学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

奇妙数学大世界

B

BOOK

内部资料 非卖品

美妙的数学

长期以来，一个令人困惑的现象是：一些同学视数学如畏途，兴趣淡漠，导致数学成绩普遍低于其他学科。

这使一些教师、家长乃至专家、学者大伤脑筋！

“兴趣是最好的老师。”对任何事物，只有有了兴趣，才能产生学习钻研的动机。兴趣是打开科学大门的钥匙。

对数学不感兴趣的根本原因是没有体会到蕴含于数学之中的奇趣和美妙。

一个美学家说：“美，只要人感受到它，它就存在，不被人感受到，它就不存在。”

对数学的认识也是这样。

有人说：“数学真枯燥，十个数字来回转，加、减、乘、除反复用，真乏味！”

有人却说：“数学真美好，十个数字颠来倒，变化无穷最奇妙！”

认为枯燥，是对数学的误解；感到了兴趣，才能体会到数学的奥妙。

其实，数学确实是个最富有魅力的学科。它所蕴含的美妙和奇趣，是其他任何学科都不能相比的。

尽管语文的优美词语能令人陶醉，历史的悲壮故事能使人振奋，然而，数学的逻辑力量却可以使任何金刚大汉为之折服，数学的浓厚趣味能使任何年龄的人们为之倾倒！茫茫宇宙，浩浩江河，哪一种事物能脱离数和形而存在？是数、形的有机结合，才有这奇奇妙妙千姿百态的大千世界。

数学的美，质朴，深沉，令人赏心悦目；数学的妙，鬼斧神工，令人拍案叫绝！数学的趣，醇浓如酒，令人神魂颠倒。

因为它美，才更有趣；因为它有趣，才更显得美。美和趣的和谐结合，便出现了种种奇妙。

这也许正是历史上许许多多的科学家、艺术家，同时也钟情于数学的原因吧！

数学以它美的形象，趣的魅力，吸引着古往今来千千万万痴迷的追求者。

一、数学的趣味美

数学是思维的体操。思维触角的每一次延伸，都开辟了一个新的天地。数学的趣味美，体现于它奇妙无穷的变幻，而这种变幻是其他学科望尘莫及的。

揭开了隐藏于数学迷宫的奇异数、对称数、完全数、魔术数……的面纱，令人惊诧；观看了数字波涛、数字漩涡……令人感叹！一个个数字，非但毫不枯燥，却生机勃勃，鲜活亮丽！

根据法则、规律，运用严密的逻辑推理演化出的各种神机妙算、数学游戏，是数学趣味性的集中体现，显示了数学思维的出神入化！

各种变化多端的奇妙图形，赏心悦目；各种扑朔迷离的符形数谜，牵魂系梦；图形式题的巧解妙算，启人心扉，令人赞叹！

魔幻迷题，运用科学思维，“弹子会告密”、“卡片能说话”，能知你姓氏，知你出生年月，甚至能窥见你脑中所想，心中所思……真是奇趣玄妙，鬼斧神工。……

面对这样一些饶有兴味的问题，怎能说数学枯燥乏味呢？

二、数学的形象美

黑格尔说：“美只能在形象中出现。”

谈到形象美，一些人便联想到文学、艺术，如影视、雕塑、绘画等等。似乎数学中的数与形只是抽象的孪生兄弟。

其实不然。

数学是研究数与形的科学，数形的有机结合，组成了万事万物的绚丽画面。

数字美：

阿拉伯数字的本身便有着极美的形象：1 字像小棒，2 字像小鸭，3 字像耳朵，4 字像小旗……瞧，多么生动。

符号美：

“=”（等于号）两条同样长短的平行线，表达了运算结果的唯一性，体现了数学科学的清晰与精确。

“≈”（约等于号）是等于号的变形，表达了两种量间的联系性，体现了数学科学的模糊与朦胧。

“＞”（大于号）、“＜”（小于号），一个一端收紧，一个一端张开，形象的表明两量之间的大小关系。

{[（）]}（大、中、小括号）形象地表明了内外、先后的区别，体现对称、收放的内涵特征。……

线条美：

看到“⊥”（垂直线条），我们想起屹立街头的十层高楼，给我们的是挺拔感；看到“—”（水平线条），我们想起了无风的湖面，给我们的是沉静感；看到“～”（曲线线条），我们想起了波涛滚滚的河水，给我们的是流动感。

几何形体中那些优美的图案更是令人赏心悦目。

{ewl MVIMAGE,MVIMAGE, !rd000023_0003_01.bmp}

三角形的稳定性，平行四边形的变态性，圆蕴含的广阔性……都给人以无限遐想。

脱式运算的“收网式”变形以及统计图表，则是数与形的完美结合。

我国古代的太极图，把平面与立体、静止与旋转，数字与图形，更作了高度的概括！

三、简洁美

数学科学的严谨性，决定它必须精练、准确，因而简洁美是数学的又一特色。

数学的简洁美表现在：

1.定义、规律叙述的高度浓缩性，使它的语言精练到“一字千金”的程度。

质数的定义是“只有 1 和它本身两个约数的数”，若丢掉“只”字，便荒谬绝伦；小数性质中“小数末尾的 0……”中的“末尾”若说成“后面”，便“失之千里”。此种例证不胜枚举。

2.公式、法则的高度概括性。

一道公式可以解无数道题目，一条法则囊括了万千事例。

三角形的面积=底×高÷2。把一切类型的三角形（直角的、钝角的、锐角的；等边的、等腰的、不等边的）都概括无遗。

“数位对齐，个位加起，逢十进一”把 20 以内、万以内、多位数的各种整数相加方法，全部包容了进去。

3.符号语言的广泛适用性。

数学符号是最简洁的文字，表达的内容却极其广泛而丰富，它是数学科学抽象化程度的高度体现，也正是数学美的一个方面。

a+b=b+a abc=acb=bca……

其中 a，b，c 可以是任何整数、小数或分数。

$S=1/2(a+b)h$，适用于各种形状梯形面积的求解。

$a \cdot b = \dfrac{a}{\dfrac{1}{b}}, a \div b = a \times \dfrac{1}{b}$,表达了乘与除相互转化的关系,反映了事物的对立统一。

$\pi R^2-\pi r^2=\pi(R+r)\cdot(R-r)$，环形面积的多解性便富含其中。

$\dfrac{\pi r^2-2r^2}{2r^2}=\dfrac{(\pi-2)r^2}{2r^2}=\dfrac{\pi-2}{2}=57\%$,则表明:"圆中方"剪去部分与正方形面积间的固有联系。

所以，这些用符号表达的算式，既节省了大量文字，又反映了普遍规律，简洁，明了，易记。充分体现了数学语言干练、简洁的特有美感。

四、对称美

对称是美学的基本法则之一，数学中众多的轴对称、中心对称图形，幻方、数阵以及等量关系都赋予了平衡、协调的对称美。

略举几例：

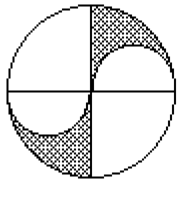
算式：

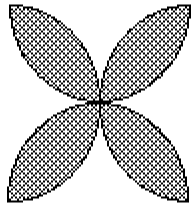
2∶3=4∶6

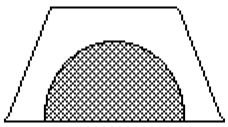
X+5=17-9

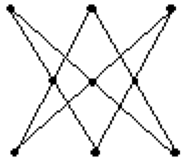
数阵：

数学概念竟然也是一分为二的成对出现的：“整—分，奇—偶，和—差，曲—直，方—圆，分解—组合，平行—交叉，正比例—反比例……显得稳定、和谐、协调、平衡，真是奇妙动人。图形：









数学中蕴含的美的因素是深广博大的。数学之美还不仅于此，它贯穿于数学的方方面面。数学的研究对象是数、形、式，数的美，形的美，式的美，随处可见。它的表现形式，不仅有对称美，还有比例美、和谐美，甚至数学的本身也存在着题目美、解法美和结论美。

上述这些只是浮光掠影的点点滴滴，然而，也足见数学的迷人风采了。

打开这本书，如同进入一个奇妙世界，呈现眼前的尽是数、形变幻的奇妙景观，一个个“枯燥”的数字活蹦乱跳地为你作精彩表演，一个个“抽象”的概念娓娓动听地向你讲述生动的故事。它揭示了隐藏于深层的数学秘密，展示了数学迷宫的绚丽多彩。数的变幻，形的奇妙，有的令你追根究底，有的令你流连忘返，有的令你惊讶感叹，有的令你拍案叫绝……

走进这个奇妙世界，必将如咀嚼一枚橄榄果，品尝到数学的浓浓趣味，感受到数学王国神异奇妙，从而使我们眼界大开。你将惊呼：“哇！数学原来是这么有趣啊！”

奇妙数学大世界

魔幻迷题

世界短跑冠军真的追不上乌龟吗？

魔幻迷题

自然数是一个蕴藏无限奥秘的海洋，它既有音乐数、魔术数、奇异数之类各具“个性”的成员，也能通力合作联手并肩，排成奇妙的数阵、幻方。

更加奇特的是，数学还能以它自身的力量，形成种种迷人的魔幻。

魔幻迷题便是用数学知识表演的魔术，它以数学知识为外衣，引诱人们一步步坠入迷宫，使一个个“不可能”成为“事实”。尽管十分怪异，却又无法否认。

它能证明：1=2，2=3=8。甚至证明：任何数加上 1 后还得任何数。它还证明：梯形上底=下底；大圆周=小圆周。

其实，2 就是 2，3 就是 3，2 与 3 绝不相等。使 2 变成 3，是在演化的过程中掺了假！掺假的方法很隐秘，很巧妙，只有对数学的公式、定律、性质非常熟悉的人，并且十分精细地观察每一步的演化依据，才能及时发现其中破绽。

数字魔幻的演化过程，常常利用“0 的特性”迷惑他人，故意把特殊性与一般性糅合一起，使粗心大意者在不知不觉中，按照表演者的思路，误入迷途。

数的魔幻反映在形体上，就是形的魔幻。

形的魔幻，有的利用人们的视觉错误，用具体物体证明不可能的存在，如：10=9，50=48=49……，有的故意将图画错，而后将错就错，按照错误的根据进行证明，从而得出令人意外的结论。有的利用诡辩，偷梁换柱，把他人的思路引入歧途，最终令人昏头转向，真假难辨；有的看似不可能，却是真实的存在，它利用高深的知识(如拓扑学)使问题获解。只是暂时我们还不能理解罢了。

形的魔幻是看得见摸得着的具体事物，与数的魔幻相比，更加有趣，更加奇妙迷人！

魔幻迷题令人信服地表明：

数学，的的确确是一门极富魅力十分有趣而又引人入迷的学科，它的威力大到能使“不可能”成为“事实”。

1.和=积

和等于积，是说一个数与它自身的和等于它自乘的积。有人说：“不可能！”有人说：“只有 0+0=0×0，2+2=2×2。”有人说：“这样的数多得很！可以写成一个‘万能公式’。”

你认为存在这样的公式吗？

解：具备这种特点的数，确实多得很!

设 A 为任一自然数，可列出如下方程：

$$A+\frac{A}{x}=A\cdot\frac{A}{x}$$

将方程两端都乘以 x，得：

$$Ax+A=A\cdot A$$

$$Ax=A\cdot A-A$$

$$x=\frac{A\cdot A-A}{A}$$

$$X=\frac{A(A-1)}{A}$$

$$X=A-1$$

将 A-1 代入原方程：

$$A+\frac{A}{A-1}=A\times\frac{A}{A-1}$$

如果 A=8，则：

$$8+\frac{8}{8-1}=8\times\frac{8}{8-1}$$

$$8+\frac{8}{7}=8\times\frac{8}{7}$$

$$9\frac{1}{7}=9\frac{1}{7}$$

证明这个公式是正确的。

2.　2=1

有人这样证明：

设：a=b

则 $a^2=a\cdot a=b\cdot b=a\cdot b$

也即：$a^2=ab$

在等式两边减去 b^2，得：

$a^2-b^2=ab-b^2$

(a+b)(a-b)=b(a-b)

在等式两边同除以 a-b，得：

a+b=b

因为：a=b，a+b=b 也即 b+b=b

所以：2b=b

等式两边有同除以 b，得：

2=1

奇迹出现了！

你能找出证明过程中的错误吗？

解：表面上看，证明过程中逻辑性很强，每演化一步都持之有据，对等式的性质也很熟练，似乎无懈可击。

但细致的推敲一下，便可发现表演者在证明中故意把特殊性当作一般性运用了。

因为，既然假设 a=b，则 a-b=0。

等式两边同乘以或同除以一个数，必须“0 除外”，等式才能保持“仍

相等”的特性。证明中，将式两边同除以“a-b”，而 a-b=0，0 是不能作除数的！正因为用 0(即 a-b)去作除数，才出现了 2=1 的荒谬结果。

3. 1=3

有人这样证明： 设 a=b

则：a·b·b=a·a·a

也即：$ab^2=a^3$

在等式两边同减去 b^3，得

$ab^2-b^3=a^3-b^3$

$b^2(a-b)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

在等式两端同除以(a-b)，得：

$b^2=a^2+ab+b^2$

∵ a=b 上式也可为：

$b^2=b^2+b^2+b^2$

即：$b^2=3b^2$。

等式两端同除以 b^2，即得：

1=3

又是一个令人惊奇的结果。

1 怎么会与 3 相等呢？还需在推导过程中找毛病。

解：这题问题仍出在等式两边同除以(a-b)这个环节上！

因为，既然设 a=b，那么 a-b=0，而 0 是不能作除数的。

4. 2=8

设有一方程为：

$$2x-4=8x-16$$

将此方程变化为：

$$2(x-2)=8(x-2)$$

将等式两边同除以(x-2)，即得：

$$2=8$$

这也是个荒唐的结果。

但是，它的证明方法错在何处呢？

解：上述证明过程又是在等式两边除以同一个(x-2)。那么，其中的 x 是多少呢？从方程 2x-4=8x-16 可以求出 x 的值。

即：

$$2x-4=8x-16$$
$$8x-2=16-4$$
$$6x=12$$
$$x=2$$

x=2，则 x-2=2-2=0，原来又是 0 在作怪！在等式两边同除以(x-2)，也即用 0 去除等式的两端，问题就出在这里。

5. 2=3

写一等式：$4-10=9-15$，再在等式两边都加上$\left(\frac{5}{2}\right)^2$,并变化

等式：

4-10=9-15

$$4-10+\left(\frac{5}{2}\right)^2=9-15+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$2^2-2\times2\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2=3^2-2\times3\times\frac{5}{2}+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

这样变化后，恰符合两数差的平方公式。即：

$$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$$

$$2-\frac{5}{2}=3-\frac{5}{2}$$

在等式两边同时加上$\frac{5}{2}$，便得：

2=3

本题没有用 0 去除等式两边的数，却仍然出现 2=3 的荒谬结果，错误原因又是什么呢？

解：本题需涉及到中学的数学知识。它的错误在于，将等式$\left(2-\frac{5}{2}\right)^2=\left(3-\frac{5}{2}\right)^2$开平方后仍误认为等式成立。

其实$2-\frac{5}{2}=-\frac{1}{2}$，而$3-\frac{5}{2}=+\frac{1}{2}$。前者结果是负数，

而后者结果是正数。虽然它们平方后的数值是相等的，却不能表明它们原来的数值也是相等的。

6. n+1=n

若 n 为任意自然数，则$(n+1)^2$符合两数和平方公式：

$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$

在此等式两边同加[-(n+1)(2n+1)+1/4(2n+1)2]，得：

$$(n+1)^2-(n+1)(2n+1)+\frac{1}{4}(2n+1)^2$$

$$n^2-n(2n+1)+\frac{1}{4}(2n+1)^2$$

即，

$$\left[(n+1)-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2=\left[n-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2$$

两边同时开平方，得：

$$\sqrt{\left[(n+1)-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2}=\sqrt{\left[n-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2}$$

$$n+1-\frac{1}{2}(2n+1)=n-\frac{1}{2}(2n-1)$$

等式两边同加$\frac{1}{2}(2n+1)$，便得：

n+1=n

这岂不成了：任意一个自然数加上 1 以后，仍是原来的自然数么？

当然是违背常理的，但是错在哪儿呢？

解：问题也是发生在等式两边开平方的环节上。

我们知道：

左边的根式$\sqrt{\left[(n+1)-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2}$中恒有

$$(n+1)-\frac{1}{2}(2n+1)>0$$

所以，$\sqrt{\left[(n+1)-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2}=(n+1)-\frac{1}{2}(2n+1)$

右边的根式$\sqrt{\left[n-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2}$中恒有

$$n-\frac{1}{2}(2n+1)<0$$

这样，按照算术平方根的概念：

$$\sqrt{\left[n-\frac{1}{2}(2n+1)\right]^2}=\frac{1}{2}(2n+1)-n$$

所以：

$$n+1-\frac{1}{2}(2n+1)=\frac{1}{2}(2n+1)-n$$

$$n+1=\frac{1}{2}(2n+1)+\frac{1}{2}(2n+1)-n$$

n+1=2n+1-n

n+1=n+1

这题涉及中学数学知识，目前或许有困难。但是以后的学习过程中会逐渐理解的。从中读者可以体会到：随着数学知识的扩展，魔幻变化的内容也越加丰富。

7．　8=7

表演者拿出一张纸，纸上画着 8 个孩子在跳舞：

表演者又在纸上画了两条线，将纸剪成了三块，并一块一块的展示给观众。

接着，表演者又把三块纸重新拼合起来。

众人再一看，图上原来明明是 8 个演员，现在却只有 7 个了！

表演者说：“ 这个事实，说明 8 与 7 也是相等的。 ”

人们奇怪：为什么失踪了一个演员呢？

解：这题的关键是所画的两条线，剪开后再重新拼合，有一位演员身体重叠了，本来是两个人合成了一个人，因而 8 变成了 7！

8． 49=48=50

表演者拿出一个边长 7 厘米的正方形纸板，要观众求出它的面积。

这么简单的问题，大家异口同声地说：

边长×边长=49 平方厘米。

接着，表演者在图上画了几道线(如图)并沿线将图剪开，这样共剪成了 5 块。

表演者说：“ 这纸，还是原来的那张纸。 ”说着，把剪成的纸片一块一块的展示给人们看。

接着，他又重新把纸片拼合了起来。

众人不禁大吃一惊：正方形的中间竟空出了一平方厘米！

这样，若仍按原正方形算，剪开后一点纸屑也没丢，新图形的面积就是：(49+1=)50 平方厘米了！

但是，原来的正方形面积是 49 平方厘米，从图中可知边长仍是 7 厘米呀，这样，图形的实际面积又成了：(49-1)=48 平方厘米了！

这岂不是说：49=48=50 么？

真使人捉摸不透！

解：其实，剪开后拼成的图，并不是真正的正方形，而是一个长方形，长比宽多$\frac{1}{7}$厘米，只是肉眼看不出来罢了！

在划线剪开时，表演者便选准了部位(如图)：

这样的图形，虽然宽仍是原来的7厘米，长却是$7\frac{1}{7}$厘米了。

因而，新拼的图形围成的面积实际是：

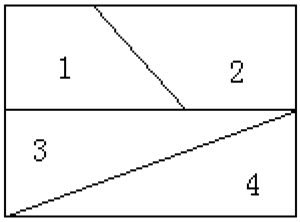
$$7\frac{1}{7}\times 7 = 50(\text{厘米})^2$$

若去掉中间空下的 1 平方厘米，纸片的实际面积仍是 49 平方厘米。

9． 64=65

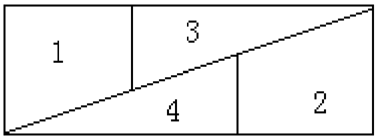
表演者拿出一个 8×8 方格的纸片。因此纸片上共有 8×8=64 个方格。

表演者又在纸片上画了几道线(如图)，并沿线将纸剪开成 4 片。



然后，又将 4 块纸片重新拼成一个长方形，要求观众再计算一下长方形的面积。

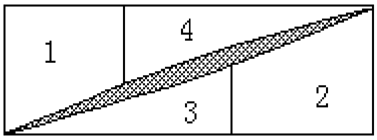
大家一看，新拼成的长方形，长有 13 格，宽是 5 格。这



样，新图形的面积共有：

13×5=65

奇怪，还是原来的那张纸，64 格却变成了 65 格！难道 64=65？



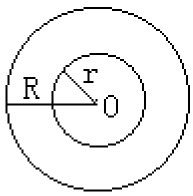
解：这道题的奥秘与上题相似，实际纸的面积没有变化，仍是 64 个方格。

秘密在于所拼成的图形对角线并不是直线，只是拼成后隙缝很小，肉眼不易发现罢了！

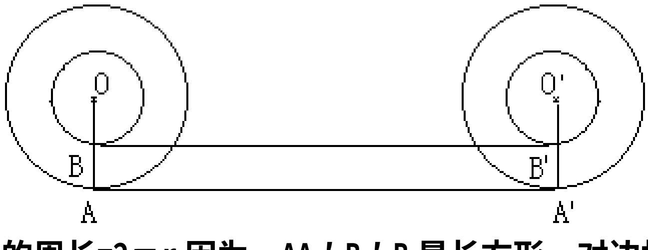
拼成后成为 65 个方格,多出的 1 个方格,包含在对角线那么长的隙缝中，一般人当然是不会注意的。

10. 大圆周=小圆周

证明：设图中是大小两个同心圆，大圆半径为 R，小圆半径为 r。



如果使大圆沿着直线滚动一周，这时，大圆的周长=AA′=2πR 由于两圆是固定在一起的，所以小圆也转动一周，移动的距离是 BB′，即：



BB′=小圆的周长=2πr 因为，AA′B′B 是长方形，对边相等。

所以，AA′=BB′

由 AA′=2πR

BB′=2πr

∴2πR=2πr 也即：

大圆周长=小圆周长在等式的两端同除以π，得：

2R=2r 也即：

大圆直径=小圆直径同理：R=r 也即：

大圆半径=小圆半径真是“奇谈怪论”！

解：从图上看，似乎是合情合理的，实际上其中忽略了一个隐含的因素，即因为两圆固定在一起，小圆除了滚动之外，还随着大圆的滚动向前滑行。因此，AA′是大圆的周长，BB′虽与 AA′相等，实际却并不与小圆周长相等，它要比小圆周长大出许多。

由于大前提错了，由此而推导出的结论也不可能正确。大圆的直径、半径，不可能与小圆的直径、半径相等！

11.世界短跑冠军“追不上”乌龟

美国的刘易斯是世界短跑冠军，他的百米成绩是 9 秒 92，可以说，其快如风。而乌龟，就是在动物中运动速度也是较慢的，它靠四个脚爬行。慢慢悠悠，老半天也爬不了几米。想当年，它与小白兔赛跑，要不是小白兔在树荫下睡了一觉，无论如何它也得不到冠军呀！

现在，有人却要证明：只要乌龟在前，世界短跑冠军也永远追不上它。

证明的过程是这样的：

设：乌龟在 A 点向前爬，刘易斯从 O 点出发向前追。

当刘易斯追到 A 点时，乌龟尽管速度很慢，还是要前进一段距离的，假定它到达了 B 点。

刘易斯继续追赶。

当刘易斯到达 B 点时，乌龟仍然不会停在 B 点，假定到达了 C 点，仍是在刘易斯的前面。如此继续下去，当刘易斯追到 C 点时，乌龟又到达了 E 点。

总之，尽管他们间的距离越来越小，尽管乌龟的速度很慢，却总是在刘易斯的前面。也就是说，刘易斯永远追不上乌龟！

这可能吗？

解：短跑冠军怎么会追不上乌龟呢？

错误的结论产生于用“有限”的方法去处理“无限”的问题了。

假定长跑冠军的速度是 10 米/秒。乌龟的速度是 1 米/秒，它们间的距离 OA 若在 9 米以内，不需 1 秒即可追上。若 OA 在 90 米以内，不需 10 秒也便追上了。

同样，我们也可以证明。

设：OA=9 米，刘易斯前进速度为 10 米/秒，乌龟爬行速度是 1 米/秒。

刘易斯用 0.9 秒，便跑到了 A 点，乌龟用同样的时间，只跑了 0.9 米(到达 B 点)；当刘易斯再用 0.09 秒追到 B 点，乌龟用同样的时间，又向前爬了 0.09 米(到达了 C 点)……

刘易斯一段一段的追赶，所用的总时间 t 和所行的总距离 s，是：

t=0.9+0.09+0.009+……

s=9+0.9+0.09+……

∵0.9+0.09+0.009+……=0.999……=0.9=1

∴ 当 t=1 秒

s=10×(0.9+0.09+0.09+……)

=10×1

=10(米)

而刘易斯与乌龟间的距离 OB，只有 9.9 米(即原距离 9 米，加上 1 秒钟内乌龟所行的 0.9 米)，所以，如果 OA=9 米，刘易斯只需 1 秒钟，便可追上乌龟了！

12.空杯=满杯

表演者拿出一只圆柱形的玻璃杯，里面恰有半杯红茶水。

他说：“这是个半空的杯，也可以说是半满的杯。空和满各占杯子的一半。”即：

$$\frac{1}{2}\text{空杯}=\frac{1}{2}\text{满杯}$$

将等式两端同“×2”，得：

$$\frac{1}{2}\text{空杯}\times 2=\frac{1}{2}\text{满杯}\times 2$$

空杯=满杯

又是一道奇怪的算式！照这样，盛满茶的杯与没盛茶的杯没有区别，有茶喝和没茶喝一个样。

真是奇谈怪论！

那么，该怎样才能驳倒他呢？

解：进行论证时，前后使用的概念必须保持一致，才能得出正确的结论。

本题中，“半空的杯”并不是“空杯的一半”，而是指一半空、一半满的杯；同样，“半满的杯”，也不是“满杯的一半”，而是指一半满、一半空的杯。

半空的杯=半满的杯，指的是杯子的容积，而不是指杯里装的物体。在“×2”时，前者把半空的杯加了倍，而把另半个“满杯”抛弃了；后者正相反，只把“半个满杯”加了倍，将“半个空杯”又弃之不顾。前后不统一，得出的等式自然不能成立。

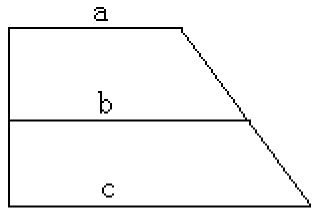
善于诡辩的人，常常巧妙的“偷换概念”，而后进行貌似科学的辩论。只有认真识别，才能发现其违背逻辑规律的谬误。

13.上底=下底

右图为一任意梯形。

上底为 a，下底为 b，c 是两腰中点连线。

显然，a、b、c 三条线段的长度是各不相等的。但是我们却要用数学的方法，证明它们是相等的！



证明方法如下：

∵ c 是两腰中点连线

∴ $\frac{a+b}{c}=c$

a＋b＝2c

等式两端都乘以(a—b)，得：

(a+b)·(a—b)=2c·(a—b)

展开得 $a^2-b^2=2ac-2bc$

移项 $a^2-2ac=b^2-2bc$

等号两端都+c^2，得：

$a^2-2ac+c^2=b^2-2bc+c^2$

即，$(a-c)^2=(b-c)^2$

a-c＝b-c

等式两端都+c，得：

a＝b

这就是说，任何梯形的上底都等于下底。

结论当然是荒谬的，要是这样的话，梯形和长方形、平方四边形岂不是没有区别了么？

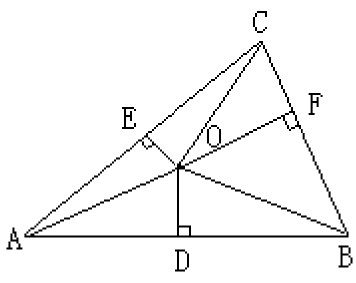
但是，证明过程中什么地方错了呢？

解：错在$(a-c)^2=(b-c)^2$等号两边都开方得 a—c=b-c 这个环节上。因为从$(a-c)^2=(b-c)^2$，只有在 a—c≥0、b-c≥0 的情况下，才是正确的。在这里 a—c＜0，因而结论错误了。

14.任何三角形都是等腰三角形

我们知道,三角形按边来分类,有任意三角形、等腰三角形和正三角形(也叫等边三角形)。

现在,我们却要证明:任意三角形都是等腰三角形。即在△ABC 中,AC=BC



设：△ABC 是任意三角形。D 为 AB 边的中点。

过 D 点作 AB 的垂线，与∠C 的平分线相交于 O。作 OE⊥AC(“⊥”读作“垂直于”)，OF⊥BC，连接 AO、BO 便得六个直角三角形。其中：

①△OAD≌△OBD(“≌”读做“全等于”，在两个直角三角形中，如果两条直角边对应相等，则两个三角形便完全相等了(AD=BD，OD 是共用边)。

②△OEC≌△OFC(在两个三角形中，如两条边和所夹的角相等，两个三角形也完全相等。OC 是共用边，∠OCE=∠OCF)。

③△OAE≌△OBF(由①得 OA=OB，由②得 OE=OF，两个三角形都是直角三角形，也具备了两个相对应的边相等的条件了，所以也全等)。

由②得 CE=CF

由③得 AE=BF

因此，AE＋CE=BF+CF

∵　AC=AE＋CE　BC=BF＋CF

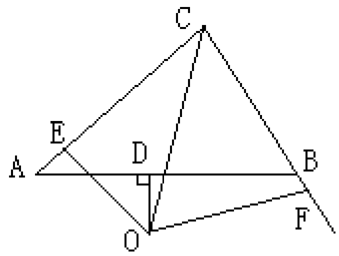
∴　AC=BC

这就是说，任意三角形都是等腰三角形。

假如这个结论是对的，那么就不存在按边分类了！但是，这个证明，究竟什么地方不科学呢？

解：这题错在把图画错了！

如果严格的按要求画图，AB 的中垂线与∠C 的平分线交点 O，一定在三角形之外，而不可能在三角形以内。因而由 O 点作∠C 两边的垂线，必有一条只能与一边的延长线相交，如图中的 F。



这样，上述题中，证明 AE＋CE=BF＋CF，显然是错误的！BF 不是 BC 中的一段，而是 BC 延长线上的一段，即 BC＋BF 才与 AC 相等，因此 AC≠BC，也即“任意三角形都是等腰三角形”这个结论不能成立。

15.剪不断的纸环

表演者拿出一条线带，而后将线带的一头扭一下(旋转 180°)，再将两端粘接起来。

只见表演者拿起剪刀，沿

纸条中间剪了一周，奇怪的是纸圈不仅没有断开，却仍是一个更大的纸环！接着，又从剪出的大纸环中央再剪一周，这次又成了互相串连的两个纸环！

真是奇怪！

解：这种纸带，叫做莫比乌斯带，是德国数学家莫比乌斯(1790～1868)于 1858 年发现的。

莫比乌斯带是一门数学分支叫做“拓扑学”的研究对象。它没有“正面”和“反面”，蚂蚁从纸的这一面，不必跨过边缘便能到达纸的另一面。

如果将纸带扭两扭(旋转 360°)，再沿着纸条三等分剪开，便可得三个

互相串连的纸环。

扭的圈数和剪的次数不同，所得的结果也不同：

	沿中线剪开	沿三等分线剪开
扭一扭	得到一个扭了四扭的大纸环。	得到一大一小互相扣合的两个纸环。大的扭四纽， 小的扭一扭。
扭两扭	得到两个相扣的纸环。	得三个相互扣合的小纸环。但宽度只有原来的三分之一。

16.奇怪的绳结

用绳捆绑物品都需要打结，打结的方法有各种各样，以至发展成一门结绳艺术。

表演者拿出一根绳，打了两个死结(如图)，而后又在这两个死结的基础上又绕了几下，看上去这个结就更加牢固了。

可是表演者却说：“这样死而又死的绳结，他不需要一扣一扣的解，只要抽着绳两端一抖，绳结就会打开”。

表演者两手握着绳的两端，用力一抖，绳结不见了！仍是一根光滑平直的绳子。

其中，隐藏着什么奥秘呢？

解：结绳问题，也是运用了现代数学分支拓扑学的理论。这个问题奥秘在最后加绕的几道上。从原来两个死结的基础上，只要按右图的方法再加绕几道，便可以只握绳的两端，将整个绳结都拉开。

这个结叫切法洛结，魔术师常用它来表演。

17.难扣的结

图中是一条既柔软又坚韧的皮带。A 端被固定在一个笨重的物体上，由于某种需要，要求打一个如图所示的结。

很明显，这个套结，是将 A 端从缺口处穿进去的。可是 A 端却被牢牢的固定在一个物体上。物体很大，不可能穿过皮带的缺口，而 A 端又不能取下来，更不能把皮带扯断。

打这样的结，似乎是不可能的！

可是，有人却把这个难打的结打成了。你知道他是怎么解决的吗？

解：打结的方法和步骤可图解如下：

将 B 端由上向下先穿过缺口，再将它拉回，这样两个小环便形成了。因为皮带很坚韧，不必担心被拉断。

接着，再将小环翻转 180°，慢慢的向着 A 端推过去，直到皮带的细狭部分放开。这样，这个难扣的结便成功了！

这个有趣的问题，是美国的西门斯首先提出的。西门斯是纽约市一家皮

带商店的老板，也是一位优秀的业余魔术家，他对各种拓扑游戏特别感兴趣。

18.智脱环铐

在一次战斗中，我军的侦察员小王不幸被敌人抓获。

为了防止小王逃跑，敌人将他戴上手铐后，又将铐链环扣在木桩的铁链上(如图)。

小王一心想着逃回部队。可是没有任何工具可以将链条砸断，那木桩又坚固万分，任他怎么用力都无济于事。但是，无论如何不能坐以待毙啊。他紧张的思考着挣脱木桩的逃跑办法。

后来，他发现那套在木桩上的环扣空隙，虽然不能从木桩上脱下来，却能使手铐的铁链顺利通过。于是他反复琢磨、试验，岂料，最后竟很轻巧的挣脱了。

小王是用了什么办法呢？

解：这个看似难解的问题，也是运用了“ 拓扑学 ”的理论。

小王先将自己的铐链折成圈，塞进木桩的环扣中，再将铐链绕过木桩头部，这样用力一拉，铐链便与木桩上的链条分开了！

19.智取剪刀

王奶奶是个剪纸能手，四面八方的人都请她剪纸。一张普通的纸，只要一会儿功夫，就变成了栩栩如生的鸟、兽、鱼、虫和各种姿态的人物造型，真是太奇妙了。

许多年轻姑娘围着王奶奶，要她传授这种绝技。可是王奶奶很忙，没有功夫一个个的指点。姑娘们却纠缠不休。

王奶奶没法，便出了道难题，她把剪刀拴在桌腿上(如图)说：“ 谁能不弄断绳子，把剪刀取下来，便先教谁。 ”

不料，一个聪明的姑娘，真的取下了剪刀。

解：

这位姑娘是将扣在剪刀上的绳套拉松，并沿着双股绳的方向，拉到足够长度，将剪刀从拉出的环扣中穿过去，便可把剪刀取下了。

如图：

20.巧移钮扣

一块木板上，穿着一根细绳，细绳在木板中间的小环上打了一个结，在小环两端的绳上各穿进一个钮扣，而后绳的两端固定在木板两端(如下图一)。

现在要求不准解开绳结，将两个钮扣移到一端(如上图二)，钮扣也不可能从木板中间的小环通过，因为小环比钮扣小得多。

你也许认为这根本不可能，但实际却是有办法的。你能想出办法来吗？

解：将钮扣顺着绳子向左移动，到达中间绳结时，将绳结

拉松，把钮扣穿过去。再将绳结继续拉长，从前面拉向背面，从背面穿过来成双绳扣，再把钮扣穿过双绳结，把活绳结从孔中拉还原，此时两个钮扣便都移到左边了。

21.茶杯不见

张爷爷在招待所的茶房负责供茶水，为了方便顾客喝茶，他特意准备了几只杯子。可是一些人，往往将茶杯胡乱拿放。后来，张大爷用了根长长的绳子，将茶杯串联在一起(如图)，绳子的一端扣着杯把，另一端被固定在凳子上，绳头被钉在另加的一块木板内。

不料，有一天杯子全部不见了，而系杯的绳子却完好如初，钉绳头的木板也没有被撬的痕迹。你知道这杯子是怎么被解开的吗？

解：只要将第一个杯子卸下，其他的杯子都极易了。

取第一个杯子的方法是：将绳扣用力拉松后，再从杯口绕过去，绳扣便脱开了(如图)。

22.小狗可盗

董尧和孟志是一对好朋友。一天董尧到孟志家去玩，看见孟志家有一只非常可爱的小狗。小狗被拴在铁桩上，见了客人乱蹦乱跳，摇头摆尾。

董尧仔细端详了拴小狗的铁桩，不禁拍手大笑：“你拴的小狗，看样子很牢固，可是要想偷你的狗简直轻而易举，连绳子都不用解。”

孟志听了大不为然，说：“你要是不开锁也不把拴绳解开，能把小狗牵走，那狗就送给你了！”

董尧说：“你说话算数我现在就把它牵走！”

孟志说：“大丈夫说话算数，你就牵走吧！”

“可是，当主人面干这事，可不能说我偷你的爱犬啊！”董尧笑着说。

“那当然！”

“一言为定！”董尧真的非常从容的将小狗拴绳从铁桩上取下了。

董尧是怎么取下拴绳的呢？

解：只要把拴狗的绳子从立柱的孔眼中拉出，将绳套从锁上绕过去，再将拴绳抽出柱孔，小狗便脱离了铁桩了(如图示)。

23.脱去双环

下图大纸环宽度约 1 厘米，小纸环的内径约 1.5 厘米。两个纸环被两端

系着两个钮扣的线串联了起来。

现在要求，不准解开两端的钮扣，把细线从两个圆环中脱离出来。

你能想出办法吗？

解：这个问题看似不可能，但是当我们想到纸环都是软的，可以折叠，办法便能找出来：将大圆环折成半圆，小圆环在半圆上，于是细线便脱离了。

故事数学

听故事 学数学回味无穷

故事数学

一切真知都来源于实践，来源于生活。

生活本身是美好的，有趣的，在生活中产生的数学故事，自然更是十分有趣的。这是因为，故事一般都有人物、事件和情节。将数学问题贯串在故事的事件、情节里，故事中便蕴含着判断、推理和演算。你在听故事的同时，要动脑筋想问题。在解决问题的过程中，发展了智力，提高了能力。从这个意义上讲，数学故事比一般的故事趣味性更浓，吸引力更大。

数学故事一般都比较短小、单纯。它的主要目的是通过故事，讲述数学问题，当数学的条件、问题都交待时白了，故事便不再延伸下去了。但是它却设置了悬念，留下了疑问，迫使读者去回味，去破解。

怎样解数学故事呢？

听(或读)数学故事，不能像听一般故事那样，只迷恋它的事件、情节，要边听(或读)边想，抓住重点，把核心问题从条件、情节中分离出来，去掉那些枝枝节节，只保留与条件问题有关的主干，使它成为一道单纯的数学题。而后根据题目的特点，按照数学的方法，分析、解答。

数学故事虽然短小，却具有很强的艺术魅力，古今中外各个民族都有数学故事。数学故事闪耀着人类智慧的光华。

这里既选取了部分脍炙人口的传统数学故事，也编选了名著中、现实生活中有趣的数学故事。

咱们又听故事，又学数学，相信读者朋友会很高兴的。

1.富翁打赌

有两个富翁，一个头脑精明，一个吝啬刁钻。贪财好利是他们的共同特点。

一天，两个富翁遇到了一起，双方争强好胜，话不投机，竟然打起赌来。

精明的富翁说：“我可以每天给你一万元，只收回你一分钱。”

吝啬的富翁以为对方吹牛皮，便说：“你若真的每天给我一万元，别说我给你 1 分，就是再给你一千我也干！”

“不！”精明的富翁说，“条件只是第一天，你给我一分。”

“难道你第二天还要给我一万？”

“是的”，精明的富翁说：“只是你第二天收了我的一万，要给我二分。第三天……”

没等精明的富翁说完，吝啬的富翁急切地问：“第三天你再给我一万，我给你……”

“四分！就是说，我每天得到的钱都是前一天的两倍。”

吝啬的富翁心想：这家伙可能神经出了毛病，便问：“每天送我一万，这样下去，你的钱够送多少天呢？”

“我是人人都知道的百万富翁。”精明的富翁说：“我不打算都送给你，

只拿出三十万，先送你一个月足够了。但是你给我的钱也一个不能少！”

嘿，还当真呢！

吝啬的富翁说：“你敢签订协议吗？”

“不签协议算什么打赌？”精明的富翁说：“咱们还要找几个公证人呢！”

吝啬的富翁真是喜出望外。

于是他们签了协议，找来了几个公证人。协议上写道：

甲方每天给乙方一万元，乙方每天给甲方的钱数从一分开始，以后每天都是前一天的两倍。双方持续时间为 30 天。

就这样，把手续办好了。

吝啬的富翁回到家，高兴得一夜没合眼，生怕对方反悔。不料，天刚亮，对方提着一万元送上门来，按约定他给了对方一分钱。

第二天，对方仍然如约送来了一万元。他简直像做梦一般，这样下去一个月，便可以有 30 万元的收入了！想着，想着，数钱的手都颤抖了！于是自己也如约给了对方 2 分钱。

对方高高兴兴地拿走了 2 分钱，还叮嘱“别忘了，明天给我 4 分钱！”

话休繁叙，当吝啬的富翁拿到十万元时，精明的富翁只得到十元二角三分钱。但是，他仍高高兴兴地每天如约送来一万。

可是，20 多天以后，吝啬的富翁突然要求打赌终止。

对方以及一些证人当然不会同意，30 天的时间已经过去大半了，任何一方都无权不执行协议。到最后，吝啬的富翁竟把全部家当都输光了。

你说，这是为什么？

解：吝啬的富翁在一个月内共得到 300000 元。

他需要付给对方的钱，总数是：

1＋2＋4＋8＋16＋32……＋536870912

＝1073741823(分)＝10737418.23(元)。

即：一千零七十三万七千四百一十八元二角三分。

2.阿诺德智慧

传说在德国的历史上曾发生过这么一件趣事。

16 世纪时，这个国家是由许多彼此独立的小国组成。其中有两个相邻的小国，原先睦邻友好，人民相互自由进出，连货币都可通用，并且价值相等。

后来两国闹了矛盾，虽然人民还可以自由来往，但甲国的国王下令，乙国的钞票若拿到本国使用，100 元只能作本国的 90 元。

乙国得知这一消息后，也不示弱，迅即下了一道同样的命令，以牙还牙，即甲国的钞票若拿到本国使用，100 元只作本国的 90 元！

一个名叫阿诺德的人，得知这一消息，连忙劝说两国的国王，万万不可如此。否则有人悄悄跑跑腿，便会趁机发了大财。

两个国王都不相信。

阿诺德见说服不了他们，便自告奋勇亲自实践。两国国王分别给他 100 元，让他试验。若果真他能利用这条命令发了大财，便收回成命。

阿诺德拿了 200 元钱，一会儿到甲国购货，一会儿又到乙国购货，往返穿梭在两国的商店里，不消几日，便腰缠万贯。接着他便把赚来的大宗财物，送到国王面前。两国的国王见状都惊奇得目瞪口呆。忙问他：“是怎么赚得

的？”

阿诺德讲述了赚钱方法后，国王都信服地连连点头，深深认识了分裂的危害，于是他们各自都收回了成命，和好如初。

你知道，阿诺德是怎样赚钱的吗？

解：阿诺德拿着甲国的 100 元，在甲国的商场购物 10 元，对方找钱时，他声称要到乙国去，要求找回乙国的钞票，这样，本应找回他 90 元甲国钞票，他却得到了 100 元乙国钞票。此时，连同乙国国王给的 100 元，他有了 200 元乙国钞票。

阿诺德拿着乙国的 200 元钞票，迅速地跑到乙国商店要 20 元的货物，在对方找钱时，他又声称自己要到甲国去，要求找回甲国钞票。这样，本应找他 180 元(90 元×2)的乙国钞票，他却得到了 200 元的甲国钞票。

就这样，他在甲国购物，要求找回乙国钞票；在乙国购物，要求找回甲国钞票……如此循环往复，他手中的钱物便越聚越多，用不了多长时间，便发了大财。

3.科幻小说中的算题

安培是法国的一位著名学者。

一天傍晚，他拿着儒勒·凡尔纳的科幻小说在街头散步。

小说中主人公说出的数学问题引起了他的兴趣。

安培一面散步，一面思考着计算方法。忽见前面有块“黑板”，他便从口袋里摸出粉笔头，向“黑板”走去，专心致志地在“黑板”上进行演算。

可是题目还没有算完，那“黑板”却向前移动了！

安培的心思只集中在算式上，便也不由自主地跟着“黑板”向前移动。

不料，那“黑板”越走越快，安培也加快了脚步，同时迅速地书写着。最后几乎是跑着追那“黑板”，还是被“黑板”抛下了！

此时，只见街上的行人一个个朝着他哈哈大笑。这位学者定睛一看，才恍然大悟，那块会移动的“黑板”，原来是一辆黑色马车的车厢。

儒勒·凡尔纳的科幻小说中什么问题吸引了这位大名鼎鼎的学者呢？

那题目是：

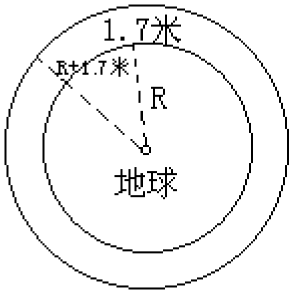
当一个身高 1.7 米的人，绕地球一周时，他的头顶要比他的脚底多跑多少路？

解这道题，其实并不难。

读者朋友，你会计算吗？

解：若把地球当作一个圆，绕地球一周，人的头和脚所经过的路程恰是圆环的外周和内周。

如图：



设地球半径为 R，足经过的路程是 2πR，头经过的路程是 2π(R＋1.7)，两者相差：

2n(R＋1.7)－2πR

＝2πR＋3.4π－2πR

＝3.4π

＝3.4×3.14

≈10(米)

4.智越沙漠

解放战争时期，我军的两名侦察员在取得了重要情报后，大部队已经老早出发了。他们为了将情报及时送交部队首长，必须抄近路迎头赶去。

近路是一片荒无人烟的茫茫大沙漠。据当地群众说，穿过沙漠需要 10 天时间，但是根据沙漠的气候特点和人体负荷情况，每天最多只能带 8 斤食品和 8 斤水，而每人每天至少要消耗 1 斤食品和 1 斤水。这样，最后 2 天便会因无法得到食品和水的补充而葬身沙漠。

尽管当地可以找到民工，但是民工每人也只能带 8 斤食品和 8 斤水，各自所带的粮食和水连自己都不够消耗的。

怎么办呢？急得两个侦察员抓耳挠腮。

两人苦苦的思索着解决办法。

“有了，可以这么办！”忽然一个队员想出了妙法。两人一合计确实可行。

于是两个人便顺利地通过了沙漠，圆满地完成了任务。

他们想了什么办法呢？

解：他们雇用了一个民工，两天后，请民工回去，并给他 2 斤食品和 2 斤水供回去的路上用。民工余下的 4 斤食品和 4 斤水，两个队员平分，加上他们各自用剩的食品和水，每人仍是 8 斤食品和 8 斤水，而此时余下的路程也只需 8 天了。

除此以外，还可以想出别的办法来。

5.孙悟空的紧脑箍

《西游记》中的孙悟空被观世音菩萨带了紧脑箍，保护唐僧到西天取经。

尽管孙悟空勇敢、机智、爱憎分明、忠心耿耿地保护唐僧，可是唐僧却是非不分，常常念起紧箍咒，让孙悟空屈服。

在去西天取经路上，白骨精三次变化成人诱骗唐僧，都被孙悟空“火眼金睛”识破，把它击倒在金箍棒下。孙悟空本想除恶务尽，唐僧却硬说他误伤好人……

孙悟空不听，唐僧便一次次的念着紧箍咒，疼得孙悟空满地打滚。

假定孙悟空的脑袋直径是 20 厘米，唐僧每念一遍咒语，紧箍缩短原长的 $\frac{1}{100}$，如果唐僧连念五遍咒语，那么紧箍将嵌入孙悟空的头皮多深？

解：在唐僧没念咒时，紧脑箍的直径与孙悟空的脑袋直径相等，都是 20

厘米。

紧箍的周长是：

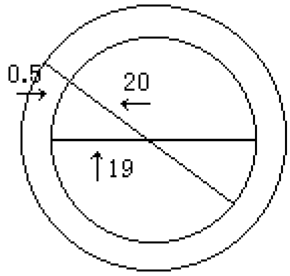
$20\times\pi=20\pi$

唐僧念五遍咒后，紧箍的周长是：

$$20\times(1-\frac{1}{100}\times5)\times\pi$$

$=19\pi$

这就意味着，紧箍直径缩



短了 1 厘米(20～19)。这样，四周都将嵌入孙悟空头皮 0.5 厘米深。因而，孙悟空疼痛难忍，满地打滚。

6.棋盘上的粮食

中国、印度、埃及和巴比伦是世界四大文明古国。

传说，古印度有一个人发明了一种游戏棋，棋盘共 64 格，玩起来十分新奇、有趣。他把这种棋献给了国王。国王玩得十分开心，便下令赏赐献棋人。臣下问献棋人想要什么。献棋人说：“他只需要粮食，要求大王给点粮食便心满意足了。”问他需要多少粮食，他说只要求在棋盘的第一个格子里放一粒米，在第二个格子放两粒米，第三个格子里放四粒米……总之，后面格子里的米都比它前一格增大一倍，把 64 格都放满了就行。

国王一听，满口答应。大臣们也都认为：这点米，算得了什么，便领献棋人去领米。岂料，到后来把所有仓库里的存米都付出了，还是不够。

你知道这是为什么吗？

解：米粒数根据制棋人的要求。可列式为：

1＋2＋22＋23＋24＋25＋……＋264-1

＝18446744073709551615(粒)

如果造一个仓库来存放这些米，仓库应是多大呢？有人算过，若仓库高 4 米，宽 10 米，那么长应是地球到太阳距离的 2 倍。这样的长方体仓库在地球上是容不下的，当然这只是个假设。传说，当时计算米粒数宫廷里就整整算了三天！这是中学数学中“等比级数求和”问题。在当时只是凭手工硬乘出来的。国库中当然不可能有那么多的粮食。

7.难解的遗嘱

传说很久很久以前，在印度有个老农民，临终前他将三个儿子叫　到面前，有气无力地说：“我就要见真主去了，这一生没有给你们留下更多的财产，只有 19 头牛，你们分了吧：老大分总数的

$\frac{1}{2}$，老二分总数的$\frac{1}{4}$，老三分总数$\frac{1}{5}$……”说完，上气不接下气，不久便闭上了眼睛，停止了呼吸。

三个儿子办完了丧事，便开始分牛了。

当时的印度，有不准宰牛的教规，三个儿子既要遵守教规，又要执行老人的临终遗嘱，可是，左思右想也没有办法解决。

一天，有个邻居从门前经过，见他们兄弟唉声叹气，很是奇怪。当这邻居问明了原因后，思索了一会，又从家里牵来了一头牛，便很快帮他们把牛分好了。

按照邻居老农的办法，既没有宰杀一头牛，又遵照了老父的遗嘱。弟兄三人顿时眉开眼笑。

邻居老人用了什么办法呢？

解：老人把自己的一头牛也加在 19 头牛内，总数是 20 头牛。这样便容易分了：

老大分牛的头数是：

$20\times\frac{1}{2}=10$(头)

老二分牛的头数是：

$20\times\frac{1}{4}=5$(头)

老三分牛的头数是：

$20\times\frac{1}{5}=4$(头)

这样，兄弟三人分得牛的总头数是：10＋5＋4＝19(头)

邻居老人再把自己的一头牛牵回。

其实添上一头牛后又牵走了，说明不添这头牛也是可以分开的。

兄弟三人分牛头数的比是：

$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}=10:5:4$

即总数是 10＋5＋4＝19 份，这样便可按比例分配了。

老大得：$19\times\frac{10}{10+5+4}=10$(头)

老二得：$19\times\frac{5}{10+5+4}=5$(头)

老三得：$19\times\frac{4}{10+5+4}=4$(头)

8.巧分宝石

传说，古代有个守财奴，临死前留下 13 颗宝石，嘱咐三个女儿：大女可得$\frac{1}{2}$，二女可得$\frac{1}{3}$，三女可得$\frac{1}{4}$，若不依此分配，则作为随葬品放进棺材。

老人咽气后，三个女儿无论如何也难按遗嘱分配，只好请教舅父。

舅父知道了原委后说：“你们父亲的遗嘱不能违背，但也不能将这么珍贵的物品用来陪葬，这事就由我来想办法分配吧。”

果然，舅舅很快将宝石分好，姐妹三人都如数拿走了应分得的宝石。

你知道舅舅是怎么分配的吗？

解：舅舅将宝石先取出一粒放在旁边，而后再分。

这样，还有 12 颗。

大姐得：$12\times\frac{1}{2}=6$(颗)

二姐得：$12\times\frac{1}{3}=4$(颗)

三姐得：$12\times\frac{1}{4}=3$(颗)

可是，先用 12 颗分的，前两个姐姐拿去了 10 颗，只剩下 2 颗了！舅舅将原先取出的一颗交给小女儿，便恰好是 3 颗了！

9.座位循环

一天晚上，大众餐厅来了一群穿着简朴，风尘仆仆的青年顾客，原来他们是从家乡外出打工来到城里的。

服务员给他们上好了饭菜，不料，几位青年为了座次的安排却发生了争执。

有人提议：“应该以年龄为序，年长的坐上席。”

可是立即遭到反对：“那不成，咱们都没带户口簿，谁知谁啥年出生？”

因此谁也不愿先报年龄，生怕自己把年龄说小了。

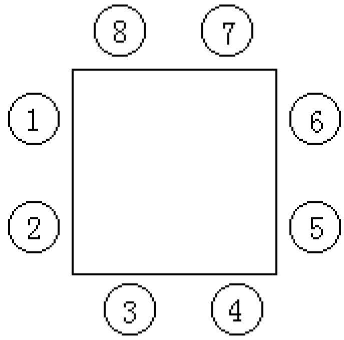
“要不以个头高矮为顺序，高个的坐上席！”又有人提议。

“那不成，儿子高过老子的多得是，假如父子同在一桌，难道能让儿子坐首席？”这话就更难听了！

这样，便始终达不成协议，其他客人都走光了，他们仍在争吵不休。服务员前来劝说也不成。

饭店经理知道情况后，便和颜悦色地来到餐桌前说：“各位客人先坐下，听我说一句话。”

争论的时间已经很长，各人只得临时先入座，听听经理的意见。



经理态度从容、胸有成竹地说：“咱们的饭店，价廉物美，首先我们欢迎各位光临。这样吧，你们把现在的入座情况记下来，明晚再来，请按另一个次序排列，后天再来，再按一个新的次序排列。一句话，你们每次来吃饭

都不要重复上一天的座次，这样不论首席、末席人人都会轮着，公平合理。同时本店另有优惠：你们总共 8 位客人，等到全部轮流一遍，回复到今晚这样座次时，我们饭店将不再收费。每晚免费供给你们一顿晚餐，而且这顿晚餐，任你们挑选，要什么菜，就上什么菜……各位意见如何？”

“免费供给晚餐，这太好了，你这是说好听话吧？”青年们显然不相信。

“我是饭店的负责人”，经理说：“从来说话都是算数的，要不，我可以给你们签协议。”

“好！”青年们一致赞同，“就照你说的办，我们写个协议吧！”

于是经理与青年们郑重地签了协议。

从此，这 8 位青年每晚都按不同座次到大众饭店就餐。再也没有争论，气氛融洽友好。

就这样，日复一日，一个月过去了，两个月过去，春去冬来，青年们挣了些钱都准备回家过春节了。可是他们在饭店就餐的座次仍然没有与第一次座次重复。

你说，这是什么原因呢？

解：计算一下便找到答案了。

假如只是 3 个人就餐，六次便可重复了，即：123、132、213、231、312、321。

假定是四个人就餐，其中一人座位不动，其他三位需变化六次，才重复，即：4123、4132、4213、4231、4312、4321。当第四个人一动，则需 6×4＝24 次才能重复。

同理，五人就餐需 24×5＝120(次)

六人就餐需 120×6＝720(次)

七人就餐需 720×7＝5040(次)

八人就餐需 5040×8＝40320(次)

一年 365 天，每天一次，40320 次需多少年才能重复呢？

40320÷365≈110(年)

这就是说，这八位青年即使终生都在这饭店就餐，也不会再重复原来座次的。也就是说，这位精明的经理，用最好的饭菜免费供给，原本是不可能实现的，因为不用到重复座位时，他们都已经去世了！

10. 公主的线团

古希腊米诺斯国王有个公主，名叫阿里安娜，她聪慧善良，在提修斯王子准备闯进迷宫杀死牛头怪物时，她给王子送一个线团。因为一旦闯进迷宫，记不住出来的路线，就会困死在迷宫里。王子利用线绳作记号，打入谜宫，杀死了牛头怪，又顺利地返回。

因此，“阿里安娜”的线团”成为一个象征吉祥的名称，法国便命名它的运载火箭为“阿里安娜”。

如今，“阿里安娜”火箭可把通信卫星发射到离地球 36000 千米的圆形轨道上，那么，它绕这个轨道一圈再回到地面，这个线团至少要有多长？

解：地球的半径约是 6400 千米火箭运行轨道的半径是：

36000＋6400＝42400(千米)

火箭运行的圆周长是

$2\pi r = 2\times 3.14\times 42400$

$= 266272$(千米)

火箭从地球发射点到静止卫星轨道的往返距离是

$36000\times 2 = 72000$(千米)

火箭绕轨道一圈再回到地面的距离，也即阿里安娜线团的长度是：

$266272 + 72000 = 338272$(千米)。

11.多少士兵

传说，古代有一位新上任的将军，在出征前举行了一次队列演习。他先命令士兵每 12 人为一组排成一队，结果最后一队缺 1 人。他觉得最后有空缺是不吉利的。于是又改命每组 10 人，结果最后一组仍缺 1 人。便又改每组 7 人，排到最后还是不足 1 人，直到最后每 5 人一组，总是缺 1 人。

这个将军非常迷信，认为这支部队总不正好，必然难打胜仗，于是一直不敢出兵。

据说，将军的士兵总数不足 500 人。实际究竟是多少人呢？

解：这队士兵，如果每排是 12、10、7、5 都不多不少，那么士兵的总数一定是 12、10、7、5 的公倍数。

12、10、7、5 的公倍数是无限多的，可求出这四个数的最小公倍数：

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 12 & 10 & 7 & 5 \\ \hline 5 & 6 & 5 & 7 & 5 \\ \hline & 6 & 1 & 7 & 1 \end{array}$$

最小公倍是：$2\times 5\times 6\times 7 = 420$

恰好不超过 500 人。

因为 12、10、7、5 每种排法都少 1 人，可见士兵的总数比这四个数的最小公倍数少 1，即：$420 - 1 = 419$(人)。

12.吝啬鬼

莫里哀是法国著名的喜剧作家。在他的著名喜剧《吝啬鬼》中，主人公阿尔巴贡是个自私贪婪、爱财如命的人。他想娶玛丽亚娜，又嫌她带不来彩礼。

于是他将媒婆找来，那媒婆投其所好，把玛丽亚娜大大的夸奖一番：“这个姑娘吃得很节省，这等于一年节省了$\frac{1}{4}$彩礼；她穿得也很朴素，一年又等于节省下$\frac{1}{3}$彩礼；她还讨厌赌钱，假如赌钱，一年至少要输掉2万法郎，按$\frac{1}{4}$算吧，也不是个小数！所以节省下来，彩礼钱不是出来了吗？”

媒婆的这段话，可看作一道数学题。你能根据媒婆的话，知道阿尔巴贡想要多少彩礼钱吗？

解：从媒婆的“2万法郎，就按$\frac{1}{4}$算”，可知：

玛丽亚娜不赌钱可少输：

$20000\times\frac{1}{4}=5000$(法朗)

彩礼的总数可图示如下：

可知阿尔巴贡想要彩礼的总数是：

$20000\times\frac{1}{4}\div[1-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})]$

$=5000\div[1-\frac{7}{12}]$

$=5000\div\frac{5}{12}$

＝12000(法郎)

13.智进敌巢

在《深山剿匪记》中，有这么一段故事：

一批残匪在面临灭亡的前夕，躲进了深山老林，他们凭借高山狭谷负隅顽抗，我军数次强攻不下，那“一夫当关，万夫莫开”的险要地形，使得这批匪徒有恃无恐。

靠强攻硬取，显然难度极大。如果趁敌人扫荡归山时混进内部，也不容易。敌人层层设卡，从内外出要有特别通行证，从外入内要交“进山证”，进山证是一次性的。入第一道岗，撕去证票一半，进入内山便全票收回。临时外出便发给特别通行证。

后来，我军通过内线搞到两张进山证。凭着这两张进山证，班长等三个人进入了内山，并且相继有十余个战士也混进了第一道岗哨。

在敌人毫无觉察的情况下，突然枪声齐鸣，内外夹攻，迅速地缴下了敌人的武器，把全部敌人一起俘获。

想一想，我军是怎样利用两张进山证，派三人进入内山，并且又相继混进去那么多战士的？

解：班长化妆后先拿着进山证，进入内山后借口有事外出，领取了一张“特别通行证”，出了山外。把特别通行证交给第二个人。

第二个人用特别通行证过了第一道岗哨，进内山时，用去进山证的一半，此时他还有另一半。进入内山时，也借故外出，又领了一张特别通行证。出山后交给第三个人。

第三个人用同样的方法也得到一张特别通行证，这样，他们便有了三张通行证。

而后，每次进山三人，再出来一人，把三张通行证都带出，再进三人，再出一人……这样，就可以有无数个战士混进第一道岗了。

14.分卖合卖

倩倩说，一天她看到一个有趣的场面：

一个卖鸡的青年，共有 30 只母鸡和 30 只公鸡，公鸡 5 元 3 只，母鸡 5 元 2 只。

一群买鸡的人，问明了卖价后，有个老人说：“既然母鸡 5 元 2 只，公鸡 5 元 3 只，那就干脆公鸡、母鸡合一起卖，10 元钱买 5 只，我都买下了，省得啰嗦。”

青年一想也对，何不整账整算，一次卖清，自己也省事儿。

于是，便按老人说的办法，把 60 只鸡全部一次卖清。

他总共卖得的钱数是：

10 元×(60÷5)＝10 元×12＝120 元。

可是，人们走后青年又重新合计了一下，他迷惑了，公鸡和母鸡分开卖和合在一起卖，并不相等。

如果分开卖。他应该得到的钱数是：

公鸡应卖钱数是：

5 元×(30÷3)＝5 元×10＝50 元

母鸡应卖钱数是：

5 元×(30÷2)＝5 元×15＝75 元

总计：50 元＋75 元＝125 元

但是刚才合在一起却只卖 120 元呀！

使他想不通的是：为什么少卖了 5 元？

解：事实上，公鸡 5 元 3 只、母鸡 5 元 2 只，与公鸡母鸡合在一起卖 10 元钱 5 只是不相同的。

正确的算法是：

公鸡 3 只 5 元，每只价是：

$5\text{元}\div 3=1\frac{2}{3}\text{元}$

母鸡 2 只 5 元，每只价是：

$5\text{元}\div 2=2\frac{1}{2}\text{元}$

公鸡、母鸡若合在一起卖，每只平均价是：

$$(1\frac{2}{3}+2\frac{1}{2})\div 2=(1\frac{4}{6}+2\frac{3}{6})\div 2$$
$$=4\frac{1}{6}\div 2$$

＝21/12(元)

公鸡 30 只，母鸡 30 只，合在一起是 60 只，总价钱应是：

$$2\frac{1}{12}\times 60=\frac{25}{12}\times 60$$

＝125(元)

15．卖蟋蟀

我国古代曾流行“斗蟋蟀”游戏，一些吃了饭没事干的少爷公子们，还利用斗蟋蟀的胜败进行赌博。

这样，就有了买卖蟋蟀的交易。

一位老人把抓到的 90 只蟋蟀，分给三个儿子，让他们到蟋蟀市场卖掉。

老人为了考考三个儿子的智力。对他们说：“我这儿有 90 只蟋蟀，你们拿去卖掉。老大拿 50 只，老二拿 30 只，老三拿 10 只。卖价高低随你们自己定，但三人卖的价钱要统一，卖的钱数必须是 50 个铜元。”

弟兄三人领走了蟋蟀，好不愁人，蟋蟀相差这么多，卖价要一样，总钱数也要相等，该怎样卖才符合老父的叮嘱？

他们一路走，一路商量。

最后还是聪明的老三想出了办法，他把自己的想法一说出来，立刻得到老大、老二的赞同。

于是他们高高兴兴的来到蟋蟀市场。

最后，果然卖价统一，总钱数相等。便带着各自卖的 50 个铜元，眉开颜笑的去见父亲了。

亲爱的读者，你可知道他们是怎么卖的吗？

解：弟兄三人是这样卖的：

他们各人将自己的蟋蟀按优劣分组出售。把最好的留作余数。每 7 只作一组，于是各人的蟋蟀余数是：

老大的：50÷7＝7……1

老二的：30÷7＝4……2

老三的：10÷7＝1……3

每组的 7 只只整批不零卖，每组 5 元。剩下的上等蟋蟀，每只 15 元，少钱不卖。这样，老大卖的钱是：

5 元×7＋15＝50 元

老二卖的钱数是：

5 元×4＋15 元×2＝50 元

老三卖的钱数是：

5 元×1＋15 元×3＝50 元

正好符合老人的要求：价钱要统一，总钱数要相等。

16.鸡蛋总数

从前有个农妇到集镇去卖鸡蛋，回家后，家人问她一共卖了多少个鸡蛋。农妇说：“没有数，只记得今天遇到的几个买主很有趣。”接着，他讲述了全部过程：

遇上的第一个人，买了全部鸡蛋的一半又半个；后来的一个又买了余下的一半又半个。第三个人又买了篮里余下的一半又半个，最后来的一个人把篮里的鸡蛋全部买去了，他买的鸡蛋数又正好是第三个人买后余下的一半又半个。

可是家里的人，谁也算不出是多少个鸡蛋。

小朋友，你能帮他算算吗？

解：解决这样的问题，必须从结果倒推上去：

第四个人买的是第三个人买后余下的“另一半”又半个鸡蛋，可见篮里只有一个鸡蛋了。

即：

第三个人买后余下：0.5×2=1(个)
第二个人买后余下：(1+0.5)×2=3(个)
第一个人买后余下：(3＋0.5)×2=7(个)
篮里共有鸡蛋：(7+0．5)× 2＝ 15(个)

17.紧急任务

连云港港口武警部队一天接到一个举报电话：在距营部 10 公里的海岸上，有一贩毒团伙。上级指示，必须派 60 名战士一小时内赶到现场。如果步行约需 2 小时，乘汽车也需 20 分钟。但当时只有一辆能坐 30 人的汽车，如果分两次运，来回需 4 趟，也超过了规定时间……

“绝不能让这伙危害人民的坏蛋溜掉。”战士们同仇敌忾。

情况紧急，怎么办？

战士们七嘴八舌，想不出办法。

“有了！”一直在沉思着的指导员忽有所悟的说：“还是乘汽车！按我的办法，60 个战士保证可以准时到达！”

指导员想了个什么办法呢？

解：指导员的办法是：

先用汽车送走 30 名战士，车行 15 分钟后，战士下车步行前进。汽车返回再运余下的 30 名战士，直至出事地点。

这样，60 名战士便可在 1 小时内全部赶到出事现场。

18.童话里的狗

《皇帝的新衣》很多小朋友都读过了，谁能不被那奇特的故事、曲折的情节所吸引！它的引人魅力来源于丰富的想象。

这篇童话是丹麦作家安徒生写的。

他在另一篇《打火匣》里，写了三条狗的故事，也令人叫绝！

他写道：

“……打开第一道门。哎呀！那儿坐着一只狗儿，它的眼睛有茶杯那么大，正在瞪着他。‘你这个好家伙！’兵士说……他走进第二个房间里去，哎呀，这儿也坐着一只狗，它的眼睛大得简直像一对水车轮……随后，他就走进第三个房间里去……乖乖，这可真有点骇人！这儿的一只狗，两只眼睛真正有圆塔那么大！它们在它的脑袋里转动着，‘晚安’兵士说。他把它抱下来放在地上。”

这三条狗，在实际生活中谁也没有见到过，因为，我们用数学的方法，将它们估算一下，它们都大得惊人！

假定普通狗体重 20 千克，眼的直径是 2 厘米，茶杯的直径是 8 厘米，水车轮直径是 4 米，圆塔直径 10 米，你能估算出这三条狗的重量吗？

解：因为要求只是估算，所以可以把狗眼的直径和狗的体积近似的看作成正比例。我们可以先求出它们的体积比。

第一条狗与普通狗体积的比是：

8^3：2^3=512：8=64：1

第二条狗与普通狗体积的比是：

$400^3:2^3$=64000000：8=8000000：1

第三条狗与普通狗体积的比是：

$1000^3:2^3$=1000000000： 8=125000000：1

我们把狗的体重与它们的体积也近似的看成正比例，那么，

第一条狗体重是：

20 千克 × 64=1280 千克

第二条狗体重是：

20 千克×8000000=160000000(千克)

=160000 吨

第三条狗体重是：

20 千克×125000000=2500000000 千克

=250 万吨

世界上哪有这么大的狗！真是不算不知道，一算吓一跳！

这么大的狗，士兵却能“把它抱下来放在地上”，这士兵的力气更大得令人惊奇了！

可是，类似这些生活中根本不可能、不存在的事情，却并不是安徒生的疏忽，而是他有意地运用了夸张手法，运用丰富的想象，有目的地扩大或缩小事物的形象特征，使表达的效果更加强烈。

19.植树比赛

每年的植树节同学们都进行植树比赛。

今年的 3 月 12 日，四年级和五年级负责在一条公路的两旁栽树。

当五年级同学赶到时，四年级已经栽了 3 棵。

五年级同学端详了一下：“你们负责左边的怎么栽到我们这边来了？”

果然栽错了！

“没关系！可以算得清的。”四年级倚仗他们人多，很不在乎。于是移到另一旁从头栽起。

有的挖坑，有的灌水，说说笑笑，干得热火朝天，结果五年级先栽完。为了发扬团结友爱的精神，又帮四年级栽了 6 棵，便全部栽完。

五年级同学非常自豪的说：“怎么样？还是老大哥行吧，咱们虽然栽得晚些，却仍比你们多栽 6 棵！”

四年级同学说：“不对，你们只比我们多栽 3 棵！因为你们右边有我们先栽的 3 棵！”

可是五年级偏说：“多栽 6 棵。”四年级则坚持 6 棵再减去他们先栽的 3 棵，只多 3 棵！”

每棵树的株距都是相等的，但那么长的公路，谁还愿意去一棵一棵的数一遍呢！

那么究竟五年级多栽几棵呢？

解：假定公路左右两旁都栽了 100 棵树。

五年级栽了 97 棵后又栽了 6 棵，共 103 棵。

四年级在右边只栽了 94 棵，加上在左边的 3 棵，总共栽 97 棵。

所以，五年级实际多栽 6 棵(103-97=6)树。

20.物不知数

华罗庚是世界著名的数学家。他出生在江苏金坛。是金坛县中学第一届初中毕业生。

华罗庚在读中学时就显露了他的数学才华。

有一次数学老师王维克讲了一道历史难题：

“今有物不知其数，三三数之剩二；五五数之剩三，七七数之剩二；问物几何？”

王老师说：“这是历史上的一道名题，出自古老的《孙子算经》。后来传到了国外，不知引发了多少数学家的兴趣，也不知绞尽了多少人的脑汁……”

这时课堂上寂静无声，同学们一个个紧张而困惑地思考着。

忽然，一个同学站起来回答：“23！”

大家的目光齐刷刷的集中在那个同学的身上。

他，就是一向不大惹人注意的华罗庚。

王老师十分惊讶，忙问：“你是怎么算出来的？”

华罗庚不慌不忙的讲出了自己的解法。

王老师听了连声称赞：“算得巧，算得巧啊！”

你知道华罗庚是怎样计算的吗？

解：“物不知数”问题，还被称作“鬼谷算”、“隔墙算”、“剪管术”、“韩信点兵”、“神机妙算”等等。国外称作“孙子定理”或“中国剩余定理”。

华罗庚说：“我是这么想的：三个三个的数余二，七个七个的数也余二，那么，总数可能是三乘七加二，等于二十三。二十三用五去除余数又恰好是三，所以二十三就是这个题目所求的数。”

明代数学家程大位在他的《算法统完》里有一道解这类题的口诀：

三人同行七十稀，五树梅花少一枝，

七子团圆正半月，除百零五便得知。

意思是：用三数余 1 作 70，用五数余 1 作 21，用七数余 1 作 15(半月)。将各数和求出后再减去 105，便求得。

其中 70 是 5、7 公倍数中被 3 除余 1 的数；21 是 3、7 公倍中被 5 除余 1 的数；15 是 3、5 公倍数中被 7 除余 1 的数。105 则是 3、5、7 的最小公倍数。如果得数较大，可以连续减去 105。

依此，上题可列式为：

$70\times2+21\times3+15\times2=233$

$233-105-105=23$。

21.高斯算法

哥根廷大学的校园中，矗立着以正十七边形为底座的塑像，他，就是被誉为欧洲的数学王子、德国数学巨星高斯。

高斯在读小学时，解了一道著名的数学难题，传为佳话。

一天，不知是谁得罪了数学教师，使全班同学受到惩罚。老师怒气冲冲命令全班：

“今天，你们给我计算 1 加 2 加 3 加 4……一直加到 100 的总和，算不出来，不许回家吃饭！”

说完，老师坐到一旁，独自看书去了。

同学们都乖乖的埋头写呀，算呀……一个个忙个不停。

当老师刚打开书，准备翻看时，一个小孩拿着写有解答的小板站到他的身旁。

“老师，我做完了，你看对不对？”那孩子说。

做完了？这么快就做完了？老师连头都没抬，连连挥手说：“错了，错了，回去算算。”

可那孩子硬是犟，站着不走，硬说他的答数是对的。

老师定神一看，不禁吃了一惊，小石板上端端正正的写着 5050！一点没错！

这孩子就是高斯，老师再细看他的算式，就更加惊奇，他用的竟是一种独特的解法！这种方法比一个数一个数的相加当然快捷，省时。

你能知道高斯是怎么计算的吗？

解：高斯分析了这些加数的特点，他不是用逐个连加的方法，而是从两头相加，把加法变成乘法来做的：

1+2+3+…………+99+100

=(1+100)＋(2＋99)+……＋(50+51)

=101×50

=5050

这个式中，101 是“首项”与“尾项”的和，50 是 100(项数)的一半。据此，可列成公式：

连续数的总和=(首项+尾项)×(项数÷2)

如果相加的连续数的项数是奇数，还可以更简便为：

总和=中间项×项数

如：

首项			中间项			尾项
⋮			⋮			⋮

12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18

=15×7

=105

22.韩信分油

韩信是汉代的大将，小时候便爱动脑筋，聪明过人。

传说有一天，街上的两个卖油人正在争吵不休。路过这里的韩信，出于好奇，呆呆地看着。他终于明白，原来这两个人合伙卖油，因意见不合，准备把油桶里还剩下的十斤油平分后各奔东西，又为了分油不均而争执不下。

韩信仔细端详着，他们手头没有秤，只有一个能装 3 斤的油葫芦和一个能装 7 斤的瓦罐。他们用油桶倒来倒去，双方总不满意，因而吵嚷起来。

有没有办法把油分精确呢？

韩信面对两个各不相让的卖油人和眼前的油桶、瓦罐、油葫芦，默默沉思着。

忽然眼前一亮，大声说：“你们不要吵了，没有秤，也能够分均匀！”

说着，他把办法告诉了卖油人。

按照韩信的办法，两个人重新再分，果然都很满意。

解：先用油葫芦连装三次，共装 9 斤，将 7 斤的瓦罐注满后，油葫芦里还剩 2 斤。然后将瓦罐的 7 斤再全部倒入油桶，这时油桶里是 8 斤油。再将油葫芦内的 2 斤油全部倒进瓦罐。最后用空葫芦在油桶里灌满(3 斤)，倒进瓦罐。这样，油桶里剩下的油和瓦罐中装的油都正好是 5 斤。双方各分其一，恰好各人所得完全相等。

23.共来多少客

传说有个人因为不讲究说话艺术，结果引起误会，把好事办坏了。

一天，他大摆宴席，请来了一些客人。他看有几位客人还没到，就自言自语地说：“怎么该来的还不来呢？”

客人们听了，心想：“这么说，我们都是不该来的啦！”于是，有一半人悄悄走了。

他一看人走了许多，十分焦急，又说：“嗨，不该走的倒走了！”

剩下的人一听，已走的都是不该走，那么，该走的倒是我们了。于是，又有三分之二的人离开了。

这人一见客人都陆续不辞而别，急得直拍大腿，连连说：“这，这，我说的不是他们！”

最后剩下的 3 人一听，心想：“那定是说我们了！”于是，一个个也拍拍屁股抬腿告辞了。

结果，所有的客人都走光了。

主人见此光景长叹一声，自怨自叹地说：

“不会说话愣请客，鸡鸭鱼肉全白做。”

请问，开始时共来多少客人？

解：把来客总数当作一个整体，第一次走后还剩下总数的$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$。

第二次走了剩下人数的$\frac{2}{3}$，就是走了总数的$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$。

最后余下的 3 人，相当于总数的：

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

所以，客人总数是：$3\div\frac{1}{6}=18$(人)。

24.分配鱼钱

李老汉和张老汉在河里打鱼，眼看天已过午，便决定煮鱼充饥，于是李老汉拿出 5 条鱼，张老汉拿出 4 条鱼，他们在河边煮好了鱼，刚要吃时，有个又饥又饿的过路人，走过来，说，自己实在饿得不行，在这漫野荒郊也找不到饭店……那副可怜巴巴的模样实在令人同情，两个渔翁便同意三个人一块儿分享，于是每人吃了 3 条鱼。

过路人非常感激，留下了 3.6 元钱，继续赶路了。

如果按各人拿出鱼的数量分配这 3.6 元钱，李、张二人该各得多少呢？

解：显然这是道按比例分配的问题。

有人这么想：

李老汉 5 条鱼，张老汉 4 条鱼，鱼的数量比也就是钱数的比，因此 3.6 元钱应 5∶4 分配给两人。

于是列成了下列算式：

李应得：3.6元$\times \frac{5}{5+4}$

$=3.6$元$\times \frac{5}{9}$

=2 元

张应得：$3.6\times \frac{4}{5+4}$

$=3.6\times \frac{4}{9}$

=1.6(元)

实际若这么计算就错了！因为总数是 9 条鱼，每人吃了 3 条。过路人吃的 3 条鱼中有 2 条是李的，只有 1 条是张的。过路人留下的 3.6 元钱应按 2∶1 分配给李、张两人。

正确的算法应该是：

李应得：3.6元$\times \frac{2}{2+1}$

$=3.6$元$\times \frac{2}{3}$

=2.4 元

张应得：3.6元$\times \frac{1}{2+1}$

$=3.6$元$\times \frac{1}{3}$

=1.2 元

25.打捞铁牛

“曹冲称象”的故事，大家都比较熟悉，可是“打捞铁牛”的故事却很少有人知道。

事情发生在很久以前的宋代。

永济县的城门口贴了一张醒目的官府“告示”，上面写着：

黄河泛滥，城外浮桥冲毁。两岸拴桥的八大铁牛亦卷入水中。

为重建浮桥，镇住洪水，有能将铁牛一一捞出者，赏银千两……

告示前围着一堆人仰头观看，议论纷纷。人们常说“重赏之下必有勇夫”，可是“赏银千两”，虽是重金，却没有勇夫。

一条铁牛数千斤重，那时候又没有现代起重机，谁有这么大的力量，能把铁牛拖上来？更何况铁牛还沉没在水下！

有人说：“除非等水退下了，叫几百个人去抬……”

“眼下洪水泛滥，没有铁牛镇住……怎么能等到河水干涸呢？”

官府担忧，百姓也心急。

告示贴出多日，无人敢揭榜应召。

一天忽然来了个穿着宽大法衣面目清瘦的和尚，他认真地读了几遍告示后，便捋起衣袖，伸手揭下告示，将它折叠起来，从容地拿走。

围观的人看着这位身体单薄的光头和尚，一片惊疑，有人鄙夷地问道：“师父，你揭榜是去捞铁牛吗？”

这话还用问吗？和尚没有回答。

有人好奇地问道：“一个铁牛几千斤，八个铁牛数万斤重，师父，莫非有神仙帮助你捞吗？”

和尚淡淡一笑，说：“铁牛是被水冲走的，我就让水再把它送上来。”

这神神秘秘地回答，更让大家捉摸不透。

打捞铁牛的那天，围观的人群黑压压一片。

只见那个光头和尚，请了一些助手，撑着两只木船，果然把铁牛把一个个捞了出来。

后来人们才知道，这位和尚就是著名的工程学家怀丙。

你能知道怀丙是怎样把铁牛从水里捞出来的吗？

解：怀丙和尚的方法是：

将两只木船装满泥沙，直至重量使船舷稍高出水面，并在两船之间横拴着一根粗大的木料，将船划到铁牛沉没的水上停下。

再请水性好的人，带着绳索潜入水底，将绳的一端牢系在铁牛身上，另一端拉紧，绑在两船之间的木料上。

最后，叫人把船上的泥沙扔到河里，这样船的重量减轻了，靠水的浮力，船舷便逐渐高离水面，从而通过木料上的绳索把铁牛提起，吊在水中。这样划动船桨，铁牛便被拖到新建浮桥的地方了。

26.野炊

毕业前夕，少先队举行了一次野营活动。大自然的美妙景色，深深地吸引了每位同学。远山、近水、绿草、红花，连空气都净洁、清爽。大家采标本、听故事、唱歌、说笑，忘记了疲劳和饥饿。

中午开饭时，中队长到负责后勤的老师处领碗。老师问：“你们中队多少人？”

“一共 36 个。”中队长回答。

后勤老师说：“你自己来取，按一个人一个饭碗，两个人一个菜碗，三个人一个汤碗，不准多拿。”

可是中队长被难住了，算了好半天，也不知该领多少个碗。

你能帮帮中队长吗？

解：我们可以这样想：如果按 6 个人一组，每组需要饭碗 6 只，菜碗 3 只，汤碗 2 只，这样每组就需要 6＋3+2=11 只碗。

全班共有 36 人，可以分成 6 组，因而一共需要领碗：

(6+3+2)×(36÷6)=11×6=66(只)

也可以这么想：

一个人需的碗数是：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=1\frac{5}{6}$(只)

这样，全班 36 人共需的碗数用下式可求出。

$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\times 36$

$=1\frac{5}{6}\times 36$

$=\frac{11}{6}\times 36$

=66(只)

27.奇特的墓碑

古希腊是世界文明古国之一。公元 3 世纪时有位数学家叫丢番图，关于他的生平经历，人们无从得知。但是他的墓碑却留下了可贵的资料。这块奇特的碑文，如同谜语，又是一道数学题。碑文的大意是：

过路人：这儿埋着丢番图的骨灰。下面的数目可以告诉你，他的寿命究竟有多长：

他一生的六分之一是幸福的童年。再活了十二分之一，面颊上长起了细细的胡须。丢番图结了婚，还没有孩子，又度过了一生的七分之一。再过五年，他感到很幸福，得了头生儿子。可是命运给这孩子在这世界上的光辉生命仅有他父亲的一半。儿子死了以后，这老头儿在深深的悲痛中又活了四年，也结束了尘世的生涯。

请告诉我，丢番图究竟活到多大岁数，才和死神相见。

这块奇特的碑文，数千年来一直引起人们的极大兴趣。根据这个碑文，人们已经把这位伟大的数学家年龄、家庭经历都一一推算出来。

如果你发现了这块碑，是否也会推算？

解：设丢番图活了 x 岁，则：

童年时期为 $\frac{1}{6}x$

青年时期为 $\frac{1}{12}x$

没有孩子的夫妻生活是 $\frac{1}{7}x$。

儿子的年龄为 $\frac{1}{2}x$

根据题意，可列如下方程：

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+4=x$$

$$\left(\frac{2}{12}x+\frac{1}{12}x+\frac{6}{12}x\right)+\frac{1}{7}x+9=x$$

$$\frac{3}{4}x+\frac{1}{7}x+9=x$$

$$\frac{25}{28}x+9=x$$

$$x-\frac{25}{28}x=9$$

$$\frac{3}{28}x=9$$

x=84

由此可知，丢番图的生活经历是：

童年：$84\times\frac{1}{6}=14$(岁)

青年：$14+84\times\frac{1}{12}=21$(岁)

没有孩子夫妻生活了：

$84\times\frac{1}{7}=12$(年)

生孩子时的年龄：21＋12＋5=38(岁)

儿子的年龄：$84\times\frac{1}{2}=42$(岁)

儿子去世时丢番图年龄：38+42=80(岁)

丢番图见死神时年龄：80＋4=84(岁)。

谜一样的墓碑就这样被解开了，尽管岁月沧桑，淹没历史，但是，这位古希腊数学家一生的重要时刻，我们总算能略知大概。

28.科学施工

宋代真宗在位时，传说皇宫曾遭到一次大火，一夜之间，繁华壮丽的宫室楼台殿阁亭榭变成了一片废墟。

大火之后，宋真宗派晋国公丁谓主持修缮工程。

皇宫地处整个城市的腹心位置，人口密集，交通拥挤，面对这项重大工程，必须解决三大问题：第一，要把大火留下的大量废墟垃圾进行清理；第二，要运进大批的木、石等建筑材料；第三，要有大量的新土供施工使用。而且在施工过程中不能影响城内的交通和生活秩序……

面对这些复杂而棘手的问题，丁谓反复思索，终于设计出一套科学的施工方案，十分圆满地解决了问题。

请你也设身处地考虑一下怎样才能把上述问题妥善解决？

解：丁谓的施工方案是：

首先，从施工现场向外挖了若干条大深沟，把挖出来的土作施工备用，解决了新土问题。

第二步，把汴河水从城外引入新沟，新沟便成了一条水上运输线，木料、石料便可用木排和船运进建筑工地，解决了运输问题。

第三步，建筑材料备好后，便将大沟中的水排出，把废墟垃圾填入沟中，使大沟重新成为平地。

于是，下一步便可按部就班地进行施工了。

这个施工方案蕴含着运筹学的思想，不仅节约了时间和经费，还保证了工地秩序有条不紊。

29.检验王冠

传说古希腊的国王，想制一顶与泰尔的王冠一模一样的纯金王冠，便召见一位高明的首饰匠，向他说明了旨意，并如数让他称走了黄金。

过了一段时间之后，首饰匠如期将王冠交来，外表金碧辉煌，确实与泰尔的王冠完全相同，重量也恰如取走的黄金。国王按照自己原先的许诺，给了首饰匠重重的奖励。

但是那个首饰匠的举止行动像个骗子，被取去的黄金会不会偷换下来而掺进了别的金属？面对这个金色的王冠，国王的心一下子冷了！但是不把王冠熔化，又怎能判定黄金中是否掺了假？这么美丽辉煌的王冠，又怎么舍得再熔化？国王被这个难解的疑团日夜缠绕，寝食不安，终于卧病不起。

最后，他召见了阿基米德。

阿基米德是当时最著名的智者。国王把这个难题交给了他：必须检验王冠是不是纯金制造，却又不准损坏王冠的一丝一毫。

阿基米德苦思冥想，把所有想到的办法，都作了尝试，然而仍不能揭开王冠的秘密。他忘记了饮食、睡眠，忘记了洗澡、治病，痴痴迷迷，连梦中都叨念着：“王冠……国王……首饰匠……银子……金子……”

几个星期以后，阿基米德蓬头垢面，妻子把他赶进了浴室里。

当阿基米德浸入水中之后，突然感到自己的体重减轻了，只要轻轻用力，身体就能浮起……此时，他满脑袋的仍是王冠……国王……首饰匠……金子……银子……。身体一会儿沉下，一会儿浮上，浴盆的水位也一会儿升，一会儿降……

阿基米德忽翻身跳起，大声高呼：“有办法了，有办法了！”连衣服也没穿，光着身子直向王宫奔去，路上留下一条湿漉漉的足迹……

你知道，阿基米德从水的浮力中得到了什么启示吗？

解：阿基米德根据身体在浴缸中沉浮引起了水位升降的道理，取了一只盛满水的容器，将王冠放进水中，容器里的水必然溢出。他把溢出的水收集在另一个容器里。

接着他将一块与王冠同样重的纯金，也放进那个盛满水的容器中，再把溢出的水收集起来。

如果王冠是纯金制成的，那么两次溢出的水应该同样多，可是王冠排出的水，与纯金排出的水并不同，说明王冠中掺进了比重与纯金不同的材料，从而断定金冠中被掺了假。

阿基米德终于解决了难题。狡诈的金匠因此受到了惩罚。

30.王冕取环

元代的大画家王冕，小时候家境贫苦，没有书读，常常独自躲在学堂门外，听先生讲课。他聪明刻苦，放牛时，牛儿去吃草，他便独自在池边用树枝作笔，大地为纸，临摹池中荷花。最终成为远近闻名的大画家。

传说，他小时曾为一个财主当雇工，讲明的条件是：每月以一个银环作工钱。

当王冕做完了一个月工作后，财主却拿了一串银环出来，在他面前晃了晃，说：“喏，这都是你的工钱，但是有个条件：这七个银环只准断开其中一个，你每月也只能取走一个。当月付清当月的工钱，不拖不欠。假如你违反规定，不但捞不到工钱，还要把已经付出的全部收回。”

王冕一听，这显然是在刁难他。但是穷人又上哪去讲理？他只得答应照办。

为了挣钱活命，他每天一面给主人辛勤劳动，一面思考着怎样才能按月取走工钱。

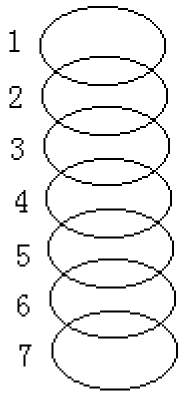
后来，他终于想到了办法，在七个银环中只断开一个，以后每月都如数地取走一个银环的工钱。

王冕用了什么办法呢？

解：

王冕取第一个月的工钱时，断开了第三个环。并将第三环取走。

第二个月将第一个月取走的银环退回，换走第一、二两个连接在一起的银环。



第三个月再把断开的那只银环取走。

第四个月用前三个月领得的三个银环，换回 4、5、6、7 四个银环。

第五、六、七几月的取法分别与第一、二、三月取法相同。

31.牧师的诡计

一次海上航行，突然遇上了风暴。木船在汹涌的波涛中摇摇欲坠。船上的 24 名乘客顿时惊慌失措。

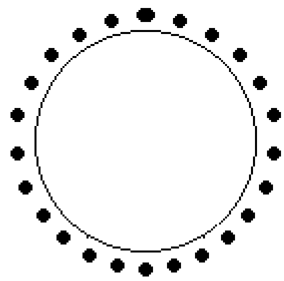
为了保全性命，乘客们把所有的行李都抛入大海，以减轻船的重量，但是被巨浪击坏了的船舱，仍然载不起那么多的乘客。根据船体情况判断，人员超重太多。这就是说，要么所有的人同归于尽，要么把一部分人抛进大海，这样另一部分人还有得救可能。

商议的结果，大家一致同意第二种意见，即一部分人跳海。可是却又没有人主动跳海。

乘客中有十五个基督教徒和一个牧师，他们也不愿主动跳海。

最后大家公推牧师想办法。

那位牧师为难地皱着眉头，两手一摆，说：“死生由命，听耶稣的安排吧！咱们围坐成圆形，依次 1、2、3 循环报数，凡报‘3’的，就应被抛进大海。”



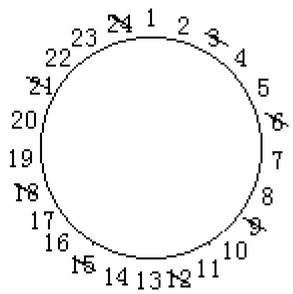
众人想，不这么做反正也是死，便都同意了。

于是牧师把乘客们安排成圆环坐好，指定一人先报“1”，接下去 1、2、3、1、2、3，一直排下去。就这样，凡报到“3”的都被无情地抛进汹涌海浪之中，上帝的旨意，谁也不能违抗。

直到最后只剩下 16 个人，全部都是基督徒。

那些无知的人，以为真是命里注定的。谁也不曾想到这一场性命的赌博，却是牧师用他的数学知识在安排坐次位置上埋下了诡计。

解：牧师在安排座位之前动了一番脑筋，他把基督徒全部排在 24 个数中 1～3 循环，总是轮不到“3”的位置上。(如图)



32.“金锁链”的数学

“金锁链”又叫“环球通讯”、“横传信函”等，它的创始人据说是美国的一个失业青年。

这位青年穷困潦倒，流浪社会，最后身上只剩下 1 美元的钞票，眼看就要活不下去了！

为了生存，他时刻考虑着怎样赚钱。

最后，他忽发奇想：利用他的数学知识，以 1 美元作资本，作一次环球通信，从而摆脱了困境。

做法大体是这样的：

他用 1 美元买了信封、邮票，向他了解的人发出 10 封信，信中要求：

凡是接到信的人，五天内再按照同样要求和内容，发给自己所了解的人 10 封信，并给排在前三位的人每人寄去 3 美元，同时去掉第一位，并把自己的名字排在前 10 人的后面。以后，第二批人、第三批人再接到信，仍然都照

此办理，如此无限地延续下去。

如果凡接到信的人都照办不误，没有中断，这样，参与的人都只投少量的钱，却可得到大笔的钱。假定写信人是第三批，当他升到第三位时可得到 30 美元，上升到第二位时可得到 300 美元，上升到第一位时便可得到 3000 美元。

他这样说法，有道理吗？

解：如果参加的人，人人都照办不误，从纯数学的角度上讲，是有道理的。

假定发起人排在第一位，他将收到 10 个人寄来的钱，共 3 美元×10=30 美元。第二位、第三位每人也都得 30 美元。当第二批人发信时，去掉了原排在第一位的人，将自己排在末位。此时第二位上升为第一位，递升上来的第二、第三位每人都应得到 3 美元×10×10=300 美元。

当第三批人发信时，第一至第三位每人都应得到 3 美元×10×10×10=3000 美元，此时再去掉第一位。将写信者补排在末位。

到第四批人发信时，最初次排在第三位的，已上升到第一位，此时他便得到 3 美元×10×10×10×10=30000 美元。

事实上，因为种种原因，不可能人人都照办不误，而且越到最后，越是大批的人向外掏钱，只有少数几人能够得利。

以每人发 5 封信为例如下图：

有人为了迫使参与人照规定办，甚至赌咒发誓，用迷信来威吓恫吓，使得这一活动荒诞不经，毫无意义了。

33.玩具猫之谜

两位美国专家去埃及参观金字塔。

一天，工程专家独自在街头闲逛，忽见一个老妇人卖一只非常精致的玩具猫。标价 500 美元。

那老妇人说：“这是自家祖传宝物，眼下只因孙子病重，无钱住院，才不得已拍卖的。”

专家用手掂了掂，猫体很重，全身黑色，像是黑铁铸成，一双眼炯炯有神，凭着他丰富的知识，断定这两只眼确实是两颗货真价实的珍珠。

工程师说：“我只买下两只猫眼，给你 300 美元，可以吗？”

老妇人同意了。

工程师高兴地回到宾馆，对同伴说：“我只花了 300 美元，便买下了这两颗硕大的珍珠。”

这位同伴是个逻辑学家，见这两颗大珍珠，少说也值上千美元。便问：“是怎么回事？”

工程师如实讲述了事情的经过。

听完了工程师的叙述后，逻辑学家二话没说，飞快地奔向街头。

一会儿工夫，拿着那没了双眼的黑猫回来了。

“多少钱？”工程师问。

“200 美元。”逻辑学家答，“标价 500，已卖 300，再给她 200 美元，

卖主不是如愿以偿吗！”

工程师不禁嘲笑地说：“你真愚笨，这没了双眼的铁猫，怎么能值 200 美元呢？”

逻辑学家没说话，只是用手不停地掂摩他的黑猫。

“上当了吧？”工程师仍不停地说三道四。

逻辑学家胸有成竹，态度从容，只是不说话。突然他灵机一动，拿出小刀，细心地刮着猫脚。当一层黑色脱落后，他一阵惊喜：“你瞧，我上当了吗？”工程师一见，惊得目瞪口呆，原来愚蠢的正是自己，赚了大钱的却是逻辑学家。

你知道，这是为什么吗？

解：原来这只黑猫通体是用纯金铸就的。铸造这只金猫的主人，怕金身暴露，便用黑漆将猫身涂盖起来，外表酷似黑铁。

工程专家虽然知识渊博，能识别真假珍珠，可是他缺乏逻辑学家的思维艺术，分析、判断不全面不深入。

在逻辑学家看来，玩具猫是个整体，既然猫眼是用珍贵的珍珠做成，那么猫体不会用黑铁这种不值钱的金属铸造，表面的颜色很可能是假象。事实证明逻辑学家的判断是正确的。

34.什么、多少

一天，商店的王伯伯讲了一个有趣的故事。他说：“有一次，来了一个奇怪的顾客，问他买什么，他不说名称，却顺口说了一道谜语：

大哥说话先喝水，二哥说话先挨刀，

三哥说话口流油，四哥说话雪花飘。

“我本来就是个猜谜能手，”王伯伯自豪地说，“他哪能难住我！我便拿出了他要买的四样东西，问他各要多少，他随口说了个顺口溜：

一支半、两支半，

三支半、四支半

再加八支请你算。

我又如数的清点出来。

“一共多少钱？”他终于说话了。

王伯伯说：“这回轮到我难他了，多少钱么——

一二三，三二一，

一二三四五六七，

七加八，八加七，

九加十分加十一。

这些数，先算好，

再乘三十一便知晓。

不料，这人头脑真灵，只一会儿功夫，便把钱如数清点给我了。”

小朋友，你能知道来人买的东西、数量和花的钱数吗？

解：来人买的四样东西是：钢笔、铅笔、圆珠笔、粉笔。笔的数量和价钱用的都是加法。共 20 支。共用钱 31 元。

35.考儿媳

传说清代有位田大人，因老伴体弱多病，他决定在儿媳中选一个精明能干的代管家务。

他有四个儿子，只有小儿子尚未娶亲。

一天正是二月二儿媳妇回娘家的日子，田大人吩咐三个儿媳说：“大媳妇回去住半个月，来时给我捎回二斤骨包肉；二媳妇回去住三五天，回时捎二斤肉包骨；三媳妇回去住七八天，回来时稍二斤没肥、没瘦、没骨、没肉来。你们一起走，同时回，谁也不能耽误！”

在旧社会，长者的话就是命令，谁都不能违拗。

三个儿媳一同回娘家，岔路口要分手时，约定在这里等齐一块回家。可是仔细一想，有的住半个月，有的住三五天，有的住七八天，怎能在同一天回来呢？再想想公公要捎回的东西，那么奇巧，到哪里去寻？禁不住坐了下来唉声叹气。

一会儿有位过路的聪明姑娘，见状忙问：“三位嫂子是什么事这么愁眉苦脸泪眼汪汪的？”

妯娌三人便把公公吩咐的话如实相告。

不料，那位姑娘说：“这有什么难的？”说罢，便入情入理地讲了出来。

妯娌三人听了顿时眉开眼笑，十分感谢姑娘的指点，便问那姑娘：“姓什么？家住哪？”

那姑娘嫣然一笑，说：“我姓一月二十九，到期我就走，家住二三里，空空树，门前有个磕米虫，房上有根空心柱。”说罢，飘然而去。

后来三个媳妇准时回家，并按要求给公公捎来了他要的东西。田大人知道了是过路姑娘的指点，急忙托媒人找到那个姑娘提亲，姑娘答应了这门亲事，不久做了田家的四儿媳妇，代替婆婆掌管了家务。

请问，这姑娘姓什么？家住哪？他向三位媳妇说了些什么？

解：从“一月二十九，到期我就走”，推知姑娘姓“赵”，因为二十九是小月，小月加走，便是“(赵)”。

“家住二三里”，二三得六里，“空空树”，即树中空，是“村”，是说姑娘在“六里村”。“磕米虫”是碾子，“空心柱”是烟囱，是说她家门前有盘石碾，房上有个烟囱。

姑娘向三妯娌说：“半月是十五天，三五一十五也是十五天，七加八也是十五，公公是要他们住十五天便回来，大媳妇带二斤核桃，二媳妇带二斤红枣，三媳妇带二斤猪血。”

36.阿基米德的墓

当叙拉古与他的盟国罗马共和国分裂后大动刀兵时，阿基米德已到了晚年。

当时面对气势汹汹前来围城的罗马舰队，阿基米德负责城防工作，他不与敌人作正面的武力较量，而是用自己的智慧与敌人周旋。敌人的军舰兵临城下，摇旗呐喊，他却用自己高超的智力设计出一种投火器，能将燃烧的物品弹出去烧毁敌人的船舰。又制造一种起重机械把敌人的船只吊起掀翻，打得敌人胆战心惊，以至后来敌舰不敢靠近城墙，只要看见城墙上出现像绳子之类的东西，便吓得迅速逃跑。

然而，长时间的围困，城内的供给终成问题，三年后城还是被攻破了！

据说，罗马的士兵入城时，统帅马塞拉斯出于对阿基米德的敬佩，曾下令不准杀害这位智力高超的贤人。

当时阿基米德仍在沉迷于数学的深思之中，一个罗马士兵突然出现在面前，命他到马塞拉斯那里去，这位伟大的爱国者怎肯向敌人低头呢？于是不幸死在了这个士兵的屠刀下。

另有一种说法是：当罗马士兵闯入阿基米德住宅时，见一位老人正埋头作图，士兵将图踩坏，将他拖走。阿基米德不顾生命安危，愤怒大喊：“不要弄坏我的图！”士兵拔出短剑，刺死了这个顽抗的老人。这位旷世奇才的大科学家，就这样被一双愚昧无知的手扼杀了！

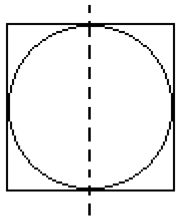
消息传到罗马军统帅马塞拉斯的耳中，他十分悲痛，将那个士兵当作杀人犯进行处决，并为阿基米德修建了陵墓，立了墓碑。

随着时间的流逝，阿基米德的陵墓已被荒草湮没。一百余年后，有人在游历叙古拉时，在荒草中发现了一块刻有“圆柱容球”图案的墓碑，断定它就是阿基米德的陵墓，并重新作了修复。

你知道，发现者为什么根据圆柱容球图案便断定是阿基米德的陵墓吗？

解：阿基米德在他的许许多多科学发现中，以圆柱容球最为得意。生前，曾表示将它刻在自己的墓碑上。马塞拉斯在修建他的陵墓时，便根据他的遗愿在墓碑上刻上了“圆柱容球”的几何图案。

关于圆柱容球的定理是这样的：



如图所示，圆及其外切正方形绕圆中由虚线表示的对称轴旋转一周生成的几何形体，称为圆柱容球。

在“圆柱容球”中，球的体积是圆柱体积的$\frac{2}{3}$，球的表面积也是圆柱表面积的$\frac{2}{3}$。

这个定理的正确性可作如下证明：

设：圆的半径为 R，球的体积为 $V_{球}$，圆柱的体积为 $V_{柱}$，球的表面积为 $S_{球}$，圆柱的表面积为 $S_{柱}$，则有，

$V_{柱}$=底面积×高=$\pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$

$$V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}V_{柱}$$

S 柱=侧面积+上下底面积

$=2\pi R \cdot 2R + 2 \cdot \pi R^2$

$=6\pi R^2$

$$S_{球} = 4\pi R^2 = \frac{2}{3}S_{柱}$$

37.斐波那契数列

斐波那契是意大利的数学家。他是一个商人的儿子。儿童时代跟随父亲到了阿尔及利亚，在那里学到了许多阿拉伯的算术和代数知识，从而对数学产生了浓厚的兴趣。

长大以后，因为商业贸易关系，他走遍了许多国家，到过埃及、叙利亚、希腊、西西里和法兰西。每到一处他都留心搜集数学知识。回国后，他把搜集到的算术和代数材料，进行研究、整理，编写成一本书，取名为《算盘之书》，于 1202 年正式出版。

这本书是欧洲人从亚洲学来的算术和代数知识的整理和总结，它推动了欧洲数学的发展。其中有一道“ 兔子数目 ”的问题是这样的：

一个人到集市上买了一对小兔子，一个月后，这对小兔子长成一对大兔子。然后这对大兔子每过一个月就可以生一对小兔子，而每对小兔子也都是经过一个月可以长成大兔子，长成大兔后也是每经过一个月就可以生一对小兔子。那么，从此人在市场上买回那对小兔子算起，每个月后，他拥有多少对小兔子和多少对大兔子？

这是一个有趣的问题。当你将小兔子和大兔子的对数算出以后，你将发现这是一个很有规律的数列，而且这个数列与一些自然现象有关。人们为了纪念这位兔子问题的创始人，就把这个数列称为“ 斐波那契数列 ”。

你能把兔子的对数计算出来吗？

解：可以这么推算：

第一个月后，小兔子刚长成大兔子，还不能生小兔子，所以只有一对大兔子。

第二个月后，大兔子生了一对小兔子，他有了一对小兔子和一对大兔子。

第三个月后，原先的大兔子又生了一对小兔子，上月出生的小兔子也长成了大兔子，他共有一对小兔子和两对大兔子。

第四个月后，两对大兔子各生一对小兔子，上月出生的小兔子又长成了大兔子，他共有两对小兔子和三对大兔子。

第五个月后，三对大兔子各生一对小兔子，上月出生的两对小兔子也长成了大兔子，他共有三对小兔子和五对大兔子。

……

以此类推，可知：每月的小兔子对数等于上月大兔子的对数，每月大兔子的对数等于上月大兔子与小兔子的对数之和。

我们把大小兔子的对数写成上下两行，从买回小兔子算起，每个月后他所拥有的兔子对数便是：

月数	一	二	三	四	五	六	七	八	九
小兔对数	0	1	1	2	3	5	8	13	21
大兔对数	1	1	2	3	5	8	13	21	34

仔细观察两行数发现它们是很有规律的：每行数，相邻的 三项中，前两项的和便是第三项。

有趣的是：雏菊花花蕊的蜗形小花，有 21 条向右转，有 34 条向左转，而 21 和 34，恰是斐波那契数列中相邻的两项；松果树和菠萝表面的凸起，它们的排列也分别成 5∶8 和 8∶13 这样的比例,也是斐波契数列中相邻两项

的比。

这个数列不仅在数学、生物学中，还在物理、化学中经常出现，而且它还具有很奇特的数学性质，真是令人叫绝！

38 .数学家高斯

高斯(1777～1855 年)是继阿基米德和牛顿之后，世界上最伟大的数学家之一。在超几何级数、复变函数、统计数学和椭圆函数论等方面，都作出了十分重大的贡献。在天文学、测地学、电磁学等方面也取得很大成就，并联系这些工作建立了最小二乘法、曲面微分几何、势论等重要的数学理论。关于向量分析的定理、代数基本定理的证明、质数定理的验算等也作出著名的贡献。他还是非欧几何的创始人之一。

高斯出生于法国布伦瑞克的一个农家。早在童年时代，就表现出非凡的数学天才。3 岁就学会了数学，10 岁时就用简便计算回答了 1 到 100 连续相加的问题。1795 年进入了他向往已久的哥廷根大学学习,1801 年他的巨著《算术研究》问世，对后来的数学发展产生了重大影响。他的《曲面的一般研究》是微分几何发展的一个里程碑。他的著作很多，留下的遗著直到二战前夕，才由哥廷根大学的学者们研究整理，出版了高斯全集，共十一卷。

高斯一生中，培养了一些杰出的数学家。他对数学的深刻理解和深刻的数学思想，吸引了大批优秀青年为数学献身。高斯的形象成为数学告别过去走向现代数学时代的象征。人们称他为“数学之王”，便是表明他的成就和崇高威望。

1855 年高斯在他的阿根廷寓所与世长辞了，后人给他的墓碑基石制成了正十七棱柱形。你知道，这是为什么吗？

解：从欧几里德时代起，人们就对正多边形的尺规作图问题进行了大量的研究。

正三角形和正四边形很容易只用圆规、直尺将图作出，对正五边形，人们也会用黄金分割的方法，用尺规作图，但当正多边形的边数是 7、9、11、13、17、19 时，能不能用尺规作图，却长期得不到解决。

1796 年，年仅 19 岁的高斯却使数学界发生了一件轰动一时的新闻：一个两千多年来一直悬而未决的关于正十七边形的尺规作图难题，被他解决了！

把高斯墓碑的基石刻成正十七边形，正是纪念他在青年时代的最重要的数学发现。

1989 年 7 月在高斯的故乡举行第 30 届国际数学奥林匹克赛，会徽也是正十七边形，中间镶着高斯的头像，同样是纪念这位为数学作出重大贡献的伟人。

39.算筹的故事

如果历史能够像电影胶卷那样可以倒转，我们将会看到——

三国时期，数学家刘徽席地而坐，他正在全神贯注地计算着圆周率。从圆内接正六边形，日复一日，直算到圆内接正 192 边形。他把圆周率算到了 3.1410。帮他完成这些计算的，是手中那一把小棒棒。

南北朝时期，科学家祖冲之运用刘徽的方法，也在埋头计算。他把圆周率计算到了小数点后面第七位，并断定圆周率在 3.1415926～3.1415927 之间。这么精密的计算，也是靠着手里那一把小棒棒！

你也许要问：这神奇的小棒是什么？

说起这种小棒，人们还记得一次考古发现。

一九七八年八月，陕西省千阳县城东北的一个建筑工地，挖地基时意外地发现了一座古墓。考古学家认定是西汉时期的墓葬，从那里挖出了陶罐、古钱、铜镜、铜铃等等生活用品。令人奇怪的是，在墓主人的腰部还发现一个丝绢囊，里面装着一把像筷子样的小棒棒。但是，若真是筷子，为什么却又不和生活用品放在一起？墓主人把它系在腰间，可见是珍贵的。然而它既不是金银，也不是珍宝，仅仅是用一些兽骨精磨而成的。

后来经过考古学家认真研究，终于弄明了真相，并且发现它与算盘的发明有一定的关系。

你知道这是怎么回事吗？

解：原来这是古代的一种叫做“算筹”的计算工具。它可以表示任何自然数，还能够进行加、减、乘、除、乘方、开方等复杂的计算问题。刘徽和祖冲之用的正是这种称为“算筹”的小棒。

当时，人们对“算筹”是非常珍视的。木、竹、骨都可以制。为了减少反复制作的麻烦，方便携带，还专门做了算袋或算子筒。那位墓主人腰间的丝绢囊，正是装“算筹”的算袋。

随着社会的进步，生产的发展，需要计算的数字越来越大。“算筹”用起来就显得很不方便了。为了避免算筹的丢失，减少在地上摆放搬移筹棒的麻烦，人们便设法使“算筹”连结到一起，固定在一定的物体上。于是，便想出了用一粒粒算珠代替筹棒，用细棒把算珠穿起来，固定在木框上，用手指拨动算珠代替移动筹棒。这样“算盘”就发明了！

如果把“算筹”和算珠表示数的方法，作一比较，将会发现：它们是多么相似啊！

最初的算盘是什么样子，也无法知晓。明代初年的算盘，中间是一根细木片将上下珠隔开。明代中叶，横梁(隔片)才加固渐宽。明朝末年的算盘，已和近代相同了。

到了现代，人们为了减少拨珠清盘的麻烦，对算盘又作了一些改进。由原来上档两株变为一珠，并加上了清盘装置。算珠的形状、大小更适于操作。于是，古老算盘作为中华民族的瑰宝，仍以它特有的功能，与现代计算器并肩携手摆放在财会人员的办公桌上。

40.计算工具的历史

在漫长的历史长河中，随着社会的发展和科技的进步，人类进行运算时所运用的工具，也经历了由简单到复杂，由低级向高级的发展变化。这一演变过程，反映了人类认识世界、改造世界的艰辛历程和广阔前景。

现在我们溯本求源，看一看计算工具是怎样演化的：

1.石块、贝壳计数

原始社会，人类智力低下，当时把石块放进皮袋，或用贝壳串成珠子，

用“ 一一对应 ”的方法，计算需要计数的物品。

2.结绳计数

就是在长绳上打结记事或计数，这比用石块贝壳方便了许多。

3.手指计数

人类的十个手指是个天生的“ 计数器 ”。原始人不穿鞋袜，再加上十个足趾，计数的范围就更大了。至今，有些民族还用“ 手 ”表示“五 ”，用“ 人 ”表示“ 二十 ”，据推测，“ 十进制 ”被广泛运用，很可能与手指计数有关。

4·小棒计数

利用木、竹、骨制成小棒记数，在我国称为“ 算筹 ”。它可以随意移动、摆放，较之上述各种计算工具就更加优越了，因而，沿用的时间较长。刘徽用它把圆周率计算到 3.1410，祖冲之更计算到小数点后第七位。在欧洲，后来发展到在木片上刻上条纹，表示债务或税款。劈开后债务双方各存一半，结帐时拼合验证无误，则被认可。

5.珠算

珠算是以圆珠代替“ 算筹 ”，并将其连成整体，简化了操作过程，运用时更加得心应手。它起源于中国，元代末年(1366 年)陶宗义著《南村辍耕录》中，最初提到“ 算盘 ”一词，并说“ 拨之则动 ”。十五世纪《鲁班木经》中，详细记载了算盘的制作方法。

到了现代，一种新型的电子算盘已经问世，它把算盘与电子计算器的长处集为一体，是一种中外结合的新型计算工具。

6.计算尺

公元 1520 年，英国人甘特发明了计算尺，运用到一些特殊的运算中，快速、省时。

7.手摇计算机

最早的手摇计算机是法国数学家巴斯嘉在 1642 年制造的。它用一个个齿轮表示数字，以齿轮间的咬合装置实现进位，低位齿轮转十圈，高位齿轮转一圈。后来，经过逐步改进，使它既能做加、减法，又能做乘、除法了，运算的操作更加简捷、快速。

8.电子计算机

随着近代高科技的发展，电子计算机在二十世纪应运而生。它的出现是“ 人类文明最光辉的成就之一 ”，标志着“ 第二次工业革命的开始 ”。其运算效率和精确度之高，是史无前例的。在此之前，英国数学家桑克斯用了 22 年的精力，把圆周率π算到小数点后 707 位，以至在他死后，人们在其墓碑上刻着π的 707 位数值，表达了对他的毅力和精神的钦佩。

请问：假如桑克斯使用现代的计算机只需多长时间可完成演算？

解：电子计算机是由电子原件构成的，具有逻辑运算和数字运算功能的计算工具。世界上第一台计算机是二十世纪四十年代诞生的。当时体积大得如几间房屋。至二十世纪七十年代，出现了晶体管计算机，继而产生了第三代集成电路和大规模、超大规模集成电路的第四代计算机。目前已出现接近人脑功能的第五代计算机(机器人)。它每秒钟能进行千万次的运算。桑克斯手工花 22 年光阴完成的运算，若使用现代的电子计算机只需数秒钟即可完成。

目前，一种新型的电子计算笔已经问世。它能将书写运算式子的结果立即在晶液显示管中显示出来，而且能储存笔迹。若在银行存款，可使作伪冒

领者无机可乘！

拼移智慧

解决各种拼移问题，常常需要巧妙思维，打破常规，跳出圈子，因势利导，独辟蹊径，才能在看似“不可能解”的问题中，找到“可能”，进行巧妙的分割、接拼。

阅读了本章的内容，相信对你解决实际问题会有一定的帮助。

拼移图形是一种技巧和智慧。

几根火柴棒组成一道算式或一个图形，本非难事。可是只移动一根或几根，使它变成一个全新的算式或图形，却并不容易。

将一个图形分割成几块拼成新的图形，或是将几个图形拼成一个图形，假如都是规则形，也许不难。问题是有些图形与新拼的图形有天壤之别，常常是变曲为直，或变直为曲，而又要拼接得天衣无缝，就更非易事了！

这就需要仔细观察，认真思考。

别看这些好像很不起眼的“小杂耍”，可是它却蕴含着深刻的道理，隐藏着重要的实用价值。

在日常生活和生产实际中，经常有一些难题。然而常常见到甲是难题，碰到乙便轻而易举地解决了。

人们常说“木匠手下无废材”。为什么废材到了木匠的手里便成了有用之材呢？就是因为木工师傅有丰富的实际经验。什么木头够什么料，一眼就看清了。工厂里的下料，工艺美术的图案设计……都离不开拼移技术。

将来我们都要走向工作岗位，不论是从事农业生产还是进行科学研究，都不可避免地会遇到各种各样的问题。缺乏锐敏的观察力和分析判断本领，是难以应付纷繁的生活实际的。

脑筋愈用愈活。

我们研究各种拼移趣题，就是要活跃头脑，丰富实践，使我们变得“心灵手巧”。

解决各种拼移问题，常常需要巧妙思维，打破常规，跳出圈子，因势利导，独辟蹊径，才能在看似“不可能解”的问题中，找到“可能”，进行巧妙的分割、接拼。

阅读了本章的内容，相信对你解决实际问题会有一定的帮助。

1.摆直角

有人问智者：“给你三根小棒，你能摆多少个直角？”

智者回答道：“最少可摆两个，最多可摆 12 个，还可以摆 4 个，5 个，6 个，8 个。”

你知道他是怎么摆的吗？

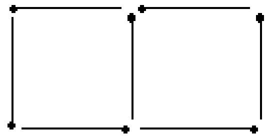
解：

2.排正方形

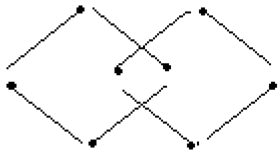
用 4 根火柴棒可以排一个正方形。

如果用 7 根排两个正方形、用 8 根排三个正方形，该怎么排？

解：把两个正方形连在一起排，只用 7 根便可排成两个正方形(如图)：



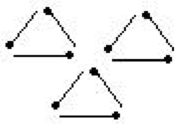
用 8 根火柴棒排出三个正方形，就要很好地动动脑筋了。



你是怎么排的？

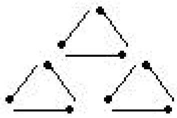
3.三个三角形

用 9 根火柴棒排成了三个三角形(如图)。仍用这 9 根火柴棒，排成五个三角形，该怎样移动？



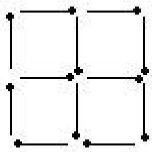
解：把下面的一个三角形移在上面，即可。

这样，外边是一个大三角形，里边是四个小三角形，一共便是五个三角形了。



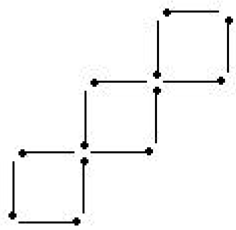
4.破四为三

下图是用 12 根火柴棒摆成的，图中共有大小五个正方形。



现在要求移动 4 根火柴使它变成三个相同的正方形。

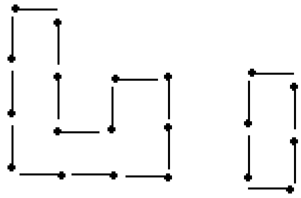
解：不可能将里面的 4 根火柴移出来，否则便无论如何也摆不成三个相同的正方形了！确定移动“边”上的四根，破坏了两个正方形，再利用移动的 4 根，另排一个正方形，便符合题目的要求了。



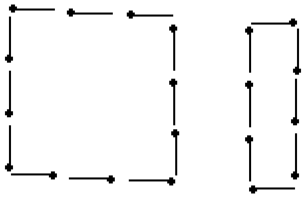
5.调整图形

下面两个图是用 20 根火柴棒排成的，面积比为 3∶1。现在要调整两个图形，只需从大的中移出两根到小的中，使重新排出的两个图形，面积比不变。

应当如何调整？



解：从大的中移动 2 根到小的上，小的图形便有 8 根了。若围成正方形则太大，面积比不能实现，故可排成下图：



6.只移一根(一)

下列算式都是错误的，你能只移动一根火柴棒使等式成立吗？

①

②

③

解：解火柴棒算式，要先认真观察各数间关系，比较它们的大小。根据原式的误差数进行调整。上面各式可变化为：

①

②

③

7.只移一根(二)

下列算式也都是错误的，但每道算式中只需移动一根，等式便能成立，你能做到吗？

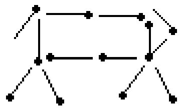
①

②

③
④
⑤
解：各题可分别使数字成为：
①4＋7＋1=12。将原式 2 取下 1 根放在减号上。
②114-72=42。将原式“＋”取出一根加入 12 的“1”上。
③21-11＋1=11。将原式“7”上取出一根放在和上。
④14＋1-11=4。将原式中 1 取出放在“＋”上，使第一数成为 14。
⑤77-72＋12=17。将原式中“72”的 7 取出一根，放在和中。

8.小猪转向

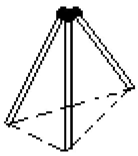
由 12 根火柴摆成一只小猪。现在要求只移动一根火柴，使小猪站立调转方向，该如何移？



解：现在的小猪是头在右方而尾向左方的。要使它变成头在左而尾在右方，没有必要打乱重摆。因为决定小猪站立的方向，关键在头尾，现只准移动一根火柴，应把注意力集中在头、尾部想办法。其实，只要把头下方的一根火柴，移放到尾下方，小猪便调转方向了。

9.摆三角形(一)

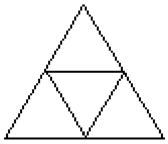
媛媛说：“因为三角形必须有三条边，所以三根火柴可以摆成一个三角形。”
倩倩说：“不，用三根火柴我可以摆成四个三角形。”
媛媛看了倩倩摆的图形，果然是四个三角形。
你知道倩倩是怎么摆的吗？



解：这类问题，如果思路只停留在平面上，便不可能找到解决办法，超越常规的问题，就要用超越常规的思路。倩倩是将三根火柴立起来摆的。

10.摆三角形(二)

老师拿出 6 根小木棒，3 根长的相等，3 根短的也相等，但短的只有长的一半。
“谁能用这 6 根小棒，摆成四个完全相同的正三角形？”老师问。]



同学们你看我，我看你，半晌无人回答。

小朋友，你能摆成吗？

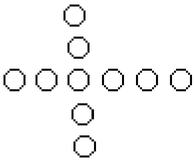
解：六根小棒要是孤立地摆放，只能摆成两个三角形。现在要摆成四个三角形，必然是组合在一起的。

摆成右面的图形，便符合要求了。

11.巧移硬币

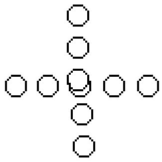
有 10 枚硬币排列成“十”字形，有人能将它移动几枚后，使得不论横数或直数都成了 6 枚。

他是怎么移动的呢？



解：共 10 枚硬币，排成横直都是 6 枚，显然是不够的。这就需要突破常规思维。如果在一个位置放两枚呢？

处在十字中心的一枚是与横直都有



关联的。将这个位置重叠一枚问题便迎刃而解了！

12.绳拴鲤鱼

用 1 米长的绳子拴着 6 条鲤鱼，每条鱼中均间隔 20 厘米。卖掉 1 条鲤鱼后，绳子没有剪掉，其他各条鲤鱼也没有解开重扣，两条鲤鱼间仍是间隔 20 厘米，这是怎么回事？

解：六条鲤鱼，绳子的两端各拴一条。中间 4 条，卖掉一

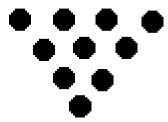
条，只剩 5 条了，仍用这根子，每条间距离仍是 20 厘米……思路如果不拐个弯儿，便百思不得其解。

没有规定绳子必须是直的呀！将余下的绳头弯转过来，系在末端的一条鱼上，使它们连成圆圈，问题不就解决了嘛！

13.颠倒三角形

用 10 枚硬币摆成了一个倒三角形。有人说，他只需移动 3 枚硬币，便可

以使它变成一个正三角形。



你能做到吗？

解：只移动 3 枚硬币，使原来的倒三角形成为正三角形，是最节省的移动方法。

具体移动方法如图：

14.空满相间

桌上有 6 只玻璃杯，并列的排成一行。左面的 3 个杯盛满饮料，右面 3 个杯是空的。如果使空杯和满杯相间排列，必须移动几个杯子？只移动一个杯子，便可达到要求，你能做到吗？

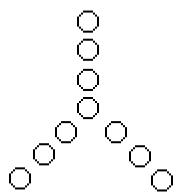
解：一般都认为必须移动两个杯子，即将 B 和 B′交换位置，空杯与满杯恰好相间排列，只移动一只杯子，似乎不可能。

但是只移动 B 杯，将杯中的饮料倒进 B′杯中，不是同样

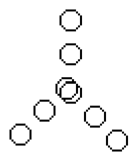
符合要求吗？一般人的思路总是停留在移动杯子，不能跳跃到“移动饮料同样也能达到目的”这个高度。

15.仍是四枚

桌上放着 10 枚棋子，摆成相交于一点的三条直线，每条直线上都有 4 枚棋子。拿走 2 枚以后，只用 8 枚棋子，仍摆成原来的形状，每条直线上仍是 4 枚。你会排吗？



解：如果你按照一种思路，苦思冥想仍不能解决，就应打破常规，重新开拓新的途径。



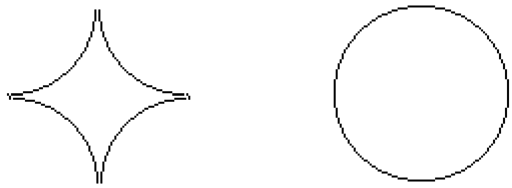
题中并没有规定棋子不能重叠排放呀！只要思路跳跃到这一步，便豁然开朗了：把相交点摆放 2 枚，问题便顺利的解决了！

16.巧剪妙拼(一)

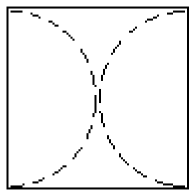
王大娘是个高明的裁剪师，她做的衣服用布最节省，连一些边角废料，

在她的手里都能利用，下面形状的两块布头，被她各剪一刀，竟神奇的拼成了正方形。

小朋友，你知道王大娘是怎样剪拼的吗？

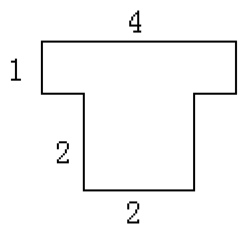


解：王大娘经过细致的观察，针对都是曲线的特点，各从中间剪开，便拼成了正方形。



17.巧剪妙拼(二)

在下图上剪两刀,使剪开的部分恰好能拼成一个正方形(图中数字为厘米数)。



解：类似这种题目，必须先认真观察分析图形的特点，再动手剪拼，切不可盲目行事。

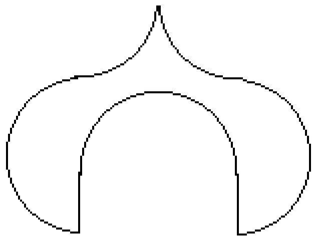
拼成正方形，必须把凹凸的部分补平，围绕这个特点思考，才能找到办法。下面的两种剪拼方法(见图 1、图 2)供参考。

18.巧剪妙拼(三)

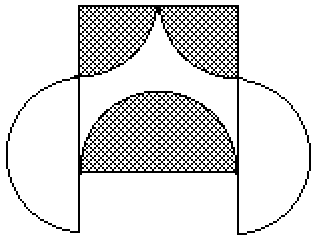
下图是一个如钳子形状的铁片，有人只剪三刀，竟然奇迹般的拼成了一个正方形。

你知道他是怎么剪的吗？

解：这块铁片弯弯曲曲，与正方形各条边都是方方正正的形状相差太大了！



将这样的图形拼成正方形，而且只剪三刀，初看似乎不可能！但是认真的分析一下，图上的曲线都是圆弧，而且半径都是相等的，这便暗示了解题思路，以此作为突破口，分析拼成正方形的所缺部分，在铁片中找到对应部分，最后便知道该如何剪开了。



瞧，图形的变化多么奇妙！

19.如何等分

下面的三幅图，都很不规则，却要把它各自分成大小、形状都相同的两部分，初看似乎不可能。但是任何问题都有它的解决办法。只要肯动脑筋，就没有解决不了的困难。

想想看，这几个图形该怎样分割才符合要求？

解：只要勤于训练自己，有一双锐利的眼睛，善于观察，就可以绝处逢生，发现别人所难以发现的东西。这几个图中，难在都有弧线，把注意力集中在弧线上，因势利导，便可以独辟蹊径。

解 1

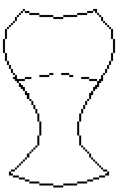


图 3

解 2

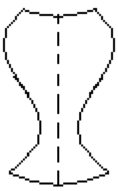
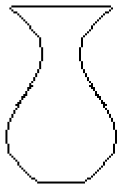


图 3

20.门的变形

在一个偏僻荒远的高山上，有一座建筑奇特的道观。单就它的门便造型奇特，多种多样。游人们走进的第一道门是花瓶状，第二道门是长方形，第三道门是正方形。道观的道人说，原本都是花瓶形状，三道门都做好了，主持老道不满意，硬是改成现在的样子。游人们仔细端详后，发现虽然长方形和正方形门都拼接得很好，但仍可隐约的看出接缝来。

花瓶门



你知道，将花瓶门改成长方形和正方形是怎样锯割的吗？

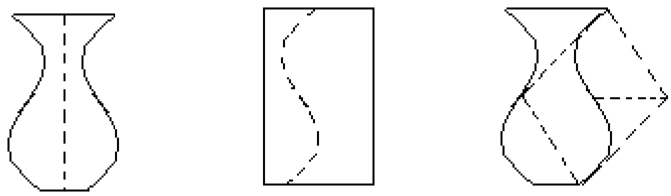
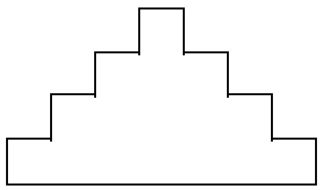


图1　　图2　　图3

解：把花瓶门改成长方形门，只要从花瓶中心纵向锯开，再反转拼合即成(如图 1、图 2)。改成正方形门，则须依虚线将花瓶分割成三块(如图 3)。

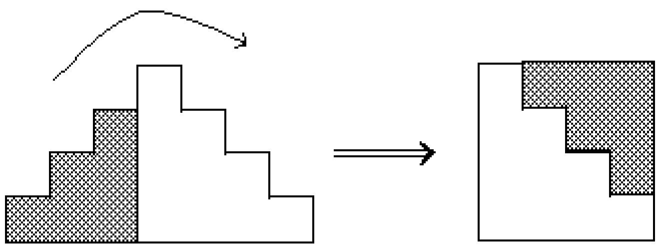
21.授奖台阶

体育运动会的授奖台平面图如下。能否只剪一刀,把它拼成一个正方形？



解：把这个阶梯式的图形，拼成正方形，必须考虑如何使锯齿形的边相互吻合。从各个台阶都是对称相等的特征则剪左拼右或剪右拼左，都可以拼成正方形。

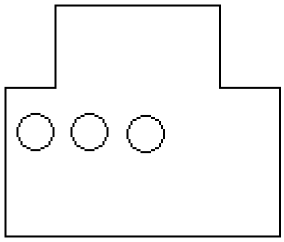
如图：



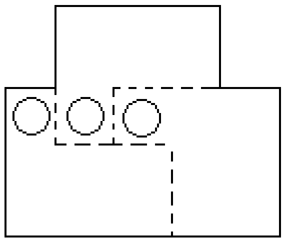
22.巧分三块

一块铁板上有三个小孔，现在要求将它锯割成大小、形状都相同的三块，每块上还必须带一个小孔。

应该怎样锯割？



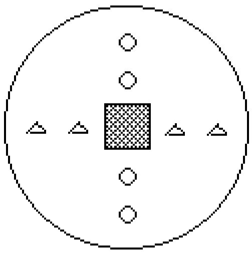
解：锯割前要认真观察、分析图形的特点，先根据条件，画出锯割线，才能避免失误，节约原料。可沿下图中虚线进行锯割，则完全符合要求。



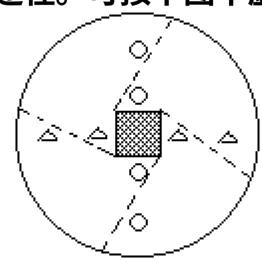
23.巧分四块

一块中间有方孔的圆形板材上，对称的作了些标志符号。现需要将它切割成大小、形状相同的四块，使每块都恰好带有一个小圆圈和一个三角形，作为一个机器零件使用。

怎样切割才符合要求？



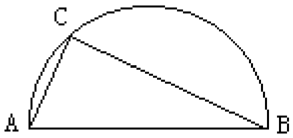
解：圆中的孔为正方形，切割成四块，每块应占有正方形的一个边，围绕这个中心思考，才能找到途径。可按下图中虚线所示进行切割。



24.半圆中的三角形

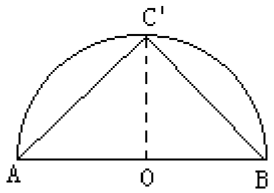
在半圆周上任取一点，分别与直径端点 AB 可连接成三角形。

你知道取圆上的哪一点连成的三角形面积最大？



解：因为三角形的面积等于“底×高÷2”。

在半圆内画三角形，因为底边都是圆的直径，是一定的。那么，三角形面积的大小就决定于它的高了。而这个三角形的高以通过圆心垂直于直径 AB 的半径 OC'为最高。因而连接 C'A、C'B 所构成的三角形面积最大。

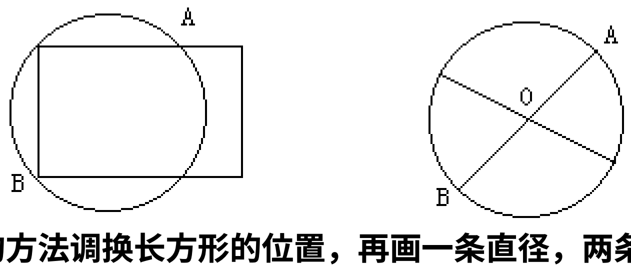


25.找圆心

董尧画了一个圆，可是找不到圆心了。手里又没有量角器和圆规，只有一根直尺。后来他用白纸裁了一个长方形，利用这个边长大于直径的长方形，竟很方便的找出了圆心。

你知道董尧是怎么做的吗？

解：董尧将长方形的顶点放在圆上，将纸的两边与圆弧的交点 A 和 B 标出，连接 AB 便得出一条直径来。



再用同样的方法调换长方形的位置，再画一条直径，两条直线的交点 O 便是圆心。

26.剪五角星

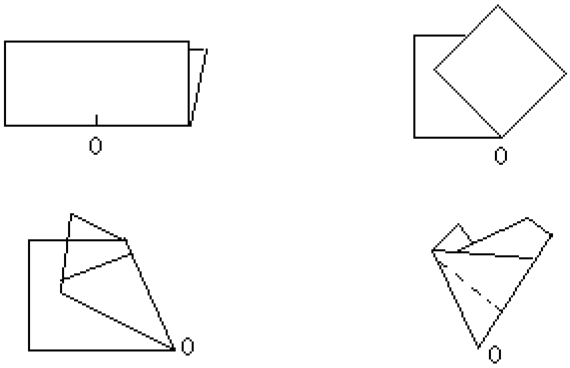
五角星给人一种闪闪发光耀眼明亮的感觉。看到五角星，心中便升腾一种美好的希望。

假如给你一张方纸，你能将它剪成五角星吗？

解：剪五角星有个非常简便的方法：

先将方纸对折，然后再从它的中点折叠，使折成的一边是留下一边的 2 倍，再将已折的一边对折，未折的一边

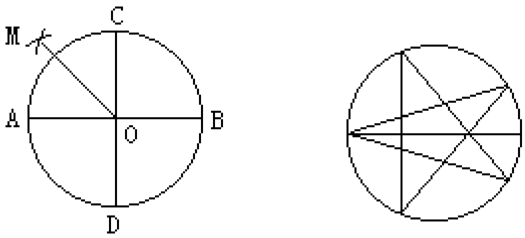
反折过去，最后在长边对应的另一边约$\frac{1}{3}$处斜剪一刀，五角星便剪成了。



27.画五角星

给你一个直尺和圆规，你能只用这两种工具画出一个五角星来吗？

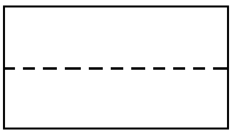
解：先用圆规作一个圆，再用直尺画两条互相垂直的直径 AB 和 CD，再分别以 B、D 为圆心，以 AB 为半径作弧，两弧相交于 M，则 OM 近似等于该圆内接正五边形的边长，以 OM 为边长在圆上截点，连结各点便得到一个五角星。



28.用手等分直角

一天，天上下着蒙蒙细雨，爱因斯坦却毫不理会。他在桥头来回地踱步，手里拿着一块方纸折来折去。

朋友见状，十分奇怪。便问：“您在这儿干什么呢？”



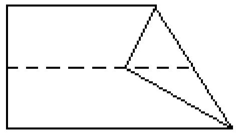
爱因斯坦说：“我应约在等一个学生，但他迟迟没来，一定是考试把它难着了。”

“这太浪费您的时间了！”朋友惋惜地说。

爱因斯坦连连说：“啊！不，不，这段时间使我解决了不用任何工具，用折叠的方法，可以将一个直角等分成三份呢！”

你能知道，爱因斯坦是怎么折叠的吗？

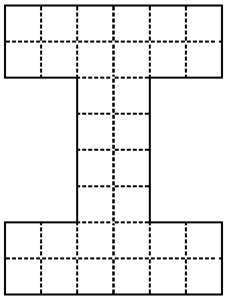
解：先把方纸对折，然后将一个顶角对折到中线上，使它的顶角恰在中线上，即成。

如图：

29.等分“工”字田

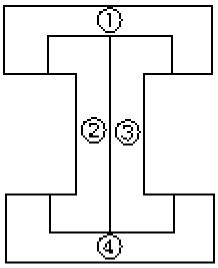
传说，宋代的苏东坡为官期间成功地解决了兄弟四人等分工字田的纠纷。

那块祖传的田地形状如图所示。



你能知道，这块田是怎么分成4份的吗？

解：方法如图：



30.等分圆

在实际生活中，经常遇到将圆等分成若干份的问题。将圆等分2份，过圆心作一直径便成；等分4份，则再作一条相互垂直的直径。只用圆规和直尺把一个圆等分成8等分、6等分、3等分、5等分，该怎么分？

解：8等分圆：

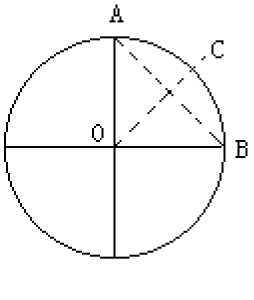


图1

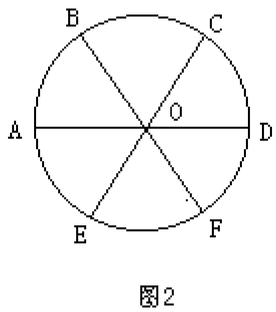


图2

先画两条互相垂直的直径，再从O点作一条垂直AB的直线，与圆上

的C点相交，AC的长度便是圆的$\frac{1}{8}$。

6 等分圆：

用直尺先画一条直径，然后以半径为定长，在圆周上依次截取，每一段都是圆周的$\frac{1}{6}$(如图2)。

3 等分圆：

在 6 等分圆中，去掉 OB、OD、 OF 即可(如图 3)。

5 等分圆：

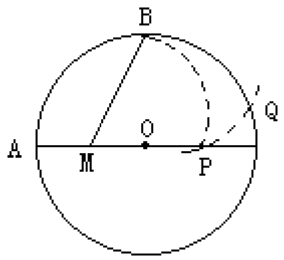


图3

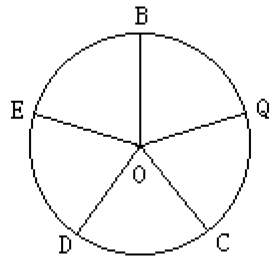


图4

把一个圆 5 等分，比较麻烦：

1.作互相垂直的两条直径。

2.取半径 OA 的中点 M，并以 M 为圆心，MB 为半径画弧，交直径于 P。

3.以B为圆心， BP为半径画弧，得到Q点，BQ弧就是圆的$\frac{1}{5}$。

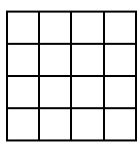
4.以 BQ 为半径顺次在圆上截取，得 C、D、E、F 各点，连接圆心 O 至各点就把圆等分成 5 份了(如图 4)。

31.地板图案

许多地面用瓷砖拼接成美丽的图案，使人们的生活环境变得更加优美舒适。

地板砖的形状必须便于拼接，不留间隙。你知道满足这种要求的基本条件是什么？

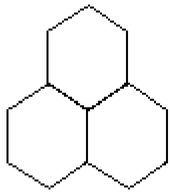
解：要使地板砖拼接起来，不留间隙，它的基本条件是：几块相拼接的地板连接在一起的角度和是 360°。

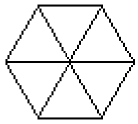


如：正方形地板，四块相接每个角都是 90°，恰是 360°。

正六边形地板，三块相接，每个角都是 120°，它们接在一起也没有空隙，因为三个角的和也是 360°。

正三角形也可以拼满地面而不留空隙。正三角形的每个内角是 60°，必须 6 块相拼。





正方形、正六边形、正三角形，它们的一个内角度数分别是 90°、120°、60°，这些数都是周角 360°的约数，因此都可以拼满地面而不留空隙。

如果采用两种或更多的图形相拼接，那么地板的图案便更加绚丽多姿了。

右图是由正六边形、正四边形和正三角形三种图形拼成的。

32.重新握手

下图是一个正方形和一个正五边形，它们的边长相等。两图相接，恰好形成两手相握的图形。现在使正方形顺时针转动、五边形同时逆时钟转动，转动时始终保持两条边相接。

你能算出各需转多少圈，才能使两手重新相握？

解：这道题看似很难，其实是求最小公倍数问题。4 和 5 的最小公倍数是 20。每个图形的边数乘以它转动的圈数等于 20 才对。因此，正方形转 5 圈、五边形转 4 圈，两手才重新相握。

33.互不交叉

萨姆·罗伊德的聪明睿智举世震惊。他是美国最著名的智力难题设计家。他 14 岁时，便在报上发表了第一个国际难题。20 岁时，获得了“娱乐活动史上最伟大的国际难题的发明家”的称号。

下面这则智力难题，是他在 10 岁前发明的。

一个四合院内住着三个男人，他们都从正对自己房子的院门出入院子。一场争吵之后，彼此各不来往。每人都在院内修一条通向院门的自己进出的小路。但是这三条路互不交叉。

请问，他们的路各是怎样修筑的？

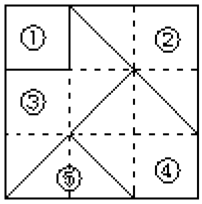
解：既然三条路互不交叉，就应集中考虑如何绕道而行，他们把各自的路修筑成下图：

34.五巧板

民间流传许多拼图游戏，奇趣迷人。

有一种叫五巧板的拼图。它将一个正方形剪成大小不等、形状各异的五块。而后将剪成的五块打乱重拼，可以有许多不同的方法，拼成一些物体的像形。

五巧板的制法如右图：

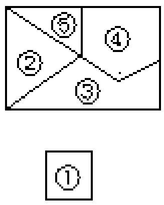


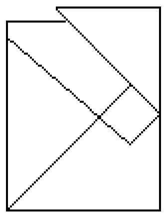
你可以用一块硬纸板，按图画好，然后按标出的实线剪开。自己拼拼看。

值得注意的是，有时虽拼出了规则的四边形，但它却不是正方形，结果你被引进了误区！

试一试，看看自己能拼几种形式？也可以和同学们共同玩，看谁拼的多而且正确。

解：用这种五巧板重拼正方形时，常常会发生错觉。其中最大的两块③和④，常常诱导人们误入歧途。拼图时首先想到它们，把它们作为拼成的正方形的一个直角，结果拼成了下面





的图形：

实际上，它们却不是正方形！

下面是用五巧板拼成象形图：

35.七巧板

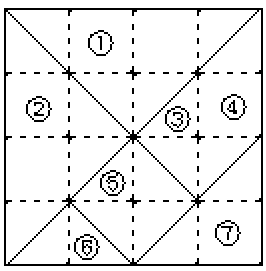
七巧板是把一个正方形，剪成七块。别看它只有七个小块，用不同方式重新组合，却可以拼出许许多多文字、动物、人物、日常用具、交通工具、建筑图形等各种图案。比起五巧板变化更加丰富多彩，趣味盎然。

七巧板的制法如右图：

剪成的七块中，有五块三角形，一块正方形，一块平行四边形。在三角形中①=②，③=⑥。

七巧板源于中国，是中国劳动人民聪明才智的体现。外国人把它叫做‘唐图”。可见远在唐代就已传到国外，是东方古老的娱乐工具之一。

拼移七巧板，可以发展想象力，训练思维的灵活性，寓学于乐，开拓智力。



你能用它拼出哪些有趣的图案？

解：七巧板总共能拼出多少种图案，目前还没有人能准确回答。日本的数学家曾提出："用七巧板能拼出多少个凸多边形？"这个问题中国数学家 1942 年便作出了解答：七巧板拼出的凸多边形不会多于 13 个，即三角形一种、四边形六种、五边形两种、六边形四种。

对七巧板能拼出多少个其他图案，没人能说得清。不过，现代美国的计算机专家，却设计了一个七巧板问题的"探索程序"，你只要随便画出一种图形，只需 2 秒钟，计算机便可以告诉你答案，并把拼法显示出，不能拼出的你也不必白费时间。

下面介绍几种图案的拼法：

拼数字：

拼动物：

拼人物：　　　　拼工具：

36.圆七巧

在越南流行一种圆形七巧板。它的七块板都是带弧形的多边形。

中国的七巧板多是由正方形剪开制成的，这种圆形七巧板却是由圆剪开制成的。

制圆形七巧板方法比较复杂。

1.先把圆等分 4 份：

在硬板上用圆规作一个圆，通过圆心画两条互相垂直的直径，相交于圆周的 A、B、C、D 四点，整个圆便等分成 4 份了。

2.连接 OA，作 OA 的垂直平分线 MN，与圆周相交于 P、Q，以 P 为圆心，OA为半径，作$\overset{\frown}{AO}$。

3.用同样的方法，作出$\overset{\frown}{BO}$、$\overset{\frown}{CO}$和$\overset{\frown}{DO}$。

4.连接 AB，作 AB 的垂直平分线与圆相交于 E，则 E 为 AB 的平分点。

用上面的方法，作出$\overset{\frown}{OE}$。

5.分别以 C、D 为圆心，OA 为半径，在圆周上找到 F、G 点，再用上面介绍的方法，作出$\overset{\frown}{CF}$和$\overset{\frown}{DG}$(作CF的垂直平分线，在圆外找圆心)。

这样画图工作全部完成了。而后用剪刀沿画出的圆弧，小心地剪开，圆七巧板便制成了。

试一试，你用这种圆七巧板能拼出哪些图形？

解：这种七巧板因为外形都是圆弧，最适合拼一些带有曲线轮廓的图形。

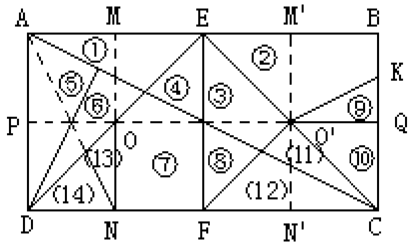
下面提供几种图例：

37.阿基米德游戏板

阿基米德游戏板是在苏联等国流行的双七巧板。它是由两个正方形组成一个长方形剪成的，共有 14 块拼板。

阿基米德是古希腊著名的学者。他准确地测出金质皇冠掺假的故事，举世闻名。以他的名字来命名，表明这种游戏十分古老而有意义。

双七巧板的制法如图：



长方形 ABCD 的长 AB(CD)恰是宽 AD(BC)的 2 倍。

1.连接 AC、EC、ED。

2.将正方形 AEFD 和 BCFE 沿纵横中点各作一条连线 MN、 M'N'和 PQ 及纵横线交点 O 及 O'。

3.正方形 AEFD 中，连接 MD、AN。

4.在正方形 BCFE 中，连接 FO'，找出 BQ 中点 K，并连接 KO'。将该剪开处用粗线标出，于是，整个长方形被分成了 14 块。其中五边形 1 块、四边形两块、三角形 11 块。作图工作便完成了。

沿标出的粗线剪开，便可以任意拼移，创造出许许多多动人的图案画面。

你能用它拼出几个人物造型来吗？

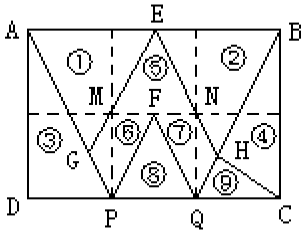
解：双七巧板中，有几块比较窄长，适合做人的手、足，因而这种板块最适宜拼成人物造型而且形象逼真，活泼有趣。下面是拼成的几例：

38.九巧板

五巧板和七巧板都是由正方形剪制而成的。九巧板却是由长方形制成的。

制九巧板不是任意长方形，它的长与宽的比必须是 3：2。

具体制法：



将一个长是宽的 1.5 倍的长方形 ABCD，等分成 6 个小正方形(如图)，这样便得到 M、N 和 P、Q 各点。

1.连接 AP、BQ。

2.找出 AB 中点 E，连接 EM，并延长与 AP 相交于 G；连接 EN 并延长与 BQ 相交于 H，再连接 CH。

3.找到 MN 中点 F，连接 PF、QF。九巧板便分割完毕。沿图中粗线剪开，

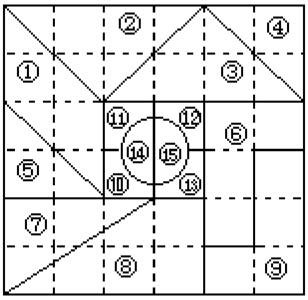
便可以拼图了。

这种拼板含有七个三角形，两个梯形，你觉得用它拼什么图形最合适？

解：这种拼板，分解开的图形边沿都是直线，最适合拼成各种几何图案，如下图。

39.益智图

益智图共由 15 块板组成。据说是清代的童叶庚研制的。他觉得七巧板的块数太少，每块板图形单调，拼图的花样不够丰富。他从易经八卦中得到启示，在七巧板的基础上，将块数增加到 15，剪成的图形也作了改进，于是制成功一种新型的拼板玩具。并根据它变幻多姿，可以启迪智慧，发展思维的特点，取名叫“益智图”。



益智图如同魔块一般，可以拼摆的图案更加形式多样、丰富多彩：文字、数字、动物、植物、人物、建筑、机械、用具都可以拼成。让想象的翅膀张开，还可以拼出一些充满诗情画意的神话、寓言、戏文、故事，十分有趣。难怪许多学者、专家都把它作为一种休息娱乐的工具。伟大的文学家鲁迅生前便是这种玩具的爱好者，他在日记中还经常提到这种益智图。

你会制作这种奇妙的玩具么？

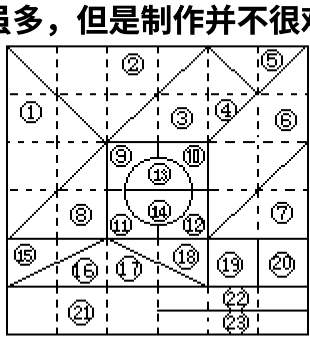
解：益智图制作并不复杂，只要将一个正方形等分成 6×6 的方块，而后按上图提示，沿实线细心地剪开则可。

下面是益智图拼成的图形：

40.百巧板

百巧板有许多种，最常见的一种是 23 块板。它基本上是七巧板与益智图的综合(如图)。只是表示它的块数多，并不是说其真有 100 块。

百巧板比较起来块数虽多，但是制作并不很难。



取一块正方形板，将它分成 6×6 个方块，按图中实线所指，细心地剪开

则可。

百巧板，由于块数多，可拼的图案便更多。图形更加细致形象，拼组起来也更加容易。这与电视图像的道理很相似。电 视图像实际上也是一种拼板，即无数个图点组成，因而它才那么清晰、准确。

你能用百巧板拼出《枫桥夜泊》这首诗意来吗？

解 ：枫桥夜泊是唐代张继的一首闻名中外，脍炙人口的诗作。

月落乌啼霜满天，
江枫渔火对愁眠。
姑苏城外寒山寺，
夜半钟声到客船。

有人拼成下面的图案：

你是怎么拼的？

41.魔术蛋

魔术蛋也是九块板。这九块板合起来是一个椭圆，形如鸟蛋，用它可以拼出各种鸟形，因而又名“ 百鸟拼板 ”。

魔术蛋的制法比较麻烦：

先绘制一个椭圆形鸟蛋：上部为半圆，下部为椭圆。

1.作一个圆，圆心为 O，并通过圆心，作直径 AB 的垂线 MN。

2.连接 AN，并适当延长。再以 A 为圆心，AB 为半径作圆弧交 AN 的延长线于 C。

3.连接 BN，并适当延长。再以 B 为圆心，BA 为半径作圆弧交 BN 延长线于 D。

4.以 N 为圆心，NC 为半径，作圆弧 CD，于是下部成为椭圆。

5.在 OM 上作线段 MF 等于 NC。以 F 为图心，MF 为半径作圆，交 AB 于 G、H，连接 FG、FH、FM 这样魔术蛋便制好了。

利用这套拼板可以组合成各种各样千姿百态的小鸟来。这么多的小鸟，竟然是由同一个鸟蛋变成的，魔幻般的神奇，令人惊诧。

现在请你用它拼成“ 一唱雄鸡天下白 ”、“ 曲项向天歌 ”的诗意来。

解 ：鸟类在歌唱时一般都仰头的，要抓住这个本质特征，进行摆放。下图可供参考：

童话数学

看童话学数学生动有趣

童话数学

以数学知识作为童话的内容，这种数学，便成了童话数学。这种童话，便叫做数学童话。

童话数学的最大特点是数字、符号以及概念、法则等抽象的知识，都变得形象、具体、生动、活泼了。它们一个个会说话，会游戏，会做工……本来我们认不清它们的面目，可是听它们说适，看它们游戏，做工，便自然而然地熟悉了它们。

走进了童话，连自己也变成了数字、符号、概念、法则，我们将在数学王国中愉快地观赏游玩。

大家也许还记得，《西游记》中孙悟空与铁扇公主的故事。那孙大圣钻进了铁扇公主的肚子里，才打了胜仗。

走进童话中学习数学，也如同钻进了数学的肚子里，从里向外才看得更清楚。那些混混沌沌的概念，奇奇巧巧的计算，怪模怪样的图形以至千变万化的问题，在数学王国的内部，都变得格外清朗了。

更有趣的是，童话里有饶有兴味的帮事，有曲曲折折的情节，还有栩栩如生的人物。看它们举止动作，听它们交谈辩论，头脑中留下的印象便更深、更鲜明。

1.智慧树下的辩论

术语村头的那棵老槐树，枝繁叶茂。在烈日炎炎的盛夏，如同一把巨大的遮阳伞。村民们不约而同地聚集在下面歇凉、听故事、聊天、读书、看报、听收音机……总之，在老槐树下，人们眼界变宽了，心胸开阔了。大家都把这棵树称为“术语村的智慧树”。

这一回，树下聚集着那么多人，既不是聊天，也不是听故事，而是看“增加”和“减少”两家的辩论。

“增加”和“减少”都常在“应用题列车”上露面，不知怎么引起的。“增加”说：“只要我出现，货物必然多起来。”“减少”则说：“那可不一定，我们出现时货物也不见得就少！”双方各不示弱，谁也说服不了对方。

“多”和“少”两家也去参加辩论了。

“多”站到了“增加”一边，“少”则帮着“减少”说话。

“见多就加，见少就减，我们一直是这么办的。”“多”并且举出了例子来：“咱村有猪 40 头，羊比猪多 10 头，求羊，自然是 40＋10＝50 头了！”

“少”则说：“咱村有猪 40 头，比羊少 10 头，求羊，题中虽然有‘少’字，难道能用‘40—10＝30’求羊的只数么？”

这与“增加”和“减少”两家的辩论差不多。

“增加”说：“有我在，就得用加，例如：去年水稻亩产 512 公斤，今年比去年亩产增产 23 公斤，今年亩产多少公斤？自然是‘512＋23’”

“减少”说：“当我出现在题目中，同样不能用‘减’：去年水稻亩产

512 公斤，比今年亩产减少 23 公斤，今年亩产多少？”

他们你一言，我一语，各有各的理由。

辩论还没有结果，那边“扩大”和“缩小”两家又吵起来了，“扩大”坚持见到他要用乘法，而见到“缩小”就必然是除法，这意见却又遭到了“缩小”一家的强烈反对。

真是一波未平，一波又起。

一直倚在智慧树上没有吭声的“概念”老人说话了：“要我说，具体问题具体对待！关键是要分清‘以谁为标准数’来比较的。不管青红皂白见多就加，见少就减，见扩大就乘，见缩小就除，肯定会出差错！各位还是分析一些具体问题吧！”说罢，他从智慧树上扯下一把树叶，撒向人群。

说也奇怪，每片树叶上都有一道与争论相关的题目。人们立即停止了争论，一个个都在专心地分析自己的问题，转而又互相热烈的讨论了。

其中有几个题目是：

(1)公鸡有 12 只，比母鸡多 5 只，母鸡多少只？

(2)42 个人参加植树，6 个人一组，一共可分几组？

(3)妈妈买来一篮苹果,送给姥姥 5 斤,还剩 8 斤,妈妈买来多少斤苹果？

(4)爸爸的全身照片是16厘米，正好是他身高数值$\frac{1}{10}$的长度，爸爸身高多少？

(5)今年发展 35 名少先队员入队，是去年发展队员数的 7 倍，去年发展了多少名少先队员？

2.“数”老大耍杂技

会堂里人头攒动，掌声阵阵，人们正在兴高采烈地观看杂技表演。

杂技团的团长是数学城杂技研究会的“数”老大，这就更引起了人们的兴趣。

“数”老大在舞台上一站，台下便爆发了雷鸣般的掌声。

只见“数”老大用手一招，一个与他同样高大的“位”字并立在身旁，这时舞台上站立着“数位”两个字。随后，个、十、百、千、万、十万、百万、千万、亿……一个个载歌载舞从舞台上飘过。他们所占的位置都用动作暗示了出来。

他向观众表明：

数位就是各个计数单位所占的位置。不同的数位占的位置也不同。

转眼间，“数”老大又站到了“位”的右边，人们见到舞台上是“位数”两个字。那些个、十、百、千……也突然消失。

忽然“数”老大用手一指，舞台上立即出现了：

一位数：1、2、7、8、6……

两位数：10、23、45、83、74……

三位数：721、350、208、100……

四位数：1000、2345、9672、8001

五位数：10000、17431、24856、12009……

……

舞台显得小了。

排头的标牌不停地舞动，后面的数字就不停地变换，黑压压一片，全是各种各样的自然数，一眼望不到边。

“数”老大虽然没说话，观众明白了他的意思，位数就是一个自然数含有数位的个数。含有个、十两个数位就是两位数，含有个、十、百、千四个数位，就是四位数……真是“此时无声胜有声”啊！

表演了两个节目后，只见“数位”在舞台上晃动起来，他们做出各种优美的舞蹈动作，后来腾空一个跟头，站到舞台正中。人们定睛一看，“位”变成了“字”，“数字”两人手拉手跳起了“华尔兹”舞步，此时灯光大亮，乐声骤起。在“数字”后面，此来彼往。进进出出全是记录各种数的符号：

1、2、3、74、93、100、2003、57400……

Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ、Ⅹ……

是的，这些全是数字！

随着帷幕徐徐下落，“数”老大频频向观众点头致意。人们用热烈的掌声等待着下一个新节目。

观众中鼓掌起劲的是小学生，他们由衷地感谢“数”大师的无声指点，使他们终于彻底明白了“数位”、“位数”、“数字”等抽象易混的数学概念。

3.“二”和“两”找法官

“二”和“两”本是同宗兄弟。在数的家庭里，他们都表示同一个数值。像“二万”，也就是“两”万，表示的数都是 20000。

可是，近一阶段，因为争着要多做点工作，便发生了纠纷。“二”要去干，“两”也要去干，有些工作又不能两人同时去做。这样便常出差错。

比如：“董尧尧做两十道题，对了十两道，得了第两名。”本来应该让“二”去，“两”字偏要争着干，结果让人听得莫名其妙；

又比如：“倩倩和媛媛二个人，买了二本书、二支笔，回家又读了二小时书……”本应让“两”去的，“二”字挤上了，听起来多别扭……

类似的问题很多，已经到了非解决不可的时候了，弟兄俩议定，干脆请数学法官老 Q，作个公断，以后便按法官划定的界限，该谁去干谁出面。

法官 Q 听完了两人的陈述，思考了一会，便说：“你们争着做工作，精神是好的。不过，你们俩谁干都行的工作可不多。”

“难道一件也没有吗？”兄弟俩问。

“据我所知，在读多位数时，数位开头的亿位、万位、千位，你们俩谁上都行，但是在亿、万、千等计算单位中间的‘二’，一般‘两’就不应上了。比如：二千二百万、二万零五百，读成：两千二百万、两万零五百都可以。”

“哪些事咱俩不能一齐上呢？”

老 Q 拍了拍脑袋说：“关于你们的分工虽没有明确法规，但长期以来的习惯是：

(1)在表示‘序数’时，一般用‘二’不用‘两’。如上面的例 1，只有在通信中，为了使对方听清，特意把‘二’读成‘两’，这是例外。

(2)在量词前面，一般用‘两’不用‘二’。

(3)在读数时，除高位的亿、万、千外，一般用‘二’不用‘两’，如二

百五十二、零点二二，七分之二，不能读成两百五十两、零点两两、七分之两。

我能想到的，也就是这些吧！”

经Q法官这么一讲，“二”和“两”对各自的责任范围明白了许多，兄弟俩高兴地说：“这样，咱们今后就可减少扯皮提高工效了。”

于是弟兄俩高高兴兴地回到数学大院，准备在建设祖国的事业中，作出更多的贡献。

4.山羊爷爷传秘诀

山羊爷爷出了几道选择题让小羊们判断。

(1)四亿零五千写作()。

①400005000 ②40005000 ③4000005000

(2)2000605 读作()。

①二十万零零六百零五

②二百万零零六零五

③二百万零六百零五

④二十万零六百零五

小羊灰灰和白白思考了一下，第一题他俩先写下数位表，凡是空位的都补上0，很快便判断出正确：

千百十亿万万万万千百十个

400005000

可是做到第二题，他们先排除了①和④是错的，但是②和③谁对谁错难以确定了。

山羊爷爷见他俩总是判断不下，便说：“读数和写数都有秘诀，只要记住它，做起来便容易了！”

听说有秘诀，小山羊都拉着山羊爷爷要他快说。

山羊爷爷清了清嗓子念道：

写数的秘诀是：

“写数要从高位起，哪位是几就写几，熟记数位最要紧，空位都用0补齐。”

读数的秘诀是：

“读数也从高位起，哪位是几就读几。

中间连续几个0，读时只需读一个。

每级末尾若有0，一律不读要记清。”

小羊用秘诀对照题目果然很容易，便确定了正确答案。

他俩暗暗地熟记了这两个秘诀，再遇到整数的读写，便再也不用发愁了。

5.胖胖0告状

水帘洞的门前，像堆满着气球，一群胖胖 0，叽叽喳喳一齐来状告小猕猴，定要当面问问长臂猿，他的徒儿欺侮人，当师傅的，管还是不管？

既然是徒弟惹了祸，当师傅的自然有责任。长臂猿忙问：“各位都从何处来的？”

众人齐声高呼：“洁白广场的乘法工地！”

长臂猿顿时明白，小猕猴在乘法运算中又犯了错误，连忙说：“请将具体情况告知，我一定要好好教训教训他！”

于是胖胖 0 纷纷说出了小猕猴的过错。

(一)

“我是乘数中间的 0”，一个胖胖 0 说：“小猕猴在乘法计算时，竟然不让我占有位置！”

长臂猿没有听明白，便说：“你能讲得更具体些么？”

胖胖 0 拿出了一张纸：“瞧，这上面写得明明白白！”

长臂猿接过状纸，只见那上面写道：

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 4 & 1 & 3 \\
 & \times & 8 & 0 & 4 \\
\hline
 & 1 & 6 & 5 & 2 \\
3 & 3 & 0 & 4 & \\
\hline
3 & 4 & 6 & 9 & 2
\end{array}$$

果然，算式中把 0 的位置忽略了：“这孩子又犯了快而不准的老毛病了！”长臂猿心想：“要是把 0 当作一个数去乘：

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 4 & 1 & 3 \\
 & & \times & 8 & 0 & 4 \\
\hline
 & & 1 & 6 & 5 & 2 \\
 & & 0 & 0 & 0 & \\
3 & 3 & 0 & 4 & & \\
\hline
3 & 3 & 2 & 0 & 5 & 2
\end{array}$$

尽管麻烦些，也不至于搞错了部分积的位置呀！”

长臂猿略一沉思，和蔼地说：“你速回乘法工地，叫他先把我的问题做出来后，再重新处理你的问题，若还有差错，再来找我！”

说罢，长臂猿写下了几道题：

413×84＝？ 413×804＝？ 413×8004＝？

胖胖 0 接过纸来，用力一纵，飘上了空中，向乘法工地飞去。

(二)

第二个胖胖 0，一声没吭，便将状纸交来：

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & 3 & 0 & 4 \\
 & & \times & & 4 & 6 \\
\hline
 & & 1 & 8 & 2 & 4 \\
1 & 2 & 1 & 6 & & \\
\hline
1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 4
\end{array}$$

长臂猿一看，这是被乘数中间带 0，相乘时没用省略的方法。小猕猴却把它与乘数中间带 0 混淆了，使部分积也多错一位。

胖胖 0 望着紧皱眉头的长臂猿，委屈地说：“瞧您的徒弟，简直是任意摆布我们！”

“是我没有教育好！”长臂猿非常谦逊地说：“请您再耐心地等一段时间，我重新设计一套功法，待他练习后，若仍随意摆布你们，我定不饶恕！”

说罢，长臂猿写下了一些问题，要胖胖 0 告诉小猕猴，练好功法后，立即来见。

胖胖 0 接过纸来，只见那上面写着：

$$\begin{array}{r} 304 \\ \times\ 46 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 46 \\ \times 304 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 603 \\ \times 217 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 217 \\ \times 603 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2006 \\ \times\ 405 \\ \hline \end{array}$$

胖胖 0 就纵身一跳，飘向蓝天，直奔洁白广场飞去。

(三)

“您的徒弟除了任意摆布被乘数、乘数中间的 0，对我们这些积末尾的 0，也不放在眼里！”

长臂猿一看，许许多多的胖胖 0，一下子拥向前来，七嘴八舌把他团团围住。一张张告状的信纸，一个劲地往他手里塞。一时间使他眼花缭乱：尽多是被乘数、乘数末尾带 0 的。

$$\begin{array}{r} 460 \\ \times\ \ 5 \\ \hline 2300 \end{array} \quad \begin{array}{l} \ \ 3600 \\ \times 250 \\ \hline 1530 \\ \ 72 \\ \hline 873000 \end{array}$$

这类问题进行简便运算时，末尾的 0 都不要去乘，全部把它添到积的末尾便可以了。可是小猕猴不是少补了 0，就是多添了 0……

长臂猿非常气愤，便拨通了小猕猴办公室的电话，准备狠狠的教训一顿。

电话铃响，岂料，小猕猴的第一句话便是：“师傅，我错了！您教我练的功法，已全部学会，您派来的胖胖 0，已全部安排妥当。师傅，您还有什么指教？”

徒儿这么虚心，听话，长臂猿还能说什么呢？便轻言慢语地告诉他：“我这里还有一大批被你任意丢掉的胖胖 0 哩！我立即叫他们回到乘法工地，在他们到达之前你必须将下列功法练好，并认真地总结教训！”

小猕猴连连称是：“请师傅快说。”

长臂猿在电话中要小猕猴记下了：

25×6　250×6　250×60　2500×600

随即转过脸来，向大家说：“各位快回吧，小猕猴会给你们安排妥当的。”

于是，一个个胖胖 0 飞向空中，花果山像飘走了一些美丽的气球。

6.飘荡的胖胖 0

一些胖胖 0，浮在半空中飘动着。小花猫把它当成了气球，仰着头，不停地往前追。近前细看，原来都是一个个没有根梢的 0，感到很新奇，便问：“你们怎么不在算式里做事，却四处飘荡呀？”

其中一个 0 哭丧着脸说：“我是商中间的 0，被人家抛弃了，他们不让我呆在算式里！”

另一个 0 接着说：“我是商末尾的 0，也是被赶出来的。”

小花猫更加迷惑不解："胖胖 0 在算式中作用很大，谁这么大胆，竟敢把你们赶走？"

0 伤心地说："他们根本不把我们放在眼里，在除法求商时，常常把我们扔掉不管！"

"岂有此理！"小花猫很气愤："在数位表里，遇到空位时，都特意把你请去补上座位，这样才能保证数的科学准确！要不，三千零五，把百位、十位空位的零扔了，3005 岂不成了 35！请你们详细说说看，他们是怎么扔下你们的？"

胖胖 0 见小花猫很热心，就都一起飘动起来，领着他去看现场。

在一片洁白的广场前，他们停下了。

小花猫一看，不禁大吃一惊：广场上，整整齐齐并列着许多算式：

```
     1  2              1 0   4
   ______             ________
 6)6 1 2            8)8 0 3 2
   6                  8
   ______             ________
     1 2                  3 2
     1 2                  3 2
     ____                 ____
       0                    0
```

```
    2 8 0                4 0
   ________           _________
 3)8 4 0 0       1 2)4 8 0 0
   6                 4 8
   ________          _______
   2 4                  0
   2 4
   _____
       0
```

果然，所有算式上，商中间、商末尾应该有 0 的，都没有补足。

"我们都没了安身之地，才四处飘荡的！"胖胖 0 一个个满腹委屈。

小花猫看了这些错误的算式，气愤异常，他二话没说，跑到水沟边，挖了一块湿泥作为墨汁，在手上涂了又涂，然后把那一道道算式，都打上了大大的"×"。

而后，又根据"商×除数=被除数"的验算公式，写下了：

12×6=？ 104×8＝？ 280×3=？ 40×12=？

最后，安慰胖胖 0 说："你们不要四处飘荡了，就坐在这儿等着，算式的主人回来时，看了我写的东西，一定会给你安排好座位的！为了快一些解决问题，我先找找他们去！"

说罢，小花猫便去找算式的主人了。

思考与练习：

1.在下列各个除式中，要使商中间有一个"0"，□内可以填什么数？

7)7□84　　□)816

2.下列除式中，除数是几时商的中间、末尾都有"0"？

□)3240　　□)9270　　□)48240

3.下列各式子是否正确？为什么？

$$\begin{array}{r} 3\ \ 2 \\ 7\overline{)2114} \\ \underline{21} \\ 14 \\ \underline{14} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10\ \ 2 \\ 9\overline{)9018} \\ \underline{9} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 53 \\ 24\overline{)12720} \\ \underline{120} \\ 72 \\ \underline{72} \\ 0 \end{array}$$

4.口算求商。

4032÷4＝　2550÷5＝　2400÷12＝

3184÷8＝　9018÷18＝　55220÷11=

7.长鼻象讲试商

加减乘除四兄弟，
只有除法最淘气，
求商必须先试商，
或大或小反复试，
一遍一遍真烦人，
生怕粗心出错误。

小山羊咪咪呀呀，不停地唱着自编的顺口溜，在山间的林荫道上慢悠悠地走着。

“小羊，小羊，快来，快来！我们正在研究试商呢！”小山羊抬头一看，嗬，山前的大松树下，围坐着一群小伙伴哩：长颈鹿、金丝猴、小花猫、小白兔……一个个都端端正正坐在那儿。

听说研究试商，小山羊自然高兴，除数、被除数千变万化，求商可真不容易呀！

金丝猴让小山羊坐下后，悄悄地说：“这下好啦，咱们请来了数学专家，专门给我们解决试商中的困难呢！”

说话间，只听有人说：“来啦！来啦！”

小山羊只见一个身材魁伟的大象，慢腾腾地坐在了前面，他晃动着长长的鼻子说：“小朋友，把你们碰到的问题提出来吧！”

话音刚落，只听“我说”、“我说”，一个个争相发言。

象专家用长鼻子指一指长颈鹿。

“如果被除数的前几位数比除数大，除数的个位比较小，例如：8468÷51，怎样试商呢？”长颈鹿一口气说出了自己的疑问。

长鼻象不假思索地答道：“类似这样的情况，都可以用‘首位试商法’，84＞51，8÷5 商 1，商的首位必定是 1。例如：512÷44 和 72468÷51……，都可用这个法儿试商。”

众人一看，果然，商的首位数都是 1。

“假如被除数的前几位数比除数小，除数的个位却比较大，该怎样试商？”说话的是小白兔。

“你的问题我明白。”长鼻象说，“例如，563÷68，56＜68，类似这样的情况就用‘五入法’，把除数先‘五入’，即把 68 看作 70，再试商。像 24÷28 和 8840÷89 以及 32011÷37……都照此处理！当然了，如果除数的个位数比较小，就用‘四舍法’。这两种方法，实际就是‘凑整法’。”

长鼻象果然学识渊博，伙伴听得豁然开朗。
小山羊连忙举手说：“专家叔叔，我计算中还遇到这样问题，除数的首位数字与被除数的首位数字相同，次一位数字接近却不够商。例如：2214÷27，该怎么试商？”
长鼻象眨了眨大眼睛，慢腾腾地说：“这种类型我们叫它‘同头无除’，情况比较复杂。当被除数前两位数字的和大于或等于除数的个位数字时，肯定商 9，其余情况，多数商 8，所以说，‘同头无除商 8、9’。偶然，也有商 7、6、5 的。”
长鼻象讲后，同伴们热烈地议论了起来，各人都举出了一些例子，先估商、后试商：161÷19、124÷18、3113÷39……
好长时间，没有提出问题了。长鼻象说：“还有一种情况：当被除数的前一位数字或前两位数字，如果恰是除数的一半，可直接商 5，这种方法，就叫‘折半法’吧！如：801÷16、14360÷28……”
讲完了仍是没有人再提问，“有问题以后再研究吧！”长鼻象便站了起来，摆了摆大鼻子回去了。大家听得入了神，猛见象专家离去，连忙高呼：“谢谢象伯伯，下次再见！”
思考和练习
1.试商一般有哪些方法？
2.下列各题应如何试商？
66951÷519 236318÷683
21675÷289 328427÷803
306000÷612

8.小数点的家

数学城里有个自然数一条街，原先住着清一色的自然数，由于这里靠近计算大道，交通发达，经济繁荣，后来有位姓“零”的也迁到这里，大家便把这条街叫做“整数一条街”了。
本来大家都平平静静地过日子，各自干着各自的事情，各家住着各家的房子：个、十、百、千、万……井然有序，岂料自从来了个身份不明的姓“零”者，由于他不断迁移，一下子秩序大乱，原来是“万”的陡然间变成了“百”、“千”或“个”、“十”，原来是“百”、“千”的又一下子变成“个”、“十”。这样，许多人霎时间成了“暴发户”，许多人霎时间又成了“穷光蛋”。
是谁这么神通广大呢？
原来是个名叫“小数点”的人。大家说：“你不是咱们数学城的！你是语文国的。”
可小数点“.”却沉着冷静不慌不忙地说：“我原本就是数学王国的臣民，原来就住在数字一条街。”
自然数、整数都齐声说：“我们从没见过你！”
“哈哈！那只说明你们孤陋寡闻罢了，你们每一家的后面都有我的一点小住处，只是我不愿出头露面而已！”那个叫小数点的人说得竟那么轻巧、自信。
自然数的领头“1”首先责问道：“难道我身后面有你的住处？”

“那当然！”小数点说，“你与 1.0 是不是一家？”

1=1.0，谁都知道，1 无话可说了。

两位数中的老大 99 说：“照你这么说，我身后面也有你的住处！”

“我已经说过，你们自然数、整数，不论谁的后面都有我，99=99.0，难道你能不承认？”

小数点的一席话说得众人哑口无言。

“仅靠你们整数，数学城的好多问题你们解决不了！”小数点非常自信地说，“生产发展了，经济发达了，数字一条街自然要扩大，就拿这条计算大道吧，原先 10 米宽就够用的了，现在扩展到 15 米 6 分米 5 厘米，还嫌太窄。就以这路宽为例，请问用米怎么表示？我一参加就好办了，15 米 6 分米 5 厘米=15.65 米”

“那你们的住宅怎么安排呀？”整数中有人问。

“这，管理数学城的建设部早给安排好了！”说着，他把图拿了出来：

$$\underbrace{\cdots\cdots\text{万千百十个}}_{\text{整数部分}}\quad \overset{\bullet}{\text{小数点}}\quad \underbrace{\text{十分位}\ \ \text{百分位}\ \ \text{千分位}\ \ \text{万分位}}_{\text{小数部分}}$$

众人一看，果然早已有人给小数点安排好了位置。

“就是大家承认了你的位置，可你也不能经常搬家呀！”说话的是 2850，你小数点向左移一位我便缩小了 10 倍，成了 285，移两位我成了 28.5，移三位我就成了 2.85……”

“是呀，本来我安安静静的，”3 接着话茬，“你向右移一位，把我变成 30，向右移两位又使我扩大了 100 倍成为 300，一会儿你又把家搬到离我左边三位，使我变成 0.003……为啥要这般折腾我们？”

“你们甭说啦！”小数点打断了话茬，“请大家想想，我们这些数，要是呆呆地坐在家里还能发挥什么作用？只有天天在计算大道上奔跑才能体现我们的价值。你们一会儿变成整数，一会儿又变成小数，那都是实际需要，我的作用，正是体现在不停地搬家中……咱们只有同心协力，才能使我们数字街更加繁荣！”

大家见小数点的话句句在理，而且他原本就是数字街的成员，要发展，要繁荣，只有团结合作才能成功。从此也便与小数点友好相处了！

9.双重国籍的小圆点

语文国和数学国虽是两个友好睦邻国家，可是，风俗习惯、人情事故却有着天渊之别。

这几年随着经济发展、交通发达，两国人民的交往越来越频繁。

小圆点在语文国原来充当“着重号”的角色，顾名思义，他若站在哪一段文字下边，就表明那段文字特别重要、特别需要强调，如“要成就一件大事业，必须从小事做起。”

后来因为总是在文字的下边，他向语文国王提了意见，国王叫他兼做“隔音号”，像“阿伯拉罕·林肯，是美国第一位遇刺总统”、“《星星·月亮·太阳》是一本畅销书”等等。这样，把他放在一行文字的正中间，便与文字平

起平坐了。更有意义的是，如果他连点了 6 点，那就表示不论还有多少话语、多少事情，统统“ 尽在不言中 ”，于是人们把 6 个并排的小圆点叫做“ 省略号 ”。

因为在做“ 隔音号 ”的期间，常常与外国人名字在一起，小圆点忽然萌生要出国的念头。

于是，他迁移到了数学国。

他到了数学国使大开眼界。移民局的同志十分欢迎，还向他讲述了数学国王招贤纳士、尊重人才的种种优惠政策，带着他周游数学王国。他观看了整数城，亲眼目睹了整数中质数、合数、奇数、偶数、约数、倍数、连续数……的奇异风采。

接着又参观小数城。

在整数城和小数城交界的地方，移民局的同志说：“ 这里就需要一个小圆点。在这里，你要更名为‘ 小数点 ’，在你左边的全是整数，在你右边的就全是小数了！不过你千万要记住：只能站在整数和小数之间偏下方，不要站在数字正中，这与你做‘ 隔音号 ’时不同。 ”

说着他们进了小数城。

一个奇怪的现象出现在面前：7 个人正在为平分一桩账目撕扯不开：

22÷7=3.142857142857142857……

“ 你们不必愁了！ ”移民局的同志走近前说，这位新来的同志可以为你们排忧解难，转脸又向小圆点，“ 这是循环小数，商 142857 总是不间断地重复出现，要是没有一个特殊的办法，永远也写不完。你就在他们重复的首尾数字头上各点一点，省工省时，有了‘ 循环点 ’意思就清楚了！ ”

小圆点听了，觉得很新奇，“ 在语文里我总是在文字下面，到这里叫我站在数字头上，而且只要首尾两点就行了。 ”想着想着便进入了算式中：

$22 \div 7=3.\dot{1}4284\dot{7}$，高兴地说：“是这样吗？ ”

“ 是的！就这样，在这里你叫做‘ 循环点 ’。 ”

小圆点兴奋地说：“ 我就在小数城安家落户了！ ”

移民局的同志说：“ 可以，不过在比和比例城有件工作还要请你去做。这与你在语文国里做‘ 冒号 ’相当，只是咱们这里叫‘ 比号 ’，表达的意思与‘ ÷ ’号差不多，如：3∶5=3÷5…… ”

小圆点连连点头：“ 可以，可以，只要需要，我一定前往！ ”

小圆点从此有了双重国籍。

10.循环小数迷了路

$0.\dot{6}$和$0.\dot{4}\dot{8}$是对十分要好的朋友，假日里他们一同到南山采集植物标本。

山中的景色美丽极了！

各种各样的花草，绚丽多彩。除了在自然课本学到的，还有许许多多认不出名字的奇异植物。悬崖峭壁上奇形怪状的石头，更叫人想象万千！

他们蹦着跳着，说着笑着，不知不觉天色晚了，两个人便匆匆忙忙往回赶。可是却忘了出山的路线。

他们走呀走，走了好长一段路，仍没有出山。坏啦！迷路了！于是加快步伐寻找归路。可是越走路途越生疏，眼看太阳已快落山，急得他们像热锅

上的蚂蚁。$0.\dot{6}$不禁大声哭了起来！哭声让住在山上的鹿爷爷听到了。忙问：“出了怎么事？”

“我们找不到回家的路了！”

“还记得你们的家吗？”鹿爷爷问。

“我家是$\frac{2}{3}$.”

$0.\dot{6}$泪眼汪汪地说。$0.\dot{4}\dot{8}$说：

“我家是$\frac{16}{33}$。”

鹿爷爷听了说：“原来你们都是纯循环小数家族的！好吧，让我指给你们回去的路！”

说罢，他在地上画了一条路线：

“$0.\dot{6}$听着，你本来是 0.6666……是吗？

$0.\dot{6}$ 即：(1)0.6=0.666……

(2)将两边同时扩大 10 倍，得：

$0.\dot{6}$×10=0.666……×10=6.666……

(3)在(2)式两边同时减去(1)式两边，得：

$0.\dot{6}$×10-$0.\dot{6}$＝6.666……-0.666……

=0.6×(10—1)=6

即：$0.\dot{6}$×9=6

(4)将等号两边都除以 9 就是：

$$0.\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

“沿着我画的(1)、(2)、(3)、(4)路线走下去，便到家了。”鹿爷爷说。

听了鹿爷爷的指点，$0.\dot{6}$破啼为笑：“想起来了，我能找到家了！”

“爷爷，我还是找不到家。”$0.\dot{4}\dot{8}$急切地恳求道。

“别急，别急！”鹿爷爷慢腾腾地说：“你$0.\dot{4}\dot{8}$=0.484848……你们家的循环节是两个，回家路线有一点不同，一说也就明白了：

①$0.\dot{4}\dot{8}$=0.484848……

②将①两边都扩大 100 倍得：

$0.\dot{4}\dot{8}$×100=0.484848……×100

=48.484848……

=48.48

③在②式两边同时减去①式得：

$0.\dot{4}\dot{8}$×100—0.48=48.4848……-0.484848……

=$0.\dot{4}\dot{8}$×(100—1)=48

也即：$0.\dot{4}\dot{8}$×99=48

④将等号两端都除以 99(即 100—1)

$$0.\dot{4}\dot{8}=\frac{48}{99}=\frac{16}{33}$$

$0.\dot{6}$和$0.\dot{4}\dot{8}$听了，高兴地齐声说：“谢谢鹿爷爷指点！”

于是他们便大步流星地下山了。

很快他们都各自找到了自己的家。

11.“≈”被告记

数学王国收到了一些举报信，都是冲着仲裁法官“≈”来的。

事关重大，国王决定立即审理此案。于是把仲裁组的成员都召集了来。“=”，“≈”，“>”，“<”一个个都坐在会场上。

国王面带怒色，冷冷地说：“有人竟敢颠倒是非，知法犯法……有此劣迹的，自己坦白交待！”

会场气氛十分紧张。一个个面面相觑。

国王见无人交待问题，更加恼怒，便指着“≈”说：“约等于，讲讲你的职责是什么？”

“≈”从容不迫地站了起来：“我的职责就是表示近似数。遇到不可能或不必要得出精确值的情况，我便挺身而出。”

“那么有人反映麻袋和钢材的问题是怎么回事呢？”国王慢条斯理地提出了疑问。“≈”感到莫名其妙。

“≈自己说不清，我给他说一点。”说话的是“=”，请问 3724÷100=37.24≈37。这该会算吧？上次命你去运回 3724 千克白糖，每条麻袋装 100 千克，你却硬要给 38 条麻袋，这是为啥？”

“>”站了起来，冲着“≈”责问道：“难道你连 38>37.24 也不懂么？”

“还有，”“=”接着又问，“上次你拿去 100 厘米圆钢，每截 6 厘米便可制一个零件，很明显做 100÷6=16.66……≈17，可你为啥只交 16 个？”

“≈”仍是一声不响，默默地坐着。

大家见状非常气愤，纷纷责问：“你这样违法乱纪，咱数学王国的‘四舍五入’法规，还执行不执行？”

“≈”终于说话了，他反问大家：“国王要求把全部白糖都运回，要是只给 37 条麻袋，请问：剩下的 24 千克怎么办？扔了么？”稍停，他又说：“100 厘米的钢材，每 6 厘米做一个零件，要是做成 17 个，请问：那最后一个还能用吗？”

“≈”一连串的反问像连珠炮，“=”不吭声了，“>”和“<”也都无话可说。

“≈”却并不甘休，最后气愤地说道：“有的人搞 1=1.0，1>0.9，0.9<1，还认为自己绝对正确，倒是应该认真反省一下！”

弄清了事实真相之后，国王这才转怒为喜，他说：“现在我宣布：‘≈’没有错，今后处理近似数可以根据‘四舍五入’，‘进一法’和‘去尾法’，究竟用哪一种法，由‘≈’根据实际情况灵活处理。至于‘≈’提出的 1=1.0 及 1>0.9 等问题是否属实，待今后再议。”

12.0.1 与 0.10 的争吵

“=”、“≈”、“>”、“<”刚从国王那儿开完会，只听前面的路上一片喧哗。近前一看，原来是 0.1 和 0.10 正在争吵。

“0.10”说：“我就是与你 0.1 不同。”

“0.1”反驳说：“你整天背着那无用的 0，还不是跟我同样大小？”

“仲裁法官来啦！请他们裁定。”围观的人群中不知谁喊了一声。

“＞”和“＜”交换一下目光，无话可说。

总是认为自己一贯正确的“=”说话了：

“我认为你们俩是相等的！因为$0.1=\frac{1}{10}$，$0.10=\frac{10}{100}=\frac{1}{10}$，所以0.1=0.10；你们都是小数，小数末尾的0添上或去掉，小数的大小不变嘛！”

“对呀，我也这么说，”“0.1”接过“=”的话，“既然你0.10与我相等，何必背着那个末尾的0？”

听了“=”的话后，0.10仍迷惑不解，说：“0.10=0.1我承认，然而，若绝对相同，国王又为什么偏要我背着个多余的0？”

“=”无话可答。“＞”、“＜”齐声说：“还是去请示国王吧！”

“甭请示国王啦！”一直没有说话的“≈”开腔了，“在单纯的式题计算中遇到结果是0.10的，末尾的0可以扔掉，如果题目要求近似值的，末尾的0千万不能丢了。”

“0.1”听了直发愣：“为什么呀？照你这么说，0.10与我0.1不同了？”

“当然不同！”“≈”答道：“你们俩数值虽相等，但在表示近似数时，精确度是有区别的！根据‘四舍五入’法规：你表示的是0.05～0.14间的任何数值，只是精确到十分位；而0.10呢，却表示0.095～0.104间的任何数值，已经精确到百分位了！”

“0.1”恍然大悟：“怪不得我看到工厂里抽样测试机器零件的数据，有8.10，8.11，8.09，还有8.00呢！原来它表示的是精确度啊！”

“0.10”望着“0.1”和“≈”，“＞”，“＜”说：“我也明白了，今后不该背0时，我便及时把它扔掉。该背时，再苦再累也背下去。”

13.游戏中的数学

数学广场上欢声笑语，山羊爷爷正带领一班小白兔在做游戏呢！

只见山羊爷爷把八个小白兔分成甲乙两队，每个人手里都拿着数字标牌：

甲队的标牌是：2、4、6、12，

乙队的标题是：1、3、18、24，

小白兔们不明白，他们是来请教倍数、约数问题的，山羊爷爷却领着他们做游戏。

排好了队，山羊爷爷说：“你们每队的基础分是 100，听我的口令做动作。凡是口令中涉及到的数，要高举过头顶，该举没举起的和不该举的却举了，有一个扣5分。哪队的分数最先被扣光了，便是输家！大家明白吗？”

两队齐声答道：“明白了！”

“现在游戏开始！”山羊爷爷说：“3的倍数请报告！”

只听甲队中传出：“6号”、“12号”！

乙队中传出：“18号”、“24号”！

山羊爷爷眯缝着眼，扫了一下各队的标牌，笑眯眯地说：“乙队扣去 5分！ 3号该举没举。”

“都放下！再来下一轮。”山羊爷爷说，“20以内的质数请报告！”

只听：“2号”、“3号”、“1号”！

山羊爷爷走到 1 号前，笑着说：“你是质数吗？”

“错啦！错啦！”乙队的伙伴们大声地向 1 号说，“你既不是质数，又不是合数！不该举起。”

“乙队再扣 5 分！”接着山羊爷爷加快了口令，并迅速的给各队记分。

只听那些口令是：

“最小的偶数！”

“最小的自然数！”

“最小的质数！”

“2 的倍数！”

“24 的约数！？

“30 以内的合数！”

“30 以内的奇数！”

“18 的约数！”

“既是偶数，又是质数！”“既不是质数，也不是合数！”

……

对约数、倍数、奇数、偶数、质数、合数，这些概念理解得比较透彻的都能迅速作出反映，该举起的，迅速举起，不该举起的则静立不动。

开始时，乙队的分数最先被扣光了。几轮以后，甲队又输给了乙队。最后，大家都理解了各个数学名词，两队谁也没出现错误，双双打了个平手。

“我们要山羊爷爷讲数学，他却叫我们来做游戏。原来用意却在这里！”小白兔总算明白了山羊爷爷的苦心。

14.意义咨询部

博学多才的“意义”主任，从教研室退休后，在概念街开了一个数学“咨询部”。凡是数学中概念模糊、意义不清的求教于他，他都无偿服务。

消息传到了“$\frac{3}{4}\times 8$”和“$8\times\frac{3}{4}$”的耳朵里了，他们俩常被“小马虎”混在一起，弄得彼此不分。小马虎还振振有词，说他们本来就没有区别，理由是：

1.都是乘法。

2.计算方法相同：都是用 8 与分子相乘。

3.结果相同：

$$\frac{3}{4}\times 8=3\times\frac{8}{4}=6$$

$$8\times\frac{3}{4}=8\times\frac{3}{4}=6$$

可是，众人又都说他们并不一样。

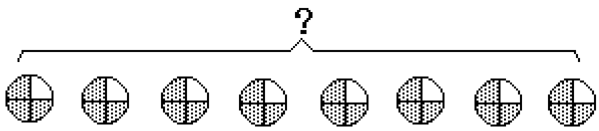
于是，他们找到了“意义”主任，请他帮助解决。

“意义”主任说：“你们俩本是很容易区分的，出现混淆，主要是小马虎没有把‘意义’搞清楚。”

接着“意义”主任给他们详细的作了讲解：

“$\frac{3}{4}\times 8$”是分数乘以整数，它的意义是“8个$\frac{3}{4}$是多少”，

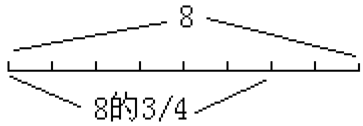
用图表示是：



$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3\times8}{4}=6$$

“$8\times\frac{3}{4}$”是整数乘以分数，它的意义是：“8的3/4是多少？”

用图表示是：



从图中可见，求8的$\frac{3}{4}$，可以解为$8\div4\times3$，即把8平均分成4份，求其中3份是多少。

“瞧，你俩的意义相同吗？”

$\frac{3}{4}\times8$和$8\times\frac{3}{4}$，认真地端详了一会，两人的意义果然不同。

结果，小马虎在做题时又把他俩混为一谈了，他们便把“意义”主任画的图拿出来。小马虎一看，方才恍然大悟：虽然算法、结果都相同，可是，意义确实不一样。

15.“$\frac{3}{4}$”串门

听说外面的世界很精彩，$\frac{3}{4}$便悄悄地走出分数大院。

他一阵小跑，不大功夫就来到了“小数大院”的门前。守门的问：“你想进去吗？”$\frac{3}{4}$毫不犹豫地答道：“是的！”

守门的将他上下打量了一番，说：“想进小数大院，这样打扮不行！”说着便扭着$\frac{3}{4}$的手足，使他变成了：$\frac{3}{4}=3\div4=0.75$。

$\frac{3}{4}$惊呆了，怎么自己一会儿就变成了0.75？正在他惊魂未定的时候，守门的说：“现在可以进去了！”

0.75便急忙地走进了“小数大院”。

进了大院，只见迎面来了位$0.\dot{2}0\dot{7}$。0.75 挺奇怪：这位先生怎么连头上都顶着小数点？想不到他的话竟被$0.\dot{2}0\dot{7}$听到了，那人主动地招呼道：“先生你刚来吧？我头上的点叫循环点，我叫纯循环小数，混循环小数是我的弟兄。此外，还有带小数，纯小数。你就是纯小数。”0.75 含含糊糊地应着。

0.75 不知不觉间竟走出了“小数大院”的后门，抬头一看，面前已是“百分数大院”了。

“喂，先生，进门之前请换一下服装！’守门人和气地说。

他不解地问：“换什么服装呀？”

“跟他们一样。”守门的向院内一指。

0.75抬头向院内望，200%、37.5%、$25\frac{1}{3}$%、8%……果然院内的人都有个特殊标记：“%”，忙说：“我哪来这样的标记呀！”

守门人走上前一把将他的小数点扯下扔了，0.75成了75，接着将%别在他的身后，0.75变成了75%，然后，一把将他推进门里。

转悠了一会儿，75%心想，时候不早了，我该回去了。

忽然，一只大手抓住了他：“老弟，好久没有见到你了，快来家坐坐！”

75%端详了半天，直摇头：“先生，你认错人了！”

“怎么会呢？”那人爽快地说，“我叫成数，75%也就是七成五，其实你和小数中的0.75，分数中的$\frac{3}{4}$都是我们的弟兄。”

这位先生连根底来由都知道了，75%连连说：“谢谢！谢谢！可我已经玩了很长时间，想回家，该怎么走呢？”

成数亲切地问：“你原先住在哪个大院？”

“住分数大院，我是从小数大院进来的。”

“这样，你就不要再顺着原路回去了。”成数说，“应该这么走：$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$。”

75%顺着成数提示的方向，果然一会儿就回到了分数大院。

16.乘号认错

“$\frac{3}{4}$”怒气冲冲地走出“除法大院”，一直找到“乘法大院”看大门的“×”。

“今天你要说个清楚！”$\frac{3}{4}$责问道，“为什么每次我走在计算大道上，你总是稀里糊涂地把我也当作你们的乘数成员，结果闹出事故！”

“×”被问得莫名其妙，忙说：“有话好说，因为这个大院每次出车都离不了我，事情太多，也可能有错，请你把有关的情况说说。”

“$\frac{3}{4}$”随手掏出了“行车记录”。只见上面写着：

$$\frac{5}{12}\times\frac{3}{4}=\frac{5\times1}{4\times4}=\frac{5}{16}$$

$$\frac{5}{12}\div\frac{3}{4}=\frac{5\times3}{12\times4}=\frac{5}{16}$$

“你瞧，我的前边是÷号，能与“$\times\frac{3}{4}$”有同样的算法、同样的结果吗？”

“×”心想也是，乘与除本不是一回事，怎能混为一谈呢？

“$\frac{3}{4}$”继续说道：“我们数学王国的计算法规早就确定：除以一个数等于乘以这个数的倒数。很显然咱们应该是：

$$\frac{5}{12}\div\frac{3}{4}=\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}=\frac{5}{9}$$

可是你……”

“×”承认没有学好计算法规。半晌说：“可是你们为什么要颠倒乘呢？这样做有什么根据吗？”

“$\frac{3}{4}$”认为“×”之所以把自己搞错，的确与不明白道理有关，便耐心向他解释：

“一个数除以 1 结果还是它自己，你是知道的，根据除法商不变的性质，把被除数和除数同时乘以除数的倒数，使除数能转化成 1，你看：

$$\begin{aligned}\frac{5}{12}\div\frac{3}{4}&=\left(\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}\right)\div\left(\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\right)\\&=\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}\div 1\\&=\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}\end{aligned}$$

所以$\frac{5}{12}\div\frac{3}{4}$的结果，也就是$\frac{5}{12}\times\frac{4}{3}$的结果。

“×”连连点头：“是的，是的，我搞错了。”

“今后再遇到除数是分数的，决不能也当作乘法一样去处理。”“$\frac{3}{4}$”强调说，“请你记住，一变号(÷变×)，二颠倒(颠倒除数分子、分母位置)，三相乘。变号了没颠倒，或者颠倒了没变号，都是错误的！”

“×”连连称是：“记住了，记住了，变号、颠倒、再乘。”

果然，从此以后计算大道上就很少出现事故。

17.字母兄弟帮了忙

“定律”带着他的弟兄们一大早来到自然数大院，他们敲响了第一排第一家的门。

瘦“1”开门一看，加法交换律、结合律、乘法交换律、结合律，还有乘法分配律都来了。连忙问：“五位先生有什么指教？”

“我们是来找你们帮忙的！”加法交换律首先说话，“一些小朋友对我们弟兄几位总是记忆不住，分辨不清，你们自然数弟兄多得数不清，能帮我们变得简洁精炼一些吗？”

瘦“1”似乎还没听明白，加法结合律补充说：“像我吧，别人要是叫起我来得说‘三个数相加，先把前两个数相加，再和第三个数相加；或者先把后两个数相加，再和第一个数相加，它们的和不变’，瞧，多麻烦！”

自然数弟兄一向助人为乐，瘦“1”听后连忙敲起了集合铃，一会儿大院

的广场上聚满了黑压压的人群：1、2、3、4、5、6……，有头无尾望不到边。

瘦“1”向大家说明了情况，众人纷纷举手，乐于帮助。“先解决加法交换律的问题吧！”瘦1率先站了出来，接着“2”主动出队，他们排成：

1+2=2+1

排好了队，瘦“1”很自豪地说：“瞧，咱们这队形就可以说明加法交换律！”

定律弟兄看了却直摇头：“这只能表明‘1加2等于2加上1’呀！除此以外不能代替任何一个与你们不同的式子呀！”

瘦“1”觉得对方说得有理，很不好意思，便拉着小2入队了。

这时场上的自然数兄弟觉得很失体面！“咱们这么多弟兄难道就解决不了这点问题吗？”便纷纷相互组合成许许多多的队形：

3+5=5+3　　12+27=27+12

361+249=249+361　984+116=116+984

2573+4687=4687+2573……

霎时，广场上熙熙攘攘，人声嘈杂，引来了许多看热闹的人。字母家族的兄弟们：a、b、c……，也站在一旁看热闹。

自然数弟兄的热情，使定律兄弟非常感动。可是他们组成的任何一个队形，都不能代替“加法交换律”，因为他们太具体了，每一道式子只能说明他们自己是可交换的，而“定律”却做了高度的概括，必须包含所有的式子。因此，仍是摇头不语。

自然数弟兄无能为力了！

字母弟兄也是一向助人为乐的。他们见自然数弟兄心急火燎，便主动打招呼说：“让我们帮帮你们行吗？”

“当然行！只要能把定律弟兄的问题解决了就好。”自然数弟兄连忙应道，“来吧，来吧，都是咱们数学大家庭的事，不必介意！”一个个便迅速地归队了。

字母家族的弟兄也不客气地上场。他们先排了：

a+b=b+a

加法交换律一见连连点头，说：“这样可以，a代表任何一个数，b也代表任何一个数。任何两个数相加交换它们的位置，和不变！”

接着，根据每一个定律的含义，字母弟兄把它们一个个都表示了出来：

加法结合律：a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)

乘法交换律：a×b=b×a

乘法结合律： a×b×c=(a×b)×c=a×(b×c)

乘法分配律：(a+b)×c=a×c+b×c

他们刚排完，五大定律兄弟们一齐围上来，与字母兄弟亲切握手，连连说：“我们代表全体小朋友向你们致谢！这样简洁明了，易读易记，把我们的意思全表达出来了！”

自然数弟兄也纷纷感谢字母兄弟帮他们解决了困难！

后来，“性质”、“公式”也都找字母兄弟帮了忙。

18.比家兄弟演武术

数学城的体育场上，人声鼎沸，热闹非凡。

假分数的杂技表演，博得全场一片掌声。接着是比例的武术表演。

先上台的是“比”家弟兄。4∶3 和 12∶9，他们两人一对，一前一后，在台上走动了几步之后，忽见$1\frac{1}{3}$一路筋斗翻落到他们中间，霎时又一个筋斗$1\frac{1}{3}$不见了，大家看到的是等于号牵着两个比：

4∶3=12∶9

此时，话筒传来了解说员的声音：“刚才表演的是‘比变比例’。”他告诉观众，“台上的两个比是相等的，它们前项除以后项都得$1\frac{1}{3}$，两个相等的比，便可以组成比例。一个比只有前后两个项，而比例却是有两个比，四个项，有两个内项和两个外项。”

观众正在聚精会神端详着，等于号拉着两个比，不停地迈着舞步，忽见他们身体一晃，一刹时，变成了：

4×9=3×12

大家仔细瞧瞧：4、9 是两个外项，3、12 是两个内项，他们的积都是 36，众人恍然大悟：原来比例的两个外项积与两个内项积相等啊。

转眼间，台上的四个数又变幻出一长串比例来，只见：

4∶12=3∶9　　3∶9=4∶12

9∶12=3∶4　　3∶4=9∶12

4∶3=12∶9　　12∶9=4∶3

9∶3=12∶4　　12∶4=9∶3

他们你翻过来，他翻过去。一个个像闪电飓风，看得人们眼花缭乱。

“这套武术告诉我们：‘两两相乘，积相等的四个数，可以组成八个比式’。”广播喇叭继续传出解说员的声音，“这八个比例式也是有规律的。当组成第一个比例式后，先交换内项，后交换外项，再使两个比换位……于是，异彩纷呈的景象出现了。”

在场的观众，兴高采烈，有的当场根据解说员的解说也纷纷写比，再组比例，再变化比例……嘿！这套技术许多人也熟练地掌握了。

一直到节目全部结束，人们才依依不舍地离开了体育场。

19.“求比值”和“化简比”打架

“求比值”和“化简比”本是比的家族中一对十分要好的兄弟，他们的个头、长像几乎一样，使得许多人竟分不清彼此了。

使左邻右舍感到奇怪的是，两人从计算大道做工回来后，突然间扭打到一起，弄得难解难分。

一个说：“那工作本是我的，你逞什么能？”

另一个说：“明明应该我上，结果你全揽了去。要不哪来那场事故？”

因为两人长像差不多，众人一时分不清谁是“求比值”，谁是“化简比”，不知该劝谁为好。

还是做了多年调解工作的“意义”主任有办法，她说：“你们两个别吵也别打了，把事情经过讲讲吧！”

两个人，每人都写了一道式：

$$32:4=\frac{32}{4}=\frac{8}{1}$$

$$0.125:1=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$$

一个说：“我求比值不对么？”

另一个说：“我化简比又错在哪？”

“意义”主任端详了一会，笑着说：“单从两道算式看你们都没错，关键是你们的做法是否符合计算列车的要求。”

“计算列车要求‘化简比’！”一个抢先答道。

“计算列车也要求‘求比值’！”另一个也不示弱。

“总不会对同一个问题同时要求两种结果吧？”意义主任说，“比如①是要化简比的，还是求比值的？”

两个人原本就没有看清要求便冲上就干的，一下子都无话可说了。

“意义”主任慢条斯理地说：“‘求比值’和‘化简比’至少有四点不同：

1.目的不同：

‘求比值’是求比的前项除以后项所得的结果，目的是求商；‘化简比’是根据比的基本性质是把比较复杂的比化成最简单的整数比，目的是化简。

2.方法不同：

‘求比值’用除法运算，‘化简比’是用比的基本性质变化原来的比，进行化简。

3.结果不同：

‘求比值’的结果是一个数，这个数可以是整数、分数或小数。‘化简比’结果仍是比，可以写成分数形式，但不能用整数、小数或带分数表示。如①若是求比值应该写成8，若是化简比却只能写成$\frac{8}{1}$或$8:1$。

4.读法不同：

在‘求比值’中因为结果是一个数，而“化简比‘结果是一个比，因此，像$0.125:1=\frac{1}{8}$，在求比值时读作八分之一，而在化简比中只能读作1比8。”

“意义”主任的这番入情入理的讲解，使得“求比值”和“化简比”恍然大悟：以往两人纠缠不清的原因，主要是意义模糊。

“不过，你们俩合作的机会也是有的，”意义主任补充说，“求比值时，若数值很大，也可先化简比再求比值，如：$125:625=1:5=\frac{1}{5}$(或0.2)。化简比时，也可先求出比值，只是结果一定要写成比的形式，如：$\frac{13}{22}:3\frac{1}{4}=\frac{13}{22}:\frac{13}{4}=\frac{13}{22}\times\frac{4}{13}=\frac{2}{11}=2:11$。”

“明白了，明白了。”两个人深深地向意义主任鞠了一躬，便和好如初了。

20.比例尺找家

比例尺$\frac{1}{10000}$匆匆忙忙地赶路，他一边走着，一边好不烦恼，昨天那个尴尬场面，现在想起来，还满肚子气呢！

长度单位召集全家族的人开会，里、丈、尺、寸、分、公里、米、分米、厘米，连不起眼的毫米、微米也都端端正正地坐着。总之，不论公制的、市制的长度单位都来了。

可是比例尺到会场还没坐下，就被撵了出来，他们齐声吆喝：“比例尺不是尺，也不是长度单位，不能参加我们的会！”

比例尺$\frac{1}{10000}$顿时愣了：“我明明有‘尺’字，不是长度是什么？”

“是什么，咱们不管！”会场中有人说，“总之，咱们不是一个家族的！”

有个好心的老人说：“他们说的没错，看样子你可能是分数吧！请你到分数大院去！”

比例尺$\frac{1}{10000}$心想：“对，分数单位有$\frac{1}{10}$、$\frac{1}{100}$、$\frac{1}{1000}$……”

谁料连分数大院的门还没有进，看门老头一看他是比例尺，就说：“分数大院找家呢？”

“$\frac{1}{10000}$”一想老人说的没错，$\frac{1}{10000}=1：10000$，我可能与比例是一家人。

于是他一气之下，决心到比例城寻找自己的家。他询问了许多人，最后一位地理教师翻箱倒柜找到了一张比例尺是$\frac{1}{10000}$的地图，说：“瞧，此地离比例城只有10厘米，你自己慢慢地走去吧！”

$\frac{1}{10000}$走了一天又一天，最后终于到达了比例城。

比例城的朋友，个个热情好客，人们围住他问长问短。

比例尺$\frac{1}{10000}$急于打听自己的家，便问：“我与比例是一家么？”

“当然是！”一个脑门上长了两个黑痣的白发老人说，“比例尺就是图上距离与实际距离的比，你们家有三个兄弟呢！”

比例尺“$\frac{1}{10000}$”第一次听到这么说，忙问：“我哪有那么多兄弟呀？”

老人不慌不忙地说：“你，$\frac{1}{10000}$是分数比例尺，意思是图上1厘米，实际长度便是10000厘米，也即100米。如果用线段表示便是0 100 200 300米，这就是线段比例尺，与你是同胞兄弟。”

“$\frac{1}{10000}$”听得十分入神。

“你还有个弟兄叫放大比例尺，在一些精密仪器上，如手表、显微镜等等，零件的实际大小比画出的图还要小

得多，如：$10:1$或$\frac{10}{1}$，表示图上距离是实际距离放大了10倍后画出来

的！”

“原来如此！”“$\frac{1}{10000}$”恍然大悟，他十分高兴，终于找到了自己的家。

21.比的魔法

“比”自称魔术师，他说：“一般的魔术师都是变化物体，比如让手帕变成白鸽，使领带变成鲜花。而我变的是数，都是由观众当场点题……”

话刚说完，只见$\frac{3}{5}$站起来说：“能把我变成比吗？”

“比”只用眼狠狠地向$\frac{3}{5}$瞅了一会，果然出现了$\frac{3}{5}=3:5$。

“能把我们也变成比吗？”说话的是 6÷5。

“比”看了看说话的两位，说：“咱们原本是一个家族的。”只见他用手一指，6÷5 立刻变成了：

6÷5=6∶5

“比”果真有点小本事呢！

观众中的“$4\times\frac{1}{7}$”心想：除法你能变成比，咱们乘法，看你怎么变？便慢悠悠地站了起来。

“比”好像看出了他们的心事：“请二位站稳。”说话间，只见那两位观众慢慢地随着比的指令动了起来：

$$4\times\frac{1}{7}=\frac{4\times1}{7}=\frac{4}{7}=4:7$$

又变成了比。

观众中 A 和 B，附耳低声说了一会儿话，然后 A 说：“咱们忘记了自己是多少，只知道 A 被 B 除商是 0.6，能将咱们 A、B 两人变成比吗？”

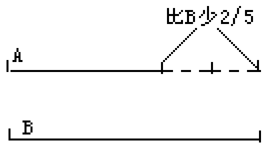
这可真是个难题，观众心想。

“这也不难！”“比”说，“A 被 B 除商 0.6，即，A÷B=A∶B=0.6，这就是说，A 是比的 60%，也即，3∶5，A=3，B=5。”停了停，“比”又补充说，“当然了，根据比的基本性质，你们二位同时扩大或缩小相同的倍数(0 除外)，组成新的比，也都符合你们的要求。”

场上响起了热烈的掌声。

B也补充说：“要是只知道A比B少$\frac{2}{5}$，咱俩的比是多少呢？”

“比”不慌不忙地画一张图：



A=5-2=3

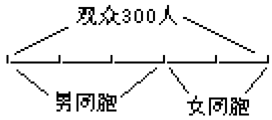
B=5

A∶B=3∶5

突然，观众中有人高声说：“咱们全场共有 300 名观众，其中女同胞占男同胞人数的$\frac{2}{3}$，求女同胞有多少人，你能用比来解么？”

“这个问题问得好，”观众一片喝采声，把应用题也请来让他变，大家心想：这回魔术师该黔驴技穷了吧？

只见“比”仍是沉着冷静地思考着，一面还用手比画着：



男∶女=3∶2

设：女同胞为 x 人，则男同胞为(300-x)人。

3∶2=(300-x)∶x

3x=2×(300-x)

3x=600-2x

5x=600

x=120

大家看了算式，没等“比”报出得数，便爆发出一阵雷鸣般的掌声。

“比”的善变能力，使观众们大开眼界。

会场上很长时间没有人再提出新的问题了，“比”的表演便结束了。

22.寻找三兄弟

“110 服务台”接到报告：线妈妈的三个孩子不见了！这消息使几何城内一片惊慌。谁都知道，几何城内要是没了线家兄弟，所有高楼大厦，田园道路，都将成为一片空白！

听了这个消息后，“角”吓得连嘴也张不开了！

三角形、四边形吓得两腿打颤。

长方体、正方体、圆柱、圆锥倒在地上……

“必须迅速将线段、射线、直线三兄弟找回！”T 台长立即命令各地 110 巡逻队。

“01 遵命！”

“02 遵命！”

“03 知道了！”

无线电波很快接通了联系。T 台长长吁了一口气，坐在收发台旁，静静地等待消息。

时间一分一秒地流过，T 台长紧皱双眉。

忽然无线电波嘀嘀响起：

“01 报告，01 报告，我们已经发现了线段的行踪！”

T 台长一阵惊喜，忙问：“他在哪里？”

“报告台长：线段从几何城出发，奔向学校，奔向工厂、农村，到了课桌上，又飞上黑板边、还在场头、田边……一会儿直奔莫斯科，又从莫斯科通向东京，通向纽约……”

“快，快将他截住，让他回到几何城来！”T 台长果断地命令，“必须派两名干警，一头一个方能截住！”

台长话音未落，又传来了：“02 报告，射线不愿回家，他要服务社会！”

“怎么？他现在干什么？”台长焦急地问。

“他说，他要把温暖的阳光洒向大地，给人们送来绿色和丰收；他要化作电光，给人们驱走黑暗；他还要走进实验室、放射科，变成 x 线、红外线、激光……为人类造福，他说，即使战斗到生命的最后一刻，也要像流星那样，放出全部的光和热，体现自己的生命价值……”

听了 02 的报告，T 台长无话可说，只是要 02 告诉他不要忘了几何城的父老乡亲！一旦需要，请立即返回。

旋即台长拨动按钮：“03，你们可曾见过直线的身影？”

“我们在 03 台同时放出了两颗侦察卫星，他们向着相反的方向各自追寻，找遍了大地、天空和茫茫宇宙。至今……”

“这么办吧！”T 台长说，“线家弟兄一向助人为乐，一旦需要，相信他们会不请自来。”稍停他命令各队，“天已不早，赶快回城。”

线妈妈听说三个孩子都在各地忙碌着，并且都在做一些服务社会、有益人类的工作，也就放心了。

23.米、米^2、米^3

“又把单位名称搞错！”老师很不满意，宁宁也生自己的气，“为什么总是分不清米、平方米、立方米？”他伏在桌上迷迷糊糊地想着。

想着，想着，竟昏昏入睡了。

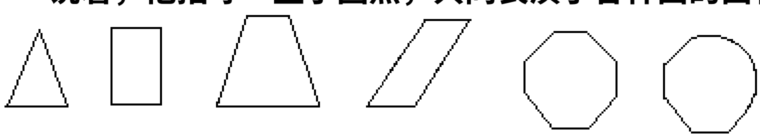
忽见米、米^2、米^{3}一起站在他面前，齐声说：“我们虽然都是一个家族的，都姓‘米’，可是各自的特点并不相同呀！”

米说：“你看我，身子瘦成一线，行动离不开两个点。”说着便指指头上、脚下，“我的身长就在这两点中。我干的工作是量长度。要想知道直线的长度，找我好了。分米、厘米两个小弟常常随我一起工作，遇到零头数，就让他们去处理。”

米的话音刚落，米^{2}飘了过来：“请再看看我！”又见他一招手，四个点蹦蹦跳跳，连成四条长度都是 1 米的线段，头尾相接，围成了一个正方形，“瞧，这围起来的平面才叫 1 米^2！”

宁宁问：“你为什么非要四个点不可呢？两个点不行吗？”

“不行，两个点只能连成一条线段，那是长度，至少要有三个点才能围成面，……”说着，他招呼一些小圆点，共同表演了各种面的面积：



接着，米^{2}说：“我的大哥叫(千米)^2。(分米)^2、(厘米)^2、(毫米)^{2}都是

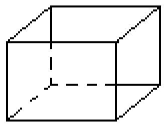
我的小弟弟。遇到算县、省、国家范围的大小时，总是大哥出动；算铁皮、图纸的面积时，我与几个小弟弟就自告奋勇了！”

宁宁听得津津有味，又问：“你们和米没有关系么？”

“有，要是没有关系，你就不会把我们搞混了。我家弟兄工作起来，总要先请米家弟兄帮忙，他们给量出了长度，我们才能算出面积来。米家兄弟工作(量长度)时，却从不用我们插手。”

这时，米^{3}过来了：“我与他们就更不相同了。”

说着，他向点、长度、面积招招手，他们立即聚拢到一起，“你看，我就是由点、线、面组成的。”



宁宁一看是个正方体：8 个顶点，6 个面，12 条棱。

“看清了吧？米，瘦得像一条线，只有长度；米^2，有长度、有宽度，却没有厚度；我呢，不仅有长，有宽，还有高(厚)！有人给咱们米、米^2、米^3，编了个顺口溜，说是‘长度一条线，面积成一片，体积占空间’。”稍停，米^{3}又说：“量长度，找米去；算面积用平方；算体积与求容量，要用立方来帮忙。”

宁宁听了大叫一声：“这下我可认清你们了！”他一睁眼，原来是做了一个梦。

24.F 查户口

户籍警 F 接到一份报告：在一座长方体的小屋里，住着几个形迹可疑的人。

他骑着电动摩托，迅速来到了小屋前，大声喊：“谁是户主？”

“我是！”“我是！”“我是！”接连有三四个人应答。

说话间，一个叫 $S_{表}$首先来到面前，他如同覆在小屋上的一张薄薄的塑料纸，轻轻飘了下来。

“你叫什么名字？”F 问。

“我叫表面积！”$S_{表}$应声回答。

紧接着 $V_{体}$也来到面前。

“你叫什么名字？”

$V_{体}$应声答道：“体积！”

“这房里就你们两个人么？”F 继续问。

“还有我呢！”屋内有人回答。

“请你出来说话！”

“要是走出去，我就不是我了！”屋内人答。

“怎么？出不来？你叫什么名字？”

“我是 $V_{容}$，就是容积的意思！我和容量是孪生兄弟。”那人回答得也很爽快。

F 户籍警满腹狐疑：真是三个怪人！又问，“你们是什么关系？为啥三个人都是房主？”

“什么关系？”$S_{\text{表}}$听了直挠头，“我们一直住在一起，不论到哪儿都是这样。”

“是谁把你们介绍来的？”F 继续问。

“长、宽、高！”三个几乎同时回答，理直气壮。

既然有来头，那就找介绍人好了。于是，找来了长、宽、高，他们分别是 5 米、4 米、3 米。谁也不否认，是他们介绍来的。

“咱们又不是流窜犯，有名，有姓，大惊小怪干啥？”这声音从屋里传出，显然是$V_{\text{容}}$不耐烦了。

F 连忙解释：“我的责任是登记户籍，对数学城里的每一位都要摸清楚来龙去脉。”

“既然是执行公务，那我们就自报一下吧！”$S_{\text{表}}$先自我介绍了：

“我叫表面积，专门负责油漆、粉刷一类工作，当然喽，像这座小屋用了多少木板，我也清楚，比如咱们这间木板屋共用木板面积是：

$(5\times4+5\times3+4\times3)\times2=94$(平方米)

“啊！原来如此！”F 听了后说，“我在上小学时就听老师说过，‘长方体表面积要计算，抓住长、宽、高三条线，两两相乘得一半，再乘以 2 就得 6 个面’，说的就是你了！”

“对、对，正是我！”$S_{\text{表}}$非常自豪。

“计算物体占有空间的大小，是我的工作！”$V_{\text{体}}$也自我介绍，“咱们这间小屋共占 $5\times4\times3=60$(立方米)空间，这早已报告了城建部门。”

三位证人见只有$V_{\text{容}}$躲在屋里不说话。

F 户警说：“容积同志也请你自我介绍一下吧！”

只听容积慢条斯理地说：“刚才体积的介绍不是已经把我包括进去了么？木板的厚度又没有告诉我，叫我怎么介绍自己呀？”

三位证人恍然大悟！“是啊！容积是物体所能容纳的体积大小，计算容积必须从里面量起……”于是，他们马上说，“长、宽、高木板的厚度都是 0.05 米。”

“既然知道木板的厚度，我的长、宽、高你们还不知道吗？”$V_{\text{容}}$看来很有点小脾气，“知道了我的长、宽、高，我的体积，连小学生都会算，何必多罗嗦？”

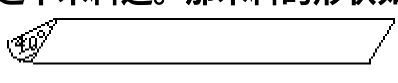
F 户警一听也是，既然他们都是好人，何必再详细考查呢？

25.扇形不再回家

秋日的夜晚，明月高悬，清风送爽，微风飘动着圆锥姑娘的喇叭裙，她漫步树林边，轻声吟诵诗句：人行幽径中，月上柳枝头……

当她路过伐木场时，突然一阵凄楚的哭声打断了思维，听声音是个小女孩。谁家的孩子，这么晚还在野外？

圆锥姑娘走进伐木场，循着声音，慢慢寻去，那哭声越来越清晰，时断时续。她跨过了横七竖八躺在地上的各种木材，来到一根被锯开的粗大的木料前停下了，声音就在这个木料边。那木料的形状如下图：



小女孩听到有脚步声，哭声更大了。

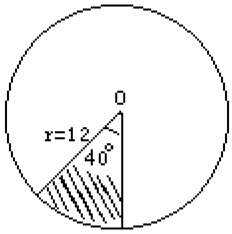
圆锥姑娘俯身一看：“哎哟，这是哪家的小妹妹？为什么独自儿倚着木料头伤心呀？”

“我找不到家了！”紧贴在木料头上的孩子揉了揉眼说。

圆锥姑娘端详了半晌，心想，看长像，这孩子很像圆。忙问：“你多大啦？”

那孩子止住了哭，回答：“不知道！”

圆锥姑娘沉思了一下，“有了！”她量了一下这孩子的身高，不禁一愣：“哟！原来你还是我亲戚呢！你的老家也是圆啊！”说罢，她围着那孩子画了一个圆：



便拍了拍那孩子的脑袋说：“你名叫扇形，是圆的一部分啊！瞧，r=12厘米！”

那孩子突然想起，高兴的说：“是的！是的！大家都这样喊我！”

圆锥姑娘又叫她叉开两足，一量叉开的角度是 40°，便说：“你有多大我知道了，所有的圆都是360°，你占圆面积的 $\frac{40}{360^0}$。”说罢圆锥姑娘乘着月光，拿了根小棒，在地面上计算了起来：

圆的面积是：πr^2

扇形的半径是：r=12 厘米

扇形的面积是：

$$\pi r^2 \times \frac{40}{360} = 3.14 \times 12^2 \times \frac{1}{9}$$

$$= 3.14 \times 144 \times \frac{1}{9} = 50.24(\text{平方厘米})$$

小扇形破涕为笑：“知道了！知道了！我是 50.24(厘米)^2，我的老家在圆里。姐姐快带我回家吧！”

“小妹妹，你不能走！”圆姑娘温和地安慰着扇形，“这里需要你！”

小扇形随即又哭了起来：“为什么不能走？这里要我做什么？”

圆锥姑娘指了指那根躺着的木料说：“要是没有你，木工师傅便不能计算这根木料的大小了，也就没法用这木料制造各种工具了！”

“为什么有我木工师傅才能知道这块木料大小呢？”

“只有用你的面积乘以木料的长度，才能算出体积来，要是你走了，光有长度怎么计算啊？”圆锥姑娘耐心地解释着。

扇形止住了哭泣问：“我在这里，这木料是多大呀？”

圆锥姑娘量得了木料的长度是 3 米，作了一番计算：

$$\pi r^2 \times \frac{40}{360} \times 300$$
$$= 3.14 \times 12^2 \times \frac{1}{9} \times 300$$
$$= 15072(\text{厘米})^2$$

果然，计算这根木料的体积，需要扇形作底面积。

圆锥姑娘又好言安慰了一番，说："这里有你的许多姐妹，它们有高有矮，总之，假定身高是 r，两腿叉开(也叫圆心角)是 n°，那么$\pi r^2 \times n°/360$都是你的姐妹。"小扇形也挺听话，于是她倚着木料安心地闭上眼睛。

圆锥姑娘直到扇形睡着了，才踏着月光，慢慢地回家。

26."时间老人"讲时间

时间老人从很久很久的以前走来，又匆匆忙忙地向遥远的未来走去，他的脚步一刻也没有停止。他经历了沧海桑田的变化，目睹了三皇五帝的兴衰，他是一个无所不知永远年轻的智慧老人。

时间老人是一部厚厚的历史，时间家族的小字辈一直跟踪着他，盯着要老人讲故事。

老人急着赶路，便说："想听故事？那就跟我一直走吧！"

时间老人答应了讲故事，时、分、秒，快步地跟上，年、月、日，紧追不舍，"季节"、"星期"，也都来了，连"世纪"、"年代"，也悄悄地尾随其后。

(一)

"就从你们年月日说起吧！"老人一面脚不停步，一面讲述着。

"远古时候，人们对我们时间家族，并不熟悉。他们日出而作，日入而息。迷迷糊糊地过日子。时间久了，他们发现日月星辰，寒来暑往，有着一定的规律。更兼相互交往，生产生活常常需要确定的时间，于是把太阳(日)升起又落下到再升起经过的一段时间叫做'一日'，又发现月亮圆缺一次的周期，是 30 日左右，于是把 30 日叫做'一个月'。日、月便这么产生了！"

日月听了高兴得跳起来："原来我们是这么诞生的！"

跟在一旁的"年"忙问："我是怎么诞生的呢？"

"人们又发现气候的变化也是有规律的！"时间老人继续说，"春、夏、秋、冬，寒来暑往，每 12 个月便周而复始，往复循环，于是把 12 个月叫做'一年'。又根据气候变化情况把一年分春、夏、秋、冬四季，每三个月称作一季……"

年、月、日听了时间老人的讲述齐声欢呼，他们终于明白了自己的身世。

"不料，这样做却出了不少麻烦！"时间老人又冒出了这句话，使他们顿时收住了欢乐的笑容。

(二)

时间老人继续讲述着时间的历史：

"其实，一年就是地球绕太阳转一圈所用的时间。"老人说，"后来知道地球绕太阳一圈实际用的时间是 365 天又 5 小时 48 分 46 秒，而我们计算

日期都是用整天数作单位，把 365 天当作一年。这样，①有的月份，就得规定 31 天。②一年中相差了 5 小时 48 分 46 秒，每过四年就多出 23 小时 15 分 4 秒，已接近一天。每过 4 年就需增加 1 天，因此又规定 366 天的年叫做‘闰年’，而把 365 天的年，叫做‘平年’。”

“年”听了忙问：“把 23 小时 15 分 4 秒当作一天实际还差 44 分 56 秒，这么算，时间长了，比如数百年以后，这误差不仍是不小吗？”

“你问得好！”时间老人接着说，“于是又用减少一些闰年来补救，规定：公历年份是整百数的，必须是 400 的倍数才作闰年，否则仍作平年。如公元 1200 年是闰年，而公元 1300 年便仍作平年。总之，四年一闰，百年不闰，四百年又闰，这样，误差便越来越小。经过了四千年后，也只差 2 小时左右，当然，仍是个近似值。”

“爷爷，你说的平年 365 天，闰年 366 天，这多出的 5、6 天加在哪个月上呢？”“日”不禁又提出了新问题。

“这个问题，说来又话长了！”时间老人说，“公元前四十六年古罗马帝国的儒略·凯撒大帝下令编制新历法。因为他是七月出生的，就规定将七月编为大月(31 天)，这样所有的单月：一、三、五、七、九、十一，都是 31 天，而把逢双的月份定为 30 天。可是平年只有 365 天，只有再从小月中减少一天，才能保证所有单月都是 31 天。

“让哪个小月是 29 天呢？

“当时的罗马帝国，判处死刑的罪犯都在二月份处决，就决定从这个不吉祥的月份减少一天。于是，二月只有 29 天了！”

“月”对应着现时的大月月份是一、三、五、七、八、十、十二，那么，再问：“可是现在八、十、十二，都是双月，怎么也成大月了？”

“这事，说起来就更令人哭笑不得了！”老人感慨万端地说，“后来，又出了位皇帝，叫做奥古斯都·凯撒，他是八月出生的，为了炫耀自己，他下令把九、十一月改成小月，而将八、十、十二月改为大月，这样就有七个大月，于是又从二月份抽出一天，这么一来，二月便只有 28 天了！只有在闰年时才是 29 天……就这样，一直沿用到现在。”

“这么改，远不如原来好记呢。”“月”不满地说，“真是胡折腾！”

“谁让他们有权呢！”时间老人意味深长地说，“是是非非我心里有数！”

(三)

说话间，“世纪”和“年代”也跟了上来，没用他俩开口，老人便说：“你们俩虽然表示的时间长，年龄却比年、月、日小。一百年为一个“世纪”，每十年为一个‘年代’。”

“照这么说，10 年=1 个年代，10 个年代=1 个世纪了？”世纪问。

“当然了，可是一些人常常把你们搞错，”老人说，“一个世纪的一百年，是从第一年算起的，如公元七世纪，第一年是 601 年，最后一年是 700 年。公元二十世纪的第一年是从 1901 年起算的。年代就不同了，他是从 0～9 计算的，人们说，公元二十世纪九十年代，是指 1990～1999 年。每个世纪的最后一年，不包括在任何年代里，只说某世纪的最后一年，如 2000 年是二十世纪的最后一年。”

“啊！原来是这样！”世纪和年代异口同声地说，“今后，再有谁把我们搞错了，咱们就要和他说清楚！”

就在他们只顾说话的当儿，时间老人已经悄悄地离去老远了！他留下一张字条，上面写着这样几个题：

1.你能讲出“四年一闰，百年不闰，四百年又闰”这种规定的道理么？

2.哪些月份是公历的大月？

3.公历平年的二月份是多少天？闰年呢？

27.x 侦探

x 是数学城里有名的侦探，许多疑难问题，都要找他去解决。凡是布满疑团的“未知数”在他手中都变得条理清晰，头绪清楚，最终真相大白。关于他的故事，远远近近都流传着，提起他的名字人人都赞不绝口。

(一)知你所想

一次，有位数学魔术师，说他知道每个人内心想的数是什么。开始谁也不相信，可是不论你想的是什么数，只要将这个数乘以 2，再加上 3，再扩大 4 倍，最后再除以 2，把所得的结果告诉魔术师，魔术师都能一个不差地说出每个人所想的数是多少。尽管每人开始想的数和最后的运算结果都各不相同。

比如：有人暗暗地想个 5，乘以 2 得 10，再加 3 得 13，再乘以 4 得 52，最后除以 2 得 26，魔术师知道结果是 26 后，便立即猜出你原先想的数是 5！

如果你想的是 15，按照上述程度结果是 66，

$(15\times2+3)\times4\div2=33\times4\div2=66$

把 66 告诉魔术师后，他也立即猜出你原先想的数是 15！

谁也不知其中藏着什么奥秘。

但是 x 却轻而易举给解开了。他假设自己就是每个人心里想的数，而后列成了一道符合要求的算式：

$$\frac{(2x+3)\times4}{2}$$

$$=\frac{8x+12}{2}$$

$=4x+6$

这就是说，任何数经过那么一系列的运算后，结果总是那个数的 4 倍多 6。魔术师只要把结果减去 6，再除以 4，便一定是你原先想的那个数了！

(二)和=积

我们知道 $99\times99>99+99$，可是有人要求“＞”号的两端各加上一个相同的运算符号和数，使这个不等式成为等式。面对这样的难题，许多人都束手无策。

最后找到了 x 侦探。x 端详了一会，便深入到式子中，使不等式成为等式：

$99+99x=99\cdot99x$

$99=99\cdot99x-99x$

99=99x·(99-1)

99=(99·98)x

1=98x

$$x=\frac{1}{98}$$

x探得了等式中的数是 $\frac{1}{98}$，代入后成为：

$$99+99\times\frac{1}{98}=99\times99\times\frac{1}{98}$$

这个式子也可以转化为：

$$99+\frac{99}{98}=99\times\frac{99}{98}$$

$$99+\frac{99}{99-1}=99\times\frac{99}{99-1}$$

假定 99 为 A，上式便是：

$$A+\frac{A}{A-1}=A\times\frac{A}{A-1}$$

这样便可以任意列出“和=积”的式子来了。

当 A=5

$$5+\frac{5}{5-1}=5\times\frac{5}{5-1}\quad(=6\frac{1}{4})$$

当 A=12

$$12+\frac{12}{12-1}=12\times\frac{12}{12-1}\quad(13\frac{1}{11})$$

当 A=81

$$81+\frac{81}{81-1}=81\times\frac{81}{81-1}\quad(=82\frac{1}{80})$$

……

平常人们总以为只有 0+0=0×0，2+2=2×2，此外便没有了。根据 x 侦探的结果，人们竟然找到了一个“和=积”的万能公式。

（三）差=积

两数的差与积相等，这也是个难题。

在“和=积”中，一般还能找到“0+0=0×0，2+2=2×2，可是在“差=积”时，一般人只能找到一个“0-0=0×0”！

问题到了 x 侦探的手里又是轻而易举地解决了。

假定：A-A=A·Ax 侦探便走进式中：

A-Ax=A·Ax

A=A·Ax+Ax

A=Ax(A+1)

1=x(A+1)

$$x=\frac{1}{A}+1$$

将 x 代入等式：

$$A-A\cdot\frac{1}{A+1}=A\cdot A\cdot\frac{1}{A+1}$$

$$A-\frac{A}{A+1}=A\cdot\frac{A}{A+1}$$

当 A=5

$$5-\frac{5}{5+1}=5\times\frac{5}{5+1}\quad(=4\frac{1}{6})$$

当 A=12

$$12-\frac{12}{12+1}=12\times\frac{12}{12+1}\quad(=11\frac{1}{13})$$

当 A=86

$$86-\frac{86}{86+1}=86\times\frac{86}{86+1}\quad(=85\frac{1}{87})$$

……

瞧！$A-\frac{A}{A+1}=A\cdot\frac{A}{A+1}$，也成了“差 = 积”的万能公式了！

（四）“什么”、“多少”

x 侦探的高明之处在于他能把“未知”的，也当作“已知”的，让他一道参与运算。

有位小朋友解题遇到了困难，问 x 侦探：

“什么数加上 20 的和与它乘以 20 的积相等？”

x 侦探说：“你就把我当成‘什么’，去列式计算吧！”

小朋友按照侦探的话，列出了：

x+20=x·20

x+20=20x

20=20x-x

19x=20

$$x=1\frac{1}{19}$$

他把 $1\frac{1}{19}$ 代入算式，计算一下果然相等：

$$20+1\frac{1}{19}=20\times1\frac{1}{19}=21\frac{1}{19}$$

那位小朋友又问他：

“一个数扩大 3 倍后，再增加 100，然后缩小 2 倍，再减去 36，得 50，这个数是多少？”

“那你就把我当成‘多少’吧！”x 侦探说。

“多少”就是“这个数”，小朋友又很快列出了算式：

$$\frac{3x+100}{2}-36=50$$

$$\frac{3x+100}{2}=50+36$$ （两端都加上 36）

3x+100=172 （两端都乘以 2）

3x=172-100

3x=72

x=24

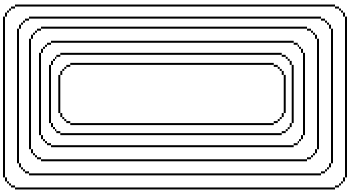
这个数是“多少”？是 24！

x 侦探果然神通广大！

28.划跑道

长鼻象因为有一个比手还灵活的长鼻子，虎大王安排他负责赛场的跑道设计，并且告诉他即将举行的动物界长跑比赛，将是每组 5 人，分场进行。

划跑道对于长鼻象本是轻而易举的，5 人一组需要划六条跑道，他也清楚，可是因为山下面那片空地作赛场，面积太小，跑道必须划成直线加圆弧，让运动员在赛场转圈子，才能满足要求。



这样，问题就来了：跑内圈和跑外圈长度是不相同的，运动员起点相同，终点必须有区别才能正确地评定成绩。可是终点定在哪？他左思右想也没找到解决的办法。

必须圆满地完成任务，因为虎大王的脾气他是知道的，倘若发怒，自己会被撕成肉片。

他愁眉苦脸独自一人，耷拉着大耳朵在赛场上转悠……

长胡子山羊在山坡吃草，见此情景，忙问：“象大哥，你有什么困难么？老弟一定全力相助。”

长鼻象叹了口气，慢腾腾地说：“怕是老弟也解决不了啊！”

“你且说说看，咱们可以共同想办法么！”

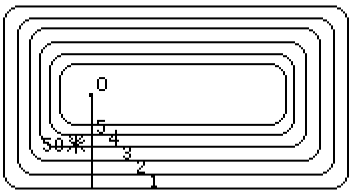
在山羊的再三追问下，大象说出了自己的烦恼。

不料，山羊轻描淡写地说：“我当是啥，这有何难？你想在两端划多大的圆弧？”

“根据赛场情况，最大只能划半径 50 米！”

“这就是说，直径是 100 米了。假定每两股道间距离是 1 米，那么每一个半圆的周长都可以求出来：

1 号跑道弧长是：



$$\frac{1}{2}\pi D=\frac{1}{2}\times 3.14\times 100=157(\text{米})$$

2 号跑道弧长是：

$$\frac{1}{2}\pi(D-2)=\frac{1}{2}\times 3.14\times 98=153.86(\text{米})$$

3 号跑道弧长是：

$$\frac{1}{2}\pi(D-4)=\frac{1}{2}\times 3.14\times 96=150.72(\text{米})$$

4 号跑道弧长是：

$$\frac{1}{2}\pi(D-6)=\frac{1}{2}\times 3.14\times 94=147.58(\text{米})$$

5 号跑道弧长是：

$$\frac{1}{2}\pi(D-8)=\frac{1}{2}\times 3.14\times 92=144.44(\text{米})$$

知道了每个半圆的长度，便可求出它们的差数来。

如 1 号跑道比 2 号跑道长：

157-153.86=3.14(米)

这样就在直线长度上确定两点，使它们间的距离是 3.14 米，便可确定两个跑道各自的终点位置。当然了，跑的圈数越多，内外跑道的差数越大，但都可以计算出来。照此办理，每一号跑道的终点都可以确定了。

长胡子山羊的一番话，使长鼻象豁然开朗，于是他很快地划出了赛场跑道。

29.循环赛

虎大王发出通知，定于秋天在森林广场举行动物界拳击比赛。

袋鼠家族为了提高拳击技能拿下赛场金杯，在本家族中已连续举行了多次小型比赛。最后选出 6 名赛手进行决赛，这一次并特意聘请长颈鹿作总裁。

长颈鹿根据总共是 6 人参赛，便着手计算共需几轮比赛，一共要赛多少场次，以便统筹安排。

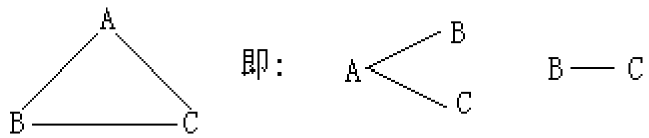
岂料，这问题看似简单，实际并不容易。因为参赛 6 个人，每一个人都必须与除自己之外的所有运动员交手，才能分出高低。

长颈鹿认真地思考了一番，他先用一个简易的类似问题寻找答案，而后逐步加深，推到问题本身，结果问题被解决了。

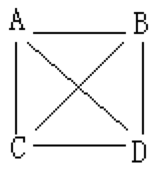
长颈鹿的思考过程是这样的：

2 人比赛，只需一轮一场，便可决定胜负了。

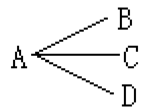
3 人比赛，则需 2 轮 3 场。设运动员是 A、B、C，如图：



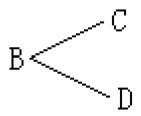
4 人比赛，设运动员是 A、B、C、D，如图：



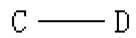
即：第一轮：



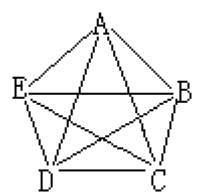
第二轮：



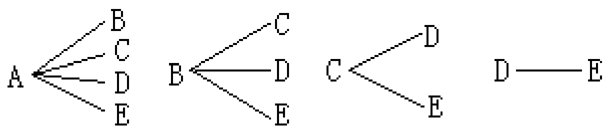
第三轮：



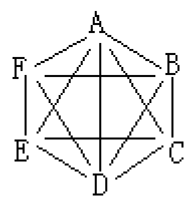
共 3 轮 6 场。
5 人比赛，如图：



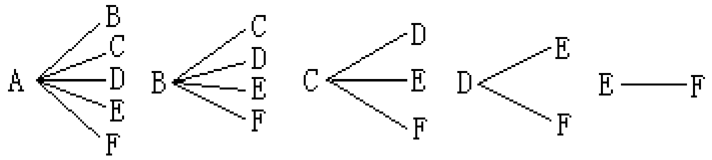
即：



共 4 轮 10 场。
6 人比赛：如图：



即：



共需 5 轮 15 场。
经过这么一系列运算，长颈鹿发现了一条规律：
比赛的轮数总比参赛的人数少 1。
比赛的场数则是：人数×轮数的一半。
6 个人参加循环赛，需要的轮数是：6-1=5(轮)
比赛的场数是：6 人×(6-1)÷2=30÷2=15(场)
问题解决了，长颈鹿长长地嘘了口气：原来好些复杂的问题，先用简单

问题作类比，便可以找到解决办法了。

于是他便着手编制比赛程序，作好一切赛前准备。

30．公主求援

“天苍苍，野茫茫，风吹草低见牛羊……”

数学城的皇太后，满腹忧伤地听着宫女们唱着这支描写北国风光的歌曲。

自从女儿出嫁外族以来，她日夜思念。只有那只大雁来往穿梭为她们母女沟通情感。每当思女情切时，太后便命宫女唱这支歌给她解闷。她坐在皇宫的软椅上，听着听着，便睡眼朦胧，仿佛自己也随着女儿置身在那辽阔无边的草原上。

忽然飘进一道白光，直扑太后怀中。众人大惊，太后定睛一看，原来是那只美丽可爱的大雁！太后双手捧起大雁，亲了又亲。

只见那大雁气喘吁吁地禀道：“公主告急：敌国犯界，令使者送一难题，能解出则立即退兵，解不出则踏平国土，掠走公主。公主说，想我数学王国一向以聪明睿智闻名天下，女儿不才，思之再三，终解不出，满朝文武束手无策，请母后急速设法。”

太后急问：“是何题目？竟连我那绝顶聪明的女儿也被难住了？”

“敌国告知，他的首批人马是 3^{1000}，不要我朝求得总数，只要能告知末位是几的方法，即不进犯！”大雁继续叙述着。

太后一听，对方显然是有意刁难，否则用最笨的方法也可求得，即：$\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\cdots\times3}_{1000个3相乘}$，一时竟也没有办法。

太后连忙命人告知国王。国王立即召集群臣，研究对策。

军师“周期”献计说：“大王，咱们不妨先作几个简单的计算，看它积的尾数有无规律。”

“爱卿尽管试验！”

当下，军师“周期”便演算了起来：

3的个数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	……
积的末位	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	7	1	……

果然每 4 个数为一个周期，积的末位按 3、9、7、1 循环出现。

再看 1000 个 3 中有多少个周期：

1000÷4=250(个)

恰好没有余数，说明了 3^{1000} 积的末位数是 1。

国王大喜，忙令修书告知女儿。

“且慢！”“周期”军师说，“请大王将 2～9 各个数连乘的末位数字及其变化周期也都告知对方，让他们从此再不敢小视公主……”接着军师说，“数 2 的周期是 2，4，8，6；数 4 的周期是 4，6；数 5 的周期总是 5；数 6 的末两位总是 36、16、96、76、56 五个数循环；7 的末两位总是 07、49、43、01；8 的末位总是 8、4、2、6；9 的末位总是 9、1 重复出现。”

国王按照军师的意见修书一封。

大雁以最快的速度将答案送给公主。

公主又将答案以最快的速度交给了敌兵。

敌兵将领一看，不仅没有难倒公主，反而连他们自己也不知道的问题都解出来了，便乖乖地将兵撤退。

31.编号里的秘密

“数字百货公司”接连发生了几件怪事，成了全城的热点话题。

一件是进来的货物中神不知鬼不觉地被掺了假，弄得真假难辨。一件是有的货物不翼而飞了。手段都极其高明，令人很难发觉。

案情报到公安局。

侦察员 y 亲临现场，他的任务一是要把所掺的假货挑出来，决不能让它坑害消费者，二要把被偷走的货物查清。

y 找到了公司的保管员。

保管员打开“数字仓库”，只见那些被掺假的货物都编了号，井然有序地摆放在地上：

第一批：0、2、6、12、20、30、36、42；

第二批：1、3、4、7、11、18、29、47、50；

y 认真观察了各个编号，反复分析，终于被他找到了疑点：

第一批货物的编号，都是依照一定的规律排列的：

即：0=0×1，2=1×2，6=2×3，12=3×4，20=4×5……

都是相邻的两个整数的积！只有“36”例外。打开 36 的包箱，果然是假货！

第二批货物的编号：4=1+3，7=3+4，11=4+7……后一个数都是前两个数的和，但是其中又有一个例外，打开“50”的包箱，果然也是假货。

y 侦察员，又问盗失的货物在哪儿？

保管员说：“为了保护现场，所进的货物都按原来的顺序依次排放的，被盗走的就空着位置。”说着又把侦察员带到另一个保管室。

y 察看了现场，果然原封未动，依原包装编号整齐地摆放着：

第一批：64、32、□、8、4、2、1

第二批：1、3、7、15、31、63、□

y 心想，首先应该弄清被盗走货箱的编号，而后才便于破案。可是被盗走的包箱编号是多少呢？

第一排被他很快破译了：前一个数都是它相邻的后一个数的 2 倍，可以断定，□的编号是 16。

但是第二排反复推敲也没有解出来，只得抄下编号顺序带回局里。

局长老 G，迅速召开全体干警会议，集体研究，最后终于发现：从第二个数起，每一个后面的数都是它前面数的 2 倍+1，即：1×2+1=3，3×2+1=7，7×2+1=15……可知，□= 63×2+1=127。

G 局长迅速作了布署，一场打假追真的战斗便悄悄地展开了。

32.侦探 1667

数学城来了一位代号 1667 的侦探，他大言不惭地声称：凡是他参加的案件，没有侦破不出的。就是任你心里随意想的一个数，也能猜出。

这消息一传出，数学城的人纷纷前来找他。

“一位数大院”的瘦“1”说：“咱们一位数的弟兄中有一个自从与你摔跤后，就没回家，你说他是几？”

1667 说：“你那位弟兄与我相乘的积，最末一位可有人看见？”

人群中忙有人应道：“我看见了，你们乘积的尾数是 9。但谁与你相乘的，却没有看清！”

1667 侦探眉头一皱说：“知道了，他是 7。”

瘦“1”连连点头，“正是，正是！”接着又问道，“要是与你相乘积的末位是 8，那么他是谁？”

1667 侦探不慌不忙地说：“那肯定是你家老 4！”

众人算了一下：1667×4=6668，尾数果然是 8。

人群中 99 走出来，问：“要是我家弟兄与你相乘积的尾数是 1，你知他是谁吗？”

1667 侦探一看说话的是“两位数”，忙说：“啊！你是两位数，就要告知我积的末两位；如果是三位数就要告知我末三位……”

99 补充说：“积的末两位是 41！”

1667 略加思索，回答道：“与我们相乘的是 23！”

1667 与 23 相乘的积是 38341，末两位果然是“41”。

“我们三位数与你相乘，积的末三位是 321，是谁与你相乘的？”

“963！”1667 立即报出了答案。

接着又有许多人说他们心里想好了数，请回答。

“末位是 3。”

“相乘的是 9。”

“末位的 16。”

“相乘的是 48。”

“末位是 207。”

“相乘的是 621。”

……

1667 侦探果然功夫不凡。站在一旁观看的 x 侦探也看不懂他是怎样测知的。心想，这种问题遇上我也无能为力。

之后，x 侦探专程拜访了 1667，向他请教破案方法。

1667 侦探非常热情地说：“老弟，我是利用‘1667×3=5001’这个特殊结果进行测算的。不论对方心里想的是几，只要将他告知的尾数乘以 3 就得了。他是一位数，我也只取积的末位……”

x 侦探回忆 1667 上次的侦探经过，果然如此。连忙道谢说：“老兄高明，实在高明！”说着便告别回家继续学习侦探本领了。

古今算谣

兄弟二人摘黄瓜，
一共摘了七十八，
哥哥多摘整八根，
二人各摘多少瓜？

◇古今算谣◇

用歌谣形式来表达数量关系的数学问题，可称为谣体数学。

谣体数学是数学百花园中一朵常盛不衰的奇葩。它源远流长，脍炙人口。古今中外的数学经典中，都记录了大量的歌谣算题。《希腊文集》、中国明代的《算法统宗》、美国亚当的《学者算术》等数学经典中，都有记载，民间也广泛流传着。

谣体算题的特点是：趣味性强、文学性浓、朗朗上口、易诵易记。这种独特的形式，大大地提高了它的实用价值。其他类型的数学题往往是过耳不留，印象不深。谣体算题却顺口押韵，一经过目，长久不忘，可以收到“熟记一题，掌握一类，终生受用”的功效，对未来的学习生活都具有重要意义。“读歌谣，学数学”实在是一条行之有效的好途径。

这里收集了广泛流传于民间的谣体算题。它们有的是群众自编的，来源于日常的生产、生活实际之中；有的是数学经典题，世代相传，成了群众的口碑。

谣体算题内容丰富，包容了数学知识的方方面面。每一道题，都闪烁着人类智慧的光辉，对发展思维、增长见识、扩展视野都大有助益。

1.植树

一条公路千米长，
两旁栽上小白杨，
每隔 5 米栽一棵，
多少杨树栽路旁？

解：植树类问题，如果不是栽成圆形或方形那样的封闭曲线，一般都是：
株数=路长÷株距+1
即路的两端都栽树。
本题是在路两旁栽树，只要将单行株数求出后再乘以 2 就行了。
1000÷5+1=200+1=201(株)
201×2=402(株)
答：共栽杨树 402 株。

2.湖边桃柳

湖边春色分外娇，
一株杨柳一株桃，
沿湖周长两公里，

五米一株不缺少。
桃红柳绿交辉映，
鸟飞雀舞乐陶陶，
漫步湖边赏春色，
不知桃柳各多少？

解：植树问题有三个基本条件：距离、株距、株数。这三个条件间的关系，随着植树路线不同而略有变化。

本题的植树路线是一个封闭曲线(圆周)，三者的关系便是：

株数=距离÷株距

题中已告知距离是 2 公里(2000 米)，株距是 5 米，因而，株数可求。

2000÷5=400(株)

400÷2=200(株)

答：共栽桃柳各 200 株。

3.方阵

将军领大兵，
战士排方阵。
每边六层中间空，
外层每边十九人，
多少战士摆方阵？

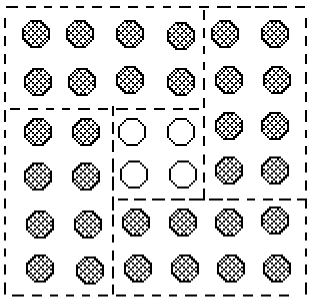
解：方阵有实心和空心两种。

实心的方阵，总人数是外边人数自乘。

空心的方阵，总人数是外边人数自乘再减去中间的空位。

空位的人数怎么求呢？

因为每向内一层，便少 2 个人，所以，空位每边的人数是外边人数减去层数的 2 倍(如图)，



中空方阵总人数=外边×外边-(外边-层数×2)
×(外边-层数×2)
=外边 2-(外边-层数×2)2

如果将中空方阵，接图中连线分成四部分，每部分为：(外层-层数)×层数。所以，还可以表示为：

中空方阵总人数=(外层-层数)×层数×4

解法 1：19×19-(19-6×2)×(19-6×2)
=361-7×7
=361-49
=312(人)

解法 2：(19-6)×6×4

=13×6×4

=312(人)

答：方阵人数是 312 人。

4.连续数

连续奇数有七个，
相加之和 259，
请你认真细琢磨，
每个奇数为几何？

解：奇数连续数的特点是两相邻数之间差是 2，如果奇数连续数的个数也是单数，如：1、3、5；1、3、5、7、9 等等，那么，处在正中间的那个奇数，恰是它们的平均数，即：1、3、5 三个奇数中，中间的 3=(1+3+5)÷3；1、3、5、7、9 五个奇数中，中间的 5=(1+3+5+7+9)÷5。

由此，可以求得中间一个数。

259÷7=37……中间的一个奇数

所以，这七个奇数分别是：

31、33、35、37、39、41、43

5.两个数

两数相减差是 5，
两数相除商是 6，
两数相加和是 7，
两数相乘积是 6。

请你算一算，
它是哪两数？

解：我们只能从它的和、差、积、商中寻找答案。

从差是 5、和是 7，可以用“和差问题”的规律，求出两数。

从积和商都是 6，可以断定：两数中必定有一个是 1，因为只有“ 1 乘不变，1 除不变”。

解法 1：

(5+7)÷2

=12÷2

=6…………大数

6-5=1……小数

解法 2：假定两数为 a、b，

a÷b=6 a×b=6、

可知 a=6 b=1

答：这两个数是 6 和 1。

6.老人卖梨

一个老人卖黄梨，
连筐共重一百一。
卖去梨的整一半，
连筐还剩五十七。
这筐梨共几斤重？
请你再给回回皮。

(注：斤是中国的市制重量单位，2 斤=1 公斤，下同)

解：若剩下的 57 斤全部是梨，则总数应是 57 斤的 2 倍，因为总数的 1/2 是 57。这样，总数便是 57×2=114(斤)了！实际总数只有 110 斤，为什么多出 4 斤(114-110)呢？因为把筐的重量也当作梨算了。可见多出的 4 斤恰是筐的重量。

也可以这么想：筐和梨的总重量是 110 斤，它的一半应是：110×1/2=55(斤)，实际剩下的却是 57 斤，多出的 2 斤便是筐的一半重量。

求得了筐的重量，梨便可求了。

解法 1：
筐重：57×2-110=114-110=4(斤)
梨重：110-4=106(斤)

解法 2：
筐重：57÷(1-1/2)-110=4(斤)
梨重：110-4-106(斤)

解法 3：
筐重：(57-110÷2)×2=4(斤)
梨重：[110÷2-(57-110÷2)]×2
=[110÷2-2〕×2
=53×2
=106(斤)

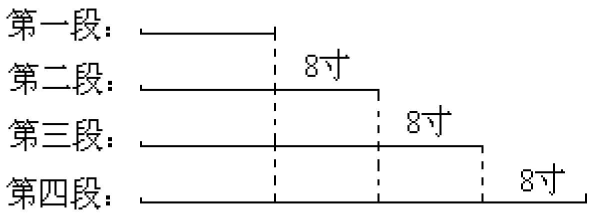
答：这筐黄梨共重 106 斤。

7.剪绳

出道题，够你算，
一丈绳子剪四段，
一段比一段长 8 寸，
各段多长你剪剪。

(注丈、尺、寸都是中国的市制长度单位，1 米=3 尺。下同)

解：初看无从下手。但是当我们画出线段图，便容易找到解题的途径了。



从图中可看出 若从总长度中减去 6 个 8 寸，则余下部分相当于第一根(最短的一根)的 4 倍，从而，最短的一根可求。

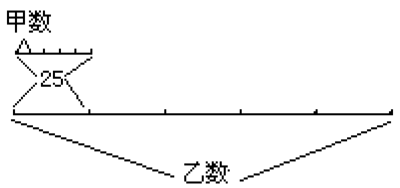
求得了最短的一根，其余的便迎刃而解。

1 丈=10 尺 8 寸=0.8 尺
(10-0.8×6)÷4=5.2÷4=1.3(尺)
1.3+0.8=2.1(尺) 2.1+0.8=2.9(尺)
2.9+0.8=3.7(尺)
答：剪成的四根长度分别是：1.3 尺、2.1 尺、2.9 尺和 3.7 尺。

8.两数差

甲和乙，两个数，
25 的 1/5 是甲数，
乙数的 1/5 是 25，
不知两数是多少
请你算算相差数。

解：这两个数用线段图，可表示为：



甲数是“求一个数的几分之几是多少，用乘法。”
乙数是“已知一个数的几分之几是多少，求这个数，用除法。”
显然，乙数大于甲数。
25÷1/5-25×1/5
=125-5
=120
答：两数的差是 120。

9.两个长方形

长方形，两块地，
长与宽差不离，
一长 6 米宽 3 米，
一长 5 米宽 4 米。
两块地里都种菜，
拉上篱笆防鸭鸡。
现在请你算一算，
篱笆长度是多少？
面积是否一样的？

解：题目中已经具备了长和宽两个基本条件，按照公式，分别求出两个长方形的周长和面积就行了。
两个长方形周长分别是：
(6+3)×2=9×2=18(米)
(5+4)×2=9×2=18(米)
两个长方形的面积分别是：

6×3=18(平方米)

5×4=20(平方米)

答：篱笆长度是 18 米。两块地的面积分别为 18 平方米和 20 平方米，不一样。

10.铁箍长

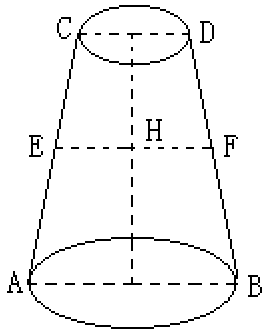
一个烟囱十米高，
打个铁箍在当腰，
顶径半米底一米，
谁知铁箍长多少？

解：烟囱的形状是个底粗上细的圆台。要求铁箍长度(也即正中间的圆周)，必须先求得烟囱正中部圆的直径。

正中间的直径怎么求呢？我们先画个图看看：

图中：AB=1 米，CD=0.5 米，h=10 米。

烟囱的剖面 ABDC 是个等腰梯形，EF 是两腰的中位线。可知：



EF=(上底+下底)÷2=(0.5+1)÷2=0.75(米)，EF 是当腰圆的直径，从而，铁箍长度可求。

即：圆周长=π·直径。

3.14×[(0.5+1)÷2]

=3.14×[1.5÷2]

=3.14×0.75

=2.355(米)

答：铁箍长 2.355 米。

11.树粗

一棵大树不知粗，
拿根绳长一丈五，
绕了三周余六尺，
这棵大树有多粗？

解：一丈 5 尺长的绳子，如果去掉 6 尺，它的长度便正好是树的圆周的 3 倍，因此，树的周长和直径便不难求出。

1 丈=10 尺 1.5 丈=15 尺

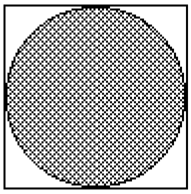
(15-6)÷3

=9÷3

=3(尺)……………………………(树的周长)
3÷3.14≈1(尺)………………(树的直径)
答：这棵大树直径约 1 尺，粗约 3 尺。

12.方中圆

一块纸板正方形，
周长 16 厘米不挂零。
挖去一个最大的圆，
圆洞面积怎么算？



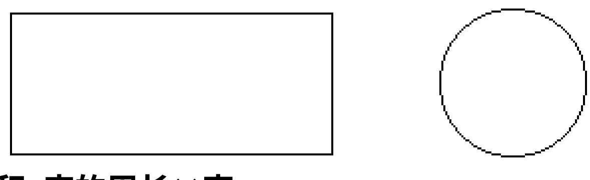
解：周长 16 厘米的正方形，其边长是 16÷4=4(厘米)。
在纸板中挖最大的圆洞，则圆的直径与正方形边长相等，也是 4 厘米。
圆的直径是 4 厘米，半径便是 2 厘米。根据圆的面积=半径 ^{2}×π，便可求出圆洞面积。

$(16÷4÷2)^2×\pi$
$=2^2×3.14$
=12.56(平方厘米)
答：圆洞面积 12.56 平方厘米。

13.铁皮

制个圆桶不算小，
底面直径和桶高，
都是一米不能少。
需要铁皮尽你用，
请问至少要多少？

解：求圆柱体的表面积是：侧面积加上两个底面积。因为铁桶一般是不带上盖的，所以只要在侧面积上再加一个底面积，便行了。



圆柱的侧面积=底的周长×高。
底面是个圆，求面积需先求半径。
题中已告知了底的直径，所以周长和半径都可求出。

$1×3.14×1+(1÷2)^2×3.14$
$=3.14+0.52^2×3.14$
=3.14+0.785
=3.925(平方米)答：至少要用铁皮 3.925 平方米。

14.一堆小麦

打谷场上一堆麦，
堆成圆锥不需说。
量量高度整一米，
底面圆周十五点七(米)，
谁能不必用秤称，
算知小麦多少吨？
(小麦每立方米约重 730 公斤)

解：圆锥的体积等于它等底等高圆柱体体积的三分之一。

即：$V_{锥}=\frac{1}{3}r^{2}\pi h$

题中底的周长是 15.7 米，底的半径便是：

15.7÷3.14÷2
=5÷2
=2.5(米)

从而可求得圆锥的体积，之后，再化为重量。

730 公斤=0.73 吨

$0.73\times[(15.7\div3.14\div2)^{2}\times3.14\times1\times\frac{1}{3}]$

$=0.73\times[2.5^{2}\times3.14\times\frac{1}{3}]$

$=0.73\times[6.25\times3.14\times\frac{1}{3}]$

$=0.73\times[19.625\times\frac{1}{3}]$

≈0. 73 ×6. 54
≈4.775(吨)

答：这堆小麦重 4.775 吨。

15.正方体

一个木制正方体，
棱长总共七十二分米。
请问体积是多少？
再问它的表面积？

解：解这个问题，必须熟悉正方体的特点，每个正方体，都有 6 个相等的面，12 条相等的棱。

题中已知 12 条棱总长是 72 分米，则一条棱长便是：72÷12=6(分米)。而后，根据：

正方体的体积=棱长×棱长×棱长
正方体的表面积=棱长×棱长×6
便可求解。

这个正方体的体积是：

(72÷12)×(72÷12)×(72÷12)

=6×6×6

=216(立方分米)

表面积是：

(72÷12)×(72÷12)×6

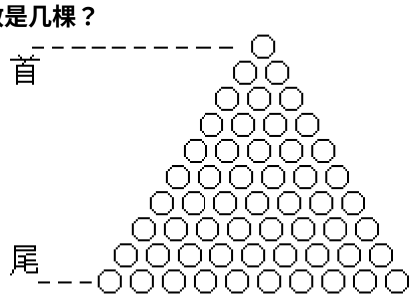
=6×6×6

=216(平方分米)

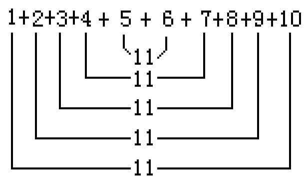
答：这个正方形体积是 216 立方分米，表面积是 216 平方分米。

16.木垛

一堆木料一般粗，
向上层层少一株。
底层十根顶一根，
稳稳当当堆成垛。
过往行人请算算，
木料总数是几棵？



解：这类连续数相加问题，可用公式：



和=(首项+尾项)×(项数÷2)

道理是一目了然的，即：

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10

木料底层为 10，即总共 10 项，首项与尾项的和为 11，并且每依次两项的和都相同，10 项便有(10÷2)个 11。

(1＋10)×(10÷2)

=11×5

=55(根)

答：木料总数是 55 根。

17.比武场

比武场上两列僧，
手握禅杖气势雄。

第二列多出十四位，
第一列整整二十人，
要想两列人相等，
第二列抽出多少僧？

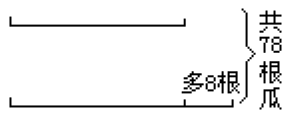
解：要使两队数相等，有两种思路：
一种是，求出总人数后，再一分为二。
一种是，将第二队多出的人，一分为二。
解法 1：
(20×2＋14)÷2
＝54÷2
=27(人)…………………………(两队平均人数)
20+14-27
=34-27
=7(人)…………………(第二队抽出人数)
解法 2：
14÷2=7(人)
答：第二列应抽出 7 人。

18.兄弟摘瓜

兄弟二人摘黄瓜，
一共摘了七十八，
哥哥多摘整八根，
二人各摘多少瓜？

解：我们可以这么想：如果从总数中取出哥哥多摘的 8 根，则兄弟俩摘的瓜数便相等了，因此，余下的数相当于弟弟摘的瓜数 2 倍。

画个线段图就更清楚了：



弟弟摘的根数：
哥哥摘的根数：
因此，这类题的解法公式是：
小数=(和-差)÷2
大数=(和+差)÷2
(78-8)÷2
=70÷2
=35(根)……………………(弟弟摘的)
78-35=43(根)…………(哥哥摘的)
或：(78＋8)÷2=43(根)……………(哥哥摘的)
43-8=35(根)……………………(弟弟摘的)
答：哥摘 43 根瓜。弟摘 35 根瓜。

19.一群鸡

庭院里，有群鸡
加上 7，减去 7，
乘以 7，除以 7，
其结果，仍是 7，
你算算，多少鸡？

解：这类问题一般用“逆推法”解答比较方便。

结果的 7 是除以 7 以后得到的，若没有除之前应是 7×7=49，49 又是乘以 7 后得到的，没乘之前应是 49÷7=7，……这样倒推下去，遇除变乘，遇乘变除，遇减变加，遇加变减，便可追根究底，求得答案。

解 1： 7×7÷7＋7-7=7(只)

解 2：设原有鸡为 x 只，可列方程：

[(x＋7)-7]×7÷7=7

x×7÷7=7

x=7

答：庭院里有 7 只鸡。

20.狮头鹅

狮头鹅，狮头鹅， *
每天见我叫哥哥。
平均三天一个蛋，
四两一个很准确。
我喂鹅，拣鹅蛋，
二十斤蛋装一箩。
三年共下多少蛋？
共装几箩剩几个？

解：1 年按 365 天计算，3 年共 365×3=1095(天)每 3 天下 1 个蛋，共下蛋：

1095÷3=365(个)

每个 4 两，365 个蛋共重：

4×365=1460(两)=146(斤)(以 1 斤=10 两计算)

每 20 斤装一箩，146 斤可装：

140÷20=7(箩)……6 斤

即：365×3÷3= 365(个)

0.4 ×365÷20

=146÷20

=7(箩)……6 斤

6 斤=60 两

60 两÷4 两=15(个)

答：三年共生 365 个蛋，可装 7 箩，余 15 个蛋。

21.七个老翁

迎面走来七个老翁，
七个老翁拄着七根拐棍。
七根拐棍系着七个葫芦，
七个葫芦装着七种名酒。
每种名酒都已喝剩七两，
七种名酒换来七个铜板。
请问每个老翁得到铜板几个？

解：由于题中出现了许许多多的“7”，令人眼花缭乱。解题时只有抓住关键词语，才能找到突破途径。

题中“7 种名酒换来 7 个铜板”是关键的一句，每个酒葫芦里装一种名酒，7 个老人只有 7 种名酒，换来的铜板只有 7 个。其他的一些叙述都是特意虚设的。因此，看似复杂，其实十分简单。

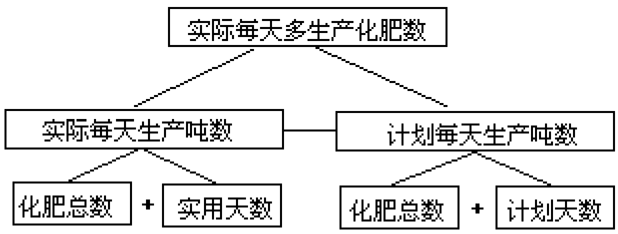
7 个铜板÷7=1 个铜板

即每位老翁得到 1 个铜板。

22.生产化肥

生产化肥一千吨，
计划二十五天来完成。
实际只用二十天，
每天多产多少吨？

解：要求实际每天生产化肥数比计划每天生产化肥数多多少，就要知道实际每天生产的和计划每天生产的。即：



1000÷20-1000÷25
=50-40
=10(吨)
答：每天多产 10 吨。

23.朝圣

我赴圣地爱弗西，
途遇妇女数有七，
一人七袋手中提，
一袋七猫数整齐，
一猫七子紧相依，
妇女、布袋、猫与子，
几何同时赴圣地？

解：这是一首在英国流传的古老童谣，它与十三世纪初意大利数学家斐波那契所著的《算盘书》上的一则趣题极相似，那道题是：

在去罗马的路上，有七个老妇人，每人有七

匹骡子，每匹骡子驮七条口袋，每只口袋装七个大面包，每个面包带七把小刀，每把小刀有七层鞘。请问：妇人、骡子、面包、小刀和刀鞘一共有多少？

更奇妙的是，在古埃及兰德纸草书上也有类似的问题，题中都是一连串的“ 7 ”，十分有趣。

这类问题求解并不难，每个答案都是 7 的乘积，计算时只要认真仔细即可。否则，因为答案间都互为因果，错了一步便引起连锁错误。

妇女……7

布袋……49(7 × 7)

猫……343(7×7× 7)

猫子……2401(7×7×7×7)

24.供酱

熙熙攘攘大兵营，
五人需供酱两升。
今有雄兵整八万，
共需供酱多少升？

解：这是根据唐代一部著名的数学书叫做《夏候阳算经》中一道题改编的。原题是：

今有兵八万人，凡五兵供给酱 2 升，问给酱几何？(“ 几何 ”意思是“ 多少 ”)

可以这么想：每 5 个兵发给 2 升酱，有两个 5 就发给 2 个 2 升，有三个 5 就给 3 个 2 升……80000 个兵中含有多少个 5，就有多少个 2 升。

2×(80000÷5)

=2×16000

=32000(升)

答：共需供酱 32000 升。

25.生产零件

一批零件急需用，
每天生产五百四，
十五天整才完成，
每天多产六十个，
只需几天便完成？

解：要求需要多少天完成，必须知道生产总数量和每天生产的个数。

从“ 每天生产 540 个，15 天完成 ”，可知需生产的零件总数是：540×15=8100(个)

每天多生产 60 个，实际每天生产的个数是：

540＋60=600(个)

解法 1：540×15÷(540＋60)
=540×15÷600
=13.5(天)

解法 2：原来每天生产 540 个，现在每天生产 540＋60=600(个)，原来的工效是现在的：$\frac{540}{600}=\frac{9}{10}$，原来用 15天，现在用15天的 $\frac{9}{10}$。

$$15\times\frac{540}{540+60}$$
$$=15\times\frac{540}{600}$$
$$=15\times\frac{9}{10}$$
$$=13\frac{1}{2}(\text{天})$$

答：只需$13\frac{1}{2}$天便完成。

26.工钱

一位姑娘当女佣，
每月工钱二十文。
只做二十一天整，
辞职不干回家中，
工钱按日平均算，
该是几文就几文，
不要多也不准少，
难坏账房老先生。

解：按一般思路，每月 20 文，每天的工钱应是 20÷30，求得一天的工钱，再乘以做工的天数便可以了。

但是 20÷30 商是个循环小数，得不出精确值来，这姑娘却要求不多拿也不准少给，岂不把帐房先生难坏了！

如果调整一个思维角度，21天的工钱是一个月工钱的 $\frac{20}{30}$，问题便迎刃而解了！

解法 1：
$$21\times\frac{20}{30}=14(\text{文})$$

解法 2：
20÷30×21
＝20×21÷30
=14(文)

答：21 天应付给姑娘 14 文。

27.王老师改作文

王老师，改作文，
第一天改了十二本，
第二天多改六本整，
作文总共九十本，
再过四天要改清，
每天应改多少本？

解：90 本作文可分为“已改”和“未改的”。未改的即是“余下的”。

从总数中减去前两天批改的本数，便得出了余下的本数。再将剩余的本数除以 4，便知每天应批改多少本了。

{90-[12＋(12＋6)]} ÷4

= {90-[12+18]} ÷4

= {90-30} ÷4

=60÷4

=15(本)

答：余下的每天应改 15 本。

28.养兔

甲乙丙丁四个组，
各组都养一窝兔。
四窝若要加起来，
不多不少一百五，
甲乙丙三窝一百二，
乙丙丁三窝九十五，
丙丁甲是整一百，
各组养了几只兔？

解：题中反复出现甲乙丙、乙丙丁、丙丁甲，使人眼花缭乱，但细心观察一下，求每组各养多少只兔却很简单。因为四组的总数已告知，此后的每三组都分别缺了丁、甲、乙，用总数 150 只减甲乙丙三组的和 120，余下的必是丁组的兔数，依此，其余各组都可以求出了。

150-120=30(只)………………(丁组兔数)

150-95=55(只)…………………(甲组兔数)

150-100=50(只)………………(乙组兔数)

150-(30＋55＋50)

=150-135

=15(只)……………………………(丙组兔数)

答：甲组养兔 55 只，乙组养兔 50 只，丙组养兔 15 只，丁组养兔 30 只。

29.写错题

小马虎，心好急，
数学考试写错题。

十位是 3 写成 5，
百位是 7 写成 1，
得和三百一十六，
原来得数应是几？

解：和是由几个数相加得来的。十位数的 3 错写成 5，便多加了 20；百位上的 7 错写成 1，和便又少了 600。这样得出的 316 就比实际应得的和少了 600-20=580，所以，原来的得数应为 316 再加上 580。

316-(5-3)×10＋(7- 1)×100
=316-20＋600
=896

答：原来得数应是 896。

30.总共得几元

五个人，去运砖，
两月得了八千元。
二十四人做半月，
请问总共得几元？

解：这是一道归一类问题。

要求 24 人半个月共得多少元，必须先求得一个人半个月能得多少元。

从“ 5 个人，两个月得 8000 元，”便可求得一个人半个月得多少元。因为：

①5 个人一个月得： 8000 ÷ 2= 4000(元)
②5 个人半个月得：4000÷2=2000(元)
③一个人半个月得：2000÷5=400(元)

从而题目可解。

解法 1：
8000÷2÷2÷5× 24
=9600(元)

解法 2：
用倍比法，看 24 人是 5 人的多少倍。即先求 5 个人半个月得多少钱。
(8000÷2÷2)×(24÷5)
=2000×4．8
=9600(元)

答：24 人做半月总共得 9600 元。

31.考试

出了十题考语文，
每对一题得 5 分。
答错不但不给分，
总分里面扣 3 分！
小梅不知对几道，

得了 2 分好伤心。

解：试卷总共十道题，每题 5 分，若全部做正确，可得 50 分。可是小梅只得了 2 分，少得 50-2=48(分)！

为什么会少得48分呢？因为只要答错一题便少得了应得的5分和被倒扣的 3 分，共 8 分。从而错答的题数可以求得。255

从 10 题中去掉错答的题数，余下的当然是答对的题数了。

(50-2)÷(5+3)=48÷8=6(题)

10-6=4(题)

可知，小梅只答对了 4 题。

32.篮中苹果

篮中苹果不知数，
爸爸要我算清楚：
扩大 2 倍加 16，
每人便可分 8 个。
全家一共 5 口人，
篮中苹果多少个？

解：全家 5 口人，每人若平均得 8 个，总共应有 8 个×5=40 个。

这 40 个是此篮中实有苹果数的 2 倍还多 16 个。从 40 个中再去掉 16 个，余下的便正好是篮中苹果数的 2 倍了，再除以 2，便是篮中实有的苹果数。这样，从条件中倒推上去，问题便解决了。

(8×5-16)÷2
=(40-16)÷2
=24÷2
=12(个)

答：篮中共有苹果 12 个。

33.吃西瓜

这个西瓜真不赖，
爸爸切成二十块，
妈妈和我各三块，
我刚吃罢妹妹来，
妹吃一块拿一块，
五个客人进门来，
爸爸陪客全吃完，
他们平均吃几块？

解：这是一道简单的问题。因题目中吃西瓜的有许多人，吃的先后不同，吃的数量也不一样，还是需要细心地分辨清楚。

妈妈和我各吃 3 块，便去掉 6 块；妹妹吃了 1 块又拿 1 块，又去掉 2 块。余下的，爸爸陪着 5 个客人吃的。但不要忽略：5 个客人加上爸爸共 6 个人

啊！

(20-3×2-1× 2)÷(1＋5)

＝12÷6

=2(块)

即爸爸和客人平均每人吃 2 块。

34.八人分梨

八月十五去赶集，

八人买了八十斤梨。

一个比一个要得多，

前后相差一样的。

第三个人要七斤，

每人各买几斤梨？

解：本题是根据现今德国柏林馆内收藏的一块约公元前 2500 年的泥板上面记载的一道题而改编的。

原题意是：

兄弟 10 人分 2 米那(巴比伦的重量单位，1 米那=60 赛克尔)的银子。按从大到小排，后一个人都比前一个人少，并且相邻两人之间的差数均等。已知第八个人分到 6 赛克尔银子，问其余几人各分多少？

“ 八人分梨 ”就是根据此题改编的，不同的是，后边的人分得的梨都比前边的人多。

根据第三个人买 7 斤，可断定是“ 后一个人总比前一个人多 ”，否则八个人就不可能买 80 斤了。由于“ 每相邻两人间差数都相等 ”，可以设想，若把两人间相差的数量看作 1 份，那么从第三位后面的五个人，分别比第三位多 1 份、2 份、3 份、4 份、5 份。第三位前面的两个人分别比第三位少 1 份和 2 份。

第三位买的是 7 斤，假如八个人买的同样都是 7 斤，那么总数只有 7 斤×8=56 斤，比实数少了 80 斤- 56 斤=24 斤。

事实上，他们买的数量各不相同，这 24 斤对应的份数就是：[(1＋2＋3＋4＋5)-(1+2)]。这样就可以求出每份数，也即相邻两人间的差数。知道了差数，又知道第三人是 7 斤，其余各人都可求得了。

(80-7×8)÷[(1+2+3+4+5)-(1+2)]

=(80-56)÷[15-3]

=24÷12

=2(斤)

第一个人买：7-2×2

=7-4

=3(斤)

第二个人买：7-2=5(斤)

第三个人买：7 斤

第四个人买：7+2=9(斤)

第五个人买：7＋2×2

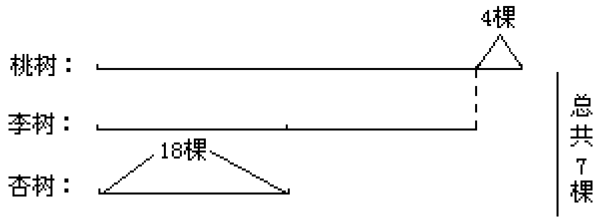
=7＋4
=11(斤)
第六个人买：7＋2×3
=7＋6
=13(斤)
第七个人买：7＋2×4=15(斤)
第八个人买：7+2×5=17(斤)
答：每人各买梨为：3、5、7、9、11、13、15、17 斤。

35.桃、李、杏

桃树、李树和杏树，
果木园里比棵数，
桃树说：“我比李树多 4 棵。”
李树说：“杏树 2 倍便是我”。
杏树说：“我虽只有 18 棵，
能知咱们总棵数，

谁才算有真本领！”

解：题中的三种量相比较，用线段图表示就更清楚了：



我们可根据杏树的棵数求得李树，再根据李树的棵数，求得桃树，最后求出它们的和。

解法 1：
18＋18×2＋(18×2＋4)
＝18＋36＋40
＝94(棵)
解法 2：把杏树当作 1 份数，总数是杏树的 5 倍多 4 棵。
18×(1＋2＋2)＋4
＝18×5＋4
＝90＋4
＝94(棵)
答：三种树共有 94 棵。

36.塔灯

巍巍宝塔共七层，
层层红灯两盏增，
第四层灯数三十二，
总共应有多少灯？

解：从题意上看，第四层应是从底向上数的。确定这个顺序很重要。

因为灯的数目，由上层向底层逐渐增多，每层的差数是两盏，已知第四层，我们便可以推算出各层的灯数。

由底向上各层的灯数应是：

38	36	34	$\boxed{32}$	30	28	26
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦

这样，灯的总数便可求了！

解 1：38＋36＋34＋32＋30＋28＋26＝224(盏)

解：七个连续偶数相加，32 正好是平均数，所以，可以简单为：

32×7＝224(盏)

答：总共有 224 盏灯。

37.塔顶灯

远望巍巍塔七层，
红灯点点倍加增，
有灯三百八十一，
请问塔顶几盏灯？

解：塔共七层，灯数从上往下依次倍增，也即下一层的灯数都是相邻的上一层的 2 倍。因此，假如把顶层灯数作为 1 份，那么往下各层的灯数便是：2、4、8、16、32、64 份了。这样，总共便是 1＋2＋4＋8＋16＋32＋64＝127 份。

已经知道灯的总数是 381 盏，它恰相当于顶层灯数的 127 倍，故顶层灯数可求。

解法 1 381÷(1＋2＋4＋8＋16＋32＋64)

＝381÷127

＝3(盏)

解法 2：设顶层有灯 x 盏，则

x＋2x＋4x＋8x＋16x＋32x＋64x＝381

127x＝381

x＝3(盏)

答：塔顶共有 3 盏灯。

38.鹅鸭各几只

今有鹅鸭九十九，
共值九百零三文，
鹅价九只一百二十三，
六只鸭价值四十六文整，
鹅是几只鸭几只，
请你自己算个清。

解：此题与中国古代《算学启蒙》中的一题相似，原题意为：

今有鹅鸭九十九只，值钱九百零三文。只云鹅九只价一百二十三文，鸭

六只价四十六文。问：鹅鸭各几只？

由题意可知，鹅每只价：$123\div9=13\frac{2}{3}$(文)，

鸭每只价：$46\div6=7\frac{2}{3}$(文)。

假定全部是鹅，则价钱多出：$13\frac{2}{3}\times99-903=450$(文)。

为什么会多出 450 文？因为多算一只鹅便多了：
$13\frac{2}{3}-7\frac{2}{3}=6$(文)，共是多少只鸭被当成鹅了呢？

求出 450 文中有多少个 6 文，便知道了。求出了鹅鸭中任一数量，另一数量自然容易求得了。

[(123÷9)×99－903] ÷(123÷9－46÷9)

＝450÷6

＝75(只)……………………………………鸭

99－75＝24(只)…………………………鹅

答：鹅有 24 只，鸭有 75 只。

39.船员人数

记者上船采访，
见到船上刘船长。
问他领导多少人，
船长笑着把话讲：
四分之一在工作，
五分之一去站岗，
七分之一练打靶，
五十七人在船上。
船员共有多少人，
请你记者自己想。

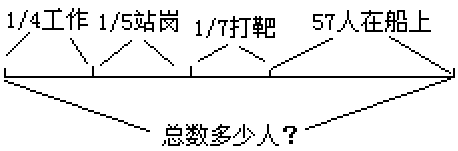
解：这题与《希腊文集》中的一题很相似：

有人问毕达哥拉斯："有多少名学生在你的学校听课？"毕达哥拉斯回答说，"1/2 在学数学，1/4 在学音乐，1/7 正在思考，此外还有 3 名女生。"

本题与毕达哥拉斯的问题算理相同。

题目中显然是把船员总数当作整体"1"的。只要把 57 人的对应分率求出，总数便可求得。

本题可图示为：



$57\div[1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7})]$

$=57\div[1-\frac{83}{140}]$

$=57\div\frac{57}{140}$

$=57\times\frac{140}{57}$

＝140(人)

答：船员共有 140 人。

40.科学分工

兴修水利战海滩，
派了 48 个大青年。
一人一天挖五方，
或把三方土运完。
怎样分工才合理，
挖土运土都不闲。

解：每人每天劳动效率是：挖土 5 方或运土 3 方。因此，挖土与运土的人数比应是 3：5。按这样的比例，把 48 人分成两组就行了。

解法 1：按比例分配法解：

3＋5＝8

$48\times\frac{3}{8}=18$(人)……挖土人数

$48\times\frac{5}{8}=30$(人)……运土人数

解法 2：用比例解：

设挖土人数为 x 人。

3：5＝x：(48－x)

5x＝3×(48－x)

x＝18……………………………(挖土人数)

48－18＝30(人)…………………(运土人数)

解法3：挖土人数相当于运土人数的$\frac{3}{5}$。把运土人数看作单位“1”。

$48\div(1+\frac{3}{5})=48\div\frac{8}{5}=48\times\frac{5}{8}$

＝30(人)

48－30＝18(人)。

答：按 18 人挖土、30 人运土分组最科学合理。

41.求竹竿长

竹竿之长不知数，

量得影长一丈五，
同时立一小标杆，
影长 5 寸不含糊，
标杆之长一尺五，
请问竹竿长几何？

解：这个题目取自《孙子算经》：

今有竿不知其长，量得影长一丈五尺。立一标杆，长一尺五寸，影长五寸，问竿长几何？

在同一时间内，阳光射在物体上投下的影子长度与物体的实际长度成正式例关系。即：

竹竿长度：竹竿影长＝标杆长度：标杆影长。

据此，可用比例法解，也可用倍比法解。

解法 1：设竿长为 x 尺

1 丈 5 尺＝15 尺　1 尺 5 寸＝1.5 尺

x：15＝1.5：0.5

$$x=\frac{15\times 1.5}{0.1}$$

x＝45(尺)＝4 丈 5 尺

解法 2：1.5×(15÷0.5)

＝1.5×30

＝45(尺)＝4 丈 5 尺

答：竹竿长 4 丈 5 尺。

42.队形

广播喇叭歌声高，
大家集队做早操。
二十个人为一队，
数数总共十八行，
如果每队多四人，
应该能站多少行？

解：做操的总人数是一定的，每队的人数和站成的行数，是两个变化的量。即：

每队的人数×行数＝总人数(一定)

两种相关联的量，一种量变化，另一种量也随着变化，如果这两种量中相对应的两个数的积一定，这两种量就叫做成反比例的量，它们的关系叫做反比例关系。

因此，这题可用反比例来解。

解法 1：设每队增加 4 人，可站成 x 行，

20：(20＋4)＝x：18

$$x=\frac{20\times 18}{20+4}$$

x＝15(行)

解法 2：先求出总人数再除以每队人数，

20×18÷(20＋4)
＝20×18÷24
＝15(行)
答：如果每队多站 4 人，应站 15 行。

43.分书

五百七十六本书，
分给三班来阅读，
各班人数不相同，
46、47 和 51，
按人多少来分配，
各班应得多少书？

解：既然是按人数多少平均分配，则求出平均一个人应分得几本书，每班应得多少本便可求得。

也可以各班的人数作为他们分书的比，即：46：47：51，用按比例分配来解。

解法 1：先求每人平均应分几本：
576÷(46＋47＋51)
＝576÷144
＝4(本)
4×46＝184(本)
4×47＝188(本)
4×51＝204(本)
解法 2：把人数看成总份数，根据各班占总数的比求解：
总份数：46＋47＋51＝144
$576\times\frac{46}{144}$
＝184(本)
$576\times\frac{47}{144}=188$(本)

$576\times\frac{51}{144}=204$(本)
答：三个班分书分别是 184 本、188 本、204 本。

44.王奶奶买鱼

王奶奶，买了鱼，
回头碰见李大姑，
六分之一让给她；
刚走又见李六如，
要去余下的五分之一；
接着又来了大老徐，

四分之一被要去。

剩下多少还没算，

迎面遇见老邻居，

连连称赞鱼真好，

三分之一又让去。

奶奶提鱼往家走，

路过一家五保户，

一半鲜鱼分给她，

奶奶总算回到家。

鲜鱼还剩 3 斤整，

奶奶乐得哈哈笑，

不知总共买了多少鱼？

解：解这类问题看起来很复杂，实际根据最后所给的结果逆推上去，很容易求解。

逆推，就是遇加变减，遇减变加，遇乘变除，遇除变乘。如王奶奶最后将鱼的一半给了五保户，自己还剩 3 斤。在未给五保户之前应是 3 斤÷(1－1/2)＝6 斤，继续逆推下去，便可求得总数。

解法 1：

$$3\div\left(1-\frac{1}{2}\right)\div\left(1-\frac{1}{3}\right)\div\left(1-\frac{1}{4}\right)\div\left(1-\frac{1}{5}\right)\div\left(1-\frac{1}{6}\right)$$

$$=3\div\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}\div\frac{4}{5}\div\frac{5}{6}$$

$$=3\times\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}$$

=18(斤)

解法 2：王奶奶未给五保户前有鱼：

$$3\div\left(1-\frac{1}{2}\right)=3\div\frac{1}{2}=6(\text{斤})$$

给五保户的鱼是：

$$6\text{斤}\times\frac{1}{2}=3\text{斤}$$

未给老邻居前有鱼：

$$6\div\left(1-\frac{1}{3}\right)=6\div\frac{2}{3}=9(\text{斤})$$

给了老邻居的鱼是：

$$9\text{斤}\times\frac{1}{3}=3\text{斤}$$

未给老邻居前有鱼：

$$9\div\left(1-\frac{1}{4}\right)=9\div\frac{3}{4}=12(\text{斤})$$

给大老徐的鱼是：

$$12\text{斤}\times\frac{1}{4}=3\text{斤}$$

未给大老徐前有鱼：

$$12 \div \left(1-\frac{1}{5}\right)=12 \div \frac{4}{5}=15(\text{斤})$$

给李六如的鱼是：

$$15\times\frac{1}{5}=3(\text{斤})$$

未给李六如前有鱼：

$$15 \div \left(1-\frac{1}{6}\right)=18(\text{斤})$$

也即王奶奶买鱼总数是 18 斤。

45.凳、椅的价钱

一凳一椅整七十(元)，
三凳二椅一百六，
买客自己细算算，
凳子几元椅几何？

解：题中有两个要求的量：凳子和椅子。

假如能够想出办法消去一个，知道了凳子(或椅子)的数量和总价，便容易求得凳子(或椅子)的单价了。

设想把题中的一个条件，如“一凳一椅整七十”扩大倍数，使它与另一个条件“三凳二椅一百六”中的一个量(凳或椅)相同，那么便可以从差数中求得另一个量(椅或凳)的数量和总价了。

①1 凳＋1 椅＝70 元

②3 凳＋2 椅＝160 元

将①式×3－②式，得：

3 凳＋3 椅＝210 元

－(3 凳＋2 椅)＝160 元

1 椅＝50 元

70 元－50 元＝20 元

即 1 只凳子 20 元，1 只椅子 50 元。

46.绳长

一根绳子不知长，
三折来与四折量，
三比四折长 2 尺，
这条绳子有多长？

解：本题根据《孙子算经》中一题改编的，原题是：

今有木，不知长短，引绳度之，余绳 4 尺 5 寸，屈绳量之，不足一尺，问木长几何？

将绳子三折，长度只有原来的 1/3 了！四折后则只有原长的 1/4 了！将问题换了说法，就是“一根绳，它的 1/3 比 1/4 多 2 尺，求绳长”。

这样，只要求出 2 尺相当于全长的几分之几，便可求得绳长了。

$$2\div\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=2\div\frac{1}{12}$$
$$=24(\text{尺})$$

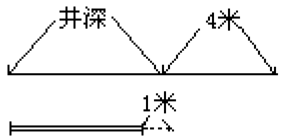
可知绳长 24 尺。也即 2 丈 4 尺。

答：这条绳子长 2 丈 4 尺。

47.绳长和井深

有口井，不知深，
小胖拿来绳一根。
先用单股来量井，
多出绳长 4 米整；
再用双股来量井，
绳距井底 1 米整，
请你动脑想一想，
绳子多长井多深？

解：用单股量多出 4 米，用双股量反而少了 1 米，前后比较相差 5 米(4＋1)。如图：



可见，前后的差数恰是绳长的$\frac{1}{2}$。从而绳长可求。

解法 1：

(4+1)×2=5×2

＝10(米)…………………………………绳长

10－4＝6(米)…………………………井深

解法 2：

$(4+1)\div\left(1-\frac{1}{2}\right)=10$米ΛΛΛΛΛΛΛ 绳长

$10\times\frac{1}{2}+1=6$(米)ΛΛΛΛΛΛΛ 井深

答：绳长 10 米，井深 6 米。

48.方凳、圆几

凳子方、几子圆，
整整排成圆。
数数个数三百六，

看看腿儿一千三，

四腿方凳多少条？

三腿圆几多少面？

解：在我国民间流传着“墩子、板凳三十三，一百条腿朝上安，看你会安不会安”的算题。

这类问题，解法是相同的。

解这类问题，要用“假设法”。先假定它全部是凳子(或几子)，则有 4×360＝1440 条腿。而实际只有 1300 条腿，多出了 1440－1300＝140(条腿)。

再分析，为什么会多出 140 条，因为把 3 条腿的几子，也当成 4 条腿计算了，每多算一面就多出 4－3＝1(条腿)。多出 140 条腿，便是把 140 面几子也当成方凳计算了。

解法 1：

(4×360-1300)÷(4-3)

=(1440-1300)÷1

＝140(面)……………………………………几

360－140＝220(条)…………………………凳

解法 2：

(1300－360×3)÷(4－3)

＝(1300－1080)÷1

＝220(条)…………………………………………凳

360－220＝140(面)………………………几

答：有方凳 220 条，圆几 140 面。

49.房客

我问开店李三公，

众客都来到店中，

一房七客多七客，

一房九客一房空。

请你仔细算一算，

多少客房多少人？

解：这题选自《算法统宗》。

《算法统宗》是我国古代一位杰出的数学家程大位编著的。

从题中“每房 7 人多 7 人，每房 9 人少 9 人(空一房)”可知，造成这样情况的原因是后来每房增加了 2 人(9－7)。先是余 7 人后又少 9 人，前后相差 16 人(9＋7)，其中每差 2 人即需一间客房，故客户数可求。

(7＋9)÷(9－7)＝16÷2＝8(间)

7×8＋7＝56＋7＝63(人)

或 9×8－9＝72－9＝63(人)

答：有 8 间客房，63 个客人。

50.和尚分馒头

一百个馒头一百个僧，

大僧一人得三个，
小僧一个分三人，
大小和尚各几人？

解：此题源自《算法统宗》。原题是：

一百个馒头一百个僧，大僧三个更无争，小僧三人分一个，大小和尚各几人？

由于大和尚一人分 3 个，小和尚三人分 1 个，所以每 4 个馒头中，便有一个大和尚和三个小和尚。将 100 个馒头每 4 个一组，分得的组数便是大和尚的人数。

也可以这么想：每 4 个馒头中，大和尚分得 3 个，即大和尚分得的馒头数占总数的 3/4，求出了大和尚共分得的馒头数后，人数便易求了。

解法 1：

100÷(3＋1)＝25……………………大和尚人数

100－25＝75……………小和尚人数

解法 2：

$$100\times\frac{3}{3+1}=100\times\frac{3}{4}$$

＝75(个)…………………………大和尚分得馒头数

75÷3＝25………………大和尚人数

100－25＝75……………小和尚人数

解法 3：

$$100\times\frac{1}{3+1}=100\times\frac{1}{4}$$

＝25………………………………小和尚分得的馒头数

25×3=75…………………………小和尚人数

100－75＝25………………………大和尚人数

答：大和尚 25 人，小和尚 75 人。

51.55 只碗

食堂猛增一群人，
炊具只能合伙用。
每人可用一饭碗，
菜碗只能两人用。
三人合用一汤碗，
55 只碗正够匀。
请你帮助算一算，
共来多少新客人？

解：这是根据《孙子算经》中一道题改编的。

原题是：

妇女上河荡杯，津吏问：“杯何以多？”妇人曰：“家有客。”津吏曰：“客几何？”妇人曰：“两人共饭，三人共羹，四人共肉，凡用杯六十五。不知客几何？”

题中已经告知，碗数是 55 只。只要能知道一个人用了多少只碗，客人的

人数便易求了。

那么每人用了多少只碗呢？

饭碗1，菜碗$\frac{1}{2}$，汤碗$\frac{1}{3}$，共$(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$只碗。

解法 1：

$$55\div\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$
$$=55\div1\frac{5}{6}$$
$$=30(\text{人})$$

答：(略)。

解法 2：设共有客人 x 个。

$$x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x=55$$
$$1\frac{5}{6}x=55$$
$$x=30(\text{人})$$

答：共来新客 30 人。

52.强盗与牛

一队强盗一队牛，
匆匆赶路不回头。
担心牛跑难追赶，
两队并作一队走。
岂知草丛有人看，
暗暗记清人和牛。
数头一共三百六，
数腿一共八百九。
急忙回村报案情，
多少强盗多少牛？

解：这道题说的是强盗偷牛的事。报案的人只知道头是 360，数腿是 890，多少个强盗、多少头牛，需要我们根据已知的数字进行推算。

可以这么想：头数和腿数为什么不相等呢？因为人和牛头数都是 1，而腿数，人有 2、牛有 4。

假如 360 头都是牛，腿数应该是：

360×4＝1440(条)

这样就比实际腿数多出了：

1440－890＝550(条)

为什么会多出 550 条腿呢？因为队伍中除了牛还有人。把人当作牛计算，每一个人就多算了 4－2＝2(条)腿。那么，550 条是多算了多少个人？

550÷2＝275(个)

知道了人数，牛数便是：

360－275＝85(头)

列成综合式便是：

(360×4－890)÷(4－2)

＝550÷2

＝275(个)……………………………………人

360－275＝85(头)………………………牛

答：共 275 个强盗，85 头牛。

53.牛顿问题

牧场一片草青青，
风调雨顺长得匀。
十头牛，一齐吃，
可供二十天不断顿。
如果十五头牛吃，
一边吃，一边长，
只用十天便吃光。
牛群涌来二十五，
只消几天便吃光？

解：本题是根据著名的“牛顿问题”改编的。原题是：

牧场上有一片青草，每天都生长得一样快。这片青草供 10 头牛吃，可以吃 20 天；供 15 头牛吃，可以

吃 10 天；供 25 头牛吃，可以吃多少天？

解牛顿问题的关键是，要求出牧场上的“老草”可供多少头牛吃一天，“新长出的草”可供多少头牛吃一天的。

因此，可按下列思路进行思考：

①根据“10 头牛可吃 20 天”，可算出够 10×20=200(头)牛 1 天吃完。

②根据“15 头牛可吃 10 天”，可算出够 15×10=150(头)牛 1 天吃完。这是因为草地上的草少长了 10 天(20 天-10 天)，牛的头数相差 50(200—150)。由此可知每天长出的草可供 5 头牛(50÷10)吃 1 天。

③草地原来的草(不包括新生长的草)，可供多少头牛吃 1 天呢？

(10-5)×20=5×20=100(头)

或：(15-5)×10=10×10=100(头)

④现在涌来了 25 头牛，因为草地上新长出的草就足够养 5 头牛的。只要计算剩下的 20 头牛吃原有的草够多少天，便求得结果了。

100÷(25-5)=100÷20=5(天)

这样便可逐步求得答案。

(1)牧场上每天新长出的草够多少头牛吃的：

(10×20-15×10)÷(20-10)

＝(200-150)÷10

=50÷10

=5(头)

(2)牧场上原有的草够多少头牛吃 1 天的？

(10-5)×20=5×20=100(头)

(3)牧场上的老草、新草够 25 头牛吃多少天？

100÷(25-5)=100÷20=5(天)

答：(略)。

54.蜗牛爬竿

一根竿高二丈三，
一个蜗牛往上攀，
白天爬竿四尺六，
夜里下降二尺三。
小小蜗牛上竿顶，
一共爬了多少天？

解：这是根据英国的一本《趣味数学故事集》中一道题改编的。原题是：

蜗牛沿竿子要爬到顶端 12 英尺的高度，白天向上爬 3 英尺，而每晚向下滑 2 英尺，经过多少时间蜗牛到达竿子的顶端呢？

一般人常常误认为：白天上升 4 尺 6 寸，夜晚下降 2 尺 3 寸，每天升高 4.6 尺-2.3 尺=2.3 尺，竿高 23 尺(2 丈 3 尺)，10 天恰好到达顶端，这样便错了。

画个图观察一下便一目了然了：

可见到了第九天，也就是最后一天，蜗牛白天已经到达顶端。夜晚已不必再下降 2.3 尺了。故最后一天蜗牛爬的高度是 4.6 尺。

解法 1：

2 丈 3 尺=23 尺　4 尺 6 寸=4.6 尺

23÷(4.6-2.3)-1

=23÷2.3-1

=9(天)

解法 2：

(23-4.6)÷(4.6-2.3)＋1

＝18.4÷2.3＋1

=8＋1

=9(天)

答：蜗牛一共爬了 9 天。

55.对面行走

相距十五公里两个人，
同时同地对面行。
每小时甲比乙快五百米，
六小时后巧相逢。
每小时两人各行几里程？

解：条件中已经有了“速度差”，再求出“速度和”，两人的速度便可求了！

两人相距 15 公里,对面行走 6 小时相遇,每小时两人共行 15÷6=2.5(公里)=2500(米)

知道了速度和与速度差，根据“和差问题”便可求得各自的速度了。

15 公里=15000 米

(15000÷6+500)÷2

＝(2500＋500)÷2＝3000÷2

=1500(米)……………………………甲速度

15000÷6-1500＝2500-1500

=1000(米)……………………………乙速度

或：(15000÷6-500)÷2=(2500-500)÷2

=2000÷2

=1000(米)……………………………乙速度

答：(略)。

56.骑马进京

甲乙骑马奔京城，
每日行程不变更。
甲马日行二百四十(里)
乙马日行一百五十程，
十二日前乙先走，
何时两人才相逢？

(注：1 公里=2 里，下同。)

解：《算术启蒙》中有一题是：

今有良马日行 240 里，驽马日行 150 里，驽马先行 12 日，问良马几日追及之？

本题与此同。

乙马每日行 150 里，先行 12 日，便行了：150×12=1800(里)。即乙在甲前 1800 公里。由于甲的马速度快，每日可以比乙多行 240-150=90(里)，看 1800 里中含有多少个 90 里，便是追及的日期了。

解法 1：150×12÷(240-150)

=150×12÷90

=20(日)

解法 2：设甲需 x 日追及乙。

240x=150(x＋12)

240x=150x+1800
240x-150x=1800
90x=1800
x=20(日)
答：20 日后两人相逢。

57.太仓至上林

太仓运粮到上林，
重去空返不稍停。
重车一日五十里，
空车每日七十整。
五日往返共三次，
两地相距几里程？

解：本题根据《九章算术》改编。原题是：

今有人用车运粮，空车一日行 50 里，现在从太仓运粮至上林，5 日往返 3 次，问：太仓距上林几里？

从太仓运粮到上林是重车去、空车返回的。

重车一日行50里(里是古代长度单位)，每行1里就需要$\frac{1}{50}$天；空车一日行70里，每行1里就需要$\frac{1}{70}$天。由此可得：重车和轻车往返各行1里，共需$(\frac{1}{50}+\frac{1}{70})$天。

已知太仓到上林，5天往返3次，可知往返一次需$\frac{5}{3}$天。

这样，两地距离便可解了：

解法 1：

$$\frac{5}{3}\div\left(\frac{1}{50}+\frac{1}{70}\right)=\frac{5}{3}\div\frac{12}{350}$$

$$=\frac{5}{3}\times\frac{350}{12}=48\frac{11}{18}(\text{里})$$

解法 2：设：两地相距 x 里

$$\left(\frac{x}{50}+\frac{x}{70}\right)\times 3=5$$

$$\frac{12}{350}x=\frac{5}{3}$$

$$x=48\frac{11}{18}(\text{里})$$

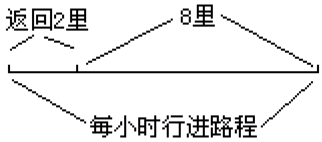
答：(略)。

58.行军

诸葛用兵善设疑，

诱惑敌人施巧计，
每小时行军十二里，
每进十里退二里，
全程四十四里路，
何时到达目的地？

解：行军的速度是每小时 12 里，但行了 10 里就得倒退 2 里，实际每小时只行了 8 里路。如图：

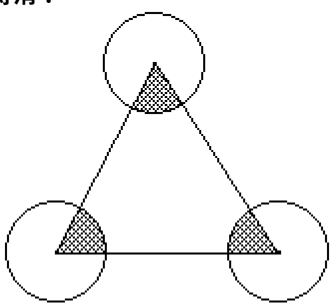


直到最后行进的一个 10 里，则不必返回了，因为已经到达了目的地。这与“蜗牛爬竿”的道理是相同的。

(44-12)÷[12-(2+2)]＋1
=32÷[12-4]+1=32÷8＋1
=4＋1=5(小时)
答：需 5 小时才能到达目的地。

59.三个扇形

一个等边三角形，
三个顶点为圆心。
半径都是一厘米，
所截三角成扇形。
扇形面积是多少，
请问谁能算得清？



解：等边三角形的三个角都是 60°，恰好是扇形的圆心角。已知这三个小扇形半径为 1 厘米，又知道它们的圆心角为 60°，利用扇形面积公式 $\pi r^2\cdot\frac{n}{360}$ 便可算出答案。

也可以这么想：三个圆的半径都相同，三角形三角和又是 180°，那么这三个小扇形的面积和就是 $\pi r^2\cdot\frac{180}{360}$，这样就更简便了。

解法 1：这三个小扇形的面积之和是：

$$\pi\times1^2\times\frac{60}{360}+\pi\times1^2\times\frac{60}{360}+\pi\times1^2\times\frac{60}{360}$$
$$=\pi\times\frac{1}{6}+\pi\times\frac{1}{6}+\pi\times\frac{1}{6}$$
$$=\pi\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}=1.57(\text{平方厘米})$$

解法2：$\pi\times1^2\times\frac{180}{360}=\frac{\pi}{2}=1.57$(**平方厘米**)

答：这三个小扇形的面积之和是 1.57 平方厘米。

60.骡和马

队里的马，队里的骡，
都给队里把货驮，
马若给骡八斤重，
骡是马的两倍货，
骡若给马八斤重，
骡马驮的一样多。
各位朋友算一算，
骡马各驮多少货？

解：这是根据一道世界名题改编的。在著名的《希腊文集》中，有一道题是：

驴和骡子驮着货物并排走在路上。骡对驴子说：“倘若你驮的给我一袋，我驮的就比你驮的重一倍；而我若给你一袋，咱俩驮的刚好一般多。”求驴、骡子各驮着几袋货物？

从题中所给的条件，我们可以列出下列等式：

①(马-8)×2=骡+8
即：2 马-16=骡+8
2 马-16-8=骡
2 马-24=骡
②马+8=骡-8
即：马+8＋8=骡
马+16=骡
比较两式：
骡=2 马-24=马+16
即：2 马-24=马+16
2 马-马=16＋24
马=40(斤)
已经推导出马驮 40 斤，则骡驮的重量更易解决了：
骡=马+16=40+16=56(斤)
若用方程解，就更方便了。
设：马驮 x 斤。

x＋8=[2×(x-8)-8]-8
x＋8=[2x-16-8]-8
x＋8=2x-32
x=40(斤)
骡驮的重量是：
40＋8×2
=40＋16
=56(斤)
答：马驮 40 斤，骡驮 56 斤。

61.李白沽酒

李白提壶去买酒，
遇店加一倍，
见花喝一斗。
三遇店和花，
喝光壶中酒，
试问壶中原有多少酒？

解：这是一道流传极广的数学名题。始见于我国宋元时期数学家朱世述的《四元宝鉴》。

题目的意思是：

唐代的大诗人李白，提着酒壶去沽酒。他每遇到一个店，就把壶中的酒加上一倍，每见到一次花，来了诗兴，就要喝一斗酒。就这样，三次遇上店和花，壶中的酒便喝光了。大诗人的壶中原有多少酒呢？

从题中得知，李白是先遇店，后遇花。“三遇店和花，喝光壶中酒”，可知他第三次见到花时，壶中只有一斗酒。那么，在遇第三个店时，壶内只有半斗酒，即$\frac{1}{2}$斗酒。依次类推，第二次遇店前，壶内有酒是$\left(\frac{1}{2}+1\right)\div 2=\frac{3}{4}$(斗)，第一次见花前,壶内有酒$\frac{3}{4}+1=1\frac{3}{4}$斗。可知，在他第一次遇店前，壶内原有的酒是：$\left(\frac{3}{4}+1\right)\div 2=\frac{7}{8}$斗。

$$\left[(\frac{1}{2}+1)\div 2+1\right]\div 2$$

$$=\left[1\frac{1}{2}\div 2+1\right]\div 2=\left[\frac{3}{4}+1\right]\div 2$$

$$=1\frac{3}{4}\div 2=\frac{7}{8}(\text{斗})$$

答：壶中原有酒$\frac{7}{8}$斗。

62.铜人注水

这是一座独眼巨人的铜像。
雕塑家艺术高超，
铜像中巧设机关：
巨人的手、口和独眼，
都连接着大、小水管。
通过手的水管，
3 天流满水池；
通过独眼的水管——需注 1 天；
从口中吐出的水更快，
$\frac{2}{5}$天就将水池注满。
三处如果同时放水，
几天可将水池注满？

解：本题是选自《希腊文集》。

要求注满水池的时间，必须知道水池的容量(工作任务)和工作效率。这题实际与工程问题同类。

水池的容量可看作单位“1”。

工作效率题中已告知：

用手相连的水管注水3天满，则每天注水池的$\frac{1}{3}$；

用眼相连的水管注水 1 天水池满；

用口相连的水管注水$\frac{2}{5}$天满。1天可注水池的$1\div\frac{2}{5}=\frac{5}{2}$，即1天可注满$2\frac{1}{2}$个水池。

工作效率的和为：$\frac{1}{3}+1+2\frac{1}{2}=3\frac{5}{6}$

$$1\div\left(1\div3+1\div\frac{2}{5}+1\right)$$
$$=1\div\left(\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}+1\right)=1\div3\frac{5}{6}$$
$$=1\div\frac{23}{6}=\frac{6}{23}(\text{天})$$

答：三处同时放水$\frac{6}{23}$天可注满水池。

63.每朝行里

三百七十八里关，
初行健步不为难。
次日脚痛减一半，
六朝才得至其关。
要知每朝行里数，
请公仔细算相还。

解：这题选自《算法统宗》。意思是：

要走到距离 378 里远的边关去，开始时健步如飞，走得很快，到了第二天脚痛难行，以后每一天走的路程都比前一天减少一半。就这样又走了 6 天到达目的地。求各天走的路程是多少呢？

我们可以倒过来想：以最后一天走的路程为 1 份，向前推去，各天便分别是：1，2，4，8，16，32。总共是 63 份。求出第 6 天的行程后，其余各天便可依次求出。

第六天行：

378÷(1＋2+4+8＋16+32)

=378÷63=6(里)

第五天行：6×2=12(里)

第四天行：12×2=24(里)

第三天行：24×2=48(里)

第二天行：48×2=96(里)

第一天行：96×2=192(里)

答：(略)。

64.篮球、足球

篮球五个足球十，
两样共值三百一(元)
篮球二，足球一，
价钱只有六十一(元)
不知单价是多少？
请你给他说一说。

解：题中有两种量：篮球和足球以及它所混在一起的价钱。如果能设法消去一种量，使得条件单一，问题便容易解决了。

为了达到消去一个量的目的，就要根据情况，将其中的一个量扩大或缩小，使它们变得数字相同。

5 个篮球+10 个足球=310 元………………(1)

2 个篮球+1 个足球=61 元……………………(2)

将(1)×2，(2)×5，使篮球数前后相同，得：

$$\begin{array}{r} 10\text{个篮球}+20\text{个足球}=620\text{元} \\ -(10\text{个篮球}+5\text{个足球})=305\text{元} \\ \hline 15\text{个足球}=315\text{元} \end{array}$$

每个足球的价是：

315÷15=21(元)

每个篮球的价是：

(61-21)÷2 或：(310-21×10)÷5

=40÷2　　　　　　=(310-210)÷5

=20(元)　　　　　=100÷5=20(元)

答：每个足球 21 元，每个篮球 20 元。

65.养鸡

张李王家三群鸡，
不知各家有几只，
张李两家一十四，
李王两家一十七，
王张两家一十三，
三家各喂几只鸡？

解：从已告知的三个数量看，只要能求得其中任何一家的养鸡数，其余两家便可求得。

反复分析已知数量发现：三数相加的和，恰是张王李三家养鸡数的两倍，由此便可打开突破口了：

$$\begin{array}{rrcl} & 张 & + & 李=14 \\ & 李 & + & 王=17 \\ + & 王 & + & 张=13 \\ \hline \multicolumn{4}{c}{(张+李+王)\times 2=44} \end{array}$$

可知：张+李+王=44÷2=22

从而各家养鸡数可求。

(14＋17＋13)÷2-14

＝44÷2-14＝22-14

=8(只)……………………王家鸡数

17-8=9(只)…………………李家鸡数

13-8=5(只)…………………张家鸡数

答：王家养鸡 8 只，李家养鸡 9 只，张家养鸡 5 只。

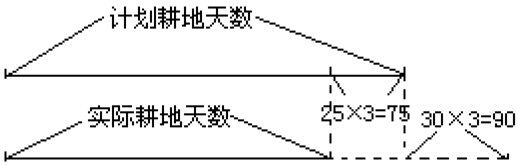
66.耕地

三月里来刮春风，
咱们村里闹春耕。
原打算每天二十五亩地，
大伙儿抢春干劲增。
每天耕了三十亩，
提前三天便完成。
一共多少地要耕？

解：原计划每天耕 25 亩，实际每天耕 30 亩，比计划提前 3 天。若仍按原来计划的天数，可多耕 30 亩×3=90 亩。为什么会多呢？因为每天比计划多耕 30 亩-25 亩=5 亩。90 里含有几个 5，即有几天。求得了计划的天数，总亩数便可求。

也可以这么想：先求实际耕地天数，原计划每天耕 25 亩，现提前 3 天，少耕了 25×3=75(亩)，每天实际多 5 亩，75÷5=15(天)

如图：



解法 1：先求计划耕地天数
30×3÷(30-25)
=90÷5=18(天)
25×18=450(亩)
解法 2：先求实际耕地天数
25×3÷(30-25)
=75÷5=15(天)
30×15=450(亩)
答：(略)。

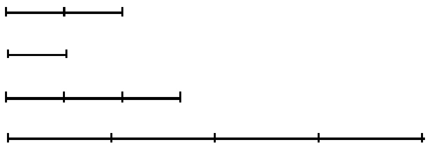
67.四人存款

四人存款四千三百二十文，
甲是乙的整两倍，
丙是乙的三倍整，
四个丙等于一个丁，
每人存款各几文？

解：类似这种几个相关联的倍数关系的量，只要以其中某一个量为标准，求出总份数，再与总数相比较，问题便不难解。

先画出示意图来，就更清楚了。

甲：
乙：
丙：
丁：



从图中可看出：把乙作标准，乙是 1 份，甲是 2 份，丙是 3 份，丁是 12 份，总计共 18 份。

解法 1：用归一法解
4320÷(2＋1+3+3×4)
=4320÷18
=240(文)……………………………………乙
240×2=480(文)…………………………甲
240×3=720(文)…………………………丙
720×4=2880(文)…………………………丁
解法 2：把甲乙丙丁钱数看作比，
甲：乙：丙：丁=2：1：3：(3×4)
=2：1：3：12
甲存款：

$$4320\times\frac{2}{2+1+3+12}$$
$$=4320\times\frac{1}{9}=480(\text{文})$$

乙存款：

$$4320\times\frac{1}{2+1+3+12}$$
$$=4320\times\frac{1}{18}=240(\text{文})$$

丙存款：

$$4320\times\frac{3}{2+1+3+12}$$
$$=4320\times\frac{1}{6}=720(\text{文})$$

丁存款：

$$4320\times\frac{12}{2+1+3+12}$$
$$=4320\times\frac{2}{3}=2880(\text{文})$$

答：甲存款 480 文，乙存款 240 文，丙存款 720 文，丁存款 2880 文。

68.共有多少鸭

太阳落山晚霞红，
我把鸭群赶回笼。
一半呆在水中叫，
一半的一半进笼中，
剩下十五只围我叫，
我的鸭子共多少？

解：从“一半的一半进笼中”，可知，围着我的 15 只与进笼的同样多，15＋15=30(只)是上岸的一半，另一半仍在水中，可知总数是：30＋30=60(只)。

解法 1：15×2×2
=30×2=60(只)

解法2：一半即$\frac{1}{2}$，一半的一半，即：$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，围着我的15只，相当于总数的：$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$。

$$15\div\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=15\div\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$
$$=15\div\frac{1}{4}=60(\text{只})$$

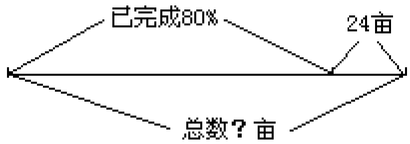
答：一共有鸭子 60 只。

69.收稻

丰收村，抢收稻，
农民个个干劲高。
完成百分之八十，
还剩二十四亩稻。
这村收稻多少亩？
请你认真细推敲。

解：解百分数问题，要弄清楚标准数、比较数和对应百分率。

题中“完成 80%”显然是针对总亩数说的，因此以总亩数作单位“1”，已收的亩数便是比较数，剩下的 24 亩便与剩下的百分数 1-80%=20%相对应了。



如图：

可见这题是“已知一个数(总亩数)的百分之几(20%)是多少(24 亩)，求这个数，用除法。”

24÷(1-80%)

=24÷20%=120(亩)

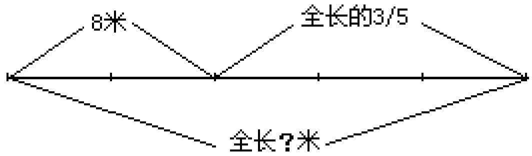
答：这个村共抢收稻 120 亩。

70.放风筝

蝴蝶风筝好漂亮，
八米高空随风扬。
五分之三绳在手，
风筝绳子共多长？
若是你能算得出，
风筝交给你来放。

解：其实这是一道简单的分数应用题。把全长作为单位“1”，手中的是全长的$\frac{3}{5}$，放到天空的就占全长的$1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$。

已知放出去的是8米长，恰与$\frac{2}{5}$对应。画图表示便是：



$8\div(1-\frac{3}{5})$

$=8\div\frac{2}{5}=20$(米)

答：风筝绳子共长 20 米。

71.实际距离

一张中国大地图，

标的是 $\frac{1}{6000000}$ 比例尺，

若从南京去北京，

15 厘米没取直，

若想乘车去旅游，

实际路程你算算。

解：根据实际距离、图上距离和比例尺三者间的关系，便可求得。

①图上距离：实际距离=比例尺

②实际距离×比例尺=图上距离

③图上距离÷比例尺=实际距离

本题是求实际距离的，用(3)即可解决。

$15\div\frac{1}{6000000}=15\times6000000$

=90000000(厘米)=900(公里)

答：实际路程是 900 公里。

72.方树林

四四方方一树林，

数数每边十棵松。

请你细心算一算，

外层总共多少松？

解：正方形有四条相等的边，每边都有 10 棵树，粗一看，很容易。但是，你若用 10 棵×4=40 棵，那就错了！

要是你画个图，观察一下，便会恍然大悟：原来，栽在四个角上的树，都被重复用了两次，因此，每边的实际棵数只有 10-1=9(棵)。

(10-1)×4

=9×4=36(棵)

答：外层共 36 棵树。

数海探奇

数字海洋是一个绚丽多彩的万花筒。它浩瀚无垠，深不知底，广不见岸。其中蕴藏着无穷奥秘。在这个海洋里，几千年来，人类一直在不停地探索、研究，虽然已经揭开它的部分面纱，但是背后隐藏的奥妙，还深邃莫测。

当数字中蕴含的某些奇妙特性被揭示出来，当运算中发现了某种奇异现象，惊诧赞叹之感便油然而生。那些规律性的运算现象，那些象形性的数字排列，更激发了人们研究探索的热情。

人们已经发现各种各样非常奇特的数：音乐数、奇异数、魔术数……还发现运算中出现的数字山、数字塔、数字黑洞、数字旋涡……

走进数海便如同进入魔宫，那五彩缤纷绚丽多姿的数字奇景，令人目不暇接，留连忘返。

数字奇观，是人类在数海遨游中发现的奇特风景，它仅仅是数学海洋这个奇妙世界的一小部分。毫无疑问那些隐藏在数海深处的秘密，还有待于后来者进一步地探索、发现。

然而，仅这些已发现的数字奇景，也足以令人惊诧叫绝。

1.对称数

文学作品有“回文诗”，如“山连海来海连山”，不论你顺读，还是倒过来读，它都完全一样。有趣的是，数学王国中，也有类似于“回文”的对称数！

先看下面的算式：

11×11=121

111×111=12321

1111×1111=1234321

……

由此推论下去，12345678987654321 这个十七位数，是由哪两数相乘得到的，也便不言而喻了！

瞧，这些数的排列多么像一列士兵，由低到高，再由高到低，整齐有序。还有一些数，如：9461649，虽高低交错，却也左右对称。假如以中间的一个数为对称轴，数字的排列方式，简直就是个对称图形了！因此，这类数被称作“对称数”。

对称数排列有序，整齐美观，形象动人。

那么，怎样能够得到对称数呢？

经研究，除了上述 11、111、1111……自乘的积是对称数外，把某些自然数与它的逆序数相加，得出的和再与和的逆序数相加，连续进行下去，也可得到对称数。

如：475

$$\begin{array}{r} 475 \\ +574 \\ \hline 1049 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1049 \\ +9401 \\ \hline 10450 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10450 \\ +05401 \\ \hline 15851 \end{array}$$

15851 便是对称数。

再如：7234

$$\begin{array}{r} 7234 \\ +4327 \\ \hline 11561 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11561 \\ +16511 \\ \hline 28072 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 28072 \\ +27082 \\ \hline 55154 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 55154 \\ +45155 \\ \hline 100309 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1003310 \\ +0133001 \\ \hline 1136311 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 100309 \\ +903001 \\ \hline 1003310 \end{array}$$

对称数也出现了：1136311。

对称数还有一些独特的性质：

1.任意一个数位是偶数的对称数，都能被 11 整除。如：

77÷11=7 1001÷511=91

5445÷11=495 310013÷11=28183

2.两个由相同数字组成的对称数，它们的差必定是 81 的倍数。如：

9779-7997=1782=81×22

43234-34243=8991=81×111

63136-36163=26973=81×333

……

2.完全数

一个数恰好与它自身全部因数的和相等，这种数叫做“完全数”。

如：6=1×2×3=1+2+3

6 的全部因数是 1、2、3，这些因数相加所得的数，恰好也等于 6。6，便是完全数。

自然数无穷无尽，在整个自然数中，完全数也仅仅似沧海一粟。这样，如何寻找完全数便成了数学家的研究课题。

大数学家欧几里德，曾得出一个科学的论断：

如果 2^p-1 是质数，那么(2^p-1)·2^p-1

便是一个完全数。

按照这个公式，我们先对 6 进行验证：

当 p=2 时：

2^p-1=22-1=3，3 是质数，则：

(2^p-1)·2^p-1=(22-1)·22-1=6

符合公式要求，所以 6 是完全数。

假如 p=3 呢？

代入式子：

(2^p-1)·2^p-1=(23-1)×23-1=28

28 也是完全数。

不过，你不要以为完全数是很容易发现的。经过许多数学家的辛勤努力，

至今才仅仅找到 30 个完全数，而且都是偶数。

奇数中难道没有完全数吗？

许多人作了耐心的探索。有人把长达 36 位以内的自然数全部验证了一遍，仍没有发现一个奇数完全数！

但是，能不能就此断定奇完全数根本不存在呢？谁也不敢说。验证的数，虽然很多，但是在自然数的茫茫大海中，仍仅仅是“一粟”而已！

完全数仍然是没有解开的谜！

3. 音乐数

弹三弦或拉二胡总是要手指在琴弦上有规律地上下移动，才能发出美妙的声音来。假如手指胡乱地移动，便弹不成曲调了。

那么，手指在琴弦上移动对发声有什么作用呢？

原来声音是否悦耳动听，与琴弦的长短有关。长度不同，发出的声音也不同。手指的上下移动，不断地改变琴弦的长度，发出的声音便高低起伏，抑扬顿挫。

如果是三根弦同时发音，只有当它们的长度比是 3∶4∶6 时，发出的声音才最和谐，最优美。后来，人们便把奇妙的数 3、4、6 叫做“音乐数”。所以，古时候人们把音乐也作为数学课程的一部分进行教学。

音乐数 3、4、6，是古希腊的大数学家毕达哥拉斯发现的。

相传，毕达哥拉斯一次路过一家铁匠铺，一阵阵铿铿锵锵的打铁声吸引了他。那声音高高低低，富有节奏。他不禁止步不前，细心观察，原来那声音的高低变化是随着铁锤的大小和敲击的轻重而变化的。受此启发，回家后他进行很多次试验，寻找使琴弦发声协调动听的办法。最后终于发现：乐器三弦发音的协调、和谐与否，与三弦的长度有关，而长度比为 3∶4∶6 为最佳。从此，人们便把 3、4、6 称作音乐数。

4. 相亲数

人们常用“你中有我，我中有你”来表达两个人的亲密关系。令人惊奇的是：在无声无息的数字群体中，竟然也有这样关系密切的“相亲数”！

220 与 284 就是这种“你中有我，我中有你”的相亲数，它们的特点是：彼此的全部约数和(本身除外)都与另一方相等。

把 220 的全部约数(除掉本身)相加是：

$1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$

同样，把 284 的全部约数(除掉 284 本身)相加的和是：

$1+2+4+71+142=220$

相亲数，使古今中外的数学爱好者产生了极大的兴趣。大数学家弗尔马、笛卡尔和欧拉等人也都进行过研究。特别是欧拉，他在 1750 年一口气向公众宣布了 60 对相亲数，这使人们大开眼界！

此后，关于相亲数的话题，冷了一百多年。人们普遍认为：相亲数研究的“顶峰”，已经被大数学家欧拉占领了，其他人不会再有新的突破了！

可是，令人惊奇的是：一个年仅 16 岁的意大利青年巴格尼尼却惊世骇俗地宣称：1184 与 1210 是仅仅比 220 与 284 稍大的第二对相亲数！原来，尽

管欧拉算出了长达几十位、天文数字般的相亲数 60 对，却偏偏遗漏了近在身边的第二对。

当时已是 1866 年，大数学家欧拉早已长眠于地下了！

5.喀氏数

喀氏，指的是印度数学家喀普利卡。

一天，喀普利卡从铁道经过，一个偶然的现象，引起了他的思考：一块里程指示牌被龙卷风拦腰折断。那上面写着的 3025 公里，四位数字被一分为二：30 25。

见此景象，喀普利卡心里一亮："这个数好奇怪呀！30＋25=55，而 55^2=3025，原数不是又再次重现了吗？"

此后，他便研究、搜寻这类数字，竟然发现了一大批具备这种特点的数。

如：2025

20＋25=45 45^2=2025

9801

98＋1=99 99^2=9801

人们把这种怪数命名为"喀普利卡数"，简称"喀氏数"，也有称为"分和累乘再现数"。

喀氏数不仅存在于四位数，其他位数的数也有。如美国数学家亨特，发现了一个八位数的喀氏数：60481729

6048＋1729=7777 7777^2=60481729

瞧，把它拦腰切断，再揉合一起，最后只要翻个身(自乘)，便又完好无损地站到我们面前了。这简直如"分尸再续"的魔术一般，令人惊奇、赞叹！

6.圣经数

153 被称作"圣经数"。

这个美妙的名称出自圣经《新约全书》约翰福音第 21 章。其中写道：

耶稣对他们说："把刚才打的鱼拿几条来。"西门·彼得就去把网拉到岸上。那网网满了大鱼，共一百五十三条；鱼虽这样多，网却没有破。

奇妙的是，153 具有一些有趣的性质。153 是 1～17 连续自然数的和，即：

1＋2＋3＋……＋17=153

任写一个 3 的倍数的数，把各位数字的立方相加，得出和，再把和的各位数字立方后相加，如此反复进行，最后则必然出现圣经数。

例如：24 是 3 的倍数，按照上述规则，进行变换的过程是：

$24\to2^3+4^3\to72\to7^3+2^3\to351\to3^3+5^3+1^3\to153$

圣经数出现了！

再如：123 是 3 的倍数，变换过程是：

$123\to1^3+2^3+3^3\to36\to3^3+6^3\to243\to2^3+4^3+3^3\to99\to9^3+9^3\to1458\to1^3+4^3+5^3+8^3\to702\to7^3+2^3\to351\to3^3+5^3+1^3\to153$

圣经数这一奇妙的性质是以色列人科恩发现的。英国学者奥皮亚奈，对此并作了证明。《美国数学月刊》对有关问题还进行了深入的探讨。

7. 自守数

任何两个整数相乘，只要它们的末位都是 5 或 6，那么，乘积的末位数字也必然是 5 或 6。5 或 6 就像一条甩不掉的“尾巴”，始终与它们形影相随！人们称这样的数为“自守数”。

例如：

5×5=25

6×6=36

25×25=625

76×76=5776

625×625=390625

376×376=141376

从上式可见：

两位的自守数是 25 和 76，它们分别是一位的自守数 5 和 6 的“伸长”。三位的自守数也正好是一对：625 和 376。它们又分别是两位的自守数 25 和 76 的“伸长”。

自守数从 5 和 6 出发。可以无限伸长，它的位数不受限制。十位的两个自守数是：

8212890625 和 1787109376

有人已经用计算机算出了长达五百位的自守数，并且已经找到了求自守数的方法了。

有趣的是，自守数的伸长，还存在一种普遍的规律，即：

5＋6=10＋1

25＋76=100＋1

625＋376=1000＋1

……

数中奥秘真是无穷无尽！

8. 自我生成数

一个数，将它各位上的数，按照一定规则经过数次转换后，最后落在一个数上，再作转换，便不再产生新数了，任你按规则反复演变它仍是“自己”，我们把这个数称作“自我生成数”。

如：任写一个数字不相同的三位数(数字相同的 111、222、333、……999 除外)，将组成这个数的三个数字重新组合，使它成为由这三个数组成的最大数和最小数，而后求出这新组成的两个数的差，再对求得的差重复上述过程，最后必然生成“495”。

以 213 为例，按上述规则，转换过程是：

321-123=198

981-189=792

972-279=693

963-369=594

954-459=495

↓

954-459=495

对于四位数也按上述操作规则会怎样呢？

以 7642 为例，转换过程应是：

7642-2467=5175

7551-1557=5994

9954-4599=5355

5553-3555=1998

9981-1899=8082

8820-0288=8532

8532-2358=6174

↓

7641-1467=6174

四位数的自我生成数是 6174。

9.勾股弦数

三个自然数，如果其中两个自然数的平方和，恰等于第三个数的平方，这样的三个数叫做“勾股弦数”。

如：$3^2+4^2=5^2$

$5^2+12^2=13^2$

$7^2+24^2=25^2$

上面的每组三个数，都是勾股弦数。

勾、股、弦本是直角三角形三个边的名称。较短的直角边称“勾”，较长的直角边称“股”，斜边称“弦”。我国古代有“周三径一，方五斜七”的说法，意思是：周长为 3 的圆，直径约是 1；边长为 5 的正方形，它的对角线约为 7。尽管这是不精确的，却是我国劳动人民的一大发现。“方五斜七”，已经表明了直角边与斜边间的关系了！

在自然数群体中，能组成勾股弦数的，很多，很多。

下列各组数都是勾股弦数：

8、15、17；20、21、29；

9、40、41；20、99、101；

11、60、61；……

总之，当 m 是奇数时，那么能构成勾股弦的另两个数，便分别：是 $\frac{1}{2}(m^2-1)$、$\frac{1}{2}(m^2+1)$。按照这个公式，便很容易找到勾股弦数了。

如，m=13，另两个数分别是：

$$\frac{1}{2}(m^2-1)=\frac{1}{2}(13^2-1)=84$$

$$\frac{1}{2}(m^2+1)=\frac{1}{2}(13^2+1)=85$$

即：$13^2+84^2=85^2$

10.魔术数

有一些数字，只要把它接写在任一个自然数的末尾，那么，原数就如同着了魔似的，它连同接写的数所组成的新数，就必定能够被这个接写的数整除。因而，把接写上去的数称为“魔术数”。

我们已经知道，一位数中的 1，2，5，是魔术数。

1 是魔术数是一目了然的，因为任何数除以 1 仍得任何数。

用 2 试试：

12、22、32、……、112、172、……7132、9012……这些数，都能被 2 整除，因为它们都被 2 粘上了！

用 5 试试：

15、25、35、……115、135、……3015、7175……同样，任何一个数，只要末尾粘上了 5，它就必须能被 5 整除。

有趣的是：一位的魔术数 1，2，5，恰是 10 的约数中所有的一位数。

两位的魔术数有 10、20、25、50，恰是 100(10^2)的约数中所有的两位数。

三位的魔术数，恰是 1000(10^3)的约数中所有的三位数，即：100、125、200、250、500。

四位的魔术数，恰是 10000(10^4)的约数中所有的四位数，即 1000、1250、2000、2500、5000。

那么 n 位魔术数应是哪些呢？由上面各题可推知，应是 10^n 的约数中所有的 n 位约数。四位、五位直至 n 位魔术数，它们都只有五个。

11.奇异数

有些自然数，将它的平方数截成两个相同位数的自然数(如果平方数是奇数位，就在数首补 0，凑成偶数位后，再截)，截成的两个数和，仍等于原来的数。

如：9^2=81　　8＋1=9

45^2=2025　　20＋25=45

297^2=88209　　088＋209=297

5050^2=25502500　　2550＋2500=5050

……

这种奇妙现象，激起了人们的浓厚兴趣，人们把具有这种特性的奇异数，从茫茫数海中一个个挑了出来。

一位的奇异数是：1，9

两位的奇异数是：45，55，99

三位的奇异数是：297，703，999

四位的奇异数是：4950，5050，2728，7272，2223，7777，9999

五位的奇异数是：22222，77778，99999

六位的奇异数是：499500，500500，999999

……

奇怪的是，如果把 99、999、9999……这些由同一个数字 9 组成的奇异数除外，在各个数位段中出现的奇异数，都是偶数个，并且每一对奇异数的和都是 10 的 n 次方。

如：1 与 9　　1＋9=10^1

45 与 55　　45＋55=10^2

297 与 703	$297+703=10^3$
2728 与 7272	$2728+7272=10^4$
2223 与 7777	$2223+7777=10^5$
499500 与 500500	$499500+500500=10^6$

……

所以，如果自然数 A 是 n 位的奇异数，那么，10^n-A 也是 n 位数的奇异数。

如：已知 297 是三位数的奇异数，按照上述公式：

$A=297 \quad n=3$

$10^n-A=10^3-297$

$=1000-297=703$

703 也必定是三位数中的奇异数。

12. 地球数

地球围绕太阳旋转一周，便是一年。

一年是 365 天(平年)，因此，我们把 365 称为地球数。

在自然数中，10、11、12 三个数的平方和，恰是 365！

$10^2+11^2+12^2=100+121+144=365$

有趣的是，13 与 14 的平方和，也是 365。

$13^2+14^2=169+196=365$

因此，人们把下列算式称作地球数算式：

$$\frac{10^2+11^2+12^2+13^2+14^2}{365}=2$$

这种算式使人们倍感兴趣：

$10^2+11^2+12^2=13^2+14^2$

瞧，组成算式的五个数，恰是 10～14 五个连续的自然数；等式左端三个数，右端两个数。这使人们想到勾股弦数：

$3^2+4^2=5^2$

这个式子是左两项、右一项。3、4、5 也是连续数。

要是左四项、右三项呢？这几个连续数也被找到了：

$21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$

项数更多一些呢？

$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2$

原来，这些等式可以无止境地写下去。等式的右端是 m 项，则左端是(m＋1)项。一连串自然数最中心的一个数，应该是 2m(m＋1)。找到了中心数，如上述各式中的 4，12，24，40，其他各数便可依次写出了。

13. 逆序数

将组成一个数的数字，按原顺序逆转排列所组成的新数，叫做原数的逆序数。如 376 的逆序数是 673。

一位数不存在逆序数。两位以上的数，都有逆序数。

逆序数也有一些有趣的特性：一个数与它的逆序数的和除以它各位上的

数字和，所得的商在同一个数位段是一定的。如，

在两位数中：

(85+58)÷(8+5)=143÷13=11

(45+54)÷(4+5)=99÷9=11

(93+39)÷(9+3)=132÷12=11

……

瞧，商总是 11。

在三位数中，如：

(567+765)÷(5+6+7)=1332÷18=74

(432+234)÷(4+3+2)=666÷9=74

(987+789)÷(9+8+7)=1776÷24=74

……

但这局限于三位数，而且必须为连续自然数。

14.角谷猜想

角谷静夫是日本的一位著名学者。他提出了两条极简单的规则，可以对任何一个自然数进行变换，最终使它陷入“4-2-1”的死循环。

角谷提出的变换法则是：

1.当 N 是奇数时，下一步变为 3N+1；

2.当 N 是偶数时，下一步变为 N/2。

人们把它称为“角谷猜想”。

任举几个例子试试看：

当 N 是一位数 6 时，按规则应变为：

6→6÷2→3→3×3+1→10→10÷2→5→5×3+1→16→16÷2→8→8÷2→4→4÷2→2→2÷2→1→1×3+1→4→4÷2→2→2÷2→1→……

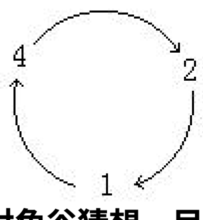
最后落入“4-2-1”的死循环。

当 N 为两位数，如 46，应变换为：

46→46÷2→23→23×3+1→70→70÷2→35→35×3+1→106→106÷2→53→53×3+1→160→160÷2→80→80÷2→40→40÷2→20→20÷2→10→10÷2→5→5×3+1→16→16÷2→8→8÷2→4→4÷2→2→2÷2→1→……

又落入了“4-2-1”的死循环。

不必列举更多的例子，迄今为止，人们还没有遇到例外情况，试验过的数，最终都停留在一个永无休止的循环圈：



但是，自然数浩如烟海，对角谷猜想，目前谁也不能证明，更不能否定。

15.7 来 8 往

任取一个大于 5 的自然数，先把它分解质因数，再将全部质因数相加，

最后，将所得和再加 1，得出新数。对新数重复上述过程，继续转换下去，奇迹便出现了！

取 9，按上述规则，转换过程是：

9=3×3	(3+3)+1=7
7=7	7+1=8
8=2×2×2	(2+2+2)+1=7
7=7	7+1=8

结果成为 7 ⇌ 8，反复往来。

取 46：

46=2×23	(2+23)+1=26
26=2×13	(2+13)+1=16
16=2×2×2×2	(2+2+2+2)+1=9
9=3×3	(3+3)+1=7
7=7	7+1=8

结果仍是“7 来 8 往”，循环不已！

三位数如何？如：216。

216=2×2×2×3×3×3	(2+2+2+3+3+3)+1=16
16=2×2×2×2	(2+2+2+2)+1=9
9=3×3	(3+3)+1=7
7=7	7+1=8

同样，最终落入“7-8”陷阱！

有人对 2520 也作上述处理,这个数是考古学家从埃及的一座金字塔墓碑上发现的象形文字。结果也是“ 8-7”循环。

自然数中这个奇异现象，是美国数学家罗伯兹发现的。

16.数字黑洞

人们都知道太平洋中的百慕大三角是一个巨大的陷阱，飞机、禽鸟、帆船、军舰……只要踏落进去，便永不返回。

令人惊奇的是：在自然数王国里，竟然也存在与此相似的“陷阱”，数字一旦堕人，便只能在谷底苦苦挣扎，永远也逃脱不出。

你可以任写一个三位数，然后进行如下操作：

将三个数字的和乘以 2，得数作为重组三位数的百位数和十位数；将原数的十位数字与个位数字的和(若得两位数，再将数字相加得出和)，作为新三位数的个位数。此后，再对重组的三位数重复这一过程，你将看到，必有一数堕落陷阱。

如，任写一个数 843，按要求，其转换过程是：

(8+4+3)×2=30……作新三位的百位、十位数。

4+3=7……作新三位数的个位数。

组成新三位数 307，重复上述过程，继续下去是：307→207→187→326→228→241→145→209→229→262→208→208→……

结果，208 落入“陷阱”。

再如：411，按要求，其转换过程是：

411→122→104→104→……

结果，104 落入了陷阱。

假如将三位数按照下面的规则运算下去，同样会出现数字“陷阱”。

1.若是 3 的倍数，便将该数除以 3。

2.若不是 3 的倍数，便将各数位的数加起来再平方。

如：126

$$126 \xrightarrow{\div 3} 42 \xrightarrow{\div 3} 14 \xrightarrow{(1+4)^2} 25 \xrightarrow{(2+5)^2} 49 \xrightarrow{(4+9)^2} 169$$

$$\xrightarrow{(1+6+9)^2} \boxed{256} \xrightarrow{(2+5+6)^2} 169 \xrightarrow{(1+6+9)^2} \boxed{256} —— \cdots\cdots$$

结果进入“169-256”的死循环，再也跳不出去了！

再如：368

$$368 \xrightarrow{(3+6+8)^2} 289 \xrightarrow{(2+8+9)^2} 361 \xrightarrow{(3+6+1)^2} 100$$

$$\xrightarrow{(1+0+0)^2} \boxed{1} \longrightarrow \boxed{1} \cdots\cdots$$

结果，1 进入了“黑洞”。

另有一种方法，可以把任何一个多位数，迅速地推入“陷阱”。

操作方法是：

第一步：数出多位数含有偶数(包括 0)的个数，并以它作新数的百位数；

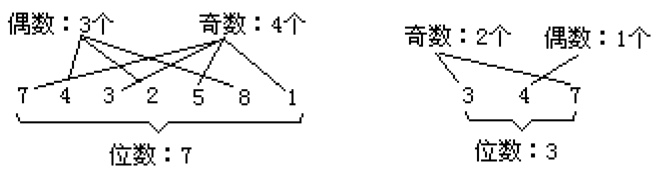
第二步：数出多位数含有奇数的个数，并以它作新数的十位数。

第三步：将位数所含数字作新数的个位数。组成新数后，对新数重复上述过程。

如：7432581

接下去便总是：123→123→……

最后，落入 123“陷阱”。



17.数字回家

落入陷阱的数，只能在原地打转，去而不返。可是，当我们变换方式，也可以叫一些已经走出去的数，再循着原路返回去，它好像一个外出旅行的人，跑了许多路，最后还是回家了。

操作方法是：

将原三位数的百位数、十位数、个位数分别扩大 2 倍的积，作为新三位数的百位、十位和个位数。如果某位上的数 2 倍后是两位数，就将其数字相加的和，作为所在位上的数。以后，对每次新组成的三位数，都重复上述过程。这样，你将看到原来的三位数又出现在面前。

如：546

5×2＝101+0=1(作新三位数的百位数)

4×2=8(作新三位数的十位数)

6×2=12　1+2=3(作新三位数的个位数)

组成新数：183，继续上述过程，即：

$\boxed{546} \to 183 \to 276 \to 453 \to 816 \to 723 \to \boxed{546}$
$\to \cdots\cdots$

结果，又回到了原来的 546！

再如:327，按同样方法得：

$\boxed{327} \to 645 \to 381 \to 672 \to 354 \to 618 \to \boxed{327} \to \cdots\cdots$

可见，至多六步便回到了原来的地方。

18.数字波涛

自然数从 1 开始，延伸扩展，漫无边际，恰如大海，表面平静如常，实质奥秘无穷！当我们深入其中，进行一番运作，它便顿起波澜。数字海洋竟然也有滚滚浪花、幽幽黑洞。

我们先来观察数字波涛吧！

任取一数，先求出它的数字平方和，再求和的数字平方和，反复进行下去，一种怪异的景象便出现了！

1.取 47

$\boxed{47} \to 4^2+7^2 \to 65 \to 6^2+5^2 \to 61 \to 6^2+1^2 \to \boxed{37} \to 3^2+7^2 \to 58$
$\to 5^2+8^2 \to 89 \to 8^2+9^2 \to 145 \to 1^2+4^2+5^2 \to 42 \to 4^2+2^2 \to 20 \to 2^2$
$\to 4 \to 4^2 \to \boxed{16} \to 6^2+1^2 \to \boxed{37} \cdots\cdots$

舍去中间环节，各个数字或大或小，最后又落到“37”上循环往复，恰如大海波涛，起伏翻滚，永无休止。

2.取 412

$412 \to 4^2+1^2+2^2 \to 21 \to 2^2+1^2 \to 5 \to 5^2 \to 25 \to 2^2+5^2 \to 29 \to$
$2^2+9^2 \to 85 \to 8^2+5^2 \to \boxed{89} \to 8^2+9^2 \to 145 \to 1^2+4^2+5^2 \to 42 \to 4^2+2^2$
$\to 20 \to 2^2+0^2 \to 4 \to 4^2 \to 16 \to 1^2+6^2 \to 37 \to 3^2+7^2 \to 58$
$\to 5^2+8^2+\boxed{89} \to \cdots\cdots$

舍去中间的计算环节，412 后依次出现的数字是 21-5-25-29-85-89-145-42-20-4-16-37-58-89……它

又如同一个巨大的数字旋涡，从 89 开始，形成一个永无休止的循环圈。

有时，又恰似一阵狂风过后，波涛逐渐平复，旋涡急速减小，最后只余下微弱的涟漪……任举一例，如 4172，按上述要求，变换后的各数是：

4172→70→49→97→130→10→1→1……

真是奇绝、妙绝！

19.奇特的 1089

1089 是个奇特的数。它的各位数字和是 18，表明它是 3 的倍数，也是 9 的倍数；1089 是 99 与 11 的乘积，因此，它还能被 99 和 11 整除；1089=33×33，所以它又是 33 的倍数。

1089 的逆序数是 9801，而 9801 又恰是 99×99 的积。

想得到 1089 吗？可以！

1.写出两位数，使它与逆序数的和是 99，再继续这个过程，1089 必然出现。

如：写出 63

63+36=99 99+99=198

198+891=1089

写出 27

27+72=99 99+99=198

198+891=1089

2.写出一个高位数大于低位数的三位数，与它的逆序数相减，再将差与差的逆序数相加，也必然出现 1089。

如，写出 947：

947-749=198

198+89=1089

写出 845：

845-548=297 297+792=1089

写出 782：

782-287=495 495+594=1089

真是奇妙！

20.数海一绝

有这么一组数，它们始终联手相等。任你如何摔打，平方也好，“砍头去尾”也好，直至“剁成碎片”，保持相等的特性“至死不变”。

在茫茫数海中，真可谓“一绝”！

这组数是：

123789+561945+642864

=242868+323787+761943

(=1328598)

当然，这样的等式并不希奇，奇就奇在无论你让它们各自自乘，或将它们都“刀砍斧剁”，它们却总要“相等”！请看：

1.将每个数都平方：

$123789^2+561945^2+642864^2$

$=242868^2+323787^2+761943^2$

(=744380022042)

相等！

2.把各个数量左边的一个数字都抹去：

23789+61945+42864

=42868+23787+61943

(=128598)

相等！

3.抹掉一位后再平方呢？

$23789^2+61945^2+42864^2$

$=42868^2+23787^2+61943^2$

(=6240422042)

还是相等！

4.把各个数左边再抹掉一位、再平方如何呢？

3789+1945+2864

=2868+3787+1943

(=8598)

$3789^2+1945^2+2864^2$

$=2868^2+3787^2+1943^2$

(=26342042)

它们还是相等！

咱们索性这样继续干下去。

5.789+945+864=868+787+943(=2598)

$789^2+945^2+864^2=868^2+787^2+943^2$(=2262042)

6.89+45+64=68+87+43(=198)

$89^2+45^2+64^2=68^2+87^2+43^2$(=14042)

7.最后只剩下一位数了：

9+5+4=8+7+3(=18)

$9^2+5^2+4^2=8^2+7^2+3^2$(=122)

相等的性质一如既往！

更为奇绝的是，即使从两组的右边逐个地抹去数字，仍依上述过程，它的相等性质仍是坚定不移！

试试看：

12378+56194+64286

=24286+32378+76194

(=132858)

$12378^2+56194^2+64286^2$

$=24286^2+32378^2+76194^2$

(=7443670316)

最后，又是只剩下一位数了：

1+5+6=2+3+7(=12)

$1^2+5^2+6^2=2^2+3^2+7^2$(=62)

它们也还是相等！

这种“顽强不屈”的精神，使我们想到了一首诗：

千锤万凿出深山，烈火焚烧若等闲。

粉身碎骨浑不怕，要留清白在人间。

真想不到自然数中，也有这样的“钢铁战士”！

21.神奇的“洛书”

中国古代有一个神话传说：

相传远在夏代，大禹治水时，从洛河里出来一只大乌龟，在龟的背上显出图案和数字，数字从 1 到 9 奇妙地排列。大禹根据龟背上的图像，发明了洛书，一直流传至今。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

这个数图的奇妙处在于：横、竖、斜三个数的和都是 15，实际上是个“三级幻方”。

当时正处在原始氏族社会，我们的祖先能作出这样发明，已是十分令人震惊！难怪古人说它是神的启示。

经过后人的研究，它更令人惊奇的还多着呢！

让我们看看它的奇妙吧！

（一）

在横三行中，每两个数组成一个两位数，三个数的和与它们的逆序数的和相等：

49+35+81=18+53+94(=165)

92+57+16=61+75+29(=165)

把被中间一行隔开的两个数组成三个两位数，它们仍具备这种性质：

42+37+86=68+73+24(=165)

更为奇妙的是，将这个式的各个加数都平方，这种相等的性质仍不变。

$42^2+37^2+86^2=68^2+73^2+24^2$(=10529)

这种等式如同文学作品中的回文，因而称作“回文等式”。

竖三行的数字，若也依此组合，是否有此特征呢？事实证明同样如此！

43+95+27=72+59+34(=165)

38+51+76=67+15+83(=165)

被中间一列隔开的两数，组成后，同样本性不改：

48+91+26=62+19+84(=165)

$48^2+91^2+26^2=62^2+19^2+84^2$(=11261)

真是奇妙！

然而，更奇妙的还在后边！

（二）

这一次，咱们只用四个角上的数组成四个两位数。其他数暂且不管它：

48+86+62+24=42+26+68+84(=220)

仍是个回文等式。

将各个加数都平方。再试试：

$48^2+86^2+62^2+24^2=42^2+26^2+68^2+84^2$(=14120)

还是个回文等式！

再将各个加数立方看看。

$48^3+86^3+62^3+24^3=42^3+26^3+68^3+84^3$(=998800)

还是个回文等式！

这次，咱们把四个角上的数弃之不用了，只用各边中间的数字组数：

31+17+79+93=39+97+71+13(=220)

将加数平方：

$31^2+17^2+79^2+93^2=39^2+97^2+71^2+13^2$ (=16140)

将加数立方：

$31^3+17^3+79^3+93^3=39^3+97^3+71^3+13^3$ (=1332100)

这种奇妙的回文等式关系，始终不渝！

（三）

以 5 为中心横、竖、斜四个三位数的和也构成回文等式：

951+357+258+654

=456+852+753+159

(=2220)

如果把各个加数都平方，它们的和仍相等：

$951^2+357^2+258^2+654^2$

$=456^2+852^2+753^2+159^2$

(=1526130)

（四）

咱们只用横三行的三个三位数，怎样呢？

492+357+816=618+753+294(=1665)

仍是回文等式！

把各个加数也都平方：

$492^2+357^2+816^2=618^2+753^2+294^2$ (=1035369)

还是个回文等式！

竖三列的三个三位数，是否也有此特征呢？经验证，同样如此！

438+951+276=672+159+834(=1665)

$438^2+951^2+276^2=672^2+159^2+834^2$ (=1172421)

（五）

如果说，上面的一些式子使我们感到奇妙，那么下面的一些变化，将令人震惊：

我们来变化一下上面已组合成的式子，如：

$951^2+357^2+258^2+654^2=456^2+852^2+753^2+159^2$

(=1526130)

对这些数进行“宰割”、“腰斩”，即将每个数的任一个相同数位上的数字都“割去”，让剩下的数字组成数，请看：

1.都割去百位数：

$51^2+57^2+58^2+54^2=56^2+52^2+53^2+59^2$ (=12130)

2.都割去十位数：

$91^2+37^2+28^2+64^2=46^2+82^2+73^2+19^2$ (=14530)

3.都割去个位数：

$95^2+35^2+25^2+65^2=45^2+85^2+75^2+15^2$ (=15100)

瞧，保持回文等式的特征，本性不改！

咱们把每个数的前两位都砍掉，只保留个位数，回文等式的特性仍然存在：$1^2+7^2+8^2+4^2=6^2+2^2+3^2+9^2$ (=130)再将后两位砍掉，只保留原来的千位数：$9^2+3^2+2^2+6^2=4^2+8^2+7^2+1^2$ (=130)相等的特性仍是不改初衷。◇后记◇

数学是基础教育的一门重要学科。计算能力、逻辑思维能力和空间想象能力是学习、生活和从事社会工作的基本技能。从少年时代打好数学基础，养成热爱科学的兴趣、勤思好学的习惯，不仅对于人生有重要意义，也关系着民族素质的大计。

然而，数学在许多人的心目中，却是抽象乏味的代名词。

参与本书工作的都是长期与少年儿童生活在一起的教育工作者，使大家感受最深的是：不论是课堂教学还是课外作业，只要内容能够引发兴趣的，便学得轻松愉快，效果良好。

于是，各自便留心收集整理各种趣味数学知识，从读书看报，到听老人讲古，直至街头摆摊设点的数学游戏……都成了教学的“佐料”。

这本《奇妙数学大世界》，是集体智慧的结晶。它的内容大体来源于四个方面：一是日常生活的实际事例；二是民间流行的传统趣题、名题；三是根据书、报刊载的相关内容加工改编的；四是独立创作的。由于来源广泛，不便一一注明出处。在此仅向提供资料的同志表示衷心的谢意。

如果读者通过阅读本书从而热爱数学、钻研探索，进而也如同书中那些在数学上作出贡献的学者、专家，则作者的愿望便达到了，相信这也是所有与此书有关的同志的心愿。

编著者