少年哲学向导丛书

神秘的怪圈

—悖论趣话

一、徘徊的幽灵

——悖论（代序）

“一个幽灵，共产主义的幽灵，在欧洲徘徊。”这是《共产党宣言》的开场白。这幽灵震撼了整个旧的世界，一切旧的势力为驱逐它而结成了同盟，而新的势力则在其鼓舞下开创了一个崭新的世界。在 2000 多年来的人的思维发展史中，也有一个幽灵不断缠绕着人们，这就是引起众多哲人的注意，并使许多人为之倾其毕生心血的难题——悖论。“悖论”的“悖”字，据《辞源》解：“‘悖’，背理也，乱也，逆也，惑也。”故“悖论”也称作“逆论”、“反论”。这个词的意义很丰富，它包括一切与人的直觉或日常经验相抵触的理论、观点或论断。悖论主要有以下几种表现形式：（l）一种论断看似谬误，但实际上却是对的（佯谬）；（2）一种论断看似正确，但实际上却是错的（似是而非的理论）；（3）某一理论体系中，从某些看似正确的公理出发，根据一系列的无懈可击的推理，却导致逻辑上的自相矛盾或矛盾循环。在逻辑和数学中，人们所说的“悖论”，主要指第三种形式，即自我矛盾的循环。最古老的悖论要算“说谎者悖论”了。

据传说，公元前 6 世纪，古希腊的克里特岛上住着一个叫埃皮门尼德的人。幼年时他与一些小朋友到山中玩耍，偶然误入一个山洞，在洞中迷迷糊糊地睡着了。但这一觉他竟然睡了 57 年，待他醒来时，已过了“耳顺之年”。他发现自己已成了一个学者，熟谙哲学和医学，成为岛上的“先知”。据《圣经》记载，作为克里特岛上“先知”的埃皮门尼德曾轻蔑地说过这样一句话：“克里特岛人都是说谎者。”

如何理解这句话呢？如果这句话是真的，即克里特岛人真的都是说谎者，而既然埃皮门尼德也是克里特岛人的一员。那么，他也是个说谎者。假如“说谎者”的含义是指不说一句真话的人，则显然可得出，这句话是谎话，即是假的，这显然是个矛盾。但是，这并不能使埃皮门尼德陷入困境，因为可以设定此话为谎话，但要具备一个条件，即克里特岛上其他任何人或埃皮门尼德本人除此之外还说过真话，而说过真话的人就不算作“说谎者”。这样，埃皮门尼德的这句话就成为谎话。但是，这种通过偶然的事实来解决悖论的方法，从逻辑上说是不能令人满意的。

在印度因明学（逻辑学）中也有与此类似的例子。因明学有一条立论的基本原则，就是不能“自语相违”。例如，“一切语皆妄（虚假）”就是自语相违。有一个叫神泰的因明家评论道：

说“一切语皆妄”的人，你口中的这句话是否真实呢？

假如说是真的，那么，为什么说“一切语皆妄”呢？如果说你这句话是虚假（妄）的，那么，应该承认一切语皆实。

即使你补充一句，说“除我所语，其余一切语皆妄”，也于事无补。因为有个第二者听了你这句补救的话后，指出：“你这句补充的话是实话。”那么，第二者的话是实，还是妄？如果第二者的话是妄，那说明你补充的话虚假；如果第二者的话为实，那你又有何理由说“除我所语，其余一切语皆妄”呢？

假定你再补充一句：“除了我语及这个评论我的第二者的话真实以外，其余所语皆妄。”这时又会有第三人接着评论说：“这第二个人的话也是真

实的。”那么，第三个人的话是实，还是妄？

同理，如果设定为假，那么，第二个人及第一个人说的话就不对了；而如果第三个人的话是真的，又怎么能说除我及第二个人所语，其余皆妄呢？

同样，第四人、第五人……依次类推，以至无穷。你说“一切语皆妄”为真，而“一切语皆妄”也是“一切语”的一句，因此又推出“一切语皆妄”为假。你看到推出矛盾，就作一补充，说除你所语之外，一切语皆妄，但这样就会出现无穷多个例外，因而，例外也就不成其为例外。

可以看出，神泰的这一连串推理，除了从“一切语皆妄”虚假推出“一切语皆实”不合逻辑之外，其余的推论都是正确的。从逻辑上讲，从“一切语皆妄”中，只能推出“有些语为实”。

我国古代的经典《墨经》中也曾对这种自相矛盾作过论述。《墨经》指出：“言尽悖。”意思是说，断定一切的命题会导致矛盾，如“任何东西我都不信。”

严格说来，上述这些论断并不是真正的悖论。因为尽管由假设其真可导致矛盾，但我们可据反证法证明其为假，而设定其假并不能推出矛盾。

公元前 4 世纪，古希腊麦加拉哲学派的欧布利德斯对上述“说谎者悖论”作了修正。据说，他最初表述的是：那个说自己说谎的克里特岛人说谎吗？这是一个悖论。后来，欧布利德斯又把“说谎者悖论”表述为：“我正在说的是谎话。”这才是真正严格的悖论。因为假如这句话是真话，即“我真的在说谎话”。但我说的只有这一句话，因此，“我正在说的这句话是谎话”必是谎话，即为假；假如这句话为假，即我并非正在说谎话，那么，说的必然是真话，因此，这句话为真。无论采取哪种假设，都无法自圆其说。说它真，则推出假，说它假，则又推出真。真→假→真……陷入无穷的循环当中。

古希腊哲学家还经常讲一个鳄鱼的故事：

一位母亲抱着心爱的孩子到河边洗衣服。一条鳄鱼偷偷地从旁边游近她，从她的怀抱中把孩子抢走。母亲非常痛苦，哭哭啼啼地央告鳄鱼把孩子还给她。

“好吧，我可以把孩子还给你，但有一个条件。”鳄鱼说。

“什么条件我都答应，只要你能还我孩子。”

“是这样，你猜一猜我会不会吃掉你的孩子？如果你答对了，我就把孩子毫不伤害地还给你。答不对嘛，那我就把他吃掉了。”

母亲思索片刻回答说：“啊！你是要吃掉我的孩子的。”

“呣……我怎么办呢？如果我把孩子交还给你，你就说错了，我应该把他吃掉。”鳄鱼高兴起来，“好了，这样我就不把他还给你了。”

“可是，这样你必须把孩子还给我，因为如果你吃了我的孩子，我就说对了。你答应我说对了就把孩子还给我的。”

愚蠢的鳄鱼懵了，结果把孩子还给了母亲，母亲抱起孩子就跑掉了。

“唉，要是她说我要还给她孩子，我可就美餐一顿了。”鳄鱼很遗憾地说道。

仔细地琢磨一下这个著名的“鳄鱼悖论”，你会发现，这位母亲是多么聪明。她对鳄鱼说：“你要吃掉我的孩子。”这样，无论鳄鱼怎么做都会与其允诺相矛盾。如果把孩子还给母亲，她的话就是错的，那么，就应把孩子吃掉，即不还给母亲；而如果不还给母亲，母亲的话就是对的，那么，就应该还给母亲。还给→不还给→还给→不还给……鳄鱼陷入了无穷的循环中，

无法从中摆脱出来而不违背自己的允诺。

如果不是这样，假如母亲换个说法：“你要把孩子还给我。”那么，鳄鱼就不用感到困惑了。它既可以交回孩子，也可以把他吃掉。如果它交回孩子，母亲的话就说对了，鳄鱼遵循了自己的诺言；如果它聪明的话，也可把孩子吃掉，这时，母亲的话是错的，鳄鱼也遵循了自己的诺言。

对于这种无限循环的悖论，美国人霍夫斯塔特给了它一个生动的名字：“一步即成的怪圈。”当代杰出画家埃舍尔曾用版画形象地说明了这种怪圈。图 1 的名字叫《瀑布》。在图中，一条瀑布倾泻而下，水花四起，还推动了水轮。汇集到一个大池子中的水顺着水渠哗哗地向下流去，一级一级下降。突然，水又流回到瀑布口！真是不可思议！可是在画面上却表现得明明白白，天衣无缝。图 2 的名字叫《上升与下降》。在冰冷阴森的教堂顶上，僧侣们排成两队向前走。其中一队总是沿着楼梯向上走，另一队总是往下走。可令人不解的是，他们走的却是同样的楼梯，并且不断地回到原来的出发点。

古代的一些人认为，这种怪圈“纯系文字游戏”，于是只把它们当做茶后饭余的笑料而已。然而，在历史发展的每一阶段中，这种怪圈总像幽灵一样神秘地出现在人们的思维中，令众多哲人为之烦恼。说它神秘，是因为至今没有能使大家信服的解释，也没有一种公认为完善的驱除它的方法。任何严谨的逻辑学家都会认识到这种怪圈所带来问题的严重性，因为在怪圈面前，形式逻辑的最基本规律同一律、不矛盾律、排中律完全失效。形式逻辑规定：一命题要么真，要么假，不能既真又假，”也不能不真不假。但对怪圈而言，一说它真，即可推知假，说它假，则又可推出真，真假无限循环。因此，著名数学家哥德尔说，这个问题不解决，形式逻辑就会破产，整个人类思维的大厦就会崩溃！

在历史上也有一些哲学家、逻辑学家和数学家试图对悖论进行解释。古代圣哲亚里士多德在其《论辩篇》和《形而上学》中解释过说谎者悖论，古希腊斯多葛哲学派的代表克里西波斯为解释说谎者悖论写了六部书。希腊诗人柯斯的裴勒塔潜心研究悖论，把身体搞得十分瘦弱。据说他的鞋中常带着铅，以免被大风吹跑，最后竟因操劳过度，一命呜呼，这可说是悖论的第一个“殉道者”了。中世纪的哲人们把悖论称为“不可解命题”，并对此进行了更加深入的研究。他们在说谎者悖论的基础上发现了一些新的悖论，并提出解决悖论的 15 种方法。集合论中悖论的出现，更引起人们对悖论的重视。人们又发现了理查德悖论、罗素悖论、格里灵悖论等一些著名的悖论，并提出了解决悖论的新方法。

悖论在历史上曾引起三次数学危机，导致了人们对思维层次的深入剖析，促使一些新学科的出现，因此，成为当代逻辑学家、数学家、语言学家和哲学家们共同的热门话题。

二、现在的我与过去的我

——形式逻辑的根本大法

古希腊的“晦涩哲人”赫拉克利特有一句著名的话：“踏入同一条河里的人们，流过他们的水是不同的，永远是不同的。”这句话是说，河水在不停地流动，当人第二次踏入这条河流时，接触的已不是原来的水流，而是变

化了的新的水流。他用这句话说明，世界上的万事万物就像奔腾不息的河流，都处于不停的流动变化之中，永远凝固的东西是不存在的。有些事物的变化是明显的，人们可以直接感受到。“眼前红日又西斜，疾似下坡东。”“三五明月满，四五蟾兔缺。”说的是日月的变化。“有兴必有废，有盛必有衰。”讲的是社会的运动。可是，有些事物的变化比较缓慢，人们不易觉察到。例如，世界上最高的山喜马拉雅山巍然屹立在我国的西南边陲，看似永远不变化，然而，事实上它是从“喜马拉雅海”变来的。1 亿多年以前，这里还是极目浩瀚的一片汪洋。另外还有一些事物，如恒星、高空飞行的超音速飞机、基本粒子等等，虽然它们的变化非常快，但由于距离我们太远或太小，我们也不易觉察它们的运动。总之，整个世界，从最小的东西到最大的东西，从自然到社会，无时不处在运动之中。“一切皆变，无物常住。”

我们承认任何事物都在运动，但并不否认静止的存在。不过这种静止不是绝对的静止，而是相对的静止。例如，一个人坐在奔驰的火车里，相对于火车的空间位置来说，他是没有运动的。可是，请不要忘记，火车在急速地行走，人和火车都在地球上，而地球也在不停地自转并围绕太阳公转。再说，人虽然坐着没动，但在他的体内，每天都有千万个细胞在死亡，又有千万个细胞在新生。总之，人也在不停地运动着。另外，某一事物虽然处在运动中，但在一定条件下只是发生一些细微的变化，而没有发生质的变化，此事物仍然为此事物，呈现出相对静止的面貌。只有当这些微小的变化积聚到一定程度，此事物才能变成别的事物。例如，一个人刚出生后就在不断地变化，但直到死亡之前，某人终归是某人。

否认事物的相对静止，就必然认为一切事物都是瞬息万变，不可捉摸，这也就必然否定事物特殊的质的规定性，导致相对主义和诡辩论。

赫拉克利特有一学生叫克拉底鲁，善于别出心裁，为了达到一语惊人的目的，提出“人连一次也不能踏入同一条河流”的惊世之言。他解释说，我们既然承认一切皆流，万物皆变，那就是说，任何事物无时无刻不在发生变化，不可能有片刻的静止和稳定。这正如一条河流，在我们刚刚踏入的一瞬间，它就变成了另外的河流了，所以，我们一次踏进去的就不是同一条河流了。

有人问克拉底鲁：“河流是如此，是否其他事物也这样呢？”

克拉底鲁不假思索地回答说：“从哲学的观点看，这是毫无疑问的。世界上的所有事物正是这样永不停息地变动着。”

这时，有人指着克拉底鲁坐着的椅子问他：“你坐着的是什么？”

“是椅子。”

“不对！”提问者反驳说，“按照你的理论，你的话还没说完，它已经变得不是椅子了。”

克拉底鲁无言以对。后来，他怕再出洋相，不管任何人问他什么问题，他都不作回答，而只是不断摇动大拇指。意思是说，你问的问题我不回答出来，因为就像指头的摇动一样，任何事物都在不断地变化，我们无法加以认识，我们更不能把它说出来，因为在说出时它已不存在了。后来，有人把克拉底鲁称为“只动手指头的哲学家。”

克拉底鲁否定事物相对稳定性的荒谬主张受到人们的嘲笑。有一位希腊的喜剧作家得知后，特意按照他的观点编了一个喜剧，在第一次演出时恭请克拉底鲁观看。克拉底鲁不知底细，欣然前往。

演出开始了，剧中人甲和乙出场。

甲：朋友，我有急用，但手头拮据，帮帮忙，先借点钱给我。

乙：你这人从来不讲信用，经常赖帐。前几次借我的钱还没还呢，现在又想来骗我。告诉你，我不会再上当了。

甲：朋友，怎么能这么说！我这个人从来都是讲道理的，前几次没有还不都是有道理的吗！

乙：什么道理？尽是些歪道理！你别想再耍花招了。

甲：朋友，这次你无论如何要帮我的忙，我向你保证，借你的钱一个月后全部还清。你要是不信，我可以向天发誓，到那时不还老天惩罚我！

乙：你既然发了誓，那就拿钱去吧！到时可不能再赖帐了。

（甲和乙退场，过一会儿二人又上场）

乙：一个月已经过去了，借我的钱该还了吧！

甲：朋友，你知道我借钱干什么了吗？我拿这笔钱拜了一位老师学哲学。学了他的哲学，我不论做任何事都是有道理的。要不要把他的哲学讲给你听听？

乙：你少罗嗦！借我钱时你对天发了誓，现在一个月已到，你把钱还给我，不然，老天会惩罚你的。

甲：按照老师的哲学道理，我既不用还钱，也不会受惩罚。我的老师说，一切都在不断变化，人连一次也不能踏进同一条河流，因为河流眨眼间就变了。从你借钱到现在已一个月，现在的我早已不是向你借钱并对天发誓的我。所以，你不应向现在的我要钱，只能去向一个月前向你借钱的那个我去要钱。

（乙听后非常气愤，抓住甲痛打一顿）

甲：你敢打我！我到法院告你，要你赔偿损失并付医药费。

（甲叫喊着跑下，乙追下，下一场在法院）

法官：谁是原告？告什么状？

甲：我是原告，我控告乙打伤我。法律应罚他，还要他赔偿医药费。

法官（对乙）：是你打人吗？

乙：（在讲明了事情的经过后）我知道打人犯法，要受到法律制裁。但按照他老师的道理，一切事物都在变化，一事物马上会变成别的东西。我也在瞬息万变，现在的我并没有打人，打人的我是过去的我，因此，法律应惩罚先前打人的那个我，并让他付药费。

演到这里，剧场里的灯大亮，观众们无不捧腹大笑。这时，有人认出了克拉底鲁，大声喊道：“大家看，赖帐不还的人所拜的老师不就是这位克拉底鲁先生吗！”全场观众的目光一下子集中到克拉底鲁身上，弄得他非常尴尬，无地自容，他只是习惯地伸出手来摇动着大拇指，这一举动更引得人们笑得前仰后合。

所以，承认事物的运动变化并不是说否认它在一定条件下的相对稳定性或者说质的规定性。一个事物，如果它在某个时间在某个方面具有某个属性，那么，它在这个时间在这个方面就具有这个属性，它不能既具有又不具有这个属性，它或者具有这个属性，或者不具有这个属性。客观事物的这种质的规定性反映在人的思维中就表现为人的思维的确定性，也就是说，在同一思维过程中，每一概念、命题的自身都具有同一性；两个相互矛盾的思想不可能同时为真，即至少一假；两个相互矛盾的思想也不可能同时为假，即至少

一真。这就是形式逻辑最基本的规律：同一律、不矛盾律和排中律。

曾有这样一个案例：有一天，某国首都一家珠宝店被盗贼窃走一块价值 5000 美元的钻石。经过侦破，警方人员查明作案的为甲、乙、丙、丁四人中的某一个。于是，四个人被作为重大嫌疑犯被拘留。在审讯中，四人的口供如下：

甲：钻石被窃的那一天，我正在别的城市，所以，我不可能作案。

乙：丁就是罪犯。

丙；乙是盗窃钻石的罪犯。三天前我见他在黑市上卖一块钻石。

丁：乙同我有私仇，故意诬陷我。

现在假定四人中只有一个人说真话，罪犯是谁？再假定四人中只有一人说假话，罪犯又是谁？

这四人的口供整理后实际上是下面的几句话：

甲：甲不是罪犯。（1）

乙：丁是罪犯。　　（2）

丙：乙是罪犯。　　（3）

丁：丁不是罪犯。（4）

这里，正因为丁这个人本身具有相对的稳定性，（2）与（4）构成两个相互矛盾的命题。

据排中律，两个相互矛盾的命题不能都假，其中必有一真。据第一个假定，四个人中只有一人说真话，因此，说真话的或者是乙或者是丁，甲和丙说的必是假话。丙说假话，证明乙不是罪犯，而甲说假话，则证明他是此案的罪犯。

据不矛盾律，两个相互矛盾的命题不可能同真，其中必有一假，因此，在乙和丁二人中必有一人说假话。又据第二个假定，四人中只有一个说假话，所以，甲、丙必然说真话。甲说真话，证明他不是罪犯，而丙说真话，证明乙是本案的罪犯。

同一律、不矛盾律和排中律既然是形式逻辑的基本规律，那么，日常思维在任何时候都必须遵循它们。这些规律也是科学理论体系保持首尾一贯的必要条件，否则，如果违背它们，在一理论体系中出现了逻辑矛盾，那么，此理论不可能是科学的理论。但是，在一个悖论中，由一命题真却推出它为假，而由它假又推出它真。真也就是假，假也就是真，真假是等值的。一命题既真且假，既不真也不假。在悖论面前，形式逻辑的根本大法同一律、不矛盾律和排中律全都失效，人们思维的基础崩溃了，难怪人们要惊得目瞪口呆了。

三、悲壮的殉道者

——希帕索斯悖论

毕达哥拉斯是一位与孔子、释迦牟尼几乎同时代的古希腊著名的数学家和哲学家。在中学的平面几何中，有一个定理叫“毕达哥拉斯定理”，就是以他的名字命名的。

毕达哥拉斯出生于爱琴海东面的萨摩斯。他十分好学，不愿跟随父亲学习雕刻指环的手艺，而是一心想拜有学问的人为师。于是，他周游各地，曾

拜在阿那克西曼德、费雷居德等哲学家的门下，学习了不少哲学和自然科学的知识。后来，听说老师的许多知识都是从东方的巴比伦和埃及学来的，就动身到巴比伦和埃及求学。他曾在埃及居住了近 22 年，从埃及神庙的祭司那里了解了古埃及的数学、天文、宗教等方面的知识。在 40 岁左右时，毕达哥拉斯就已成为很有学问的人了。为了把所学知识传授给家乡的人民，他又回到了萨摩斯。由于政治观点不同，只得又离开家乡，前往希腊的移民地意大利南部的克罗通定居。他的后半生就是在这里度过的。

为了能向人们传授知识，毕达哥拉斯开办了一个公众学校，到这里学习的曾达 300 多人。为便于组织学习，他把学生组成一个类似宗教团体富于神秘主义色彩的集团。例如。他制定了许多奇怪的戒律：不准用刀子拨火，不准坐在斗上，不准在大路上行走，房子里不准有燕子，。不准养脚爪有

钩的鸟等等。准备参加学习的人一开始不能和他见面，只能在门外听讲，听过一段时间后进行考试，及格的人才能与老师见面，成为正式的学生。毕达哥拉斯是这个团体的最高首领，主持他们的学习和生活。

毕达哥拉斯学派提出一著名的观点：“一切都是数。”哲学的任务就是要发现世界的本原，而作为世界的本原应当是构成一切事物而又为一切事物所共同具有的东西，而数正是这种东西。因为不论什么事物，大到天体，小到尘埃，都有一定的长短、高低、大小、轻重等数量，没有数量的事物是不存在的。

数既然是世界的本原，那么，它如何构成世界上的事物呢？毕达哥拉斯派解释说，作为世界本原的“数”是一种单位，它占有一定的空间，是有形的。数的开端是“1”，“1”就是一个小点（·）。虽说这种点非常小，但却是存在着的，正如阳光透进房间时我们看见的无数纤尘是存在的一样。“2”这个数是两点的排列，即成为一条线（—）。同样，“3”这个数是面（△），而“4”这个数就是体了（△）。数的排列到了“4”，就出现了有形体的事物。由这四个数就构成了土（立方体）、火（四面体）、气（八面体）、水（二十四面体）四大基本要素，这四种要素的不同排列组合就构成了世界上形形色色的具体事物。可见，一切事物都由数构成。

数不仅构成了一切事物，而且，作为一种量，它也存在于所有的事物之中。任何事物之间都存在着一定的数量比例关系，正因为这种数量比例关系，世界才表现出其秩序和规律。不同的数量形成一定的比例，一定的比例就是事物之间的和谐。他们在研究音乐乐理的谐音时发现，产生各种谐音的弦的长度都成整数比（分数）。例如，两根绷得同样紧的弦，当它们的长度比为 2∶1 时，就会产生相差八度的谐音，而当它们的长度比为 3∶2 时，短弦发出的音比长弦发出的音要高五度。而如果三根绷得同样紧的弦，当它们的长度比为 3∶4∶6 时，就能得到和声的谐音。如果把“中音 1”的弦长定为 1，音阶与弦长就有如下妙不可言的分数关系：

音阶	1	2	3	4	5	6	7	i
弦长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

另外，他们还对正方形的面积进行了研究，所得结果令他们更加兴奋。因为设一个正方形边长为a，那么，边长为$\frac{1}{2}a$、$\frac{1}{3}a$、$\frac{1}{4}a\Lambda\Lambda\frac{1}{n}a$(n为自然数)的正方形同 a 为边长的正方形面积之比分别为 4∶1、9∶1、16∶1……n^2∶1；

同时，在研究同名正多边形覆盖平面问题时，他们发现，这种覆盖只有如下三种情况（见图 3），即六个正三角形、四个正四边形和三个正六边形。在这三个图形中，其边数比为 3∶4∶6，而其正多边形的个数之比则恰好相反，为 6∶4∶3。

总之，一切事物都必须而且只能通过数得到解释，宇宙的本质和规律就是数的和谐，也就是说，宇宙间的一切现象都能归结为整数或整数之比。毕达哥拉斯学派首创西方沿用的“宇宙”（cosmos），它的本义就是一个和谐而有规律的整体。公元前 5 世纪，毕达哥拉斯学派的菲罗洛斯在谈到这个问题时说：“如果没有数和数的性质，世界上任何事物以及与其他事物的关系都不能为人们所清楚地了解……你不仅可以在鬼神的事务上，而且可以在人间的一切行动、思想，以至一切行业和音乐中看到这种数的力量。”

由于认为世界的本质就是数的严整性与和谐性，所以，毕达哥拉斯派非常重视数学的研究。他们基本建立了所有直线形的理论，包括三角形全等的定理，平行线理论、相似理论、三角形的内角和定理等等。三角形的内角和定理是说，一个三角形的内角和等于两直角。这是中学平面几何中非常重要的定理。他们还发现了有名的“毕达哥拉斯三数”，即可以排成直角三角形三条边的整数组，他们除了给出具体的特例外，还给出了一般法则：如果 m 为一直角边，则M，$\frac{m^2-1}{2},\frac{m^2+1}{2}$就是这样的整数组。他们在数学上就是证明了关于直角三角形斜边与两直角边关系的定理，即著名的“毕达哥拉斯定理”（即“勾股定理”）：直角三角形斜边的平方等于两直角边平方之和。在当时，中国人、巴比伦人、埃及人和印度人早已了解到此定理的部分情况，但都没有给出一般的证明。因此，毕达哥拉斯和他的门徒在给出这条定理的证明后欣喜若狂，后来主张简朴节俭的师徒们也破例举行隆重、热烈的庆贺。据说，他们宰了 100 头牛举办了盛大的“百牛宴”，以至有人议论说，人们喜悦，牛却遭了殃。

然而，正当兴致未尽之时，他们的狂热却被一个人狠狠地泼了一盆冷水，这就是入会不久的希帕索斯。希帕索斯是个勤奋好学的青年，他善于独立思考，不盲目附合。他学了勾股定理以后，在研究正方形的对角线时发现，这条对角线（亦即等腰直角三角形的斜边）既不能用整数表示，也不能用整数之比（分数）表示。因为，如果能用整数或整数之比表示，则必然带来不可克服的矛盾。证明如下：

设等腰直角三角形的两直角边为 a，斜边的长度为约去公因数的两整数m、n之比$\frac{m}{n}$。

因为 m、n 约去了公因数，则二者之中至少有一奇数（都是偶数则有公因数 2）。

据毕达哥拉斯定理，$a^2+a^2=(\frac{m}{n})^2$，即$2a^2=\frac{m^2}{n^2}$

而 $m^2=2a^2n^2$。

∵$2a^2n^2$ 为偶数，则 mZ 为偶数，

∴m 必为偶数〔m 不可能为奇数，因为任一奇数 Zn＋1 的平方（2n＋1）^{2}＝4（n^2＋n）＋1 必是奇数〕。

又∵中至少有一奇数，

∴n 必是奇数。

m 既是偶数，设 $m = 2P$，

于是，$m^2 = 4p^2 = 2a^2n^2$，

$\therefore n^2 = 2\frac{P^2}{a^2}$，

$\therefore n^2 = 2\frac{p^2}{a^2}$,

n^2 为偶数，而 n 也必是偶数。

综上可知，假如他们的信念是正确的，那么，同一数 n 既是奇数又是偶数。说它是奇数，它又是偶数，而说它是偶数，那么，它又是奇数。但是，一个数要么是奇数，要么是偶数，不能既是奇数又是偶数。因此，以上的循环必然是一矛盾，人们把这种循环称为“希帕索斯悖论”。

在一推导中得出明显错误的结论，无非有两种情况：一种是前提错误，一种是推导过程不正确。以上的推导中使用了两个前提：一个是毕达哥拉斯派“一切现象可归结为整数或整数之比”的信念，另一个就是毕达哥拉斯定理，但由二者推出了矛盾。显然，推导过程毫无差错，因此，问题只能出在前提上。毕达哥拉斯定理是已证明为正确的定律，这样，他们的信念就是不成立的。因此，希帕索斯悖论的发现就如同一声晴天霹雳，动摇了毕达哥拉斯学派整个信念大厦的基础，引起其他毕氏门徒的极大恐慌。他们决定立即封锁消息。可是如何能封锁得住？一传十，十传百早就传开了。这使得他们非常恼火，决定捉拿泄露天机的希帕索斯。希帕索斯并不屈服，于是逃离了这个学会。一些激进的门徒紧追不舍，结果在地中海的一条船上抓住了希帕索斯，并把他扔到了海里。

“青山遮不住，毕竟东流去。”希帕索斯可以抛到大海里淹死，但希帕索斯悖论是淹不死的。等腰直角三角形斜边的问题是人类社会生活中客观存在的问题，人们需要解决它来完成生产建设中某一环节的计算。因此，社会生活会从实际需要中促使希帕索斯悖论的发现。另外，根据毕达哥拉斯定理，可以看出，直角三角形的三条边并不一定就是整数，这使得毕达哥拉斯学派的信念中必然导致矛盾。作为直角三角形特殊情形的等腰直角三角形必然会成为研究者的课题，即使没有希帕索斯，也会有另外一个人看到这一悖论，只不过是时间早晚而已。人们很快发现，不能用整数或整数之比表示的数并非罕见的现象，如$\sqrt{3}$、π、$\sqrt[3]{2}$等。随着时间的推移，无理数的存在逐渐成为路人皆知的事实，这些事实像潮水一样猛烈地冲击着传统观念，促使人们重新审视一切数都是整数或整数比的有理数理论，这就是历史上的第一次数学危机。

严格说来，这种危机并不是数学本身的危机，而是毕达哥拉斯学派“万物皆数”（整数或整数之比）信念的危机。本来，整数或整数之比确实是宇宙中普遍存在的现象，但他们把这种现象夸大并神秘化了。例如，当他们发现 l、2、3、4 能构成谐和的乐音时，就把 l、2、3、4 之和的 10 看作神圣而完美的数目，并把这一图形（由 10 个点构成的完美整体）也看作神奇而玄妙的图形，以至于认为天体也应该达到 10 这个数目。他们认为，人与人的关系也与数有直接联系。他们把理性看作 1，意见看作 2，正义看作 4，婚姻看作 5，爱情看作 8。由于他们把违反客观规律的这种信念当作绝对真理，因此，必然会造成悖论，而危机也必然会接踵而至。

四、阿基里斯追不上乌龟

——芝诺悖论与贝克莱悖论

阿基里斯是《荷马史诗》中的一个善跑健将，而乌龟是人们公认的跑得最慢的动物。起跑时让乌龟领先 10 米，发令之后，阿基里斯如离弦之箭向前冲去，而乌龟不论多急也只能慢吞吞地向前爬。大家肯定认为阿基里斯只需一眨眼的工夫就会追上并超过乌龟，但古希腊埃利亚学派的芝诺却指出，跑得最快的并不能跑过最慢的，阿基里斯永远追不上乌龟。这是著名的“芝诺悖论”之一。芝诺提出此悖论的目的是为了否认运动的真实性。据说，后来古希腊犬儒学派的第欧根尼曾用十分简单的方法——行动进行反驳。他一语不发地站起来，在房间里走来走去，然后，询问学生这种反驳如何。其中一个学生很高兴，对反驳感到非常满意。第欧根尼上去就踹了他一脚，然后把他狠狠地训斥了一顿。这是因为芝诺并不否认这种感性的运动，而是在理性上用理由进行证明运动并不真正存在，因此，对方只有用理由进行反驳才有效。

芝诺的论证是这样的：

假设阿基里斯和乌龟的速度都保持不变，而阿基里斯的速度是乌龟的 10 倍，那么，当阿基里斯跑到第 10 米——乌龟起跑的地方时，乌龟已爬到第 11 米的地方去了，乌龟领先 1 米。于是，阿基里斯又奋勇向前。当他跑到第 11米的时候，乌龟却已爬到$11\frac{1}{10}$米的地去了，它还领先$\frac{1}{10}$米。而当阿基里斯跑完这$\frac{1}{10}$米的路程时，乌龟又向前爬了$\frac{1}{100}$米，如此不停地跑下去。阿基里斯要跑完10米、$\frac{1}{10}$米、$\frac{1}{100}$米……的距离，而乌龟则依次领先1米、$\frac{1}{10}$米$\frac{1}{100}$米……显然，这些距离有无限多个，跑完一个又一个，永远也跑不完，乌龟始终领先一段距离。因此，阿基里斯只能无限地接近乌龟，而永远追不上、更不能超过乌龟。

由于在常识看来，阿基里斯能追上并超过乌龟，芝诺的上述论证在当时被认为最难以驳倒的，而所得结论却明显与直觉矛盾，因此，人们称之为“阿基里斯悖论”。

这种论证正确吗？从哲学上讲，这显然是一种诡辩。表达运动的概念有两个，即间断性（或点截性）与不间断性域连续性），是不间断性与间断性的统一。芝诺的错误在于，他不懂得运动本身是二者的统一，而形而上学地割裂两者，只承认间断性而不承认不间断性。他把运动假定为在空间可无限分割的点，而把物体（阿基里斯）局限于点上，把运动看作这些静止状态的点的总和。他不懂得运动的物体到达这个点的同时就要离开这一点，因此，运动的物体不可能达不到目的而停留在无限可分的点上，阿基里斯会很快赶上并超过乌龟。

另外，芝诺没有看到，那些距离虽然有无限多个，可是，它们的和却是一个有限的、确定的距离。相应地，阿基里斯所用时间间隔虽然有无限多个，但它们的和也是确定的、有限的一段时间。

按已知条件，设阿基里斯跑完第一段路程所需时间为 1 分钟，则第二、三……段所需时间为 $\frac{1}{10}$ 分钟、$\frac{1}{100}$ 分钟……$\frac{1}{10^n}$ 分钟……则阿基里斯追上乌龟所有需时间 t 为：

$$t = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\cdots \frac{1}{10^n} + \cdots\cdots \qquad (1)$$

用 10 乘等式两边得：

$$10t = 10 + 1 + \frac{1}{10} + \cdots\cdots + \frac{1}{10^{n-1}} + \cdots\cdots \qquad (2)$$

用（2）式减（l）式则有：

$9t = 10$，即 $t = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$（分钟）。

芝诺悖论在当时并不受重视，但它在数学上的价值直到后世才为人们所发现，它说明“无穷大”、“无穷小”等概念逐渐出现在数学研究的项目中，这也是极限理论的萌芽。

在近代，随着科学技术的发展及社会实践的需要，这些概念又重新引起人们的注意，微积分理论就是主要建立在无穷小量分析之上的。但无穷小量分析后来被证明是包含矛盾的。

无穷小量分析的特点在于“无穷小量”的自由应用。例如，15 世纪的尼古拉斯就曾用这种方法求出了圆的面积公式。他首先通过无穷分割得出了无穷小三角形 OAB（见图 4）。由于 AB 为无穷小量，因此，无穷小三角形就既被看作一直边三角形，同时又被看成曲边三角形。作为直边三角形，它的面积为 $\frac{1}{2}LR$（其中 L 为 AB 的长，R 为圆 < /PGN0024.TXT / PGN > 的半径和三角形的高），而由于它又是曲边三角形，它的无穷累积就是圆。因而，圆的面积 $S = \frac{1}{2}L_1R + L_2R + \cdots\cdots = \frac{1}{2}R(L_1 + L_2 + \cdots\cdots) = \frac{1}{2}R(2\pi R) = \pi R^2$（$L_1 + L_2 \cdots\cdots$ 为圆的周长）。

又如，费尔玛也曾用无穷小量分析解决过求非匀速运动物体的速度问题。他的方法是这样的：（l）截取一时间间隔△t，并求出这一时间间隔物体所通过的距离△s；（2）求出△s，显然，这是物体在此时间间隔内的平均速度：（3）令△t=0，这时，我们所截取的时间间隔就是无穷小量 dt,因此，这时所获取的速度就是物体在这一时刻的瞬时速度。

由于微积分理论的研究对象是非均匀变化（如非匀速运动、曲线形），因此，这里的主要问题就是如何把非均匀变化转化为已解决的均匀变化来研究，即“变非匀速运动为匀速运动”，“化曲为直”。而无穷小量由于其本身的特性恰好为这种转化实现提供了条件。因此，无穷小量分析在严格的极限理论建立以前一直是微积分理论中的主要方法。

但是，作为其基础的无穷小量分析却包含有逻辑矛盾。具体而言就是：在无穷小量的实际应用中，它必须既是 0 又不是 0；但从形式逻辑的角度来看，这无疑是违反不矛盾律的。例如，就圆的求面积而言，如果认定无穷小量 AB 为 0，那么，无穷小三角形 OAB 就根本无面积可言（这时根本不存在三角形）；而如果认定 AB 不为 0，那么，无穷小三角形仍然是曲边三角形，从而，也就不能用计算直角三角形的方法来计算它的面积。又如，就非匀速

运动的问题而言，如果认定无穷小量dt为0，那么，$\frac{ds}{dt}$就是$\frac{O}{O}$，而按数学的传统法则，这是无意义的。事实上，这时也没有任何

运动发生。而如果不把dt看作0，那么，所求出的$\frac{ds}{dt}$就仍然是一段时间内的平均速度，而不是瞬时速度。

由于无穷小量分析中包含有这样的矛盾，而牛顿、莱布尼兹在建立微积分时也没有在理论上解决这个问题，这就使得无穷小量必然会首当其冲地成为不少人攻击的对象。在反对无穷小量分析的人士中，最激烈的要算爱尔兰克罗因地区的主教乔治·贝克莱。他认为，无穷小量只是一些数学家臆想的产物，是抽象的、虚无缥缈的主观猜测。他把无穷小量讽刺为“逝去了的量的幽灵”贝克莱的目的虽然是企图否定无穷小量，但通过这种指责可以看出，他在此问题上的确是个“行家”，他确实有效地揭示了无穷小量分析中所包含的逻辑矛盾。由于当时人们确信建立在无穷小量分析之上的微积分理论的正确性，因而，由此引起的矛盾就被认为是悖论，世称“贝克莱悖论”。

由于贝克莱的攻击切中了要害，因此，贝克莱悖论的发现动摇了数学的基础，在当时的数学界引起了一定的混乱，人们把它称之为“第二次数学危机”。

实际上，这并不是整个数学的危机，而是无穷小量分析方法的危机。第二次数学危机后，一些数学家致力于解决这一矛盾。通过近半个世纪的努力，人们发展了极限理论，从而为微积分理论建立了可靠的基础，克服了危机，解决了悖论。

五、无穷旅馆

——伽利略悖论

什么样的数算大数呢？当然，这是一个相对的问题。有这样一个故事：

两个贵族想做数数的游戏——谁说出的数字大谁赢。

“好，”一个贵族说，“你先说吧！”

另一个绞尽脑汁想了好几分钟，最后说出了他所想到的最大数字：“3。”

现在该轮到第一个动脑筋了。苦思冥想了一刻钟以后，他无可奈何地说：“你赢啦！”

两个贵族的智商显然是非常的低，这很可能只是一个挖苦贵族们的故事。但是，如果是发生在原始部落中，这故事大概就完全可信了。现已证实，在某些原始部落中，没有比 3 大的数词。如果问他们有几个儿子或杀死过多少猎物，那么，要是这个数字大于 3，他就会回答说：“很多个。”看来，他们的计数水平还不如一些幼儿园的娃娃呢！

有时候，看似不大的数却出乎意料的大，古印度的舍汉王就曾经吃过亏。据传说，舍汉王打算重赏国际象棋的发明和进贡者、宰相达希尔。这位聪明大臣的要求看来并不高，他跪在国王面前说：“ 陛下，请您在这张棋盘的第 1 个小格内放 1 粒麦子，第 2 个小格内放 2 粒，第 3 格内放 4 粒，照这样下去，每一小格内都比前一小格加一倍。陛下把这样摆满棋盘上的所有 64 格的麦粒都赏给您的仆人就行啦！”

“你所求的并不多啊。”国王说道，心里为自己对这种奇妙的发明不用花费太多而暗喜，“你会如愿以偿的。”说着，他令人把一袋麦子拿到宝座前。

计数麦粒的工作开始了，第 1 格内放 1 粒，第 2 格内放 2 粒，第三格放 4 粒……还没放到第 20 格，袋子已经空了。一袋又一袋的麦子被扛到国王面前来。但是，麦粒数一格一格增长得如此迅速，很快就可看出，即使拿来全印度的粮食也兑现不了国王的诺言，因为这需要 18， 446， 744，073，709，551， 615 颗麦粒。 1 升麦子约 137， 560 颗，照此计算，那就要给达希 1136 亿升。这位宰相要求的竟是全世界在 2 年内生产的全部小麦！

这样，舍汉王发现自己欠了达希尔好大一笔债，要么忍受他没完没了的讨债，要么砍掉他的脑袋，当然，舍汉王选择了后者。

达希尔所要求的麦子粒数虽然大得令人难以置信，但毕竟是有限的，就是说，只要有足够的时间，人们总能把它从头到尾写出来。然而，还有一些比我们所能写出的无论多长的数还要大的数，即无穷大的数，如“所有自然数（正整数）的个数”、“一条线上所有几何点的个数”。这些数是随着数学的发展必然被人们发现的。第一次数学危机促使严格的实数（包括有理数和无理数）理论的建立，第二次数学危机则使极限理论成为微积分的主要工具。极限理论也是以实数理论为基础的，而实数的数目就是无穷的。对于无穷大的数，除了说它们无穷大之外还能说些什么呢？这些数能否进行比较？

“所有有理自然数的个数和一条线上所有几何点的个数哪一个大些？”这一问题乍一看真是不可思议，但著名的数学家康托尔首先思考了这一问题，并指出二者是不一样大的。然而，我们又会面临这样一个问题：这些既不能读出来，也无法写出来，该怎样进行比较呢？这下我们有点儿像一个既不清楚自己的汽车有多少座位，又不了解有多少个乘客，但却想知道座位够不够坐的司机了。既然他什么也不清楚，他会不会放弃原来的打算呢？根本不会。如果他足够聪明（而且通常的办法也是如此），他就会通过把座位和乘客逐个相比的办法来得出答案。他让第一位乘客坐在第一个座位上，第二位乘客坐在第二个座位上……这样一直相比下去。如果最后座位用光了，还剩下些乘客，他就知道乘客多于座位；如果乘客都坐下了，座位还有多余，他就会明白座位多于乘客；如果乘客都坐下了，座位也正好用完，他就会晓得，乘客和座位数目相等。

康托尔所提出的比较两个无穷大数的方法与此是相同的，即给两组无穷大数列中的每一个数一一配对，如果这两组最后一个都不剩，这两组无穷大就是相等的；如果有一组还有些没有配完，这一组就比另一组大些。这种方法显然是合理且实际上也是唯一可行的方法。但是，当把这种方法实际应用时你却会大吃一惊。举例来说，所有偶数与所有奇数这两个无穷大数列，我们都会直觉到它们的数目相等，应用上述方法也完全符合，因为这两组数可建立一一对应关系：

1	3	5	7	9	11	13……
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
2	4	6	8	10	12	14……

这里，这种对应是非常自然的。现在请读者思考一下：所有整数的数目与所有偶数的数目哪一个更多？当然，你会说前者多一些，因为所有的整数不仅包括所有的偶数，而且也包括所有的奇数。然而，这只是人们的直觉。

如果应用上述方法，你会吃惊地发现，这种直觉是错误的，从下面的对应表就可看出：

1　2　3　4　5　6……

↕　↕　↕　↕　↕　↕

2，4　6　8　10　12……

根据上述比较无穷大数的原则，偶数的数目与整数的数目是同样多的。当然，这个结论看起来是非常荒谬的，因为偶数只是整数的一部分，这与整体大于部分的直觉显然矛盾。由于这种矛盾首先是伽利略发现的，故称“伽利略悖论”。康托尔认为，伽利略悖论并非什么“悖论”。任何两组东西，只要能相互一一对应，就是一样多。“整体大于部分”这条规律只有在有穷的情况下正确。在无穷大的世界里，部分可能等于全体！这就是无穷的本质。

对于有穷和无穷的特点，著名数学家希尔伯特的一则小故事给予了最好的说明：

某旅游胜地有一家旅馆，内设有穷个房间。由于是旅游旺季，所以，所有的房间都已客满。这时，来了位客人想订个房间。“对不起，”店主说，“所有房间都住满了”。客人无可奈何地来到另一家旅馆。这家旅馆与别的旅馆并无多大不同，只是房间数不是有穷而是无穷多个，号码为 1、2、3……这位客人到来时，所有房间也已住满，但他疲惫已极，坚持要住下。旅馆老板只得耐心劝说：“满了就是满了，非常对不起！”正好这时候，聪明的老板的女儿来了。她看见客人和她爸爸都很着急，就说：“这不成问题！请每位房客都搬一下，从这房间搬到下一间。”于是，1 号房间的客人搬到 2 号，2 号房间的客人搬到 3 号……依次类推。最后，这位客人住进了已被腾空的 1 号房间。

第二天，又来了一个有无穷多位旅客的庞大旅游团要住旅馆，这下又把老板难住了。老板的女儿又出来解围：“这好办，您让 1 号房客搬到 2 号，2 号房客搬到 4 号，3 号房客搬到 6 号……这样，l 号、3 号、5 号等单号房间就都空出来了，新来的无穷多位客人就可以住进去了。”

来多少客人都难不倒聪明的老板女儿，于是，这家旅馆越来越繁荣。后来，老板的女儿考入了大学数学系。有一天，康托尔教授来上课，听说此事后问她一个问题：“你能不能给 1 寸长线段上的每一点安排一个房间？”

她绞尽脑汁，想要安排一下，但终于失败了。康托尔教授告诉她，1 寸长线段上点的数目和自然数的数目尽管都是无穷的，但却不是一样大的无穷。线段上的点要比自然数的个数多得多，任何想安排下的方案都是行不通的。为了证明，我们给它们建立一一对应关系。

线段上每一点可用这一点到这条线的一端的距离来表示，而这个距离可写成小数形式：

l.$0.a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}$……

2.$0.a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}$

3.$0.a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}$……

……

k.$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}a_{k4}$

现在我们可认选一个实数 $d=0.b_1b_2b_3$……，其中 $b_k \neq a_{kk}$，同样，$b_1 \neq a_{11}$，$b_{12} \neq a_{22}$…显然，d 不等于上述任何数，因为至少第 k 位 $b_k \neq a_{kk}$。这样，线

上的点与自然数之间的一一对应就建立不起来，线上的点数所构成的无穷大数大于自然数所构成的无穷大数。

可以证明且令人惊异的是，无论线段是 1 寸长，1 尺长还是和赤道一样长，上面的点数都是相同的。而且，平面、立方体上所有的点数与线段上所有的点数也是相等的。这种无穷是比自然数、分数的数目更高一级的无穷。同样可以证明，所有几何曲线的数目是第三级的无穷。到目前为止，还没有人想象得出更大的无穷大数。这三级无穷大数就足以包括我们想到的所有无穷大数了。看来，在无穷的世界里，我们有点像开头所讲的那两个贵族了！

六、多少人参加比赛

——康托尔悖论

一年一度的某中学艺术节又要到来了。本次艺术节共设三项：书画比赛、歌咏比赛和围棋比赛。初二 · 三班的文艺委员孟娟对本班参赛人员进行统计，结果是：参加书画比赛的 15 人，参加歌咏比赛的 28 人，参加围棋比赛的 25 人，但使孟娟百思不得其解的是，参加人员总计 68 人，而她的班里总共才有 60 人，剩余的 8 人是从何处来的呢？原来，这是由集合的性质造成的。

关于集合的理论是 19 世纪末开始形成的。当时德国数学家康托尔试图回答一些涉及无穷量的数学难题，例如“ 整数究竟有多少？ ”“ 一个圆周上有多少点？ ”0—1 之间的数比 1 寸长线段上的点还多吗？ ”等等。而“ 整数 ”、“ 圆周上的点 ”、“ 0—1 之间的数 ”等都是集合，因此对这些问题的研究就产生了集合论。

集合是什么呢？用康托尔的话说，集合就是把具体的或思想上的一些确定的、彼此不同的对象聚集成的整体。简单说来，集合就是一组事物。例如“ 中华人民共和国的直辖市 ”、“ 星期二数学课迟到的人 ”、“ 张三穿过的鞋 ”等都是集合。物以类聚，人以群分，同类的人或事物总有共同的特点或性质，根据这种特点或性质就可以决定一个类，这个类就是集合。任何人或事物总是处于不同的集合中，甚至你自己也会是一些集合内的成员，如你的家庭、你上学的班、你参加的校外活动小组等。生活中我们有时也用其他的词如群、套、队、族、类、班等等来表示集合。

集合可以是一组数字、一群人、一些图形、一类概念。构成一个集合的东西均属于这个集合，属于这个集合的个体称为集合的元素，比如“ 小于 7 的奇数 ”就是一个集合，构成这个集合的 1、3、5 就是这个集合的元素。“ 中学课本 ”也是一个集合，组成此集合的物理课本、化学课本、英语课本等是这个集合的元素。给出一个集合，就规定了这个集合是由哪些元素组成的。显然，对于任何事物来说，它要么属于一个集合，要么不属于这个集合，二者必居其一。如 1 和 3 属于“ 小于 7 的奇数 ”这一集合，而 6 和 8 则不属于这个集合。

“ 小于 7 的奇数 ”这一集合由元素 1、3、5 组成，人们通常把这种说法用符号表示，记作：｛1，3，5｝，花括号 ｛｝ 示集合的元素的组成，一般用英语大写字母表示集合，如 A＝ ｛1，3，5｝ 。这种表示集合的方法称为列举法。而“ 小于 7 的奇数 ”是通过描述集合元素的共同性质的方法来表示这个集合的，因此这种方法又称为描述法或特征法。这两种表示法是可以互换的。

一般地，如果集合由有穷个元素组成，且这些元素又知道得清清楚楚，那么最简便的方法就是列举法，如“中国的直辖市”可表示为｛北京，天津，上海｝”而如果元素为无穷多个，或者即使为有穷多个，但其元素太多，那么一般使用描述法，如“济南市的居民”、“大于 9 的奇数”。有时描述法也可这样表示：A=｛X｜X 是济南的居民｝，B=｛X｜X 是大于 9 的奇数｝。

在算术中我们常比较一些数，找出其中哪一个数较大。集合也可以进行比较，而比较的方法之一就是把一个集合的元素与另一个集合的元素进行比较。集合｛1，3，5，7｝与集合｛2，4，6，8｝不同，因为二者的元素不同。而集合 A＝｛a，b，c｝与集合 B＝｛c，b，a｝则是相同的，这是因为这两个集合有着相同的元素，这时我们记作 A＝B。至于元素排列的次序是否一样，倒是没有关系的，只要两个集合具有相同的元素，它们就是相等的。

集合之间还可以采用一一对应的方法进行比较。古时有一人遭诬陷后被关进了漆黑一团的地下室里，他一心想着能早日出去报仇，但在这幽暗的世界里，没有黑夜与白天的分别，当然更没有天数的概念、怎么能知道自己在这里呆了多少天呢？他发现了一个窍门，原来狱卒每隔一天倒一次马桶。于是每当狱卒倒马桶时，他就用石块在墙上划一道线，这样马桶的集合与线的集合就形成一一对应，而马桶的集合又与日期的集合形成一一对应，因此，从线的多少就可以知道天数的多少。

要对任何两个集合进行比较，只要用一个集合的元素去对应另一个集合的元素就可以了。如果两个集合有一一对应的关系，那么我们就说两个集合是等价的，如上述线的集合、马桶的集合、日期的集合相互之间都是等价的。但值得注意的是两集合等价与相等不是一回事。例如在初一·二班中有张三和李四两位同学，张三的老师的集合 A 与李四的老师的集合 B 是相等的，因为两集合的元素是完全相同的；也就是：

A＝｛王五，赵六，周七｝
‖　‖　‖
B＝｛王五，赵六，周七｝

但假如张三与李四不是同一学校的，张三的老师的集合 A 与李四的老师的集合 C 就不是相等而是等价的，因为两集合的元素只是一一对应，而不是相同的，也就是：

A＝｛王五，赵六，周七｝
↕　↕　↕
C=｛吴八，郑九，陈十｝

判断若干个集合是否等价最简单的办法就是看每个集合内元素的个数是否相等，一集合的元素的个数称为此集合的基数，例如｛北京，天津，上海｝这一集合有三个元素，故其基数为 3，而｛《孔乙己》，《风波》，《阿 Q 正传》，《一件小事》｝有四个元素，则基数为 4。

有一些集合，它们的元素是有穷的，如｛1，4，9，……100｝，｛里根，布什，克林顿｝，这种集合称为有穷集合。而有些集合则有无穷多个元素，如整数的集合、宇宙中星体的集合等，这种集合称为无穷集合。无穷集合的基数大于任何有穷集合的基数。由上节的分析可以看出，无穷集合可以通过一一对应的方法进行比较，但却出现了令人惊讶的结果，如偶数集合与自然数集合的元素一样多，一条线上点的集合与平面上点的集合其元素也是相等的。康托尔把无穷集合的概念作为集合理论的基础，并证明无穷集合的一个

显著特点就是无穷集合自身可与其部分具有一一对应关系。

还有一种集合与无穷集合恰好相反，这种集合不包含任何元素，例如“能被 2 整除的奇数的集合”、“活到 1200 岁的人的集合”等，这些集合叫空集。在我们讨论具有某种性质的对象时，把具有这种共同性质的一切元素组成的集合叫做全集。例如在某运动会中，参加某一项目竞赛的共有 10 名运动员，那么这 10 名运动员组成的集合就是参赛运动员的全集。

在一集合中，我们可以拿出一部分元素来组成新的集合。在本节开始所述的例子中，“初二 · 三班的学生”是一集合，而在这些学生中，又可以分出几种不同类型的学生，如参加歌咏比赛的学生、参加书画比赛的学生、参加围棋比赛的学生等。这几类学生是初二 · 三班学生组成的几种集合，这些集合都是初二 · 三班学生集的子集。显然，子集是包含于原来集合的子集的元素，如张三既是参加书画比赛学生集的元素，同时也是初二 · 三班学生集的元素。当然，我们还可以按其他条件组成不同的子集。如男学生集、女学生集、团员学生集、参加英语学习小组学生集等等。那么给定一个集，能组成多少个子集呢？我们具体看一下，例如：

{1} 可有 {} 、 {1} 2 个子集；

{1，2} 可有 {} 、 {1} 、 {2} 、 {1，2} 4 个子集；

{1，2，3} 可有 {} 、 {1} 、 {2} 、 {3} 、 {1，2} 、 {1，3} 、 {2，3} 、 {1，2，3} 8 个子集。

依次类推，可以看出，一个含有 n 个元素的集合有 2^n 个子集。

需要注意的是，在集合论中，对于集合有多少元素没有限制，所以会出现只有一个元素的或没有元素的子集（空集），原集本身也是自己的子集。所以当我们问原集能有多少个子集的时候，空集和原集也须计算在内。

一个集合的所有子集也可以组成集合，这个集合叫做原集的幂集。例如 {张三，李四} 这一集合的幂集就是

{ {} {张三} ， {李四} ， {张三，李四} } 。

两个或两个以上的集合还可以通过运算形成新的集合。例如英语考试优秀的学生集 A＝ {赵丽，王芳，陈凤} ，数学考试优秀的学生集 B＝ {朱军，王铭，王芳} 。这两个集可以相加组成集 C，它既包含了 A 的元素，又包含了 B 的元素，这个集就是 {赵丽，王芳，陈凤，朱军，王铭} 。这个集称为 A 和 B 的并集。注意的是，王芳在上面的集中不必写两次，只要写一次就说明她是 C 的元素了。因此 C 的基数并不等于 A 的基数加 B 的基数，而是二者相加后再减去共同的元素。文艺委员孟娟在作统计时实际上就是把 3 个子集进行相加，但要把 3 个子集的基数相加后再减去共同的元素才能等于初二 ·三班的总人数。而孟娟只是简单相加，忘记了应减去相同的元素，难怪要多出 8 人了。集合 A 和 B 还可以相乘得一新集合 D，D 是由于 A、B 中共同的元素组成的集即 {王芳} ，D 称为 A 和 B 的交集。

以上是康托尔集合论的一些基本概念。康托尔的理论，特别是一一对应的方法造成的无穷中的悖论，与传统观念格格不入，难怪一开始康托尔就遭到那些坚持传统观念人士的强烈反对，说他的理论是“雾中之雾”，甚至有人骂他是疯子。当时德国数学权威、他的老师克洛耐克的攻击尤为激烈。他说：“康托尔走进了超穷数的地狱。”他有一句名言：“上帝创造了正整数，其余的是人的工作。”就是说，人只能在正整数的有穷范围内研究，至于无穷的世界则完全超乎人的能力之外。甚至不承认康托尔为他的学生。在这种

情况下，康托尔长期受到压抑和排挤，竟然得不到柏林大学的教授职位，他郁郁不得志，一度精神崩溃，放弃数学的研究，后来终于在一家精神病院去世。

然而康托尔集合论的创立是人类思维发展史上的一座里程碑，它标志着人类经过几千年的努力，终于基本弄清了无穷的性质。因此越来越多的人开始承认它，并成功地把它应用到许多别的数学领域中去。大家认为，集合论确实是数学的基础。而且，由于集合论的建立，数学的“绝对严格性已经取得”。这时，数学的王国里春光明媚，阳光和煦，一派太平景象。然而正当人们喜气洋洋、兴高采烈地准备大摆“百牛宴”时，数学王国的大地上突然爆发了空前强烈的地震——在集合论发现了一系列的悖论。

这些悖论的出现，可以说是康托尔集合论的必然结果。实际上在 19 世纪末，康托尔本人就已发现自己理论中有不少矛盾，但他没有声张，而是悄悄地在利用。

由上可知，有 1 个元素的集合其子集有 2 个，有 2 个元素的集合其子集共有 4 个，一般地，有 n 个元素的集合其子集有 2^n 个,n 个元素的集合其基数为 n，而其所有子集组成的集合的基数为 2^n ，显然 2n＞n。因此有“康托尔定理”：任意集合（包括无穷集）的幂集的基数大于该任意集合的基数。

据康托尔集合理论，任何性质都可以决定一个集合，这样所有的集合又可以组成一个集合，即“所有集合的集合”（大全集）。显然，此集合应该是最大的集合了，因此其基数也应是最大的，然而其子集的集合的基数按‘康托尔定理”又必然是更大的，那么，“所有集合的集合”就不成其为“所有集合的集合”，这就是“康托尔悖论”。对这一悖论，康托尔并没有感到害怕，因为通过反证法恰恰证明没有“所有集合的集合”或者说“最大的集合”，当然也没有“最大的基数”。

悖论的出现这时并没有引起多大的震动，人们觉得这似乎仅仅牵涉到集合理论的一些技术问题，只要作适当的修正，集合论仍然会成为数学大厦的基础，康托尔只是利用悖论进行反证，而并没有细究悖论的来源及意义，他没有意识到这种反证之所以可能，是因为他的理论中所使用的基本概念“集合”、“属于”、“元素”是包含着矛盾的。1901 年罗素发表的“罗素悖论”则“剥掉了数学技术性的细节”，使其中的矛盾赤裸裸地暴露出来了！

七、理发师给不给自己刮胡子

——罗素悖论

伯特兰·罗素是英国著名的哲学家、数学家、散文作家和社会改良主义者，1872 年 5 月出生于威尔士的特雷克，祖父约翰·罗素勋爵在维多利亚女皇时代曾三次出任首相。罗素 4 岁前已父母双亡，他是在祖母和家庭教师的抚养下长大的。1890 年进入剑桥大学“三一学院”学习，毕业后曾在三一学院任哲学讲师和兼职研究员。1920—1921 年罗素曾来我国讲学并任北京大学客座教授。他也曾任美国哈佛大学客座教授，偶尔也在英美其他大学作短期讲学。罗素曾是亚里士多德协会会员，英皇家学会会员和英国科学院名誉会员。

罗素一生颇具传奇色彩，他曾经四次结婚，三次离婚，两次因政治原因

被监禁。一次是 1918 年因犯对美军的诽谤罪被监禁 6 个月，另一次是 1961 年在 89 岁时因煽动民众反对政府，支持核裁军运动，在医院被监禁 1 星期。

罗素知识渊博，在数学、逻辑学、哲学、教育学、社会学等领域均有建树。他也是一位多产的作家，一生写有 69 本著作和大量的文章，1950 年曾获诺贝尔文学奖。

1901 年 6 月，罗素考虑了康托尔悖论，通过分析其结构后发现了罗素悖论。构成罗素悖论所使用的也是康托尔集合论的最基本概念：集合、属于、元素。元素属于集合，一个集合也可以成为另一集合的元素。

罗素说，集合可以分为两类，一类是集合本身也是自己的元素，例如“概念的集合”，它包含了所有概念为其元素，而“概念的集合”本身也是一个概念，因此也是它自己的元素，也就是说属于自己。又如“汉字符号组的集合”是由汉字组成的符号组，因此这一集合本身也是自己的元素。当然，“一切集合所组成的集合”也是自身的元素，因为它也是一个集合，这种集合罗素称为“非常集”。非常集并不是很多，最常见的还是第二类，即本身不是自己元素的集合，罗素称之为“平常集”。例如“兔子的集合”，这一集合本身是一概念，而不是一只兔子，因而它不是本身的元素。“英国首相的集合”则包含撒切尔、梅杰等人作为其元素，而这一集合本身却不是一个首相。此集合也是“平常集”。

根据集合的特点，“兔子的集合”、“英国首相的集合”等等这些平常集也可以组成一个集合，即“所有不属于自身的集合的集合”。那么，现在就有一个问题：这一集合是平常集还是非常集？“所有不属于自身的集合的集合”属于自身还是不属于自身？

如果它属于自身，那么，它就是非常集，也就不是“不属于自身的集合”，因此，也就不属于自身；如果它不属于自身，那么，它就是平常集，也就恰恰是自身的元素，即属于自身。简言之，如果这个集合属于自身，那么就不属于自身；而如果不属于自身，那么就必须属于自身。怪圈！

这一悖论简单明了，而且是集合论的基本概念引申出来的。这时，数学王国的臣民们开始惶惶不安起来，因为他们一贯追求严密性，而一旦发现他们自称绝对严密的数学基础——集合论并不严密，竟然出现了“悖论”这种自相矛盾的结果，可以想象他们是多么震惊，多么心慌意乱！一时间，数学王国一片混乱，第三次数学危机到来了。

德国数学家弗雷格花了 25 年的时间写成了《算术的基本法则》，正当第二卷要付印的时候，他收到了罗素的一封信，罗素在信中把这一悖论告诉了他，弗雷格就在著作的末尾加了这样的附记：“一个科学家不会碰到比这更难堪的事情了，即在工作完成之际，它的基础突然垮掉了。当这部著作只等付印的时候，罗素先生的一封信就使我处于这种境地。”数学家戴德金原来准备把《连续性及无理数》第三版付印，这时也把稿件抽了回来。他觉得由于罗素悖论，整个数学的基础崩塌了。有的数学家甚至宣布他以前的数学著作全部是“废话”。

为了有助于人们对罗素悖论的理解，1918 年罗素又用“理发师悖论”进行了通俗的解释。

西班牙的塞维利亚村只有一个理发师，自夸无人可比。他给自己的小店立了一条店规：“我给且只给村里不给自己刮胡子的人刮胡子。”他把此店规用一个牌子写出来，并把它挂在小店的墙上。小店开业后，顾客盈门，理

发师当然喜不自胜。顾客们只管刮胡子，对其店规也都没大在意。然而有一天，理发师自己感到迷惑了：谁给他自己刮胡子呢？

如果他自己刮胡子，那么他就属于自己刮胡子的那类人，但是他的招牌说明他不给这类人刮胡子，因此他不能自己来刮。

如果他不给自己刮胡子，而由另外一个人给他刮，那么，他就属于“不给自己刮胡子”的那类村民，但是，他的招牌却明明说，这类村民的胡子应该由他给刮。因此，其他人不给他刮胡子，他的胡子只能自己刮。

属于“自己刮胡子”的则属于“自己不刮胡子”的；而属于“自己不刮胡子”的，则又属于“自己刮胡子”的。不刮，该刮；刮，不该刮……可怜的理发师陷入了神秘的怪圈而不能自拔了。

排中律说，一个元素要么属于某集合，要么不属于。而这里却说属于不行，不属于也不行，总是矛盾的，怎么办呢？

、有人说，干脆理发师也不要讲卫生了，他的胡子就让它长着永远不刮算了。但这也行不通，因为这样的话他就又属于自己不刮胡子的那类村民了，按规定仍需自己刮。理发师说：“我就是不刮，你能拿我什么办法？”这当然可以，但他的店规就不能执行了。那么，请别村的理发师替他刮呢？也不行，这情形同上是一样的。有人说，给这位理发师施行现代手术，消除他脸上的毛囊，不让他长胡子，但这就近乎抬杠了。

西方的一些逻辑学家则采用了康托尔的，也是过去人们常使用的方法——反证法。“矛盾即荒谬。”既然由假设导致了“既要自己刮胡子又不能自己刮胡子”的矛盾，因此，假设必然是不成立的，也就是说，“给且只给那些不给自己刮胡子的人刮胡子”，这种塞维利亚理发师是不存在的。塞维利亚的理发师不是塞维利亚男人，他可能是塞维利亚的女人或孩子，或者是其他地方来这里谋生的男人。如果他是塞维利亚男人，他不能不折不扣地实行自己的规定，世界上总会有许多不一致的政令、法律和制度等。因此，这里并没有悖论，困难只是表面的。

但是，这些解释完全误解了罗素的意思，他只不过想用通俗的方式说明罗素悖论。因此，塞维利亚村的这位理发师不但不是女人和孩子，而且还是个不断长胡子从而必须经常刮的男人。为了使人信服，罗素指出他的悖论还可以用逻辑的术语表示出来。

形容词可以分为两类：一类是这种形容词所表示的性质可以适用于形容词自身，比如“黑的”这个形容词本身就是黑的，所以它就适用自己。“四个字的”这个词本身也是四个字的，因此它也可以用来形容自身。又如“用汉语表示的”，既可以用来形容“一目了然”、“至高无上”等这些词，同时也可以用来形容自己，这种形容词称为“自状的”。而另一类形容词所表示的性质则不能形容自身，即它不具有自身所代表的性质，这种形容词称为“非自状的”。例如，“英文的”本身是汉语的，而不是英文的，它不能形容自己。“无意义的”自身是有意义，它并不适用于自己，所以也是非自状的。

但是，“非自状的”本身也是一形容词，那么，它是属于自状的一类，还是属于非自状的一类呢？

如果说，“非自状的”这一形容词是自状的，也就是说，它所表示的性质适用于自身，而它所表示的性质就是非自状的，因此，“非自状的”是非自状的。

如果说，“非自状的”这一形容词是非自状的，就是说，它所表示的性质可以适用于自身，据定义，它又是自状的。

自状就是非自状的，非自状的就是自状的，循环不已。

这一悖论是由格雷林提出的，故称“格雷林悖论”。

如果嫌“自状的”、“非自状的”不太清楚，你还可以换成其他的说法，比如“符合自己的”、“不符合自己的”。现在句，“不符合自己的”符合不符合自己？如果符合自己，那么正好说明它是不符合自己的，而如果不符合自己，则又是符合自己的。

理发师悖论中的理发师可以说不存在，或者说他的店规是不能实现的，但形容词总有能不能适用于自己的问题，而非自状的”作为一形容词也有是否适用于本身的问题。任何东西总有符合不符合自己的问题，而对“不符合自己的”也就可以问是否符合自己。“非自状的”、“不符合自己的”这些形容词显然存在，看来，悖论是不可避免的了。

八、重温旧梦

——悖论的解决

据《圣经》上说，人类的始祖亚当和夏娃因偷吃禁果被逐出伊甸园，于是他们在凡间生儿育女，逐渐繁衍起来。后来他们的后代发现了一片广袤的原野，决定住下来，准备在那里建一座城，城里建一座塔，塔顶通天。大家此呼彼应地说着话，热火朝天地干起来，做坯的做坯，烧砖的烧砖，和泥的和泥，运料的运料，建塔的建塔，那塔直入云霄。这件事惊动了上帝，耶和华亲临现场，看到平地上、塔顶上人们川流不息地传运着砖料和灰泥，从下往上层层传递，有条不紊，越砌越高。

耶和华对天使说：“看哪！他们如此协调一致，如今建塔，往后做起别的事来，就没有不成的了。看来得使他们语言彼此不同”于是，他就让建塔的人们说出各种各样的语言，每个人说话只有身边的几个人懂得，稍远一点就听不懂了，塔顶上的人向下边喊话，震破了嗓子下边的人也不知他们到底要什么，打手势也不管用，因为缺乏统一的规定。由于语言不通，停工待料，人们的心随之逐渐涣散，那座塔也就半途而废了。

耶和华把众人分散到各地，遍布天涯海角，从此世间便产生了成百上千种语言，各种语言中又有各种方言。

半途而废的原因是语言的变乱，“变乱”在希伯莱语中读作“巴比伦”，因此人们就把这座塔称为“巴比伦塔”。

经过 2000 多年的努力，20 世纪初人们逐渐构造起了数学的庞大体系。在这个体系中，每个结果都依赖于以前已经取得的成果，这非常像一个层层叠叠的巴比伦塔式的建筑物。在这个建筑物中，当时主要有算术、代数、几何、数学分析等几大阶层。第一次数学危机使自然数的尊崇地位受到挑战，人们开始认识到无理数的意义，同时也意识到直觉和经验不一定靠得住，从而导致古典逻辑和欧氏公理几何学的诞生。随着第二次数学危机的解决，微积分（数学分析的一部分）建立在极限理论的基础上。而要理解极限的性质，就必须对数有明确的概念。这里的数不仅指有理数，而且还包括无理数，这两种数构成了实数的集合，因此当务之急是建立严格的实数理论。康托尔通

过一定的有理数序列定义实数，而戴德金则利用有理数集合的分割来定义实数，就是说他们都依赖于有理数的集合概念。这样，实数理论的无矛盾性就归结为有理数论进而归结成自然数论的无矛盾性了。

自古以来，大家都认为自然数的算术是天经地义的。不过数学家们又把它进一步归结为逻辑与集合论，也就是用逻辑和集合论推出自然数，这样，逻辑与集合论成为整个数学大厦的基础。在这个建筑物的构架中，如果有一个小框架电现了一点裂缝，并不会使整个大楼倒塌，但是如果它的基石崩溃了，你可以想象会是什么样的结果！

从历史的发展来看，罗素悖论的发现对人们的震动是巨大的。因为这种威胁不仅限于集合论，而是涉及整个数学，甚至还包括逻辑。因为只需稍作变动，罗素悖论就可以在纯逻辑的形式下得到构造，如上述的格雷林悖论。

那么，为什么 2000 多年来的悖论对逻辑、数学没有产生根本性的威胁，而现在却像爆发了一场大地震，使许多人大惊失色、惊愕得说不出话来呢？这是因为过去的悖论或依赖于某些具体的事实，或者主观认识上的错误。例如，“说谎者悖论”要依赖于说话的人为克里特岛人。人们可以说悖论的出现只是表明所假定的事实不能出现，不过是一幻想，也可以说这样的话毫无意义。“希帕索斯悖论”的出现，是由于毕达哥拉斯学派坚持“一切事物和现象都可以归结为整数或整数之比”的信条造成的，由于人们未能认识这一信条的相对性（即在一定范围内适用），

而把它应用到整个世界，就使之成为错误的结论，这样就和$\sqrt{2}$的无理性的明构成了直接的矛盾，形成悖论。同样，“伽利略悖论”也是如此。由于正整数与正整数的平方数（前者的部分）之间可以建立一一对立关系：

l，2，3，4，……

↕ ↕ ↕ ↕

l，4，9，16，……

因此，整体（自然数集）和部分（平方数集）在数量上是相等的。但由于人们总认为“整体大于部分”，殊不知，这只能适用于有穷量，而不能适用于无穷量，因此造成悖论。显然这也是由于主观认识上的错误造成的。

那么，“贝克莱悖论”又是怎么造成的呢？无穷小量在本质上是辩证的，它是零与非零的统一，也就是说它既是零又是非零。所谓“无穷小量是零”是指它的运动变化的终点是零，而所谓“无穷小量是非零”是指它趋向于零。由于数学是以形式逻辑为基础的，它就要遵循不矛盾律，要求对象具有明确性和一义性，也就是说必须明确无穷小量究竟是零还是非零（不能断言既是零又是非零）。而在实际应用中是这样解决的：人们先假设无穷小量不等于零，然后再规定它为零，这种方法实质上是通过把对立环节割裂开进行把握。但对立双方仍然存在于无穷小量本身，当它们被重新联结在一起时，悖论就不可避免地出现了。因此，“无穷小量具有一义性”这种错误的认识是造成“贝克莱悖论”的原因。

这种由于主观认识上错误而造成的悖论，其特点就是在它们的构造过程中包含有某个或某些具有直接错误的前提，既如此，悖论就是一种应当避免，而且也能被彻底排除的主观错误。

“矛盾即假”，客观世界是不存在矛盾的，矛盾只在人的主观认识中，这是人们的普遍观念，数学和逻辑是严格性和真理性的典范，因此当其中出现悖论时人们自然会想到：一定是我们主观上出什么差错了。找出悖论中错

误的前提，并加以改正，悖论就能得以避免。无理数理论的建立使人们否定了“一切事物和现象都可归结为整数或整数之比”的错误信条，“希帕索斯悖论”得以克服；以实数理论为基础的极限理论的产生则否定了“无穷小量要么是零要么是非零”的错误观念，使“贝克莱悖论”不再出现。

而罗素悖论却不同，它使用了集合论的最基本概念：集合、属于、元素。根据人们古老的信念，既然出现了悖论，那只能说明集合论的基本前提是错误的。但人们在这些前提中却没有发现以往任何明显不正确之处，这样，在对此悖论的解决中也就出现了种种不同的方法。而且，在解决罗素悖论的种种努力中，人们又进一步暴露出在许多最基本的数学概念上的严重分歧，如到底什么是集合，有没有实无穷等等，这些分歧又增加了人们关于数学不可靠性的感觉，从而也就更增强了“危机”的气氛。一向是平和宁静、人人“安居乐业”的数学王国顿时众心浮动，群情沮丧。正如数学家克莱因所说：“作为逻辑结构的数学已处于一种悲哀的境地……数学家们以向往的心情回顾这些矛盾被认识以前的美好时光。”

但是在悖论面前，人们对所处的境况是不能长期忍受下去的，因为如希尔伯特所指出的，数学是可靠性和真理性的典范，在这里，如果每个人所学的、教的和应用的那些概念和推理方法导致了不合理的结果，那么数学思考就会失灵，人们又能到哪里去寻找可靠性和真理性呢？因此在惊愕和沮丧之余，数学家们和哲学家们并没有沉沦，而是采取种种措施去排除悖论这个怪物，从而为数学大厦建立更稳固的基础。

要解除悖论，就要搞清悖论是如何形成的，以罗素悖论为例，它的构造过程如下：

（1）构成集合 S＝｛A｜A 不属于 A｝，也就是“不以自身为元素的集合的集合”；

（2）考虑“S 是否属于 S”；

（3）由排中律，这时必然有 S 属于 S 或 S 不属于 S，但无论 S 属于 S，还是 S 不属于 S，总会得出矛盾，因此，矛盾不可避免。

以上述事实进行分析可以看出，这里事实上包含了以下前提：

Ⅰ、对任意的 A 来说，“A 不属于 A”总是有意义的命题。

Ⅱ、对任何性质来说，如果对所有的对象都有意义，那么总可以构造出相应的集合。例如“红色的”为一性质，所有具有这一性质的对象就构成一个集合。因此，集合就是把我们感兴趣的，想加以研究的对象集中在一起组成的整体。感兴趣可以是任何的东西，树木、房子、数字、猫、狗、猪等等。如果对“高大”感兴趣，就可以把我们班所有高大的同学组成一个集合。想研究“食草性”，就可以把所有食草动物组成一个集合。当然，想研究“不以自身为元素的集合”，也就可以把它也构成一个集合（S）。

Ⅲ、对所构造的 S 也可考虑“S 是否属于 S”的问题。

Ⅳ、排中律在集合论总是有效的，即一元素或者属于或者不属于某个集合。

Ⅴ、在集合论中不允许任何矛盾出现，即不矛盾律是有效的。

因此，从技术上讲，任何方法都是通过否定其中一个或一个以上的前提来排除悖论的。

九、大跳蚤与小跳蚤

——类型论

小学一年级时用过的语文课本曾令我惊奇不已。课本的封面上有一男一女两个小学生坐在一起看着一本书，而这本书正是我们使用的语文课本，他们看的书上也有两个稍小一点的小学生同样也是在看语文课本。如果画家继续画下去，那就会形成层层的倒退。

这样的情形我也在理发店里见过，在顾客的前面有一面大镜子，而后面的墙上也有同样的一面镜子，往任何镜子里看去，人们都会看到无穷的镜子和镜子前的顾客。如果读者感兴趣，不妨也做一个这样的实验：把一根蜡烛放在两面相向的镜子中间，从镜子里你可以看到无穷层次的蜡烛。

数学家奥古斯塔斯·德摩根曾改写了乔纳·斯威夫特的一首诗，生动地描绘了这种无穷的倒退：

大跳蚤有小跳蚤
在它们的背上咬，
小跳蚤又有小跳蚤，
如此下去
没完没了。
大跳蚤倒了个儿——变小，
上面还有大跳蚤，
一个上面有一个，
总也找不到
谁的辈数老。

罗素也曾设想了一个与此相似的类型论来消除悖论。按照罗素的看法，悖论是由于非直谓定义造成的恶性循环引起的。所谓“恶性循环”就是自我指称性或自返性。通俗地讲就是自己说自己。而“非直谓定义”是指这样的定义：它借助于一个整体来定义一个对象，而这个对象又属于这一整体。也就是说，假设我们要给一对象 A 下定义，这时要借助于 B，而 B 是一类对象的整体，A 是 B 的一部分。例如，在格雷林悖论中曾给“非自状的”下这样的定义：一个形容词，如果它不具有自身所代表的性质就称为“非自状的”。这一定义就是非直谓定义。因为“非自状的”要借助于“不具有自身所代表的性质”来定义，“不具有自身所代表的性质”描述的是这类对象的整体。但是，“非自状的”却恰恰是这一整体中的一员，这样，就造成自己指称自己、自己描述自己的恶性循环。同样，在罗素悖论中，“不以自身为元素的集合的集合”要借助于“不以自身为元素的集合”的全体来定义，但是，这一集合本身也是全体的一分子。又如，所有集合也可以构成一集合（大全集），但此大全集本身也是一个集合，当然又属于“所有集合”，这样就形成“所有集合”⇒“大全集”⇒“所有集合”的恶性循环。罗素把这种造成自己指称自己、自己描述自己的整体称为“不合法的总体”。为了避免“不合法的总体”，罗素提出了“恶性循环原则”，确切点说应该是“避免恶性循环原则”：凡牵涉到一个汇集的全体者，它本身不能是该汇集的一个分子；或者，反过来说，如果假定某一汇集有一个总体，它便将含有一些只能用这个总体来定义的分子，那么，这个汇集就没有整体。换句话说，一类对象可以汇集成为一个总体，人们可以利用这总体给某一具体对象下定义，但这一具体的

对象不能是这一全体的成员；反之，假如某类对象可以汇集成为一个总体，但其中却发现有这样的对象，它们必须用这一总体来定义，那么，此总体就不成其为真正的总体。有了这一原则，对任何具体的对象下定义时，就不会借助于包含这一对象的总体，从而也就不会造成自己说自己的恶性循环。在此原则的基础上，罗素提出了类型论。

这种理论用简单的例子来说并不深奥。例如，“张三是高个子”是个有意义的命题，显然，如果我们用“李四”、“王五”、“赵六”等等来代替命题中的“张三”一词，它仍然具有意义。但是，如果我们用“班级”、“小组”、“人类”等代替“张三”时，这个命题就变得毫无意义了。这是因为，“李四”、“王五”等是与“张三”属于同一级别的具体事物，而“班级”、“小组”等则是由这些具体事物作为元素构成的集合。由此可以看出，在这里，命题的意义取决于对个别事物和个别事物的集合两个层次的区分，这就是类型论的思想。

类型论的基本轮廓是这样的：

世界是一个无穷等级的体系，在最低级的层次上只有个别事物，在较高一级的层次上只有个别事物的集合，在更高一级的层次上只有个别事物的集合构成的集合。依次类推。总之，同一层次的对象构成一个类型，不同层次的对象构成不同的类型。假设个别事物为最低一级的类型，即类型 0，那么，次一级的类型由个别事物的集合构成，即类型 1；再次一级的是由个别事物的集合构成，即类型 2。依次类推，可以构成无穷的类型层次。类型 n＋l 的集合只能把类型 n 的集合作为自己的元素，而不能以类型 n＋ l 的集合作为自己的元素，也不能以类型 n＋2 的集合作为自己的元素等等。因此，不能考虑一个集合是否是自身的元素。用罗素的话说，正如“美德是四边形，或者不是四边形”这句话是没有意义的一样，“一个集合是自己的元素”或者“一个集合不是自己的元素”不是错误的，而是没有意义的，因为它们混淆了类型，是恶性循环的。

罗素的类型论就像我们平时看到的套餐盒一样。大餐盒里面套着中餐盒，中餐盒里又套着小餐盒，小餐盒里面还有更小的餐盒，这是层层递进的。不同大小的餐盒属于不同的类型。这里只能由大到小往里套，即只能套比自己小的，任何餐盒都不能自己套自己，更不能套比自己大的。

据类型论，“A 不属于 A”并非有意义的命题，同样，“S〔不以自身为元素（A 不属于 A）的集合的集合〕是否属于 S”的问题也是没有意义的。另外，“A 不属于 A”既然没有意义，那么，由它也不能构成集合 S，也就是说并非任何性质都能决定一个集合，这样就否定了上节所述的罗素悖论中的前三个前提，罗素悖论得以避免。

格雷林悖论的构成过程是这样的：

（1）把形容词分为两类：一是适用于自身的，称为“自状的”，一类是不适用于自身的，称为“非自状的”。

（2）据集合形成规则：任何一性质决定一个集合，“自状的”构成一集合，而“非自状的”同样也能构成集合。

（3）问“非自状的”是否属于自身。

（4）据排中律，要么属于自身，要么不属于自身，总之都会引起矛盾。

而据类型论，“非自状的”是否属于自身的问题是没有意义的，去掉这一环节，悖论也就不能构成。

由于“类型的划分”不能消除所有的悖论，罗素又提出“级的划分”，即在每一类型中又划分出不同的级。但后来罗素的学生兰姆塞认为，“级的划分”完全是没有必要的，并认为“恶性循环原则”应该放弃。他指出，非直谓定义方法是应该允许的。

实际上，非直谓定义虽然是循环的，但有些循环不是恶性的，而是无害的“良性循环”，正如人的肿瘤有良性肿瘤和恶性肿瘤（癌）一样。例如，一形容词如果它所表示的性质可以适用于自身，那么它就是“自状的”，这一定义就使用了“可以适用于自身的”这种性质的总体，而“自状的”也是其中的一要素，这样，此定义就是非直谓定义，是循环的，但它并没有造成悖论。在生活中，人们经常使用这种方式说话，如“房间里的最高者”、“我们班里年龄最大的人”、“他是班里考得最好的”等。“房间里的最高者”姑且解释（定义）为：“在一个房间里有许多人，这些人形成此房间里所有人的整体，而在这一整体中，张三的个子是最高的，这时，我们称张三为‘房间里的最高者’。”可见，在对“房间里的最高者”的解释中使用了“房间里所有人的整体”，而房间里的最高者也是这个整体的一员，因此，这种解释是循环的。但是显然，没有人认为这样的说话方式有什么问题。

另外，这种定义方法也是必不可少的。正如兰姆塞所说，人都是有限的——有限的生命、有限的能力等，我们不可能对无穷多个性质逐个地进行命名，但却可以通过性质的总体来对其中的一些进行描述。也就是说，当我们接触到一些未了解的性质时，没有必要每一个都进行命名，而只是根据过去掌握的知识说明这种性质在性质总体中处于何种地位，与其他性质有何类似或不同之处等。这种描述利用了性质的总体，而这种性质却是整体的一部分，因此是循环的。

罗素的另一解除悖论的方案是“加限制”的方法。这一方案罗素并没有采用，而被后来的数学家策梅罗接受。据以前的分析可知，悖论的构成中都包含了这样一前提，即任何一性质都决定一个集合，这是康托尔对集合的直观规定。那么到底什么是集合？集合是什么样的呢？人们是不甚清楚的。康托尔自己说，集合是个“无底的深渊”，而戴德金则说：“集合是一个口袋，里面装的什么可不知道了。”这样就可能出现包含问题的集合，从而带来悖论。罗素和策梅罗都认为，集合论中悖论的出现是由于使用了太大的集合，特别是大全集，即所有集合的集合。因此必须对康托尔的集合论进行限制，特别是抛弃“任何性质都决定一个集合”这一原则，因为从这一原则可立即推出大全集的存在。

策梅罗认为，他的目标就是要保留康托尔集合论中一切有价值的部分，也就是说使限制后的集合论仍能起原来的基础作用，即能由此出发而展出全部数学理论。为达此目标，他采取了把原来的直观集合论进行公理化的方法。在这里，集合成了不加定义的原始概念，它的性质由公理加以规定，即由公理直观地显示集合的特征，当然也就表明了什么是集合。例如，其中有这样一条公理：我们可以凭借任何性质由一个已知集合分出一个子集，它是由已知集合中所有那些满足这一性质的元素构成的。比如，我们可以用“在中学读书的”这一性质从已知的“人类”这一集合中分出一子集“在中学读书的人”即“中学生集”。这里也是由一性质决定一集合，但它不是任意的，而必须是由更大的已知集合中分离出，因此，它与康托尔的上述原则是不一样的。根据此公理，“所有集合的集合”、“所有子集的集合”、“所有非自

状的形容词的集合”等等这些集合都不会出现。因为没有比它们更大的集合，当然也就不能由已知的集合分出这些集合。这样也就否定了悖论构成的第二个前提：即任何一个性质都决定一个集合。罗素悖论、格雷林悖论、康托尔悖论等都可以得以避免。

就已知的集合论悖论来说，其共同的特点就在于对大集合特别是大全集的承认。因此，人们普遍认为，这些悖论已不可能在策梅罗的系统中得到构造。准确点说，是不可能按照原来的方式在此系统中得到构造，因而策梅罗的公理系统为集合论悖论提供了一种可能的解决。而且，就目前的数学实践看，策梅罗的系统已为数学提供了一个合适的基础。所以，在一定的意义上说，策梅罗原来的目标已基本达到。

尽管如此，策梅罗的系统并非是十全十美的。例如，虽然此系统避免了原来所发现的悖论，而且迄今尚未遇见悖论，但是，它还不能保证将来不会出现新的悖论。因为它没有证明系统本身的无矛盾性，即本身是否包含矛盾。所以法国著名数学家彭加勒挖苦说：“我们设置栅栏保护羊群以免受到狼的袭击，但是很可能在装栅栏时，就已经有狼被围进栅栏里了。”他说的狼就是悖论，羊群就是集合论，栅栏则是策梅罗的公理集合论系统。

十、我受骗了

——语言分层理论

美国逻辑学家雷蒙德·斯穆里安曾经讲过这样一个故事：

1925 年 4 月 1 日，6 岁的我曾卧病在床，传染上了流感或诸如此类的什么病。一大早，大我 10 岁的哥哥埃米尔跑进我的卧房说：“喂，弟弟，今天是愚人节。你向来没让人骗过，今天我要骗骗你啦！”那一整天我都等着他来骗，而他却不动声色。深夜，我妈妈问我：“你怎么还不去睡呀？”我回答她说：“我在等哥哥来骗我。”妈妈转身冲哥哥：“埃米尔，你就行个好，骗骗这孩子吧！”哥哥这才调过脸望着我，跟我对上话了：

他：这么说，你是盼我骗你喽？

我：是啊。

他：可我没骗吧？

我：没有啊。

他：而你是盼我骗的，对不？

我：对啊！

他：这就行了，我已经把你骗了！

嘿，至今我还记得，关了灯好久我还躺在床上寻思自己是不是真的受骗了。一方面，如果没有受骗，那么我就没有盼到我所盼的事，因此我受了骗。埃米尔抱的正是这个理儿。不过，同样可以理直气壮地说，如果我受了骗，那么，第二只手，但第三只手必须画在第三张画布上，依次类推。

我们所使用的日常语言就是一类似于画画的双手的封闭语言。因为在其中，我们可以用命题 A 描述命题 B 的真假情况，而又可以用命题 B 描述命题 A 的真假情况，也就是说，可以相互描述。当然，命题 A 也可以描述自身，即自我描述。然而，在这种条件下，只要假设（T）等式是成立的，就立即可构造悖论。

现考虑这样的命题：

“本页第 18 行的那个命题不是真的。”

现在令 C 代表本页第 18 行的那个命题。

据 C 的意义，C 是上述命题，同时又可代入上述命题的前半部分，这样自然有：

（1）“C 不是真的”等同于 C；

但据（T）原则又有

（2）“C 不是真的”是真的，权且仅当 C 不是真的。

由（1）和（2）可得：

（3）C 是真的，权且仅当 C 不是真的。矛盾。

“说谎者悖论”（“我在说谎”）可据同样的方式构成。因为“我在说谎”等同于“我在说的话是假的”或“我在说的话不是真的”，只要用 C 代表“我在说的话”即成。

塔斯基认为这些悖论的出现是因为在封闭的语言中，语言的层次是混淆的。为了得出真理的令人满意的定义，避免悖论，塔斯基采取了语言分层的理论。

塔斯基指出，在讨论语言意义的问题时，我们应当使用两种不同的语言，其中第一种是被讨论的语言，即讨论的对象，这种语言称为对象语言。用以讨论第一种语言的为第二种语言，这种语言称为元语言。例如：我们可以用汉语讨论英语的语法，如构词法、句子结构及时态等等，这时英语为对象语言，而汉语为高一级的元语言。当然，我们也可以用汉语讨论汉语，这时汉语既是对象语言又是元语言，但其中的层次不同。又如，我们可以讨论一个命题的真假情况，这时，命题本身如“华盛顿是美国第一任总统”为对象语言，而讨论时使用的命题“‘华盛顿是美国第一任总统’是真的”则属于元语言。在对象语言中，命题本身不能涉及自己的真假问题，为了谈论用对象语言表述的句子的真或假，我们必须使用元语言，即比所说明的语言更高一层的语言。元语言包括了所有的对象语言。因此它比对象语言更丰富，它可以谈论对象语言的真实性。

那么，我们能不能谈论元语言中命题的真实性呢？当然能。不过，这时需要进到更高一层的元语言，也就是用更丰富的即包括了它以下的对象语言的语言说话时才能做到。每一层语言相对于它下面一层的语言来说为元语言，而相对于它上面一层的语言来说则又成为对象语言。

初中的平面几何中有这样一条定理：“一直线的垂线与斜线必定相交。”那么，为什么它是一条定理？有何根据？我们要对它进行讨论，引用已知的一些定理、定义等进行证明。这时，定理本身为对象语言，而讨论、证明时所有的语言则为元语言。例如，我们可以这样证明：

已知：如图 8，在平面内

（1）直线 a 是 L 的垂线，

（2）直线 b 是 L 的斜线。

求证：a、b 必定相交。

证明：假定 a、b 不相交，

∵a、b 在同一平面内，

∴a∥b（a 平行于 b），

∴ ∠1＝∠2

又∵a 是 L 的垂线，

∴$\angle 2=90°$，

∴b 是 L 的垂线。

而这与已知条件矛盾，故假设不能成立，定理得证。但是，我们也可以对这一证明的真假、形式等进行讨论，说明这种证明是正确的，它使用的形式是反证法。这时证明又成为对象语言，而关于证明的理论又是用更高一层的元语言写成的。当然，我们也可以用更高一层的语言对证明的理论进行研究，等等。

根据语言分层理论，“说谎者悖论”完全可以避免。“我正在说的话不真”，这句话可以用 A 表示，A 语句既然是讨论一个句子的真假情况，那么可以把它看成元语言。而“我正在说的话”就是这一元语言讨论的对象语言，我们可以用 B 来表示，因此，A 就等于“B 不是真的”。这里的 B 可以用一些句子代替，如“张三打了人”、“这些人都戴眼镜”等等，但却不能用 A 代替。因为 A 是元语言中的句子，与 B 不属于同一层次。这样就避免了 A 说自己不真的问题，悖论也就不会出现。同理，“非自状的”这一形容词能用来描述各个具体的非自状的形容词，如“白色的”、“不能理解的”等等。这些具体的形容词属于对象语言，“非自状的”则属于元语言。但“非自状的”自身不能描述自己，否则就混淆了元语言和对象语言的层次。这样也就不能问“非自状的”是否非自状的问题，悖论就得以避免。

斯穆里安搞不清楚他的哥哥是否骗了他，这是因为他哥哥的话造成了悖论。但这个悖论又是如何形成的呢？他哥哥说：“我要骗骗你啦！”这句话是用来说明他要骗斯穆里安的行为的，因此这是元语言的句子，但从以后的结果来看，他说这句话却是指的自身，就是说“我要骗骗你啦”本身就是欺骗行为，这样就混淆了语言的层次，所以才造成了悖论。按照语言分层理论，只有在一天中具体进行了其他欺骗（正如斯穆里安所希望的），“我要骗骗你啦”才有意义，而在这种情况下也就不会出现悖论。

这种语言层次的混淆使我联想到中国的一段传统相声：

甲：旧时候中国人有好多忌讳。

乙：有什么忌讳呢？

甲：比如新婚夫妇在头天晚上入洞房后是不能说话的，谁先说话谁先死。但我大爷就不信这一套，他说他结婚时一定能使新娘子先说话。

乙：人家能信吗？

甲：不信，不过我大爷和他的一个拜把子兄弟打了一个赌。

乙：打什么赌呢？

甲：我大爷如果能让新娘子先说话，说一句他的小兄弟给 10 块大洋。

乙：新娘子说了没有？

甲：说啦！那天晚上我大爷进洞房时，新娘子已经睡下了，他上床后就把被子横了过来，新娘子就把它竖了过去。我大爷又把它横过来，新娘子又竖过去。如此几个回合，新娘子急了，说：“你这个人，怎么回事？”我大爷高兴了：“一句啦！”“什么‘一句啦’？”新娘子不知原故，问道。“两句啦！”“什么‘两句啦’？”新娘子继续问。“三句啦！”我大爷更来劲，新娘却更摸不着头脑：“你这人怎么啦，什么‘三句’、‘两句’的？”这时，蹲在窗外偷听的那位小兄弟急了，忙叫道：“大哥，别喊啦，我只有 40 块大洋！”

读者朋友，你又能从这段相声中悟出些什么道理呢？”

十一、未来世界探秘

——理发师定理

70 年代，美国曾拍摄一部轰动一时的惊险科幻故事片《未来世界》。片中描写了机器人的发展情况，到那时，人们制造机器人的技术水平已相当高超。美国某地建立了一个机器人的工厂，工厂中有管理人员、普通的机器操作工人、其他的勤杂人员等等，而整个工厂中只有一名是人。但这些机器人造得和人类一模一样，因此，这个人与机器人在表面上是无法区分开来的，为了揭开机器人工厂神秘的面纱，某大报纸两位记者麦克和杰西娜到工厂进行采访。

到工厂后，管理人员（不知是人还是机器人）让他们登记并拍照后就允许他们进行采访。他们参观了整个工厂的生产过程，并观看了他们的业余生活情况。他们看到有的“人”在下象棋，也有的自己在玩扑克，甚至有的让仆人替他煮咖啡。但最令他们惊奇的是，工厂竟模仿他们造了两个与他们完全一样的记者。相遇后，两位机器人记者一心想杀掉他们，并向他们开了火。不得已他们只好一边进行还击，一边向厂外撤退。经过种种努力，他们终于消灭了机器人，逃离了恐怖的机器人工厂。

值得一提的是，工厂的机器人还能够在厂里自己进行修理。麦克和杰西娜在一天晚上就曾发现，一个机器人把自己的头拿下来，打开后整理自己的线路，这种机器人是能够自我修理的人。但是，还有些机器人不能修理自身，工厂中就专门开了一个车间修理这种机器人。车间只有一位机器人任修理工,现在就产生了一个困惑人的问题 这个机器人如果出了毛病由谁来修呢？

如果他不是自己修，那么，他就属于不给自己修理的机器人，因此，就应送到他的车间，由他自己修；如果他自己修，那么，他就不应该自己修，因为他只给不给自己修理的机器人修理。给自己修，不给自己修；不给自己修，给自己修。机器人也陷入了神秘的怪圈之中。

对此怪圈，英国逻辑学家汤姆逊提出著名的“理发师定理”进行解决。这条定理用我们平常的语言表述出来就是这样的：

在某一集合中有一些元素自己与自己没有某种关系，而另一元素却与这些元素有此关系，那么，这个元素不存在。

乍看起来，这条定理很抽象，难以理解，但仔细分析开来却是非常简单。这条定理说的是那位“理发师”，这里，“某一集合”指的是塞维利亚村所有村民的集合，“某种关系”指的是“给某人刮胡子”的关系，“有些元素自己与自己没有某种关系”是指有的村民自己与自己无刮胡子关系（即自己不给自己刮胡子），而另一元素（理发师）却与这些元素有刮胡子的关系，即这些村民的胡子由这位理发师给刮。那么，结论就是：这样一位塞维利亚村的理发师是不存在的。或者可以这样说，塞维利亚村的这样一位理发师即使有也不存在于形式逻辑所能够解释和接受的范围之内。

从以上的定理表述中可以看出，定理的前半部分“在某一集合中有一些元素自己与自己没有某种关系，而另一元素却与这些元素有此关系”，实际上是理发师的规定：“我给且只给塞维利亚村中不给自己刮胡子的人刮胡

子。”只在后面加上“这个元素不存在”就变成了定理。

这条定理在逻辑中很容易得证。它虽然说的是“理发师”，但它并不仅仅限于此，它指的几乎是所有的集合论中的悖论。

那么，如何利用此定理解除上面的机器人修理工的悖论呢？

在上面的悖论中，“某一集合”指的是工厂中所有机器人的集合，“某种关系”是指“修理”的关系，在此集合中，“有些元素自己与自己没有某种关系”是指有的机器人自己与自己无修理关系，（即自己不给自己修理），而另一元素（这位机器人修理工）却与这些元素有修理的关系，即这些机器人要由机器人修理工修理。那么，结论是：这样的一个机器人修理工是不存在的。

据此定理，其他一些类似的悖论也可排除，并因而把它们变成一条定理。例如，罗素悖论解除后就变成了以下定理：“没有一个集合包含这样一个集合，其元素都是而且仅仅是这个集合中的所有非自己元素的集合”。通俗地说，“不以自身为元素的集合的集合”是不存在的。

汤姆逊还用此定理解释了格雷林悖论。就是说：“没有一个形容词的集合能包含这样一个形容词：它能真实地表示这个集合中所有（而且仅仅是）非自状的形容词。

这条定理的意思是：“非自状的”这个形容词如果要能够形容所有非自状的形容词（包括它自身）那是不可能的。因为形容它自身时就会出现矛盾，而不形容它自身也会出现矛盾。

由此，汤姆逊也对罗素的类型论和塔斯基的语言分层理论进行了评述。罗素的类型论是如何解除此悖论的呢？据类型论，“非自状的”是对所有具体非自状的形容词的概括，因此，它是比这些形容词高一级的类型，但同一级的类型不能表述自身，因而问“非自状的”是否非自状的毫无意义，是类型论不允许的。而据语言分层理论，“非自状的”是用来描述具体的非自状的形容词的，如“无意义的”“英文的”等，因此，它是更高一层的语言，即元语言。要描述“非自状的”本身，又要用再高一层的语言，它用来描述自身是不允许的。这样，概括所有层次的“非自状的”形容词是不存在的。因此，汤姆逊认为，类型论与语言分层的方法与他的方法是殊途同归的。但与其最终承认这样的集合或语词是不存在的，为什么不一开始就直截了当地说它们不存在呢？另外，汤姆逊认为，类型论或语言分层理论都显得有些武断，为什么一定的集合要属于一定的类型呢？为什么语言要属于一定的层次？这都显得有人工雕凿的痕迹，显得不自然，都不如他的直接承认具有说服力。

但是，也有人对这条定理提出异议，如麦克伊说，汤姆逊显得更武断，为什么“非自状的”这一形容词不能用于自身？为什么一个集合中就不能有这样的元素呢？汤姆逊说，因为引出了矛盾。但麦克伊却说，这不能算作回答。麦克伊评论道：“这种证明解除了悖论吗？显然没有。它摆脱了理发师……但它不能摆脱罗素悖论或格雷林悖论，因为我们手上仍然有一个矛盾存在：一方面是‘理发师定理’的适当解释，另一方面则显而易见地存在着不包含自身为元素的集合……这一矛盾（不以自身为元素的集合的集合是又不是自身的元素）靠了否认这样的集合的存在而被解除，但一个更深刻的矛盾仍然存在：即否认这个集合的存在和这个集合的显然存在之间的矛盾。汤姆逊的解除方法成为这个更深的矛盾中的一方。”这正如一个孩子拉着妈妈的手说：

“妈妈，魔鬼不存在。”妈妈问：“为什么呢？”“因为我害怕。”但魔鬼并不能因为否认它存在而不存在。

可以看出，“理发师定理”就是说不但“矛盾即荒谬”，而且“矛盾不存在”，这只不过是形式逻辑“无矛盾思维”影响的结果。它企图说明悖论的局限性，但到最后却证明形式逻辑思维本身是有局限性的。

十二、卡里马楚斯的困惑

——编目悖论及其解决

在古老的亚历山大图书馆里，勤奋的学者卡里马楚斯正在埋头给馆藏图书编目。

突然，这位白发苍苍的老先生坐在书堆中呜呜地哭了起来。原来，他遇到一个闻所未闻的难题，这是他学了一辈子的亚里士多德形式逻辑都没法帮助他摆脱的问题。

事情是这样的，在编目时，他把所有的目录分成了两大类，其中第一类专门收集“自身列入的目录”。所谓“自身列入的目录”，就是指一本书目中也列入了这本目录自身。比如说，在图书馆有许多数学方面的书，如《算术》、《几何学基础》、《初等代数》、《解析几何》等等，我们可以给它们编目，写成一本《数学书引》，它收入的都是这方面图书的名称。如果翻开这本书目，却发现《数学书目》这本书本身的名称，即如下情形：

数学书目：

1.算术

2.几何学基础

3.初等代数

4.解析几何

5.数学书目

那么，这本书就是自身列入的目录。当然，其他还有许多自身列入的目录。

第二类目录是“自身不列入的目录”。所谓“自身不列入的目录”，就是一本书目的目录中没有自身的名称。比如说，本图书馆中有一些地理方面的书，如《世界地理》、《中国地理》、《欧洲地理》、《经济地理》等，我们就可以给它们编一本《地理书目》。翻开这本书，你在它所列的书目中并没有发现它自己的名称，即如下的情形：

地理书目：

1.世界地理

2.中国地理

3.欧洲地理

4.经济地理

那么，这本《地理书目》就是自身不列入的目录。所谓自身“列入”或“不列入”，实际上就是列入或不列入自身，也就是一本书目中包含不包含自己的名称。

卡里马楚斯编完这两大类目录后，发现“自身列入的目录”有很多，如《数学书目》、《哲学书目》、《逻辑学书目》等等，而“自身不列入的目

录”也有不少，如《地理书目》、政治书目》、《军事书目》等。既然如此，又可以各给它们编一个目录，即“自身列入的目录的总目”和“自身不列入的目录的总目”，这样又编成了两本书目。这时，卡里马楚斯发现了问题，那就是《自身不列入的目录的总目》这本书该不该收入《总目》本身呢？而且他发现，这个问题是无法解决的，因为这部《总目》如果不列入《总目》，不但不成其为《总目》，而且这恰恰使它成为“自身不列入的目录”，而这本《总目》是专收“自身不列入的目录”的，因而它必须列入自身；可是，如果它列入自身，那么，它就成为一部“自身列入的目录”，而这本《总目》不收这类的目录，因此，它不能列入自身。亚里士多德的形式逻辑告诉卡里马楚斯，要么列入自身，要么不列入自身，不能既列入又不列入自身。但在这里，列入自身，就必须不列入自身；不列入自身，则又必须列入自身。不论列入自身还是不列入自身都无法跳出自相矛盾的境地。卡里马楚斯就像一只要吃到自己尾巴上绑着的肉却又够不着，而在那里不断旋转的猫一样陷入神秘的怪圈而不能自拔，所以，他坐在那里痛苦得哭了起来。

可怜的卡里马楚斯于是终日茶饭不香，郁郁寡欢，因为那怪圈始终萦绕在他的心头。一直到生命的尽头，他也没能解开这个死结，从而带着终生的遗憾离开了尘世。

2000 多年后的现代，追求完美的欲望促使一些逻辑学家、数学家要重新赶走这个魔鬼。他们为卡里马楚斯想出了各种解决的办法。英国逻辑学家汤姆逊说，我这里有一个“理发师定理”，它已经帮助塞维利亚的理发师摆脱了困境，而卡里马楚斯与那位理发师处于同样的境地。根据理发师定理，这样的一部“自身不列入的目录的总目”是根本不存在的，它只是存在于卡里马楚斯的幻想当中。去掉幻想，站在现实的大地上，他会发现，一切问题突然都消失得无影无踪了。这时，卡里马楚斯的信徒们跳了起来：“简直空谈！你自己解释不了，就说不存在，这能说明什么问题？你并没有证明这样的总目为什么不存在。”

大哲学家罗素马上起来安慰这些信徒们：“既然大家不同意‘理发师定理’，我看还是采用我的办法，这个办法也是在解决理发师悖论时提出来的，这就是类型论方法。据类型论，集合都属于不同的类型，如元素的集合、元素的集合的集合等。同一类型的集合不能相互包含，因此，一个集合不能是这个集合本身的元素，即不能包含自身。如果说一集合属于另一集合，那么，前一集合应该比后一集合的类型低。这样，卡里马楚斯先生就不要编这种‘自身列入的目录的总目’，因为它的元素‘自身列入的目录’就是自己属于自己，这是违反类型论的要求的。当然，‘自身不列入的目录的总目’也不会有列入自身的问题，怪圈也就不会出现。”

罗素的话音刚落，塔斯基站起来说：“我同意罗素先生的观点。我也提出一个与类型论相似的语言分层理论，据此理论，语言有不同的层次，低层次的称为对象语言，包括对象语言并对其进行讨论的称为元语言。同一层次的语言是不能相互讨论的，这样，‘自身列入的目录’是不允许的，当然，‘自身列入的目录的总目”也就不能存在。同样，‘自身不列入的目录的总目’也不会有属于不属于自身的问题，悖论当然能避免。”

“嗯！有一定的道理，”卡里马楚斯的信徒们说，“不过，你们的理论却都有些武断。根据亚里士多德大师的形式逻辑，目录总可以分为两类：自身列入和自身不列入。要么自身列入，要么自身不列入，不能既是自身列入

又是自身不列入。从客观上讲，自身列入的目录是存在的，而你们却严加禁止。退一步讲，据你们的理论，任何目录不能列入自身，那么，据排中律，则有任何目录都是自身不列入的，而给这类目录编一个总目没有任何理由进行反对，它作为一部目录当然也要归入两类中的一类。你们既然禁止自身列入这种情况存在，那么，它只能属于自身不列入这一类。‘自身不列入的目录的总目’属于‘自身不列入的目录的总目’，那不又成了自身列入了？矛盾！”

看来，现代的逻辑学家们并没有使卡里马楚斯摆脱困境，清除矛盾。这时，辩证法的大师们出来替他们解围了。

“矛盾，是的，矛盾！你不会清除矛盾，因为矛盾无处不在，无时不有，矛盾才是真理！‘自身列入的目录的总目’本身就是一个矛盾的统一体，它把所有‘自身不列入的目录”列入了，即‘列入’了‘不列入自身者’，因此，它应该既列入自身又不列入自身。”

“蠢话，胡言！这简直是对亚里士多德先哲的亵渎！”卡里马楚斯的信徒们嚷嚷着，他们真不愿大换一下脑筋。

“且慢，听完我们的解释后，你们也许会有所启示的。我们先看看中国的悖论专家杨熙龄先生提出的两种方法。他的第一种方法称为‘列入不列入法’。按照这种方法，卡里马楚斯在给所有自身不列入的目录编成总目之后，在这本总目的最后一页的末尾加上这样一条：‘本总目未列入本总目’。此总目就通过不列入的方式把自己列入了。”

“这叫什么解决方法？”卡里马楚斯的信徒们还是不满。“这简直就是在说此地无银三百两。如果说它自身列入，它又明明说未列入；而如果说它未自身列入，但它又通过这种特殊的，即说自身未列入的方式列入了，亦即把自己的‘未列入’列入了。这何曾是解决悖论？这不过是戴上面罩的悖论而已。另外，就算你解决了自身列入不列入的问题，编成了一本总目，那么，这本总目你放在哪个书架上？是放在自身不列入的目录这个书架上，还是放在自身列入的目录这个书架上？还有，一本书的目录列入总目就应该是把它的书名列入。说‘本总目未列入本总目’，这叫什么列入法？”

“哪个书架上都不能放，放哪个书架上都会形成矛盾。那我们就在图书馆中设另一个，即中间的书架，就把这本总目放在上面。当然，这违背亚里士多德形式逻辑基本规律的要求，这需要你们和图书馆人员改变思维方式。还有，总目有它的特殊性，它也只能有它不同于一般的特殊列入法。”

“这种方法我们也无法接受。你们还有什么高招？”

“杨熙龄先生还有第二种方法，即‘不列入列入法’。这种方法最简单，就是总目干脆不列入自身。”

“既然不列入自身，那不正好是本总目要收的吗？这就应该列入自身啊！缺了这一种，本总目还叫总目吗？”

“这问题不难回答。根据这种方法，总目的名称就在它的封面上，其他目录由总目内部收，而这本特殊的总目只能由它的封面来收了。它的内部没有列入自身，而封面却列入了自身，这就叫‘不列入的列入’。如果你们要问为什么要列在封面上，那我们也只能说，这本特殊的总目也只能采取特殊的列入法。”

“你们这种方法不过是把矛盾的双方分解，使原来‘列入’的意义改变，现在的‘列入’与原来意义的‘不列入’就不再具有矛盾关系，这样，在形

式逻辑的范围内就能说得通了。既然是以损失原来意义的‘列入’为代价，这种解决看来也不能说是完美的。”说完，卡里马楚斯的信徒们都闷闷不乐地离去了。

十三、镇长分身术

——区别与规定法

荷兰又称“尼德兰”，是西欧著名的小国。“尼德兰”（Nederland）就是“低洼之国”的意思。荷兰全境均为低地，三分之一的土地海拔不到 1 米，四分之一的土地低于海面，靠堤坝及风车排水防止水淹。境内河流密布，沟壑交错。特殊的地理条件使得荷兰在很久以前就出现了许多小市镇，人口多少不等。每个市镇均有镇长加以统治，没有任何人担任两个或两个以上市镇的镇长，也没有任何市镇由两个或两个以上的人担任镇长。这些镇长中，有的居住在自己任职的市镇中，称为“居民镇长”；而有的镇长则到另外的市镇中去居住，我们称之为“非居民镇长”。有一年，荷兰颁布一项法令，为这些非居民镇长开辟了一块土地，令他们居住在那里。

随着经济的发展，新的市镇不断出现，而非居民镇长的数量也随之不断增加，非居民镇长居住的地区也越来越繁华，越来越扩大，为此，须建立一个新的市镇。当然，这个市镇也要设立一镇长。但选出镇长后，人们却发现一个很难解决的问题：此镇长住不住在这个镇呢？

如果此镇长住在这个镇，那么，他就是居民镇长，但只有非居民镇长才能住在这里，所以，此镇长不能住在这个镇；如果此镇长不住在这个镇，那么，他就是非居民镇长，而非居民镇长只能住在这里，所以，此镇长必须住在这个镇。不住在这里，那么，只能住在这里，而住在这里，就必须不住在这里，此镇长也陷入怪圈。

在汤姆逊先生看来，这问题非常容易解决。根据他的“理发师定理”，有“荷兰所有的镇长”这样一个集合，在此集合中又有一个子集合，这个集合由所有不在担任职务的镇上居住的镇长（非居民镇长）组成，那么，不存在另外的这样一个人，他是荷兰某个镇的镇长，而且他在非居民镇长们的镇上居住。这句话听起来很复杂，用通俗的语言来讲，它的意思是说，非居民镇长们居住的镇上是无法选出一个镇长的，也就是说，这样的镇长是不存在了。既然如此，我们也不用煞费苦心帮助这位镇长摆脱困境了。

但是，对自己回答不了的问题就说它不存在，这并不能使人信服。况且，汤姆逊也没有能证明这样的一位镇长为什么不存在。实际上，人们完全可以给这个镇选一个或任命一个镇长。

在类型论中，此问题也很容易解决。在罗素看来，集合有不同的类型，如个体的集合、个体的集合的集合等。人们可以在高一级的类型中谈论低一级的类型，但不能在低一级的类型中谈论高一级的类型，也不能在同级类型中相互谈论。所有非居民镇长组成一个集合，即前面所述的新的市镇，而此市镇的镇长则属于高一级的类型，说他是否属于此集合，即是否居住于这个市镇则是无意义的。但是，不让人谈论这个问题并不是说它就消失了。从客观上来说，新市镇的镇长总是存在是否在此居住的问题。

按照策梅罗的集合论，此怪圈更算不上什么问题，因为在他那里，集合

不是任意形成的，而必须由大的集合分出，也就是说必须是某一大集合的子集合。这样，也不会有某范围内最大的集合，如所有居民镇长的集合，所有非居民镇长的集合等是不允许的。这样，所有非居民镇长组成的市镇也就不存在了。因而，选出镇长后可居住在别的地方而不造成悖论。

下面，我们再看另外一种办法。

首先，我们分析一下“非居民镇长组成的市镇的镇长”这个概念。如果人们能够选出来这么一位总镇长，那么，他同时也是一位普通的非居民镇长，正如一个班的班长同时也是一个普通的学生一样。因此，这位镇长本身具有二重性。我们可以假定，这位总镇长不住在本镇，而作为一个普通的非居民镇长也不住在本镇，这样就有如下的情形：

1.总镇长作为总镇长不住在本镇；

2.总镇长作为普通的镇长也不住在本镇。

据 2，作为普通的镇长不住在本镇，那么，他是非居民镇长，而非居民镇长必须住在本镇，但据 1，总镇长不住在本镇，因此，可以得出，这位只是作为普通的镇长居住在本镇，而不是作为总镇长居住在本镇。由于这种方法是通过区别同一个体的二重性并把二者加以不同的规定来解决悖论的，所以称为“区别与规定法”。

我们也可以用此方法来分析编目悖论。《自身不列入的目录的总目》本身是一部总目，但同时它又是一部普通的自身不列入的目录，因此，《总目》本身就具有二重性。我们可以假定，这部《总目》不列入自身，当然，作为普通的目录的总目也不列入自身。这样就有如下的情形：

1.《总目》作为总目不列入自身；

2.《总目》作为普通目录也不列入自身。

据 2，作为普通目录的《总目》既然不列入自身，它就是一部“自身不列入的目录”，因此，必须列入《总目》，但据 1，《总目》作为总目并不列入自身。所以，《总目》只是作为一般的目录列入作为总目的《总目》。

这时，会有人诘问说，这种把一个整体分成两部分的做法只是头脑中的幻想，你只不过是把一种幻想列入另一种幻想罢了。我们也只能说，二重性之所以成为二重性，就是因为二者是事物本身所具有不可分离的部分，当然不能在实际中把二者分开，分开后也就不成其为二重性了。

这样的解释不很清楚，我们再举一通俗的例子。

某日课后班长把同学们留下，说：“学校发下来一些表格让大家填一下。如果有同学不愿填，可由班长我代劳，当然，如果愿意填，就不用我费神了。”有些同学很踊跃，领来表格认真地填写起来，但也有几个同学因有急事，自己不愿意填，就请班长代他们填写。别的同学都填完后，突然，有一学生问：“班长，你自己的谁填呢？”

“当然我自己填。”班长脱口而出。

“这样不行，”那同学说，“你刚才不是说，自己愿意填的你不帮他填吗？”

“那我就不用填了。”班长又改口。

“这更行不通，因为你还说，不愿填的你都帮助填。”那同学还是不让。这下可把班长难住了。

但是，如果学了这种区别与规定法，此问题就难不倒他了，他完全可以自己填上而又不用修改诺言。如果那同学提出疑问，他可以这样回答：“作

为学生的我不愿意自己填，我是作为班长替作为学生的我填写的。”

通过区别和规定，我们也可以使那位塞维利亚的理发师摆脱困境。

这位理发师身上也有二重性：他是一个理发师，同时也是塞维利亚村的村民。既然如此，他就可以坦然在店里给自己刮胡子，而不用修改自己的店规。

这时，来了位村民看到他正在自己刮胡子，就责问道：“老兄，你那白纸黑字不是写得清楚？你的店规不是明明规定，你给且只给不给自己刮胡子的人刮胡子吗？你既然自己刮了，你就不能给你刮。”而理发师可以反唇相讥道：“是的，我的店规是说得很明白，但我并没有违反店规。作为村民的我一直没有给自己刮胡子，我现在只是作为理发师在给作为村民的我刮胡子。”或者也可以这样回答：“今天小店歇业，作为理发师的我休假，我现在以村民的身份作为村民的自己刮胡子。”

看来，他总是有道理的。那么，为什么以前他却陷入困境而不能自拔呢？原来，以前人们一方面把他身上的二重性分开；他是个理发师，同时也是村民；但另一方面，在他刮胡子时又不允许他把“到底谁在刮胡子分开”。只要他一刮胡子，就仿佛是村民自己在刮胡子，而理发师也在替这个村民刮，两个身份的他同时在刮，这样就违反了店规，造成团团转而无法摆脱的局面。

这正如一个中国民间故事所说明的。

某地有一女孩子非常聪明，什么问题也难不倒她，人称“伶伶”。这事不知怎么传到县官那里，他决定亲自去难为一下伶伶。

有一天早晨，他骑马来到怜伶的庄上，叫人把她喊出来。伶伶听说县官来访，便急忙出来迎接。她打开大门，前腿刚迈出来，就看到县官站在马蹬上对她喊道：“伶伶，听说你很聪明，老爷我今天就考考你，你说我要下马还是要上马？”伶伶一听知道是在向她发难，抿嘴一笑对县官说：“老爷，你先回答我，我是要出门还是要进门？”县官无言以对，骑上马就匆忙赶回衙门去了。

这位县官的问题确实很难为人，因为站在马蹬上本身就是个中间状态。如果你说他要上马，他可以马上跳下来，而如果说他要下马，他却可以骑上去，因此，这种中间状态就具有上去与下来的矛盾二重性，单说上去或下去都是不行的。但是，聪慧的伶伶并没有被难倒。她来了个以其人之道还治其人之身，给县官提出了一个类似的难题，因为前腿在外后腿在内本身也是个中间状态，也具有矛盾的二重性。如果说她要出来，她可以进去，而如果说她要进去，她又可以出来。这一问题县官很难回答，当然，他也就不能要求别人回答他的类似的问题。

县官之所以被难倒，还有一个重要原因，那就是他的形式逻辑的思维方式。根据形式逻辑的基本规律，对问题必须进行“是”或“否”的回答，也就是说，要么回答进去，要么回答出来，但无论哪种回答都可能造成困难。

同样，在理发师悖论中，理发师本身具有矛盾的二重性。作为理发师不能自己理，而作为一个村民可以自己理，也就是说，他既要自己理又不能自己理。而在编目悖论中，“自身不列入的目录的总目”本身既要列入自身，又不列入自身，但要加以区别并给以不同的解释。

区别与规定的方法同样适用于罗素悖论。罗素悖论是由于“不以自身为元素的集合的集合”这一概念引起的，那么，我们对它试加分析。这一概念具有二重性，作为所有不以自身为元素的集合组成的集合，它本身也是一集

合，但这是集合也是一个总集。这样，就形成以下两种情形：此集合作为总集不包含自身，同时，作为一普通的集合它也是不包含自身的。而既然它是不以自身为元素的，那么，它就必然是总集所包含的元素，所以，此集合不是作为总集，而是作为普通的不以自身为元素的集合包含在自身中。也就是说，此总集既包含在自身中，又不包含在自身中。这看似矛盾的，但通过区别二重性并加以解释后，也就不成其为形式逻辑的矛盾了。

十四、奇妙的唱机与唱片

——拒斥排中律

集合论中一系列悖论，特别是罗素悖论的出现，揭示了这样一个严酷的事实：集合论是不相容的，即前后是矛盾的。一向以精密严格著称的数学大厦居然出现了裂痕，而且是足以使整座大厦倾覆的裂痕，这怎能不令人震惊！悖论产生的根源何在？能否为数学找到一个可靠的逻辑基础？这些问题困绕着数学家和逻辑学家，由此也引发了一场关于数学基础问题的大论战。

论战的一方是以罗素为代表的逻辑主义学派。逻辑主义认为，逻辑是全部数学的基础，以真假二值为基础的经典逻辑是绝对可靠的，数学的基本概念可以用逻辑的概念来定义，数学的命题则可经由逻辑的公理，运用逻辑的法则推导出。只要构造出合适的逻辑系统，就可以推出全部经典数学。把数学化归为逻辑，这是逻辑主义学派的基本纲领。避免悖论，维护集合论和已有的一切数学成果则是其基本出发点。

为消除悖论，罗素提出其著名的类型论。类型论取得一定的成效，但由于过于繁琐和做作，所以，遭到许多人的批评。而且，由于在推出经典数学的过程中需借助于一些非逻辑的公理，因此，逻辑主义学派“把数学归结为逻辑”的纲领最终证明是失败的。

论战的另一方是以希尔伯特为代表的形式主义学派。形式主义学派也坚信经典逻辑的有效性，捍卫一切已有的数学成果。为了证明经典数学的可靠性，希尔伯特提出了这样的方案：首先把经典数学形式化（即变成纯粹的形式符号），构成形式公理系统，然后用有穷的方法（即不采用实无穷的观点，不使用无穷集合）来证明这些公理系统的一致性（即无矛盾性），试图用逻辑的无矛盾性来为数学的真理性作辩护。在希尔伯特看来，如果一个概念具有矛盾的属性，这个概念在数学上就不存在。但是，如果可以证明一概念的属性不会经过有穷步骤的逻辑推理导致矛盾，那么，这个概念的数学存在性就证明了。

这一方案首先遭到直觉主义学派的攻击。此学派的代表布劳威尔曾一针见血地指出：“不正确的理论即使还未碰到矛盾，但仍然是不正确的，正如一个罪恶的行为即使还未被法院发觉，但仍然是罪恶的。”而给予这一方案致命打击的还是哥德尔的不完备性定理。对于这一定理，霍夫施塔特曾用一故事加以通俗说明：

（阿基里斯去访问乌龟，并在他家消磨时间）阿：上帝啊！，你的收藏品可真多。你收集了这么多唱片，那你究竟喜欢什么样的唱片呢？

龟：我认为巴赫的作品最棒。不过，我最感兴趣的却是一种特殊的音乐，我把它称为“粉碎唱机的音乐”。

阿：这可真是一种古怪的音乐。难道你举着大锤，按照贝多芬《惠灵顿的胜利》的节奏把唱机一个个地砸掉？

龟：可不是这么回事。懂得这种音乐的人并不多。这要从我的朋友蟹说起。有一天，他来我这儿作客，他刚刚买了一台新唱机，按照店主的说法，它能演奏任何声音，也就是说，这是一台完备的唱机。

阿：你肯定不相信这一点的。

龟：后来，我就去回访他，并且带去一张我自己创作的唱片。唱片的曲名就叫做：“我不能在唱机 1 上演奏。”我建议他和我一起来欣赏这张唱片。于是，他就打开唱机把这张唱片放进去了。不幸的是，刚奏出几个音符，唱机就开始抖动起来，越抖越厉害，最后只听“啪”的一声，唱机裂得粉碎，不用说；这张唱片也跟着报销了。

阿：真倒霉！可是店主不是吹嘘这是一台完备的唱机吗？

龟：确实如此。阿基里斯，难道你也会和蟹一样天真，相信店主告诉你的一切吗？

阿：我想这是因为店主在吹牛的缘故。

龟：其实，在回访蟹之前我就去过出售唱机的那家商店。我向他索取了设计说明书，分析了它的结构，并且发现确实有这样一组声音，如果它在唱机附近作响，就可以使唱机振荡，乃至于碎裂。

阿：你这个恶毒的家伙！不用细说我就明白了。你录下的真是这组声音，还假惺惺地把它当作礼物去送给蟹。

龟：你倒是够机灵的。不过事情并未就此了结。蟹并不相信他的唱机是有缺陷的，于是，他又买了一台更加昂贵的唱机。店主则向他许诺，如果他能发现一组在这台唱机上无法演奏的声音，我就包赔两倍的钱。于是，蟹兴致勃勃地来找我，而我也带着极大的兴趣去观看。

阿：我敢打赌，你一定又按照新唱机的结构炮制了一张新的唱片：“我不能在唱机 2 上演奏。”

龟：你的反应很快，你完全领会了问题的精神实质。当然，完全可以料想到，这台唱机又被震得粉身碎骨了。

阿：我倒有一个主意。他可以买一台低保真度的唱机，这样就不会重演使自己毁灭的那组声音了。

龟：可是，这样一来就违背了原来的宗旨——可以演奏任何声音。

阿：我现在明白问题的两难性究竟在哪里了。这就是说，任何唱机其实都是有缺陷的。

龟：我不明白你为什么要把这叫做缺陷。问题的实质在于，你要唱机去做它根本办不到的事情。不过，我的朋友蟹并不死心，他又自己设计了一台“奥米枷唱机”。这种唱机带有一架电视摄像机，能在唱片演奏之前先把它审视一番。它和微型计算机连接在一起，可以立即判定这组声音对于唱机所产生的效果。如果唱机会受到破坏，它就可以通过一个内部装置将唱机的各部分重新组装，从而改变它的内部结构再来演奏唱片。

阿：这下好了，你也没有办法了吧？

龟：瞧你这副得意的劲儿，如果你懂得哥德尔定理就不会这样得意了。

哥德尔定理是说：（1）如果系统是无矛盾的，那么，此系统是不完备的，即其中必有一个命题，其真假不可判定；反之，如果它是完备的，那么，它必然包含矛盾。（2）这样的系统自己不能证明自己无矛盾，除非它自己是矛

盾的。哥德尔通过建造一个类似说谎者悖论的命题证明的：“本命题在此系统中不可证”（G）。假如这个命题G在系统中可证，则证明了它“不可证”，矛盾。因此，假设不成立，G在系统中不可证。而G是说它在系统中不可证，故G真，这样，就证明了在系统中有一个真命题不可证。用上面的例子说，就是任何唱机都不可能完备，它总有不能演奏的唱片。所以，蟹通过摄像机审视后不断调整唱机结构的方法是行不通的，因为乌龟总可以设计出一种它不能演奏的唱片。哥德尔定理的发现标志着希尔伯特方案的破产。

论战中的另一方是以布劳威尔为代表的直觉主义学派。直觉主义学派认为，数学的基础和出发点是自然数的理论，而自然数则是由人的原始直觉（按时间顺序出现的感觉）构造出来的。数学理论可靠性的唯一标准就是心智上的可构造性。他们有一句名言：“存在必须等于被构造。”

由此，他们反对“实无穷”，而支持“潜无穷”的观点。所谓“潜无穷”，就是把无穷看成一个不断创造着的又永远无法完成的过程，例如，把自然数看成一个无限延伸的序列 1，2，3，……，而不是一个已经完成的集合｛1，2，3，……｝。他们进一步认为，实无穷的观念是集合论中产生悖论的根源。

按照直觉主义的观点，要判定一个命题A为真，就必须给出A的构造性证明。要判定一个否定命题非A为真，就必须有一个构造，这一构造将任何一个假定原命题A为真的构造导致谬误，例如推出一对矛盾的命题B和非B。在经典逻辑和经典数学中，人们经常使用间接证明的方法：欲证一个命题为A真，不是直接去证明，而是先假定A不真，即非A真，然后推出逻辑矛盾，以此来证明命题为A真。这种方法直觉主义者是不能接受的，因为由非A推出逻辑矛盾并不意味着可以肯定命题A找到一个构造性证明。

有一个故事很形象地说明了这个问题：

一位能言善辩的人在滔滔不绝地说明“秘鲁地下有金矿”这一命题的正确性，可是，他既不清楚究竟在秘鲁的哪个地方有金矿，也不了解为什么会有金矿，也讲不出按照什么方法就一定能在一段时期内探明金矿的所在地，而只是兜着圈子论证：如果秘鲁地下没有金矿的话将会导致矛盾。一位听众提出了质问：“你的这番高论对于一个探矿者有何实际价值呢？”善辩者无言以对。

基于他们的基本立场，直觉主义者断然否定排中律的普遍有效性。布劳威尔认为，排中律是从有穷事物中概括出来的，任何一个涉及有穷事物全体的命题，如“我们班所有的都戴眼镜”，总可以通过对这些事物逐一加以验证，来判明该命题的真假，这时，排中律是有效的。但是，如果人们忘记了排中律的有穷来源，把它看成普遍适用的原则，并把它用于无穷的场合，就会犯错误。这是因为，对于无穷的事物，我们不可能对它们一一加以鉴别。例如，设命题A为著名的哥德巴赫猜想：“每一个大于4的偶数都可以表示为两个素数之和”（素数为只能被1和本身整除的数），这是一个涉及无穷的命题（因为偶数和素数都是无穷的），至今还无法证明这一猜想，即不能断定A真；但我们也无法论证这一猜想是错的，因此，也不能断定非A真。这样，命题A既不能证实，也不能否定，排中律失效。同理可以看出，“所有集合的集合”、“所有不以自身为元素的集合的集合”等等都是无穷的事物，对它们是否具有某种性质、是否属于自身等都是无法证实或否证的，排中律不再适用，因此，悖论也不会出现。

与许多其他解决悖论的方法如类型论、语言分层理论等不同的是，直觉

主义学派采取的是一种激进的、釜底抽薪的方法，因为它使逻辑与数学的基础发生了根本性的转变。当然，企图维护经典逻辑与经典数学基础的人会极力加以反对。例如希尔伯特就很愤慨地说：“要想从数学家手中取走排中律，这就类似于想夺去天文学家的望远镜或禁止拳击家使用拳头一样。”

随着悖论研究的深入，越来越多的人认识到必须正视矛盾，接受矛盾，拒斥排中律、不矛盾律。1980 年，美国的逻辑学家雷歇尔和布兰登提出了“不协调逻辑”。他们认为，自然界的无矛盾性决不是什么经验事实，而是恰恰相反！但他们却指出，对这种不协调性的研究，即关于世界的思维应该是协调的，这正如对于醉酒者精神状态的研究可以是清醒的一样。所以，在其系统中，他们企图把矛盾局部化，就像治疗癌肿一般把它们圈禁起来，使其不能扩散开来泛滥成灾。

在“不协调逻辑”之后，澳大利亚逻辑学家普里斯特和罗特列又提出了“超协调逻辑”。在介绍这种逻辑学说时，他们讲了一个土耳其人纳塞阿丁（13 世纪人）的故事：

纳塞阿丁的菜园里有二园丁。园丁甲照管卷心菜，发现菜上有害虫，即着手捉虫，把虫弄死并抛出墙外。园丁乙走来问甲道：“你在做什么？”园丁甲回答道：“杀虫。”园丁乙问：“杀虫干什么？”甲回答：“因为它们吃掉纳塞阿丁的菜。”但乙却说：“别杀虫了，虫子也有它们吃菜的需要。”于是，二人开始争吵并打了起来。纳塞阿丁和他的妻子恰好走过。纳塞阿丁问：“你们为什么打架？告诉我，由我来判断。”园丁甲说：“我说这些虫子务必杀灭干净，因为它们吃掉您的卷心菜”。纳塞阿丁答道：“你说得对。”但园丁乙说：“我说不要去碰这些虫子，让它们吃饱。”纳塞阿丁答道：“你说得对。”这时，纳塞阿丁的妻于对他说：“但是，纳塞阿丁，他们俩不可能都对。”纳塞阿丁又答道：“你说得对。”

据普里斯特和罗特列说，纳塞阿丁的立场就是典型的超协调逻辑的立场。由这种立场出发得出杀虫，不杀虫，不能“杀虫对，不杀虫也对”，即 A，非 A，以及并非（A 且非 A），可以说是既承认不矛盾律又否认不矛盾律。

普里斯特和罗特列认为，不可能有一种方法能真正彻底地解除悖论，因为悖论本身是真的。既然有的矛盾是真的，就毋需谈论什么“协调”（不矛盾）和“不协调”（矛盾）。逻辑必须超出传统的追求协调性的束缚，而成为“超”协调的，也就是说，对矛盾采取一种超然的态度。

十五、梵学者的预言

——悖论的两要素

《科学美国人》编辑部在其所编的《从惊讶到思考》一书中讲了这样一个故事：

〔一天，梵学者（印度预言家）与他的 10 多岁的女儿苏椰发生了争论〕

苏椰：你是个大骗子，爸爸。你根本不能预言未来。学者：我肯定能。

苏椰：不，你不能。我马上可以证明它。

（苏椰在一张纸上写了一些字，把它折起来，再将它压在水晶球下）

苏椰：我写了一件事，它在 3 点钟以前可能发生，也可能不发生。如果你能预言它能发生，还是不发生，在我毕业时你就不用给我买你答应过要给

我买的汽车了。苏椰：这是一张空白卡片。如果你认为这件事会发生，就在上面写“是”；如果你认为它不发生，就写‘不”。要是你写错了，你答应现在就买辆汽车给我，不要拖到以后，好吗？

学者：好吧，苏椰，这可是一项定约啊！

（梵学者在卡片上写了一个字。到 3 点钟时，苏椰把水晶球下面的纸拿出来，高声读道）

苏椰：在 3 点钟之前，你将写一个“不”字在卡片上。学者：你捉弄了我。我写的是“是”，所以，我错了。可是，如果我写“不”字在卡片上，那就说明我在 3 点钟之前不会写“不”字在卡片上，但我却明明写了，所以，我也错了。我根本不可能写对的。苏椰：我想要一辆红色的赛车，爸爸，要带斗形座的。

这条悖论最初的形式是关于一台计算机，这台计算机用开红灯表示“是”，开绿灯表示“不”。它被要求用回答“是”或“不”。来预言下一次灯亮是不是它的绿灯。很显然，要它预言正确，在逻辑上是不可能的，因为如果它回答“是”，就要开红灯（恰恰不是绿灯），而如果回答“不”，就要开绿灯（正好是绿灯）。

这个悖论还可以简化成最简单的形式，即问一个人：“你下句话要讲“不”，对不对？请回答‘是’或“不’。”显然，他回答“是”或“不”都是行不通的。

根据塔斯基的语言分层理论，“是”和“不”是有不同层次的。苏椰所写的“在下午 3 点之前你将写一个‘不’字在卡片上”这一句话中，“不”字是被讨论的对象，属于对象语言，而梵学者所写的“是”或“不”则是回答苏椰的问题，或者说是用来讨论上句话中的“不”字的，因此，属于元语言。这里的悖论之所以出现，就是因为把元语言混同于对象语言而造成的自我涉及引起的。如果有两个卡片，在第一张卡片上梵学者回答苏椰的问题，如回答“是”，即在 3 点之前要在卡片上写一个“不”字，然后在第二张卡片上写出“不”字，这样就不会造成悖论。

自我涉及（或自我相关）是任何悖论出现的一个条件。生活中人们经常看到这样的情形，有人为了阻止另外的人在黑板上乱画，就在黑板上写出这样一句话：“严禁乱画！”但不长时间，黑板上就给画满了，如“严禁严禁乱画！”“你为什么乱画？”等。“严禁乱画！”这个句子就是自我涉及的，因为它本身就是在黑板上乱画，不让别人乱画而自己却乱画是说服不了人的。自我涉及是说一个概念，命题或理论说的是它自己，也就是说，它或其结论直接或间接应用于其自身。说谎者悖论“我正在说的话是谎话”是最直接的自我涉及，罗素悖论是“不以自身为元素的集合的集合”这一概念的自我涉及（即问它是否属于自身），格雷林悖论则是“非自状的”这一形容词的自我涉及，理发师悖论则是理发师的自我涉及，等等。正因为自我涉及是悖论出现的基本条件，所以，罗素提出“恶性循环原则”避免一切自我涉及。

但是，自我涉及是否必然会导致逻辑矛盾呢？可以很容易看出，并非如此。例如，“一切真的理论都是有价值的”是自我涉及的，但它并没导致矛盾；又如，“我说的这句话是真话”明显也是自我涉及的，被论断者与论断者混而为一；还有，“本语句共用了十个汉字”也是自我涉及，但这些自我涉及的语句并没有造成悖论。非但没造成悖论，在日常生活和一些学科（如人工智能、计算机科学等）中还是经常出现，并且有重要的实用意义。所以，

有人批评罗素的“恶性循环原则”是为泼洗澡水连孩子一块也倒掉了。

但是，一个自我涉及的命题再加上否定概念就不同了，这时，命题会直接导致悖论。那么，为什么肯定概念如“真”的自我涉及却不会造成悖论呢？这是由形式逻辑的特点决定的。在形式逻辑概念形成的过程中，否定概念必在肯定概念之后，否定概念在形式逻辑的概念中要比肯定概念多了点儿内容。如果用 A 代表肯定概念，而代表否定概念的非 A 显然多了点东西，它包含着 A。“假”也是一种“真”：即真的“假”。单独的肯定概念绝不能表述它自身的二重性。例如，“不属于”这一概念本身包含着各种“不属于”的关系，因此，“不属于”也是一种属于；“不可形容”已经是一种形容，“不可解”本身也是一种解，“非概念”本身也明明是一个概念。另外如“不可说”、“不包括”、“谎话”、“最大”等否定概念也都包含着它们的肯定概念。因此，自我涉及的命题加否定概念会立即导致自我否定，而任何命题都暗含着自我肯定，这样，自我否定的命题就会形成悖论。

在梵学者悖论中，如果他的女儿在纸上写出“今天下午 3 点以前你将写一个‘是’字在卡片上”，那么，这虽然是自我涉及的，但它并不能造成悖论，因为这是肯定概念“是”的自我涉及。假如梵学者写了“是”字，说明他的预言正确，而如果他写了“不”字，那就说明他的预言不正确，并不能由正确推出不正确，而由不正确又推出正确。同样，“自身列入的目录的总目”也不会形成悖论，因为“自身列入”是一肯定概念。如果要问：“自身列入的目录的总目’是否列入自身呢？”那么，肯定或否定的回答都不会造成困难。如果它是自身列入的目录，那么，正好它应列入总目，而如果它不是自身列入的目录，那么，它就不应列入自身。但“自身不列入的目录的总目”就不同了。它是一个否定概念，本身包含它的对立面——肯定概念，因为总目作为总目，它列入了所有“自身不列入的目录”，不列入本身就是一种列入。因此，如果要问“‘自身不列入的目录的总目’是否列入自身？”这就是否定概念的自我涉及，造成自我否定，出现悖论。

西班牙塞万提斯的名著《唐吉诃德》中有一个故事：

巴拉塔里亚岛的总督桑差做官问案时曾遇到一些复杂案件的考验，其中有这样一件事：在这位总督的辖境内有座桥，是一个富人为了旅客的便利而建造的，不过桥旁还立了一个绞架，行人必须满足一个条件才能被允许通过这座桥，这个条件是：旅客必须说出他真正要干什么去；如果他说了谎，那就必须放在绞架上吊死。后来有一个人来到桥上，在回答干什么去的问题时，他说他到这里来是为了在绞架上吊死。守桥的人对这个回答迷惑了，因为如果把他吊死，那他就说了真话，应该放他过去；如果放他走了，那他就是说了假话。他们无法解决，于是请总督明断。总督说了一句聪明话：在如此疑难的情况下，应该采取最温和的处置，因此应放他走。

因为如果说了谎，就须放在绞架上吊死，所以，这人说他来是为了放在绞架上吊死，意思也就是说他是来撒谎的，这显然是说谎者悖论的翻版。如果说是真话，即真的在撒谎，那么就既是真话又是谎话，因而是矛盾的；如果说是谎话，而他来是为了说谎，因此，这又成了真话，也是矛盾的。之所以造成悖论，也是因为“我来是为了说谎”（或“我在说谎”）是在说自己是谎话，因而是否定概念的自我涉及，即一种自我否定。“我来是为了说真话”（或“我在说真话”）虽然也是自我涉及，但并不会造成悖论，因为“真话”不同于“谎话”，“谎话”本身也是“真话”即真的谎话，它是具有矛

盾二重性的，因而在自我涉及时会形成矛盾，即既是真话又是谎话。

值得注意的是，有些悖论并非由于直接的自我涉及引起，这里有一段对话可以证明这一点：

柏拉图：下面苏格拉底说的话是假的。

苏格拉底：柏拉图说的话是真的。有的逻辑学家对此加以简化，形成下面的形式：

S_1：句子 S_2 是真的。

S_2：句子 S_1 是假的。

假设句子 S_1 是真的，那么，句子 S_2 就是真的。但是，如果句子 S_2 是真的，句子 S_1 就必然是假的。反过来，我们假设句子 S_1 是假的，也就是说，“句子 S_2 是真的”是假的，那么，句子 S_2 是假的。而如果句子 S_2 是假的，句子 S_1 就须是真的。两个句子都没有直接谈到它自身，但放在一起后却是间接地涉及到自己，它们不断改变着其真实性，使我们无法说出任何一个句子是真还是假。

对此悖论，我们还可以换个样式进行表述。我们在一张空白卡片的一面写上：“这张卡片背面的句子是真的”，而在它的背面写上：“这张卡片背面的句子是假的”。

将这种悖论与说谎者悖论加以比较容易看出，二者的区别仅在于：在这种悖论中，命题的自我否定是通过另外一命题来实现的。因此，这种悖论只不过是说谎者悖论的变种。如果我们领略了其中的奥妙，也就不难构造出涉及三个或更多命题的否定。例如，这种悖论可构造如下：

张三：李四说的是假话。

李四：王五说的是真话。

王五：赵六说的是真话。

赵六：张三说的是真话。

或者：

张三：李四说的是假话。

李四：王五说的是假话。

王五：赵六说的是假话。

赵六：张三说的是假话。

这正如一个人不是用棍子敲打自己，而是用自己的棍子敲打李四的棍子，带动李四的棍子敲打王五的棍子，王五的棍子又引起赵六的棍子运动，而赵六的棍子恰好在张三的头上，因此就敲打了张三。

十六、怪圈之谜

——悖论的实质

一句简单的“我在说谎”困绕了 2000 多年来的哲学家、数学家和逻辑学家，有人为其烦恼，有人为其倾尽心血，甚至有人过早地丧失了生命。就说谎者悖论本身的含义来讲，它确实没有多大的意思。之所以能引起这么多人的关注，是因为它表现了“否定概念的自我涉及”如何反映出概念和命题的矛盾本性，揭示了形式逻辑思维本身的局限性。

形式逻辑的思维以事物的相对稳定性为基础，它的基本规律就是同一律、不矛盾律和排中律。它要求对问题作出肯定或否定的答复，而这就需要对事物进行分解、割裂。形式逻辑习惯于把不间断的东西割断，把一个对象实际上联结在一起的各个环节分隔开来考察。

惠施的“历物十事”中有一个著名的命题：“连环可解也。”所谓“连环”，就是一个个的小环首尾相连而形成的大环。关于这个命题，人们有种种解释，其中有一种解释非常有趣。

秦昭王派人送了一个连环给齐威王，说：“齐多智，解此环不？”齐威王拿起锤子就把连环给“解开”了，也就是把连环砸断，并回答秦使说：“谨以解矣。”

这种解法就是形式逻辑的方法。在认识的过程中这是很必要的。正如列宁所说：“如果不把不间断的东西割断，不使活生生的东西简单化、粗糙化，不加以割碎，不使之僵化，那么，我们就不能想象、表达、测量、描述运动。”但是，这种分裂后的事物已不是原来活生生的事物自身。例如，上述的连环是无始无终，无限循环的，砸开以后就出现了两个头，形式逻辑就硬性地给它们规定一个是始，一个是终，也就是说，把原来既是始又是终，即集始终于一体的环割裂开来。但当人们再把它们接起来后，“始”、“终”又连在了一起，形式逻辑让你回答到底这一环是“始”，还是“终”。这时，你回答是“始”，它又是“终”，回答说“终”，它又变成了“始”，在形式逻辑看来，这就是悖论。

所以，悖论实质上不过是客观对象的辩证性与形式逻辑思维方法矛盾的集中体现。具体地说，客观对象是对立环节的统一体（如连环就是既包含了始又包含了终），然而，由于形式逻辑思维方法的限制，客观对象的这种辩证性有时遭到歪曲，对立的环节被绝对地割裂并片面地夸大，以至达到僵化的程度，从而辩证的统一就变成绝对的对立；而如果再把它们机械地（而不是有机地）重新联结起来，对立的环节就产生直接的冲突，悖论就是不可避免的了。

例如，集合在本质上是辩证的，它既是一种完成了的对象，又具有无限扩张的可能性，换句话说，集合既是我们面前完成了的实在的对象，又是潜在的对象，即完成与过程的统一。这种辩证性在认识过程中往往被割裂开来，并被夸大为绝对的对立，当它们被机械地重新联结起来时就会发生直接冲突，这就是悖论。比如，在康托尔悖论中，集合的幂集（即此集合的所有子集组成的集合）是可以无限增大的，也就是说，可不断形成集合的幂集的幂集、集合的幂集的幂集的幂集等等，但同时它又包含了对所有集合完成性的肯定，也就是说，它断定了所有集合的集合（“所有集合的集合”是把集合作为我们面前完成了的客观存在的整体反映的）。形式逻辑思维方式把它们割裂开来并机械地联结起来，就形成了悖论。

悖论的实质在“对角线方法”中得到最好的体现。这种方法康托尔在证明自然数与实数不能形成一一上对应时首先使用过，他的证明是这样的：

先证明[0，1]区间之间的实数。假设所有这些实数与自然数能一一对应，那么，可以给它们编号列成下面的形式：

1．　O．　$a_{11}a_{12}a_{13}$……　a_{1n}……

2．　O．　$a_{21}a_{22}a_{23}$……　a_{2n}……

3．　O．　$a_{31}a_{32}a_{33}$……　a_{3n}……

……

n．　O．　$a_{n1}a_{n2}a_{n3}$……　a_{nn}……

……

然后，我们根据以下规则构成一个新数 d＝0.b_1b_2……b_n……：当 a_{nn}=1 时，b_n＝0，而 a_{nn}≠1 时， bn=1。显然，d 不同于上表中的任何数，因为 b_n≠a_{mn}，即至少一位是不相同的。但由于 d 是[0，1]区间中的实数，依据假设，d 又必须等同于表上的某一个数，矛盾！故原来的假设不能成立。

通过分析可以看出，这一论证的关键是构造出一个不属于已知集合（这里是［0，1］区间中所有实数组成的集）的新元素。由于这一构造是通过对角线位置上的数的变动来实现的，因此，这种方法被称为“对角线方法”。

对角线方法既然是构造新元素的方法，所以，它肯定的就是集合的无限扩张的可能性，即过程性（这里就是可不断形成新的数）。这种对过程性的确认在一般情况下是没有问题的。但是，如果我们同时又假设了集合的绝对完成性（这里就是设定所列表中的数为所有实数的总体）。对角线方法的应用就会导致直接的矛盾。因为这时所构造出来的就将是一个具有两重性的元素：它既属于又不属于原来的集合，从而构成悖论。

对此，数学家亨金曾作过形象的比喻。他指出，在康托尔的集合论中为什么会出现悖论呢？这是因为其中既包含了“不可抵挡的矛”（指幂集的扩展是无限制的，没有条件的），又有一个“能抵挡一切的盾”（指其中包含一切集合的集合，即大全集），因此，就像我国古代关于矛和盾的故事一样，在康托尔的集合理论中，矛盾是不可避免的。

可见，集合论悖论的根源在于集合的对立统一在认识过程中遭到歪曲，而数学的形式逻辑思维特点是造成悖论的重要原因。因为数学在形式逻辑范围内活动，它要求对象的明确性，因此，当集合的辩证性不可能直接在数学理论中得到反映，而只能片面地强调集合的完成性，或者片面强调集合的过程性，而当二者机械地联结在一起时，在形式逻辑的思维看来就是导致了悖论。

与集合一样，语言本身也是辩证的：作为客观世界的表述，语言既是已经完成了的（例如，语言中的每一概念在历史发展的各个时期都有确定的含义和范围），同时又处于无限的发展之中（例如，概念的含义和范围随着历史的发展而不断变化）。由于考虑的角度不同，人们可能分别强调对立中的某一环节。但如果把二者绝对地割裂开来并片面夸大，然后把它们机械地联结起来，就会形成悖论。

例如，在格雷林悖论中，首先强调了语言在某一方面的完成性，因为这样才能对形容词的总体进行分析，并按照是否具有本身所代表的性质进行分类；但同时它也肯定了语言的无限发展性，即构成了新形容词“自状的”和“非自状的”。这两种考虑在一定意义上都是合理的，但形式逻辑的思维把二者割裂开，当把它们绝对对立并机械地联系起来时，悖论就出现了。

由上可知，形式逻辑思维的局限是造成悖论的重要基础，因而，悖论是形式逻辑本身所无法解决的。下面的事例很能说明这一问题。

1947 年，正在哈佛大学学习的威廉.伯克哈特和西奥多.卡林制造了世界

上第一台用于解决逻辑问题的计算机。他们让这台计算机检验语句的正误。当他们给计算机输入了说谎者悖论“这句话是错的”时，这台可怜的计算机立即发起狂来，不断地打出对、错、对、错的结果，陷入无休止的反复中。戈登.狄克森的小说《猴子扭伤》也曾讲到这样一件事：某些科学家想让计算机不工作来延长机器的寿命。他们的办法是告诉计算机：“你必须拒绝我现在给你编的语句，因为我编的所有语句都是错的。”但没想到计算机却因此而不断重复工作直到耗尽它的生命。

之所以造成如此的结果，就是因为上述的问题不能用“真”或“假”来判定，而具有形式逻辑思维特点的计算机却只能回答“真”或“假”，这样，必然出现无休止的无限循环。看来，同样具有形式逻辑思维的柯斯的裴勒塔为解决悖论而耗尽精力，一命呜呼并不足为怪了！