

$$M_F+M_{F惯}=0$$

式中 M_F 为各相互作用力对某转轴的合力矩，$M_{F惯}$为惯性力对同一转轴的力矩；

(4)求解方程或方程组。

2267．在水平桌面上放一个质量为 M 的劈，劈和桌面成α角，在劈的顶端放一个质量为 m 的滑块，滑块由静止开始滑下，如图(a)所示。劈和桌面及劈和滑块间都没有摩擦，试计算劈的加速度及滑块和劈之间的的相互作用力。

[解答] 取一个相对于劈静止的非惯性参照系，它的加速度 a，方向水平向左。分别对劈 M 和滑块 m 进行受力分析如图(b)所示。劈受到的惯性力大小为 Ma，方向水平向右；滑块受到的惯性力的大小为 ma，方向水平向右。

在该非惯性系中

滑块 m 沿斜面匀加速下滑，在垂直于斜面的方向上合力为零，

即 $$N+ma\sin\alpha-mg\cos\alpha=0 \qquad (1)$$

劈 M 处于平衡状态，在水平方向上合力为零，

即 $$N'\sin\alpha-Ma=0 \qquad (2)$$

$$N=N' \qquad (3)$$

由(1)、(3)式得 $N=mg\cos\alpha-ma\sin\alpha$，代入(2)式得

$$mg\cos\alpha\sin\alpha-ma\sin^2\alpha-Ma=0,$$

所以 $$a=\frac{mg\cos\alpha\sin\alpha}{m\sin^2\alpha+M},$$

$$N=\frac{Mmg\cos\alpha}{m\sin^2\alpha+M}。$$

2268．在空中某点同时以同样大小的速度 v_0 向各个方向抛出几个小球。证明：小球在运动的任一时刻 t，所有小球都位于同一个球面上，而且这个球面的中心以自由落体加速度 g 下落，它的半径等于 v_0t。

[证明] 取一自由下落空间坐标系 Oxyz 为参照系，且在 t=0 时刻，其

坐标原点和小球的抛出点重合。这是一个非惯性系，它的加速度为 g，竖直向下。在这个非惯性系中任何一个小球都受到重力 G 和惯性力 $F_{惯}=ma=mg$ 的作用，如图所示。这两个力大小相等、方向相反。因而各个小球在该参照系中处于平衡状态，以抛出时的速度 v_0 作匀速直线运动。尽管它们抛出的方向各不相同，但在 t 时刻，各小球距原点的距离都等于 v_0t。所以各小球都位于半径等于 v_0t 的球面上，球心即为坐标原点 O，它以加速度 g 自由下落。

2269．如图(a)，离心机上装有横杆，杆上穿过两个小球 A 和 B，质量都为 m。转轴和 A 球的距离，A、B 两球间的距离都为离心机内半径 r 的 1/3，且 A、B 间用细线连接（线在图中未画出），球 B 和杆间无摩擦。当离心机的角速度为ω时，求：

(1)细线中的张力；

(2)A 球所受的摩擦力。

［解答］取离心机上的横杆为参照系。这是一个非惯性参照系，它的加速度是指向转轴的。在这个非惯性系中，A、B 两球都处于平衡状态，它们沿杆的受力如图(b)所示，其中 B 球受的惯性离心力的大小为 $F_{惯B}=m(\frac{2}{3}r)\omega^2$；A球受到惯性离心力的大小为$F_{惯A}=m(\frac{1}{3}r)\omega^2$，方向都背离转轴。

根据平衡条件求得

$$(1)T'=F_{惯B}=\frac{2}{3}mr\omega^2，T=T'，$$

$$(2)f=F_{惯A}+T=\frac{1}{3}mr\omega^2+\frac{2}{3}mr\omega^2=mr\omega^2。$$

2270．有一个小物体放在水平转台上，物体距转轴 10 厘米。当转台的转速等于 $\frac{1}{\pi}$ 转／秒时，物体正好开始在转台上滑动。求摩擦系数 μ_0。$(g=10米/秒^2)$

［解答］小物体放在转台上，以转台为参照系，小物体的受力情况如图所示，

得 $N-G=0$ (1)

$F_{惯}-f=0$ (2)

因为 $f=\mu_0N$，$F_{惯}=m\omega^2r=m(2\pi n)^2r$。

所以 $m(2\pi n)^2r=f=\mu_0mg$。

$$\mu_0=\frac{4\pi^2n^2r}{g}=\frac{4\pi^2\times(\frac{1}{\pi})^2\times0.1}{10}=0.04。$$

2271．如图(a)所示，在一根不计质量的棒上固定了质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小球，它们的间隔分别为 l_1 和 l_2，棒和垂直轴之间用活动铰链联结。如果轴以角速度ω转动，试求棒和竖直主向的夹角φ等于多大？

［解答］取转动系统为参照系，两个小球受力情况如图(b)所示。m_1和m_2分别受力为G_1、T_1、T_2、$F_{惯1}$和G_2、T_2'、$F_{惯2}$，其中$F_{惯1}$为$m_1\omega^2 l_1\sin\varphi$，$F_{惯2}$为$m_2\omega^2(l_1+l_2)\sin\varphi$。棒随系统一起转动，在非惯性系中处于相对静止状态，取O为转轴，根据平衡条件$\sum M_0=0$。

得
$$F_{惯1}\cdot l_1\cos\varphi+F_{惯2}\cdot(l_1+l_2)\cos\varphi$$
$$=m_1g\cdot l_1\sin\varphi+m_2g(l_1+l_2)\sin\varphi,$$

即
$$m_1\omega^2 l_1^2\sin\varphi\cos\varphi+m_2\omega^2(l_1+l_2)^2\sin\varphi\cos\varphi$$
$$=m_1gl_1\sin\varphi+m_2g(l_1+l_2)\sin\varphi。$$
$$\cos\varphi=\frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{m_1l_1+m_2(l_1+l_2)}{m_1l_1^2+m_2(l_1+l_2)^2},$$
$$\varphi=\cos^{-1}\frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{m_1l_1+m_2(l_1+l_2)}{m_1l_1^2+m_2(l_1+l_2)^2}。$$

2272．离心调速器的构造如图(a)所示。飞球 A 和 B 的质量都为 4 千克，重物 P 的质量为 10 千克，四根连杆长都为 l，且 l=0.25 米，连杆和轴的夹角α=37°。如果连杆重力及各处的摩擦都不计，问：当转轴以多大的角速度ω转动时，连杆刚好将重物 P 提起？（cos37°=0.8，g=10 米/秒^2。）

［解答］取转速为ω的转动系统为参照系，在这个非惯性系内重物 P 和 B 球处于平衡状态，其受力情况分别见图(b)、(c)所示，

即

$2F\cos\alpha=mg$　　　(1)

$F_{惯}-F_1\sin\alpha-F\sin\alpha=0$　　　(2)

$F_1\cos\alpha-F\cos\alpha-m_Bg=0$　　　(3)

$F_{惯}=m_B\omega^2 l\sin\alpha$　　　(4)

由(1)、(2)、(3)、(4)式解得
$$F_1=\frac{mg/2+m_Bg}{\cos\alpha},\quad F=\frac{mg}{2\cos\alpha},$$
$$\omega^2=\frac{F_1+F}{m_Bl}$$
$$=\left(\frac{mg/2+m_Bg}{\cos\alpha}+\frac{mg}{2\cos\alpha}\right)/m_Bl。$$

代入各数后得
$$\omega=\sqrt{175}\text{弧度/秒}=13.2\text{弧度/秒}。$$

2273．一个内壁光滑的容器绕其对称轴以角速度ω转动时，放在容器内的小物体在任何位置都可以处于相对静止状态。如果容器的对称轴在竖直位置，求容器内壁的形状。

［解答］如图所示，取容器转动轴和 Oy 轴重合。在这个转动参照系中，小物体受到重力 G，惯性力 $F_{惯}$（垂直于 y 轴），器壁对小物体的作用力 N。由题意可知

$G+F_{惯}+N=0$　　　(1)

式中 $F_{惯}=m\omega^2x$，

得　$N\sin\theta=F_{惯}=m\omega^2x$ (2)

$N\cos\theta=G=mg$ (3)

由(2)、(3)式得

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{\omega^2}{g}x \quad (4)$$

(4)式就是抛物线的斜率，故得抛物线的方程为

$$y=\frac{\omega^2}{2g}x^2 \quad (5)$$

这就说明容器内壁是以 Oy 轴为对称轴的旋转抛物面。

2274．球磨机的鼓室绕水平轴作匀速转动。鼓室中装入需要磨碎的物料和工作钢球。钢球被鼓室内壁带到一定高度 A 点，然后由此点脱离壳壁沿抛物线轨迹飞行，最后在 B 点击着壳壁使物料粉碎，如图(a)所示。设鼓室角速度ω，半径为 R，求脱离角α。

[解答] 我们研究最外层的一外钢球，当它随鼓室一起转动到 A 点时，处于将离未离时，钢球的加速度为

$a_\tau=0$，$a_n=R\omega^2$ (1)

分析钢球受力，有重力 G、切向力 f（其它钢球对它的作用力及摩擦力）、鼓壁弹力N以及惯性力$F_{惯}$，$F_{惯}$大小为$\frac{G}{g}\cdot R\omega^2$，方向和$a_n$相反。以上四个力组成平衡力系[见图(b)]，由平衡条件得

$N+G\cos\alpha-F_{惯}=0$

$$N=\frac{G}{g}\cdot R\omega^2-G\cos\alpha \quad (2)$$

在钢球即将脱离鼓室壁时，有条件 N=0，代入(2)式得

$$0=\frac{G}{g}\cdot R\omega^2-G\cos\alpha,$$

脱离角　$\cos\alpha=\frac{R\omega^2}{g}$，$\alpha=\arccos(\frac{R\omega^2}{g})$ (3)

讨论：钢球不脱离球磨机室壁，钢球和室壁间就有相互作用，这时就有条件 N＞0 存在。要使钢球始终不脱离室壁，必须有钢球运动到最高点时仍使N＞0的条件，由(2)式可知对应条件为$\frac{G}{g}R\omega^2-G\cos\alpha>0$，$\omega>\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{R}}$。取临界状态$\alpha=0$时的角速度称之为临界角速度，所以

$$\omega_{临界}=\sqrt{\frac{g}{R}}。$$

对于球磨机来说应该是$\omega<\omega_{临界}$；对于离心浇注机，为了使铁水能紧贴旋转着的铸型内壁而成型，就必须有$\omega>>\omega_{临界}$。

2275．有一个质量为 50 千克的人，站立在升降机内的体重计（指针式弹簧磅秤）上。当升降机(1)以 9.8 米/秒^{2}的加速度匀加速上升时；(2)

以 4.9 米/秒^{2}的加速度作匀减速上升时；(3)以 9.8 米/秒^{2}的加速度匀加速下降时，体重计上读出人体各重是多少？

[解答] 体重计上所示的读数称为视重。取升降机为参照系，

(1)当升降机向上作匀加速运动时，人体受力情况见图(a)所示，N 为人体对体重计压力的反作用力，G 为人的重力，$F_{惯}$为加速系统的惯性力。在升降机系统内这三个力相平衡，

即 $N-G-F_{惯}=0$

所以 $N=G+F_{惯}=mg+ma$

$=50\times9.8$ 牛$+50\times9.8$ 牛$=980$ 牛。

作用在体重计上的视重 $N'=N=980$ 牛，这个数值超过了人的重力，所以升降机在加速上升时，人体处于所谓“超重”状态。

(2)和上同理，升降机向上减速运动时，其加速度方向向下，惯性力向上，人体受力情况见图(b)所示，由平衡条件得

$N+F_{惯}-G=0$

所以 $N=G-F_{惯}=mg-ma$

$=50\times9.8$ 牛-50×4.9 牛$=245$ 牛。

作用在体重计上的视重 $N'=N=245$ 牛，这个数值小于人体的重力，所以升降机减速上升时人体处于部分“失重”状态。

(3)分析和(2)相同，这里加速方向竖直向下，故惯性力 $F_{惯}$方向向上，由平衡条件得

$N=G-F_{惯}=mg-ma$

$=50\times9.8$ 牛-50×9.8 牛$=0$ 牛。

作用在体重计的视重 $N'=N=0$，这时人体处于完全“失重”状态，体重计测量不出人体的重力。

2276．在行驶着的汽车中的乘客，观察用悬线吊着的一个小球。如果汽车是在水平路面上，则(1)观察到小球始终跟竖直方向以θ角悬挂着，偏向车后；

(2)观察到小球始终跟竖直方向以θ角悬挂，偏向车的左侧。

试求上述两种情况下汽车的运动情况。

[解答] (1)以汽车为参照系来研究小球，悬线达到θ角后相对于汽车静止，小球受力情况见图(a)，其中 $F_{惯}$为加速行驶汽车中的惯性力，则物体平衡条件得

$$T\sin\theta-F_{惯}=0 \qquad (1)$$

$$T\cos\theta-mg=0 \qquad (2)$$

联立(1)、(2)式解得

$F_{惯}=mg\text{tg}\theta$。

因为 $F_{惯}=ma$，

所以 $a=g\text{tg}\theta$。

这说明汽车以加速度 $a=g\text{tg}\theta$ 向作匀加速直线运动(或向后作匀减速直线运动)，其加速度的方向和惯性力的方向相反。

(2)由题意知，以车作为参照系，其惯性力向左[见图(b)所示]，它的大小为 $F_{惯}=mg\text{tg}\theta$。

因为 $F_{惯}=ma$，

所以 $a=g\mathrm{tg}\theta$。

这说明车辆有一个向车右侧的加速度 a。这辆汽车以右侧某处为圆心，作圆周运动，其向心加速度的值为 $g\mathrm{tg}\theta$。

2277．质量是 m 的摆悬于架子上，架子固定在小车上[如图(a)所示]，就下列情况，求摆线和铅直方向的夹角和线上的张力 T 各多大？

(1)小车在平直路面以加速度 a 向右匀加速前进；

(2)小车从倾角为α的斜面上无摩擦地滑下；

(3)小车沿倾角为α的斜面以 a 匀加速向上运动。

［解答］ (1)以小车为参照系，摆相对于这个非惯性系静止，其受力情况见图(b)。根据平衡条件得

$$\Sigma F_x=T\sin\theta ? F_{惯}=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=T\cos\theta ? mg=0 \qquad (2)$$

$$F_{惯}=ma \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式解得

$$T=\sqrt{(mg)^2+(ma)^2}=m\sqrt{g^2+a^2}，$$

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{a}{g}。$$

(2)小车从倾角为α的斜面上滑下，因小车和斜面间无摩擦，故小车的加速度的值 $a=g\sin\alpha$，小球受力情况如图(c)所示。摆在这个加速系统(小车)内保持相对静止，由平衡条件得

$$\Sigma F_x=F_{惯}? T\sin\theta' ? mg\sin\alpha=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=T\cos\theta' ? mg\cos\alpha=0 \qquad (2)$$

$$F_{惯}=ma=mg\sin\alpha \qquad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式解得

$$\mathrm{tg}\theta'=\frac{F_{惯}-mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha}=\frac{mg\sin\alpha-mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha}=0，$$

从图(c)可知摆线与铅直方向夹角为α。

从(2)式得 $T=mg\cos\alpha$。

(3)小车沿斜面向上加速运动，取小车为参照系，小球受力情况如图(d)所示。摆球受到三个力的作用在系统内处于平衡，由平衡条件得

$$\Sigma F_x=F_{惯}+mg\sin\alpha ? T\sin\theta''=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=T\cos\theta'' ? mg\cos\alpha=0 \qquad (2)$$

惯性力为 $F_{惯}=ma$ (3)

由(1)、(2)、(3)式解得

$$\mathrm{tg}\theta''=\frac{g\sin\alpha+a}{g\cos\alpha}，$$

$$\theta''=\mathrm{tg}^{-1}(\frac{g\sin\alpha+a}{g\cos\alpha})。$$

θ″为摆线和垂直于斜面方向的夹角。

摆线和铅直方向的夹角为θ″? α。

$$T=\sqrt{(ma)^2+(mg)^2+2mamg\sin\alpha}\text{，}$$

$$T=m\sqrt{a^2+g^2+2ag\sin\alpha}\text{。}$$

2278．有一个楔形物块，其倾角为α，质量等于 M，把它放置在光滑的水平桌面上，假如在它上面再放置一块质量是 m 的物块，且已知 m 和 M 之间的滑动摩擦系数近似等于静摩擦系数μ，问要用多大的水平力 F 推物块 m 时，m 和 M 可以保持相对静止？[图(a)所示]

[解答]　根据题意知物块 m 和楔形物块 M 是相对静止的。取楔形物块 M 为参照系。m 为研究对象，其受力情况见图(b)所示。

在本题中 m 受到的摩擦力的方向有两种可能性，这里先假设摩擦力方向沿斜面向上，并取摩擦力为最大静摩擦值。根据物体平衡条件

$\Sigma F_x=F_{惯}+N\sin\alpha$? $f\cos\alpha$? $F=0$　　(1)

$\Sigma F_y=N\cos\alpha+f\sin\alpha$? $mg=0$　　(2)

$f=\mu N$　　(3)

$F_{惯}=ma$　　(4)

$F=(m+M)a$　　(5)

由(1)、(2)、(3)、(4)、(5)式解得

$$F=\frac{m(m+M)g}{M}\left(\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\right)\qquad(6)$$

由于静摩擦力方向沿斜面向上，故(6)式所表示的 F 值为最小值，即推力 F 应不小于(6)式右边的值。

假设摩擦力方向沿斜面向下，且取摩擦力为最大静摩擦值。物块 m 在楔形物块这一非惯性参照系内所受的惯性力为 $F_{惯}$。

由平衡条件得

$\Sigma F_x=F$? $N\sin\alpha$? $f\cos\alpha$? $F_{惯}=0$　　(7)

$\Sigma F_y=N\cos\alpha$? $f\sin\alpha$? $mg=0$　　(8)

又　$F_{惯}=ma$　　(9)

$f=\mu N$　　(10)

$F=(m+M)a$　　(11)

由(7)、(8)、(9)、(10)、(11)式可解得

$$F=\frac{m(m+M)g}{M}\left(\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\right)\qquad(12)$$

由于最大静摩擦力方向沿斜面向下，故(12)式给出 F 的最大值，推力 F 的取值应为

$$F\le\frac{m(m+M)g}{M}\left(\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\right)\qquad(13)$$

综合上述情况可知 F 应满足条件

$$\frac{m(m+M)g}{M}\left(\frac{\sin\alpha-\mu\cos\alpha}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\right)\le F\le\frac{m(m+M)g}{M}\left(\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}\right)\qquad(14)$$

讨论：如果 $\sin\alpha ? \mu\cos\alpha=0$，即 $tg\alpha=\mu$，(14)式左边为零。可见这时不论μ为何值，只要斜面倾角α满足 $tg\alpha=\mu$，即使 F=0，m 和 M 间也不会产生相对滑动，当然如果 F>0 时 m 和 M 间亦能保持相对静止，但 F 不能任意大，其最大值由(14)式右边决定。

如果 $\cos\alpha - \mu\sin\alpha = 0$，即 $tg\alpha = \frac{1}{\mu}$。只要F大于其最小值后，不论 F 多大，都能使 m 和 M 保持相对静止，F 的最小值由(14)式的左边所决定。

2279．如图(a)所示，质量为 m，长为 l 的匀质细杆 AB，A 点以铰链连接于小车并和水平面成α角。如果不计铰链及 D 处的摩擦，当小车以加速度 a 向左运动时 AB 和小车相对静止，则 AB 作用于 D 和 A 点的力各多大？

［解答］ 取 AB 杆为研究对象，其受力分析见图(b)所示。当加速度不太大时，AB 杆随同小车平动，取小车为参照系，AB 杆还受到惯性力 $F_{惯}=ma$ 作用，其作用点在杆的质心 C 上。由平衡条件

得
$$\Sigma F_x=F_{惯}+F_x+N_D\sin\alpha=0 \quad (1)$$
$$\Sigma F_y=N_D\cos\alpha ? mg+F_y=0 \quad (2)$$

以 A 点为转轴，由平衡条件

得
$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha - F_{惯}\cdot\frac{l}{2}\sin\alpha - N_D h/\sin\alpha = 0 \quad (3)$$

将 $F_{惯}=ma$ 代入(3)式

得
$$N_D = \frac{ml}{2h}\sin\alpha(g\cos\alpha - a\sin\alpha) \quad (4)$$

将(4)式及 $F_{惯}=ma$ 代入(1)及(2)式

得
$$F_X = -N_D\sin\alpha - F_{惯}$$
$$= -ma - \frac{ml}{2h}\sin^2\alpha(g\cos\alpha - a\sin\alpha)；$$
$$F_y = mg - N_D\cos\alpha$$
$$= mg - \frac{ml}{2h}\sin\alpha\cos\alpha(g\cos\alpha - a\sin\alpha)。$$

由(4)式可知，当 a>gctga 时，N_D 取负值，即这时杆 AB 脱离 D 点而绕 A 发生转动，不再作平动，当 a=gctga 时，杆对 D 点的压力等于 0。

由上面的结果可知，D 点受到杆 AB 的压力方向和 N_D 相反。A 处受到的作用力 F′的 y 分量，是沿 y 轴方向竖直向下，为 F_y 的反作用力；在 x 轴方向，大小和 F_X 相等、方向和 x 轴同向，也是 Fx 的反作用力。

2280．汽车的重力为 G，其重心离开前轮和后轮的距离为 l_1 和 l_2，重心离地面的高度为 h[见图(a)]。求：

(1)汽车以多大加速度 a_1 前进时，其前、后轮的压力相等；

(2)当汽车以加速度 a_2 制动时，前、后轮的压力各多大(设汽车是后轮制动，即滑动摩擦只发生在后轮和路面之间)；

(3)如果后轮胎和路面间的摩擦系数为 μ，则汽车制动时的加速度为多大。

［解答］ (1)取汽车为参照系，因为 a_1 方向向左，所以在质心 C 上加

一个方向向右的惯性力$F_{惯1}$，其大小为 $\frac{G}{g}\cdot a_1$，这样又把问题转化为静力学问题，由力矩平衡条件

$\Sigma M_2=0$(以后轮和地面接触处为转轴)，

得
$$Gl_2-N_1(l_1+l_2)-F_{惯1}h=0，$$

$$N_1=\frac{Gl_2-F_{惯1}h}{l_1+l_2}=\frac{Gl_2-\frac{G}{g}\cdot a_1\cdot h}{l_1+l_2}$$

$$=G\cdot\frac{gl_2-a_1h}{g(l_1+l_2)}。$$

同理 $\Sigma M_1=0$(以前轮和地面接触处为转轴)，

得
$$Gl_1-N_2(l_1+l_2)+F_{惯1}h=0，$$

$$N_2=G\cdot\frac{gl_1+a_1h}{g(l_1+l_2)}。$$

根据题意 $N_1=N_2$，所以有

$$G\cdot\frac{gl_2-a_1h}{g(l_1+l_2)}=G\cdot\frac{gl_1+a_1h}{g(l_1+l_2)}，$$

$$a_1=\frac{g(l_2-l_1)}{2h}。$$

由计算结果可见，当汽车加速前进时，使 $N_1=N_2$ 是有条件的。必须满足 $l_2>l_1$ 才行。

(2)当汽车以 a_2 制动时，取汽车为参照系，由于 a_2 的方向向右，所以

在质心C上加一个方向向左的惯性力$F_{惯2}$，其大小为 $\frac{G}{g}\cdot a_2$，列出平衡方程

$\Sigma F_x=0$，$f?\ F_{惯2}=0$ (1)

$\Sigma F_y=0$，$N_1+N_2?\ G=0$ (2)

$\Sigma M_2=0$，$N_1(l_1+l_2)?\ Gl_2?\ F_{惯2}h=0$ (3)

将$F_{惯2}=\frac{G}{g}\cdot a_2$代入(3)式，联立解(2)、(3)式得

$$N_1 = G \cdot \frac{gl_2 + a_2 h}{g(l_1 + l_2)};$$

$$N_2 = G \cdot \frac{gl_1 - a_2 h}{g(l_1 + l_2)}。$$

(3)从第(2)小题中知 f? $F_{惯2}=0$

$$f = F_{惯2} = \frac{G}{g} \cdot a_2;$$

因滑动摩擦力 $f=\mu N_2$；

所以 $$\mu N_2 = \frac{G}{g} \cdot a_2,$$

$$a_2 = \frac{g\mu N_2}{G} = \frac{g\mu}{G} \cdot G \cdot \frac{gl_1 - a_2 h}{g(l_1 + l_2)},$$

$$a_2 = \frac{\mu g l_1}{l_1 + l_2 + \mu h}。$$

2281．有一个人站在平台上，平台以 5 米/秒 ^{2} 的加速度向上作匀加速运动。如果这个人用手以 30 米/秒的初速度相对于平台竖直上抛一个小球，求小球落回到这个人手中所经历的时间是多少？(取 g=10 米/秒 ^{2})

［解答］ 以平台或抛球人为参照系，那么小球对平台(或抛球的人)来说，除了受到重力 G 的作用外，还要加上一个惯性力 $F_{惯}$，其方向和平台加速方向相反，大小为 ma。

且有 $mg+F_{惯}=ma'$，

$mg+ma=ma'$，$a'=g+a=10$ 米/秒 ^{2}+5 米/秒 ^{2}=15 米/秒 ^{2}。

根据运动学公式

$$v_t = v_0 - a't。$$

因为上升到最高点时 $v_t=0$，

所以 $$t = \frac{v_0}{a'} = \frac{30}{15}\text{秒} = 2\text{秒},$$

$$T = 2t = 2 \times 2\text{秒} = 4\text{秒}。$$

2282．电梯内的水平桌面上有一个 20 千克的物体 A，它用轻绳经过一个质量可以忽略的滑轮后，挂一个 5 千克的物体 B，如图(a)所示，已知 A 和桌面间的滑动摩擦系数等于 0.2。求：

(1)如果电梯以 a=g 的加速度向上运动，求物体 A 的加速度和绳的张力。

(2)如果电梯以 a=g 的加速度向下运动，求物体 A 的加速度和绳的张力。(取 g=10 米/秒 ^{2})

［解答］ (1)当电梯以 a 向上作匀加速运动时，以电梯为参照系，则惯性力 $F_{惯}=ma$，方向向下。分析物体 A、B 受力情况，如图(b)所示。

设 a′为物体相对于电梯的加速度，则

对 A 物体 $N=m_A a+m_A g$ (1)

$$T? \quad \mu N=m_A a' \qquad (2)$$

对 B 物体

$$m_B g+m_F a? \ T'=m_B a^2 \qquad (3)$$

从题意知 $a=g$ (4)

解(1)式有：$N=2m_A g=2\times20\times10$ 牛=400 牛。

(2)式与(3)式相加及 $T=T'$ 得

$$2m_B g? \quad \mu N=(m_A+m_B)a',$$

$$a'=\frac{2m_B g-\mu N}{m_A+m_B}=\frac{2\times5\times10-0.2\times400}{20+5}\text{米}/\text{秒}^2$$

$$=0.8\text{米}/\text{秒}^2。$$

从(2)式有

$$T=\mu N+m_A a'$$

$$=0.2\times400\text{牛}+20\times0.8\text{牛}$$

$$=96\text{牛}。$$

(2)当电梯以 $a=g$ 加速向下运动时，由于电梯是非惯性系，所以惯性力 $F_{惯}=ma$，方向向上。作出物体 A 和 B 的受力图(c)。

设 a' 为物体相对于电梯的加速度，则可得方程

$$N+m_A a=m_A g \qquad (5)$$

$$T? \quad \mu N=m_A a' \qquad (6)$$

$$m_B g? \ (T'+m_B a)=m_B a' \qquad (7)$$

又有 $a=g$ (8)

联立(5)、(6)、(7)、(8)式得 $N=0$，$T=0$，$a'=0$，这表示 A、B 都处于“失重”状态，和电梯相对静止，对地面以加速度 g 向下运动。

2283．在光滑桌面上，放置一个质量为 m_1 的物体，通过滑轮，用轻绳和物体 m_2 相连，滑轮的质量和摩擦都不计。如果将这套装置固定在车厢上，求在下列情况下两物体相对于车厢的加速度和绳子的张力。

(1)当车厢以加速度 a 向左作匀加速运动；

(2)当车厢向左运动时以加速度 a 刹车。

［解答］ (1)以车厢为参照系时，两物体的受力情况见图(b)所示。根据非惯性系内的运动定律可得

$$F_{惯}=m_1 a \qquad (1)$$

$$F'_{惯}=m_2 a \qquad (2)$$

$$T+F_{惯}=m_1 a' \qquad (3)$$

$$F? \ T'=m_2 a',$$

即 $$\sqrt{(m_2 g)^2+(F'_{惯})^2}-T'=m_2 a' \qquad (4)$$

$$T=T' \qquad (5)$$

式中的 a' 为 m_1 和 m_2 相对于车厢加速度的大小。

由(1)、(2)、(3)、(4)、(5)式可解得

$$a'=\frac{m_2\sqrt{g^2+a^2}+m_1a}{m_1+m_2}\text{；}$$

$$T=\frac{m_1m_2(\sqrt{g^2+a^2}-a)}{m_1+m_2}\text{。}$$

绳子和竖直方向的夹角可由下式

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{F'_{惯}}{m_2g}\text{，}$$

$$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{a}{g}\text{。}$$

(2)当车厢刹车时，加速度方向与运动方向相反，即加速度 a 的方向向右。受力情况分析见图(c)所示。在以车厢为非惯性参照系内 m_1、m_2 对车厢的相对加速度的大小为 a″，由非惯性系内的运动定律得

$$F_{惯}=m_1a \tag{6}$$

$$F'_{惯}=m_2a \tag{7}$$

$$T?\ F_{惯}=m_1a'' \tag{8}$$

$$\sqrt{(m_2g)^2+(F'_{惯})^2}-T'=m_2a'' \tag{9}$$

由(6)、(7)、(8)、(9)式可解得

$$a''=\frac{m_2\sqrt{g^2+a^2}-m_1a}{m_1+m_2}\text{；}$$

$$T=\frac{m_1m_2(\sqrt{g^2+a^2}+a)}{m_1+m_2}\text{。}$$

绳子与竖直方向的夹角 θ 可由下式

$$\mathrm{tg}\,\theta=\frac{F'_{惯}}{m_2g}\text{，}$$

求得 $$\theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{a}{g}\text{。}$$

2284．升降机内有一个倾角 α=30°，长 L=2.5 米的光滑斜面。一木块位于斜面顶端，由静止开始沿斜面下滑。求在下列几种情况下，木块下滑到斜面底端所用的时间各是多少。

(1)当升降机静止时；

(2)当升降机以 2 米/秒 ^{2} 的加速度上升时；

(3)当升降机以 2 米/秒 ^{2} 的加速度下降时。(g 取 10 米/秒 ^{2})

［解答］ (1)木块受力情况如图(b)所示，在重力的分力 Gsinα 作用下沿斜面向下作匀加速运动，所以

$$mg\sin\alpha=ma_1\text{，}a_1=\frac{1}{2}g=5\text{米}/\text{秒}^2\text{，}$$

$$L=\frac{1}{2}a_1t_1^2\text{，}t_1=\sqrt{\frac{2L}{a_1}}=\sqrt{\frac{2\times2.5}{5}}\text{秒}=1\text{秒。}$$

(2)当升降机向上加速运动时，木块除了受到重力 G、弹力 N_2 外，还要受到一个惯性力 $F_{惯}$，见图(c)。这时木块在 G 和 $F_{惯}$的分力$(G+F_{惯})\sin\alpha$ 的作用下沿斜面向下作匀加速运动，所以

$$(mg+F_{惯})\sin\alpha=ma_2。$$

因为 $F_{惯}=ma_{上}$($a_{上}$为升降机的加速度)

所以 $\frac{1}{2}\times(mg+ma_{上})=ma_2$，$a_2=\frac{1}{2}(10+2)$米/秒$^2=6$米/秒^2。

又因为 $L=\frac{1}{2}a_2t_2^2$，所以$t_2=\sqrt{\frac{2L}{a_2}}=\sqrt{\frac{2\times2.5}{6}}$秒$=0.913$秒

(3)同(2)分析，见图(d)。

$$(G? F_{惯})\sin\alpha=ma_3。$$

因为 $F_{惯}=ma_{下}$（$a_{下}$为升降机的加速度）

所以 $(mg-ma_{下})\times\frac{1}{2}=ma_3$，$a_3=\frac{1}{2}\times(10-2)$米/秒$^2=4$米/秒^2，

又因为 $L=\frac{1}{2}a_3t_3^2$，所以$t_3=\sqrt{\frac{2L}{a_3}}=\sqrt{\frac{2\times2.5}{4}}$秒$=1.12$秒。

讨论：当 $a_{下}=g$ 时，$a_3=0$，这就是说木块与斜面保持相对静止，随同升降机一起相对于地球作自由落体运动。

2285．如图(a)所示的光滑水平面上有一个质量为 $m_1=4.0$ 千克的物块，物块受一水平力 F=40 牛作用。在 m_1 的竖直面 AB 的上方有一质量为 $m_2=1.0$ 千克的小物块，如果 m_1 和 m_2 间的滑动摩擦系数 $\mu=0.5$，求：

(1)m_2 在竖直方向上的加速度 a'。

(2)力 F 至少应为多大，m_2 才能沿 AB 面在竖直方向匀速下落($g=10$ 米/秒^2)

[解答] (1)取 m_1 为参照系，当 m_2 沿 m_1 的 AB 面竖直向下滑动时，受到重力 G_2、m_1 的压力 N，摩擦力 f 以及惯性力 $F_{惯}$四个力的作用，[如图(b)所示]而非惯性系加速度

$$a=\frac{F}{m_1+m_2}=\frac{40}{4+1}米/秒^2=8米/秒^2。$$

在水平方向上，m_2 相对于 m_1 处于静止状态，所以

$$N? F_{惯}=0,$$

即 $$N? m_2a=0 \qquad (1)$$

在竖直方向上，

$$m_2g? f=m_2a' \qquad (2)$$

且 $$f=\mu N \qquad (3)$$

将(1)、(3)式代入(2)式得

$$m_2g=\mu m_2a=m_2a',$$

$$a'=g? \mu a=10米/秒^2? 0.5\times8米/秒^2=6米/秒^2。$$

(2)要使 m_2 沿 AB 面在竖直方向匀速下落，则

$$m_2g - \mu m_2a=0,$$

$$a = \frac{g}{\mu} = \frac{10}{0.5}米/秒^2 = 20米/秒^2,$$

而 $F=(m_1+m_2)a=(4+1)\times 20$ 牛

$=100$ 牛。

2286．有一质量为 M 的斜面，放在光滑的水平桌面上，另有一个立方体木块 m，放在斜面上[如图(a)所示]。如果斜面倾角 $\alpha<45°$，立方体木块和斜面间的摩擦系数 μ 为定值，且 $\mu=\mathrm{tg}\alpha$，在斜面右侧用一水平推力 F。

(1)为使m在斜面M上保持相对静止,这一水平推力F取值范围如何？

(2)设斜面倾角 $\alpha=30°$，斜面质量 M 和立方体木块质量 m 相等，且都等于 1 千克。现要使木块 m 相对于斜面以加速度 a=g 沿斜面向上作匀加速运动，这个水平推力 F 应多大？(g 取 10 米/秒 ²)

［解答］ (1)由题意知 m 和 M 保持相对静止,如果以在水平桌面上作匀加速运动的斜面 M 作参照系，物体 m 在重力 G、斜面的支持力 N、摩擦力 f 和惯性力 $F_{惯}$ 作用下，保持相对静止，其受力情况如图(b)所示。由平衡条件可得：

$$\Sigma F_x=F_{惯}+f\cos\alpha - N\sin\alpha=0 \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y=N\cos\alpha+f\sin\alpha - mg=0 \qquad (2)$$

由于物体 m 和 M 保持相对静止，f 为静摩擦力，所以 $f\leq\mu N$，方向有两种可能，第一种如图(b)所示，f 方向沿斜面向上。由条件 $\mu=\mathrm{tg}\alpha$，可知当 F=0 时，物体 m 与 M 间仍能保持平衡，当 F 增大，系统的加速度 a 也增大，惯性力 $F_{惯}=ma$ 也增大，由平衡条件得 $f=G\sin\alpha - F_{惯}\cos\alpha$，故 f 减小。当 F 增大到使 $F_{惯}\cos\alpha=mg\sin\alpha$ 时，f=0，这时

(1)式为

$$F_{惯}=N\sin\alpha=0 \qquad (3)$$

(2)式为 $N\cos\alpha - mg=0$ (4)

由牛顿第二定律得 $F=(m+M)a$ (5)

$$F_{惯}=ma \qquad (6)$$

由(3)、(4)、(5)、(6)式解得

$$F=(m+M)g\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=(m+M)g\mathrm{tg}\alpha = \mu(m+M)g \qquad (7)$$

为了使 m 不在 M 上向下滑动，水平推力 F 应有如下条件

$$0\leq F\leq\mu(m+M)g \qquad (8)$$

当 $f>\mu(m+M)g$ 时会出现另一种情况，即 m 与 M 之间的摩擦力又开始产生，并随着 F 的增大而增大，但 f 的方向为沿斜面向下，受力情况如图(c)所示。如取静摩擦最大值可得

$$\Sigma F_x=F'_{惯} - N\sin\alpha - f\cos\alpha=0 \qquad (9)$$

$$\Sigma F_y=N\cos\alpha ? f\sin\alpha ? mg=0 \qquad (10)$$

$$f=\mu N \qquad (11)$$

由牛顿第二定律得

$$F=(m+M)a' \qquad (12)$$

由(9)、(10)、(11)、(12)式解得

$$F=\frac{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}(m+M)g \qquad (13)$$

由于$\mu=\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，把μ代入(13)式得

$$F=(m+M)g\mathrm{tg}2\alpha \qquad (14)$$

由(8)及(14)式可得

$$0\le F\le(m+M)g\mathrm{tg}2\alpha。$$

(2)由上面的结论可知，要使物体 m 沿斜面体 M 向上作匀加速运动，物体 m 受到的摩擦力 f 的方向必沿斜面向下，且 f 的大小等于μN。其受力情况见图(d)所示。F 必须有，

$F>(m+M)g\mathrm{tg}2\alpha$。

根据非惯性系的运动定律得

x 方向　$F_{惯}\cos\alpha ? mg\sin\alpha ? f=ma$，

即　$ma'\cos\alpha ? mg\sin\alpha ? \mu N=ma$。

$$N=\frac{m}{\mu}(a'\cos\alpha-g\sin\alpha-a) \qquad (15)$$

y 方向　$N? f_{惯}\sin\alpha ? mg\cos\alpha=0$，

即　$N? ma'\sin\alpha ? mg\cos\alpha=0$。

$$N=m(a'\sin\alpha+g\cos\alpha) \qquad (16)$$

由(15)、(16)式可解得

$$a'=\frac{g\sin\alpha+a+\mu g\cos\alpha}{\cos\alpha-\mu\sin\alpha}。$$

以$a=g$，$\alpha=30^\circ$，$\mu=\mathrm{tg}30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$代入上式

得　$a'=2\sqrt{3}g$。

将m、a'值代入(16)式可解得　$N=\frac{3}{2}\sqrt{3}g$。

以斜面为研究对象

$$F? F'_{惯}? f'\cos\alpha ? N'\sin\alpha=0,$$

$$F=Ma'+\mu N'\cos\alpha+N'\sin\alpha。$$

以$a'=2\sqrt{3}g$，$N'=N=\frac{3\sqrt{3}}{2}g$，$M=1$千克代入，解得$F=\frac{7\sqrt{3}}{2}g=60.6$牛。

2287．非惯性系中动能定理的形式是怎样的？

［解答］　动能定理是一条重要的力学规律，在惯性系中，我们常用它来简捷地解决某些力学问题。下面，我们利用高等数学的基础知识来

推导非惯性系内动能定理的表达式。

非惯性系中的运动定律

$$F+F_{惯}=ma。$$

上式也能表达为 $F+F_{惯}=m\frac{dv}{dt}$。

以a、v分别为物体相对于非惯性系的加速度和速度，且$a=\frac{dv}{dt}$。

写成分量的形式

$$\begin{cases} F_x+F_{惯x}=m\frac{dv_x}{dt} & (1) \\ F_y+F_{惯y}=m\frac{dv_y}{dt} & (2) \\ F_Z+F_{惯z}=m\frac{dv_z}{dt} & (3) \end{cases}$$

作变换 $\frac{dv_x}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dv_x}{dx}=v_x\frac{dv_x}{dx}$。

代入(1)式

得 $(F_x+F_{惯x})dx=mv_xdv_x$。

对上式两边积分

$$\int_0^x(F_x+F_{惯x})dx=\int_{v0x}^{vx}mv_xdv_x=\frac{1}{2}mv_x^2-\frac{1}{2}mv_{0x}^2 \qquad (1')$$

同理可得

$$\int_0^y(F_y+F_{惯y})dy=\frac{1}{2}mv_y^2-\frac{1}{2}mv_{0y}^2 \qquad (2')$$

$$\int_0^z(F_z+F_{惯z})dz=\frac{1}{2}mv_z^2-\frac{1}{2}mv_{0z}^2 \qquad (3')$$

把(1′)、(2′)、(3′)式相加，合并为矢量式

$$\int_0^s(F+F_{惯})\cdot ds=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2。$$

式中左边即为合外力(物体受到的相互作用力)和惯性力在非惯性系内对物体做的功。当F和$F_{惯}$为恒力时，

$$W=\int_0^s(F+F_{惯})ds=Fs\cos\alpha+F_{惯}s\cos\beta。$$

式中α为合外力和位移的夹角，β为惯性力和位移的夹角。

所以有 $$Fs\cos\alpha+F_{惯}s\cos\beta=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad (4)$$

(4)式和惯性系内的动能定理的形式相似，我们可以用这个式子在非惯性系中解决力学问题。必须指出：式中的位移、初速度和末速度都是相对于非惯性系的。

2288．物体m在以加速度α向右作匀加速运动的车厢内，从高度为h的斜面顶端由静止开始滑下，停止在距斜面顶端的水平距离为s的地方，试求摩擦系数μ[如图(a)所示]，设物体和斜面、水平面间的摩擦系数μ相同。

［解答］ 物体在车厢内的斜面上和水平面上都受到重力 G、弹力 N，摩擦力 f 和惯性力 $F_{惯}$(等于 ma)，而弹力 N 的方向与速度方向垂直不做功，根据动能定理有

$$mgh? \ mas? \ f_1L? \ f_2s_2=0 \qquad (1)$$

又有 $$f_1=\mu(mg\cos\alpha+ma\sin\alpha) \qquad (2)$$

$$f_2=\mu mg$$

由(1)、(2)、(3)式得

$$\mu(g\cos\alpha+a\sin\alpha)L+\mu gs_2=gh? \ as,$$

因为 $L\cos\alpha=s_1$，$L\sin\alpha=h$，$s=s_1+s_2$。

所以 $$\mu(gs+ah)=gh? \ as,$$

即 $$\mu=\frac{gh-as}{gs+ah}。$$

2289．如图所示，在电梯中有一个质量为 m 的小球，自静止开始沿斜面轨道滑到一个半径为 R 的圆环内，如不计摩擦阻力，问：当电梯以加速度α匀加速上升时(1)要使小球滚到圆环顶点而不落下，至少应使它从斜轨上多高的地方滚下？(2)若从上题中求得的高度处滚到环顶和环底时，对环的压力各多大？

［分析］ 小球在电梯中的滑轨上运动时，受到重力 G、导轨的压力 N 和惯性力 $F_{惯}$的作用，其中 N 不做功而惯性力及重力做的功等于小球动能的增量。

［解答］ (1)设小球从斜面滑道上 h 高处滚下，根据非惯性系中的动能定理有

$$F_{惯}(h-2R)+mg(h-2R)=\frac{1}{2}mv^2{}_A-0$$

$$F_{惯}=ma,$$

所以 $$m(g+a)h=2m(g+a)R+\frac{1}{2}mv^2{}_A \qquad (1)$$

小球在环顶的最小速度应满足 N′=0,所以此时的向心力为重力 G 和惯性力 $F_{惯}$的合力，

即 $$m(g+a)=\frac{mv^2{}_A}{R}。$$

$$v_A^2=R(g+a) \qquad (2)$$

把(2)式代入(1)式得

$$mh(g+a)=2mR(g+a)+\frac{1}{2}mR(g+a),$$

$$h=\frac{5}{2}R。$$

(2)在顶端小球对环的压力和环对小球的压力 N 是相互作用力，所以球对环的压力等于零。在环底时，根据非惯性系中的动能定理有

$$mgh + mah = \frac{1}{2}mv_B^2,$$

$$v_B^2 = 2(g+a)h \quad (3)$$

根据向心力公式有

$$N - m(a+g) = m\frac{v_B^2}{R},$$

$$N = m(a+g) + \frac{mv_B^2}{R} \quad (4)$$

把(3)式代入(4)式

得 $$N = m(g+a) + \frac{2m(g+a)h}{R} \quad (5)$$

把$h = \frac{5}{2}R$代入(5)式

得 $$N = m(g+a) + \frac{2m(g+a)}{R} \cdot \frac{5}{2}R$$

$$= 6m(g+a)。$$

2290．一个质量为 m 的小物体，放在半径为 R 的半球顶上，如果物体和半球面间的摩擦系数等于零，初始时它们间相对静止，然后滑下。求在下列情况下物体 m 离开球面时，离半球面底部的距离 h[如图(a)所示]。

(1)半球面以 10 米/秒的速度匀速上升；

(2)半球面以加速度$a = \frac{1}{2}g$匀加速上升；

(3)半球面以加速度$a = \frac{1}{4}g$匀加速向右运动。

[解答] (1)取半球面为参照系，半球面相对地球向上匀速运动，这是一个惯性参照系，小物体 m 因重力而开始下滑(因处于不稳定平衡状态，只要有微小的扰动，物体m就开始下滑)，物体在开始脱离半球面前，在球面受约束而作圆周运动，在脱离球面的一瞬间小物体 m 和球面间相互作用力等于零，这时重力沿球面半径方向的分力正好等于圆周运动的向心力$F_{向} = m\frac{v^2}{R}$。小物体的受力情况如图(a)所示，故得

$$mg\cos a = m\frac{v^2}{R} \quad (1)$$

根据动能定理有

$$mg(R-h) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

又有 $$\cos\alpha = \frac{h}{R} \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式可解得

$$h = \frac{2}{3}R。$$

即小物体m在距离半球面底面$\frac{2}{3}R$的高度时开始离开半球面。

(2)半球面向上加速运动，取半球面为参照系，这是个非惯性参照系，小物体m在这参照系中除受重力G=mg及弹力作用外，还要受和重力同方向(即与半球面加速度方向相反方向)的惯性力$F_{惯}=ma=\frac{1}{2}mg$的作用，重力和惯性力的合力为

$$F=G+F_{惯}=mg+\frac{1}{2}mg=\frac{3}{2}mg \qquad (4)$$

当小物体m从静止开始滑动到刚要脱离半球面的瞬时，物体与半球面间无相互作用力。而F在沿半球面半径方向的分力就是小物体作圆周运动的向心力[如图(b)所示]，即

$$F\cos\alpha=m\frac{v^2}{R} \qquad (5)$$

根据动能定理有

$$F(R-h)=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (6)$$

又有 $$\cos\alpha=\frac{h}{R} \qquad (7)$$

由(4)、(5)、(6)、(7)式得

$$h=\frac{2}{3}R。$$

(3)当半球面向右加速运动时，取半球面作为参照系，这是一个非惯性参照系，在这个参照系内运动的小物体m受到一个向左的惯性力作用，$F_{惯}=ma=\frac{1}{4}mg$[如图(c)所示]。

物体从顶点开始向下滑动到离开半球面之前，物体被约束在球面上作圆周运动，当小物体离开半球面的瞬间它们间的相互作用力等于零，力F在沿半球面的半径方向的分力就是小物体m所受的向心力，根据牛顿第二定律得

$$mg\cos\alpha-F_{惯}\sin\alpha=m\frac{v^2}{R} \qquad (8)$$

由非惯性系中的动能定理有

$$mg(R-h)+F_{惯}\cdot R\sin\alpha=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (9)$$

又有 $$\cos\alpha=\frac{h}{R} \qquad (10)$$

$$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{R^2-h^2}}{R} \qquad (11)$$

由(8)、(9)、(10)、(11)式解得

153h²? 192Rh+55R²=0

$$h=\frac{192R\pm\sqrt{(192)^2R^2-4\times153\times55R^2}}{2\times153}$$

$$=\frac{192\pm\sqrt{3204}}{306}R。$$

$h_1=0.81R$，$h_2=0.44R$。

根据物理过程可知，当 m 位于 h_1 时，它已脱离半球面的约束，所以 h_2 可舍去。因此说，物体 m 在距半球面底部的高度为 0.81R 时就离开半球面了。

2291．图(a)表示在静止车厢内的光滑水平面上，放置一个倔强系数为 k 的轻质弹簧，弹簧的一端固定，另一端连结一个质量为 m 的小球，开始时弹簧处于自由状态，当车厢以加速度 a 水平向右作匀加速运动时，问：(1)小球是否作简谐振动？(2)小球振动的振幅多大？

［解答］　车厢以加速度 a 作匀加速运动，取车厢为参照系，这是一个非惯性参照系，车厢内的小球在水平方向上除受到弹簧的弹力作用外，还要受到一个恒定的惯性力 $F_{惯}$的作用，它的大小等于 ma，方向指向左边。

(1)把坐标原点 0 取在弹簧处于自然状态时小球所在的位置,如图(b)所示。车厢在加速运动，小球相对车厢也在运动，在任一时刻小球的坐标为 x。x>0 时，表示小球在 0 的右侧；x<0 时，表示在 0 点的左侧。小球在水平方向受的合力为　　　　　　F=? ma? kx　　　　　(1)

式中表示惯性力 $F_{惯}$=? ma 永远和 x 轴正方向相反，弹力 N=? kx 则表示当 x>0 时，方向向左；当 x<0 时，方向向右。

由于惯性力是恒力，弹力是变力，在运动过程中总存在某一状态，使得合力 F=0，这样的位置叫平衡位置，它的坐标为 x_0，即

$$-ma-kx_0=0，x_0=-\frac{m}{k}a<0。$$

x_0>0 表示平衡位置在 0 点的左侧，将上式代入(1)式得

$$F=kx_0-kx=-k(x-x_0)\qquad(2)$$

(x? x_0)表示小球离开平衡位置的位移。可见，不论 x 为何值，F 和小球离开平衡位置的位移(x? x_0)总成正比，而方向总指向平衡位置。这满足简谐振动的条件。

(2)因为弹簧开始时处于自由状态，在惯性力作用下小球开始运动时，速度为零，离开平衡位置的距离为$\frac{ma}{k}$，故振幅$A=\frac{ma}{k}$。

2292．小车连同支架从倾角为α的光滑固定斜面上滑下如图(a)所示，则挂在小车支架上的单摆振动周期将怎样改变？设单摆在原来静止的小车上的振动周期为 T_0，单摆质量 m，和小车连同支架的质量 M 相比，M>>m。

［解答］当小车静止时，根据单摆的振动定律得单摆周期$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$。小车在光滑斜面上受重力 G_2 和斜面支承力 N 的作用(因为 M>>m，所以可以忽略 m 对小车的作用)，受力情况见图(b)所示，它的合力沿斜面向下，大小为 Mgsinα，可求得小车的加速度 a=gsinα。取小车为参照系。摆球在这个非惯性系内受拉力 T、重力 G_1 和惯性力 $F_{惯}$ 作用，$F_{惯}$ 的大小等于 mgsinα，方向沿 x 轴向上。当摆球运到到 O′位置时，它的重力 G_1 在 x 方向的分力 mgsinα 和 $F_{惯}$ 大小相等，方向相反，而 G_1 在 y 方向的分力 mgcosα 和拉力 T 都沿 OO′方向，它们在摆动弧线的切线方向的分量都等于零。所以 O′点是该单摆在非惯性系中的平衡位置。

在任意位置，摆角为θ，拉力 T 仍沿半径方向，没有切向分量。

mgcosα 在切线方向的分量，它的大小

$$F_{惯}=mg\cos\alpha\cdot\sin\theta。$$

当摆角θ小于5°时，$\sin\theta\approx\theta\approx\frac{x}{l}$，

其中 l 为摆线长度、x 为摆球离 O′的位移。

由于 $F_{切}$ 始终和位移方向相反，即指向平衡位置 O′，所以

$$F_{切}=-(mg\cos\alpha)\cdot\frac{x}{l}=-kx。式中 k=mg\cos\alpha/l。$$

这是一个准弹性力，所以小车上的单摆作简谐振动，由单摆振动定律得它的周期为

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{m\cdot l}{mg\cos\alpha}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{g\cos\alpha}}。$$

即

$$T'=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}}=\frac{T_0}{\cos\alpha}。$$

2293．如图所示，单摆正在电梯中来回摆动，设电梯在某时刻突然自由下落，则摆球相对于电梯将如何运动？

［解答］ 如果电梯刚作自由下落运动时，摆球未到达最高点，它具有一定的速度v，和一定的向心加速度$a_n=\frac{v^2}{l}$。以电梯为参考系，单摆受到三个力，即重力 mg，方向向下；绳子的张力 T，方向沿绳子指向悬挂点；惯性力 $F_{惯}$=mg，方向向上。

在本题中显然重力和惯性力相平衡，所以合力等于绳子的张力 T。小球此时有切向速度，又受到张力 T 的作用，所以小球不再相对于电梯作来回摆动，而是作匀速圆周运动。

如果电梯刚自由下落时，摆球正好到达最大位移处，此时相对于电梯的速度为零，因此向心力也为零，绳子的张力也为零，此时小球只受到重力和惯性力作用，合力为零。这时小球相对于电梯处于静止状态。

2294．如果单摆悬挂在电梯顶上，电梯以加速度 a(a<g)在竖直方向上作匀加速运动，试讨论在以下几种情况下单摆的周期将如何变化？

(1)电梯向上加速；

(2)电梯向下加速；

(3)如果电梯向下加速运动时 a>g。

[解答]　(1)电梯向上加速运动时，电梯中的一切物体都处于“超重”状态，物重从 mg 增加到 m(a+g)，线上的张力也增加，单摆所受切向分力也增加。因此单摆的周期为

$$T_1=2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}},$$

比原来电梯静止时的周期　$T_0=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$小。

(2)当电梯向下加速时，和上面情况相反，单摆周期为

$$T_2=2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}},$$

比原来 T_0 大。

(3)当电梯向下加速运动 a>g 时，摆球将靠在电梯的顶上，并给电梯一个压力。如果单摆挂在电梯地板上，则将成为一个倒向单摆，周期为

$$T_3=2\pi\sqrt{\frac{l}{a-g}}。$$

2295．如图(a)所示的升降机内有一只水桶，桶内水里放有一块质量为 1 千克的铁块 m，在下列情况下，人在升降机内至少需用多大的力才能把铁捞出水面(已知铁的密度 7.8×10^3 千克/米^3，水的密度为 1.0×10^3 千克/米^3)。

(1)升降机以 5 米/秒的速度匀速上升；

(2)升降机以$\frac{1}{2}$g的加速度匀加速上升；

(3)升降机以$\frac{1}{2}$g的加速度匀加速下降。

[解答]　(1)升降机匀速上升，升降机为惯性参照系；要捞起铁块必须对铁块施加向上的拉力 F，这时铁块的受力情况见图(b)。能捞起铁块的条件为

$$F+F_{浮}\geq mg \qquad (1)$$

式中的 $F_{浮}$为水对铁块的浮力，其大小为

由(1)、(2)式可得最小拉力

$$F=mg-F_{浮}=1\times9.8牛-\frac{1.0\times10^3\times1\times9.8}{7.8\times10^3}牛=8.54牛。$$

进行受力分析时应加一个惯性力。铁块的受力情况见图(c)，要捞起铁块的力 F 必须满足

$$F+F_{浮1} \geq mg+F_{惯} \qquad (3)$$

式中 $F_{浮1}$ 和惯性系中的浮力不同，

所以拉力至少为

其中的惯性力方向向上，铁块受力情况如图(d)所示，解法和第(2)小题。

$$F+F_{浮2}+F_{惯} \geq mg \qquad (5)$$

所以拉力至少为

2296．如图(a)所示，升降机中有一个盛有液体的杯子，站在升降机内的人用细线把浸在液体里的物体匀速提高 h 米，如果这个物体的密度 ρ_1 大于液体的密度 ρ_2，它的体积等于 V，在下述情况下提线的力所做的功是多少？

(1)升降机向上以 1 米/秒的速度作匀速运动；

(2)升降机以 a 向上作匀加速运动。

[解答]　(1)升降机为一惯性参照系，物体的受力情况如图(b)所示。

$$F+F_{浮}=mg，F=mg?\ F_{浮}，$$

$$F=mg?\ \rho_2 gV=\rho_1 Vg?\ \rho_2 Vg=Vg(\rho_1?\ \rho_2)。$$

拉力 F 做的功 W 为

$$W=F\cdot h=Vgh(\rho_1?\ \rho_2)。$$

式中 h 为力 F 相对于参照系提升物体的距离。

(2)取升降机为参照系，其物体的受力情况如图(c)所示。根据平衡条件

$$F+F'_{浮1}=F_{1惯}+mg \quad (1)$$

$$F_{惯}=ma=\rho_1 Va \quad (2)$$

$$F_{浮1}=\rho_2 V(g+a) \quad (3)$$

由(1)、(2)、(3)式可得

$$F=F_{惯}+mg?\ F_{浮1}$$

$$=\rho_1 Va+\rho_1 Vg?\ \ \rho_2 V(g+a)。$$

所以人的拉力所做的功

$$W=F\cdot h=[\rho_1 Va+\rho_1 Vg?\ \ \rho_2 V(g+a)]h$$

$$=Vh(g+a)(\rho_1?\ \ \rho_2)。$$

2297．内半径都为 r 的 U 形管里面装有某种液体。两竖直管相距为 l[见图(a)]，问当 U 形管作下列运动时，两管液面高度差有无变化？若有变化，哪一边高？

(1)U 形管在竖直方向以加速度 a 上升；

(2)U 形管在水平方向以加速度 a 向右运动；

[解答]　(1)当 U 形管竖直加速上升时，以 U 形管为参照系，管内任何液滴除受重力 G 以及周围液滴对它的作用之外，还有惯性力 $F_{惯}$作用，重力和惯性力的合力为 m(g+a)，两管内液体受力情况相同均呈超重状态。故液面仍将保持等高。

(2)以 U 形管为参照系，系统的加速度方向向右，管内所有液滴都受惯性力 $F_{惯}$作用，惯性力方向向左。液体在管内保持相对静止，左右两管的液面产生高度差如图(b)。

在图(b)中建立坐标。取右侧管壁的下方为坐标原点，x 轴正方向向左。取 U 形管底部一个小圆柱的液体为研究对象，它的圆面积为△S，圆柱长为 x，则小圆柱的质量为ρx△S。

小液柱受到两个力作用，如图(b)所示。

$F_{惯}=ma=\rho x\triangle S\cdot\alpha$，方向向左；

A、O 两处的压力差

$F=F_A?\ F_0=p_A\triangle S?\ p_0\triangle S=\triangle S\rho g\triangle h$，方向向右。

由平衡条件 $F=F_{惯}$

由上式可知在有自由表面的管内，液面和原点处比较，其高度差△h

液面也存在高度差。取旋转的 U 形管为参照系，管内液体将受惯性离心力作用。将坐标原点取在转轴 O 处，X 轴指向右方[如图(c)所示]。在 X 轴 A 处取一长为 X 的细圆柱体 OA，横截面积为△S，则液柱的质量为 ρx△S，液柱受力

由平衡条件

由上式可知右边管的外壁处的液面高于 O 处的最大高度差为

自由液面为旋转抛物面形。

2298．有一个直口水桶，其中装有适量的水，当水绕中心轴旋转时，

［解答］　水桶和水以角速度相对于惯性系作匀速转动时，取水桶为参照系，由于惯性离心力的作用，在转动系内液体处于平衡状态，即在桶的边缘部分水面升高，中心凹陷，高层水对较低层水产生的压力和惯性离心力相平衡，如图所示。

在图中沿 x 轴取一截面积为△S 的小圆柱体，其长度为 x，在 P 点的水面高度为 y，因此在 P 处截面△S 上受到液体的静压强和 O 点相比，其差值为：　　$\triangle p=\rho g(y?\ 0)=\rho gy$。

压力　　$F=\triangle p\cdot\triangle S=\rho gy\cdot\triangle S$。

又小圆柱受到的惯性离心力为

由平衡条件

水桶是一旋转体，故由上式可知液面是一个旋转抛物面。

刚体运动

2299．什么叫做质点？什么叫做刚体？两者之间有什么区别和联系？

［解答］　任何物体都具有它的大小和形状，当物体在作平动时，它上面各个点的运动情况完全相同，所以可以用它上面的注意一个点来表，即可以把物体看作是一个没有大小而具有一定质量的点，这种用来代替物体的点称为质点。物体在作其它形式的运动时，各点的运动情况一般是不相同的，如果物体运动的距离远远大于物体本身的大小，而且所研究的问题中不考虑转动，那么就可以忽略物体的大小和形状，把它作为质点。

研究物体的转动时，由于它上面各点的运动速度不相同，因而不能把它看作质点。如果忽略了物体形状大小的变化，把它看成是形状和大小不会改变的物体，就称为刚体。刚体可以看成是由无数质点构成的，而且构成刚体的任意二质点间的距离，在运动中恒定不变，这是刚体的特征。

质点和刚体都是理想的模型，它们都是实际物体在一定条件下的抽象。例如，研究地球绕太阳公转运动时，地球的直径(约为 1.3×10^{4} 千米)和它离开太阳的距离(约 1.5×10^{8} 千米)相比，还不到二万分之一，因而地球在所研究的问题中，显得十分微小，以致它的形状和大小可以略去

不计，把地球当作一个质点来研究。但是在研究地球自转等一系列现象时，地球不能看作质点；由于太阳及其他星球对它的引力作用而引起地球大小和形状的变化可以忽略不计，因此，可以把地球作为一个刚体处理。

2300．什么叫刚体的定轴转动？描写刚体定轴转动的物理量有哪些？它们和描写质点运动的物理量有什么联系？

［解答］ 刚体运动时，如果其中的各个质点都绕同一直线作圆周运动，这种运动叫做刚体的转动，这条直线叫做转轴。转轴固定不变的转动叫做定轴转动。

用角位移θ、角速度和角加速度β来描写刚体的定轴运动。角位移θ表示刚体所转过的角度，单位为弧度；角速度反映刚体定轴转动的快慢和方向，单位为弧度/秒；角加速度β描述了角速度变化的缓急程度，它是单位时间内角速度的增量，单位为弧度/秒^2。

通常把上述描写定轴转动的物理量叫做角量，把描述质点运动的物理量叫线量。由于刚体作定轴转动时，刚体上的每个质点都作圆周运动，所以，从描写质点运动的角度来说，用的是线量；从描写整个刚体运动的角度来说，用的是角量。因此，线量与角量必然有一定的联系。

设刚体上某点到转轴的距离为 r，则在某段时间内该点通过的路程

$$s=\theta\cdot r,$$

某时刻该点的线速度

$$v=\ \cdot r。$$

切向加速度

法向加速度

上述四式就是线量与角量之间的关系式。

2301．什么叫匀变速转动？描写匀变速转动的规律是什么？

［解答］ 刚体绕定轴转动时，如果在任意相等的时间内角速度的变化都相等，即角加速度β为恒量，那末，这种转动就称为匀变速转动。

描写匀变速转动的规律有角速度公式

$$= {}_0+\beta t;$$

角位移公式

式中 $_0$为初角速度。

2302．刚体定轴转动中，一般用θ表示角位移，表示角速度，β表示角加速度。对于θ>0、>0；θ>0、<0；>0、β<0；>0、β>0；=0、β>0；=0，β<0的各种情况，刚体的转动各有什么特点？

［解答］ 由于刚体作定轴转动时，角位移可以有两种不同的方向，所以用角位移θ的正或负来表示这两种转动方向。在一般情况下，取刚体绕逆时针方向转动的角位移θ为正，顺时针方向转动的角位移θ为负。

刚体绕定轴转动时，角速度亦有两种不同的方向，通常取逆时针方向转动的角速度为正，反之为负。

和θ、相似，通常也用β为正或β为负来表示刚体作定轴转动时角加速度的两种不同方向。

θ正、亦正时，表明和θ同向，角位移θ在随时间增大；

θ正、为负时，表明和θ反向，角位移θ在减小(当$\theta_0>0$时)；

正、β为正时，表明和β同向，增大，刚体作加速转动；

正、β为负时，表明和β反向，减小，刚体作减速转动；

为零、β为正时，表明刚体开始时没有转动，刚体作初角速度为零的加速转动；

为零、β为负时，表明刚体开始时没有转动，刚体在和原设正方向相反方向加速转动。

2303．由于地球自转，形成了白天和黑夜。如果以太阳为参照系，则在地球的赤道上一点的线速度是白天大还是晚上大？

［解答］ 地球在自转的同时又绕太阳公转，地球的自转角速度和公转角速度方向相同。地球赤道上一点在白天，靠近太阳的一侧，公转线速度方向和地球自转线速度方向相反，合速度较小。夜晚赤道上这点远离太阳的一侧，公转线速度方向和自转线速度方向相同，合速度较大。

2304．一台发电机的飞轮在时间 t 内转过的角度为 $\theta=at^2+bt+c$，式中的 a、b、c 都是常量。试证角加速度的表达式 $\beta=2a$。

［证明］ 绕固定轴转动的刚体，在时间 t 到 t+△t 内转过的角度

$\triangle\theta=\theta_2$? $\theta_1=a(t+\triangle t)^2+b(t+\triangle t)+c$? $[at^2+bt+c]$

$=2a\triangle t\cdot t+a\triangle t^2+b\triangle t$。

2305．一个刚体由静止开始，绕一个固定轴作匀角加速转动，由实验可测得刚体上某点的切向加速度为 a_t，法向加速度为 a_n，试证明 $a_n/a_t=2\theta$，θ为任意时间内转过的角度。

［证明］ 圆周运动的法向加速度为

切向加速度为

$a_t=\beta r$，

2306．一个质点在半径为 r 的圆周上运动，在某一瞬时角加速度为

［证明］ 圆周运动的线加速度是切向加速度和向心加速度(也叫法向加速度)的合矢量，向心加速度为 $a_n=$ ^2r，切向加速度为 $a_t=r\beta$。

2307．一个绕轴转动的重飞轮，由于受摩擦而渐渐变慢，在第一分钟末，它的角速度为初角速度 $_0$的十分之九，假设摩擦力矩恒定不变，试求此飞轮在第二分钟末时的角速度。

2308．汽车发动机曲轴的转速在 12 秒内，由每分钟 1200 转均匀地增加到每分钟 2700 转，求：(1)角加速度，(2)在此时间内，曲轴转了多少转？

［解答］ (1)由题意知发动机曲轴为匀角加速转动,转动时间为 t=12

2309．一辆汽车以 16.67 米/秒的速度行驶，它的车轮直径为 0.76 米，(1)求车轮绕轴转动的角速度；(2)如果使车轮在 30 转内匀减速地停止下来，问角加速度多大？(3)在刹车期间，汽车前进了多远？(设刹车期间轮子在地面上仍作纯滚动)

式中 =0， $_0$=43.9 弧度/秒，θ=2πn=2×3.14×30=188.4 弧度。

2310．飞轮从静止开始作匀加速运动，在最初 2 分钟内转了 3600 转。试求飞轮的角加速度和第二秒末的角速度。

［解答］　飞轮从静止开始经 120 秒转过的角度

$$\theta=2\pi\times3600 \text{ 弧度。}$$

在第二秒末的角速度为

=Bt′=π×2 弧度/秒=2π弧度/秒。

2311．一个均匀圆盘由静止开始以恒定角加速度绕一根固定轴转动。在某一时刻，它的转速是 10 转/秒，再转 60 转后，它的转速是 15 转/秒。试计算(1)角加速度，(2)转过上述 60 转所需要的时间，(3)由静止开始达到 10 转/秒的转速所需要的时间和圆盘共转过了多少转？

［解答］　(1)根据刚体绕固定轴转动的运动公式

将(2)式代入(1)式得

(2)根据公式

$_2=$ $_1+\beta t$，

(3)由公式

$_1=$ $_0+\beta t$，而 $_0=0$，

$_1=2\pi n_1$，

由公式

2312．直升飞机的水平旋翼在一分钟内转速由 300 转/分变为 225 转/分，(1)试求这段时间内的平均角加速度。(2)假设这个角加速度保持不变，试计算水平旋翼停止转动所需要的时间。(3)由 225 转/分到停止转动时旋翼共转了多少转？

［解答］ (1)已知水平旋翼的转速 n_1=300 转/分=5 转/秒，n_2=225 转/分=3.75 转/秒,则平均角加速度 β 可根据刚体绕固定转轴转动的公式得

(2)根据公式得

(3)已知 n_0=225 转/分=3.75 转/秒，n_t=0，则到停止转动时的角位移 θ 根据公式可得

2313．如图所示，发电机的皮带轮 A 由汽轮机的皮带轮 B 带动。轮 A 的半径 r_1=30 厘米，轮 B 的半径 r_2=75 厘米。已知汽轮机在起动后以匀角加速度 π 弧度/秒 ^{2} 转动，轮和皮带间不发生滑动。问经过多少时间后发电机达到 3000 转/分的转速？

［解答］　由于 A、B 两轮由皮带传动，两轮边缘的线速度和切向加速度相等，所以有 v_1= $_1r_1$；v_2= $_2r_2$；a_1=β_1r_1；a_2=β_2r_2。

即 $_1r_1$= $_2r_2$；β_1r_1=β_2r_2。

因为汽轮机作匀角加速转动，而且 $_0$=0，

由(1)式及(2)式得

2314．一个刚体由静止开始以恒定的角加速度绕固定的转轴 OO′转动，如图所示。

(1)试用角加速度表示刚体中某一质点 A 的法向和切向加速度，设该点离轴的距离为 r；

(2)如果在某一时刻质点的合加速度和切向加速度成 60°角,这时刚体转过了多大的角度θ？

［解答］ 刚体由静止开始转动，$_0$=0，设角加速度为β，法向加速

(1)因为 $a_n = {}^2r$，

$= {}_0 + \beta t$，${}_0 = 0$，

所以 $a_n = (\beta t)^2 r = \beta^2 r \cdot t^2$，

(2)刚体由静止开始经时间 t 后加速度为 a，由题意得

公式

2315．如图所示，自行车的轮轴以加速度 a 匀加速前进，如果初速为 0，轮子的半径为 R，假定自行车前进时车轮是作纯滚动的，求轮子转过 10 转后

(1)A、B、C、D、O 各点的速度大小；

(2)A、C 点的加速度各为多大。

［解答］ 自行车轮上各点的运动可以看作沿地面的平动和绕轴心的转动的合运动，分别求出 10 转后平动速度和绕轴心的转动速度，然后用矢量合成法求各点的速度值和加速度值。

(1)自行车在地面上作纯滚动，轴心经过的路程和圆周上 C 点(或其他点)转过的圆弧弧长相等，所以 s=10×2πR=20πR。由于初速 v=0，

$_0$=0，由运动学公式得

式中的 v 为车轮的平均速度，为转动的角速度。轮子边缘各点相对轴

$v_C=?$ $R+v=0$，

即此时刻 C 点和地保持相对静止。

即 A 点的速度是平动速度的 2 倍。同理，v_B 和 v_D 的速度，大小为

其中 v_D 的方向斜向上和水平方向成 45°角，v_B 的方向斜向下和水平方

于 C 点的切向加速度和平动加速度反向，所以由加速度合成公式得

$$a_C=a_n=40\pi a,$$

由于 A 点的切向加速度和平动加速度一致，所以由加速度的合成公式得

2316．一个飞轮直径为 18 厘米，在它的边缘有一颗螺丝钉。

(1)该飞轮分别以每分钟 2000 转和每分钟 4000 转的转速转动时，螺丝钉的速率和法向加速度各为多少？

(2)如果飞轮的转动由 2000 转/分匀加速转动到 4000 转/分，其间经历 5 分钟，试求该飞轮的角加速度和螺丝钉的切向加速度。

［解答］ (1)螺丝钉和飞轮一起作圆周运动,因此它的速度率就是线

得线加速度

(2)当飞轮的转动是匀加速时，由公式得

2317．什么是刚体的质心？它与重心有什么区别？

［解答］　质心是刚体的质量中心，是和刚体本身的质量分布和几何形状相关联的特殊点，刚体运动的平动部分可以用质心的运动来描述。

重心是地球对刚体的重力的合力作用点，重心的位置在重力作用线上，当离地球很远时，重力可认为不存在，重力的作用点也不存在，重心也就没有意义。但质心仍然存在，仍代表质量的中心。

通常情况下物体的重心和质心重合。当重物在地球表面附近，且大小和地球相比可以不计时，作用在刚体上各部分的重力作用线平行，重力加速度大小相等，这时求得的重心位置和质心重合。当物体巨大，情况有所不同。如图所示，有一根很大的均匀棒，它的质心在几何中心 C 处，但各部门所受的重力 1、2、3、4 的合力作用点已不在 C 点，这样的

物体，重心和质心就不再重合，可见质心和重心有不同的物理意义，它们不能等同。

2318．如何计算刚体的质心位置？

［解答］　刚体可以看作大量质点的组合。设构成刚体的第 i 个质点的质量为 m_i，它在 t 时刻的坐标为 x_i，y_i，z_i，则刚体的质心 C 在该时刻的坐标(x_c，y_c，z_c)为

这就是计算质心位置的一般公式。

通常求物体质心还有以下几种方法。

(1)对称法。质量均匀分布而且形状对称的刚体的质心，就在它的对称中心或在对称轴、对称面上。

(2)组合法。计算由几个部分构成的刚体的质心位置，可将每个部分的质量集中在该部分的质心上，得一质点；然后由上面计算质心位置的一般公式，求出所得的那些质点的质心，就是组合体的质心。

2319．两质点的质量分别为 m_1 和 m_2。试证明它们的质心在两质点的连线上，并且质心和两质点的距离和它们的质量成反比。

［证明］　设质点 m_1 和 m_2 都在坐标轴 x 上。由于 y_1 和 y_2 都等于零，所以质心坐标 Y_C 为

这就证明了质心必在 x 轴上，也就是在两质点的连线上。

得

$$m_1X_C+m_2X_C=m_1x_1+m_2x_2,$$

$$m_1(X_C?\ x_1)=m_2(x_2?\ X_C),$$

由图可知质心到 m_1 的距离为 $X_C?\ x_1$，质心到 m_2 的距离为 $x_2?\ X_C$。

这就证明了质心到两质点的距离和质点的质量成反比。

2320．月球的质量约为地球质量的 0.013 倍，月球中心和地球中心的距离约为地球半径的 60 倍。地球和月球系统的质心距地球中心多远？已知地球半径约为 6.4×10^6 米。

［解答］　取地球中心为坐标的原点，地心到月球中心的连线为 x 轴方

地球和月球的中心距离 s=60r。由质心位置公式得

2321．分别求出图(a)、图(b)中所示的质点组的质心位置。

［解答］　(1)由质心位置公式知

式中 x_i 和 y_i 为第 i 个质点的 x 坐标和 y 坐标，m_i 为第 i 个质点的位置。

根据图(a)中给定 A、B、C 三质点的质量 m_A、m_B、m_C 的数值和它们的坐标位置，求得质点组的质心位置为

(2)和第(1)小题解法相同。根据图(b)上的已知条件，求得

2322．一个水分子(H_2O)，由一个氧原子(质量 $M_O=30.2\times10^{?24}$ 克)和两个氢原子(质量为 $2M_H=2\times1.68\times10^{?24}$ 克)组成。氢、氧原子的中心距离为 $2.76\times10^{?8}$ 厘米，氢和氧的两根连线的夹角为 105°(见图所示)，求其质心的位置。

［解答］　设水分子的位置坐标如图所示。氧原子 O 的坐标为(0，0)，一个氢原子的坐标为($2.76\times10^{?8}$，0)，另一个氢原子的坐标为(? 2.76

$\times10^{?8}$，0)，另一个氢原子的坐标为(? $2.76\times10^{?8}$cos75°，$2.76\times10^{?8}$sin75°)。由质心位置公式得

2323．图(a)、(b)中是两块面密度都相等的均匀薄板，求它们的质心坐标。

［解答］ (1)把图(a)中的均匀薄板分割成两块，A 的面积为 S_A，B 的面积为 S_B，它们的质心位置在几何中心上，即 A 的质心在(1.5，2)，B 的质心在(3.5，2.5)。设面密度为σ，则两板的质量分别为 $m_A=\sigma S_A$，$m_B=\sigma S_B$。

根据质心位置公式得

(2)求图(b)中均匀木块的质心位置，可用填补法。把挖去的小圆填入大圆内，完整大圆的质心位置在几何中心(0，0)处。由于对称性，大圆挖空后的质心在 y 轴上的坐标为零，因此它的质心为(X_1，0)。小圆的质心位置为(? 1，0)。有缺少的大圆质量为 m_1，小圆的质量为 m_2，因质量分布均匀，

所以 $m_1=\sigma S_1=\sigma[\pi(2r)^2?\ \pi r^2]=3\pi\rho r^2$，

$m^2=\sigma\pi r^2$，

根据质心位置公式得

2324．计算下列刚体的质心位置。

(1)均匀细杆共长 6 米，把它折成直角，如图(a)所示；

体，如图(b)所示。

［解答］ (1)均匀细杆 OA 段的质心位置为(1.5，0)，OB 段的质心为

由质心位置公式得

(2)如图(b)所示，由对称性知 $Y_C=0$；在求 X_C 时，把刚体视为两部分

设刚体的体密度为ρ，则左边部分的质量 m_1 为

右边部分圆筒的质量 m_2 为

由质心位置公式得

2325．设有质量分别为 12 千克和 20 千克的 A、B 两球，相距 4 米，中间未连结，现有 64 牛的力作用在 B 球上，力的方向沿两球的中心连线由 A 指向 B，且两球的半径相等，初速都为零，求：

(1)质心起始位置；

(2)3 秒末质心的位置

(3)质心的加速度。

[解答]　如图所示，取质量 m_1=12 千克的物体坐标 x_1=0，质量 m_2=20 千克的物体坐标 x_2=4 米，两球共同的质心位置为 X_C。

(1)开始时两球未运动，由质心位置公式得

(2)第三秒未质点 m_2 的坐标为

由质心位置公式得

代入质心位置公式得

a_C=2 米/秒 ^{2}。

2326．什么叫转动惯量？如何计算刚体对某转轴的转动惯量？

［解答］　任何物体在平动时都具有保持原有运动状态的特性，叫做平动惯性；转动的物体也有这种特性。可以设想，假如砂轮的轮与轴之间丝毫摩擦也没有，那么已经转动的砂轮就会永远转动下去，这就是保持原有状态的特性，叫做转动惯性。量度平动惯性的物理量是质量，量度转动惯性的物理量叫做转动惯量，常用符号 I 表示，单位是千克 ·米 ^{2}。

刚体的转动惯量取决于刚体各部分的质量来给定转轴的分布情况。具体地说，刚体的转动惯量与下面三个因素有关：

(1)刚体的质量；

(2)在质量一定的情况下，各部分的质量分布情况；

(3)转轴的位置。同一刚体对不同转轴的动惯量是不同的，只有指出刚体对某一转轴的转动惯量才有明确的意义。

转动惯量的表达式为

即将刚体分成若干质点，各质点的质量分别乘以它们到转轴的垂直距离的平方，其总和就是刚体对该转轴的转动惯量。

通常计算转动惯量还有以下方法。

(1)公式法。下面给出几种常用的、形状简单的刚体地某些转轴的转动惯量的计算公式。

对其它的匀质刚体，可查阅有关手册。

(2)平行轴定理。设刚体对任一轴的转动惯量为 I，对过质心且与该

轴平行的转轴的转动惯量为 I_C，二轴间的垂直距离为 d，则

$$I=I_C+md^2,$$

式中 m 为刚体的质量。

(3)正交轴定理。设一薄板状刚体对板面内两条正交转轴的转动惯量为 I_x 和 I_y，对通过该二轴交点且垂直于板面的转轴的转动惯量为 I_x，则

$$I_z=I_x+I_y。$$

(4)组合法。由几个部分组成的刚体对某轴的转动惯量，等于各部分对同一轴的转动惯量之和。

2327．不少机械中的飞轮把大部分质量分布在它的边缘上，这是为什么？

［解答］ 飞轮依靠它的巨大转动惯性，使机械转动平稳。转动惯性的大小不仅和质量的大小有关，而且和质量的分布情况有关，转动惯性的大小用转动惯量来表示，一定的质量离转轴越远，它的转动惯量越大。例如，一定的质量 m 先组成一个实心的半径为 R 的圆盘，它的转动惯量

2328．一个质量分布均匀的飞轮由一个直径为 30 厘米，厚度为 2 厘米的圆盘和两个直径都为 10 厘米，长为 8 厘米的圆柱体组成，设飞轮的密度为 7.8×10^2 千克/米^3，求飞轮对转轴的转动惯量。

［解答］ 右图为飞轮的示意图。飞轮的转动惯量为

$$I=I_1+2I_2,$$

其中 I_1 为圆盘对中心轴的转动惯量，I_2 为圆柱体对中心轴的转动惯量，由于密度分布均匀。

所以

式中 $\rho=7.8\times10^3$ 千克/米^3，$r_1=15\times10^{-2}$ 米，$r_2=5\times10^{-2}$ 米，$a=2\times10^{-2}$ 米，$b=8\times10^{-2}$ 米。

2329．一个中空的均匀球体，质量为 M，如果内半径为 R_1，外半径为 R_2，试求它对通过球心某轴线的转动惯量 I。

所以半径分别为 R_1 和 R_2 的实心均匀球对中心轴的转动惯量分别为：

式中 M′为小球体的质量，M″为大球体的质量，M″=M+M′。

即得中空球体对中心轴的转动惯量

2330．有一正方形均匀薄板，边长为 2r，面密度（单位面积的质量）为σ，如果挖去直径为 r 的圆形部分，如图所示。求剩余部分对正方形一边 AB 的转动惯量。

[解答]　取坐标系如图所示。设把挖去的圆填入孔内，则正方形薄板的转动惯量

直径为 r 的圆面对圆心的转动惯量为 I_0，对过圆心平行于圆面轴线

由平行轴定理得小圆板对 AB 轴的转动惯量 I_2 为

2331．有一根质量分布不均匀的细杆，线密度（单位长度的质量）分布如图所示。求它的质心位置和对垂直于杆的中心轴 OO′的转动惯

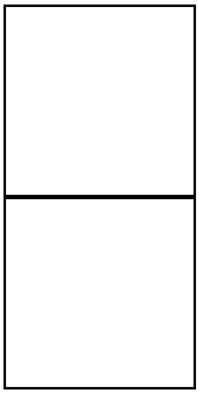
［解答］ 取坐标原点在杆的几何中心，则 ρ_2 部分的质心就在坐标原

由质心位置公式得

又因 $\rho_2=2\rho_1$，$\rho_2=4\rho_1$ 代处上式得

不均匀杆对轴 OO′的转动惯量 I 为三部分的转动惯量之和。根据均

转动惯量 I_2 为



2332．牛顿第二定律 F=ma 是质点动力学的一条重要规律，在刚体定轴转动中跟它地应的动力学规律是什么？如何应用？

［解答］　刚体绕定轴转动的转力学规律是转动定律，它描写了刚体的转动惯量 I、合外力矩 M 和角加速度β三者之间的关系

$$M=I\beta,$$

式中 M、I 都是对同一转轴而言的。

转动定律在转动中的地位，就相当于牛顿第二定律在平动中的地位。它揭示了转动惯量、力矩和转动角加速度三者之间的关系，只要已知其中两个量，就可以求另一个量。利用它分析问题的思路和方法是

(1)根据问题的要求和计算方便，确定研究对象；

(2)进行受力分析，计算力矩；

(3)分析研究对象转动的特点，例如有无角加速度等；

(4)规定转动的正方向，根据转动定律 $M=I\beta$ 列方程、求解。

如果所研究的问题涉及多个刚体组成的连接体，其中有的刚体作平动，有的刚体作定轴转动，那么分别对转动的刚体用转动定律列方程，对平动的刚体用牛顿第二定律列方程，并利用线量和角量的关系找出平动刚体的加速度和转动刚体的角加速度之间的联系，建立辅助方程，就可以求得所需的结果。

2333．刚体绕某一固定轴转动，当有一力矩作用在刚体上，并不断地在增大时，刚体转动的角速度和角加速度将怎样变化？当力矩在减小时，角速度和角加速度又将怎样变化？

［解答］　刚体绕固定转动轴以某一角速度转动，当力矩方向和初角速度方向一致时，只要力矩的方向不变，不论力矩增大还是减小，刚体总是作加速转动，只是角加速度大小不同，但角速度总是随时间而在增大。可见只有角加速度是随着力矩的增大而增大，随力矩的减小而减小，但角速度总是在增大；当力矩方向和初角速度方向相反时，角加速度仍随着力矩的增大而增大，随着力矩的减小而减小，但角速度总是在减小，直到等于零，才能反向转动而逐渐增大。

2334．把一根杠棒一端固定在一根水平转轴上，使杠棒可以在竖直平面内自由转动。第一次把杠棒拉到水平位置轻轻放手；第二次把杠棒拉至和水平方向成 60°角的位置轻轻放手。问在这两种情况下

(1)两次放手的一瞬间，杠棒的角加速度是否相同？

(2)棒是否作匀加速转动？

［解答］　(1)设棒的质量为 m，质心离开转动轴的距离为 l，棒和水

平方向的夹角为α，重力对转轴产生的力矩为 M=malcosα，根据转动定律 M=Iβ，可求和角加速度为

$$\beta=M/I=mgl\cos\alpha/I。$$

式中 I 为杠棒对一端的转动惯量。可见角加速度β和 cosα成正比，α越小角加速度越大，所以两放手的瞬时角加速度不相同，在水平位置时的角加速度最大。

(2)作匀加速转动的刚体，它的角加速度β为常量，从(1)讨论知角加速度β随着α的变化而改变，所以杠棒的运动为非匀加速转动。

2335．一个均匀的等腰三角形薄板 ABC，如果用线穿过 O 点吊起来恰能使薄板呈水平平衡状态（如图），过 O 点作 EF∥BC，如果沿 EF 线锯断板，问薄板锯断后的两部分的质量是否相等？

[解答]　图中的三角形 AEF 和梯形 EBCF 的重心至 O 点的距离不等，根据力矩的平衡可知两边的重量也不等。

2336．如图所示。两个物体的质量分别为 m_1 和 m_2，滑轮是一个质量均匀分布的圆盘，半径为 r 质量为 m_3。如果滑轮和滑轮间的摩擦不计，桌面是光滑的，轻绳和滑轮间无相对滑动，三个物体的质量都相等，即 $m_1=m_2=m_3=m$。求证：不计滑轮质量时系统的加速度α跟考虑滑轮质量

[证明]　当滑轮质量略去不计时，根据牛顿第二定律可得

$$T_2=m_2\alpha \qquad (1)$$

$$m_1g-T_1=m_1\alpha \qquad (2)$$

联立(1)、(2)、(3)得

当考虑滑轮质量时，根据牛顿第二定律确定 m_1 和 m_2 的运动方程为

$$T_2=m_2\alpha' \qquad (4)$$

$$m_1g-T_1=m_1\alpha' \qquad (5)$$

根据刚体转动定律得滑轮的运动方程为

由于滑轮和绳之间无相对滑动，故

$$\alpha' = r\beta \qquad (7)$$

(7)式和(6)式解得

(4)式+(5)式+(8)式得

所以

2337．质量为 0.5 千克，长为 0.4 米的均匀细棒，可绕垂直于棒的一端的水平轴 O 转动，如果把这棒放在水平位置，然后无初速落下。求在开始转动瞬间的角加速度。

[解答]　根据刚体的转动定律

$$M = I\beta,$$

得

2338．设某机器上的飞轮的转动惯量为 63.6 千克·米 ^{2}，转动的角速度为 31.4 弧度/秒，在恒定制动力矩的作用下，飞轮经过 20 秒匀减速地停止转动，求角加速度和制动力矩。

［解答］　由转动公式得

$$\omega_t-\omega_0=\beta\cdot t,$$

因 $\omega_t=0$，$\omega_0=31.4$ 弧度/秒，$t=20$ 秒，

根据刚体转动定律得

$$M=I\beta,$$

式中 I 为转动惯,等于 63.6 千克 米 ^{2},制动力矩 $M=1.57\times63.6$ 牛 米 =99.9 牛·米。

2339．两个皮带轮 A、B，半径分别为 R_1 和 R_2，重力各为 G_1 和 G_2，两轮以皮带相连结，可绕两平行的水平轴转动。如果在 A 轮上作用一个力矩 M，试求两轮的角加速度。两皮带轮都可作为均匀圆盘，皮带和轮之间无滑动，皮带的质量和两轮轴承处的摩擦都可忽略不计。

［解答］　设皮带轮上皮带的张力分别为 T_1、T'_1 和 T_2、T'_2，如图所示，两轮的角加速度分别为 β_1 和 β_2 力矩 M 使两轮沿顺时针方向加速转动。

对 B 轮进行受力分析知，$M_2=T'_2R_2-T'_1R_2$，由转动定律得

$$T'_2R_2-T'_1R_2=I_2\beta_2 \qquad (1)$$

对 A 轮进行分析知，$M_1=M+T_1R_1-T_2R_1$，由转动定律得

$M=T_1R_1-T_2R_1-I_1\beta_1$ (2)

由于皮带和皮带轮间无滑动得

$\beta_1R_1=\beta_2R_2$ (3)

$T_1=T'_1$ (4)

$T_2=T'_2$ (5)

联立式(1)、(2)、(3)、(4)、(5)解得

$\beta_2=2gM/(G_1+G_2)R_1R_2$。

2340．一个质量为 m，长为 l 的均匀细杆，两端附着质量分别为 m_1 和 m_2 的两个小球，且 $m_1>m_2$，此杆可绕通过杆的中点的水平轴在铅直平面内自由转动，先把杆放置在水平位置，然后由静止放开，求开始转动时杆的角加速度。

[解答]　杆受到两个转动力矩作用，如图所示。合力矩为

根据刚体转动定律得

$M=I\beta$ (2)

式中 I 为系统的转动惯量，杆由三个部分组成，

(1)式和(3)式代入(2)式得

2341．天平的灵敏度（感量）S_p 是标志天平质量好坏的一个重量指标，它被定义为在天平负载为 P，并达到平衡的条件下，把单位质量

式中 R 为指针长度，q 为加放的质量。现有一架灵敏天平，它的两臂长度都是 L，支点刃口 a 比两端刃口 b、c 高，横梁的重力为 W，它的重心 D 位于指针上，距支点 a 的距离为 h，∠abc=∠acb=a，如图所示。求这架天平的灵敏度 S_p。

［解答］　以 a 为转轴，由平衡条件理

得

2342．质量为 60 千克的飞轮，是一个直径为 0.5 米的均匀圆盘。如果飞轮转速为 1000 转/分，要求在 5 秒内制动，求制动力 F 为多大？设闸瓦和飞轮之间的摩擦系数μ=0.40，尺寸见图所示。

［解答］　飞轮在杠杆的作用下和闸瓦间产生压力，同时产生了摩擦力矩，根据刚体的转动定律得

式中的 d 为飞轮的直径，f 为摩擦力，f=μI，I 是飞轮对轴心 O 的

$$\omega=\omega_0-\beta t,$$

由题设条件知$\omega=0$，t=5 秒。

根据杠杆原理得杠杆对飞轮的压力 N 为

将(3)式和(2)式代入(1)式得

2343．长为 l 的轻绳在端点有一个质量为 m 的质点，另一端固定在 O 点并沿竖直平面作圆周运动，绳经过水平位置时质点速度值为 v。另有一均匀细棒，质量也为 m，长度同绳长相等，也绕 O 点转动，在水平时端点速度也是 v，求两种情况 O 点受力有何不同？

[解答]　图(a)中质点 m 作圆周运动的向心力是绳子所提供的，这个

在图(b)中细杆受力情况较绳复杂，内部受力情况可以暂时不考虑，质心

由质心运动定律得竖直向下的质心加速度 a_C 为

式中 T 为转轴 O 作用在细杆是竖直方向的力。由于杆绕 O 轴旋转，所以必须满足条件

把(3)式代入(2)式得

再把(4)式代入(1)式得

即

棒作用在 0 点竖直向下的力，大小为 T，水平方向向右的力大小为 F，其合力为

和水平方向的夹角

2344．一个燃汽轮机在试车时，加大油门，经过 t 秒时间，涡轮的转速由每分钟 2800 转增大到每分钟 11200 转。已知燃汽作用在涡轮上的力矩为 2.03×10^3 牛·米，涡轮的转动惯量为 25 千克·米 ^{2}，求时间 t 为多少？

［解答］ 根据刚体的转动定律得

$$M=I\beta \qquad (1)$$

式中 $n=11200$ 转/分，$n_0=2800$ 转/分，$I=25$ 千克·米 ^{2}，$M=2.03\times$

2345．一个质量均匀分布的圆盘形飞轮，直径为 50 厘米，质量为 25 千克，转速为 1000 转/分。为了使飞轮停止转动，压紧制动闸瓦，如果闸瓦对轮的压力为 500 牛，闸瓦和轮间的摩擦系数为 0.4。求制动后飞轮转过多少圈后才停止转动。

［解答］ 如图所示，使飞轮制动的力矩是摩擦力产生的，由题意知

$$f=\mu N=0.4\times500\ 牛=200\ 牛,$$

所以

下减速转动。

(1)式代入(2)式得

2346．一个力矩为 20 牛 · 米，作用在一个转轮上，在 10 秒内该轮的转速自零增加到 100 转/分。然后移去外加力矩，转轮因受到轴承上的摩擦力矩的作用，经 100 秒而停止转动。试计算：(1)转轮的转动惯量；(2)摩擦力矩；(3)自开始转动到静止时所转过的总圈数。（设摩擦力矩为恒定值 M_f）

［解答］ (1)转轮在恒力矩的作用下作匀角加速转动，它的角加速度

$$(M-M_f)=I\beta$$

其中ω′为最后停止时的角速度，ω_0 为开始时的角速度，从题意知 $\omega_0=0$。

联立(1)式和(2)式得

I=M·△t·△t′/ω(△t+△t′)

(2) 从(2)式得

的角度

过的角度

自开始转动到停止转动转过的角度

共转过的圈数

2347．有一根长为 l、质量为 m 的匀质细杆，两端各牢固地连结一个质量也为 m 的小球，整个系统可绕垂直于细杆的水平轴 O 无摩擦地转动，如图所示，当系统转过水平位置时试求

(1)系统所受的合外力矩；

(2)系统对该轴的转动惯量；

(3)系统的角加速度。

[解答]　(1)由题意知 O 为转轴，在 A、B、C 处各受重力 mg，作用于 C 和 B 处的力使系统顺时针方向转动,作用于 A 的力使系统逆时针方向转动。

所以

(2)对 O 轴的转动惯量 I 是由三部分组成，即 $I=I_A+I_B+I_C$。

所以

(3)根据刚体转动定律，

$$M=\beta \cdot I,$$

得

细杆沿顺时针方向加速转动。

2348．如图所示，有一刚体，由长为 2r 的均匀细杆和半径为 r 的均匀细圆环构成，环的圆心和杆在同一直线上，杆和圆环的质量都为 m，整个系统可以绕杆上 O 端的水平轴在铅直平面内转动。先将杆抬到水平位置释放，使它自由下摆。试求：

(1)刚体绕 O 轴的转动惯量；

(2)杆在水平位置时，刚体所受的力矩和该时刻的角加速度；

(3)当杆摆到和竖直线成θ角时，刚体所受的力矩和该时刻的角加速度；

(4)杆和竖直线成θ角时，刚体质心的切向加速度。

[解答]　(1)刚体的转动惯量由两部分组成，即细杆对 O 点的转动惯

环对 O 点的转动惯量为 $mr^2+m(3r)^2$。所以刚体对 O 轴的转动惯量

(2)刚体在水平位置时所受到的力矩为重力矩

$$M=mg\cdot r+mg\cdot(3r)=4mgr,$$

即

(3)当细杆和竖直线成θ角时，刚体所受重力矩

$$M'=4mgr\sin\theta,$$

由转动定律得

$$M'=I\beta',$$

即得

(4)由切向加速度公式　$a_\tau=\beta\cdot 2r$。

所以

2349．一根轻绳绕在半径为 1 米、质量为 100 千克的均匀圆盘飞轮上，而飞轮能绕通过中心且垂直于飞轮面的水平轴自由转动。(1)如果在绳的一端加一 93 牛的拉力，求飞轮的角加速度；(2)如果把 93 牛的重物挂于绳的下端，计算飞轮的角加速度。

[解答]　(1)根据题意　　　$M=F\cdot R$　　　(1)

根据转动定律　　　　　$M=I\beta$　　　(2)

(2)飞轮所受的力矩 $M=T\cdot R$　　　　　(4)

对重物　　　　　　　　$m'g-T=m'a$　　　(6)

此时切向加速度和角加速度之间的关系

$a=R\cdot\beta$　　　　　(7)

由(6)式得　　　$T=m'(g-a)$　　　　(8)

将(8)式代入(4)式　　　$M=m'(g-a)\cdot R$　　　(9)

将(7)式代入(9)式得　　$M=m'(a-R\beta)\cdot R$　　(10)

2350．有一个实心匀质圆柱形滑轮，质量为 M，半径为 R，可绕垂直圆面的中心水平轴转动，在滑轮边缘上绕有一根不可伸长的轻质软绳，绳的端点悬有一个质量为 m 的物体，如图所示。如果绳和滑轮间无滑动，求被悬挂的物体的加速度 a 和绳的张力 T 各是多少？

的张力 T，它产生的力矩为 TR。由转动定律得

$$RT=I\beta \qquad (1)$$

根据 m 物体的受力情况，运动方程式为

$$mg-T'=ma \qquad (2)$$

而 $$T=T' \qquad (3)$$

因为 m 的加速度 a 和滑轮边缘的切向加速度相等，即得

$$a=R\beta \qquad (4)$$

联立求解得

$$a=2mg/(2m+M);$$

$$T=mMg/(2m+M)。$$

2351．图(a)为一个阿德伍特机，一根细而轻的绳索跨过一个定滑轮，绳的两端分别悬有质量为 m_1 和 m_2 的物体，且 $m_1>m_2$。设定滑轮质量为 M，半径为 R，绳的质量略去不计，绳和滑轮间无相对滑动。试求物体的加速度和绳的张力。如果略去滑轮运动的影响，将会得到什么结果？

[解答] 隔离 m_1、m_2、M，分别作受力分析，如图(b)所示。

由于 $m_1>m_2$，m_1 的加速度方向向下，M 的角加速度β沿顺时针方向。根据牛顿第二定律得

$$T_2-m_2g=m_2a \qquad (1)$$

$$m_1g-T_1=m_2a \qquad (2)$$

滑轮 M 共受三个力作用，滑轮约束在轴 O 上，因此只有转动，它所受转动力矩为

$$T'_1R-T'_2R=I\beta,$$

绳子和滑轮间无滑动，得

将(4)式代入(3)式得

因为 $T_1=T'_1$，$T_2=T'_2$

(1)式+(2)式得

$$T_2-T_1-m_2g+m_1g=(m_1+m_2)a \quad (6)$$

(5)式+(6)式得

(7)式代入(1)式得

(7)式代入(2)式得

在质点动力学中常把滑轮的质量略去不计，则 M=0，代入(7)、(8)、(9)式得

这就是质点动力学中所得到的结果。

2352．图中一个物体质量 m=5 千克，从一个倾角为 37°的斜面下滑。物体和斜面间的滑动摩擦系数μ=0.25。一个飞轮装在定轴 O 处，绕在飞轮上的绳子和物体相连。如果飞轮的质量 M=20 千克，而且均匀分布，半径 R=0.2 米，求：

(1)物体沿斜面下滑的加速度多大？

(2)绳中的张力多大？

[解答]　对飞轮进行受力分析，由于飞轮只有转动没有平动，根据刚体的转动定律得

$$T'\cdot R=I\beta$$

对物体 m 进行受力情况分析，列出它在沿斜面方向上的运动方程

$$mg\sin 37° - T - \mu mg\cos 37° = ma \qquad (2)$$

由于飞轮边缘的切向加速度 a 等于物体 m 的加速度，所以

$$a = \beta \cdot R \qquad (3)$$

式(3)代入式(2)得

$$mg\sin 37° - T - \mu mg\cos 37° = m \cdot \beta R \qquad (4)$$

因为 $T = T'$，

(1)式÷(4)式得

将 T 和式(3)代入式(1)得

2353．质量为 m_1 和 m_2 的两个物体分别悬挂在如图(a)所示的组合轮上，设两轮的半径分别为 R 和 r，两轮固连在一起，转动惯量分别为 I_1 和 I_2，轮和轴承间的摩擦可以略去不计，绳的质量也略去不计。试求两物体的加速度和绳的张力。

［解答］　设 m_1 的加速度 a_1 向下，m_2 的加速度 a_2 向上，组合轮角加速度β逆时针方向。隔离三物体，对三物体进行受力分析，如图(b)所示。

根据牛顿第二定律得

$$m_1g - T_1 = m_1a_1 \qquad (1)$$

$$T_2 - m_2g = m_2a_2 \qquad (2)$$

而轮约束在轴上，在 T'_1 和 T'_2 作用下沿逆时针方向转动，根据转动定律得

$$T'_1R - T'_2r = I\beta$$

式中 $I = I_1 + I_2$，β为角加速度，

所以 $$T'_1R - T'_2r = (I_1 + I_2)\beta \qquad (3)$$

因为组合轮只有一个角加速度β，且绳子和轮间无相对滑动，故得

$$a_1 = \beta R \qquad (4)$$

$$a_2 = \beta r \qquad (5)$$

把(4)式(5)式分别代入(1)式和(2)式得

$$m_1g - T_1 = m_1\beta R \qquad (6)$$

$$T_2-m_2g=m_2\beta r \qquad (7)$$

$T_1=T'_1$，$T_2=T'_2$，

将(6)式(7)式代入(3)式消去 T_1 和 T_2 得

将(8)式分别代入(4)式和(5)式得

(9)式代入(1)式得

(10)式代入(2)式得

2354．一个圆柱体在地面上作纯滚动，它既不是定轴转动，也不是平动。如何处理这类问题？

[解答] 一般地说，刚体的任何复杂运动都可以看成由两个部分的运动而合成：和质心一起、并由质心的运动所代表的平动部分，以及绕质心转动的转动部分。

质心的平动服从质心运动定律——$F=ma_C$ 即可将刚体的质量 m 集中于它的质心，刚体所受的外力平行等大地移到质心而求得合力 F，则质心的加速度 a_C 可由上式求出。

对于绕质心转动的转动部分，可以用转动定律 $M_C=I_C\beta$ 来求解。必须强调，既然是绕质心的转动，那么力矩和转动惯量都必须是对过质心的转轴而言的。

而且，上述两部分运动之间的联系可由 $a_C=r\beta$ 来建立。

2355．有时我们看到物理习题中写着“一个小球在光滑斜面上，从静止开始滚下……”的字句，请你分析一下这种说法为什么是错误的？

[解答] 静止的刚体，只有在对质心的力矩作用下才能开始转动(或滚动）。把小球放在斜面上，如果接触处是粗糙的，则小球受到三个力的作用，斜面对球的支持力 N 和重力 G 都通过质心，对质心无力矩，不可能使小球转动，只能引起刚体的平动。只有在球和斜面的接触点处沿斜面向上的摩擦力 f，产生了对质心的力矩 fR，小球才能开始转动而下

滚。

因此，小球在光滑斜面上不可能从静止开始滚下，只能从静止开始滑下。

2356．质心运动定律为 $F=ma_C$，它和质点动力学中的牛顿第二定律有同样的形式，但它只代表在刚体或质点系上的一个特殊点即质心的运动规律，而且质心也可不以刚体上，并不是刚体上任何一点的运动都服从质心运动定律，当然平动的刚体除外。当作用在刚体上的诸力的合力不通过质心时，刚体的运动比较复杂，除质心外，刚体上其它各点的运动都不服从质心运动定律，因此不能随便地把合力放在这些点上用牛顿第二定律求加速度。但是刚体上的任何一个质点的运动仍服从牛顿第二定律，只要知道它的质量和作用在这质点上的所有力的合力，就可用牛顿第二定律求加速度，不过刚体上各点的受力情况复杂，作用在这质点的合力是指作用在这质点的外力，和刚体内其它质点作用在这质点各内力的合力，要具体的求出这一合力是困难的，所以一般不采用这种方法去计算刚体内任一点的加速度。

2357．对于一个静止的质点施加几个力，如果合外力为零，则这质点将保持静止状态。如果是一个刚体，是否也具有同样的规律？

[解答]　质点的运动服从牛顿运动定律，牛顿第二定律指出，作用在质点上的合外力为零时，加速度为零，质点将保持原有的运动状态不变。刚体服从的是质心运动定律和刚体转动定律，如果外力的矢量和为零，质心加速度为零，但是只要合力矩不为零（如作用于刚体的力偶），这时刚体将产生角加速度，刚体就要加速转动，这和质点的情况是不同的。

2358．汽车急刹车时为什么前轮车痕比较深？

[解答]　汽车正常行驶中，一般受五个力作用，如图所示它们是汽车所受重力 mg，前轮受到地面弹力 N_1，后轮受到地面的弹力 N_2，前轮受到的地面摩擦力 f_1，后轮受到地面的摩擦力 f_2。因为一般汽车的后轮为主动轮，在正常行驶中发动机工作带动后轮转动，后轮和地面的接触点相对于地面有向后运动的趋势，地面对后轮产生一个向前的静摩擦力，就是通常讲的汽车的牵引力 F。前轮是被动轮，由于车身在后轮带动下向前运动，前轮受到的摩擦力 f_1 向后。

一般情况下 $f_1 \ll f_2$，可以把 f_1 略去不计，根据质心运动定律有

$$f_2=ma_C \qquad (1)$$

取汽车质心 C 为转轴，根据转动定律有

$$f_2h+N_1l_1-N_2l_2=I\beta=0 \qquad (2)$$

式中的β为角加速度，因没有翻车，所以$\beta=0$。

由力的平衡条件理

$$N_1+N_2=mg \qquad (3)$$

联立(1)、(2)、(3)式解得

当 $a_C=0$ 时，汽车匀速运动，如果 $l_1=l_2$，则 $N_1=N_2$，汽车前后轮受力相等。

当 $a_C>0$，即汽车加速行驶时，$N_2>N_1$，汽车后轮受的力比前轮大，会出现车头上翘的趋势。

当 $a_C<0$，即汽车刹车时，$N_1>N_2$，特别是当急刹车时，$|a_C|$很大，则 $N_1>>N_2$，因此汽车前轮车痕较后轮车痕深，车尾有上翘的趋势。

2359．有一均匀实心圆柱体，半径为 R，以角速度ω_0绕中心轴旋转，将这匀角速转动的圆柱体放到摩擦系数为μ的水平面上，试证明经过时间，$T=\omega_0 R/3\mu g$ 后，圆柱体在平面上作纯滚动。

绕中心轴转动后，再放到水平面上运动时，它既有滑动又有滚动。在既滑又滚的情况下，圆柱体和水平面间的摩擦力为滑动摩擦力，所以它的大小等于μmg。因为圆柱体和水平面间的接触点 A 相对于水平面的运动方向向左如图所示，所以滑动摩擦力的方向向右。

圆柱体在水平方向上受到摩擦力 f 的作用下使它向右运动。根据质心运动定律得

$$\mu mg=ma_C，a_C=\mu g \qquad (1)$$

因为 $v=v_0+a_C t$

所以 $v=\mu gt \qquad (2)$

由(2)式可知圆柱体向右运动的速度 v 和时间 t 成正比，因圆柱体既滑又滚，所以 $v\neq\omega R$。但圆柱体在摩擦力矩的作用下ω在减小，根据转动定律得

又因为 $f=\mu mg$

由运动学公式得

$$\omega=\omega_0-\beta t \qquad (4)$$

由题设条件知当 t=T 时，圆柱体在水平面上作纯滚动，这时$\omega R=v$，(2)式为

$$\omega R=\mu gT \qquad (5)$$

(3)式代入(4)式得

(6)式代入(5)式得

从此时起作用在圆柱体上的摩擦力是静摩擦力。

2360．质量为 m 的实心球在高 h 倾角为 a 的粗糙斜面上，由静止开始从上端无滑动滚到下端,在同样高度和倾角的另一斜面上有一质量为 m 的物块，物块是光滑的，物块从上端滑到下端，如图(a)所示。求证球滚到底端球心的速度和物块滑到底端的速度之比为

[证明]　物块是光滑的，所以沿斜面的加速度为

$$a_{块}=g\sin a \qquad (1)$$

物块的初速为零，由运动学公式得

(1)式代入(2)式得

实心球在斜面上作无滑动的滚条，受力分析见图(b)所示。根据质心运动定律得

$$mg\sin a-f=ma_C \qquad (3)$$

式中 a_C 为球的质心沿斜面的加速度。

以球心为转动中心的力矩为 f·R，根据刚体的转动定律得

$$fR=I\beta \qquad (4)$$

的斜面上作纯滚动必须满足的条件是

$$a_C=R\beta \qquad (5)$$

(5)式代入(4)式得

(6)式代入(3)式得

根据运动学公式，当物体初速为零时，末速为

2361．一个圆柱体的质量为 1 千克，半径是 0.05 米。一个拉力 F=30 牛，沿水平方向作用于圆柱的中心轴上，设圆柱体作纯滚动，求圆柱体的质心加速度。

［解答］　圆柱体置于水平面上作纯滚动，以质心 C 为转动中心，如

根据刚体转动定律得

$$f\cdot R=I\cdot\beta,$$

圆柱体在水平方向上仅受二个力作用，其合力为 F-f，根据质心运动定律得

$$F-f=ma_C \qquad (2)$$

式中 a_C 为质心加速度。由题意知纯滚动必须满足条件

$$R\beta=a_C \qquad (3)$$

2362．一根轻绳绕在一个质量为 m、半径为 R 的圆柱体上。现将绳竖直向上拉动，使绳自圆柱体上放开，而圆柱体质心保持静止如图所示，试问：

(1)绳中张力为多大？

(2)当圆柱体的角速度达到ω时，绳子放开了多少长度？

［解答］ (1)由题意知圆柱体质心的加速度为零根据质心运动定律得

$$T-mg=ma_C=0$$

所以 $T=mg$。

(2)根据刚体的转动定律得

$$T\cdot R=I\beta,$$

因为 $\omega^2=2\beta\theta$，

放开的绳长 $S=R\theta$，

将β代入上式得

由 T=mg，

2363．如图所示，有一个半径为 R 的圆柱体，质量为 M，两条轻软的绳子对称地绕在这圆柱体两端，两绳的另一端分别系在天花板上。现使该圆柱体水平静止，并把绳铅直拉紧，然后将它释放，试求此圆柱体质心的加速度 a_C 及绳子的张力 T。

［分析］ 本题可按纯滚动处理。对圆柱体作受力分析后，用刚体转动定律和质心运动定律求解。

［解答］ 圆柱体在竖直方向上受三个力，它们的合力为 Mg-2T，根据质心运动定律得

$$Mg-2T=Ma_C \qquad (1)$$

式中 a_C 为质心加速度，在纯滚动时必须满足条件

$$\beta R=a_C \qquad (2)$$

轻绳上分别有作用力 T，根据刚体转动定律有

$$2TR=I_0\beta \qquad (3)$$

式中β为圆柱体的角加速度，I_0 为圆柱体绕质心的转动惯量

把(4)式代入(3)式得

(5)式代入(2)式得

(6)式代入(1)式得

2364．图(a)中静摩擦系数μ为何值时，均匀圆柱体才能无滑动地沿倾角为 a 的斜面滚下来？

[分析]　均匀圆柱体在重力的分力 $mg\sin a$ 作用下向下运动，由于没有相对滑动，圆柱体和斜面间的摩擦力 $f \le f_{max}$，f_{max} 为最大静摩擦力。

[解答]　设圆柱体的质量为 m，半径为 R，绕质心的转动惯量为

(b)所示。根据质心运动定律得

$$mg\sin a - f = ma_C \qquad (1)$$

式(1)中的 f 为静摩擦力，a_C 为质心的加速度。

根据刚体转动定律得绕质心的转动方程为

$$f \cdot R = I_0\beta \qquad (2)$$

式中β为绕质心的角加速度，由于圆柱体作无滑动的滚动，所以有条件

$$a_C = \beta R \qquad (3)$$

由式(1)、(2)、(3)解得

在纯滚动中圆柱体所受斜面的摩擦力为静摩擦力，所以 $f \le f_{max}$，而 $f_{max} = \mu mg\cos a$。

2365．小球从斜面上滚下来时，在什么条件下作无滑动的滚动/在什么条件下既滚动又滑动？试说明理由。

[解答]　设小球的质量为 m，球半径为 R，对球心轴的转动惯量

定律得

$$mgsina-f=ma_C \qquad (1)$$

根据转动定律，对小球质心的转动力矩和角加速度的关系式为

(1)式(2)式联立得

f 为小球和斜面间的静摩擦力，小球所以能够沿斜面滚动，正是因为这个静摩擦力提供了力矩。如果小球和斜面间的摩擦系数μ较小，斜面的倾角较大，即 tga≥μ时，作纯滚动需要的摩擦力 f 超过小球和斜面间所能产生的最大静摩擦力 f_{max}。

即　　　　$f_{max} \le f$，

是作既滚又滑的运动了，例如爬山坡失足的人，往往是连滚带滑的。

2366．有一个绕有电缆的大木轴，质量为 1000 千克，绕轴心的转动惯量为 300 千克·米^2，R_1=1.0 米，内圆半径 R_2=0.4 米，如图(a)所示。当用 F=9800 牛顿的力沿水平方向拉电缆的一端，如果大木轴和地面间无滑动（设电缆质量不计，且是柔软的）问：

(1)大木轴将怎样运动？

(2)轴心 0 的加速度多大？

(3)摩擦力多大？

(4)摩擦系数μ为多大时才能保证木轴和地面无相对滑动；

轴向右加速运动又和地面无相对滑动，则θ最大不超过多少？

[解答]　(1)大木轴在力矩 F（R_1-R_2）作用下向右作无滑动的纯滚动，是以图(a)中所示的 A 点为瞬间轴作转动的。

(2)由题意，大木轴作无滑动的滚动，以木轴和地接触点 A 为瞬时转动轴，根据刚体转动定律得

$$F(R_1-R_2)=I\beta,$$

式中的 I 为大木轴对绕瞬间轴的转动惯量，根据平行轴定理得

又因　$a_0=R_1\beta$　(2)

式中 a_0 为木轴中心的加速度

(1)式+(2)式得

(3)由质心运动定律得

$$F-f=ma_0 \quad (3)$$

即 $$f=F-ma_0$$

$$=(9800-1000\times4.52)\text{牛}=5280\text{牛}。$$

(4)要保证大木轴在地上作纯滚动，大木轴和地面的摩擦只能是静摩擦力 f，由于 $f\leq f_{max}$，$f_{max}=\mu mg$，由(3)式得

$$f=F-ma_0<\mu mg,$$

即 $$\mu>0.54。$$

(5)刚体向右滚动，F 和水平方向成θ角，由刚体转动定律得

$$f\cdot R_1-F\cdot R_2=I_0\beta \quad (4)$$

戒的转轴是木轴的质心 O 点。

由质心运动定律得

$$F\cos\theta-f=ma_0 \quad (5)$$

刚体作纯滚动必须满足条件

$$a_0=R_1\beta \quad (6)$$

(6)式代入(5)式得

$$F\cos\theta-f=mR_1\beta \quad (7)$$

(7)式×R_1+(4)得

要使大木轴向右运动，β要大于零，即必须有

$$R_1\cos\theta-R_2>0,$$

$$\theta<66°25'18''。$$

2367．图中是一根质量为 m、长为 l 的匀质光滑细杆，静止在水平面上，当台终施加一个垂直于杆长的水平力 F 时，问力施于杆的何处，杆将绕 A 端旋转/

[分析]　由题设条件知 A 点静止，杆以 A 为转轴而旋转，根据刚体

转动定律可确定 F 对转轴 A 的力矩和角加速度的关系。由于在水平方向上只有水平力对杆有作用，由刚体的质心运动定律确定力和质心加速度的关系，然后可解得所求量。

[解答]　根据质心运动定律，在水平力 F 的作用下，光滑细杆的质心加速度为

又因为 A 点为静止点，可以认为绕质心 C 转动的切向加速度和质心平动加速度 a_C 的和为零，即

$$a_C-a_A=0 \qquad (2)$$

均匀细杆的质心在杆的中点，所以质心到 A 点的距离为 l/2，这样可

设力 F 到质心的距离为 r，根据刚体绕质心的转动定律得

$$Fr=I_0\beta \qquad (3)$$

由(1)式代入(3)式得

因 $a_A=a_C$，所以得

2368．用连杆 S 连接起质量分布不同的两个滚子，从倾角 30°的斜面滚下。两滚子的质量都是 m=15 千克，半径都是 R=5 厘米，对质心的转动惯量分别为 I_1=80 千克·厘米²和 I_2=40 千克·厘米²。如果滚子的框架和连杆 S 的质量都略去不计，计算无滑动滚下时滚子的角加速度。

[解法一]　设两滚子相互作用力为 T、T′，无滑动时把 A 和 B 作为瞬时转动轴心，如图所示，根据刚体转动定律得

$$(mg\sin a-T')R=I'_1\beta_1 \qquad (1)$$

$$(mg\sin a-T)R=I'_2\beta_2 \qquad (2)$$

式中 T'_1，为物体 O 对 A 的转动惯量，由平行轴定理得 $I'_1=I_1+mR^2$；I'_2 为物体 O′对 B 的转动惯，大小为 $I'_2=I_2+mR^2$。由于半径相等，且均无滑动，所以 $\beta_1=\beta_2=\beta$，则(1)式和(2)式可改写成

$$(mg\sin a-T')R=(I_1+mR^2)\beta \qquad (1')$$

$$(mg\sin a+T)R=(I_2+mR^2)\beta \qquad (2')$$

$T=T'$，

(1′)式+(2′)式得

$$2mg\sin a\cdot R=(I_1+I_2+2mR^2)\beta,$$

两滚子对各自质心的角加速度也是β。

[解法二]　根据质心运动定律得

$$(m_1+m_2)g\sin 30°-f=(m_1+m_2)a_C \qquad (1)$$

式中的 a_C 为质心加速度。因系统作纯滚动，所以有

$$R\beta=a_C \qquad (2)$$

由转动定律得

$$f_1R=I_1\beta \qquad (3)$$

$$f_2R=I_2\beta \qquad (4)$$

又因为　$f_1+f_2=f$　(5)

由(3)、(4)、(5)式解得

$$fR=(I_1+I_2)\beta \qquad (6)$$

由(1)、(2)式解得

$$(m_1+m_2)g\sin 30°-f=(m_1+m_2)R\beta \qquad (7)$$

由(6)、(7)式解得

2369．斜面的倾角为 10°，一个圆柱体从斜面的最高处由静止释放后，无滑地动滚下。当圆柱体滚下 0.10 米时，另一个球体也从斜面最高点由静止释放，沿斜面无滑动地滚下。问在离开斜面最高点多远的地方球体赶上圆柱体？

[解答]　设圆柱体质心运动的加速度 a_1，球体质心运动的加速度为 a_2。它们的运动都是纯滚动。对圆柱体，根据质心运动定律得

$$m_1g\sin a-f_1=m_1a_1 \qquad (1)$$

由转动定律得对质心转动的方程为

$$R_1f_1=I_{10}\cdot\beta_1,$$

(2)式代入(1)式得

对球体，由质心运动定律得

$$m_2 g\sin a - f_2 = m_2 a_2 \qquad (3)$$

由转动定律得对质心转动的方程为

$$R_2 f_2 = I_{20}\beta_2$$。

(4)式代入(3)式得

圆柱体先沿斜面滚下△s=0.1 米，所用时间为△t，由运动学公式得

当球赶上圆柱体时二者位移 s 相同，即

(5)式代入(6)式得

(8)式代入(7)式得

所以 $s^2-87s+2.25=0$，

解得 $s\approx87$ 米。

2370．如图所示，在水平地面上放有一个桌子 m_2，桌面上有重物 m_1，如果质量 $m_1=2m_2$，桌子质心 C 离地面高度是 h，m_1 和 m_2 之间的滑动摩擦系数为μ_1，桌子和地面间的滑动摩擦系数为μ_2，且$\mu_1=2\mu_2$。用一个水平拉力 F 作用在物体 m_1 上，使 m_1 和 m_2 都向左加速前进，已知 $F=2\mu_1 m_1 g$，则桌脚 A 处摩擦力的最大值为多少（保证桌子水平运动）

[解答]　如果 m_1 和 m_2 间无相对滑动，则 m_1 和 m_2 的加速度为 a_1=

因为 $a_1>a_2$，可见实际上 m_1 和 m_2 之间已开始滑动。

桌脚 A 和地面间的滑动摩擦力和压力有关，当物体 m_1 运动到 A 点的正上方时压力最大。以质心 C 为转动中心，因角加速度β为零，根据刚体转动定律得

2371．图中所示，是一辆以速度 v0 高速行驶的自行车，设自行车和骑车人的总质量为 m，质心 C 的高度为 h，车轮和地面间的摩擦系数为μ。为了使自行车急速停止，采用了紧急刹车，求：

(1)只用前轮刹车和只用后轮刹车，车子各能前进的最远距离的比；

(2)为了不使自行车向前倒翻（以前轮和地的接触点为转轴，路面的摩擦系数μ、h 和 l 之间必须具备什么关系？

(3)如果前后轮同时紧急刹车，则前后轮受到摩擦力的比多大？车子能前进的最大距离多大？

[解答]　(1)当只有前轮刹车时，前轮和地面间的摩擦力为 $f_1=\mu N_1$，后轮未刹车，摩擦力 f_2 可略去不计。在竖直方向上由质心运动定律知

$$N_1+N_2=mg \qquad (1)$$

在水平方向上由质心运动定律知

$$f_1=\mu N_1=ma_1 \qquad (2)$$

以质心为转轴，根据转动定律得

联立(1)式(2)式(3)式得

当只有后轮刹车时，前轮和地面的摩擦力略去不计。同理可得

$N_1+N_2=mg$ (5)

$f_2=ma_2$ (6)

$f_2=\mu N_2$ (8)

联立(5)式(6)式(7)式(8)式解得 a_2 为

由运动学公式得

停车。同时由于绕前轮 A 点逆时针力矩不可能超过重力矩，也不会发生翻车。

当只有前轮刹车时，这时 $f_2=0$，由于前轮的压力加大，f_1 也增大，直到自行车的压力 $N_1=mg$ 时，N_2 为零，摩擦力 f_1 增加到等于 μmg，这就是要翻车的临界状态。由(2)式和(4)式得

也可以这样解，以质心为转轴，翻车的条件

这时式中 $N_1=mg$，$f=\mu mg$，而后轮抬起时，$N_2=0$，

果摩擦系数很大，轮子和地不滑动，静摩擦力可以很大，即

可见当在摩擦很大的路面上只使用前刹车要当心。

(3)当前后轮同时刹车停不转时，两轮对地面的压力不同，摩擦力不同。但它们的总压力和总摩擦力分别为 mg 和 μmg。这时自行车作减速滑

动，加速度大小为μg。

根据刚体转动定律，以质心为转动轴得

因为　　　　　　　　$N_1+N_2=mg$

前后轮的摩擦力比为

自行车能前进的最大距离为

2372．图中质量为 M、半径为 R 的均匀圆柱体，放在粗糙的水平面上，圆柱体的外围绕有轻绳，绳子绕过一个很轻的滑轮，并在绳的另一端悬挂一个质量为 m 的物体。设圆柱体只滚不滑，圆柱体和滑轮之间的绳子是水平的。求圆柱体质心加速度 a_C，物体的加速度 a 和绳子的张力 T。如果开始时圆柱体以角速度ω_0逆时针方向转动，问要经过多少时间物体 m 不再上升而静止，然后下落？

[分析]　圆柱体作纯滚动时，以 B 点为瞬间转轴，对圆柱体所受力分析后可由牛顿运动定律和转动定律，建立两组方程。对 m 物体作受力分析后确定加速度和力的关系，可求解加速度和张力。

在已知初角速度ω_0和角加速度β后，直接求解时间 t。

[解答]　隔离物体 M 和 m。物体 M 作纯滚动，垂直于纸面的瞬间转轴为 B，在水平方向受拉力 T 和摩擦力 f 的作用，根据转动定律得

$$T\cdot(2R)=I\beta \qquad (1)$$

式中的β为圆柱体以 B 为瞬间转轴的角加速度，I 为对瞬时转轴 B

对 m 作受力分析，并根据牛顿第二定律得

$$mg-T'=ma \qquad (3)$$

式中的 a 为 m 的加速度，a 也等于圆柱体边上 A 点加速度，

$$a=2R\beta=2a_C \qquad (4)$$

式中的 a_C 为盘心的加速度。

(4)式代入(3)式有

$$mg-T'=2ma_C \qquad (5)$$

因为 $T=T'$，

(2)式代入(5)式，并有 $a_C=R\beta$，得

(6)式代入(4)式得

(6)式代入(2)式得

由于圆柱体向左运动，绳子张力向右，所以圆柱体减速转动。由(7)式可得

由　　　$\omega_t-\omega_0=-\beta t$，$\omega_t=0$，

2373．如图(a)所示，物体 A 的质量为 m_A，物体 B 的质量为 m_B，滑轮 C 的质量为 m_C，并且是半径为 r 的均匀圆盘。如果 A 和桌面间的摩擦系数为μ，滑轮和轴间无摩擦，绳和滑轮间无相对滑动。当 $m_B>m_A$，$\mu<1$ 时求：

(1)物体 A 的加速度 a_A；

(2)绳子的张力；

(3)如果用质量等于 m_A 的圆柱体代替 A，圆柱体的半径等于 r，绳子始终保持不平拉在圆柱体的轴线上，如图(b)所示。假定圆柱体在平台上作纯滚动，则 B 的加速度 a_B 和绳子的张力各多大？

［解答］　(1)对物体 A 和 B 隔离，作受力分析，根据牛顿第二定律可得

$$m_Bg-T_2=m_Ba_B \qquad (1)$$

$$T_1-\mu m_Ag=m_Aa_A \qquad (2)$$

式中 a_A 和 a_B 为 A、B 的加速度，因绳子不可伸缩而 $a_A=a_B$。

对滑轮 C 分析，使滑轮转动的力矩由 T′1 和 T′2 产生，根据转动定律得

$$(T'_2-T'_1)r=I\beta,$$

由于绳和滑轮间无相对滑动，下述条件必须满足，

$$a_B=a_A=r\beta \qquad (4)$$

(4)式代入(3)式得

$T_1=T'_1$，$T_2=T'_2$，

(5)式+(1)式+(2)式得

(2)将(6)式代入(1)和(2)式得

(3)当用质量等于 m_A 的圆柱体代替 A 物体时，对 B、C 的受力分析不变，得

$$m_Bg-T_2=m_Ba_B \qquad (7)$$

对圆柱体 A 进行受力分析，根据质心运动定律得

$$T_1-f=m_Aa_B \qquad (9)$$

对圆柱体质心的力矩为 f · r，根据刚体的转动定律得

(10)式代入(9)式得

因为　　　　　　　　$T_1=T'_1$，$T_2=T'_2$，

(7)式+(8)式+(11)式得

(12)式代入(7)式和(11)式得

2374．质量分别为 m_1 和 m_2 的两个同心圆盘，半径分别为 r_1 和 r_2，它们固连在一起运动。小圆盘边缘上绕有轻绳，绳头固定在天花板上。大圆盘边缘上也绕有绳子，在绳头上吊有质量为 m_3 的重物，如图所示。

(1)设 m_3 下落，求证：m_3 的加速度

式中的 I_1 和 I_2 分别为两盘绕 O 轴的转动惯量。

(2)讨论圆盘向上加速、向下加速和静止或匀速转动的条件。

(3)在系统静止时，两段绳子中的张力各是多少。

[解答]　(1)m_3 向下落、m_1、m_2 向上运动，由质心运动定律得

$$T_2-T_1-(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)a_0 \quad (1)$$

式中 a_0 为盘心对地面的加速度。

根据刚体转动定律得

$$T_1r_1-T_2r_2=(I_1+I_2)\beta \quad (2)$$

由于绳子在盘上无滑动必须满足条件

$$a_0=r_2\beta \qquad (3)$$

$$a'_1=r_1\beta \qquad (4)$$

式中 a'_1 为 m_1 相对于盘心的加速度，β 为盘的角加速度。

对 m_3 分析，并根据牛顿第二定律得

$$m_3g-T'_1=m_3a_3=m_3(a'_1-a_0) \qquad (5)$$

把(3)式和(4)式分别代入(1)式和(5)式得

$$T_2-T_1-(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)r_2\beta \qquad (6)$$

$$m_2g-T'_1=m_3(r_1\beta-r_2\beta) \qquad (7)$$

因为 $T_1=T'_1$，(6)式-(7)式得

$$T_2-m_3g-(m_1+m_2)g=(m_1+m_2)r_2\beta-m_3(r_1-r_2)\beta \qquad (8)$$

(7)式×r_1+(2)式得

(8)式×r_2+(9)式得

(10)式代入(4)式得 a'_1，再由 $a_3=a'-a_0$，可得

$$a_3=\beta(r_1-r_2)=\frac{[m_3(r_1-r_2)-(m_1+m_2)r_2]g(r_1-r_2)}{(m_1+m_2)r_2^2+m_3(r_1-r_2)^2+I_1+I_2}。$$

(2)讨论：$a_3>0$，m_3 向下均速运动，盘心向上作加速运动，条件为

$$m_3(r_1-r_2)-(m_1+m_2)r_2>0,$$

即 $$m_3(r_1-r_2)<(m_1+m_2)r_2。$$

当 $a_3<0$ 时，m_3 向上加速运动，圆盘中心向下加速运动，则条件为

$$m_3(r_1-r_2)-(m_1+m_2)r_2<0,$$

即 $$m_3(r_1-r_2)<(m_1+m_2)r_2。$$

当 $a_3=0$ 时，m_3 静止或匀速运动，则圆盘也静止或匀速转动，而圆盘质心和 m_3 匀速运动的速度方向相反。条件为

$$m_3(r_1-r_2)=(m_1+m_2)r_2。$$

(3)在静止的情况下，β、a_0、a_3 都是零。

由(5)式得

$$T_1=m_3g,$$

代入(1)式得

$$T_2-m_3g-(m_1+m_2)g=0,$$

即 $$T_2=(m_1+m_2+m_3)g。$$