学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

解 题 思 路 训 练

BOOK

内部资料 非卖品

解题思路训练

千里之行，始于足下。

——老聃

在数学中，例子比法则更重要。

——牛顿

1 到迷宫去

很久以前，希腊的克瑞特城有个国王叫米诺斯，他喂养了一只牛头人身的怪物叫弥诺陶洛斯，这只怪物吃了很多人。后来，年轻的英雄泰修斯，决心为民除害，要去杀死这个怪物。可是，这个怪物住在一座迷宫里，这是米诺斯请著名建筑师代达罗斯精心设计建造的，里面的道路迂回曲折，无论谁走进去，不多久就会迷失方向。

不过，泰修斯却没有被困在迷宫里。因为他得到了米诺斯的女儿、美丽的公主阿德涅的帮助。

阿德涅给泰修斯一把宝剑和一个线团。泰修斯走到迷宫的入口处，把线团往地上一放，线团就向前滚，把线放开。泰修斯顺着线往前走，很快就到了迷宫的中心，怪物弥诺陶洛斯正躺在那里。他举起宝剑劈死了怪物，然后又顺着线走出了迷宫。

这座迷宫现在还在吗？

米诺斯的迷宫早已找不到了。不过，既然弥诺陶洛斯能走进走出，那就有路可通。所以，我们也可以来设计一个。

这就是一个迷宫：

现在，有两个问题请你考虑一下：

一、怎样从入口 A 走到迷宫的中心 B？牛头人身的怪物就躺在那里。

二、怎样从中心 B 走到入口 A？

这两个问题是相同的。能从 A 走到 B，自然能从 B 走到 A，反过来也是这样。

注意。从图中 B 走到 A，比从 A 走到 B 容易得多。因为从 A 到 B 时，要遇到很多岔路，不知道该选择哪一条；而从 B 到 A，却几乎不需要选择。在别的图上，可不一定就是这样。

于是，解决这类问题有三个方法：

一、从 A 走到 B；

二、从 B 走到 A；

三、泰修斯从 A 向 B 走，弥诺陶洛斯从 B 向 A 走，他们在迷宫中某处相遇。

其实，不只这类问题，可以说一切数学问题，都有这样的三种思考方法。

第一种方法叫做综合法，它是由已知条件推出结论；第二种方法叫做分析法，它是由结论倒推到已知条件；把这两种方法结合起来使用，便是第三种方法了。

究竟哪种方法好，要根据问题来确定。

2 五角星上放棋子

这个游戏很有趣。

图上的五角星有十个交叉点 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6、A_7、A_8、A_9、A_{10}，要我们把棋子放在交叉点上，看谁放得多。

一切游戏都有规则。这里放棋子的规则是：从一个没有放棋子的交叉点开始，沿直线向前数一、二、三，把一枚棋子放在第三个交叉点上；在每个交叉点上，只能放一枚棋子。

例如，从 A_1 出发，在 A_8 处放上棋子；再从 A_1 出发，在 A_{10} 处放棋子；从 A_6 出发，在 A_4 放棋子；从 A_5 出发，在 A_7 放棋子；从 A_9 出发，在 A_2 与 A_5 放棋子。这样放上六枚棋子，剩下的四个交叉点 A_1、A_3、A_6、A_9，都无法再放了。

你来试试。

一试，有时放五枚棋子，有时放六枚或者七枚、八枚、九枚。九枚最多，

可重放一次，放了八枚就无法再放了。

不能准放上九枚，可见你还没有掌握方法。

那该怎么放呢？

其实，方法很简单。就是上一节说到的，把问题反过来考虑。

换句话说，假定问题已经解决，九枚棋子，已经放在五角星的九个交叉点上，只有一个交叉点空着，比如说是 A_{10} 空着。

现在，我们来把这九枚棋子，一枚一枚地取下来。按照放棋子的规则，取的要求是：从那个没有放棋子的交叉点 A_{10} 开始，沿直线向前数一、二、三，把 A_1 与 A_3 上的棋子取下来。其余类推。

这样把九枚棋子取下来很容易：

$A_{10}\to A_1\to A_8\to A_4\to A_6\to A_2\to A_9\to A_5\to A_7\to A_3$；

$A_{10}\to A_3\to A_7\to A_5\to A_9\to A_2\to A_6\to A_4\to A_8$

$\to A_1$。

现在，再把上面的过程反过来，就好把九枚棋子放上去了：从右到左，

从空格 A_7 出发，在 A_3 放上棋子；从空格 A_5 出发，在 A_7 放棋

上子；从空格 A_9 出发，在 A_5 放上棋子；…最后从 A_{10} 出发，在 A_1 放上第九枚棋子。

明白了道理，你就不难把这样的方法，用在其它的图形上。比如说，在跳棋盘上放上尽可能多的棋子。

3 合并火柴棍

不少好玩的游戏和火柴有关。这里介绍的就是一个。

把十四根火柴摆成一排：

要你把这十四根火柴两两合并成七对：

合并的要求是：每根火柴只能越过两根，与另一根并在一起。

例如，火柴 3 可以越过 4、5 与 6 合并；然后，火柴 5 又可以越过 3、6 与 7 合并。

你试一下。要是并成了，再考虑进一步的问题：把十四改成更大的偶数，例如

四十，该怎么办？

十四根就不容易了，四十根更难。

欲进先退，从最简单的情况做起。就是把火柴的根数减少、再减少，一直减

少到最少的根数。

按照要求，两根和四根显然不行。反复试试，六根也不行。八根呢？看来有希望。

怎么并呢？

还是采用前面用过的方法。假设问题已经解决，就是已经摆成了四对，看能不能还原回去。

一试。行。先把火柴 3 越过 2、1；再把火柴 6 越过 7、8；然后把火柴 2 越过 4、5；最后把火柴 7 越过 2、5。

把这个过程反过来，也就是把图中的 7 与 8 合并；2 与 1 合并；3 与 4 合并；6 与 5 合并，又变成四对了：

解决了八根火柴的问题，我们就好来解决十四根了。

你看，把开始图中的火柴 4，越过 3、2，与 1 合并，十四根火柴的问题就化为十二根。再把图中的火柴 6，越过 5、3，与 2 合并，问题又化为十根。再把图中的火柴 8 与 3 合并，问题又化为八根。所以，解决了八根火柴的合并问题，十根、十二根、十四根火柴的合并问题也随之解决了。

这样，要把十六根、十八根、…四十根，以至任意多的偶数根火柴，两两合并成对，就都变得容易了。

现在，请你考虑一下，看怎样把一排二十一根火柴并成七堆，每堆三根。并的要求是：每根火柴只能越过三根，与其他火柴并在一起。

4 抢三十

小聪与小明在抢 30。两个人从 1 开始，轮流往下报数，每次至少报一个数，至多报三个数，谁报到 30 就胜了。“1，2”，小聪开始报数。“3，4，5”，小明接着往下报。“6”。“7，8”。结果，小聪报到 30，小明输了。接连报了几次，总是小聪胜。“怎么老输？我的运气真不好。”“这不是运气。胜有胜的道理，坠有输的原因。换个玩法，你就明白了。”

小聪取出一副扑克，说：

“我们轮流取牌，每次至少取一张，至多取三张。这回取最后一张的算输。”

玩了几次，还是小坠输。

“老是你赢，把诀窍告诉我吧。”

“诀窍很简单，把问题倒过来想。假设是你报 30，那么，在这之前的一次，你应当报到多少呢？”

“不能报到 29，也不能报到 28 或者 27。要是我报到 27，28，29，你就可以报 30。所以，我应该报到 26。要是我报到 26，那么，不管你怎么报，我都能报到 30 了。”

“对。要抢 30，先抢 26。那要抢 26，先抢什么呢？”

“先抢 22。”

“对。这样，我们就得到了一串取胜的数——30，26，22，18，14，10，6，2。这样，第一个人应当报到 2，他就可以陆续报到 6，10，14，18，22，26，30。”

“这么说来，总是第一个报数的人胜了。”

“是这样的。不过，要是他不知道诀窍，让第二个人抢去一个取胜的数，胜利就可能易手了。”

“那么，一定要事先把这些关键数算好、记好了？”

“这些数不必死记。因为每相邻两个的差是四，所以 30÷4 得到的余数 2，就是最小的关键数。因为 4=3+1=2+2=1+3，所以报 2 后，你可以根据对方报的数，采取相应的策略。也就是对方报一个数，你报三个数；对方报两个数，你也报两个数；对方报三个数，你报一个数，使两个人所报的数的个数和为四。这样，你每次报到的数就都是关键数了。”

“啊，我懂了，取扑克牌也是同样的道理。不过，这一次却是取最后一张的算输。这…”

“要是扑克牌共五十四张，那你取到哪一张就胜定了呢？”

“对了，先抢 53。其余类推。”

后来，小聪和小明玩取火柴游戏。两个轮流取，每次至少取一根，至多取四根，一共有五十六根火柴，谁取完为胜。小聪先取，次次胜利。小明要求先取，小聪把火柴增加到六十根。尽管小明先取，小聪还是次次获胜。

请你想一想，小明为什么老输？

5 蜗牛爬井

一只蜗牛住在井底，坐井观天，以为天只有井口那么大。后来，听说井上面还有很大的天地，它下定决心，要爬到井上面去看看世界，开开眼界。

且说蜗牛每天，先向上爬三米，然后向下退两米，要是井深八米，这样爬要多少天才能到达井口？

这太容易了。蜗牛每天先向上爬三米，然后向下退两米，这就是说它每天向上爬一米。所以，

8（米）÷1（米）=8（天）。

这样算错了。因为当蜗牛爬到离井口三米的地方，它只要一天，实际上还不到一天就爬到了井口。正确的算法是：

（8—3）÷（3—2）+1＝5÷1+1＝6

天，实际上不到六整天。

这个例子说明：在解题时，要注意你后来解的问题，是不是与原来的问题相同。或者说，是不是与原来的问题等价。我们说：

蜗牛每天先上爬三米，然后下退两米，井深八米，多少天爬到井口？

蜗牛每天上爬一米，井深八米，多少天爬到井口？这两个问题不是等价的。

6 添数字

老师问小聪和小明四个问题：

一、在 724 后面写三个数字，使得到的六位数被 7、8、9 整除。

二、在 724 后面写三个数字，使得到的六位数被 504 整除。

三、在 724 后面写三个数字，使得到的六位数被 7、8、3 整除。

四、在 724 后面写三个数字，使得到的六位数被 7、16、9 整除。

小明说：“这四个问题好象差不多。”

小聪说：“第一和第二个问题是相同的。”

“为什么呢？”

“因为 504＝7×8×9，恰好是 7、8、9 的最小公倍数。所以，能被 7、8、9 整除的数，一定能被 504 整除。反过来，能被 504 整除的数，也一定能被 7、8、9 整除。”

“那第一和第三、第四个问题相同不相同呢？”

“能被 7、8、9 整除的数，一定能被 7、8、3 整除；可是能被 7、8、3 整除的数，不一定能被 7、8、9 整除。”小聪说，“所以，这两个问题有所不同。”

“能被 7、8、9 整除的数，不一定能被 7、16、9 整除；可是能被 7、16、9 整除的数，一定能被 7、8、9 整除。”小明抢着说，“所以，这两个问题也有所不同。”

“再出一个问题，”老师说，“你们看看它和哪一个问题相同：

“在 724 后面写三个数字，使得到的六位数能被 7、8、18 整除。”

“这个问题还是和第一和第二个问题相同。”小明说，“因为 7、8、18 的最小公倍数还是 504。”

“好。现在你们解一下这个问题吧。”

小明的解法是：

724000÷504=1437，差 248；

724000+248+504=724752

小聪的解法是：

724999÷504=1438，余 247；

724999—247=724752。

老师说：“思路和方法都对。看来你们的解题能力提高了。不过，

“724752—504=724248，也对。”

7 从小爱数学

这是一道智力竞赛题：

在图中空白方格中填上字，使得每一横行、每一竖行和两条对角线上的五个方格中，都含有“ 从小爱数学 ”这五个字。

碰上这种关联变化多的题，可以象打仗那样，先找薄弱点，从这里突破，然后再逐步扩大战果。

这个题的薄弱点显然在第三横行。它的两个空白方格，应该填上“ 从 ”和“ 小 ”。

一看，左边第一竖行已经有了“ 从 ”。所以，第三横行左边方格填“小”，右边方格填“ 从 ”。

剩下的三条空白横行，从竖行看，都只有两个字，不好填。两条对角线上已各有两个字，加上竖行的两个字，好填。

一看，在两条对角线上的六个空格中，右边三个已有的四个字有重复，不好填；左边三个已有的四个字都不重复，应该分别填上“ 爱 ”、“ 从 ”和“ 学 ”。

填到这里，很快就把剩下的方格填出来了：

常见的“ 虫食算 ”，也可以用这个办法去解决。例如：在这个乘式中，△表示 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的一个。一看，最容易填的，是第五行左边的△是 1。这样，我们便得到了△1△×300＝12△500。一算，我们又得到了 415×300＝124500。填到这里，很快就把剩下的△填出来了：

```
   415
 × 382
──────
   830
  3320
 1245
──────
158530
```

这是两个不相干的问题，可是解题的思路是类似的。

8 算周长

小聪问小明：“你会算一块地的周长吗？”

“当然会。”

“好。你算一下这块地的周长：”

“周长就是各边长的总和。可是，这个图中的 AB、BC、DE、…是多长呢？”

“AB 是可以算出来的。”小聪说，“它的长应当是：9—（5—3）=7。”

“BC、DE、FG、HI、JK 长不知道，怎么办呢？”

“是不知道。可是，你看，它们的总长不正好等于 20 嘛。”

“啊。我知道了。这个山字形的周长是：7+3+8+8+5+9+20×2=80。”

“其实，AB 的长也不必先算出来。”小聪说，“我们可以把它分成两段，一段与 IJ 合来起等于 9，另一段等于 CD，也就是 3。所以，山字形的周长是：（20+8+9+3）×2=80。”

“这样看来，题目中的数据不是少了，而是多了。”小明说，“IJ＝5 这个数据就是多余的。”

“对。这个例子告许我们：周长虽然等于各边长的总和，可是认为只有知道了所有的边长才能算出周长，却是一个偏见。不冲破这种偏见，本来好解的题，便解不出来了。”

“啊。我做过一道有趣的题，”小明说，“和这个求周长的题类似。

“题目是：有甲、乙、丙三种货物。购甲三件、乙七件、丙一件共需 3.15 元；购甲四件、乙十件、丙一件共需 4.20 元。问购甲、乙、丙各一件共需多少元？

“开始，我认为只有知道了单价，才能求出甲、乙、丙各一件共需多少。我这么想着，可就是做不出来。

“后来，我的想法变了，很快就把题做出来了。”

“怎么变的呢？”

“题目给的是甲、乙、丙各多少件的总价，问的是甲、乙、丙各一件的总价。我想，能不能不求出单价，直接求出甲、乙、丙各一件的总价呢？

“我反复看 3、7、1、和 4、10、1。原来窍门在这里：

“3×3，7×3，1×3，共需 3.15×3 元；

“4×2，10×2，1×2，共需 4.20×2 元。

“上下对应一减，便得到甲、乙、丙各一件的总价。所以，答案是：

“3.15×3—4.20×2=1.05 元。”

小聪高兴地说：“这是两个不同的问题，可是就解题思路来说，是类似的。你真会动脑筋。”

小明认真地说：“不是会动脑筋，是走投无路，逼出来的。”

9 解鸡兔同笼

用一种方法解几道类似的题，往往不如用几种方法解一道题生动有趣，收获较大。

举一个例子：鸡兔同笼，共有十六个头，四十只脚，问鸡兔各多少只？

列方程来解。设鸡有 X 只，那兔有（16—X）只。然后，再考虑它们的足数。鸡 X 只共有足 2x 只，兔（16—X）只共有足 4（16—X）只，根据题意，有 2x+4（16—X）＝40。

列方程解应用题的要点正是这样：首先，把一个或者几个未知数用 X 或者 X、y 等表示；然后，把其余的量用 X 或者 X、y 等的代数式表示；最后，根据其余的量的关系列出方程。这就是说，同一个量，要是可以用几种不同的方法计算，得出几个表达式，那么，这几个表达式一定相等。

设兔有 X 只也可以。还可以设鸡或者兔的脚有 X 只，然后利用头数来列方程。这些解法，思路一样，可是有简繁的不同。

用算术来解。假设十六只全是鸡，共有脚 16×2＝32 只，比原来少了 40—32＝8 只。为什么少八只呢？因为把一些兔子当作鸡了。把一只兔子当作一只鸡时，少了两只脚，现在少了八只脚，说明有 8÷2＝4 只兔被当作鸡了。兔有四只，鸡当然就是十二只了。

同样的道理，假设十六只全是兔，或者假设四十只脚全是鸡的、全是兔的，也一样可以求解。

还有别的解法吗？

有。假设把每只兔分成两只怪兔，这种兔有一个头两只脚。这样，总的脚数还是四十，可是鸡与怪兔的头数是 40÷2=20，比原来鸡兔头数多了 20—16＝4。一只兔分成两只怪兔，头数增加一。所以，兔子应当是四。

同样的道理，也可以假设把每两只鸡并成一只怪鸡，这种鸡有一个头四只脚。40÷4=10 只，头数比原来少了 16—10=6 只。因为每两只鸡并成一只后头数少一，可见鸡数是十二只。

这样的解法构思巧妙。可是，鸡是奇数只呢？

鸡是奇数只时，拿出一只，算好后再加进去就是了。

还有更为巧妙的办法是凑。可惜有很多人轻视凑，不愿意凑。其实，凑可以叫做尝试法或者试探法。在数学中，这是一种寻求解答的重要方法。你看，

兔数：0，1，2，3，4；

鸡兔总足数：32，34，36，38，40。

很快就得到了答案。

注意。总足数不到四十，要增加兔子的只数；相反，就应当减少兔子的只数。第一个代入尝试的数很重要。选择得当，很快就能得到结果。这道题也可以用计算机来做，计算的程序是：

10 追水壶

小聪在河中游泳。他逆流而上，在大桥旁遗失塑料水壶一只，继续游了二十分钟后才发现。他返回寻找，在离桥两公里的地方追到。问水速是多少？小聪返回寻找用了多少时间？

设水速为每分钟 X 公里，小聪的游速为每分钟 y 公里。于是，小聪的顺水游速是每分钟 y+X 公里，逆水游速是每分钟 y—x 公里。追寻水壶的时间也是未知的，设为 t 分钟。不要怕未知数多了。未知数多，列方程反而容易。不过，这个题设了三个未知数，方程还是不好列。不要紧，先画一个图看看：

A 点表示小聪返回时的位置，与大桥的距离是 20（y-x）公里；

B 点表示小聪返回时水壶的位置，与大桥的距离是 20x 公里；

C 点表示小聪追到水壶的位置，与大桥的距离是 2 公里。

小聪从 A 到 c 用了 t 分钟，A 与 C 的距离是 t（x+y）公里；

水壶从 B 到 C 也用了 t 分钟，B 与 c 的距离是 tx 公里。

这样，我们便得到两个方程：

20（y-x）+2=t（x+y）……（1）

20x+tx=2…………………（2）

三个未知数两个方程，还要列一个方程才行。不过，这个题只要求求出 x 与 t，不一定非要列出三个方程不可。

把（1）写成

20y+2=20x+tx+ty，和（2）比较，得

20y＝ty。

y 当然不等于 0，得

t＝20。

代到（2），得

x=$\frac{1}{20}$。

答案是水速每分钟 0.05 公里，回追水壶用了 20 分钟。

这道题有两个特别的地方：

一个是小聪返回追找水壶的时间，与水速没有关系。因为小聪和水壶，都顺着水速在往下流动。

一个是算出水速是每分钟 0.05 公里后，只要 y 大于 0.05，都符合问题的要求。这就是说，小聪的游速是无法确定的。

认识一些问题中的这种不变量，往往是解决问题的关键。

11 卖蛋

一位农民卖鸡蛋，第一次卖去篮中的一半又半个，第二次卖去剩下的一半又半个后，剩下一个。请问：篮中原有多少个鸡蛋？

用倒推法。第二次卖去一半又半个，剩下一个，要是第二次只卖去一半，那篮中应该剩下

$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

个。所以，第一次卖完后，篮中剩下

$\frac{3}{2}\times 2=3$

个鸡蛋。

同样。要是第一次只卖去篮中的一半，那篮中应该剩下

$3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

个。所以，原来篮中是

$\frac{7}{2}\times 2=7$

个鸡蛋。

列方程解。设篮中原有鸡蛋 x 个。第一次卖去

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

个，剩下

$x-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

个；第二次卖去

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$

个，剩下

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}$

个。于是，得到方程

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=1$。

解得 x＝7。

列方程麻烦点。可这是解应用题的普遍适用的方法。算术解法，有时简单巧妙，难在不容易想到；代数解法列方程，有时繁一些，却容易想到。

从思路看，算术解法是第一节说的希腊勇士“1”，从入口走到迷宫中心去杀怪物“x”；代数解法是怪物“X”，自己从迷宫中心走了出来，在入口碰到希腊勇士“1”，然后勇士跟踪追击，在迷宫中心把怪物杀死。

还有更为巧妙的解法。

要是这位农民，事先借一个鸡蛋放在篮里，每次卖出的个数仍然不变，那每一次都比原来多剩下一个，最后在篮子里应该剩下两个鸡蛋。

2×2×2=8，8—1＝7。

这就是农民篮子中原来有的鸡蛋数。

卖的次数再多一些，用这个方法解特别方便。比如说每次卖一半又半个，共卖了六次后剩一个，那 2^7-1=127，就是原有的鸡蛋数。

12　1+1＝10

1 加 1 怎么会等于 10 呢？原来，这里用的是二进制。

十进制是最常见的进位制。在十进制中有十个数码——0、1、2、3、4、5、6、7、8、9，逢十进一。所以，

$325=3\times10^{2}+2\times10+5$。

十进制并不是唯一的进位制。人们根据需要，也常常采用其它的进位制。例如 1 小时＝60 分，1 分=60 秒。

在现代技术中，二进制是最常用的。因为二进制只需要两个数码——0 和 1，逢二进一。所以，

$10=2$，$100=2^{2}$，$1000=2^{3}$，…

这里等号左边是二进制，右边是十进制。为了避免混淆；在同时用到两种进位制时，可以把二进制中的数写成（　　）$_{2}$。例如，

$(101101)_{2}$

$=1\times2^{5}+0\times2^{4}+1\times2^{3}+1\times2^{2}+0\times2+1=45$。

这也就是化二进制为十进制的方法。反过来用除法：

$$\begin{array}{r|l}
2 & \underline{45} \\
2 & \underline{22}\cdots1 \\
2 & \underline{11}\cdots0 \\
2 & \underline{5}\cdots1 \\
2 & \underline{2}\cdots1 \\
2 & \underline{1}\cdots0 \\
 & 0\cdots1
\end{array}$$

得 $45=(101101)_{2}$。

逢二进一，使二进制的计算十分简单。例如，

1+1=10；

$$\begin{array}{r}
1101 \\
\times\quad 101 \\
\hline
1101 \\
1101 \\
\hline
1000001
\end{array}$$

在二进制中，一个数的一半，就是把这个数的小数点向左移动一位。例如，

111 的一半是 11.1；

11.1 的一半是 1.11。

其中，0.1 就是十进制中的$\frac{1}{2}$，0.01 就是十进制中的 $\frac{1}{2^{2}}=\frac{1}{4}$ 。

采用二进制，上面说的卖蛋问题是很容易解决的。

这个卖蛋问题的答案，用二进制来写是 111。因为第一次卖去篮中的一半又半个，篮中剩下一半少半个，而 111 的一半又半个就是 11（＝11.1—0.1）。第二次卖去 11 的一半又半个，剩下的当然就是 11 的一半少半个，也就是 1 个。

$(111)_{2}=1\times2^{2}+1\times2+1=7$。

这就是卖蛋问题的第四种解法。

有趣的是，在这样的问题中，虽然一再出现了“一半又半个”的字眼，可是每次卖出的鸡蛋数却都是整

数，完全用不着担心半个鸡蛋怎么卖。13 难题不难一例

有一个六位数，它的二倍、三倍、四倍、五倍、六倍还是六位数，并且它们的数字，都和原来的六位数的数字完全相同，只是排列的顺序不一样，求这个六位数。设这个六位数为 X。X 的首位数字一定是 1。

为什么呢？

因为 x 的首位数字大于 1，比如说是 2，那 5x 和 6x 就是七位数了。

一想，x、2x、3x、4x、5x、6x 的首位数字，应该一个比一个大，而且后面一个的首位数字，至少比前面一个的首位数字大 1。这六个数的六个首位数字互不相同，按题意，就应该正好是 x 的六个数字了。

x 的六个数字互不相同，首位数字是 1，其余的数字都比 1 大，所以 x 的数字都不是 0。

现在，把注意力转移到末位数字上来。

一想，x、2x、3x、4x、5x、6x 的末位数字，也应该互不相同。

为什么呢？

因为，要是其中有两个数的末位数字相同，那么，这两个数的差的末位数字是 0。可是，在 x、2x、3x、4x、5x、6x 中，任意两个数的差，必须是 x、2x、3x、4x、5x 中的一个。例如 4x—2x＝2x，6x—5x＝x。既然它们的数字与 x 的数字相同，也就不能是 0 了。这样，六个数的末位数字，也就是 x 的六位数字了。其中，一个是 1。

一想，1 不是 x 的末位数字。因为 x 的首位数字是 1。1 也不是 2x、4x、6x 的末位数字。因为它们的末位数字是偶数，不可能是奇数 1。1 也不是 5x 的末位数字。因为 5x 的末位数字是 5 或者是 0。这样，我们便得到 1 是 3x 的末位数字。

3x 的末位数字是 1，那 x 的末位数字是 7。

x 的末位数字是 7，那 2x、4x、5x、6x 的末位数字分别为 4、8、5、2。

x＝l××××7。其中的四个×，应该填上 4、8、5、2。问题是谁先谁后呢？

一想，x、2x、3x、4x、5x、6x 这六个数的第二位数字，也应该是互不相同的。

为什么呢？

要是其中有两个数的第二位数字相同，那这两个数的差的第二位数字是 0 或者是 9。可是，这个差是 x、2x、3x、4x、5x 中的一个，它的数字只能是 1、4、8、5、2、7，不能是 0 和 9。所以，x、2x、3x、4x、5x、6x 的第二位数字，也恰好是 1、4、8、5、2、7 这六个数字。

同样的道理，x、2x、3x、4x、5x、6x 的第三位、第四位、第五位数字，也都是这六个数字。

这和求 x 有什么关系呢？

有关系。你看，

x+2x+3x+4x+5x+6x＝21x。列成竖式，把这六个六位数相加，得第一位数字的和是

1＋4＋2＋8＋5＋7＝27，第二位数字的和是 27，…直到第六位数字的和

也是 27。所以，这 6 个六位数的和应当是

$$\begin{array}{r} 27 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \\ \hline 2999997 \end{array}$$

∵21x＝2999997；

∴x＝142857。

最后，说一下这道难题是怎样设计出来的：

$\frac{1}{7}$＝0·142857142857142857…

x＝142857，是这个循环小数的循环节。$\frac{10}{7}$、$\frac{100}{7}$、$\frac{1000}{7}$、$\frac{10000}{7}$、$\frac{100000}{7}$的小数部分，与 $\frac{3}{7}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{6}{7}$、$\frac{4}{7}$、$\frac{5}{7}$、的小数部分相同，它们的循环节，也是由 1、

4、2、8、5、7 这六个数字组成。所以，用 2、3、4、5、6 去乘 142857，得到的数还是由 1、4、2、8、5、7 组成，只是次序不同。

14 八个等式

请你算一算这八个等式：

1、 $(2n)^2=$

2、 $(2n+1)^2=$

3、 $(n+1)^2-n^2=$

4、 $(n+1)^2-(n-1)^2=$

5、 $(a+b)^2-(a-b)^2=$

6、 $(ab+1)^2-(ab-1)^2=$

7、 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$

8、 $(2k^2+2k+1)^2-(2k+1)^2=$

算好以后，再请你看一看，想一想：这些等式说明什么？你能得出什么结论？

15　111…111 是平方数吗

自然数的平方——1^2，2^2，3^2…叫做平方数。要是一根火柴表示数字 1，那么，不管用多少根火柴摆成

111…111

也不可能是平方数，除非只有一根火柴，可以得 1=12。

为什么呢？

你已经算过：

（2n）2=4n2；

（2n+1）2＝4n2+4n+1＝4（n2+n）+1。

这就是说，平方数有这样的特点：偶数的平方除以 4 余 0，奇数的平方除以 4 余 1。换句话说，要是一个整数除以 4，余数不是 0 或者不是 1，那它就不是平方数。

我们知道，100，1000，10000，…都是 4 的倍数。所以，一个正整数除以 4 的余数，就是它的末两位数字所组成的数除以 4 的余数。

这样，111…111 除以 4 的余数，就是 11 除以 4 的余数，也就是 3。根据前面所说，111…111 不是平方数。

同样的道理，

22，222，2222，…

55，555，5555，…

66，666，6666，…

99，999，9999，…

都不是平方数。

平方数除以 4 余 0 或者 1。可是，除以 4 余 0 或者 1 的自然数，不一定是平方数。例如，33 就不是平方数。

33，333，3333，…除以 4 都余 1，其中有没有平方数，用上面的方法是无

法判别的。不过，根据乘法，一个自然数的平方的个位数字是：

0×0=0，1×1＝1，2×2＝4，3×3＝9，

4×4＝16，5×5＝25，6×6＝36，

7×7=49，8×8＝64，9×9＝81。

也就是平方数的个位数字只能是 0，1，4，5，6，9。所以，

33，333，3333，…

77，777，7777，…

88，888，8888，…

都不是平方数。

44，444，4444，…

呢？因为平方数与非平方数的积是非平方数，所以，

44＝4×11，444=4×111，4444＝4×1111，…

都不是平方数。

一个自然数的个位数字，就是它除以 10 的余数。所以，上面所用的方法，就是根据一个自然数除以 4 或者除以 10 的余数，来证明它不是平方数的。

16　1985 是两个平方数的差吗

1985 可以写成两个平方数的差吗？

能。设 1985＝x^2-y^2＝（x+y）（x-y）。

然后，分解 1985＝5×397，得

x+y＝397；x—y＝5。

解得 x＝201，y＝196。

这样解是对的。还有更简单的解法。你已经算过$(n+1)^2-n^2$＝2n+1，也就是

2n+1＝$(n+1)^2-n^2$。

可见每一个奇数，都是可以表示成平方差的。

还有。你已经算过$(n+l)^2-(n-1)^2$＝4n，也就是

4n=$(n+1)^2-(n-1)^2$。

可见 4 的倍数，都是可以表示成平方差的。

这样，你已经证明了

1983，1985，1987，…

1980，1984，1988，…都可以表示成平方差。

你看，解决一个一般的问题，例如证明每一个奇数都可以表示为平方差，有时比解决一个特殊的问题，例如证明 1985 可以表示为平方差还要容易。这是因为在解决一般性的问题时，比较容易抓住问题的本质，发现普遍的规律；而在特殊的问题中，一些特殊属性常常掩盖了事物的本质。

现在，要你把 228 表示成平方差，你就容易根据前面算过的

4ab＝$(a+b)^2—(a—b)^2$＝$(ab+1)^2—(ab—1)^2$，

得 228=4×3×19=22^2-16^2=58^2-56^2。

1986，1990，1994，…能不能表示成平方差？

x^2-y^2＝（x+y）（x—y）。

要是 x、y 同是奇数或者偶数，x+y 和 x—y 是偶数，得 x^2-y^2是 4 的倍数。

要是 x、y 一个奇数一个偶数，x+y 和 x—y 是奇数，得 $x^2—y^2$是奇数。

所以，平方差一定是奇数和 4 的倍数。这样，1986，1990，1994，…不是平方差了。凡是形如 4n+2 的数，都不能表示成平方差。

17 埃及分数

在保存至今的古埃及纸草中，记载和讨论了分子为 1 的分数。后来，人们把分子为 1 的分数叫做埃及分数。

怎样把一个埃及分数分成两个不相等的埃及分数的和，这便要用到你已经算过的

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

了。移项，得

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

例如 n＝3，得 n＋1＝4，n（n＋1）=12。这样，便有

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

要是进一步把 14 分成两个，有

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}$$

要是再进一步把 112 分成两个，有

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{13}+\frac{1}{156}$$

总之，用这种方法，可以把 13 写成任意多个不相同的埃及分数的和。

好。现在请你利用埃及分数的这个特性，计算

$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{99\times 100}$ 这和埃及分数的特性有关系？

有。你看，

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

这就得到上式

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}$$

啊。原来这样简单。每一个这样的等式，都有种种不同的用法。能从家到学校，可不要忘了从学校回家的路。

18 成对的幂数

一个自然数是另一个自然数的整数幂（幂指数大于 1），或者是几个自然数的整数幂（幂指数都大于 1）的乘积，那这个自然数就叫做幂数。

$4=2^2$，$8=2^3$，$9=3^2$，$72=2^3\times3^2$，

就都是幂数。

8 和 9 是两个连续的幂数。请你想一想，能不能再举几对连续的幂数？更进一步，能不能证明有无穷多对连续的幂数？

这个题是不容易。不过，你能想到已经算过的

$(2n+1)^2=4n(n+1)+1$

它又变得容易了。

你看，要是 n、n＋1 是一对连续的幂数，而且 4 是幂数，那么 4n（n＋1）是幂数，4n（n＋1）＋1＝

$(2n+1)^2$也是幂数。这样，我们使得到了：

4n（n＋1）与 4n（n＋1）＋1

是一对连续的幂数。

从 8 与 9，可得到 4×8×9 与 4×8×9＋1 是一对连续的幂数。从这对幂数又可造出一对更大的连续的幂数。这样继续的造下去，可见有无穷多对连续的幂数。

现在，再来考虑一个问题：

找出自然数 a_1，a_2，a_3，…

使得

$a_1^2+a_2^2$，

$a_1^2+a_2^2+a_3^2$，

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2$，

……

都是平方数。

你已经算过：

$(2k+1)^2+[2k(k+1)]^2=(2k^2+2k+1)^2$

表明一个奇数 2k＋1 的平方加上另一个偶数 2k（k＋1）的平方，还是一个奇数的平方。

要是取 2k＋1＝3，得

$a_1^2+a_2^2=3^2+4^2=5^2$

再取 2k＋1＝5，得 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=5^2+12^2=13^2$。

再取 2k＋1＝13，得

$a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2=13^2+84^2=85^2$。

继续下去，便得到所需要的一串数 a_1，a_2，a_3，…

这样算算看看想想，收获不小。

19 有多少棵树

这块长方形地里有多少棵树？

这太容易了。每行 11 棵，10 行共有 11×l0＝110 棵树。要是象图上那样把这个长方形分成两个三角形，每个三角形里有多少棵树？

这两个三角形里各有$\frac{11\times10}{2}$＝55 棵树。

要是从上往下，一行一行地加起来，黑点的三角形里的树是多少棵？那当然是 1+2+3…＋10＝55 棵了。

用两种不同的方法，去计算同一个三角形里的树，得到的结果应当是相同的。对。所以，我们能导出：

1+2+3+…+10＝$\frac{(10+1)\times10}{2}$＝55。

要是从 1 加到 100 呢？

1+2+3+…+100＝$\frac{(100+1)\times100}{2}$＝5050。

对。据说这就是德国数学家高斯小时候，自己找到的快速计算方法。

再问你一个问题：

1+3+5+…+19＝？

能用图来表示吗？

能。象上图那样，用两个这样的三角形可得到

1+3+5+…+19＝$\frac{(1+19)\times10}{2}$=100。

3+7+11+…+43＝？

能用图来表示吗？

两个这样的梯形，也可以拼成一个长方形来计算：

3+7+11+…+43＝$\frac{(3+43)\times11}{2}$=253。

对。总之，计算这类和的公式是：

$\frac{首项+末项}{2}$×项数。

它既可以用图来说明，也可以根据

$\frac{3+43}{2}=\frac{7+39}{2}=\frac{11+35}{2}=\frac{15+31}{2}=\frac{19+27}{2}=23$

这样的等式，说明$\frac{首项+末项}{2}$是这些项的平均值。所以它们的总和是：平均值×项数。

根据这个道理，便有

1+2+3+…+n=$\frac{n(n+1)}{2}$

20 有多少个长方形

如图，四条横线与十一条竖线相交，请问一共有多少个长方形？

要是贸然回答是 3×10＝30 个，那当然是错的。这只是小长方形的个数，还有很多大长方形哩。

怎样解这道题，切实可行的方法，是从简单的情况做起，找出变化规律来就好办了。

最简单的情况是下页左图，两条横线加上两条竖线成为一个长方形。

上中图多了一条竖线，这时图中有三个长方形：两个小的，一个大的。换句话说，因为添了一条竖线，上中图比上左图多出两个长方形，共有 1+2 个长方形。

上右图又比上中图多一条竖线，这时图中多出了三个长方形：一个小的，一个较大的，一个更大的，共有 1+2+3=6 个长方形。

这样推下去，十一条竖线与两条横线组成的长方形个数是：

1+2+3+4+5+6+7+8+9+10

$=\frac{(1+10)\times 10}{2}$=55

四条横线呢？

最简单的情况是四条横线、两条竖线。这和两条横线、四条竖线一样，共有 1+2+3＝6 个长方形。

现在，加一条竖线，共有 6×3＝18 个长方形；再加一条竖线，共有 6×6＝36 个长方形：再加一条竖线，共有 6×10＝60 个长方形。这样推算下去，原图共有 6×55＝330 个长方形。

很好。不过，6 最好写成 $\frac{(1+3)\times 3}{2}$，55 最好写成 $\frac{(1+10)\times 10}{2}$。

为什么呢？

因为这样写，容易看出规律，算出结果 6 与 55，反而掩盖了这种求和的内在规律。根据规律，m 条横线与 n 条竖线相交，共有的长方形是：

21 不可
缺少的反证法

从前，有一个既卖矛又卖盾的人。他拿起矛来说：“ 我的矛十分锐利，什么样的盾都能刺破。 ”然后，他又拿起盾来说：“ 我的盾十分坚固，什么样的矛也刺不破。 ”有人问他：“ 要是用你的矛来刺你的盾呢？ ”于是，他陷入矛盾，无法回答。

在数学中，常常利用矛盾来证明一个结论。这种证明的方法，叫做反证法。

举一个例子。把自然数的全体 1，2，3，…任意地分为两组，一定有一组中有两个数的和是平方数。这就可以用反证法证。

假设上面的结论不成立，那全体自然数能分成这样两组，每一组中任意两个数的和不是平方数。

我们把含有 1 的那一组叫做 A 组，另一组叫做 B 组。

既然 A 组中每两个数的和都不是平方数，那 3 不在 A 组，因为 3＋1＝4。同样的道理，8（＝9－1）15（＝16－1），24（＝25－1），…也都不在 A 组。

因为 3 在 B 组，所以 6（＝9－3）在 A 组。

因为 15 在 B 组，所以 10（＝25－15）在 A 组。

可是，6＋10＝16 是平方数，这和 A 组中任意两个数的和不是平方数矛盾。

这个矛盾说明假设是错的，也就证明了原题的结论成立。

从这个例子可以看出：用反证法来证题，是先假设结论不成立，也就是相反的结论成立；然后设法导出矛盾，得到假设不对，使原来的结论成立。

反证法是不可缺少的。这就象进攻一个要塞，在正面攻击难以奏效时，或许从后面突袭是一个好办法。

德国数学家希尔伯特说，禁止数学家使用反证法，就象禁止拳击家使用拳头。

22 欧拉的猜测错了

经过观察与思考，人们从现象、经验、数据等中总结出了一般规律。这是科学研究中常用的方法，叫做归纳法。

因为归纳法依据的现象、经验、数据等往往是不完全的，所以得出来的结论也不一定就是正确的。它常常需要修正，有时甚至会被推翻。

例如，金、银、铜、木材等等都是热胀冷缩，于是，人们归纳出一切物质都是热胀冷缩的结论。可是，也有些物质，例如 4℃以下的水，不是热胀冷缩。所以，结论应当修改为大部分物质是热胀冷缩的。

数学是一门严密的科学。它也需要用这种不完全的归纳法，只是所导出来的结论，都必须给出严密的证明。否则，这些结论是不能称为定理的，只能谨慎地叫做猜测。

法国数学家费尔玛观察了

$$F_n = 2^{2^n}+1$$

这种类型的数，发现 F_0＝3，F_1＝5，F_2＝17，F_3=257，F_4＝65537，都是质数。于是，他提出猜测：所有的非负整数 F_n 都是质数。可是，瑞士数学家欧拉发现，

$F_5=2^{2^5}+1$＝641×6700417，

不是质数，费尔玛的猜测被推翻了。

十八世纪的一个皇帝，想把三十六名军官排成一个方阵。这三十六名军官来自六支部队，每支部队派出将军、上校、中校、少校、上尉、中尉各一名。皇帝希望方阵的每一行与每一列的六名军官，都分别来自六支部队，并且军衔各不相同，可就是排列不起来。后来，他去请教数学家欧拉。欧拉把具有这种性质的方阵叫做正交拉丁方。他猜测：n 是自然数，由 4n＋2 个人组成的正交拉丁方都不存在。

后来，有人证明了在 n＝1 时，猜测是正确的，就是六阶正交拉丁方不存在。n＞1 时，猜测是不是正确呢？直到 1960 年左右，才解决了这个问题，得出的定理与欧拉的猜测恰好相反：在 n＞1 时，4n＋2 阶正交拉丁方都是存在的。

过去，虽然很多猜测被证明是错误的，可是这对于推动科学的发展，还是有积极作用的。所以，当代美国数学家、教育家波利亚认为：

“没有主意是最不好的。

“要成为一个好的数学家，…你必须首先是一个猜想家。

“要有理智上的勇气，应当准备修正我们的任何一个信念。”

1931 年，美国青年数学家哥德尔证明：在数学中，有许多这样的命题，它既不能被推翻，也不能被证明。这个定理使数学家大吃一惊。从此，数学家对待猜想，有了三个努力方向：一、证明它；二、推翻它；三、说清楚它既不能被证明、也不能被推翻的道理。

23 公鸡的智慧

一只公鸡，看见主人走过来撒米给它吃，非常高兴。它希望每天都能吃到米。

第二天，主人给它吃米，

第三天，主人给它吃米，

……

第九十九天，主人给它吃米。

于是，公鸡认为：主人永远给它吃米。

第一百天，公鸡看见主人走过来，以为又有米吃了，可是主人把它捉住杀了。

公鸡用归纳法得出每天都有米吃的结论，显然是不完全的。公鸡的智慧有限，无法达到这样的认识。

在数学里，也常用不完全的归纳法来发现规律。不过，前面已经说过，这样得到的结论，都必须给出严格的证明才能成立。

与自然数 n 有关的结论，常常采用数学归纳法来证明。数学归纳法又叫做完全归纳法，在不会混淆的时候，可以简称为归纳法。它分为两个部分：

一、首先考虑最简单的情况，通常是证明 n=1 时结论成立。这一步称为奠基。

二、其次考虑能不能从前一步推出下面一步。也就是证明：要是结论在 n-1 时成立，那么结论在 n 时也成立。这一步称为归纳。

要是这两部分都完成了，那就可由 n＝1 时结论成立，推出在 n＝2 时结论成立；由 n＝2 时结论成立，又推出 n＝3 时结论成立。这样逐步推下去，可以得出结论对于一切自然数都成立。

数学归纳法的思想在前面已经多次用到过。例如在第三节，我们实际上证明了：按照所说的规则，2n（n≥4）根火柴可以两两合并起来。

当时的做法，是先从最简单的情况做起，把八根火柴（n＝4）两两合并起来。这就是奠基。

然后，对十四根火柴，我们曾把它归结为十二根火柴的问题；十二根又归结为十根；十根又归结为八根。这样一步步退到八，也就是由八一步步进到十四。同样，也可以进到四十，或者更一般地进到 2n。其中的关键，是把左起第四根火柴与第一根火柴合并。这样，2n 根火柴的问题，就化为 2（n-1）根火柴的问题了。只要 2（n-1）根火柴能够两两合并起来，那 2n 根火柴也就能两两合并起来。这就是第二部分：归纳。

24 百人报数

100 人排成一列，自 1 起往下报数，报奇数的人出列，留下的人再重新报数。这样继续下去，最后只留下一个人。请问：这个人在第一次报数时报的数是多少？

是 64。

为什么是 64 呢？

第一次留下的是偶数，也就是 2 的倍数。第二次留下的偶数，也就是 4 的倍数。依此类推，第三次留下的是 8 的倍数；第四次留下的是 16 的倍数；第五次留下的是 32 的倍数；第六次留下的是 64 的倍数。

因为在 100 个自然数中，只有 64 是 64 的倍数，所以报第六次数后，只留下一个人，他在第一次报数时报的是 64。

解得很好。说“ 依此类推 ”，其实就是归纳法。

是完全归纳法，还是不完全归纳法？

能从结论对前一步成立，推出结论对下一步成立，那就是完全归纳法。不过，问题还可以提得更一般些，不必限制在 100。

对全体自然数 1，2，3，…来说，第一次留下的是 2 的倍数：

2×1，2×2，2×3……

第 n－1 次留下的是 2^{n-1} 的倍数：

$2^{n-1}\times1$，$2^{n-1}\times2$，$2^{n-1}\times3$，……

那么第 n 次留下的是

$2^{n-1}\times2$，$2^{n-1}\times4$ $2^{n-1}\times6$，……

就是

$2^{n}\times1$，$2^{n}\times2$，$2^{n}\times3$，

也就是第 n 次留下的是 2^{n} 的倍数。

这样的写法，是按照数学归纳法的标准写法来写的。要是确实能保证从前一步推出下一步，说“ 依此类推 ”是可以的。

下面，把这个问题改动一下：

100 人排成一列，自 1 起往下报数，报偶数的人出列，留下的人再重新报数。这样继续下去，最后会留下两个人，一个当然是报 1 的人。请问：另一个人在第一次报数时，报的数是多少？

这两个问题关系密切。要是把第一个人去掉，那每个人每次报的数都比原先少 1，原先报奇数的现在报偶数。这样，每次留下的就是现在报偶数的人。因为在原来的问题中，最后留下的是第一次报 64 的那个人；所以在这个问题中，最后留下的是第一次报 65 的人，和每次报 1 的人。

前面讲了借一个蛋来解题的方法，这里反倒要去掉一个人。其实，去掉一个人，就是借得－1 个人。

25 约瑟夫斯问题

传说古代有一批人被蛮族俘虏了，敌人命令他们排成圆圈，编上号码 1，2，3，…然后把 1 号杀了，把 3 号杀了，总之每隔一个人杀一个人，最后剩下一个人，这个人就是约瑟夫斯。你能知道约瑟夫斯的号码是多少吗？

这个问题与上一节的问题有些类似，又有所不同。上一节是排成一列，报了一次又一次，这次是排成圆圈，数了一圈又一圈。

要是人数是 2 的幂，比如说是 64，这时和上一节的问题有什么关系？

第一圈数过去，留下的是偶数；然后从 2 开始再数一圈，留下的是 4 的倍数。这样继续下去，留下的是 64。

啊。要是把这个圆圈在 64 与 1 之间剪开，拉成一条直线，那这个问题，实际上和上一节的问题完全一样。

对。这样的推理，适用于 2 的任意次幂——2^k，k 是正整数。在人数为 2^k 时，约瑟夫斯的编号是 2^k。

人数不是 2 的幂呢？

我们可以认为人数 n 满足 $2^k<n\leq2^{k+1}$。然后，考虑最简单的情况 $n=2^k+1$，看看它和人数为 2^k 的情况有什么关系。

知道了。在 1 号被杀死后，人数就变成 2^k 了。

问题是在这 2^k 个人中，第一个被杀的是几号？最后留下的是几号？

第一个被杀的当然是 3 号，最后留下的应当是 2 号。因为这时 3 号是第一个人，2 号就是第 2^k 个人。

现在，再考虑一下从 n-1 个人进到 n 个人。也就是说，人数是 n-1 时，最后留下的是 X 号，那人数是 n 时，最后留下的是谁？

在第一个人——1 号被杀后，人数就变成 n-1 了。

在这 n-1 个人中，因为第一个被杀的是 3 号，所以最后留下的应当是 x＋2 号。看起来，每增加一个人，最后留下的人的号数就增加 2，是可以导出一个公式来的。2^k+1 个人，最后留下 2 号；2^k+2 个人，最后留下 4 号，依此类推，2^k+m 个人，最后留下的是 2m 号。对吗？

对。换句话说，要是人数是 n，$2^k<n\leq2^{k+1}$，那最后留下的就是 $2(n-2^k)$ 号。

与约瑟夫斯问题类似的问题很多。例如：

一、50 枚棋子围成圆圈，编上号码 1，2，3，…每隔一枚棋子取出一枚，要求最后留下的一枚棋子的号码是 42，那该从几号棋子开始取呢？

二、41 枚棋子围成圆圈，编上号码 1，2，3，…沿圆圈自 1 开始，每数三枚棋子，就取出第 3 枚棋子，这样陆续取出 1，4，7，…问最后留下的是第几枚？

三、用 1 到 6 摆成一个圆圈如图。先取 1，然后每数 k 枚棋子就取出第 k 枚棋子。要是取出的顺序刚好是 1，2，3，4，5，6。问 k＝？

26 六十四个金环

在印度北部贝拿勒拿的圣庙里，安放着一块黄铜板，板上插着三根宝石针，每根针高约六十厘米；据说，印度教的主神梵天在创造世界时，在其中的一根针上，从下到上放下了由大到小的六十四个金环。这就是梵塔。不论白天黑夜，都有一个人在那里按照梵天的规定，把这些环在三根针上移来移去。梵天的规定是一次只能移一个，并且要求不管在哪一根针上，小环永远只能在大环上面。当六十四个环，全都从梵天创造世界时所放的那根针上，移到另外一根针上时，世界就会在一声霹雳中消灭，梵塔、庙宇和众生都将同归于尽。

这个有趣的传说，也是一个很好的数学问题。

怎样把六十四个环移到另一个环上，这是一件很不容易的事。不信，这里有 A、B、C 三个塔，A 塔上只有四个环，你能把它移到 B 塔上去吗？

四个环也不好办。还是从最简单的情况做起吧。

要是只有一个环，一下就从 A 塔移到 B 塔了。要是 A 塔上有两个环，那先把小环移到 c 塔上；再把大环移到 B 塔上；最后把小环移到 B 塔上。这就把两个环从 A 塔移到 B 塔上了。

好，奠基的工作已经完成了。现在，来考虑第二部分——归纳部分。还记得这一部分应当做什么吗？

假设结论对 n-1 成立，要证明结论对 n 成立。也就是假设 n-1 个环可以从一个塔移到另一个塔上，要证明 n 个环可以从 A 塔移到 B 塔上去。

对。怎么证明呢？

和两个环的移法一样。先把 n-1 个环从 A 塔移到 C 塔上；然后把最下的一个移到 B 塔上；最后，再把 n-1 个环从 C 塔移到 B 塔上。这就把 n 个环都移到 B 塔上了。实际上，就是把那 n-1 个环当作一个环搬来搬去。

道理就是这样。问题是从 A 塔移到 B 塔，至少要移动多少次？

一个环移动一次，两个环移动三次，三个环呢？按照刚才的移法，需要

3＋1＋3＝7

次。因为两个环移到 C 上需移三次；一个环移到 B 上需移一次；两个环再从 C 移到 B 上又是三次。

看起来，这里的变化规律，可以用二进位制记数法表示：

$1=(1)_2$，$3=(11)_2$，$7=(111)_2$。

这样，一般的结论是 $(\overbrace{111\cdots1}^{n个})_2$ 次。

证明还是采用数学归纳法。奠基部分已经说过了。现在，假设 n-1 个环从一个塔移到另一个塔，至少用 $(\overbrace{111\cdots1}^{n-1})_2$ 次，那么 n 个环，根据说过的道理，需要

$$(\overbrace{111\cdots1}^{n-1})_2+1+(\overbrace{111\cdots1}^{n-1})_2=(\overbrace{111\cdots1}^{n个})_2,$$

所以，这个结论对每个自然数 n 都成立。

好。我们来算一下六十四个环，从一个塔全部移到另一个塔上需要多少时间？

移动的次数是：

$(\overbrace{111\cdots1}^{64})_2=(\overbrace{111\cdots1}^{64})_2-1=2^{64}-1$。

用计算机不难算出：

$2^{64}-1$＝18，446，744，073，709，551，615。

这是一个非常巨大的数。要是一秒钟移动一次，

昼夜不停，也需要 58 万亿年。据估计，太阳系已经存在 30 亿年，还将存在 150 亿年，总起来不足 200 亿年。所以，在 58 万亿年时，太阳系早就不存在了。

27　哈密尔顿的周游世界

1859 年，英国数学家哈密尔顿，发明了一种叫做周游世界的游戏。他用一个正十二面体的二十个顶点代表二十个大城市，要求沿着棱，从一个城市出发，经过所有的城市一次，然后回到出发城市。

用下边的平面图代替正二十面体，也能进行同样

的游戏。符合要求的路线很多，也好找。

下面这个图中有十六个点，能找到一条路线经过每个点恰好一次吗？

这样的路线是不存在的。也就是说，不可能在图中找到一条路线经过每个顶点恰好一次。

为什么呢？

这可以用枚举法来给出证明。不过，题目的可能情况太多，用枚举法太繁。

那怎么办呢？

用反证法。

先把这些点涂上红（白）、蓝（黑）两种颜色，使得相邻的两个点颜色不同。

这样，每走一步，红点只能走到蓝点，蓝点只能走到红点。要是有一条通路存在，那在这条路上，红点与蓝点的个数应当相等。

当然也可能相差一个。要是从红点开始，最后一个是蓝点，红点与蓝点一样多；最后一个是红点，红点比蓝点多一个。要是从蓝点开始，这时红点与蓝点个数一样多，或者红点比蓝点少一个。

数一数，图中有七个蓝点，九个红点。它们的差是二。这和红点个数与蓝点个数至多相差为一矛盾。所以，没有一条经过每个点恰好一次的路存在。

在数学里，答案为不可能的问题很多。不要认为所有问题的答案都是能。

当然，为什么不可能，也同样需要经过严格的证明才能成立。

28 翻茶杯

七只茶杯，杯口朝上放在桌上，请你把它们全部翻转成杯口朝下。每次翻转时，要求同时翻转四只茶杯。

这是不可能的。怎样证明，简便的办法是把杯口朝上的茶杯记成+1，把杯口朝下的茶杯记成-1。这样，问题就变为

+1，+1，+1，+1，+1，+1，+1

七个数，每次翻动，就是改变其中四个数的符号，看能不能经过有限次翻动，把它们全部改成-1。

现在，请你考虑一下，经过一次翻动，这七个数的乘积有没有变化？

这七个数的乘积保持不变。

为什么呢？

改变一个数的符号，也就是把这个数乘以-1。在一次翻动中，有四个数乘以-1，七个数的乘积经过一次翻动后，应当乘以$(-1)^4$。可是$(-1)^4=+1$，所以七个数的乘积经过翻动，仍然保持不变。

前面说过，这种不变的量，往往是解决问题的关键。这里，这个结论好证明。

原来的七个数的乘积是+1，不管经过多少次翻动，七个数的乘积始终是+1、而 7 个-1 的乘积是-1。所以，不可能把七个数都变成-1。

要是把这个问题里的七改成任意一个正奇数，四改成任意一个正偶数，答案仍然是不可能。

把七改成偶数呢？

要是原来有偶数个茶杯，那就一定能经过若干次翻动，让全部杯口朝下。

另外，要是每次翻动奇数个茶杯，那不管原来茶杯是偶数个还是奇数个，也一定能经过若干次翻动，让全部杯口朝下。

这里面的道理，请你自己想一想。

29 脱鞋穿鞋

这是一个湖的平面图。图中的曲线都是湖岸。

请你想一想：

一、要是 P 点在岸上，那 A 点是在岸上还是在水中？

二、有人经过这个湖泊，他下水时脱鞋，上岸时穿鞋。要是有一点 B，这个人从 A 点走到 B 点时，他脱鞋次数与穿鞋次数的和是奇数，那 B 点是在岸上还是在水中？

一琢磨，每通过一次湖岸线，人不是从岸上走到水里，就是从水里走到岸上。这样，我们便得到：通过奇数次湖岸线时，人从岸上走到水里，或者从水里走到岸上；通过偶数次湖岸线时，人从岸上走到岸上，或者从水里走到水里。现在，从 P 到 A 需要通过五次湖岸线，P 在岸上，所以 A 在水中。

同理，可以知道 B 点在岸上。

这个题就难一点了。如图，能不能不重复，三笔把它画好？

答案是不能。

为什么呢？

图中有八个顶点，每个顶点有三条线，这种有奇数条线的顶点，称为奇顶点。要是顶点有偶数条线，称为偶顶点。

凡是能一笔画成的图，除去首尾两个点外，其余的中间点，例如下图中的 A 点和 B 点，都必须是偶顶点。

因为每有一条进入 A 点或者 B 点的线，就必须有一条从 A 点或者 B 点发出的线才行。这样，凡是一笔能画成的图，至多只能有两个奇顶点；凡是能两笔画成的图，至多只能有四个奇顶点；凡是能三笔画的图，至多只能有六个奇顶点。现在，图中有八个奇顶点，所以它至少需要四笔才能画成。这是很明显的。

看来起，一笔画和多笔画问题，有点与哈密尔顿路线相近，可又有不同。它们都是图论的研究内容。

30 波沙的故事

匈牙利出过不少数学小能人，波沙就是一位。在他九岁的时候，数学家厄尔多斯专程到布达佩斯去看他。

厄尔多斯出了一个问题给他做：在 1，2，3……2n 这 2n 个自然数中，任意取出 n＋1 个来，那其中一定有两个数互质。也就是它们的最大公约数是 1。

波沙正在喝咖啡，他用汤匙在杯子里搅了几下说：这个问题不难。在任取的 n＋1 个数中，一定有两个数是相邻的。两个连续整数的最大公约数是 1。

波沙答得快，答得好，可见他善于思考问题，发现规律。后来，厄尔多斯经常出问题给他做，波沙很快成了一位数学家。

为什么从 2n 个自然数 1，2，3，……2n 中，任意取出 n＋1 个，一定有两个是相邻的呢？

这可以用既简单又有趣的抽屉原则来证明。这个原则说：把 n＋1 个苹果放到 n 个抽屉中，一定有一个抽屉中的苹果个数不少于 2。换句话说，从 n 个抽屉中取出 n＋1 个苹果，那么，一定从某一个抽屉中取出两个或者更多个苹果。

对。要是从每个抽屉中，都至多取出 1 个苹果，那么从 n 个抽屉中，至多只能取出 n 个苹果。

好。现在我们把 1，2，3，……2n 这 2n 个数分成 n 组：1，2 为一组；3，4 为一组；……2n-1，2n 为一组。再把每一组看成是一个抽屉，每一个数看成是一个苹果。根据抽屉原则，取出的 n＋1 个数——苹果，一定有两个是在同一组中，也就是说它们是相邻的。

抽屉原则用处很大。再举一个例子：任取五个自然数 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，证明其中一定有一个数或者几个数的和，能被 5 整除。

解这类问题的关键，是制造适当的抽屉。我们把五个自然数放在五个抽屉里：除以 5 余 1 的放在第一个抽屉里；除以 5 余 2 的放在第二个抽屉里；余 3 的放在第三个抽屉；余 4 的放在第四个抽屉；最后，被 5 整除（除以 5 余 0）的数放在第五个抽屉里。

现在来考虑这五个自然数：

$a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_3+a_4, a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$。

要是其中有一个在第五个抽屉里，结论已经成立。

要是这五个数都不在第五个抽屉里，那么，这五个数在前四个抽屉里。根据抽屉原则，其中一定有两个数在同一个抽屉里。也就是说这两个数除以 5，所得的余数相同。这样，这两个数的差被 5 整除。可是，在 $a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, a_1+a_2+a_3+a_4, a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 中，任意两个数的差是 a_2, a_3, a_4, a_5 中的一个或者几个的和。所以，在 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 中，一定有一个或者几个的和被 5 整除。

在解答与整数有关的问题时，考虑余数是一种常用的方法。奇数与偶数就是除以 2 余 1 与余 0 的数。

31 乒乓球循环赛

在一次乒乓球循环赛中，有 n（≥3）名选手参加，每名选手都没有全胜。请证明一定有三名选手 A、B、C，A 胜 B、B 胜 C，C 又胜 A。

设 A 是胜得最多的一名选手。因为 A 没有全胜，所以一定有选手 C 胜 A。现在，考虑被 A 击败的全部选手，其中一定有一名胜过 C，否则 C 胜的选手比 A 还多一名（因为 C 胜 A）。这与 A 胜得最多矛盾。于是有选手 B，A 胜 B，而 B 胜 C。A、B、C 就是符合要求的三名选手。

类似这样的问题很多。例如在一次双人舞会上，有 n（n≥2）名男生与 n 名女生参加，每名男生与一些（不是全体）女生跳过舞，每名女生也与一些（不是全体）男生跳过舞。请证明一定有两名男生 b_1、b_2 与两名女生 g_1、g_2，b_1 与 g_1、b_2 与 g_2 跳过舞，而 b_1 与 g_2、b_2 与 g_1 没有跳过舞。

用上题类似的方法，设 b_1 是跳舞次数最多的男生。因为 b_1 没有与全体女生跳过舞，所以一定有女生 g_2 与 b_1 没有跳过舞。再设男生 b_2 与 g_2 跳过舞。考虑与 b_1 跳过舞的所有女生，其中一定有未与 b_2 跳过舞的，否则与 b_2 跳过舞的女生至少比与 b_1 跳过舞的多一个（b_2 与 g_2 跳过舞）。这与 b_1 跳舞次数最多矛盾。所以，有女生 g_1 与 b_1 跳过舞，没有与 b_2 跳过舞，b_1、b_2、g_1、g_2 就是符合要求的四名学生。

把解法中的“最多”改为“最少”，也能够推导出结论。

32 算二十四点

24 点是一种速算游戏。参加的人数可多可少。玩法是从扑克牌中任取四张，把这四张的点数（A 算 1、J 算 11，Q 算 12，K 算 13），用加、减、乘、除和括号连结来起，使算得的结果是 24。这些运算符号使用的次数没有限制，可是每张牌的点数必须用一次，并且只能用一次。例如，四张牌是 3，3，8，9，那么，

3×（8-3）+9＝24。

下面的五道题，你能尽快算出来吗？

一 1，3，4，10；

二 2，7，8，11；

三 4，4，5，8；

四 1，5，5，5；

五 4，6，7，13。

前面三题好算：

4×（10-1-3）＝24；

2×（11+8-7）＝24；

（4+4-5）×8＝24。

想想试试，又算出了第四题：

5×（5-1÷5）＝24。

算的诀窍，是利用 24 的因数分解：

24＝24×1＝12×2＝8×8＝6×4。

在很多情况下，可以利用这些式子来算得 24 点。第四题比较难，可不要轻易说不可能。第五题才是不能组成 24 点的一个例子。

为什么不可能呢？

因为 4，6，7，13 这四个数，可以有二十四种不同的排列次序；而在它们之间，又可以插入加、减、乘、除和括号中的任意一种，所以有上千种可能。要对每一种可能都进行检验，最后才能断言不可能组成 24 点，这当然是很麻烦的。不过，计算机却很容易做到这一点。

有一位同学编了个程序，在计算机上只用了四十多分钟，就算出了在 1820 种情况中（从 52 张扑克中任取四张，一共有 1820 种不同的情况），有 458 种是不能组成 24 点的；并且对其余的 1362 种情况，都给出了组成 24 点的方法。这真是本 24 点游戏的手册。

把 24 改成其他因数较多的数，比如 240，计算机照样可以很快给出全部的解答。

计算机作用真大。

枚举法有了计算机帮助，真可以说如虎添翼。不过，计算机的威力也是有限制的。例如哥德巴赫猜想的情况有无限多种，计算机就无能为力了。

再举一个例子。

任取一个自然数。要是它是奇数，就乘 3 加 1；要是它是偶数，就除以 2。这样继续进行下去，最后的结果一定是 1。角谷静夫等很多数学家是这样猜想的。

例如 92→46→23→70→35→106→53→160→80→40→20→10→5→16→8→4→2→1。

有人用计算机检验了在 10^9 以下的自然数，证实猜想总是正确的。这就增强了肯定这个猜想的信心。可是，这并不能肯定这个猜想对所有的自然数是正确的。

看来起，这个猜想超出了目前计算机的能力。数学家厄尔多斯认为，它也超出了目前数学家的能力，在现阶段，最好是别去碰它。

33 一道国际数学奥林匹克题

从 1959 年起，每年举行一次的国际中学生数学竞赛，又叫做国际数学奥林匹克。第二十四届国际数学奥林匹克有一道题是：

设 a、b、c 是三角形的边长，证明

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$；

确定等式成立的条件。

有人认为这里的 a、b、c，可以推广为任意正数，并且还给出了证明。很遗憾，他的证明是错的。他所说的推广：

设 a、b、c 为任意正数，那么。

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$，

是不能成立的。

要证明这个推广不成立，只要举出一个反例，也就是举出一个使它不成立的例子，就足够了。

怎样举反例，通常是选用极端的情况。比如说 $a=b=c$。

这里，$a=b=c$，等号成立，不是反例。要是取 $b>a$，这时 $a^2b(a-b)<0$。再设 c 很小，这时

$b^2c(b-c)+c^2a(c-a)$

也就很小。所以，它与负数 $a^2b(a-b)$ 的和

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)<0$。

这就证明了推广是不成立的。

原来的问题怎样解，这可不容易。不只优秀的中学生感到困难，大学生也不一定能顺利解决。

参加这次比赛的一名西德选手，却找到了一个简洁的证明。这个证明只有一个等式和一句话：设 a 为最大边，因为

$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)$

$=a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)$，

而后边的每一项都是非负的，所以原式成立；只有当 $a=b=c$ 时，原式才是等式。

附带说一下。1985 年 7 月，第二十六届国际数学奥林匹克在芬兰举行，我国首次派出一名高二学生和一名高三学生前往参加，名次靠后。看来，我国的成绩不够理想，准备不够是原因，现场应变能力较差也是原因。

这次竞赛有两道几何题：

一，设凸四边形 ABCD 的顶点在一个圆上，另一个圆的圆心在边 AB 上，并且与四边形的其余三条边相切。求证 AD+BC=AB。

二，设 ABC 为三角形，一个以 O 为圆心的圆经过顶点 A 和 C，又和线段 AB、BC 分别交于点 K、N，K 与 N 不同；△ABC 和△KBN 的外接圆，恰好相交于 B 和另一个点 M。求证∠OMB 为直角。

这两道题层次多，难度较大。既需要扎实的基本知识，又需要机智和技巧，才能找到解决问题的突被口。

1986 年初，中国数学会和南开大学在天津主办了首届全国中学生数学冬令营。通过考试，从营员中选拔选手，参加 1986 年 7 月在波兰举行的第二十七届国际数学奥林匹克。冬令营的考试很别致，发糖果和点心，有休息室和

茶水，什么时候想出去走动走动都可以。据说，今后的国际数学奥林匹克赛就是这个样子。看来，这样的适应性训练是需要的。

据新华社华沙 7 月 14 日电：第二十七届国际数学比赛结果今天揭晓。两名苏联选手和一名匈牙利选手以满分（42 分）获一等奖。我国来自郑州、上海、天津的三名选手，分别以 41、39、37 分获得一等奖。来自西安、湖北黄冈的两名选手，分别获得二等、三等奖。

和上一届比，我国代表队的成绩，进步很大。

34 算算看看想想

这是这本小书的最后一节。先请你验证一下下面的三个等式：

$44^2+117^2=125^2$；

$117^2+240^2＝267^2$；

$240^2+44^2＝244^2$。

一个简便的验证方法是：

125^2-117^2＝（125+117）（125-117）

＝242×8＝121×2×8＝$11^2\times4^2$＝44^2；

……

现在，我们把全部平方数分为两组，那么，在 44^2、117^2、240^2这三个数中，一定有两个数在同一组（也可能三个数都在同一组），而这两个数的和是一个平方数。于是，我们使得到这样的结果：

要是把平方数分成两组，那么，一定有一组中有两个数的和是平方数。

再进一步，考虑无穷多个

（44n）^{2}，（117n）^{2}，（24（n）^{2}（n＝1，2，3、…），我们又得到这样的结果：

要是把平方数分成两组，那么，一定有一组中有无限多个数的和是平方数。

更进一步，还可以考虑把全体自然数（或者平方数）分为三组、四组、…K 组，是不是一定有一组中有两个数的和是平方数呢？

不过，这个问题太难了。我们不准备、也不可能解决所有的问题，只能说留下一点问题，供你在今后学习时思考。

其实，所有这本书已经解决过的问题，都可以进一步考虑：

能不能少走弯路？

有没有更好的解法？

能不能得到更好的或者更一般的结论？