
学校的理想装备
电子图书·学校专集
校园网上的最佳资源
解竞赛题的钥匙
BOOK
内部资料 非卖品

解竞赛题的钥匙

一　算谜问题
——凑凑、估估、揭谜底

算谜问题是一类趣味性较强的数学游戏，它不仅加深对小学数学基本知识的理解，对于培养学生的观察能力、分析能力、推理判断能力非常有益。1958 年开始，心理学家以算谜为例子，研究人类解决问题的思维过程。由于算谜问题构思精巧，变化多端，并且具有不同的难度层次，所以经常被智力竞赛和数学竞赛所选用。

算谜问题，一般指那些含有未知数或待定的运算符号的算式。这种不完整的算式就像“谜”一样，要我们根据运算法则和逻辑推理方法进行推理、判断把算谜“猜”出来，使不完整的算式补充完整。

我们通过一些例子来讲述解答算谜问题的思考方法和技巧。

例 1　9○13○7=100

14○2○5= □

把+、-、×、÷分别填在适当的圆圈中，并在长方形中填上适当的整数，可以使上面的两个等式都成立。这时长方形中的数是几？

（1986 年第一届“华罗庚金杯赛”决赛试题）

解法：先考虑第一个等式，等式右边是 100 比 9、13、7 大得多，所以等式的圆圈里首先应考虑“+”或“×”，但 9×13=117 比 100 大，所以得 9＋13×7=100。

第二个等式中，题意要求在长方形中填整数，而且只剩下减号和除号，所以得 14÷2-5=2。

即长方形中的数是 2。

例 2　在 15 个 8 之间添上+、-、×、÷，使得下面的算式成立：

8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8　= 1986

（北京市第二届小学生“迎春杯”数学决赛题）

分析：这个式子数字很大，我们先凑出与 1986 较接近的数，如：　8888÷8＋888=1999。这个数比 1986 大 13，这样原问题就转化为：能否用剩下的七个 8 经适当的四则运算得出一个等于 13 的算式呢？还是用上面的想法：11 与 13 较接近，而 88÷8=11 这样一来问题就转化为能否用剩下的四个 8 写出一个等于 2 的算式。而这是不难办到的。如：　8÷8＋8÷8＝2

解法：　8888÷8＋888-88÷8-8÷8-8÷8=1986

用上面类似的方法你能找到另外的解答吗？

以上二例是填写运算符号，例 1 是根据运算结果进行逆推，是解答算谜问题的常用方法。例 2 用逆推的方法比较麻烦，因此，我们先经过估算，凑出一个与结果较接近的数，然后凑凑、算算，使算式成立。

下面我们来讲述填补等式或竖式的算谜问题。

例 3　将 0，1，2，3，4，5，6 这七个数字填在圆圈和方格内，每个数字恰好出现一次，组成只有一位数和两位数的整数算式。问填在方格内的数是几？

○×○=□=○÷○

（1986 年第一届“华罗庚金杯赛”复赛试题）

解法：要求用七个数字组成五个数，根据算式，应当三个数是一位数，两个二位数，二位数应是积和被除数。

0 和 1 不宜做一位数，一位数如果是 2，则会出现 2×6＝12 （2 重复出现）， 2×5=10 （经试验不行）， 2×4＝8（7 个数中没有 8）， 2×3=6 （6 不能成为商），因此，2 也不能做一位数。

0、1 和 2 只能用来组成二位数，它可以组成 12 和 21，经验算，21 不能填在方框内，于是得到 3×4=12=60÷5。

即填在方框内的数是 12。

例 4 下面的算式里，每个方框代表一个数字。问：这 6 个方框中的数字的总和是多少？

（1991 年第三届“华罗庚金杯赛”初赛试题）

$$\begin{array}{r} \square\square\square \\ +\square\square\square \\ \hline 1\ 9\ 9\ 1 \end{array}$$

分析：解决这样的问题，我们需要认真审题，抓住式中的某些特点，寻找突破口。

这个题目的突破口在百位上，由于十位至多向百位进 1，且百位上两个□内数字之和加上十位向百位的进位等于 19，可以推出百位上两个□内数字均填 9，且十位向百位进 1；同理，由于十位上两个□内数字之和加上个位向十位的进位等于 19，可以推出十位上两个□内数字均填 9，且个位向十位进 1；由此推出个位上两个□内数字之和等于 11。

解法：由于两个加数的十位和百位数字均为 9，两个加数的个位数字之和为 11，因此所有□内数字之和为 9×4+11=47。

例 5 右式的每个□内填入“0，1，2，3，4，5，6，7，8，9”中的某一个数字，使得该除式成立。

$$\begin{array}{r} 1\square \\ \square\square\overline{)\,1\square 2} \\ 1\square \\ \hline 3\square \\ \square\square \\ \hline 0 \end{array}$$

（上海市 1988 年小学数学竞赛试题）

分析：根据除式条件，首先可知除数的十位数字是 1，第一次相除后，余数是 32，由此推出商数的个位数字只能是 2，除数的个位数字也只能是 6。

解法：

$$\begin{array}{r} 1\ 2 \\ 1\ 6\overline{)\,1\ 9\ 2} \\ 1\ 6 \\ \hline 3\ 2 \\ 3\ 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

例 6 在□中填上适当的数字，使算式成立。

$$\begin{array}{rl} \square\square & \\ \overline{)\,\square\square\square 1} & \\ \square\square 7 & \cdots\cdots\text{第一行} \\ \hline \square\square\square 1 & \cdots\cdots\text{第二行} \\ \square\square 6 & \cdots\cdots\text{第三行} \\ \hline 0 & \end{array}$$

分析：因为除数是三位数，并且百位数为 6，它和商的首位的乘积也是三位数，所以商的首位是 1；

因为第一行的个位数是 7，所以除数的个位数也是 7；

因为第二行的个位为 1，所以商的个位为 3。因为 3×7= 21，必须向十位进 2，所以根据十位上的 6，推知除数的十位是 8。商与除数确定后，其他数字都易于确定。

解法：

$$
\begin{array}{r}
13 \\
687\overline{)\,8931} \\
687 \\
\hline
2061 \\
2061 \\
\hline
0
\end{array}
$$

例7　$\overline{ABCD}$表示一个四位数，EFG表示一个三位数，A、B、C、D、E、F、G、代表1～9中的不同的数字。已知$\overline{ABCD}+EFG=1993$，问：乘积$\overline{ABCD}\times\overline{EFG}$的最大值与最小值差多少？

（1993 年第三届“华罗庚金杯赛”决赛第一试试题）

分析：这是一道数字谜的最值问题，要选择好“突破口”通常从首位或未位数字入手。

解法：由已知条件

$$
\begin{array}{r}
A\ B\ C\ D \\
+\quad E\ F\ G \\
\hline
1\ 9\ 9\ 3
\end{array}
$$

首先确定 A＝1，然后再看被加数与加数的个位数字之和：D+G=3 或 13，由题意 A、D、G 代表不同的数字，于是 D＋C≥2＋3=5，因此有 D＋G=13。同理，被加数与加数的十位数字之和：C+F≤8＋9=17。这样可以断定 C＋F=8，最后可以推知，被加数与加数的百位数字之和 B＋E=9，下面考虑乘法算式

$\overline{1BCD}\times\overline{EFG}$。

为了使乘积最大，显然乘数的首位数字 E 应该尽可能大，而 B＋E=9。于是 B 应该尽可能小，这样可以断定取 B =2，E=9，根据同样理由，可以确定乘数的十位数字 F 应该取 5，因为这时 C 的最小值可取 3；最后确定 C=9，$D=4$，所以乘积$\overline{ABCD}\times\overline{EFG}$的最大值是

1234×759=936606。

类似地，为了使乘积最小，可以依次确定 B=7，E=2，C=5，F=3，D=9，$C=4$，所以乘积$\overline{ABCD}\times\overline{EFG}$的最小值是

1759×234=411606。

936606-411606=525000。

所以，乘积 ABCD×EFG 的最大值与最小值差 525000。

例 8　在右边的算式中 A、B 代表不同的数字，若算式成立，求出 A、B。

$$
\begin{array}{r}
A\ \ B \\
\times\quad B\ \ A \\
\hline
1\ 1\ \ 4 \\
3\ 0\ 4 \\
\hline
3\ 1\ 5\ \ 4
\end{array}
$$

（1980 美国长岛小学数学奥林匹克竞赛试题）

解法：算式中， AB×A=114 将 114 分解因式， 114=2×3×19，然后将 114 写成一个二位数与一个一位数的积。

114=52×2=38×3=19×6，显然 38×3 符合要求，所以 A=3，B＝8。

例 9　右边乘法算式中的来参加数学邀请赛“来参加数学邀请赛”八个字各代×赛表一个不同的数字，其中赛代表来来来来来来来来来 9，来代表______，参代表______，加代表______，数代表______，学代表______，邀代表______，请代表______。

（1986 年“小学生数学报”数学邀请赛试题）

解法：已知赛代表 9，赛×赛＝9×9=81，所以来代表 1，即乘积为 111111111。根据积÷一个因数＝另一个因数，可以求得被乘数 111111111÷9=123456789。从而得出：参代表 2，加代表 3，数代表 4，学代表 5，邀代表 6，请代表 7。

例 10　下面乘式中的“趣味数学”四个字各代表一个互不相同的数字，每个方框中可以填 0 至 9 任何一个数字，但最高位不能填 0，试确定算式中的每一个数字。

```
            趣 味 数 学
          × 趣 味 数 学
          ─────────────
            □ □ □ □ ……… 第一行
        □ □ □ □     ……… 第二行
      □ □ □ □       ……… 第三行
  ─────────────────
  □ □ □ □ □ □ □ □   ……… 第四行
```

解法：为叙述方便，把每行中的数字从上到下称为第一行，第二行，……

从第二行看，“数”代表 0。

从第三行看，“趣”代表的数自乘后仍是一位数，所以这个数必须小于等于 3。而且当“趣”代表 3 时，“味”必须小于等于 2。

从第四行看，第三行的第一个数字必须是 9，因此“趣”代表 3。

又因“数”代表 0，如果“味”代表 1，那么第二行的第一个数“3”与第三行的第二个数“3”相加就没法进行。所以，“味”必须是 2。于是“趣”、“味”、“数”分别为“3”、“2”、“0”。

最后看第一行“学”不能大于 3，否则第一行将是五位数，又因为四个数字表示互不相同的数，所以学只能是“1”。

通过上面例题分析，解答算谜问题要注意：

1.首先要注意算式中的各个文字、字母、符号都只能取 0 至 9 中的某一个数字。

2.要认真分析已知算式中给出的各种数量关系，根据这些数量关系，选择“突破口”。

3.突破口的选择往往从确定一个数（乘数，被乘数，除数或商）的个位、首位或其他数位上的数字入手。

4.必要时要采用枚举和筛选相结合的方法，淘汰那些不合题意的解，寻找正确答案。

5.运用估算的方法，缩小枚举和试验范围以减少试验次数。

习题一

1.在 1199 之间填上适合的运算符号，使等式成立。

1199＝10

（天津市第一届小学生“我爱数学”邀请赛试题）

2.填上合适的符号，使等式成立。

4444=1

4444=2

4444=3

4444=4

4444=5

（天津市第二届小学生“我爱数学”预赛试题）

3.在下面式中填上算术运算符号、括号，使式子成立：

（1）1 2 3=1；

（2）1 2 3 4=1；

（3）1 2 3 4 5=1；

（4）1 2 3 4 5 6=1；

（5）1 2 3 4 5 6 7=1。

（1984 年重庆市小学数学竞赛试题）

4．填上适当的运算符号，使下式成立：

1　　2　　3　　4　　5＝100

（1983 年《小学生报》数学邀请赛）

5.在下面十五个 9 之间添上+、-、×、÷、（　　）使下面算式成立：

9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9＝2000

6.在被除数小于 100 的情况下，在右图□内填上适当的数：

$$\square \div \left\{\begin{array}{l} \square = 4\cdots\cdots 4 \\ \square = 5\cdots\cdots 5 \\ \square = 6\cdots\cdots 6 \end{array}\right.$$

（1983 年《小学生报》数学邀请赛试题）

7.在下面的□中，分别填上 1、2、3、4、5、6、7、8、9 中的一个数字（每个只许填一次）使得带分数算式（每式只要一个填法）：

（1）$\square\square\frac{\square}{\square}-\square\square\frac{\square}{\square}$ 的值最大；

（2）$\square\square\frac{\square}{\square}+\square\square\frac{\square}{\square}$ 的值最小。

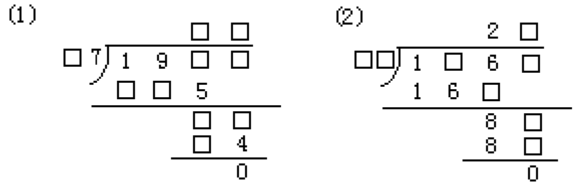
（上海第一届“从小爱数学”邀请赛试题）

8.在下面乘法竖式的□内各填上适合的数字，使算式成立：

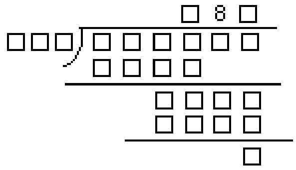
(1)
$$\begin{array}{rrrrr} & & & 6 & \square \\ \times & & & 3 & 5 \\ \hline & & 3 & 3 & \square \\ & 1 & \square & 8 & \\ \hline & \square & \square & \square & \square \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rrrrr} & & 2 & 5 & 8 \\ \times & & & \square & \square \\ \hline & 1 & \square & 2 & \square \\ & \square & \square & \square & \\ \hline & \square & 9 & \square & \square \end{array}$$

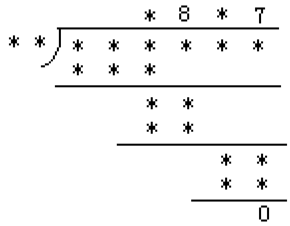
9.在下面的方框中填上适当的数字，使算式成立：



10. 关于下面的算式，只知道一个数字 8，你能确定其他数字吗？



11. 把下面除法算式中的*号填出来，成为一完整的算式。



12. 下式中不同的字母代表不同的数字，相同的字母代表相同的数字，求出这些字母各代表什么数字，算式才能成立：

(1)

```
    H E
    H E
    H E
  + H E
  -----
    A H
```

(2)

```
    A B C D
  + D C B A
  ---------
  A B C D 0
```

(3)

```
    A A 8 8 0
  -   B C B A
  -----------
      A B C B
```

(4)

```
    C D E B C
  -   A B C D
  -----------
      A C A C
```

13. 将下面式中的字母用数字代替，使算式成立。

```
    赛 竞 学 数 年 少 匙 钥 金
  +  8  6  4  1  9  7  5  3  2
  ----------------------------
    金 钥 匙 少 年 数 学 竞 赛
```

（1984 年上海“金钥匙”数学竞赛题）

14. 下面算式中每一个字代表一个数字，不同的字代表不同的数字，当算式成立时，求每个字所代表的数字。

努 力 学 习

向 上

我 们 天 天 向 上

（1986 年北京奥林匹克学校入学试题）

15.在下面的算式中“三”、“好”、“学”、“生”四个汉字各代表一个阿拉伯数字，其中“三”代表____，“好”代表____，“学”代表____，“生”代表____。

学 生

好 学 生

三 好 学 生

1 9 8 9

（1988 年《小学生数学》报小学生数学邀请赛初赛试题）

16.在象棋算式里，不同的棋子代表不同的数字，请你想一想棋子各代表哪些数字。

兵 砲 马 卒

+ 兵 砲 车 卒

车 卒 马 兵 卒

17.下列各题的每一个汉字代表一个数字，不同的汉字代表不同的数字，试求出下列各算式。

(1)

从 小 爱 数 学

× 4

学 数 学 小 从

(2)

1 红 花 映 绿 叶

× 3

红 花 映 绿 叶 1

(3)

蜜 蜜 蜜

× 蜜 蜜 蜜

蜜 蜂 酿 蜂 蜜

（4）优优优优优优÷学=学习

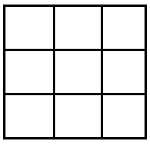
再学习

二　填数问题
——从“九宫算”谈起

在填数问题中，小学生常常采用“凑”的方法，通过几次试验来寻找解答。如果我们深挖其中的道理，就会找到一些解题规律，使认识进一步深化。在这个意义上讲，填数问题是一种很好的“锻炼思维的体操”。

我国古代人民对数学的发展作出过许多杰出贡献，著名的“九宫算”就是其中之一，最早提出的问题是：

将 1 至 9 这九个数字填在右图中九个方格里使每一横行、每一纵列和两个对角线上的数之和相等。



这种图形填数，我国古代称为“九宫算”、“纵横图”，国外叫做幻方。“九宫图”就是将 1 至 9 的九个数填在 3×3 的小格内，它是一个三阶幻方。传说大禹治水的时候，洛水中浮出一只神龟，龟背上驮了一个“洛书”图。将它译释成今日数字即为一个三阶幻方。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0014_1.bmp}

一般地，在 n×n 的方格内，既不重复又不遗漏地填上 n^2 个自然数，每个数占一格，并使每行、每列及两条对角线上 n 个自然数的和都相等，这样排成的数表称为 n 阶幻方。都相等的和叫幻和。

幻方曾使不少数学爱好者入迷。大数学家欧拉、著名物理学家富兰克林就曾经对幻方很感兴趣。目前，最大的幻方是 105 阶，它是由美国一位 13 岁少年作成的。

下面我们来谈谈如何填好“九宫图”。

例 1　填九宫图所表示的幻方。

解：首先应解决二个问题：

（1）每行、每列的和是多少？

（这个和叫幻和）

（2）中间位置的数应当填几？

（求幻和时几次用到了它）

为了叙述方便，我们把每个方格内要填的数字用字母表示（图 1）。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0015_1.bmp}

首先求出幻和。因为 $a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2+c_3=1+2+3+4+\cdots+9=45$，$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=$幻和，所以，幻和×3=45，幻和=45÷3=15。

其次，确定中心数 b2。

因为 $(a_1+b_2+c_3)+(a_3+b_2+c_1)+(a_2+b_2+c_2)+(b_1+b_2+b_3)=15\times4$

$a_1+a_2+a_3+b_1+b_2+b_3+c_1+c_2+c_3+3b_2=60$，

所以 $b_2=5$，即中间数应当是 5。

最后，考虑四个角上应填什么数

假设 a_1 为奇数，那么

（1）如果 a_2 也是奇数，那么 a_1＋a_2＋a_3=a_1+5＋c_3=a_2+5＋c_2=15。于是 a_3、c_3、c_2 也都是奇数，连同 b2=5 共有六个奇数，矛盾（如图 2）。

（2）如果 a_2 为偶数，那么 a_3、c_2 为偶数。又因为 c_3 为奇数，a_3＋b_3＋c_3=c_1+c_2＋c_3=15，所以 b_3、c_1 为偶数。这样就有 5 个偶数，矛盾（如图 3）。

所以 a_1 不能为奇数。

同理可证 c_1、c_3、a_3 都不能为奇数。弄清了这一点就可填写三阶幻方（如图 4、图 5）。

2	9	4
7	5	3
6	1	8

图 4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

图 5

例 2　把 4 至 12 填在 3×3 的方格内，制成三阶幻方。

解：（1）求幻和：（4＋5＋……＋12）÷3＝72÷3=24。

（2）求中心数：∵72＋3b2=24×4，∴3b2=24，∴b2=8。（3）确定四角数：由上题九个数中有五个为奇数，中心数为奇数，四角数为偶。现在九个数中五个为偶数，中心数为偶数，猜想四角数应为奇数，经验证这个猜想是正确的，所以在四个角上填 7、5、9、11。填其余数字就容易了（如图 6）。

7	12	5
6	8	10
11	4	9

图 6

数阵是一种由幻方演变而来的数字图。数阵可以分为辐射型、封闭型、既辐射又封闭的复合型数阵。

例 3　将 1 至 7 七个数字填入图中的圈内，使每条线上的三个数的和相等。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0017_1.bmp}

解：首先确定中心数。不妨设中心数为 a，则 1+2+3+4+5+6+7+2a 能被 3 整除。

所以，　（28＋2a）÷3=28÷3＋2a÷3。其中，28÷3 商 9 余 1。因此，2a÷3 的余数必须是 2，那么当 a 是什么数时 2a÷3 的余数才是 2 呢？为此，我们在 1～7 六个数中试验选择如下：

当 a＝1 时，　2a÷3=2÷3 商 0 余 2；（符合要求）

当 a＝2 时，　2a÷3=4÷3 商 1 余 1；

当 a＝3 时，　2a÷3=6÷3 商 2 余 0；

当 a=4 或 7 时，余数也是 2。（符合要求）

所以，当 a=1、4、7 时，2a÷3 的余数是 2，即中心数为 1，4，7。

当 a＝l 时，（28＋2）÷3＝10，所以除中心数外，其他两个数的和是 10-1＝9，只要把 2、3、4、5、6、7 按和为 9 分成三组填入○内即可。

当 a=4 时，（28＋8）÷3=12，除中心数外其他两个数的和为 8。

当 a＝7 时，　（28＋14）÷3=14，除中心数外其他两个数的和为 7。

因此，可得三个解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0018_1.bmp}

例 4　将 1 至 6 分别填入圈内，使各边上三个○内数字和相等。

解：首先应确定三个顶点上○内的数字。

用 k 表示每边上三个○内的数字和，用 a、b、c 分别表示三个顶点○内的数字，因为三个顶点上的数在求和时多用了一次，所以 1+2+3+4+5+6+a+b+c＝3k，21+a+b+c＝3k，即 k=（21+a+b+c）÷3。

又因为 a、b、c 可以分成七组数：1，2，3；2，3，4；3，4，5；4，5，6；1，2，6；1，3，5；2，4，6。

我们把这四组 a＋b＋c 的和与 k 的值列表如下：

a　b　c	a+b+c	k=（21+b+c）÷3
1、2、3	6	9
1、2、6	9	10
2、3、4	9	10
1、3、5	9	10
3、4、5	12	11
2、4、6	12	11
4、5、6	15	12

从表中看出，当 a＋b＋c 的最小值是 1＋2＋3=6 时，k 的最小值是 9。

当 a＋b＋c 的值最大是 4＋5＋6＝15 时，k 的最大值是 12。

1.当 a＋b＋c=6，k=9 时，a、b、C 分别是（1，2，3）、（1，3，2）、（2，1，3）、（2，3，1）、（3，1，2）、（3，2，1），那么，其余三个○内分别填 4、5、6。我们可以填出六种解法：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0019_1.bmp}

从上面答案可发现，只要把一个解中的数左右旋转或适当调换就可以得到其余的五个解。我们把第一个解叫做基本解，其余的五个解看作与基本解是同一个解。

2.当 a＋b＋c=9，k=10 时，试验如下：

（1）如果 a=1，b=2，c=6（如右图），那么在三角形底边上只有填 2，才能使底边上○内数的和是 10，但这样重复，因此无解。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0020_1.bmp}

（2）如果 a=1，b=3，c=5，那么其余三个○内分别填 2、4、6，得本题的第二个基本解。

（3）a=2，b＝3，c=4 时，无解。

3.当 a＋b＋c=12，k=11 或 a＋b＋c=15，k=12 时，用上面同样的方法得到下面的两个基本解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0020_2.bmp}

从上面分析，我们可以看到，每一个基本解可得六个解，本题共有 24 个解，但是今后解答这类问题时，只要求基本解就可以了。

例 5　把 1 至 8 八个数分别填入图中的八个○内，使每个圆周上五个数的和都等于 21。

解：设两个圆的交叉点上的两个○内各是 a、b。那么，在计算两个大圆周上 10 个数的和时，a、b 两数都多加了一次，所以 1＋2+……＋8＋a＋b 除以 2 应该是 21，即 36＋a＋b=21×2，从而得 a＋b=6。

在 1 至 8 八个数中，只有 1 和 5，2 和 4 这两组数的和是 6。

（1）如果中间两个○内分别填 1 和 5，另外三个○①内三个数的和都应当是 21-6=15，在 2，3，4，6，7，8 这六个数中，和相等的数只有 2，6，7 和 3，4，8。

（2）如果中间两个○内填 2 和 4，其他的数可分成两组 1，6，8 和 3，5，7，分别填入○中。

例 6　把 1 至 7 七个数填在右图的○内，使每条线上三个数的和都相等。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0021_1.bmp}

（1988 年无锡市小学生数学竞赛试题）

解：本题是例 3 的发展，设中心数为 x，其余各数分别为 a、b、c、d、e、f。根据例 3 的分析，x 可取 1、4、 7。

（1）当=1 时，则得每条线上三个数的和为 10。

a+b+c+d+e+f=28-x=-27。

但 a+c+e=10，b+d＋f＝10，

于是 a+b+c+d+e+f=20。

两种结果产生矛盾，因此，x 不能为 1。

（2）当 x＝4 时，则得每条线上三个数的和为 12。

a+b+c+d+e+f=28-x=24。

但 a+c+e＝12，b+d+f=12，

于是 a+b+c+d+e+f＝24。

两种结果一致，因此，x 可为 4。

因为 1+7+4=12，6+2+4＝12，5+3+4=12，而且 7+2+3= 12，1＋6＋5=12，所以可得解（见右图）。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0022_1.bmp}

图中当 1 的位置确定后，5 与 6 可以对换，（3 与 2 也相应的对换），因此有两种不同的形式。而 1 在外圈上有三个位置可选择，有三种不同形式，这样就有 2×3=6 种不同形式。外圈上三个数与内圈上三个数可同时交换，因此，本题有 6×2=12 种不同形式。

（3）当 x=7 时，无解。

习题二

1.在下面的方格内，每边加起来的数都是 5，总数是 12，现在请你用任何数字重新排列，每边加起来仍是 5，但总数是 13、l4。

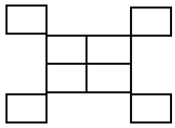
2	1	2
1		1
2	1	2

2.把 5、7、9、11、13、15、17、19、 21 分别填入下面正方形的方格里，使每行、每列、对角线上三个数的和都相等。

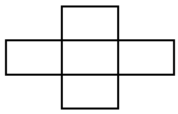
3.右图中的 A=______，B=______ ，C= ______，D=______ ，E= ______时，它可能构成一个三阶幻方？

19	A	14
10	B	C
D	18	E

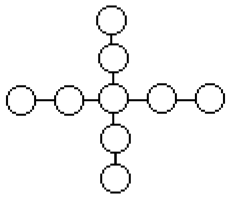
4.将 1 至 8 八个数填入右图的八个方格内，使上面四格，下面四格，右边四格，中间四格，对角线上四格和四角四格内的四个数的和都是 18。



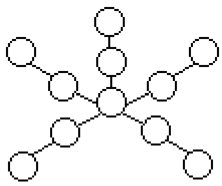
5.用 1 至 5 这五个数填入右图中使每行和每列的 3 个数的和相等。



6.将 1 至 9 这九个数分别填入右图的○内，使每条辐射支上的三个数的和都相等。



7.将 1 至 11 这 11 个数，分别填入右图中，使每条线段上三个○内数的和都相等。



8.在右图的每个圆圈里填上适当的质数（不得重复），使每条直线上三个数的和都相等，且均为偶数。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0024_1.bmp}

（安庆市首届小学数学竞赛试题）

9.请将 1 至 8 这八个数字填入右图的空方框内，使每条直线上三个数的和都为质数。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0024_2.bmp}

（张家口市 1990 年小学五年级数学竞赛（复赛试题））

10.把 1 至 7 七个自然数分别填入右图中的圆圈里,使每条线上三个数的和相等。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0024_3.bmp}

（1990 年济南历下区小学五年级数学竞赛试题）

11.把 20、21、22、23、24、25 这六个数分别放在图中的一个圆圈中，使这个三角形各边上的三个数之和是相等的。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0024_4.bmp}

（天津市第二届“我爱数学”竞赛题）

12.将 1、2、3、4、5、6、7、8、9 这九个数分别填在右图的三角形的圆圈里，使每条边上的四个数字和等于 17。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0024_5.bmp}

（1983 年洛阳市小学生数学竞赛试题）

13.如图，四个小三角形的顶点处有六个圆圈。如果在这些圆圈中分别填上六个质数，它们的和是 20，而且每个小三角形三个顶点上的数之和相等。问这六个质数的积是多少？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0025_1.bmp}

（1986 年“华罗庚金杯”决赛试题）

14.把 1 至 10 这十个数填入右图的十个○内，使每个正方形四个顶点上各数的和都等于 24。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0025_2.bmp}

15.把 5、6、7、8、9、10、11、12、13、14 填入右图中的小圆中，使每个大圆圈中六个数的和是 55。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0025_3.bmp}

（长春市 1988 年四年级数学竞赛题）

16.将 195、196、197、198、199、200、201 七个数分别填入右图的小圆圈内，使每条直线上和每个圆上的三个数的和都是 594。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0025_4.bmp}

（石家庄市长安区 1989 年五年级数学复赛试题）

17.将 1 至 10 这十个数分别填入图中○内，使每条线段上四个○内数的和相等。每个三角形三个项点上○内数的和也相等。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0026_1.bmp}

三　数列问题
——从高斯的故事谈起

高斯是 19 世纪德国的著名数学家。他从小喜欢学数学，善于思考，聪明过人。据说他在读小学三年级的时候，一次老师布置一道题目：“把从 1 到 100 的自然数加起来，和是多少？”正当同学们埋头一个数一个数加的时候，小高斯很快报出答数为 5050，这使得老师非常吃惊。

小高斯是采取什么办法巧妙地进行计算的呢？

先来观察一下题目，发现数字的排列是有规律的。

1+2+3+4+5+6+7+8+9+……+100。

这是按自然数排列的，后面一个数都比前面一个数大 1，好比上体育课同学们排成一队，叫做队列，这就叫做数列。请观察下面的数列：

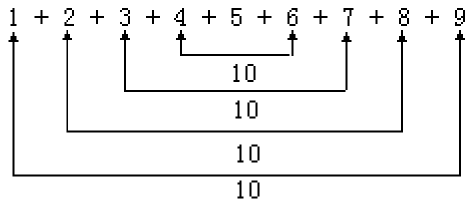
①1，3，5，7，9，11；

②2，6，　10，　14，　18，22；

③5，　10，　15，　20，　25，　30。

这些数列的两个数之间的差都是相等的，所以叫做等差数列。既然这些数列排列都有规律可找，因此可以发现许多数学问题，这些就是数列问题。

小高斯做的题目是最简单的数列问题。100 个数相加大多了。我们先用九个数来研究一下：



这样凑成 4 个 10 再加上 5，和为 45。

还有一个办法：

$$\left.\begin{array}{l}1+2+3+4+5+6+7+8+9=\text{和}\\9+8+7+6+5+4+3+2+1=\text{和}\end{array}\right\}2\text{倍和}$$

$$10+10+10+10+10+10+10+10+10=90$$

把数列颠倒过来相加，所得结果是和的 2 倍，只要除以 2 就得到答案：

和＝90÷2＝45。

按照这个道理，可以得到求等差数列的和的一般公式：

（首项+末项）×个数÷2

把小高斯做的题目：　1+2+3+4+5+…+100 代入公式：

（1+100）×100÷2

=101×100÷2

=10100÷2

=5050

例 1　1+2+3+…+250＝31375

（1+250）×250÷2

=251×250÷2

=62750÷2

=31375

例 2　1+3+5+7+9+…+199＝10000

这是一列奇数数列，也可代入公式

（首项十末项）×个数÷2

（1+199）×100÷2=20000÷2=10000

怎样算出连续奇数的个数，不必一个一个地数出来。只要（首项+末项）÷2，就能求出个数。

例 3　101+103+105+…+199=？

这道题和上面讲的有所不同。它虽然也是求连续奇数的和，但却不是从 1 开始的。其实也不难，只要先算出从 1 到 199 的连续奇数的和，再减去从 1 到 99 的连续奇数的和，问题就解决了。

∵1+3+5+…+99=2500，

1+3+5+…+199=10000，

∴101+103+105+…+199=10000-2500＝7500。

例 4　2+4+6+…+100=？

这道题一看就知道，是求从 2 开始连续偶数的和。同样可用上面的公式代入

（2+100）×50÷2=5100÷2=2550。

要知道从 2 开始连续偶数的个数，也不用一个一个地去数，只要把最后那个偶数除以 2 就可以了。

例 5　五个连续偶数的和是 150，这五个偶数是哪几个数？

粗看这道题目觉得很难，感到无从下手。可以先枚举几组五个连续偶数观察一下：

$$\underbrace{46+48+\boxed{50}+52+54}_{\text{2个50}}=\overset{\boxed{\text{5个50}}}{\overset{\downarrow}{250}}$$

$$\underbrace{66+\overbrace{68+\boxed{70}+72}^{\text{2个70}}+74}_{\text{2个70}}=\overset{\boxed{\text{5个70}}}{\overset{\downarrow}{350}}$$

请你仔细观察分析，就会发现规律，五个连续偶数的和，凑巧是中间数的 5 倍。中间数找到了，前后四个数就能写出来了。解例 5：

先求出五个连续偶数的中间数：150÷5=30。

所以这五个连续偶数是：26，28，30，32，34。

例 6　已知四个连续偶数的和是 84，这四个偶数是哪几个数？

这道题是四个连续偶数，没有中间数，上面的办法不适用了，要根据上题的思路重新想办法。先枚举几组题目观察一下：

$$\underbrace{24 + \overbrace{24 + 26}^{50} + 28}_{50} = 100$$

$$\underbrace{32 + \overbrace{34 + 36}^{70} + 38}_{70} = 140$$

从上面两组题发现，四个连续偶数分成两个数对，每个数对的和是相等的。根据这个特点，可以从这个和中先求出一个数对，然后再推算出四个连续偶数来。

$$84\div 2=42$$

然后推算出这个四个偶数：18，20，22，24。

例 7　10 到 80 之间能被 7 整除的各数之和是多少？

10 到 80 之间，7 的最小倍数是 14，7 的最大倍数是 77，这是一列 7 的倍数的数列：

$$14+21+28+\cdots+77=455。$$

代入求等差数列之和的公式得：

（14+77）×10÷2=910÷2=455。

例8 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{99\times 100}=?$

求这一数列各数之和，如果按照普通方法计算实在太麻烦了。你愿意试一下的话，恐怕半天还算不出来呢。

从何下手呢？首先要仔细分析题目，看看这些分数有什么特点。不难看出，这 99 个分数的分子都是 1，分母都是两个连续的自然数的乘积。这一数列的编列是有规律可找的。

根据分数乘法的法则，它们都可以分成两个分数相乘，如：

$$\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\times 3}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}.$$

$\because \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}.$

$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$。

根据上面分析，两个分数的积与这两个数的差可能相等。但这两个分数不是任意的，它们必须符合一定的条件。具体地说，就是它们的分子都是 1，分母分别是两个连续的自然数中的一个。

分析到这里，爱动脑筋的同学会恍然大悟解答例 8 可以找到简便方法了。只要用两个分数的差的形式代入式子里：

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{99\times100}$$
$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots-\frac{1}{99}+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}$$
$$=1-\frac{1}{100}=\frac{99}{100}.$$

同学们看到这里一定会高兴得跳起来。这个方法太巧妙了！$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$ 13+13 …… 不是都等于 0 吗？最后就只剩下第一个数和最后一个带“－”号的数，即 $1-\frac{1}{100}$，所以立即可以算得结果 $\frac{99}{100}$。

一道复杂繁难的题目，现在竟不费吹灰之力就解决了。所以学习数学，一定要勤于思考、善于分析。

练习三

1.101+102+103+104+……+200=

2.1+3+5+7+……+259=

3.52+54+56+……+150=

4.72+74+76+……+200=

5.比 101 小的所有的偶数的和是多少？
（天津市小学生红花奖竞赛中年级试题）

6.全部三位数的和是多少？
（哈尔滨市第八届小学生数学竞赛试题）

7.三个连续自然数的和是 231，这三个数中最大的一个是多少？
（江西省 1990 年“八一杯”小学数学比赛题）

8.三个连续自然数的积是 2730，这三个数分别是多少？
（宜兴市 1990 年第五届小学生数学竞赛试题）

9.一个数分别与相邻两个偶数相乘，所得的积相差 50，这个数是多少？
（北京市第三届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

10. $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\cdots+\frac{1}{199\times200}=$

11. $\frac{1}{100\times101}+\frac{1}{101\times102}+\frac{1}{102\times103}+\cdots\cdots+\frac{1}{199\times200}$

四 假设问题

——以“假”求“真”，化难为易

用假设的方法来解答问题是一种极其重要的思维方法。恩格斯曾经指出：“只要自然科学在思维着，它的发展形式就是假设。”

科学史上的许多有重大影响的科学理论，如门捷列夫的元素周期表、哥白尼的太阳中心说等等，最初就是以假设的形式出现的。

在解答数学问题中，假设未知数为 x，列出方程进行解题，就是建立在假设的思想基础上的。由于假设，可以把未知看作已知，可以把复杂的数量关系简单化。我国古代算术中的“鸡兔同笼”问题，就是用假设法来解的，它往往先假设某种现象的存在，得到和已知条件不同的“差异”，再分析“差异”的原因，进行适当的调换，使问题得到解决。

例 1 笼中共有鸡兔 100 个头，350 只脚，问鸡兔各有多少头？

（1990 年济南市历下区小学数学五年级竞赛题）

分析：假设 100 头全为兔，则应有 4×100=400 只脚，比实际多了 400-350=50 只脚，如果把一只兔换成一只鸡，那么可减少 4-2=2 只脚，要减少 50 只脚，就要换 50÷2=25 头鸡，这样就求出了鸡的头数。

解法一：

（4×100-350）÷（4-2）=25（头）……鸡，

100-25=75 （头）……兔。

或者 （350-2×100）÷（4-2）=75（头）……兔，

100-75=25 （头）……鸡。

解法二：

设：鸡有 x 头，则兔有（100-x）头。

2x+4×（100-x）=350，

解之得 x=25。

100-25=75（头）……兔。

答：鸡有 25 头，兔有 75 头。

例 2 光明书店卖出甲、乙两种书共 120 本，甲种书每本 5 元，乙种书每本 3.75 元，卖出的甲种书比乙种书多收入 162.5 元。甲、乙两种书各卖出几本？

（《小学生数学报》第五届初赛题）

分析 1：假设全部卖出的为甲种本，则甲种本比乙种本多收入 5×120-3.75×0=600 元，比实际的相差数多 600-162.5＝437.50 元。如果甲种本换一本为乙种本（也就是甲种本少卖一本，乙种本多卖一本），那么甲种本的收入比乙种本少 5＋3.75=8.75 元，要减少 437.50 元，就要换几次（也就是乙种本的本数）， 437.50÷8.75=50（本）。

解法 1：

(5×120-162.5)÷(5+3.75)＝50(本)……乙种本,120-50＝70(本)……甲种本。

分析 2：假设甲、乙各卖出 120÷2＝60 本，则甲比乙多收入（5-3. 75）×60=75 元，比实际的相差数少 162.5-75＝87.5 元（说明甲不止 60 本）。如果乙换一本为甲，那么乙的收入比甲少 5＋3.75=8.75 元，要增加 87.5 元，就要换几次（也就是需要增加甲种本的本数）， 87.5÷8.75=10 （本），

所以卖出的甲种本有 60＋10＝70（本）。

解法 2：

[162.5-（5-3.75）×（120÷2）]

÷（5+3.75）=10（本）

60+10=70（本）……甲种本，

60-10=50　（本）……乙种本。

答：卖出的甲种本有 70 本，卖出的乙种本有 50 本。

你还有其他假设的方法吗？你能用列方程的方法解答吗？

例 3　有 1 元、5 角、2 角三种人民币 11 张，共值 4.7 元，其中 2 角的张数比 5 角多 3 张。三种人民币各有几张？

分析：由于 2 角与 5 角的张数不同，在调换时较难进行。如果 5 角多 3 张，那么题意改为"有 1 元、5 角、2 角的人民币共 11+3=14 张，共值 4.7+0.5×3=6.2 元（62 角），其中 2 角的张数与 5 角的同样多，求各有几张？"再用假设法解题。

根据以上的改题，可以假设全是 1 元（10 角）的，则共值 10×14=140 角，比实际多 140-62=78 角，如果用 2 张 10 角的，调换：1 张 2 角、1 张 5 角的（总张数不变），那么可少 10×2-2-5=13 角，要减少 78 角，就要换几次（也就是 2 角或 5 角的张数），　78÷13=6（张），就是原来 2 角的有 6 张，原来 5 角的有 6-3=3 张。

解法：

[10×　（11+3）-（47+5×3）]÷（10×2-2-5）=6（张）……2 角，

6-3=3（张）……5 角，　14-2×6=2（张）……1 元。

答：1 元有 2 张，5 角有 3 张，2 角有 6 张。

如果原题中"2 角的减少 3 张"，你能解答吗？你能用列方程的方法解答吗？

通过以上例题，可以看到用假设法解答"鸡兔问题"时，它的一般解题规律是：

（1）假设结果（如笼中都是兔）；

（2）求出相差（如脚的只数与某一已知条件有"差异"）；

（3）进行调换（如一只兔调换一只鸡，使兔的只数减少）；

（4）由甲入手，求出是乙（假设笼中的动物都是兔，但先求出的倒是鸡的头数）。

例 4 买语文书 30 本，数学书 24 本，共花 41.7 元，已知每本语文书比每本数学书贵 0.22 元，语文书每本多少元？数学书每本多少元？

（1990 年长春市小学数学竞赛五年级试题）

分析：假设语文书的单价便宜 0.　22 元，那么数学书和语文书的单价就相同了，买 30 本语文书就可便宜 0.22×30=6.6 元。41.7 元减去 6.6 元所得的差正好是 30+24=54 本数学书的总价。这样，就可求出数学书的单价了。

解法：

（41.7-0.　22×30）÷（30+24）=0.65（元）

……数学书单价。

0.65+0.22=0.87（元）……语文书单价。

答：语文书每本 0.　87 元，数学书每本 0.　65 元。

例 5　少年宫开办音乐、美术两个培训班，去年共招收 200 人。今年计

划招收 246 人，其中音乐班人数比去年增加 25%，美术班人数比去年增加 20%。求今年计划招收的音乐班、美术班各有多少人？

分析：假设美术班今年比去年也增加 25%，则今年计划招收 200×（1+25%）=250 人，比实际多 250-246=4 人，这是因为美术班今年比去年增加的百分数与实际相比较多了去年的 25%-20%=5%，这里的 5%，就是 4 人的对应分率，所以去年美术班有 4÷5%=80 人。

解法：

[200×（1+25%）-246]÷（25%-20%）

=80 人 ………去年美术班人数，

80×（1＋20%）=96 人……今年美术班人数，

246-96=150 人 ……今年音乐班人数。

答：今年音乐班计划招收 150 人，美术班计划招 96%人。

假设“ 音乐班今年比去年增加 20% ”，那么怎样解答呢？你去试一试看。

例 6　甲原有的故事书是乙的 6 倍，两人各再买 2 本，则甲现有的书是乙的 4 倍。甲、乙两人原来各有故事书多少本？

分析：假设要使甲现有的书仍是乙现有的书的 6 倍，则甲应买 2×6=12 本，但甲只买了 2 本，少买了 12-2=10 本，这样甲现有的书就只有乙现有的书的 4 倍了，比实际少买了乙现有的书的 6-4=2 倍，所以乙现有的书是 10÷2=5（本），乙原来的书有 5-2=3 本。

解法：

（2×6-2）÷（6-4）=5（本）……乙现有的书，5-2=3（本）……乙原来的书， 3×6＝18（本）……甲原来的书。

答：甲原来有 18 本故事书，乙原来有 3 本故事书。你能用列方程的方法解答吗？

练习四

1.学校买来 100 张电影票，一共用去 22 元。票价有 0.2 元和 0.25 元两种。问 0.2 元的有多少张？0.25 元的有多少张？

（北京市东城区 1988 年小学数学竞赛题）

2.一个中学生一顿饭可以吃 3 个馒头。三个幼儿一顿饭吃 1 个馒头，现在有中学生和幼儿共 100 人，一顿饭正好吃 100 个馒头。有幼儿多少人？

（北京市第五届小学“ 迎春杯 ”数学竞赛题）

3.12 张乒乓球台上共有 34 人在打球，问：正在进行单打和双打的台子各有多少张？

4.松鼠妈妈采松籽。晴天每天可以采 20 个。有雨的天每天只能采 12 个。它一连几天采了 112 个松籽，平均每天采 14 个。问这几天当中有几天有雨？

（首届“ 华罗庚金杯 ”初赛试题）

5.五年级数学竞赛题共 10 题，规定做对一题得 15 分，做错一题倒扣 10 分，小亮在这次竞赛中得了 100 分，你知道他做错了多少题？

6.李强把自己储存的 17 枚硬币，合计 6 角 4 分捐献给有关部门抢救大熊猫。已知硬币有 1 分、2 分、5 分三种，并且 1 分与 2 分的枚数相等。求三种硬币各有多少枚？

（1990 年东台市小学生数学竞赛预赛题）

7.丰庆百货公司委托运输公司包运 1000 块玻璃，议定每块运费 0.50 元，如损失一块，不但没有运费，并且要赔偿成本费 3.50 元，货物运到目的地后，

运输公司获得运费 480 元，损失的玻璃有多少块？

（四川省 1990 年小学生“天府杯”数学题）

8.某农民饲养鸡兔若干，已知鸡比兔多 13 头，鸡的脚比兔的脚多 16 只，问鸡和兔各几头？

9.某班 42 个同学参加植树，男生每人平均种 3 棵，女生每人平均种 2 棵，已知男生比女生多种 56 棵。求男、女生各多少人？

10.蜘蛛有 8 只脚，蜻蜓有 6 只脚和两对翅膀，蝉有 6 只脚和一对翅膀，现在有这三种小虫 18 个，共有脚 118 只，翅膀 20 对，问每种小虫各有多少个？

11.两数相除商 3 余 2，被除数、除数、商与余数的和是 179，被除数比除数大多少？

（1990 年《少年报》有奖测试题）

12.三只船运木板 9800 块，第一船比其余两船共运的少 1400 块，第二船比第三船多运 200 块，三只船各运木板多少块？

13.某车间男工人数是女工人数的 2 倍，若调走 18 个男工，那么女工人数是男工人数的 2 倍，这个车间有女工多少人？

（福州市 1990 年小学生“迎春杯”数学题）

14.果园里苹果树的棵数是桃树的 3 倍，管理人员每天能给 25 棵苹果树和 15 棵桃树喷洒农药，几天后当桃树喷完农药时苹果树还有 140 棵没有喷药。果园里这两种树共有多少棵？

15.某商店里花布是白布的 2 倍，如果每天卖 30 米白布和 40 米花布，几天后，白布全部卖完，而花布还剩 120 米。原来库存花布多少米？

五　方程问题

——巧设未知数，列好等量式

在小学阶段解答应用题时，大多数使用的是算术解法，但是这种解法只限于对已知数之间进行计算，不允许未知数参加计算。而用列方程的解法，未知数与已知数同样都是运算的对象（也就是把未知数看作已知数），再找出“未知”与“已知”之间的等量关系（也就是列出方程），从而得到问题的解。所以对于应用题，列方程的方法往往比算术解法易于思考、易于解答。对于参加竞赛的同学，只有简易方程的知识是不够的，还必须补习一些一元一次方程的内容。

列方程解应用题的一般步骤是：

（1）理解题意，找出一个（或几个）适当的未知数，用一个（或几个）英文字母来表示；

（2）找出应用题中数量间的等量关系；

（3）根据等量关系列出方程；

（4）解方程并检验、验算，写出答案。

其中布列方程是关键的一步，其实质是将同一个量用两种方式表示出来写成等量关系，而这等量关系的建立必须对

题目作细致的分析，灵活运用基本的数量关系式，列出正确的方程。

（一）列一元一次方程解应用题

例 1　两个数的和是 10，差是 4，求这两个数。

解法 1：

设较大的数是 x，则根据“两个数的和是 10”可得较小的数是（10-x），按“差是 4”为等量关系列方程，得 x-（10-x）=4。

解方程，得 x=7，

∴较小数是 10-7=3。

解法 2：

设较小的数是 x，则根据“两个数的和是 10”可得较大的数是（10-x），按“差是 4”为等量关系列方程，得

（10-x）-=4。

解方程，得 x=3，

∴较大数是 10-3=7。

解法 3：

设较大的数是 x，则根据“差是 4”可得较小数是（x-4），按“两个数的和是 10”为等量关系列方程，

得 x+（x-4）=10。

解方程，得 x=7，

∴较小数是 10-7=3。

解法 4：

设较小的数是 x，则根据“差是 4”可得较大数是（x+4），按“两个数的和是 10”为等量关系列方程，得

x+（x+4）=10

解方程，得 x=3，

∴较大数是 3+4=7。

答：较大数是 7，较小数是 3。

例 2　有一个班的同学去划船。他们算了一下，如果增加一条船，正好每条船坐 6 人；如果减少一条船，正好每条船坐 9 人。问：这个班共有多少同学？

（第二届“华罗庚金杯”初赛题）

解法 1：

显然,每条船坐 9 人时所租用的船比每条船坐 6 人时要少用 1+1=2 条船。

设每条船坐 9 人时租船 x 条，则每条船坐 6 人时租船（x+2）条。按“两种计算全班人数的结果相等”为等量关系列方程，得

$$9x=6(x+2)。$$

解方程，得 x=4，

∴全班有 9×4＝36　（人）。

解法 2：

设每条船坐 6 人时租船 x 条，则每条船坐 9 人时租船（x-2）条。按“两种计算全班人数的结果相等”为等量关系列方程，得

$$6x=9(x-2)。$$

解方程，得 x=6，

∴全班有 6×6=36 人。

解法 3：

设全班学生有 x 人，则每船坐 9 人所租船的条数是 x9（条），每船坐 6 人所租船的条数是 x 6（条）。按“每船坐 9 人所租船比每船坐 6 人时要少用 2 条船”为等量关系列方程，得

$$\frac{x}{6}-\frac{x}{9}=2$$

解方程，得 x=36。

答：全班学生有 36 人。

例3 有甲乙两桶油，两桶内装油量的差是20千克。甲桶油量的 $\frac{2}{5}$ 等于乙桶油量的 $\frac{1}{2}$。求甲桶里有油多少千克？

（1990 年长春市小学数学六年级竞赛题）

解：

显然，由于“甲桶油量的 $\frac{2}{5}$ 等于乙桶油量的 $\frac{1}{2}$ ”，所以甲桶油量比乙桶要多。

设乙桶内有油x千克，则甲桶内有油（$x+20$）千克。按“甲桶油量 $\frac{2}{5}$ 等于乙桶油量的 12 ”为等量关系列方程，得

$$\frac{2}{5}(x+20)=\frac{1}{2}x。$$

解方程，得 x=80，

$$80+20=100（千克）。$$

答：甲桶内有油 100 千克。

例 4　一件工程，甲、乙两人合作 6 天完成，甲独做 10 天完成，现在甲

独做若干天后，由乙接替甲将剩余的部分完成，这样两人共用了$12\frac{1}{2}$天，问甲、乙两人各工作了几天？

（蚌埠市二中小学毕业生数学比赛题）

解法：

设甲工作了x天，则乙用了（$12\frac{1}{2}-x$）天。把一件工程作为单位“1”，那么甲、乙工作效率之和为$\frac{1}{6}$，甲的工作效率为$\frac{1}{10}$，乙的工作效率为$\frac{1}{6}-\frac{1}{10}=\frac{1}{15}$。甲$x$天完成的工作量是$\frac{1}{10}x$，乙（$12\frac{1}{2}-x$）天完成的工作量是$\frac{1}{15}$（$12\frac{1}{2}-x$），按两人共用$12\frac{1}{2}$天完成一件工程（“1”）为等量关系列方程，得

$$\frac{1}{10}x+(\frac{1}{6}-\frac{1}{10})\times(12\frac{1}{2}-x)=1$$

解方程，得 x=5，

$$12\frac{1}{2}-5=7\frac{1}{2}\text{（天）。}$$

答：甲做了5天，乙做了$7\frac{1}{2}$天。

例 5　要把 30 克含盐 16%的盐水稀释成含盐 0.15%的盐水，需要加水多少克？

解法 1：

设需要加水 x 克。由于原来 30 克盐水加上 x 克水后，重量变了，浓度变了，但盐水中所含的盐的重量没有变，按“加水前后的含盐量相等”为等量关系列方程，得 30×16%=（30+x）×0.15%。解方程，得 x=3170。

解法 2：

设需要加水 x 克。按“加水前后的含水量相差 x 克”为等量关系列方程，得（30+x）×（1-0.15%）-30×（1-16%）＝x。解方程，得 x=3170。

答：需要加水 3170 克。

例 6　早晨 8 点多钟，有两辆汽车先后离开化肥厂，向幸福村开去。两辆汽车的速度都是每小时 60 千米。8 点 32 分的时候，第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车的 3 倍。到了 8 点 39 分的时候，第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车的 2 倍。那么,第一辆汽车是 8 点几分离开化肥厂的？

解法 1：

显然，根据两辆车的速度都是每小时 60 千米，可知每 1 分钟走 1 千米，即车走几分钟就走几千米。

设 8 点 32 分时，第二辆车开出了 x 分钟（也就是离开化肥厂 x 千米），则第一辆车此时离开化肥厂 3x 千米（也就是开出了 3x 分钟），所以到 8 点 39 分时，第一辆车开出了（3x＋39-32）分钟，离化肥厂（3x＋7）千米；第二辆车开出了（x＋39-32）分钟，离化肥厂（x＋7）千米。按“第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车的 2 倍”等量关系列方程，得

3x+7=（x+7）×2。

解方程，得 x=7，7×3＝21（分），32-21＝11（分）。

解法 2：

设　第一辆车是 8 点 x 分离开化肥厂的，在 8 点 32 分与 8 点 39 分这两个时刻。第一辆车所在的两个地点的距离为 1×（39-32）=7 千米，第二辆车到 8 点 32 分时行了 13（32-x）千米，到 8 点 39 分时行了 12（39-x）千米，所以第二辆车在 8 点 32 分与 8 点 39 分这两个时刻所在的两个地点的距离为 12（39-x）-13（32-7），并且也是 7 千米，按这一情况作为等量关系列方程，得 1 2（39-7）-13（32-x）＝7。解方程，得 x=11。

答：第一辆车是 8 点 11 分离开化肥厂的。

例 7　一辆车从甲地开往乙地。如果车速提高 20%，可以比原定时间提前 1 小时到达；如果以原速行驶 120 千米后，再将速度提高 25%，则可提前 40 分钟到达。那么甲、乙两地相距多少千米。

（1992 年小学数学奥林匹克比赛决赛题）

解法 1：

设全程为 x 千米。

因为当距离一定时，时间与速度成反比，所以速度提高 20%，所用时间缩短到原来时间的$1\div（1+20\%）=\frac{5}{6}$，因此，这辆车用原速度行驶，需要$1\div（1-\frac{5}{6}）=6$小时到达乙地。同样车速提高 25%，所用时间缩短到原来的 1÷（1＋25%）＝45。如果这辆车从开始就提高速度25%，那么就可提前$6\times（1-\frac{4}{5}）=65$小时到达乙地。现在只提前40分钟（23小时），少提前了$\frac{6}{5}-\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$（小时）。这是因为前 120 千米仍是按原速度行驶的，也就是如果提高速度 25%，那么行驶120千米，可提前815小时；如果提高速度25%，行驶 χ 千米，可提前$\frac{6}{5}$小时，按这一情况为等量关系列方程，得 χ ：120＝65：815。

解方程，得 χ ＝270。

解法 2：

设　全程为 x 千米，原来速度是每小时 a 千米，则根据已知条件中的第一层含义，按“提前 1 小时”为等量关系列方程，得

$$\frac{x}{a(1+20\%)}=\frac{x}{a}-1$$（把a看作常数）。

解方程，得$x=6a$（也就是$a=\frac{1}{6}x$）。

再根据已知条件中的第二层含义，按“提前 40 分钟（23 小时）”为等量关系列方程，得

$$\frac{120}{x}+\frac{x-120}{a(1+25\%)}=\frac{x}{a}-\frac{2}{3}$$

把$a=\frac{1}{6}x$代入这个方程，可得

$$\frac{720}{x}+\frac{\frac{24}{5}(x-120)}{x}=\frac{16}{3}$$

解方程，得 x＝270。

答：甲、乙两地相距 270 千米。

例 8　甲数是乙数的 35，两数的最大公约数与最小公倍数的和为 1040。甲、乙两数的和是多少？

（哈尔滨市第七届小学生数学比赛题）

解法 1：

由“甲数是乙数的 $\frac{3}{5}$ ”可以这样巧设未知数。

设甲数是 3k，乙数是 5k，因为 3 与 5 是互质数，所以 3k 与 5k 的最大公约数是 k，最小公倍数是 3×5×k＝15k，按“两数的最大公约数与最小公倍数的和为 1040”列方程，得

k＋15k＝1040。

解方程，得 k＝65。

（3＋5）×65＝520。

解法 2：

设甲数和乙数的最大公约数是 x，则甲数是 3x，乙数是 5x（想一想，为什么？），两数的最小公倍数是 15x。可得方程

x＋15x＝1040。

解方程，得 x＝65。

（3＋5）×65＝520。

答：甲、乙两数的和是 520。

例 9　一个两位数，十位数字是个位数字的 2 倍，将个位数字与十位数字调换，得到一个新的两位数，这两个两位数的和是 132。求这个两位数。

（《小学生数学报》第四届比赛题）

解：

设　这个两位数的个位数字是 x，则十位数字为 2x，原数是 10×（2x）＋x，新数是 10×x＋2x，按“两个两位数的和是 132”为等量关系列方程，得

（20x＋x）＋（10x＋2x）＝132。

解方程，得 x＝4。

4×2＝8。

答：这个两位数是 84。

例 10　如右图在一直角三角形内作正方形，求正方形的面积

（1990 年哈尔滨市第九届小学数学比赛题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0052_1.bmp}

解：

设正方形边长为 x 厘米。原来大直角三角形分成了两个小直角三角形和一个正方形，按“它们的面积和等于原来大直角三角形的面积”为等量关系列方程，得

$$x^2+\frac{1}{2}\cdot x\cdot(6-x)+\frac{1}{2}\cdot(8-x)\cdot x=\frac{1}{2}\times 8\times 6$$

解方程，得 x＝337。

$$3\frac{3}{7}\times 3\frac{3}{7}=11\frac{37}{49}(\text{平方厘米})$$

答：正方形的面积为 113749 平方厘米。

例 11　老王骑自行车从甲地去乙地送文件，去时顺风，每分钟行 240 米，回来时逆风，每分钟行 120 米。他往返的平均速度是每分钟行多少米？

解：

设　他往返的平均速度是每分钟 x 米，甲、乙两地间的距离是 a 米。他往返的总距离是$2a$，往返的总时间是（$\frac{a}{240}+\frac{a}{120}$）分钟，按“往返总距离等于往返的平均速度乘以往返的总时间”的等量关系列方程，得

$$2a=(\frac{a}{24}+\frac{a}{120})\cdot x$$

解方程，得 x＝160。

答：他往返的平均速度是每分钟行 160 米。

说明：　（1）若以（240＋120）÷2＝180（米）作为往返的平均速度是错误的。一般来讲求平均数还是应该运用“总数÷总份数＝平均数”这个数量关系来求出。（2）对于数量关系比较复杂或已知条件较少的应用题，列方程时除了应设的未知数外，还需要增设一些“设而不求一”、“临时参加”的所谓“参数”（如本题中所设的 a 这个未知量为参数，以便沟通数量关系，为列方程创造条件。在解这类方程过程中“参数”会“自行消失”，而使问题得到较好的解答）。

（二）列不定方程解应用题

在一个方程中，未知数的个数多于一个，如 x＋y＝5，就是一个含有两个未知数的方程，由于它的解不唯一（如 x＝1，y＝4；x＝0.2，y＝4.8；……），所以也叫做不定方程。根据问题的实际意义，这类方程常常需要确定它的整数解，在不太复杂的情况下，可以通过观察或枚举来解决，得到一个解或几个解。

例 12 小强问小明：“你家养了几只兔、几只鸡？”小明答：“我家养的兔比鸡多，鸡兔一共有 24 只脚，你猜我家养了几只兔、几只鸡？”

解：

设小明家养了 x 只兔、y 只鸡，按“鸡兔一共有 24 只脚”为等量关系列方程，得

4x＋2y＝24。

解这个不定方程时，可以把 x（或 y）看作常数，

得：y＝12－2x

因为 x、y 都是自然数，所以 x、y 只能取以下几组值：

x	1	2	3	4	5
y	10	8	6	4	2

但根据“兔比鸡多”，即 x＞y；

所以只能取表中 x＝5，y＝2。

答：小明家养了 5 只兔、2 只鸡。

例 13　在一个两位数的两个数字中间加一个 0，那么所得的三位数比原数大 8 倍，求这两位数

（北京市第三届小学生迎春数学比赛题）

解：

设这个二位数的十位数字是 x，个位数字是 y（显然，x、y 都是 0～9 之间的整数），这个二位数是（10x＋y），在它的中间加一个 0 后所得的三位数是（100x＋y），按“三位数比原数大 8 倍（即是原数的 1＋8＝9 倍）”为等量关系列方程，得

$$100x+y=9(10x+y)。$$

$$10=8y,$$

$$x=\frac{4}{5}y,$$

所以 y 是 5 的倍数，得 y＝5，x＝4。

$$4\times10+5=45$$

答：这个两位数是 45。

例 14　如右图在一个圆圈上有几十个孔（不到 100 个）。小明像玩跳棋那样从 A 孔出发，沿着逆时针方向每隔几个孔跳一步，希望一圈以后跳回到 A 孔，他先后试着每隔 2 孔跳一步，结果只能跳到 B 孔；他又试着每隔 4 孔跳一步，也只能跳到 B 孔；最后他每隔 6 孔跳一步，正好跳回到 A 孔，问这个圆上共有多少个孔？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0055_1.bmp}

（第二届《华罗庚金杯》复赛题）

解：

首先要明确题意：

（1）隔 2、4、6 孔跳一步，“隔”字的含义，即每步分别跳 3、5、7 个孔。

（2）因为从 A 孔出发，每步跳 3 孔、5 孔都只跳到 B 孔，离 A 孔还有一个孔，所以总孔数分别被 3、5 除都余 1，又因为 3 与 5 是互质数，所以也可以说总孔数被 3×5＝15 除余 1。同理，总孔数能被 7 整除。

设总孔数为 15x＋1，它被 7 除时的商为 y。按“总孔数相等”为等量关系列方程，得

$$15x+1=7y。$$

求这个不定方程的整数解。

$$y=\frac{1}{7}(15x+1)=\frac{1}{7}[14x+(x+1)]=2x+\frac{1}{7}(x+1)$$

即 $y=2x+\frac{1}{7}(x+1)$。

因为 x、y 都是自然数，所以（x＋1）是 7 的倍数，得 x＝6，13，20，……又因为总孔数 15x＋1＜100，所以 x＜7，综合以上情况，得 x＝6，总孔数是

$$15\times6+1=91（个）。$$

答：一共有 91 个孔。

例 15　大、小盒子共装 99 个球，每个大盒装 12 个，小盒装 5 个，恰好装完，盒子总个数大于 10，那么大、小盒子各有多少个？

解：

设大盒子有 x 个，小盒子有 y 个，按“大、小盒子共装 99 个球”为等量关系列方程，得

$$12x+5y=99$$

求这个不定方程的整数解。

$$x=\frac{1}{12}(99-5y)=\frac{1}{12}[96+(3-5y)]=8-\frac{1}{12}(5y-3)$$

即 $x=8-\frac{1}{12}(5y-3)$。

因为 x 为自然数，所以 $\frac{1}{12}(5y-3)$ 为整数，并且 $\frac{1}{12}(5y-3)<8$，也就是说，（5y－3）能被 12 整除，并且 y＜20。又因为在不定方程 12x＋5y＝99 中，12x 为偶数，99 为奇数，所以 y 必定是奇数。综合以上情况，y 只能取 3 或 15。

当 $y=3$ 时，得 $x=8-\frac{1}{12}\times(5\times3-3)=7$。

而 x＋y＝10 这与“盒子总个数大于 10”矛盾，所以 x＝7，y＝3 这一情况应该舍去。

当 $y=15$ 时，得 $x=8-\frac{1}{12}\times(5\times15-3)=2$，$x+y=2+15=17>10$，符合题意。

答：大盒子有 2 个，小盒子 15 个。

说明：如果没有对不定方程 12x＋5y＝99 的结构进行分析，限止 y 的取值范围（只能是奇数），那么，就要讨论 y＝1、2、……、19 时的十九种情况，这样，解题就繁琐了。

练习五

1.甲、乙、丙三个同学做纸花，已知甲比乙多做 5 朵，丙做的是甲的 2 倍，比乙多做 22 朵。他们一共做了多少朵花？

（1989 年上海市黄浦区小学四年级比赛题）

2.在一个减法算式里，被减数、减数与差的和等于 120，而差是减数的 3 倍，那么差等于多少？

（1988 年无锡市小学数学比赛题）

3.父亲比儿子大 30 岁，明年父亲的年龄恰好是儿子年龄的 3 倍，那么今年父亲多少岁？

（1990 年营口市第四届小学五年级比赛题）

4.学雷锋小组为学校搬砖。如果每人搬 18 块，还剩 2 块；如果每人搬 20 块，就有一位同学没砖可搬。问共有多少块砖？

（1990 年广州市小学五年级数学比赛题）

5.如右图，梯形 ABCD 被它的一条对角线 BD 分成了两部分。三角形 BCD 的面积比三角形 ABD 的面积大 10 平方分米。已知梯形的上底与下底的长度之和是 15 分米，它们的差是 5 分米。求梯形 ABCD 的面积？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0058_1.bmp}

（《小学生数学报》第四届预赛题）

6.甲、乙两人星期天一起上街买东西，两人身上所带的钱共计是 86 元。

在人民商场，甲买一双运动鞋花去了所带钱的$\frac{4}{9}$，乙买一件衬衫花去了人民币 16 元。这样，两人身上所剩的钱正好一样多。问甲、乙两人原先各带了多少元？

（《小学生数学报》第四届预赛题）

7.某装订车间的三个工人要将一批书打包后送往邮局（要求每个包内所装书的册数同样多）。第一次，他们领来这批书的 712，结果打了 14 个包还多 35 本。第 2 次他们把剩下的书全部领来了，连同第一次多的零头一起，刚好又打 11 包。这批书共有多少本？

（《小学生数学报》第五届决赛题）

8.一件工程，乙队先独做 4 天，继而甲、丙两队合作 6 天，剩下工程甲队又独作 9 天才全部完成。已知乙队完成的是甲队完成的 13，丙队完成的是乙队完成的 2 倍。甲、乙、丙三队独做，各需多少天完成？

（天门市 1990 年小学生数学比赛题）

9.甲容器中有纯酒精 11 升，乙容器中有水 15 升。第一次将甲容器中的一部分纯酒精倒入乙容器，使酒精和水混合；第二次将乙容器中的一部分混合液倒入甲容器，这样甲容器中的纯酒精含量为 62.5%，乙容器纯酒精含量为 25%，那么第二次从乙容器倒入甲容器的混合液是多少升？

10.如右图，东西、南北二条路交叉成直角，甲距路口中心 1500 米，乙在路口中心，甲由南向北，乙由西向东，同时行走，5 分钟后，甲尚未走到路口两人离路口中心的距离相等。又走 45 分钟后，二人离路口的距离又相等。求甲、乙两人每分钟各行多少米？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0059_1.bmp}

（1990 年青岛市四方区小学四年级数学比赛题）

11.一个六位数的末位数字是 2，如果把这个“2”移到首位，而其它五位数字及它们的编写顺序都不改动，那么原数就是这个新数的 3 倍，求原来的六位数。

12.如右图，有两个正方形，大小两个正方形对应边的距离均为 1 厘米。如果两个正方形之间部分的面积是 20 平方厘米,那么小正方形的面积是多少平方厘米？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0060_1.bmp}

13.有红、黄、蓝三种颜色的皮球共 26 个，其中蓝皮球的个数是黄皮球的 9 倍，三种球各有多少个？

14，下列数据是从一次调查中得到的：310 的学生戴眼镜；13 的男生戴眼镜：14 的女生戴眼镜。学生的几分之几是男生？

（第三届新加坡小学奥林匹克比赛题）

15.要把 1 米长的优质铜管锯成长 38 毫米和长 90 毫米两种规格的小铜管。每锯一次都要损耗 1 毫米铜管。那么，只有当锯得的 38 毫米的铜管为多少段？90 毫米的铜管为多少段？这时所损耗的铜管才能最少？

（《小学生数学报》第五届数学决赛题）

16.一个小于 80 的自然数与 3 的和是 5 的倍数，与 3 的差是 6 的倍数，这个自然数是几？

六　整除问题
——概念清，规律要记牢

同学们与数学交朋友都是从整数 1、2、3、……开始的，现在大家都有了一些关于整数方面的知识，但这仅仅是整数中最简单、最基本的内容，还有许许多多奥妙的理论与问题等待着我们去发现、去创造。陈景润爷爷所研究的“哥德巴赫猜想”就是整数中的一个著名的问题，他已取得了世界上令人瞩目的领先地位。

本章概念多、理论性强，希望大家在弄清概念的基础上要记牢规律，它对于解答整数问题，一定有很大的帮助。

本章所研究的数或英文字母，仍指零和自然数（统称叫整数）。

例1 四位数$\overline{3A71}$能被9整除，求A。

（美国长岛小学数学比赛题）

解：根据“如果一个数各位上的数的和能被 9 整除，那么这个数能被 9 整除”的规律，要使四位数$\overline{3A71}$能被9整除，3＋A＋7＋1＝11＋A必须能被 9 整除，这里，A 是 0～9 中的整数，因此，　A＋11＝18，得 A＝7。

答：A 是 7。

说明：为了学好《整除问题》，必须牢记能被一些常用数（如 2、5、4、25、8、125、3、9、7　11、13……）整除的数的特征以及整数的基本性质。现在分别叙述如下：

（一）能被一个数整除的数的特征

(1)能被 2 或 5 整除的数的特征是 这个数的末一位数能被 2 或 5 整除；

（2）能被 4 或 25 整除的数的特征是：这个数的末两位数能被 4 或 25 整除；

（3）能被 8 或 125 整除的数的特征是：这个数的末三位数能被 8 或 125 整除；

（4）能被 9 或 3 整除的数的特征是：这个数的各个数位上的数之和能被 9 或 3 整除；

（5）能被 11 整除的数的特征是：这个数奇数位上数的和与偶数位上数的和之差（或反过来）能被 11 整除；

（6）能被 7、11、13 整除的数的特征是：这个数的末三位数与末三位以前的数之差（或反过来）能被 7、　11、　13 整除。

（二）整数的基本性质

（1）如果两个整数都能被同一个自然数整除，那么这两个数的和或差也能被这个自然数整除。

如：　18 与 12 都能被 3 整除,所以 18 与 12 的和 30 也能被 3 整除，　18 与 12 的差 6 也能被 3 整除。

（2）如果一个整数能被一个自然数整除，那么这个数的整数倍也能被这个自然数整除。

如：　14 能被 7 整除，所以 14×5 的积 70 也能被 7 整除。

（3）如果一个整数能被两个互质数中的每一个数整除，那么这个整数能被这两个互质数的积整除。

如：60 能被 3 整除，也能被 5 整除，3 与 5 是互质数，所以 60 能被 3×5 的积 15 整除。

例 2　如果六位数□8919□能被 33 整除，那么这个六位数是多少？

解：设这个六位数为 W，并且它的十万位上的数为 x，个位上的数为 y（也就是 W＝x8919y）。

因为 33＝3×11，3 与 11 是互质数，所以根据整数的基本性质（3），可得如果 W 能被 3、11 整除，那么 W 就能被 3×11＝33 整除。

要使 W 能被 3 整除，必须使 x＋8＋9＋1＋9＋y＝27＋x＋y 能被 3 整除，因为 27 能被 3 整除，如果 x＋y 也能被 3 整除，那么根据整数的基本性质（1）可得 27＋x＋y 能被 3 整除，从而 W 能被 3 整除。

要使 W 能被 11 整除，必须使（9＋9＋x）－（y＋1＋8）＝9＋（x－y）能被 11 整除。

综合以上情况，得

x＋y 能被 3 整除……………………………………（1）

9＋（x－y）能被 11 整除…………………………（2）

因为 x、y 均是 0～9 中的整数（x≠0），所以，9＋（x－y）＝11，即 x＝y＋2。

当 y＝0、1、2、3、4、5、6、7 时，

x＝2、3、4、5、6、7、8、9。

由（1），可得 y＝2，x＝4 或 y＝5，x＝7。

所以 W＝489192 或 789195。

答：这个六位数是 489192 或 789195

例 3　下面这个 41 位数

55……5□99……9（其中 5 和 9 各有 20 个）能被 7 整除，那么中间方格内的数字是多少？

（1991 年小学奥赛决赛题）

解：根据数的整除特征（6），555555，999999 这两个数都能被 7 整除，这样，18 个 5 和 18 个 9 分别组成的十八位数，也都能被 7 整除。

$$原数＝\underbrace{55\cdots5}\ \underbrace{00\cdots0}_{23个0}＋55□99\ \underbrace{00\cdots0}_{18个0}＋\underbrace{99\cdots9}_{18个9}$$

在这个和式中，第一部分与第三部分加数都能被 7 整除，所以只要第二部分加数中 55□99 能被 7 整除，也就是只要□99－55＝□44 能被 7 整除，原数就能被 7 整除，经试除得□内填 6。

答：中间方格内的数字是 6。

说明：由 6 个相同的数字所组成的六位数总能被 7、11、13 整除。

例 4　一个三位数的百位、十位、个位数字分别是 5、a、b，将它接连重复写 99 次成为：

$$\overline{\underbrace{5ab5ab\cdots\cdots5ab}_{99个5ab}}$$

< /PGN0064.TXT / PGN > 如果所成之数能被 91 整除，问：这个三位数 $\overline{5ab}$ 是几？

解：因为 $\overline{5ab5ab}＝\overline{5ab}×1000＋\overline{5ab}$

$＝\overline{5ab}×1001$

$＝\overline{5ab}×11×91$，

所以，由2个$\overline{5ab}$所得的数$\overline{5ab5ab}$能被91整除，进而可得由98个$\overline{5ab}$所得的数

$$\underbrace{\overline{5ab5ab\cdots\cdots5ab}}_{98个\overline{5ab}}$$

也能被 91 整除，因此：

$$原数=\underbrace{\overline{5ab5ab\cdots\cdots5ab}}_{98个5ab}\times1000+\overline{5ab}。$$

又由于原数能被91整除，根据整数的基本性质（1）可得$\overline{5ab}$能被91整除。

因为91×6＝546，所以$\overline{5ab}$＝546。

答：这个三位数$\overline{5ab}$是546。

例 5　三个质数的和为 122，求这三个质数的乘积的最大值。

解：因为三个质数的和为 122 是偶数，所以这三个质数当中必定有一个数是偶数，另外两个质数都是奇数。在质数中，2 是唯一的偶数，故三个质数中有一个质数是 2。

另外两个质数的和为定值（120），为使这两个质数的乘积尽可能地大，就要使该两个质数的差值尽可能地小，因为 1202÷2＝60，所以得到 59 和 61 两个质数，是和为 120 且差为最小的两个质数，它们的积也就最大。

综合以上情况，和为 122 的三个质数中，以 2、59、61 这三个质数的乘积最大，最大乘积为 2×59×61＝7198。

答：三个质数的乘积的最大值是 7198。

说明：注意“如果两个整数的和一定，那么当这两个数的差值尽可能小时，其乘积最大”。

例如，和为 11 的两个整数有如下五种情况：1＋10、2＋9、3＋8、4＋7、5＋6，相对应的乘积是 10、18、24、28、30，通过比较，可得“和为 11，其积最大的两个整数是 5 和 6”。

例 6 如果 325×472＋765×895×（　　）的积的最后五个数字都是零，那么括号内填入的自然数最小可以是多少？

（上海市 1989 年小学六年级数学比赛题）

解：

要使五个数的连乘积的最后五个数字都是 0，这个连乘积一定是 100000 的倍数，把 100000 分解质因数：

$$100000=2^5\times5^5。$$

说明要使连乘积的末尾有五个零，因数中至少应该有五个 2 和五个 5。

因为　$325=5^2\times13$，$765=3\times5\times51$，

$472=2^3\times59$，$895=5\times179$

四个数的乘积里一共包含了 4 个 5 和 3 个 2，必须要再乘以两个 2 和一个 5，

所以括号里应填 22×5＝20。

答：在括号内最小可以是 20。

例 7　一个自然数能分解成 3 个质因数的积，如果这 3 个质因数的平方和是 1710，求这个自然数。

解：设所求的自然数是 N，把 N 分解质因数为

$N=a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$。

由题意得$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1710$，因为奇数（或偶数）的平方仍是奇数（或偶数），而 1710 是偶数，所以这三个质数中一定有一个是偶数，在质数中，2 是唯一的偶数。假设 $a_3=2$，则 a_1、a_2 是奇数又是质数，且 $a_1^2+a_2^2=1710-2^2=1706$，又因为任何一个奇数的平方的个位数只能是1、5，9、1 加上 5 等于 1706 的个位数 6，而个位数是 5 的质数只有一个是 5，所以 a_1、a_2 中一定有一个数是 5，假设 $a_2=5$，则

$$a_1^2=1706-5^2=1681。$$

402＜1681＜502。找出 40～50 中个位数是 1 的质数，得 $a_1=41$。所以 N=2×5×41=410。

答：这个自然数是 410。

例 8　360 这个数的约数有多少个？这些约数的和是多少？

（第三届华罗庚金杯赛决赛题）

解：把 360 分解质因数是：360=23×32×5，所以 360 的任何一个约数都是从三个质数 2、二个质数 3、一个质数 5 中取若干个出来相乘得到的。

2^3 的约数是 1、2、4、8（或 1、21、22、23）；

3^2 的约数是 1、3、9（或 1、31、32）；

5 的约数是 1、5（或 1、51）。

如果我们把下面的式子

（l+2+4+8）×（1+3+9）×（1+5）

展开成一个和式，和式中的每一个加数都是在每个括号里各取一个数相乘的积。由前面的分析可得，360 的任一个约数都恰好是这个展开式中的一个加数。由于第一个括号里有 4 个数，第二个括号里有 3 个数，第三个括号里有 2 个数，所以这个展开式中的加数个数是 4×3×2=24，这就是 360 的约数的总个数，这些约数是：

1×1×1=1，2×1×1=2，4×1×1=4，8×1×1=8，

1×1×5=5，2×1×5=10，4×1×5＝20，8×1×5=40，

1×3×1=3，2×3×1＝6，4×3×1＝12，8×3×1=24，

1×3×5=15，2×3×5=30，4×3×5=60，8×3×5=120，

1×9×1＝9，　2×9×1=18，4×9×1=36，8×9×1=72，

1×9×调 5＝45，2×9×5=90，4×9×5=180，8×9×5=360。

（你能知道上面每个等式中，三个数相乘的由来吗？）

另一方面，360 的所有约数的和就等于这个展开式的和，也就是 $(1+2^1+2^2+2^3)\times(1+3^1+3^2)\times(1+5^1)=1170$。

答：　360 的约数有 24 个，这些约数的和是 1170。

说明：本题中的二个问题的解法具有一般性，并由此可以得出下面二个结论。

若　自然数 N 可以分解质因数为：

$$N=a^m \cdot b^5 \cdot c^t$$

（其中 a、b、C 为不同的质数，m、s、t 为自然数），

则（1）自然数 N 的约数的总个数是（m+1）·（s+1）·（t+1）；

（2）自然数 N 的所有约数的总和是

$(1+a+a^2+\cdots+a^m)\cdot(1+b+b^2+\cdots b^s)\cdot(1+c+c^2\cdots+c^3)$。

以上两个结论可以推广到一般的情况。

例 9　A、B 两数都只含有质因数 3 和 5，它们的最大公约数是 75，已知 A 有 12 个约数，B 有 10 个约数，那么 A、B 两数的最小公倍数是多少？

解：因为 A、B 两数都只含有质因数 3 和 5，所以设 $A=3^m\cdot 5^n$，$B=3^s\cdot 5^t$。

因为 A、B 两数的最大公约数是 $75=3\times 5^2$，所以，$n\geq 2$，$t\geq 2$。

又因为 A 有 12 个约数，根据例 8 后的说明可得（m+1）

·（n-1）=12=（1＋1）·（5+1）=（2+1）·(3+1）=（3+1）

·（2＋1）。所以 A 有三种可能：

$$3\times 5^5 \text{ 或 } 3^2\times 5^3 \text{ 或 } 3^3\times 5^2\text{。}$$

同理，因为乙有 10 个约数，可得

$$(s+1)\cdot(t+1)=10=(1+1)\cdot(4+1)\text{，}$$

所以 $B=3\times 5^4=1875$。

由于 A、B 的最大公约数是 3×5^2，所以 A 只能是 $3^3\times 5^2=673$。这样可得 A、B 两数的最小公倍数是 $3^3\times 5^4=16875$。

答：A、B 两数的最小公倍数是 16875。

例 10　有 8 个不同约数的自然数中，最小的一个是多少？

解：设有 8 个不同约数的自然数为 N，根据例 8 后的说明来分析 N 的取值可能性。

因为 8=7+1=（1+1）·(3+1）=(3+1）·(1+1）=(1＋l）·(1＋1）·(1＋l），所以 N 只能为下面四种形式：

（1）$N=a^7$　　　　（3）$N=a^3\times b$

（2）$N=a\times b^3$　　　　（4）$N=a\times b\times C$

（a、b、c 为不同的质数）

要使 N 最小，可以用 a=2，b=3，C=5 去代入上面四个等式，分别得到 N 为 128、54、24、30。所以有 8 个不同约数的自然数中最小的一个是 24。

答：最小的一个是 24。

例11　$\underbrace{666\cdots66}_{1990个6}\div 7$的余数是多少？

（1990 年宜兴市第五届小学生数学比赛题）

解：我们可以先试除一下，666666÷7=95238，如果把连续六个 6 作为一组，$1990\div 6=331$（组）……4，就是 $\underbrace{666\cdots 6}_{1990个6}$ 可以分成331组还多4个 6，即：

$$\underbrace{666\cdots66}_{1990个6}=\underbrace{666666}_{6个6一组}\ \underbrace{666666\cdots666666}_{一共331个组}\times 10000+6666\text{。}$$

1990 个 6　6 个 6 一组

显然在这个和式中，第一部分加数能被7整除，因此$\underbrace{666\cdots66}_{1990个6}\div 7$的余数等于 6666÷7 的余数。因为 6666÷7=952……2，所以，所求的余数也是 2。

答：余数是 2。

例 12　把 4 到 50 的每个整数都除以 4，余数是 2 的数共有多少个？

（日本小学数学比赛题）

解：先试除一下：

4 除以 4，余数为 0；

5 除以 4，余数为 1；

6 除以 4，余数为 2；

7 除以 4，余数为 3。

8、9、10、11 除以 4，余数分别为 0、1、2、3。由此可得，从 4～50 的每个整数都除以 4，余数为

0，1，2，3，0，1，2，3，……

每四个余数“0，1，2，3”作为一个循环节。因为 4～50 中共有 50-4＋1=47 个整数，47÷4=11……3，说明这 47 个整数都除以 4 后，一共有 11 个循环节，还有 3 个余数（0、1、2）。

所以，所求的余数共有 1×11+1=12 个。

答：余数是 2 的数共有 12 个。

例 13　下列数中，除了第一个数和第二个数以外，每个数都等于它前面两个数的和：

1、1、2、3、5、8、13、21、34、55、89、144、……。

问这列数中第 1993 个数被 6 除余几？

解：一方面，虽然我们根据已知的这列数中的写数规律能求出第 1993 个数是几，但毕竟太麻烦了。另一方面，如果我们用 6 去除已知的这列数中的每个数得到的余数分别是：

1、1、2、3、5、2、1、3、4、1、5、0……

从这列数里也看不出它有什么规律。

我们考虑到 6=2×3，把被 6 除转化为被 2 除和被 3 除两步来考虑。

（1）将已知的每个数都除以 2，所得的余数是：

1、1、0、1、1、0、1、1、0、1、1、0、……

显然，每 3 个余数作为一个循环节。因为 1993÷3＝664……1，

所以，已知的这列数中的第 1993 个数除以 2 的余数是 1。同理：

（2）将已知的每个数都除以 3，所得的余数是：

1、1、2、0、2、2、1、0、1、1、2、0、2、2、1、0……

显然，每 8 个余数作为一个循环节。因为

1993÷8＝249……1，

所以，已知的这列数中的第 1993 个数除以 3 的余数也是 1。

设　已知的数中第 1993 个数是 a，则由（1）、（2）

得：　$a=2q_1+1$①（q_1是 a 除以 2 的商）

$a=3q_2+1$②（q_2是 a 除以 3 的商）

所以 $3q_2=2q_1$，由于 $2q_1$是偶数，所以 $3q_2$也是偶数，因而得 q_2，必为偶数。

令　$a_2=2k$，代入②，得

$a=3\cdot(2k)+1=6k+1$，

由此可得 a 破 6 除，余数是 1。

答：这列数中第 1993 个数被 6 除余 1。

例 14　（中国古代问题）

今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？

这一问题可译为：

一个数除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余 2，求适合这些条件的最小数。

解法 1：用枚举法。

（1）除以 3 余 2 的数有：

5、8、11、14、17……；

（从第二个数起，每一个数都比它的前一个数多 3）

（2）除以 5 余 3 的数有：

8、13、18、23、28、……。

（从第二个数起，每一个数都比它的前一个数多 5）

显然 8 被 3 除余 2，且被 5 除余 3。因为 3 与 5 的最小公倍数是 15，所以 15＋8、15×2＋8……15×n＋8，都同时满足被 3 除余 2，被 5 除余 3 这两个条件，只须在这列数中找到被 7 除余 2 的最小数。为此只要用 n=1、2、3、4、……依次去代入 15×n＋8。当 n=1 时，15×1＋8=23，23÷7=3……2 所以符合题意的数是 23。

解法 2：

（1）从 5 和 7 的公倍数 35、 70、 105…中找出除以 3 余 2 的最小数是 35。

（2）从 3 和 7 的公倍数 21、 42、63、…中找出除以 5 余 3 的最小数是 63。

（3）从 3 和 5 的公倍数 15、30、45、…中找出除以 7 余 2 的最小数是 30。

所以 35＋63＋30=128 能符合“被 3 除余 2、被 5 除余 3、被 7 除余 2”。

又因为 3、5、7 的最小公倍数是 105，由此得符合题意的数是 128-105×1=23。

答：适合这些条件的最小数是 23。

说明：这个问题是驰名中外的中国古代问题之一。解答这类问题要用到古代数学家孙子所发明的著名定理——“孙子定理”，它的解法很早就流传到国外，被称为“中国剩余定理”。

例 15 一个数减去 1 能被 2 整除，减去 2 能被 5 整除，减去 3 能被 7 整除，加上 4 能被 9 整除，这个数最小是多少？

（1990 年江西省小学生“八一杯”数学比赛题）

解：

（1）“减去 1 能被 2 整除”的数，可知这个数是奇数。

（2）“减去 2 能被 5 整除”的数，可知它的个位数是 2 或 7。

（3）“减去 3 能被 7 整除”的数，可知这个数是 10、 17、24、……

同时符合（1）、（2）、（3）的数是 17。

因为 2、5、7 的最小公倍数是 70，所以同时符合（1）、（2）、（3）的数的一般式是 70×n＋17。

又因为“一个数加上 4 能被 9 整除”相当于“一个数被 9 除不足 4”，也就是“一个数被 9 除余 9-4=5”。所以用 n=1、2、3、4、5、……代入 70×n＋17，当 n=6 时，70×6+17=437 被 9 除余 5，由此得符合题意的最小数是 437。

答：这个数最小是 437。

例 16 幼儿园拿出一块长方体木料，长 72 厘米，宽 60 厘米，高 36 厘

米，请王师傅把它锯成同样大小的正方体木块，木块的体积要最大，木料又不能剩余，算一算，可以锯成几块？

（厦门市小学生 1986 年“从小爱数学”预赛题）

解：由题意可得王师傅要把原长方体木料锯成同样大小的正方体木块（体积要最大），木料又不能剩余，那么锯成的正方体的棱长必须是长方体木料的长、宽、高的最大公约数。

$$\begin{array}{r|l} 2 & 72、60、36 \\ \hline 2 & 36、30、18 \\ \hline 3 & 18、15、9 \\ \hline & 6、5、3 \end{array}$$

72、60、36 的最大公约数是 2×2×3＝12。所以，能锯成最大正方体的木块数是 6×5×3＝90（块）。

或（72×60×36）÷（12×12×12）90（块）。

答：可以锯成 90 块。

练习六

1.五位数$\overline{4A97A}$能被3整除，它的最末两位数字组成的7A又能被6整除，求这个五位数？

2.某班全班有 50 人，上体育课时，男生横着正好站成两排，前排同学报数，先 1、2、3、1、2、3……报，再 1、2、3、4、1、2、3、4……报，最后 1、2、3、4、5、6、1、2、3、4、5、6、……报，三次报数，末尾的同学都报 2，这个班有男生多少人？

（1990 年青岛市四方区小学数学比赛题）

3.被 2、3、5 除都余 1，被 7 除能整除的最小数，各位数之和是多少？

（1990 年长春市小学数学比赛题）

4.某个七位数 1993□□□能够同时被 2、3、4、5、6、7、8、9 整除，那么它的最后三位数是多少？

（1993 年小学奥赛数学初赛（B）卷题）

5.222……2 除以 13 所得的余数是多少？

2000 个 2

（第五届《小学生数学报》初赛题）

6.三个质数的和是 140，求这三个质数的乘积的最大值。

7.P 为质数，P^3+5，仍是质数，求 P^6＋7 的值。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0076_1.bmp}

8.右图有一个长方体，它的正面和上面的面积之和是 209，如果它的长、宽，高都是质数，那么这个长方体的体积是多少？

（1991 年小数奥赛决赛试题）

9.把 20、26、33、35、39、42、44、55、91 分成三组，使每组数相乘的积相等。

10.5397 除以一个质数，所得的余数是 15，这个质数是多少？

（1990 年哈尔滨市第九届小学生数学比赛题）

11.棱长 1 米的正方体 2100 个，堆成了一个实心的长方体。它的高 10 米，长、宽都大于高。问长方体的长与宽的和是多少？

12.600 的约数有多少个？这些约数的和是多少？

13.求具有 15 个约数的最小自然数，并求这个自然数的 15 个约数之和。

14.某自然数是 3 和 4 的倍数，包括 1 和本身在内共有 10 个约数，那么这自然数是多少？

（上海市 1990 年小学六年级数学比赛题）

15.已知：$a = \underbrace{1991\,1991\cdots\cdots1991}_{1991个1991}$

问：a 除以 13 所得余数是几？

（第三届“华罗庚金杯”赛决赛题）

16.有一个整数，用它去除 63、91、129 所得到的三个余数之和为 25，这个整数是多少？

17.小张在计算有余数的除法时，把被除数 113 错写成 131，结果商比原来多 3，但余数恰巧相同。那么该题的余数是多少？

（上海市 1989 年小学五年级数学比赛题）

18.70 个数排成一行，除两头外，每个数的 3 倍恰好等于它两旁的两个数的和，这一行最左边的几个数是：0、1、3、8、 21、……，求第 70 个数被 6 除余几？

19.一个数除以 3 余 2，除以 5 余 4，除以 7 余 6，这个数最小是多少？

（1990 年宜兴市第五届小学数学比赛题）

20.召开学生座谈会，每组 5 人，多 3 人；每组 6 人，多 4 人；每组 7 人，少 4 人，参加座谈会的学生至少有多少人？

（1990 年乌鲁木齐市小学五年级数学比赛题）

21.在长 60 米、宽 54 米的矩形花圃的各边上以最大且相等的距离种桃树，每两棵桃树间种月季花 5 棵，共种月季花多少棵？

七分数问题
——妙用单位“1”、作好线段图

分数问题是指根据分数乘除法的意义来解答的分数应用题。至于那些仅仅是有些数据是分数而数量关系和解题思路都与整数应用题相类似的应用题，这里就不研究了。

分数应用题是小学数学的重点和难点，这是因为：

（1）它是整数应用题的继续与深化。

（2）它具有其本身的特点和独特的解题规律。

因此与整数应用题比较，就显得复杂而又抽象了。

解答分数应用题时，除必须具备整数应用题的一些解题能力外，一般要通过作出“线段图”来揭示“数量”与“分率”之间的内在联系。它可以帮助我们理清思路，正确地进行分析、综合、判断和推理。同时，我们还要善于掌握对应、假设、转化、逆向、量不变等思路，多角度、多侧面地解决问题的方法，促进逻辑思维能力的发展。

例 1 新华书店运来一批儿童读物，第一天卖出 1800 本，第二天卖出的本数是第一天的 $\frac{8}{9}$，余下总数的 $\frac{2}{7}$ 第三天全部卖完，这批书一共有多少本？

解：因为第二天卖出的本数是第一天（1800本）的 $\frac{8}{9}$，所以根据“求一个数的几分之几是多少”的分数乘法法则，可以求出第二天卖出的本数。

又因为第三天卖出总数的 $\frac{2}{7}$ 后就全部卖完了这批儿童读物，说明第一、二两天卖出了总数的 $1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$，也就是说，第一、二两天卖出的本数所对应的分率是 $\frac{5}{7}$，所以根据“已知一个数的几分之几是多少，求这个数”的分数除法法则，就可以求出总本数。

$$\left(1800+1800\times\frac{8}{9}\right)\div\left(1-\frac{2}{7}\right)=4760\text{（本）}。$$

答：这批书有 4760 本。

说明：解答分数应用题，首先要正确地找出单位“1”，然后由单位“1”的已知或未知，确定计算的方法，一般来讲：

①若单位“1”已知，

则单位“1”（×）所求量的对应分率=所求量。

对应

②若单位“1”未知，

则已知量（÷）已知量的对应分率=单位“1”。

对应

例2 一堆煤第一天运走 $\frac{7}{10}$，第二天运走了余下的 $\frac{2}{3}$，还剩下2吨，这

堆煤原有多少吨？

解法 1：

0 $\frac{7}{10}$所对应的单位“1”是这批煤的总吨数；

$\frac{2}{3}$所对应的单位“1”是余下的吨数，两个单位“1”不同，不能进行加减。（如下图）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0081_1.bmp}

（1）2吨是余下的几分之几？$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$。

（2）第一天运走后还余下多少吨？$2\div\frac{1}{3}=6$（吨）。

（3）余下的是总数的几分之几？$1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$。

（4）这批煤原有多少吨？$6\div\frac{3}{10}=20$（吨）。

解法 2：

把两个不同的单位“1”统一为一个单位“1”（总吨数）。因为余下的是总数的$1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$，所以余下的$\frac{2}{3}$就是总数的$\frac{3}{10}$的$\frac{2}{3}$，也就是总数的$\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$。

列成综合算式应为：

$$2\div[1-\frac{7}{10}-(1-\frac{7}{10})\times\frac{2}{3}]=20\text{（吨）。}$$

答：这堆煤原有 20 吨。

说明：想一想，下面三个综合算式都对吗？如果对的话，它的算理是什么？

$2\div[(1-\frac{7}{10})\times(1-\frac{2}{3})]=20$（吨），

$2\div[(1-\frac{2}{3})\times(1-\frac{7}{10})]=20$（吨），

$2\div(1-\frac{7}{10})\div(1-\frac{2}{3})=20$（吨）。

（注意：只有第一个综合算式是对的）

例3 小聪有一批课外书，他把总数的$\frac{1}{7}$多2本借给甲；又把剩下的$\frac{1}{7}$多4本借给乙；再把剩下的$\frac{1}{7}$多6本借给丙，最后把剩下的书平均借给另外三个同学。借到书的所有同学都说“我们借的书同样多”。求小聪原来有书多少本？

（河北邯郸市小学生数学比赛题）

解法 1：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0082_1.bmp}

假 设 另 外 三 个 同 学 的 本 数 都 与 丙 一 样 。

(1）分给乙后余下的有多少本？（6×4）÷（$1-\frac{1}{7}$×4）＝56（本）。

（2）分给甲后余下的有多少本？（56＋4）÷（$1-\frac{1}{7}$）＝70（本）。

（3）原来有书多少本？（70＋2）÷（$1-\frac{1}{7}$）＝84（本）。

解法 2：因为 6 个人“借的书同样多”，所以每人借到的占原来总本数的$\frac{1}{6}$，由甲分到的情况（如上图），可得原来总本数是2÷（$\frac{1}{6}-\frac{1}{7}$）＝84（本）。

答，原来有书 84 本。

说明，两种解法的难易程度有天壤之别，所以灵活地根据题意与线段图来探索解题思路将是十分必要的。

例4 一块种西红柿的地，今年获得丰收，第一天收下全部的$\frac{3}{8}$时，装了 3 筐，还余 12 千克，第二天把剩下的全部收完，正好装了 6 筐，这块地一共收了多少西红柿？

（天津市小学生第一届“我爱数学”比赛题）

解法 1：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0083_1.bmp}

3筐西红柿占总千克数的$\frac{5}{8}\div 6\times 3=\frac{5}{16}$，由此得12千克的对应分率是总千克数的$\frac{3}{8}-\frac{5}{16}=\frac{1}{16}$，用除法可得总千克数

$$12\div[\frac{3}{8}-（1-\frac{3}{8}）\div 6\times 3]=192（千克）。$$

解法 2：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0084_1.bmp}

假设将线段 BD 按线段 AB 的结构重复 6÷3=2 次（如上图所示），那么线段BD的对应分率是总千克数的$\frac{3}{8}\times 2$，虚线部分（12＋12）千克的对应分率是总千克数的（$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\times 2-1$），用陈法可求出总千数（12＋12）÷（$\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\times 2-1$）＝192(克)

答：这块地一共收了 192 千克的西红柿。

例5 两段铁丝共长24米，第一段的$\frac{1}{3}$与第二段的$\frac{2}{5}$的和是8.6米，两段铁丝各长多少米？

解法1：假设第一段也取它的$\frac{2}{5}$，那么第一段的$\frac{2}{5}$与第二段的$\frac{2}{5}$的和就是两段铁丝总长(24米)的$\frac{2}{5}$,应是$24\times\frac{2}{5}=9.6$米,比实际情况多

$9.6-8.6=1$米，这个相差量是由于假设第一段的$\frac{2}{5}$比实际第一段的$\frac{1}{3}$多$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ $=\frac{1}{15}$所造成的，也就是说，1米的对应分率是第一段的$\frac{1}{15}$，用除法就可求出第一段的长度。

（$24\times\frac{2}{5}-8.6$）÷（$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$）$=15$（米）……第一段，

24-15=9（米）……第二段。

解法 2：

（$8.6-24\times\frac{1}{3}$）÷（$\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$）$=9$（米）……第二段，

24-9=15（米）……第一段。

答：第一段长 15 米，第二段长 9 米。

例 6　一筐苹果，先拿出 140 个，又拿出余下个数的 60%，这时剩下的苹果正好是原来总个数的$\frac{1}{6}$。这筐苹果原来有多少个？

（《小学生报》第一次全国数学比赛题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0085_1.bmp}

解：

如图，在余下的部分（线段 CB）中，线段 AB 既表示余下个数的 1-60%$=40\%$，又表示总个数的$\frac{1}{6}$，也就是“余下个数的40%等于总个数的$\frac{1}{6}$”，这个条件可以转化为“余下个数等于总个数的$\frac{1}{6}\div40\%=\frac{5}{12}$”，也就是线段CB所表示的分率是总个数的$\frac{5}{12}$，所以140个所对应的分率是总个数的$1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$，用除法可以求出这筐苹果的总个数.

$140\div[1-\frac{1}{6}\div(1-60\%)]=240$（个）。

答：这筐苹果一共有 240 个。

例7甲、乙两班学生去植树，甲班人数是乙班的$\frac{4}{5}$，因甲班任务重，从乙班调16人到甲班，这时，乙班人数是甲班的$\frac{3}{4}$，甲、乙两班原来各有多少人？

解：因为后来乙班调 16 人到甲班，所以两班的人数各自都发生了变化，但是两班的总人数不变，抓住这一点，可把题意中两个分率$\frac{4}{5}$与$\frac{3}{4}$（单位“1”不相同），统一到以“两班总人数”为单位“1”的分率。

由原来“甲班人数是乙班的$\frac{4}{5}$”可得，若乙班人数为单位“1”，则甲班人数是$\frac{4}{5}$，两班人数是（$1+\frac{4}{5}$），所以原来乙班人数占两班总人数的1（1$+\frac{4}{5}$）$=\frac{5}{9}$。也可以用下面的方法求出原来乙班人数占两班总人数的分率：

设甲班人数有 4 份，则乙班人数有 5 份，两班总人数是 4+5=9 份，所以原来乙班人数占两班总人数的$\frac{5}{9}$。

同理，后来乙班人数占两班总人数的$\frac{3}{3+4}=\frac{3}{7}$。乙班前后两种情况的人数差（16人），引起了相应的分率差$\frac{5}{9}-\frac{3}{7}=\frac{8}{65}$，也就是说，16人对应的分率是两班总人数的$\frac{8}{63}$，用除可以先求出两班总人数。

$16\div$（$\frac{5}{4+5}-\frac{3}{4+3}=126$（人）……两班总人数。

$126\times\frac{5}{9}=70$（人）……原来乙班人数，

$126\times\frac{4}{5}=56$（人）……原来甲班人数。

答：原来甲班有 56 人，原来乙班有 70 人。

例 8　有甲、乙两个车间，如果从甲车间调 18 人给乙车间，那么甲车间比乙车间少 3 人；如果从两个车间各调出 18 人，那么乙车间剩下人数是甲车间剩下人数的$\frac{5}{8}$。甲、乙两个车间原来各有多少人？

解：由“甲车间调 18 人给乙车间，甲车间比乙车间少 3 人”，可得原来甲车间比乙车间多 18×2-3=33 人，这 33 人就是甲、乙两个车间的人数差。

由“两个车间各调出18人，乙车间剩下人数是甲车间剩下人数的$\frac{5}{8}$”，可得两个车间前后人数都发生了变化，但是由于调出的人数相等，所以两个车间人数之差（33 人）却始终未变。

设甲车间剩下人数为单位“1”，则乙车间剩下人数是$\frac{5}{8}$，相差$1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$，也就是说：甲车间剩下人数的$\frac{3}{8}$所对应的量是33人，用除法可以先求出

甲车间剩下的人数。

（$18\times2-3$）÷（$1-\frac{5}{8}$）$=88$（人）……甲车间剩下人数，

88+18=106（人）……甲车间原来人数，

$88\times\frac{5}{8}+18=73$（人）……乙车间原来人数。

答：甲车间原来有 106 人，乙车间原来有 73 人。

例 9　某工程完由甲单独做 63 天，再由乙单独做 28 天即可完成。如果由甲、乙两人合作，需 48 天完成，现在甲先单独做 42 天，然后再由乙来单独完成，还需要做多少天？

（1991 年小学数学奥赛初赛试题（C））

解法 1：由“甲、乙两人合作，要 48 天完成”与“甲先单独做 63 天，再给乙独做 28 天即可完成”，可得甲做 63 天，比 48 天多 15 天，乙就可以

少做 48-28=20 天，也就是说，甲做 15 天的工作量，让乙来做就要 20 天才完成。现在，甲先独做 42 天，比 48 天少做 6 天，这 6 大的工作量让乙来做就要$\frac{20}{15}\times 6=8$天才完成，再加上乙原来要做的48天，就可算出乙一共需要做的天数。

48+（48-28）÷（63-48）×（48-42）=56（天）。

解法 2：如果甲独做的 63 天分成 28 天与 35 天两部分。那么原题意中"先由甲单独做 63 天，再由乙单独做 28 天即可完成"，可以转化为"先由甲、乙两人合作 28 天，再由甲独做 35 天即可完成这项工程"，由此可求出甲的工作效率。

（1）甲、乙两人合作，每天完成全工程的几分之几？

$$1\div 48=\frac{1}{48}\text{。}$$

（2）甲、乙两人合作 28 天可完成全工程的几分之几？

$$\frac{1}{48}\times 28=\frac{7}{12}\text{。}$$

（3）甲每天完成全工程的几分之几？

$$\left(1-\frac{7}{12}\right)\div(63-28)=\frac{1}{84}\text{。}$$

（4）乙每天完成全工程的几分之几？

$$\frac{1}{48}-\frac{1}{84}=\frac{1}{112}\text{。}$$

（5）乙还需要做几天？

$$\left(1-\frac{1}{84}\times 42\right)\div\frac{1}{112}=56\text{（天）。}$$

答：乙还需要 56 天才能完成任务。

说明：本题一般叫工程问题，它是研究工作总量、工作效率和工作时间的相互关系的问题，是分数复合应用题中的特殊问题。解题的关键是把工作总量看作单位"1"，工作效率用工作总量的若干分之一表示，即单位时间内完成全工程的几分之一。

例 10　一件工程，甲独做 10 天完成，乙独做 15 天完成。若甲先做若干天后，由乙接着单独做余下的工程，直至完成全部工程，这样前后一共用了 14 天。甲先做了多少天？

解法1：假设14天全是由乙去工作的，那么还余下工程的$1-\frac{1}{15}\times 14=\frac{1}{15}$没有完成（事实上 14 天中，甲也做了若干天），如果乙做一天的工作量换成甲做一天的工作量，这样，可以多完成$\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30}$，要增加$\frac{1}{15}$的工作量，需要甲工作$\frac{1}{15}\div\frac{1}{30}=2$天（这就是甲先做的天数）。

$$\left(1-\frac{1}{15}\times 14\right)\div\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{15}\right)=2\text{（天）。}$$

解法 2：

（$\frac{1}{10}$×$14-1$）÷（$\frac{1}{10}-\frac{1}{15}$）$-12$天……乙做的天数，

14-12=2（天）……甲先做的天数。

答：甲先做了 2 天。

说明：本题的两种解法，运用了“ 鸡兔问题 ”的解题思路。

例 11 （托尔斯泰喜欢的算题）一组割草的人要把两片草地的草割掉。已知大的一片草地比小的一片大一倍，全体组员先用半天时间割大的一片草地，到下午他们对半分开，半组人员仍留在大草地上割，到傍晚时正好把这大草地上的草割完。另半组人员到小草地上去割，到傍晚时还剩下一小块，这小块地可以由一个人用一天的时间割完。问这组割草的人共有多少个？（假设每人工效相同，上、下午工作时间相等）

解本题的关键是先求出全组组员一天的工作总量以及一个人一天的工作量（工作效率），然后用全组一天的工作总量除以一个人一天的工作量就可得全组的人数。

解法 1：用面积法。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0091_1.bmp}

如上图，设大草地的面积为1个单位，则小草地的面积为$\frac{1}{2}$个单位。因为在割大草地时，“ 全组组员工作半天加上一半组员工作半天才收割完 ”，也就是3个一半组员工作半天才收割完，所以，一半组员工作半天收割$\frac{1}{3}$个单位。

这样，大草地的面积可看作3个$\frac{1}{3}$面积单位。小草地已收割的面积可看作$\frac{1}{3}$个单位，全组组员工作一天的面积可看作$\frac{1}{3}\times 4=\frac{4}{3}$个单位（工作总量）。小草地未收割的面积可看作（$1+\frac{1}{2}$）$-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$个单位，也就是一人一天的工作量为$\frac{1}{6}$个单位（工作效率）。所以，全组一共有$\frac{4}{3}\div\frac{1}{6}=8$（人）。

解法 2：用推理法。

（1）在收割小草地时，要用一半组员工作半天加上一个人工作一天才割完。

因为大草地面积是小草地的 2 倍，所以按收割小草地的情况可推断出如下一个结论：

（2）在收割大草地时，要用全组组员工作半天加上二个人工作一天才割完。

又根据题意的条件可得：

（3）在收割大草地时，要用全组组员工作半天加上一半组员工作半天才割完。

比较（2）、（3）两个结论可得：

2 个人工作一天的工作量等于一半组员工作半天的工作量。

因为“ 2 个人工作一天的工作量 ”可转化为“ 4 个人工作半天的工作量 ”。

所以 4 个人工作半天的工作量等于一半组员工作半天的工作量。

由此可得 4 个人相当于一半组员，全组一共有 4×2=8（人）。

答：这组割草的人共有 8 个人。

练习七

1.甲、乙两人共存款108元，如果甲取出自己存款的$\frac{2}{5}$，乙取出12元后，两人所存的钱数相等。问甲、乙两人原来各存款多少元？

（徐州市 1985 年小学生数学比赛题）

2.小红看一本科技书，看了 3 天，剩下 66 页，如果用这样的速度看 4 天，就剩下全书的$\frac{2}{5}$，这本书有多少页？

（1986 年蚌埠市中市区“从小爱数学”比赛题）

3.一个拖拉机队用拖拉机耕一块地，第一天耕的比这块地的$\frac{1}{3}$多30公亩。第二天耕的比剩下的$\frac{1}{2}$少15公亩。这时还剩585公亩，这块地共有多少公亩？

（1983 年无锡市崇安区比赛题）

4.参加“六一”节联欢活动的少先队员中，女队员占全体少先队员的$\frac{4}{7}$，男队员比女队员的$\frac{2}{3}$多40人，问女队员有多少人？

（无锡市一中小学数学比赛题）

5·甲、乙两班共84人，甲班人数的$\frac{5}{8}$与乙班人数的$\frac{3}{4}$共58人。问两班各多少人？

6.去年光明小学的学生人数是红旗小学的$\frac{3}{5}$，今年光明小学转入60名学生，红旗小学转出20名学生，现在光明小学的学生人数是红旗小学的$\frac{3}{4}$，那么去年光明小学有学生多少人？红旗小学有学生多少人？

（福建省首届“小火炬杯”小学数学比赛题）

7.甲、乙二人到书店去买书，共带去 54 元，甲用了自己钱的 75%，乙用了自己钱的$\frac{4}{5}$，两人剩下的钱数正好相等，求

甲、乙原来各带去多少元？

8.从甲城到乙城去，原计划用$5\frac{1}{2}$小时，由于途中有3.6千米道路不平，走这段不平路时，速度相当原来的$\frac{3}{4}$，因此晚到$\frac{1}{5}$小时，求甲、乙两城的距离是多少千米？

9.少年之家有故事书、科技书、连环画共1550本，如果故事书借出$\frac{2}{5}$，科技书借出 30 本，又买进连环画 20 本，那么三种书的本数相同，问三种书原来各有多少本？

（辽宁省首届小学生数学比赛题）

10.A、B、C、D 四人有钱若干元，已知 A 的钱数占其他三个人的钱数的$\frac{1}{3}$，B的钱数占其他三个人的钱数的$\frac{1}{4}$，C的钱数占其他三个人的钱数的$\frac{1}{5}$，D有92元，问A、B、C三人各有多少元？

（蚌埠市 1990 年小学数学比赛题）

11.一筐香蕉，筐的重量是香蕉重量的$\frac{1}{12}$，卖掉19千克后，剩下香蕉重量是筐重的$2\frac{1}{2}$倍，原来筐内有香蕉多少千克？

12.一个车间有 2 个小组，第一小组和第二小组人数的比是 5∶3，如果第一小组有 14 人到第二小组时，第一小组与第二小组人数的比是 1∶2，原来两个小组各有多少人？

（《小学生报》第二次全国小学数学比赛题）

13.小明和小华一起做同样的口算题。小明做了作业的$\frac{1}{3}$时问小华：“你做到哪里？”小华说“我还有 45 题。”小明又做了余下的一半时又问小华，小华说“正好做了一半。”如果他俩作业的速度始终没变，中途也没有休息。问：

（1）小明和小华谁口算的速度快？

（2）小明用 6 分钟做完这次作业时，小华用多少时间？

（3）这次口算作业有多少题？

（“从小爱数学”邀请赛应征赛题选）

14.客车和货车同时从甲、乙两地相向开出，客车行完全程需 10 小时，货车行完全程需 15 小时，两车在中途相遇后，客车又行了 96 千米，这时客车行完全程的 80%，甲、乙两地相距多少千米？

（北京市崇文区六年级比赛题）

15.蓄水池有甲、丙两条进水管和乙、丁两条排水管。要灌满一池水，单开甲管需要 3 小时，单开丙管需要 5 小时。要排光一池水，单开乙管需要 4 小时，单开丁管需要6小时。现在池内有$\frac{1}{6}$池水，如果按甲、乙、丙、丁的顺序，循环开各水管，每次各管开 1 小时，问多少时间后水开始溢出水池？

（第一届“华杯赛”决赛试题）

八行程问题
——画画、算算是你的好帮手

讨论有关的物体运动的速度、时间、距离这三者关系的问题叫做行程问题。行程问题在各类竞赛中经常碰到，它内容丰富、变化多端，是小学数学中的重点和难点。因此可采用作图的手段，画画、算算，展示它们的内在关系，帮助思考。只要分析正确，思路对头，处理妥当，问题不难解决。

行程问题的基本数量关系式是：

速度＝距离÷时间

时间＝距离÷速度

距离＝速度×时间

例 1　甲、乙两地相距 56 千米，汽车行完全程需 1.4 小时，步行要 14 小时，一个人由甲地出发，步行 3.5 小时后改乘汽车，他到达乙地总共用了几小时？

（《小学生数学报》第二次全国小学数学邀请赛五年级试题）

解法 1：（1）求步行的距离是多少？

（56÷14）　×3.5＝14（千米）。

（2）求乘汽车用的时间是多少？

（56－14）÷（56÷1.4）＝1.05（小时）。

（3）求到达乙地总共用的时间是多少？

1.05＋3.5＝4.55（小时）。

答：他到达乙地总共用了 4.55 小时。

解法 2：设剩余路程改乘汽车要用 x 小时。

步行路程：（56÷14）×3.5 千米；乘车路程：（56÷1.4）x 千米。

得方程：（56÷14）×3.5＋（56÷1.4）＝56。

14＋4x＝56，

x＝1.05。

到达乙地总共用：

3.5＋1.05＝4.55 小时。

答：略。

例 2　甲、乙两辆汽车同时从 A、B 两地相向开出，甲车每小时行 56 千米，乙车每小时行 48 千米，两车在离中点 32 千米处相遇。求 AB 两地间的距离是多少千米？

（1983 年《小学生报》第一次数学邀请赛四年级试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0097_1.bmp}

解法 1：　（1）相遇时甲车比乙车多行了多少千米？

32×2＝64（千米）。

（2）甲车比乙车每小时多行多少千米？

56－48＝8（千米）。

（3）甲、乙两车同时从出发到相遇要多少小时？

64÷8＝8（小时）。

（4）A、B 两地间的距离是多少千米？

（56＋48）×8＝832（千米）。

答：A、B 两地间距离是 832 千米。解法 2：设 A、B 间距离是 x 千米，则甲行驶路程是（$\frac{1}{2}x+32$）千米，乙行驶路程是（$\frac{1}{2}x-32$）千米，根据甲、乙所行时间相等，得方程：

$$\frac{\frac{1}{2}x+32}{56}=\frac{\frac{1}{2}x-32}{48}$$

$$x=832.$$

答：略。

例 3　东西两城相距 75 千米，小东从东向西而走，每小时 6.5 千米；小希从西向东而走，每小时走 6 千米；小辉骑自行车从东向西而行，每小时走 15 千米。三人同时动身，途中小辉遇见了小希即折回向东行；遇见了小东又折回向西而行；再遇见小希又折回向东行，这样往返一直到三人在途中相遇为止，小辉共行了多少千米？

（北京市第三届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

解：本题关键是“三人同时动身，小辉往返途中，没有间断，直到他们三人相遇”。所以，小辉所行的时间与小希和小东相遇的时间相同，小辉行的路程等于他骑自行车的速度乘以小东和小希相遇的时间。

15×[75÷（6.5＋6）]

＝15×6

＝90（千米）。

答：小辉共走了 90 千米。

例 4　甲、乙两辆汽车同时从东站开往西站。甲车每小时比乙车多行 12 千米。甲车行驶四个半小时到达西站后，没有停留，立即从原路返回，在距离西站 31.5 千米的地方和乙车相遇，甲车每小时行多少千米？

（1987 年《小学生数学报》小学五年级邀请赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0099_1.bmp}

解：（1）甲车比乙车多行了多少千米？

31.5×2＝63（千米）。

（2）两车同时从甲站出发到相遇，甲车和乙车各行了多少小时？

63÷12＝5.25（小时）。

（3）甲车从西站开始返回到两车相遇，行了多少小时？

5.25－4.5＝0.75（小时）。

（4）甲车每小时行多少千米？

31.5÷0.75＝42（千米）。

答：甲车每小时行 42（千米）。

例 5　B 处的兔子和 A 处的狗相距 56 米，兔子从 B 处逃跑，狗同时从 A 处跳出追兔子，狗一跳前进 2 米，狗跳 3 次时间与兔子跳 4 次的时间相同，兔子跳出 112 米到达 C 处，狗追上兔子，问兔子一跳前进多少米？

（1990 年上海市黄浦区小学四年级数学选拔赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0100_1.bmp}

根据追及问题，当兔跳 112 米时，狗跳 56＋112＝168（米）。因此，狗跳的次数是：　168÷2＝84（次）。

兔子跳的次数是：　84÷3×4＝112（次）。

兔跳一次前进 112÷112＝1（米）。

解法 2：设兔子一跳前进 X 米，由题意可知狗跳（2×3）米与兔子跳（X×4）米的时间相同，根据题意，得方程：

（56＋112）6×4x＝112，解得 X＝1。

例 6 一列慢车在上午 9 点钟以每小时 40 千米的速度由甲城开往乙城,另有一列快车在上午 9 点 30 分以每小时 56 千米的速度也由甲城开往乙城，铁路部门规定，向相同方向前进的两列火车之间相距不能少于 8 千米，问：这列慢车最迟应该在什么时候停车让快车超过？

（1990 年《小学生数学报》第四届小学生数学邀请赛预赛试题）

解：（1）慢车开出几千米后快车才开出？

$$40\times\left(9\frac{1}{2}-9\right)=20\text{（千米）}$$

（2）快车追及慢车的实际距离不能超过多少千米？

208＝12（千米）。

（3）快车所经过时间是多少？

$$12\div(56-40)=\frac{3}{4}\text{(小时)}=45\text{（分）。}$$

所以，9 小时 30 分＋45 分＝10 小时 15 分。

答：这列慢车最迟在 10 点 15 分停车让快车通过。

例 7　一列火车长 200 米，它以每秒 10 米的速度穿过 200 米长的隧道，从车头进入隧道到车尾离开隧道共需要多少时间？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0101_1.bmp}

解：火车过隧道，就是从车头进隧道到车尾离开隧道止。如图所示，火车通过隧道时所行的总距离为：隧道长＋车长。

（200＋200）÷10＝40（秒）。

答：从车头进入隧道到车尾离开共需 40 秒。

例 8　某人沿着铁路边的便道步行，一列客车从身后开来，在身旁通过的时间是 15 秒钟，客车 105 米，每小时速度为 28.8 千米，求步行人每小时行多少千米？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0101_2.bmp}

解：根据题意，火车和人在同向前进，这是一个火车追人的“ 追及问题 ”。

由图示可知：

人步行 15 秒钟走的距离＝车 15 秒钟走的距离—车身长.

所以，步行人速度×15＝28.8×1000÷（61×60）×15—105，

步行人速度＝28.3×1000（60×60）—105÷5

＝1 米/秒。

1×60×60＝3600 米/小时＝3.6 千米/小时。

答：步行人每小时行 3.6 千米。

例 9　一人以每分钟 60 米的速度沿铁路步行，一列长 144 米的客车对面开来，从他身边通过用了 8 秒钟，求列车的速度？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0102_1.bmp}

解：客车与人是相向行程问题，从图示中可知：人 8 秒钟走的距离＝车身长—车 8 秒钟走的距离。

60÷60×8＝车身长—车速×8，

车速×8＝车身长—60÷60×8，

车速＝（144—60÷60×8）÷8＝17（米）。

答：客车速度是每秒 17 米。

例 10　马路上有一辆车身为 15 米的公共汽车，由东向西行驶，车速为每小时 18 千米，马路一旁的人行道上有甲、乙两名年轻人正在练长跑，甲由东向西跑，乙由西向东跑。某一时刻，汽车追上了甲，6 秒钟后汽车离开了甲；半分钟之后，汽车遇到迎面跑来的乙；又过了 2 秒钟，汽车离开了乙。问再过多少秒后，甲、乙两人相遇？

（1989 年《小学生数学报》小学数学邀请赛决赛试题）

解：（1）先把车速换算成每秒钟行多少米？

18×l000÷3600＝5（米）……每秒车速。

（2）求甲的速度。汽车与甲同向而行，是追及问题。

甲行 6 秒钟的距离＝车行 6 秒钟的距离—车身长。

所以，甲速×6＝5×6—15，

甲速＝（5×6—15）÷6＝2.5（米）……每秒甲速。

（3）求乙的速度。汽车与乙相向而行，是相向行程问题。

乙行 2 秒钟的距离＝车身长—车行 2 秒钟的距离。

乙速×2＝15—5×2，

乙速＝（15—5×2）÷2＝2.5（米）……每秒乙速。

（4）汽车从离开甲到离开乙之间的时间是多少？

0.5×60＋2＝32 秒。

（5）汽车离开乙时，甲、乙两人之间的距离是多少？

（5-2.5）×（0.5×60＋2）＝80（米）。

（6）甲、乙两人相遇时间是多少？

80 ÷（2.5＋2.5）＝16（秒）。

答：再过 16 秒钟以后，甲、乙两人相遇。

例 11　甲、乙两部汽车同时从 A、B 两地相对开出，第一次在离 A 地 75 千米处相遇,相遇后继续前进到达目的地后又立刻返回,第二次相遇在离 B 地 55 千米处，求 A、B 二地相遇多远？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0104_1.bmp}

（1978 年苏州市初中数学竞赛试题）

解：

从图中可知，甲、乙两车从出发到第一次相遇合走了一个 A 、B 的全程，其中甲走了 75 米，从出发到第二次相遇，甲、乙合走了三个 A、B 的全程，其中甲走了 75×3＝225（千米），在 225 千米中，又包括甲从 B 地返回所走的 55 米，因此，225 千米减去 55 千米就是 A、B 之间相距的路程。

75×3—55＝170（千米）。

答：甲、乙两地相距 170 千米。

本题是一道特殊的行程问题，它的解法十分巧妙，要采用画图分析，揭示隐蔽的数量关系，以甲、乙两车从出发到第一次相遇合走了一个 A 、B 的全程，其中甲走了 75 千米作为突破口，问题就迎刃而解。

例 12　某船来往于相距 360 千米的两港口之间。上行（逆水）需用 18 小时，下行要用 15 小时。这只船在静水中速度和水流速度各是多少？

解：本题是行程问题的一种特殊情况，称为“ 流水问题 ”。它除了涉及

船速、时间和路程外，还涉及到水流速度。

由于水流速度的影响，船的实际速度就会发生变化。它的速度变化满足下列关系式：

船静水速＋水流速＝船顺水速

船静水速－水流速＝船逆水速

或　　（船顺水速＋船逆水速）÷2＝船静水速

（船顺水速－船逆水速）÷2＝水流速

本题已知船上、下行 360 千米分别需 18 小时和 15 小时，

则　船顺水速：360÷15＝24（千米/小时）；

船逆水速：　360÷18＝20（千米/小时）。

所以，船在静水中速度是：

（24＋20）÷2＝22（千米/小时）。

水流速是：

（24—20）÷2＝2（千米/小时）。

答：这只船在静水中的速度是每小时 22 千米，水流速度是每小时 2 千米。

例 13　一位少年短跑选手，顺风跑 90 米用了 10 秒钟。在同样的风速下，逆风跑 70 米，也用了 10 秒钟。问：在无风的时候，他跑 100 米要用多少秒？

（1990 年第三届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题）

解法 1：（1）求顺风时每秒跑多少米？

90÷10＝9（米）。

（2）求逆风时每秒跑多少米？

70÷10＝7（米）。

（3）求无风时每秒跑多少米？

（9＋7）÷2＝8（米）。

（4）求无风时跑 100 米用了多少秒？

100÷8＝12.5（秒）。

答：无风时，他跑 100 米要用 12.5 秒。

解法 2：（1）求顺风时每秒跑多少米？

90÷10＝9（米）。

（2）求逆风每秒多少米？

70÷10＝7（米）。

（3）求风速每秒多少米？

（9—7）÷2＝1（米）。

（4）求无风时每秒多少米？

9—1＝8（米）或 7＋1＝8（米）。

（5）求无风时跑 10Q 米需要多少秒？

100÷8＝12.5（秒）。

答：略。

例 14　摩托车驾驶员以每小时 20 千米行了 60 千米，回来时每小时行 30 千米，问往返全程的平均速度是多少？

（1980 年美国长岛小学数学奥林匹克赛试题）

解：驾驶员往返总时间是：

60÷20＋60÷30＝3＋2＝5（小时）。

往返总路程是：60×2＝120（千米）。

全程平均速度：60×2÷5＝24（千米/小时）。

（这里特别要注意：不能算成（20＋30）÷ 2＝25 千米/小时）

现在我们把摩托车驾驶员行的 60 千米扩大（或缩小）若千倍，增加（或减少）若干千米，而往返速度不变，再计算一下往返全程的平均速度，你就发现结果仍是每小时 24 千米。如果设摩扎车驾驶员行了 S 千米，全程平均速度是：

$$\frac{2S}{\frac{S}{20}+\frac{S}{30}S(\frac{1}{20}+\frac{1}{30})}=\frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}=24\text{千米}$$

计算结果与上面相同。

解题时还可以设驾驶员行的路程为“1”，同样可以求得往返全程的平均速度。

$$\frac{1\times 2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}=24\text{（千米）。}$$

我们把 24 叫做是 20、30 的调和平均数。

下面我们再举一个求调和平均数的例子。

例15 小明从甲地到乙地，要经过一座山。其中$\frac{1}{3}$的路程是上坡，他每分钟行30米；$\frac{1}{3}$的路程是平路，他每分钟行40米；$\frac{1}{3}$的路程是下坡，他每分钟行 60 米。求小明甲地到乙地的平均速度。

解法 1：设甲、乙两地总路程为 S 米，由总路程÷总时间

＝平均速度，得

$$\frac{S}{\frac{1}{3}S\div 30+\frac{1}{3}S\div 40+\frac{1}{3}S\div 60}$$

$$=\frac{S}{\frac{1}{3}S(\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60})}$$

$$=\frac{3}{\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}}$$

解法 2：设各段路程为“1”，则总路程为“3”。

$$\frac{3}{\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}}$$

（我们把 40 叫做 30、40、60 的调和平均数）

例 16　兄妹二人在周长 30 米的圆形水池边玩，从同一地点同时背向绕水池而行，兄每秒走 1.3 米，妹每秒走 1.2 米，他们第十次相遇时，妹妹还需要走____米才能回到出发点。

（北京市第二届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

解：（1）从出发到第一次相遇所需时间：

30÷（1.3＋1.2）＝12（秒）。

（2）从出发到第十次相遇所需时间：

12×10＝120　（秒）。

（3）妹妹共行路程：

1.2×120＝144（米）。

（4）第十次相遇点与出发点的距离

144÷30＝4……24。

30—24＝6（米）

答：妹妹还需走 6 米才能回到出发点。

例 17　快、中、慢三辆车同时从同一地点出发，沿同一公路追赶前面的一个骑车人。这三辆车分别用 6 分钟、10 分钟、12 分钟追上骑车人。现在知道快车每小时走 24 千米，中车每小时走 20 千米。那么，慢车每小时走多少千米？

（“华罗庚”少年数学邀请赛决赛试题）

解：先将题中的条件和问题用图表示出来：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0109_1.bmp}

从图中可以看出这段距离分成两段：

（1）图中的 AB 段是骑车人走了多长的路，三辆车才出发。

(2)图中的 BC 段是骑车人在 12 分钟内走过的路程。要求慢车每小时走多少千米，先要求出慢车在 12 分钟所走的路程；

要求慢车 12 分钟所走的路程,先要求出骑车人每分钟走多少米和骑车人在三辆车出发前先走了多少米。

根据快车每小时行驶 24 千米，即 24000 米，可以求出快车 6 分钟行驶的路程是：

$$24000\times\frac{6}{60}=2400\text{米。}$$

根据中车每小时行驶 20 千米，即 20000 米，可以求出中车 10 分钟行驶的路程是：

$$20000\times\frac{10}{60}=3333\frac{1}{3}\text{（米）}$$

中车 10 分钟比快车 6 分钟多行的路程是：

$$3333\frac{1}{3}-2400=933\frac{1}{3}\text{（米）。}$$

$933\frac{1}{3}$米也就是骑车人4分钟所走的路程，这时，就可以求出骑车人每分钟走的路程是：

$$933\frac{1}{3}\div(10-6)=\frac{700}{3}\text{（米）。}$$

骑车人在 6 分钟内走的路程是：

$$\frac{700}{3}\times6=1400\text{（米）。}$$

根据快车 6 分钟行驶了 2400 米，那么，骑车人在三辆车出发前先走的路程是：

2400-1400＝1000（米）。

由此，可以求出慢车在12分钟行驶的路程是：

$$1000+\frac{700}{3}\times 12=3800\text{（米）。}$$

慢车每小时可以行驶的路程是：

3300÷12×60＝19000（米）=19（千米）。

答：慢车每小时可行19（千米）。

本来这道题是无从下手的题，通过画画、算算找到了线索。要注意画图前先弄清题意，不要急于画图去解，如果图画错了，图形反而会帮倒忙。

例18　当甲在60米赛跑中冲过终点线时，比乙领先10米，比丙领先20米，如果乙和丙按原来的速度继续冲向终点，那么当乙到达终点时将比丙领先多少米？

（1990年美国小学数学奥林匹克邀请赛试题）

解法1：在同样时间内，甲跑60米，乙跑50米，丙跑40米，即在相同单位时间内甲跑6米，乙跑5米，丙跑4米。

10÷5=2，

4×2=8（米），

8＋40＝48（米），

60-48＝12　（米）。

答：当乙到终点时，将比丙领先12米。

解法2：相同时间内，乙跑50米，丙跑40米，可知丙速是乙速的$\frac{4}{5}$，

所以当乙到达终点时，丙的行程为60×4　5=48米。

60-48=12（米）。

解法3：设乙到达终点时，比丙领先x米。

根据两人速度不变，可知在相同时间内，两人所行路程的比值不变，列式如下：

40∶30=（60-x）∶60，

x=12（米）。

答：略。

例19　一辆车从甲地开往乙地，如果把车速提高20%，可以比原定时间提前一小时到达；如果以原来行驶120千米后，再将速度提高25%，则可提前40分钟到达，那么，甲，乙两地相距____千米。

（1992年小学数学奥林匹克决赛试题）

解：（1）设这辆车按原速从甲地到乙地需要时间是x小时，根据路程一定，速度和时间成反比的关系，列比例式：

1∶120%=（x-1）∶ x。

x=6

即这辆车按原速从甲地到乙地需要6小时。

（2）设甲乙两地的路程是y千米。得方程

$$\frac{120}{\frac{y}{6}}+\frac{y-120}{\frac{y}{6}(1+25\%)}=6-\frac{2}{3}$$

解得y=270。

答：甲乙两地相距270千米。

练　习　八

1.甲、乙两车从两地同时相向而行，4 小时相遇。甲车每小时行 40 千米，乙车每小时行 30 千米，求两地间的距离。

2.甲、乙两地相距 180 千米，客车和货车同时从甲地出发驶向乙地，货车每小时行 30 千米，客车每小时行 20 千米，货车到达后停留 0.5 小时后又返回甲地，问从甲地出发后几小时两车相遇？

3.两辆汽车同时从某地出发，运送一批货物到相距 165 千米的工地，甲车比乙车早到 48 分钟，当甲车到达时，乙车还距工地 24 千米，问甲车行完全程用了多少小时？

（1982 年“小学数学”“想想算算”通讯智力竞赛试题）

4.某人骑摩托车从甲地到乙地执行任务，每小时行 46 千米，走了 2.5 小时后，恰好走完全程的一半，这时因任务紧急，速度每小时比原来增加 4 千米，问这个人又用多少时间就可以到达乙地？

5.一列快车和一列慢车，分别从甲、乙两地同时相对开出。快车经过 10 小时到达乙地，慢车经过 15 小时到达甲地，快车比慢车每小时多行 20 千米。两车相遇时各行了几千米？

6.甲、乙两人分别从南北两地同时对行，甲每分钟行 80 米，乙行全程要 20 分钟，对行 10 分钟，两人相遇后又相距 100 米，南北两地的路程是多少米？

（1990 年北京市黄城根小学六年级数学竞赛试题）

7.甲、乙两人同时从东、西两站相向而行，甲走到全程的 $\frac{5}{11}$ 的地方与乙相遇。如果甲每小时走 $4\frac{1}{2}$ 千米，乙走完全程要 5 小时，东、西两站相距多少千米？

（四川省 1990 年“天府杯”数学邀请赛试题）8.甲、乙两人同时从两地骑车相向而行，甲车速度每小时 15 千米，乙车速度每小时 13 千米，两人相遇时，距离中点 3 千米，这两地距离多少千米？

（1990 年宜兴市第五届小学生数学竞赛试题）

9.两个筑路队合筑一条公路，同时进行。甲队每天修 550 米，乙队每天修 500 米，两队在离中点 200 米处相遇。这条公路长多少米？

（1987 年“小学生报”“北极星”百科知识竞赛试题）

10.快车和慢车同时从甲、乙两地相对开出，已知快车每小时行 40 公里，经过 3 小时，快车已驶过中点 25 公里，这时与慢车相距 7 公里。慢车每小时行多少公里？

（1985 年杭州市上城区小学生数学竞赛五年级第一试试题）

11.A、B 两地相距 440 千米，甲、乙两车同时从两站相对开出，甲车每小时行 35 千米，乙车每小时行 45 千米。一只燕子以每小时 50 千米的速度和甲车同时出发，向乙车飞去，遇到乙车又折回向甲车飞去，遇到甲车又往回飞向乙车，这样一直飞下去，燕子飞了多少千米，两车才能相遇？

（1986 年怀化地区小学数学竞赛试题）

12.甲、乙两地相距 600 千米，一列客车和一列货车同时由甲地开往乙

地，客车比货车早到 4 小时。客车到达乙地时，货车行了 400 千米。客车行完全程需要几小时？

13.兄妹两人同时离家去上学，哥哥每分钟走 90 米，妹妹每分钟走 60 米，哥哥到校门时，发现忘记带课本，立即沿原路回家去取，行至离校 180 米处和妹妹相遇。问他们家离校多远？

（《小学生报》第一次全国数学邀请赛五年级试题）

14.早晨，小明背着书包去上学，走后不久，爸爸发现小明的铅笔盒忘在家中，爸爸立刻去追小明，将铅笔盒交给小明后立刻返回。小明接到铅笔盒后经过 10 分钟到达学校，同时爸爸也正好返回到家中。已知爸爸的速度是小明速度的 4 倍，那么小明从家里出来后多少分钟爸爸才出发去追赶小明？

（1988 年北京小学数学奥林匹克邀请赛初赛试题）

15.甲、乙两站相距 360 千米，快车从甲站，慢车从乙站相向同时出发，3 小时相遇。若同向开出，则 18 小时后快车追上慢车，求两车速度？

16.张明、李军和赵琪三人都要从甲地到乙地。早上 6 点张、李两人一起从甲地出发，张明每小时走 5 公里，李军每小时走 4 公里，赵琪上午 8 点才从甲地出发，傍晚 6 点赵、张同时到达乙地。问赵琪什么时候追上李军？

（1979 年北京市海淀区小学数学竞赛试题）

17.一支队伍 1200 米长，以每分钟 80 米的速度行进。队伍前面的联络员用 6 分钟的时间跑到队伍末尾传达命令。问联络员每分钟行多少米？

18.乌龟和小白兔进行 100 米赛跑，乌龟每秒钟爬行 0.5 米，小白兔每秒钟跑 10 米，小白兔很骄傲地跑到半路，睡了 3.2 分钟觉，同学们算一算，看谁先到达终点？早到多少秒？

19.一列火车长 700 米，以每分钟 400 米的速度通过一座长 900 米的大桥。从车头上桥到车尾离桥要几分钟？

20.一列火车通过 530 米的桥需 40 秒钟，以同样的速度穿过 380 米的山洞需 30 秒钟。求这列火车的速度和全长。

21.已知快车长 182 米，每秒行 20 米，慢车长 1034 米，每秒行 18 米。

（1）两车相向而行，从两车头相接到两车尾相接，求穿过的时间。

（2）两车同向而行，当快车头接慢车尾时，几秒可穿过？

（3）两车同向而行，当两车头齐时，快车几秒可穿过慢车？

(4)两车同向而行,当快车车尾接慢车车尾时,求快车穿过慢车的时间？

22.一座铁路桥全长 1200 米，一列火车开过大桥需花费 75 秒；火车开过路旁电杆，只要花费 15 秒，求火车全长是多少米？

23.铁路沿线的电杆间隔是 40 米，某旅客在运行的火车中，从看到第一根电线杆到看到第 51 根电线杆正好是 2 分钟，火车每小时行多少千米？

24.一个人站在铁道旁，听见行近来的火车汽笛声后，再过 57 秒钟火车经过他面前。已知火车拉汽笛声时离他 1360 米；（轨道是笔直的）声速是每秒钟 340 米，求火车的速度？（得数保留整数）

（邢台市楼东区 1987 年春五年级数学竞赛试题）

25.某人沿着铁路边的便道步行，一列客车从身后开来，在身旁通过的时间是 15 秒钟，客车长 105 米，每小时速度为 28.8 千米。求步行人每小时行多少千米？

26.一人以每分钟 60 米的速度沿铁路边步行，一列长 144 米的客车对面而来，从他身边通过用了 8 秒钟，求列车的速度。

27.某船在静水中行驶，每小时 7 千米，现顺流下行，从甲地到乙地要 6 小时，如果水流每小时 3 千米，这船从乙地回到甲地要几小时？

28.甲、乙两艘轮船，分别从两个码头同时相对开出，甲顺水而行，经过 18 小时相遇，相遇时甲船已行了全程的一半又 81 千米。已知在静水中甲船每小时行 18 千米，乙船每小时行 21 千米，求水流的速度。

29.一只船在静水中每小时航行 20 千米，在水流速度为每小时 4 千米的江中，往返甲、乙两码头共用 12.5 小时。求甲、乙两码头的距离。

30.小张参加爬山活动，从山脚爬到山顶后原路下山，上山每小时走 20 千米，下山每小时走 30 千米。求小张上、下山的平均速度？

31.某人原计划骑自行车以每小时 10 千米的速度从甲地去乙地，后改乘汽车前去，汽车的速度是自行车的 2 倍。返回时，由于没有赶上末班车，只好步行回到甲地。步行的速度只有自行车速度的一半。求他往返的平均速度。

32.两列火车同时从甲乙两站相向而行，第一次相遇在离甲地 40 公里的地方，两车仍以原速度继续前进，各车分别到站后立即返回，又在离乙站 20 公里的地方相遇，两站相距多少公里？

（1985 年闽清县小学五年级数学竞赛试题）

33.甲、乙两人在一条长 400 米的环形跑道上跑步，甲每分钟跑 152 米，乙每分钟跑 148 米。两人在同一起跑线上，同时向相反方向出发，几分钟后他俩第 3 次相遇？

34.甲、乙两人骑自行车从环形公路上同一地点同时出发，背向而行。已知甲走一圈的时间是 70 分钟，如果在出发后第 45 分钟甲、乙两人相遇，那么乙走一圈的时间是分钟。

（1988 年北京小学数学奥林匹克邀请赛初赛试题）

35.有甲、乙、丙三只船，甲船每小时航行 6 千米，乙船每小时航行 6 千米，丙船每小时航行 3 千米，三船同时、同地、同向出发，环绕周围是 15 千米的海岛航行，多少小时后三船再次相会在一起。

（北京市第五届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

36.甲、乙、丙三人中，甲每分钟走 50 米，乙每分钟走 60 米，丙每分钟走 70 米。甲、乙两人从东镇，丙一人从西镇同时相向出发，丙遇到乙后 2 分钟再遇到甲，两镇距离的 1 4 是____米。

（北京第一届小学生迎春杯“数学竞赛试题”）

37.甲、乙、丙三人进行 200 米赛跑，当甲到达终点时，乙离终点还有 20 米，丙离终点还有 25 米，如果甲、乙、丙赛跑的速度都不变，那么，当乙到达终点时，丙离终点还有多少米？

38.甲班与乙班学生同时从学校出发去公园。甲班步行的速度是每小时 4 千米，乙班步行的速度是每小时 3 千米。学校有一辆汽车，它的速度是每小时 48 千米，这辆汽车恰好能坐一班的学生。为了使两班学生在最短时间内到达，那么甲班学生与乙班学生需要步行的距离之比是____。（1991 年小学数学奥林匹克决赛试题）

39.早晨 8 点多钟，有两辆汽车先后离开化肥厂，向幸福村开去。两辆汽车的速度都是每小时 60 千米。8 点 32 分的时候，第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车的 3 倍。到了 8 点 39 分的时候，第一辆汽车离开化肥厂的距离是第二辆汽车的二倍。那么，第一辆汽车是 8 点几分离开化肥厂的？

（首届“华罗庚金杯”赛初赛试题）

九重叠问题

我们先来看下面一个问题：

如右图,有边长是 4 厘米与边长是 5 厘米的两个正方　形成在桌面上(阴影部分是两个正方形的重叠部分），试求这两个正方形覆盖桌面的面积。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0120_1.bmp}

要解答这个问题，如果只简单地把两个正方形面积相加，得 4×4+5×5=41（平方厘米）就作为其覆盖桌面的面积，显然是错误的，这是因为我们多计算了一块阴影部分的面积。这块面积是 3×3÷2=4.5（平方厘米），所以要将这块面积排除掉。所以两个正方形覆盖桌面的面积是

4×5+5×5-3×3÷2=36.5（平方厘米）。

一般来讲，这类问题就叫做重叠问题，它与一个应用很广的数学原理——容斥原理（“容”，就是包含、相交的含义，“斥”就是排除、去掉的含义）有密切的关系，它是解决重叠问题的主要理论依据，运用容斥原理可以解答很多有趣的数学问题。

下面我们通俗、直观地介绍两条容斥原理。

容斥原理（一）放在桌面上两张相交的圆纸片 A、B 所覆盖的总面积等于它们的面积之和减去它们相交部分的面积。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0121_1.bmp}

说明：容斥原理的确切内容，要用集合的知识阐述。

例 1　一个班 42 名学生都订了报纸，订阅《中国少年报》的有 32 人，订阅《小学生报》的有 27 人。有多少人订阅两种报纸？

（1934 年《小学生报》全国数学竞赛题）

解法 1：假定全班每人只订一份报纸，则全班共有 32+27=59 人，这比全班实际人数多 59-42＝17 人，说明有 17 人不是只订了一份报纸，而是既订了《中国少年报》又订了《小学生报》，所以在统计订阅报纸的人数时，有 17 人重复计算了一次，形成比全班实际人数多了的情况。

由此，订阅两种报纸的人数是

32+27-42=17（人）。

解法 2：因为班内订《中国少年报》的有 32 人，所以没有订《中国少年报》的有 42-32=10 人，也就是在班内只订《小学生报》的有 10 人，为什么题意中“订阅《小学生报》的有 27 人”呢？这，说明有 27-10=17 人既订了《中国少年报》、又订了《小学生报》。由此，订阅两种报纸的人数是

27-（42-32）＝17（人）。

解法 3：

如右图，设订阅两种报纸的有 x 人。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0122_1.bmp}

如果我们在桌面上，把订《中国少年报》的学生用圆 A 围起来，圆 A 的面积表示订《中国少年报》的人数（32 人）；把订《小学生报》的学生用圆 B 围起来，圆 B 的面积表示订《小学生报》的人数（27 人）。

所以圆 A 与圆 B 的相交部分就是既订《中国少年报》又订《小学生报》的学生，这部分的面积表示他们的人数（x 人）。

则　全班学生的人数（42 人）就是圆 A、圆 B 覆盖在桌面上的总面积，按“容斥原理（一）”为等量关系列方程，得

$$42=32+27-x。$$

解方程，得 x=17。

答：订阅两种报纸的有 17 人。

说明：第一、二两种解法是算术解法，解题思路比较抽象。第三种解法是借助图形（一般叫“韦恩图”）直观、形象地表示了题意，然后利用容斥原理列出方程进行解答。

显然，如果第一、二两种解法用韦恩图来分析，就更能说明解题的思路。

例 2　一个班有 36 个学生，在一次测验中，答对第一题的 25 人，答对第二题的 23 人，两题都答对的 15 人。那么，两题都不对的有多少人？

（1990）年徐州市鼓楼区小学数学竞赛预赛题）

解法 1：因为答对第一题的 25 人当中有 15 人同时答对第二题，所以第一题答对，第二题答错（也就是只答对第一题）的学生有 25-15=10 人。同理，第二题答对，第一题答错（也就是只答对第二题）的学生有 23-15=8 人。从全班学生总人数（36 人）中，减去这两部分学生人数，再减去两题都答对的人数（15 人），就能得到两题都不对的学生人数。

36-（25-15）-（23-15）-15=3（人）。

解法 2：

如右图，设两题都不对的有 x 人。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0123_1.bmp}

如果我们在桌面上，把全班学生用长方形围起来，这个长方形的面积表示全班的人数（36 人）；把答对第一题的学生用圆 A 围起来，圆 A 的面积表示答对第一题的人数（25 人）；把答对第二题的学生用圆 B 围起来，圆 B 的面积表示答对第二题的人数（23 人），所以圆 A 与圆 B 的相交部分就是两题都答对的学生，这部分的面积表示他们的人数（15 人）。在长方形内，两圆之外的部分就是两题都答错的学生，这部分的面积表示他们的人数（x 人）。

按“两圆覆盖在桌面上的总面积（可用容斥原理（一）求出）与两圆之外的部分的面积之和等于长方形的面积”为等量关系列方程，得

$$（25+23-15）+x＝36。$$

解方程，得 x=3。

答：两题都答不对的有 3 人。

说明：（1）要弄清为什么例 1 不要像例 2 那样作一个长方形，要全班学生围起来呢？这是因为例 1 中“全班 42 名学生都订了报纸”，也就是说没有“不订报纸”的学生，所以，全班学生就是由圆 A、圆 B 围起来的部分，全班学生的人数（42 人）就是用圆 A、圆 B 覆盖在桌面上的总面积来表示的。

（2）用韦恩图法解答例 1、例 2 时，似乎解题冗长，不过理解它的思路后，书写格式可以简化。这种解法在解答较复杂的重叠问题时将可以显示出它的许多优越性。

例 3　有 77 名学生参加数学竞赛，分甲、乙两张考卷测试，答对甲卷者得 60 分，答对乙卷者得 40 分。已知答完考卷后有 50 人答对甲卷，　65 人答对乙卷，只有 2 人甲、乙两卷都答错了，这次考试只得 40 分的有多少人？只得 60 分的有多少人？得 100 分的有多少人？

解：

如右图，把全班学生（77 人）用长方形围起来，在这个长方形内：答对甲卷的学生（50 人）用圆 A 围起来；答对乙卷的学生（65 人）用圆 B 围起为；

圆 A、圆 B 之外的部分就表示甲、乙两卷都答错的学生（2 人）。由韦恩图可得

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0125_1.bmp}

（1）至少答对一张考卷的人数（也就是答对 A 卷或答对 B 卷的人数）77-2＝75（人）。

（2）答对两张考卷的人数 50＋65-75＝40（人）。

（3）只答对甲卷的人数 50-40＝10（人）。

（4）只答对乙卷的人数 65-40=25（人）。

验算 10+40＋25+2=77（人）。

答：只得 40 分的有 25 人；只得 60 分的有 10 人；得 100 分的有 40 人。

说明：注意！“答对甲卷者”与“只答对甲卷者”是一字之差，答对甲卷者（50 人）应该包括两种情况：（1）只答对甲卷者（10 人），（2）答对甲、乙两张考卷者（40 人）。

例 4　在 1～1000 的整数中，有多少个数既是 5 的倍数又是 7 的倍数？有多少个数是5的倍数但不是7的倍数？有多少个数是5的倍数或7的倍数？有多少个数既不是 5 的倍数又不是 7 的倍数？

解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0126_1.bmp}

在 1～1000 的 1000 个整数中：

是 5 的倍数的数有 1000÷5=200（个）；

是 7 的倍数的数有 1000÷7≈142（个）。

如上图，把这 1000 个整数用长方形围起来，在这个长方形内：是 5 的倍数的数（200 个）用圆 A 围起来；是 7 的倍数的数（142 个）用圆 B 围起来。

（1）因为 5 与 7 是互质数，所以既是 5 的倍数又是 7 的倍数的数一定是（5×7）的倍数，一共有

1000÷35≈28（个）。

显然，圆 A、圆 B 的相交部分的面积就是表示既是 5 的倍数又是 7 的倍数的数的个数（28 个）。

（2）是 5 的倍数但不是 7 的倍数的数有

200-28=172（个）。

（3）是 7 的倍数但不是 5 的倍数的数有

142-28=114（个）。

（4）是 5 的倍数或 7 的倍数的数有

172+28+114=314（个）。

（5）既不是 5 的倍数又不是 7 的倍数的数有

1000-314=686（个）。

答：有 28 个数既是 5 的倍数又是 7 的倍数；有 172 个数是 5 的倍数但不是 7 的倍数；有 314 个数是 5 的倍数或 7 的倍数；有 686 个数既不是 5 的倍数又不是 7 的倍数。

说明：“有多少个数是 5 的倍数或 7 的倍数”就是求圆 A、圆 B 覆盖在桌面上的总面积，因此也可以用容斥原理（一）得：200+142-28＝314（个）。

例 5 某班有学生 46 人，在调查他们家中是否有电子琴和小提琴时发现，有电子琴的 22 人，两种琴都没有的 14 人，只有小提琴的与两种琴都有的人数比是 5∶3。问：只有电子琴的有多少人？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0127_1.bmp}

如上图，把全班学生（46 人）用长方形围起来，在这个长方形内，有小提琴的学生（未知）用圆 A 围起来，有电子琴的学生（22 人）用圆 B 围起来。

解法 1：

（1）有小提琴或电子琴的人数： 46-14=32（人）。

（2）只有小提琴的人数：32-22=10（人）。

（3）两种琴都有的人数：$10\times\frac{3}{5}=6$（人）。

（4）只有电子琴的人数：22-6=16（人）。

解法 2：

设只有电子琴的学生有 x 人，则两种琴都有的学生有（22-x）人，只有小提琴的学生有$(22-x)\times\frac{5}{3}$人。

按“有小提琴或电子琴的人数与两种琴都那没有的人数之和等于全班人数”为等量关系列方程，得

$$[(22-x)\times\frac{5}{3}+22]+14=46。$$

解方程，得 x=16。

答：只有电子琴的学生有 16 人。

例6 一次数学测验，甲答错了题目总数的$\frac{1}{4}$，乙答错了3道题，两人都答错的题目是题目总数的 16。求甲、乙都答对的题目数。

解：如下页图，把总的题目（设为 n 道）用长方形围起来，在这个长方形内，甲答错的题目（$\frac{1}{4}$n道）用圆A围起来，乙

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0129_1.bmp}

答错的题目（3 道）用圆 B 围起来。

设题目总数有n道，甲、乙都答对的有x道，则甲答错的有$\frac{1}{4}$n道，两人都答错的有16n道，只有乙答错的有$(3-\frac{1}{6}n)$道。

按“甲答错或乙答错的题目数与甲、乙都答对的题目数之和等于题目总数“为等量关系列方程得

$$[\frac{1}{4}n+(3-\frac{1}{6}n)]+x=n。（把n看作常量）$$

解方程，得$x=\frac{11}{12}n-3$。

因为 x、n 都是自然数，所以 n 是 12 的倍数，又因为只有乙答错的有$3-\frac{1}{6}n\geq0$，所以$n\leq18$，由此可得$n=12$。这时，$x=\frac{11}{12}\times12-3=8$，即$x=8$。

答：两人都答对的有 8 道题。

例 7 某外语学校一个班的同学，在选学英语、法语、日语三个语种时，每人至少选学一个语种。其中，选学英语的 29 人，选学法语的 25 人，选学日语的 20 人。同时选学英、法语的有 4 人；同时选学法、日语的有 7 人；同

时选学日、英语的有 5 人。三个语种都学的有 2 人。问这个外语班共有学生多少人？

解法 1：

（1）把选学英语、法语、日语的人数加起来，有

29+25+20=74（人）。

（2）有的同学同时选学了两门外语，在上面的计算中重复算了，重复算的部分应该排除掉，于是得

（29+25+20）-（4+7+5）=58（人）。

（3）显然，如果一个同学同时选学三门语种的话，在上面这个式子的前一个括号中加了三次，在后一个括号中又减了三次。这说明同时选学三门语种的同学（有 2 人）都被排除了，所以必须“补”回来。因此，这个外语班共有

（29+25+20）-（4+7+5）+2=60（人）。

解法 2：用韦恩图法。

把选学英语、法语、日语的学生分别用圆 A、B、C 围起来。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0130_1.bmp}

要计算 A、B、C 三圆盖住的总人数，可以先把它们分成七块彼此没有重复部分的人数来计算（如上页图）。其中①是三个语种都选学的人数；②是只选学英、法语的人数；③是只选学法、日语的人数；④是只选学日、英语的人数；⑤是只选学英语的人数；⑥是只选学法语的人数；⑦是只选学日语的人数。我们用分块填图法计算：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0131_1.bmp}

先填入三个语种都选学的 2 人（见图（1）），再填只选学两个语种的人数，由于同时选学英、法语的 4 人，已经包括三门都选学的 2 人，因此只选学英、法语的有 4-2=2 人，同理只选学法、日语的有 7-2=5 人，只选学英、日语的有 5-2=3 人。将这些数填入图（2）。最后可计算：

只选学英语的有 29-2-2-3=22（人）。

只选学法语的有 25-2-2-5=16（人）。

只选学日语的有 20-2-3-5=10　（人）。将这些数填入图（3），再将七个部分的人数相加，得全班有

22+16+10+2+5+3+2＝60（人）

答：这个外语班有 60 人。

通过本题的解答可得：

容斥原理（二）　放在桌面上三张两两相交的圆纸片 A、B、C 所覆盖的总面积等于 A、B、C 三个图形的面积之和减去 A、B 相交的面积，再减去 A、C 相交的面积，再减去 B、C 相交的面积，加上 A、B、C 相交的面积。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0132_1.bmp}

例 8　26 名男同学中喜欢打篮球的 13 人，喜欢打排球的 12 人，喜欢踢足球的 9 人，既喜欢篮球又喜欢足球的 2 人，既喜欢足球又喜欢排球的 3 人，但没有一个男同学同时喜欢三种球类，也没有不喜欢任一种球的，求有多少男生既喜欢篮球又喜欢排球？

（1984 年北京市景山学校数学竞赛题）

解：把喜欢篮球、排球、足球的学生分别用圆 A、B、C 围起来，围的时候要注意：

（1）因为“没有一个男同学同时喜欢三种球类”，所以 A、B、C 三个圆没有相交的部分。

（2）因为“也没有不喜欢任何一种球的”，所以在桌面上 A、B、C 三个圆所覆盖的总面积就表示男同学的总人数（26 人），不应该再作长方形把 A、B、C 三个圆围起来。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0153_1.bmp}

如上图，设既喜欢篮球、又喜欢排球的有 x 人，则按“容斥原理（二）”为等量关系列方程，得

26=13+12+9-2-3-x+0。

解方程，得 x=3。

答：喜欢篮、排球的有 3 人。

说明：如果列不出方程；（13＋12-x）+（9-2-3）=26，对吗？它的算理是什么？

例 9　某校有 27 名数学教师担任几何、代数、三角三门学科的教学工作，其中只教几何的有 8 人，只教代数的有 6 人，教几何和代数的有 5 人，教代数和三角的有 3 人，教几何和三角的有 4 人。几何、代数和三角都教的有 2 人，只教三角的教师有多少人？

解：注意！“教几何和代数的有 5 人”应该包括两种情况：（1）只教几何和代数两门学科的。（2）能同时教几何、代数和三角三门学科的。

把教几何、代数和三角的教师分别用圆 A、B、C 围起来。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0134_1.bmp}

（1）只教几何、代数的人数是 5-2=3（人）；

（2）只教几何、三角的人数是 4-2=2（人）；

（3）只教代数、三角的人数是 3-2=1（人）。

设只教三角的有 x 人。

按“教几何、代数和三角的有 27 人”为等量关系列方程，得

8+3+6+2+2+1+x=27。

解方程，得 x= 5。

答：只教三角的有 5 人。

例 10　在前 200 个自然数中，能被 2 或 3 或 5 整除的数有多少个？不能被 2、3、5 任何一个整除的数有多少个？

解：在 1 ～200 这 200 个自然数中：

能被 2 整除的数有 200÷2≈100　（个）；

能被 3 整除的数有 200÷3≈66　（个）；

能被 5 整除的数有 200÷5＝40　（个）。

因为 2 与 3 互质，所以既能被 2 整除、又能被 3 整除的数，一定能被（2×3）整除，一共有 200÷（2×3）≈33（个）。同理

既能被 2 整除、又能被 5 整除的数，一共有

200÷（2×5）＝20　（个）；

既能被 3 整除又能被 5 整除的数，一共有

200÷（3×5）≈13（个）；

能同时被 2、3、5 整除的数，一共有

200÷（2×3×5）≈6（个）。

将以上 情况作在下页韦恩图上，其中，把 1～200 这 200 个自然数用长

方形围起来，把能被 2、3、5 整除的数分别用圆 A、B、C 围起来。

根据容斥原理（二），可得：

（1）能被 2 或 3 或 5 整除的数（也就是 A、B、C 三个圆覆盖在桌面上的总面积所表示的数）有

100+66+40-33-20-13+6=146（个）。

（2）不能被 2、3、5 任何一个整除的数有答：能被 2 或 3 或 5 整除的数有 146 个，不能被 2、3、5 任何一个整除的数有 54 个。

练习九

1.学校文艺组的每个人至少会演奏一种乐器，已知会拉手风琴的有 24 人，会弹电子琴的有 17 人，其中两种乐器都会演奏的有 8 人，这个文艺组一共有多少人？

（《少年报》1990 年小学四年级数学能力水平测试题）

2.一个班有 52 人，班主任问：谁做完了语文作业？请举手！有 32 人举手。又问：谁做完了数学作业？请举手！有 35 人举手。最后说：谁语文、数学作业都没有做完？有 8 人举手。这个班语文、数学都做完的有多少人？

（1990 年青岛市四方区小学数学三年级竞赛题）

3.在六年级 96 个学生中，调查会中国象棋和国际象棋的人数，发现每个学生至少会一样，调查结果是，有 $\frac{7}{12}$ 的学生会中国象棋，有 $\frac{1}{4}$ 的学生两样都会。求会国际象棋的有多少学生？

（1990 年乌鲁木齐市小学六年级数学竞赛题）

4.30 名学生中，8 人学法语，12 人学西班牙语，3 人既学法语又学西班牙语。问有多少名学生两种语言都不学。

（美国 1980 年小学数学奥林匹克试题）

5.某班 50 名学生，在第一测验中有 26 人满分，在第二次测验中有 21 人满分。如果两次测验都没有得过满分的学生有 17 人，那么两次测验都获满分的有多少人？

（上海市 1989 年小学五年级数学比赛题）

6.课堂上同学们都在复习语文或数学，只复习语文的占总人数的 48%，只复习数学的是只复习语文的人数的 50%。问：两门功课都复习了的人数占总人数的百分之几？

7.李老师出了两道题，检查全班 40 名同学，结果是：第 1 题有 30 人做对了，第 2 题没做对的有 12 人，第 1 题和第 2 题都做对的有 20 人。问：第 2 题做对的但第 1 题没做对的有多少人？两题都不对的有多少人？

（《小学生报》1990 年六年制三年级比赛题）

8.在 1～l0000 的自然数中，能被 5 或 7 整除的数共有多少个？

9.一次数学速算练习，甲答错题目总数的 $\frac{1}{9}$，乙答对7道题，两人都答对的题目是题目总数的 1 6。问：甲答对了多少道题？

10.某班参加体育活动的学生有 25 人，参加音乐活动的有 26 人，参加美术活动的有 24 人。同时参加体、音活动的有 16 人，同时参加音、美活动的

有 15 人，同时参加美、体活动的有 14 人，三个组都参加的有 5 人，这个班共有多少名学生参加以上活动？

（辽宁省首届小学生数学竞赛题）

11.六年级 100 名问学，每人至少爱好体育、文艺和科学三项活动中的一项。其中，爱好体育的 55 人，爱好文艺的 56 人，爱好科学的 51 人，三项都爱好的 15 人，只爱好体育和科学的 4 人。只爱好体育和文艺的 17 人。问：多少人只爱好科学和文艺两项？只爱好体育的有多少人？

12.以 105 为分母的最简真分数共多少个？

13.某人的书架上共 72 本书，其中有科技书 12 本，小说书 9 本，特色封面的书有 10 本，监色封面的科技书有 4 本，蓝色封面的小说有 3 本，问 书架上不是蓝色封面的的,并且既不是科技书,又不是小说的其它书有多少本？

14.在一次大扫除中，某班共 30 人，除 2 人去开会外，其余的学生都参加了。其中扫地的有 18 人，擦玻璃的 20 人，抹桌椅的 13 人。没有一个学生这三种劳动全都参加了，但擦玻璃和抹桌椅的有 6 人，另外 5 人既抹桌椅又扫地。问有多少人既擦玻璃又扫地？

15.学校数学竞赛出了 A、B、C 三题，至少做对一道的有 25 人，其中做对 A 题的有 10 人，做对 B 题的有 13 人，做对 C 题的有 15 人。如果三道题都做对的只有 1 人，那么只做对两道题和只做对一道题的各有多少人？

十图形问题

——合理分类，巧妙计算

在小学数学竞赛中经常出现图形的计数、图形的计算等类型的图形问题，要正确解答这类问题，必须灵活地运用几何图形的有关基本概念和基本知识，根据几何图形的特征，合理分类，巧妙计算，就能达到正确、简便的目的。下面我们结合例题，对上述题型分别作一介给。

一 图形的计数

1.数线段。

直线上两点间的部分叫做线段。线段是最基本的图形，掌握线段的计数方法是学好其他形、体计数的基矗

例 1　右图中有多少条线段

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0140_1.bmp}

（第一届“从小爱数学”邀请赛试题）

解法 1：图中有五个点，每两个点可以连成一条线段，数起来比较杂乱。如果我们合理分类，按一定顺序计数就很方便。

我们分别以 A、B、C、D 为起点，分类计数如下：第一类：A 为起点

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0141_1.bmp}

第二类：B 为起点

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0141_2.bmp}

第三类：C 为起点

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0141_3.bmp}

第四类：D 为起点

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0141_4.bmp}

所以，图中线段的总数是：l+2+3+4=10（条）。

解法 2：

（1）对于 A、B 两点，只有 1 条线段（在 B 点下面写上 1）；

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0141_5.bmp}

（2）添上一点 C，增加了 2 条线段（C 点下面写上 2）；

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0141_6.bmp}

（3）添上一点 D，增加了 3 条线段（在 D 点下面写上 3）；

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0141_7.bmp}

（4）最后添上一点 E，增加了 4 条线段，（在 E 点下面写上 4）。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0141_8.bmp}

因此，图中线段的总数为：1＋2＋3＋4＝10（条）。

本题的结论可以推广，一条线段上共有 n 个点（包括两个端点），那么线段的总数为：

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}\text{（条）。}$$

如果我们用这种方法去数线段，就可以又快又准确。

例 2　图中一共有（　）条线段。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0142_1.bmp}

（北京市第六届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

解：根据图形的特征，运用分类方法解答，先数每条边上的线段，再计

算总数。

每条边上共有（1＋2＋3＝）6（条）。

该图共有线段总数为：（1＋2＋3）×5＝30 条。

下面例题是用线段的计算原理来计算角的个数。

例 3　图中共有多少个角。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0142_2.bmp}

解：数角的个数和数线段一样，就是把线段上的点变成了角的边。

所以，角的总数为：1＋2＋3＋4＝10　（个）角。

2.数三角形、长方形、正方形。

例 4　右图中共有多少个三角形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0142_3.bmp}

（1988 年《小学生数学报》小学生数学邀请赛预赛试题）

解：这些三角形有同一个顶点，三角形的个数与底边上的线段的条数相对应。三角形底边上的线段总数就是三角形的总数，因此，三角形的总数为：

1＋2＋3＋4＋5＋6＋7＝28（个）。

例 5 右图中（下页），O 为三角形 $A_1A_6A_{12}$ 的边的 A_1A_{12} 上的一点，分别连结 OA_2，OA_3……OA_{11}。这样图中共有多少个三角形？

（1990 年“新苗杯”小学生数学竞赛试题）

解：将△$A_1A_6A_{12}$ 分成以 OA_6 为公共边的二类三角形：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0143_1.bmp}

△OA_1A_6 中共有 1＋2+3+4+5=15（个）三角形；

△OA_6A_{12} 中共有 1+2+3+4+5+6=21（个）三角形。

所以，图中三角形的总数为：15＋21+1=37（个）。

例 6　数一数，图中共有多少个三角形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0143_2.bmp}

（北京市第一届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

解：用分类法计数：

第一类：图中的线段把五边形的内部划分成 11 块，其中 10 块是三角形。

第二类：由两个这样的三角形拼成的三角形（如三角形 ABF）有 10 个。

第三类：由三个这样的三角形拼成的三角形（如三角形 ABE）有 5 个。

第四类：肖二个这样的三角形和小五边形拼成的三角形（如三角形 AHD）有 5 个。

第五类：有四个这样的三角形和小五边形拼成的三角形（如三角形 ACD）有 5 个。

除以上五类外，再也没有其他的三角形，所以，图中共有 35 个三角形。

例 7　右图中（单位厘米）：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0144_1.bmp}

（1）一共有多少个长方形？

（2）所有这些长方形的面积是多少？

（上海《小学数学教师》“从小爱数学”邀请赛试题）

解：因为长方形是由长和宽两个因素决定。图中横向的任一线段和纵向的任一线总可以搭配成一个长方形。

图中横向线段数为（它共有 5 个点）：

l+2+3+4=10（条）。

纵向线段数为：

1+2+3+4=10（条）。

所以，长方形总数为：（l＋2+3+4）×（l+2+3+4）＝10×10=100（个）。

根据线段的长度，长可有：5，12，8，1， 5＋12，12+8，8+1，5+12＋8，12+8+1，5＋12+8+1 十种情况；同样可知每一种长可以配上宽是 3，7，4，2，3+7，7+4……十种情况。

由上面可知，只要把长中每一个数与宽中每一个数相乘，这样可得到 100 个长方形的面积，然后把它们相加，就是所求的面积。

（5×3+5×7+5×4+…+5×16）+（12×3+12×7+12×4+…+12×6）+…+（26×3+26×7+26×4+…+26×16）

=（5+12+8+…+26）×（3+7+4+…+16）

=144×86

=12384（平方厘米）。

例 8 如图中每一个小方格都是一个小正方形，数一数图中共有多少个正方形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0145_1.bmp}

解：假设每个小方格的边长为 1，可按边长将图中正方形分类；

类	一	二	三	四
边长	1	2	3	4
个数	7×4	6×3	5×2	4×1

图中正方形总个数为：

7×4+6×3+502+4×1

= 28+18+10+4

=60（个）。

由此我们可以总结出规律，若一个长方形的长被分成 n 等份，宽被分成 m 等份，那么这个长方形中正方形的总数为：

mn+（n-1）（M-1）+（n-2）（m-2）+…+(n-m＋1）·1 其中（n＞m）。

如果一个正方形，每边长被分为 5 等份，则这个大正方形中含有小正方形的个数为：

5×5+4×4+3×3+2×2+1×1

$=5^2+4^2+3^2+2^2+1^2$

=25+16+9+4+1=55（个）。

一般地，每边有 n 个方格的正方形中，大小正方形总数为:

$n^2+(n-1)^2+\cdots+2^2+1^2$

可以把后面这个式子看成是前面式子的特殊情况，只要把前面式子中的 m=n，就可以得到后面的这个式子。

用分类方法解答小学数学中某些智力性思考题或竞赛题时，能巧妙地找到正确答案，而小学生在运用这种方法时往往出现思路不清，层次不明，逻辑思维不严密，计算时容易产生重复和遗漏的错误。因此，用分类方法解题时必须注意几个问题。

（1）分类必须有明确的标准。

在解题前必须根据题目要求确定分类的标准，即根据什么来分类的原则。

例 9　把 1000 个 1 立方厘米的正方体,叠成一个棱长是 1 分米的正方体，其表面油漆后，拆开为原来的 1 立方匣米的正方体，这些 1 立方厘米的正方体中，至少有一面被油漆的个数是多少？

（天津市第二届小学生“我爱数学”邀请赛决赛试题）

解：思考时可以按 1 立方厘米正方体被油漆的面的个数进行分类，这标准确定后，可分为下面三类：

三个面被油漆的为一类：有 8（个）；

二个面被油漆的为一类：有（10-2）×12＝96（个）；

一个面被油漆的为一类：有（10- 2）×（10- 2）×6=384（个）。

因此，至少有一个面被油漆的 1 立方厘米的正方体共有：

8+96+384=488（个）。

因此，分类的标准一旦确定，问题解答的思路即可明朗。

（2）分类要注意层次。

比较复杂的题目可以先分成大类，然后再将每个大类分成若干小类，分层次进行。

例 10　在图①中每相邻两个点之间的距离都是 1 厘米，任意连续四个点，若能形成一个正方形，则在这 16 个点中可以连成多少个正方形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0147_1.bmp}

（江苏省常州高级中学教改班入学试题）

解：任意连结四个点能形成的正方形可分为“正”放的(见图②）和“斜”放的（见图③、图④）两大类。

第一大类“正”放着的正方形（见图 2）可按面积为 1 平方厘米、4 平方厘米、9 平方厘米分成三小类；

面积为 1 平方厘米的小正方形共有 3×3= 9（个）；

面积为 4 平方厘米的正方形共有 2X2—4（个）；

面积为 9 平方厘米的正方形有 1（个）。

因此这一大类中共有正方形 9+4+1＝14（个）。

第二大类“斜”放着的正方形（见图③，图④），可分成面积为 2 平方厘米和 5 平方厘米二小类：

面积为 2 平方厘米的正方形有 4（个）（见图③）：

面积为 5 平方厘米的正方形有 2（个）（见图④）。

因此，这一大类有正方形 4+2=6（个）。

所以，题目要求的正方形共可连成 14+6＝20（个）。

该题的解法采用了两个层次的分类，这样条理就十分清楚。

（3）分类计数时应防止重复或遗漏。

分类时应注意要做到既不重复又不遗漏，这是使所得结果准确无误的保证。

例 11　如图⑤所示，平面上有十个点，连接每相邻三个点所构成的三角形面积均为“1”，那么以其中任意三个点为顶点的三角形中面积为“2”的三角形有多少？

（北京市第三届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

解：根据题意，我们可以把面积为“2”的三角形按其形状进行分类，分成直角三角形（见图⑥）和钝角三角形（见图⑦）两大类。

在面积为“2”的直角三角形一大类中，我们可以把凡是斜边水平方向放置的直角三角形为一小类，见图⑥中所连成的所有直角三角形，它们的斜边都是水平方向放置的，共有 8（个）。由于斜边可以有三个不同方向放置，且每个方向旋转的情况相同，故这六类共有面积为“2”的直角三角形有 8×3=24（个）。

在面积为“2”的钝角三角形一大类中，见图⑦中所连成的钝角三角形有 4 个，同样按三个不同方向计算，故这一大类共有钝角三角形 4×3= 12（个）。

因此共有面积为“2”的三角形 24＋12=36（个）。

此题的分类是按三角形形状来分，既不重复也不遗漏。

合理的分类是解题的关键，而分类不重复又不遗漏是使得所得结论准确的保证，同时也是检验分类是否正确的一种方法。

二　图形的计算

例 1 有两个相同的长方形，长是 7 厘米，宽是 3 厘米，如右图所示，如果把它们按右图叠放在一起，这个图形的周长是多少？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0149_1.bmp}

（北京景山学校三年级数学竞赛题）

解法 1：叠放在一起的长方形，所组成图形的周长正好是原来长方形的长的 4 倍。

7×4=28（厘米）。

解法 2：图形的周长等于两个长方形周长的和，减去边长为 3 厘米的正方形的周长（重叠部分）。

（7+3）×2×2—3×4=28（厘米）。

答：原图形的周长为 28 厘米。

例 2 有一大一小两个正方形，它们的周长相差 20 厘米，面积相差 55 平方厘米，小正方形的面积是多少平方厘米？

（《小学生数学报》第四届小学生数学邀请赛决赛试题）

解法 1：如图所示，易知 AB=204=5（厘米）。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0150_1.bmp}

从 55 平方厘米中减去（5×5）平方厘米，再 2 等分，每个氏方形的而积为：

（55—5×5）2=15（平方厘米）。

已知长方形的面积和宽，求长方形的长即为小正方形的边长。

小正方形的边长为：15÷5=3（厘米）。

小正方形的面用力：3×3=9（平方厘米）。

解法 2：如图，把大小正方形面积差分成甲、乙、丙三部分，甲、乙、丙拼成一个长方形。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0150_1.bmp}

AD=55÷5＝11 厘米，AB

＝CD，AB=（11—5）÷2=3 厘

所以，小正方形的面积为：　3×3=9 平方厘米。

解法 3：如图，分割成两个直角梯形，再拼成一个长方形，已知长方形的面积和宽，它的长为： 55÷5=11 厘米。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0151_1.bmp}

长方形的长即为直角梯形的上底与下底的和，同时，下底与上底的差为 5 厘米，根据和差公式，小正方形的边长为（11—5）÷2=3 厘米。

所以，小正方形的面积为 3×3=9 平方厘米。

解法 4：把小正方形的中心与大正方形的中心位于同一点，如图分割成四个长方形，把 55 平方厘米四等分得到一个长方形的面积，已知长方形面积与宽，求长方形的长。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0151_2.bmp}

长方形的长为：55÷4÷2.5=5.5（厘米）；

小正方形的边长为：5.5—2.5=3（厘米）；

小正方形的面积为：3×3=9 平方厘米。

如图把大小正方形的面积差分割如下页图所示，怎样求小正方形的面积？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0152_1.bmp}

例 3　如下图，两只蚂蚁同时从 A 点出发，要到达 B 点。

一只经大半圆周向 B 点爬行，另一只经两个小半圆周向 B 点爬行，如果它们的速度相同，谁先到达 B 点？为什么？（AC=10 厘米，　CB＝20 厘米）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0152_2.bmp}

（四川省成都市东城区小学生智力竞赛题）

解：两个小半圆的直径分别为 10 厘米和 20 厘米，一只经两个小半圆到达B点的路程为：$\frac{1}{2}\times\pi\times10+\frac{1}{2}\times\pi\times20=15\pi$ （厘米）；另一只经大半圆周向B点爬行的路程为：$\pi\times(10+20)\times\frac{1}{2}=15\pi$ （厘米）。

因为两只蚂蚁的速度相同，到 B 点的行程相等，所以它们将同时到达 B 点。

例 4　右图正方形的面积是 25 平方厘米，求圆的面积是多少平方厘米？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0153_1.bmp}

（北京市第三届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

解：如图所示，阴影部分的面积是$\frac{1}{2}r^2=25\div4$，则$r2=25\div4\times2=12.5$（平方厘米）。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0153_2.bmp}

圆的面积是：12.5×3.14=39.25（平方厘米）。

例 5　右图中，三角形 ABC 的面积是 30 平方厘米，D 是 BC 的中点， AE 的长是 ED 的长的 2 倍，那么三角形 CDE 的面积是______平方厘米。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0153_3.bmp}

（上海市第四届小学五年级数学竞赛题）

解：已知 D 是 BC 的中点，所以△ADC 和△ABD 面积相等（等底，等高的三角形等积）。

三角形ADC的面积$=\frac{1}{2}\times$△ABC的面积$=\frac{1}{2}\times30=15$平方厘米。

因为△ADC 和△CDE 的高相等，所以△ADC 的面积与△CED 的面积比等于底 的 长 度 的 比 为 （ 2 ＋ 1 ） ： 1 ， 即 3 ： 1 。

$\triangle DCE$的面积$=\frac{1}{3}\triangle ADC$的面积$=\frac{1}{3}\times 15=5$（平方厘米）。

例 6 ABCD 是一个长方形，三角形 ADE 比三角形 CEF 的面积小 10 平万厘米，问 CF 的长是多少？（单位：厘米）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0154_1.bmp}

（北京市第三届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

解法 1：根据题意：△ADE 的面积比△CEF 的面积小 10 平方厘米，利用重叠部分梯形 ABCE，可知△ABF 的面积比长方形大 10 平方厘米。根据三角形面积公式，可求出 BF 的长度，则 CF 的长度也可求出。

（10×6+10）×2÷10—6

=14—6

=8（厘米）

解法 2：连结 DF。

根据已知条件得△DFC 的面积比△ADF 的面积大 10 平方厘米。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0154_1.bmp}

$\triangle ADF$的面积$=\frac{1}{2}\times$长方形面积

$=\frac{1}{2}\times 10\times 6$

$=30$平方厘米。

△DFC 的面积=30＋10=40 平方厘米。

CF=40×2÷10

=8（厘米）。

解法 3：列方程求解。设 CF 长为 x 厘米，则 BF=6+x）厘米。根据“△ABF 的面积减去长方形面积等于 10 平方厘米”建立方程。

$(6+x)\times 10\times\frac{1}{2}-10X6=10$，

5x＝40，

x＝8。

答：CF 的长为 8 厘米。

例 7 如图，ABCD 是长为 8 厘米，宽为 6 厘米的长方形，AF 长是 4 厘米，求阴影部分三角形 AEF 的面积。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0155_1.bmp}

解法 1：先求出三角形 AEB 的面积，它与长方形 ABCD 同底（都是 AB），同高（都是 AD），三角形 AEB 的面积是长方形 ABCD 面积的一半，三角形 AEB 的面积减去三角形 AFB 的面积就是所求阴影部分的面积。

阴影部分面积是：8×6÷2—8×4÷2=24—16=8（平方厘米）。

解法 2：连接 BD，三角形 AEB 与三角形 ADB 等底等高，它们的面积相等，它们的面积都减去重叠部分三角形 AFB 的面积，那么，三角形 AEF 的面积等于三角形 BFD 的面积，三角形 BFD 的底 FD=6—4=2 厘米，高 AB=8 厘米，求出三角形 BFD 的面积就是阴影部分的面积。

阴影部分面积是：　（6—4）×8÷2=8（平方厘米）。

解法 3：三角形 BFD 与三角形 BAF 同高，它们面积的比等于它们底的比，DF：FA=1：2，所以三角形 BFD 的面积是三角形 BAF 面积的一半。

阴影部分面积是：　4×8÷2÷2=8（平方厘米）。

例 8　如图，大正方形边长为 6 厘米，小正方形边长为 4 厘米，求阴影部分的面积。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0156_1.bmp}

解法 1：先求出等腰直角三角形 ABE 的面积与梯形 ACFE 面积的和，再减去直角三角形 BFC 的面积，即为阴影部分面积。

阴影部分面积是：

6×6÷2+（4+6）×4÷2—（6+4）×4÷2

=18+20—20＝18（平方厘米）。

也可如图所示，先求出三角形 ABD 和三角形 CBD 的面积之和，再减去直角三角形 ADE 的面积。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0162_2.bmp}

解法 2：如上图，连接 CE，因 AB、CE 分别是大、小正方形对角线，∠ABE=∠CEF=45°，所以 AB 和 CE 平行，三角形 ABC 和三角形 ABE 同底，同高（平行线 AB 和 CE 间的距离），所以三角形 ABC 的面积等于三角形 ABE 的面和。

阴影部分面积是 6×6÷2=18（平方厘米）。

例 9　如图正方形 ABCD 的边长是 4 厘米，长方形 DEFG 的长 DG=5 厘米。问长方形的宽 DE 为多少厘米？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0157_1.bmp}

解法 1：已知长方形的长，求长方形的宽，需要知道长方形的面积，按常规思路，由长×宽求长方形面积，对照条件，便会束手无策，必须另僻蹊径。根据正方形 ABCD 的面积是 16 平方厘米，能否找到长方形 EFGD 与正方形 ABCD 面积之间的关系呢？连结 AG，我们观察到三角形 AGD 它既在长万形 E-FGD 中，又在正方形 ABCD 中，长方形 EFGD 与三角形 AGD 同底、同高，因此，$S_{长方形}=2S_{\triangle AGD}$。同理，$S_{正方形}=2S_{\triangle AGD}$。所以，$S_{长方形}＝S_{正方形}$＝16（平方厘米）。

DE 的长是：4×4÷5＝3.2（厘米）。

解法 2：由上面分析，以长方形 DEFG 的面积等于正方形 ABCD 的面积这个隐蔽条件作为突破口，进一步捕捉解题思路，如果延长 EF 和 CB 交于 H，那么长方形 EFGD 与平行四边形 AHGD 同底、等高，因此 $S_{长方形EFGD}=S_{平行四边形AHGD}$。同理，$S_{正方形ABCD}=S_{平行四边形AHGD}$。所以，$S_{长方形EFGH}=S_{正方形ABCD}$=16（平方厘米）。

例 10　根据右图进行计算。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0158_1.bmp}

如图，在△ABC 中有二个半径相等的扇形，并且图中的二个阴影部分面积相等，求△ABC 中，BC 边上的高。（单位：

厘米）

（江苏省常州高级中学教改试点班入学试题）

解：根据题意知：三角形 ABC 的面积等于二个扇形面积的和，二个扇形的半径相等，那么，二个扇形可拼成一个大扇形，它的圆心角为（180°-45

°=）135°，再根据三角形面积公式，已知三角形面积和底边就可以求出底边上的高。

三角形ABC的面积 $= 2^2 \times 3.14 \times \frac{180-45}{360}$

=1.57×3

=4.71（平方厘米）。

BC 边上的高为：4.71×2÷（2+2—1）=3.14（厘米）。

例11一个正方形如图，被分成四个长方形，它们的面积分别是$\frac{1}{10}$平方米，$\frac{1}{5}$平方米，$\frac{3}{10}$平方米和$\frac{2}{5}$平方米。图中阴影部分是一个正方形。那么它的面积是_______平方米。

（1992 年小学数学奥林匹克决赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0159_1.bmp}

解：大正方形的面积是，$\frac{3}{10}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=1$（平方米），其边长为1米，上面横向二个长方形有相同的宽，它们的面积分别是$\frac{3}{10}$平方米和$\frac{2}{5}$平方米：

$$\frac{3}{10} : \frac{2}{5} = AB : BD,$$

所以，AB：BD=3：4，

即AB、BD的长度分别是大正方形边长的$\frac{3}{7}$和$\frac{4}{7}$。

同样，$\frac{1}{5} : \frac{1}{10} = AC : CD$，所以$AC : CD = 2 : 1$，

即AC、CD的长分别是大正方形边长的$\frac{2}{3}$和$\frac{1}{3}$。

阴影部分小正方形的边长是大正方形边长的$\frac{4}{7}-\frac{1}{3}=\frac{5}{21}$,

阴影部分小正方形的面积 $=(1\times\frac{5}{21})^2=\frac{25}{441}$（平方米）。

例 12　在一个棱长为 4 厘米的正方体的上下前后左右的正中央位置各挖去一个棱长为 1 厘米的正方体，问挖去后物体的表面积是多少？

（北京市小学生第二届迎新春数学竞赛决赛试题）

解法 1：大正方体一个面的面积：

4×4-1×1=15（平方厘米）。

六个面的表面积：

15×6=90（平方厘米）。

六个小正方体表面积之和是：

l×l×5×6＝30（平方厘米）。

挖出后物体的表面积：

90+30=120（平方厘米）。

解法 2：如果把挖去的小正方体一个面（底面）拼到大正方形表面挖去

部分，可得简便计算如下：

4×4×6+1×1×4×6=96+24＝120（平方厘米)。

例 13　一个长方体十二条棱长之和是 120 厘米，长是宽的 1.3 倍，高比宽多$\frac{1}{4}$，求高是多少厘米。

（1986 年北京崇文区六年级数学竞赛题）

解：把长方体的宽看作“1”，则长是宽的$1\frac{1}{2}$倍，高是宽的$1+\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}$倍。

$120\div[4\times(1+1\frac{1}{2}+1\frac{1}{4})]\times(1+\frac{1}{4})$

=10（厘米）。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0160_1.bmp}

例 14　将高都是 1 米，底面半径分别为 1.5 米、1 米和 0.5 米的三个圆柱组成一个物体。求这个物体的表面积。

解：物体的表面积恰好等于一个大圆柱的表面积加上中、小圆柱的侧面积。

2×π×1.52+2×π×1.5×1+2×π×l×1

+2×π×0.5×1

=4.5π+3π+2π+π

=10.5π（平方米）。

取π值为 3，那么这个物体的表面积是 41.5 平方米。

习题十（A）

1.下面图中有多少条线段？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0161_1.bmp}

2.下面图中有多少个锐角？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0161_2.bmp}

3.下面图中有多少个三角形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0161_3.bmp}

4.下面图中共有多少个三角形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0162_1.bmp}

5.右图中有多少个三角形？如果三角形的尺寸如图（单位厘米），求所有三角形面积之和。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0162_2.bmp}

6.计算下图中大小不同的三角形的个数。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0162_3.bmp}

（1981 年上海市中学生智力竞赛题）

7.数一数右图中共有多少个三角形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0162_4.bmp}

8.右图的长方形中有多少个正方形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0162_5.bmp}

9.右图中共有多少个不同的长方形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0162_6.bmp}

10.右图的正方形中有多少个小正方形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0163_1.bmp}

11.右图中有多少个梯形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0163_2.bmp}

12.右图中有多少个平行四边形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0163_3.bmp}

（1990 年“少年报”小学五年级数学能力水平有奖测试题）

13.下图中有多少个正方形？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0163_4.bmp}

（北京奥林匹克学校入学试题）

14.数一下右图中共有多少个小立方体？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0163_5.bmp}

（北京市朝阳区小学数学竞赛试题）

15.如下页图所示的长方形的六个面都涂满油漆,按上面的线将长方体分割成若干小正方体，问这些正方体中三个面有油漆的几个？二面的呢？一面的呢？各个面上都没有油漆的有多少个？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0164_1.bmp}

16.如右图所示的正方体，每个面上平分成 9 个正方形，图中共有多少个长方体？多少个正方体？

练习十（B）

1.右图中，边长为 4 厘米的正方形其中阴影部分的周长是多少？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0164_2.bmp}

2.如右图，正方形被分成了四个长方形，每个长方形的周长都是 60 厘米，这个正方形的周长等于多少厘米？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0164_3.bmp}

3.图中阴影部分的周长是厘米（π取 3,单位，厘米）。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0165_1.bmp}

（1990 年唐山市小学数学竞赛题）

4.如右图，O 是大圆圆心，O_1,O_2，O_3分别是小圆内三个小圆圆心。试比较大圆周长与三个圆周长之和哪个长些？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0165_2.bmp}

（1980 年北京市朝阳区数学竞赛题）

5.右图是由 8 个面积相等的小正方形拼成的图形，它的面积是______平方厘米。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0165_3.bmp}

（北京市第十届小学生“迎春杯”数学竞赛预赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0165_4.bmp}

6.已知一个四边形的两条边的长度和一个角的度数，如右图所示，那么这个四边形的面积______是平方厘米。

7.如下页图，边长 3 厘米的等边三角形 ABC，沿着 AC 所在的直线滚动一周，求三角形的每个顶点经过的路程。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0166_1.bmp}

（“从小爱数学”邀请赛应征赛题）

两个三角形都是正三角形，大三角形面积是小三角形面积的_______倍。

9.图中阴影部分面积是多少平方厘米？（单位：厘米）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0166_2.bmp}

（1990 年江西省小学生“八一杯”数学竞赛第一试试题）

10.求下面阴影部分的面积。（单位：厘米）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0166_3.bmp}

（1989 年广州市小学五年数学竞赛试题）

（1986 年无锡市北塘区小学数学竞赛试题）

11.右图是边长为 4 厘米的正方形。AE=5 厘米，求 OB 的长。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0167_1.bmp}

12.下图是一块黑白格子布。白色大正方形的边长是 14 厘米，白色小正方形的边长是 6 厘米。问：这块布中白色的面积占总面积的百分之几？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0167_2.bmp}

（1988 年第二届“华罗庚金杯赛”初赛试题）

13.图中的正方形面积是 50 平方厘米，三角形的两条直角边中，长边是短边的 2.5 倍，三角形面积是多少平方厘米？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0167_3.bmp}

（福州市 1988 年小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

14.如图，有一只狗被缚在一建筑物的墙角上，这个建筑物是边长都等于 6 米的等边三角形，绳长是 8 米。求绳被狗拉紧时，狗运动后所围成的总面积。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0167_4.bmp}

（“从小爱数学”邀请赛应征赛题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0168_1.bmp}

15.如图，三角形ADE的面积占三角形ABC面积的$\frac{(\quad)}{(\quad)}$，（单位：厘米）

（《小学生数学报》“北极星”百科知识数学竞赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0168_2.bmp}

16.如图，长方形 ABCD，AEED、DF=FC，EG=2GF，求阴影部分面积。（AB=6 厘米，BC＝10 厘米）

（牡丹江市 1989 年小学生数学竞赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0168_3.bmp}

17.如图，由两个平行四边形组成阴影部分的面积是_______平方厘米。（单位：厘米）

（铜川市城区 1991 年小学数学竞赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0168_4.bmp}

18.如右图， 三角形甲和乙的面积都是长方形面积的$\frac{1}{4}$，阴影部分的面积为________平方厘米。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0169_1.bmp}

19.已知大正方形的边长是 5 厘米、小正方形的边长是 3 厘米，求阴影部分的面积。

（“小学生数学报”1986 年度小学生数学邀请赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0169_2.bmp}

20.如图，三个正方形的边长分别为 1、2、3 厘米，图中阴影部分面积是________平方厘米。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0169_3.bmp}

21.如图，已知正方形甲的边长为 5，正方形乙的边长为 4，那么图中阴影部分的面积为_______。

（1990 年上海市小学六年级数学竞赛题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0169_4.bmp}

22.如图：三角形 ABC 是直角三角形。AB 是圆的直径，且 AB=20 厘米，如果阴影（Ⅰ）的面积比阴影（Ⅱ）的面积大 7 平方厘米，那么 BC 的长度是______厘米（π=3.14）。

（1988 年北京小学数学奥林匹克邀请赛初赛试题）

23.如右图，ABCG 是 4×7 的长方形，DEFG 是 2×10 的长方形，那么三角形 BCM 的面积与三角形 DEM 的面积之差是。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0170_1.bmp}

（1995 年小学数学奥林匹克决赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0170_2.bmp}

24.如图，甲、乙都是正方形，a=12 厘米，b=10 厘米，求阴影部分的面积。

（1986 年福州市鼓搂区第八届小学生数学竞赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0170_3.bmp}

25.已知正方形面积为 12 平方厘米，阴影部分是一个内切圆，求圆的面积。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0170_4.bmp}

26.右图，AD=DG，阴影部分的面积为 45 平方米，求环形的面积。

（1987 年邢台市小学数学竞赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0170_5.bmp}

27.右图的扇形中有一个正方形，求阴影部分的面积。（单位：分米）

28.下页图中四个圆的半径都是 1 米，圆心分别在正方形的四个顶点上，问阴影部分的面积是多少平方米？（π=3.14）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0171_1.bmp}

（1988 年第二届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题）

29.在长方形 ABCD 中，Q 为长边中点，P 为宽边中点，问右图中阴影部分占长方形 ABCD 的几分之几？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0171_2.bmp}

（北京市第二届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

30.一个长方形，如果长减少 5 厘米，宽减少 2 厘米，那么面积就减少 66 平方厘米，这时剩下的部分恰好成为一个正方形。求原来长方形的面积？

（第五届《小学生数学报》数学竞赛初赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0171_3.bmp}

31.两条对角线把梯形分割成四个三角形，已知两个三角形的面积如右

图，求另两个三角形面积各是多少？（单位：平方厘米）

（《小学生报》第三届百科知识竞赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0171_4.bmp}

32.四边形 ABCD 被 AC 和 BD 分成甲、乙、丙、丁 4 个三角形，已知： BE=60 厘米，CE=40 厘米，DE=30 厘米，AE=80 厘米。问丙、丁两个三角形面积之和是甲、乙两个三角形面积之和的多少倍？

（1991 年第三届华罗庚金杯赛决赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0172_1.bmp}

33.有三个小正方体拼成一个如右图的样子，表面比原来减少了 16 平方厘米，每个小正方体的棱长是多少厘米？

（1990 年《少年报》小学五年级数学能力水平有奖测试题）

34.有一块方木，横截面为正方形，每边长4分米，相当于长的$\frac{1}{10}$,根据现有木料要加工成最大的圆柱体，在方木中约去掉百分之几的木材？

（天津和平区小学数学竞赛试题）

35.边长 1 米的正方体 2100 个，堆成一个实心的长方体，它的高是 10 米，长、宽都大于高。问长方体的长与宽的和是几米？

（第一届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0172_2.bmp}

36.如把右图中的长方形 ABCD，以 BC 为轴，旋转一周得出来的立方体，它的底面积、侧面积、体积各是多少？

（1986 年上海黄浦区六年级　　　　（单位：厘米）数学竞赛试题）

37.下页图是一个零件的直观图，下部是一个棱长为 5 厘米的正方体，上部正好是圆柱体的一半，求零件的表面积和体积。

（1986 年上海市黄浦区“从小爱数学”邀请赛选拔赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0173_1.bmp}

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0173_2.bmp}

38.右图，一堆积木是由 16 块棱长是 2 厘米小正方体堆成的，它们的表面积是（　　）平方厘米。

（1987 年北京市第三届小学生“迎春杯”数学竞赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0173_3.bmp}

39.一个正方体形状的木块。棱长 1 米。沿水平方向将它锯成 3 片，每片又锯成 4 长条，每条又锯成 5 小块，共得到大大小小的长方体 60 块。这 60 块长方体的表面积的和是________平方米。

（1988 年北京市小学数学邀请赛初赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0173_4.bmp}

40.一个底面直径是 20 厘米的圆柱形玻璃杯中装水，水里放着一个底面直径为 6 厘米，高 2 厘米的圆锥形铅锤（如图），当铅锤取出后，杯里的水面会下降多少厘米？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0174_1.bmp}

41.一个正方形的纸盒中恰好能放入一个体积为 628 立方厘米的圆柱体，如右图，纸盒的容积有多大？（圆周率=3.14）

（第四届“华罗庚金杯”赛复赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0174_2.bmp}

42.有一个底面周长为 9.42 厘米的圆柱体，从中间斜着截去一段后，求截后的体积是多少？

（辽宁省首届小学生数学竞赛试题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0174_3.bmp}

43.一个棱长 20 厘米的正方体木块，在它的上、右、前三个面的中心位置分别凿一个开口为边长 4 厘米的正方形小孔直至对面，做成一个模型（如右图），求这个模型的体积和表面积。

十一　推理问题——
有根有据，还其庐山真面目

解数学问题总有一个分析推理过程。有些问题有一定的解题规律和原理，但在数学竞赛中，往往遇到这样一类问题，它没有一定的解题规律和原理，好像与数学没有直接联系，它要求我们根据所给条件，进行合理的推理，作出正确的判断，这种判断推理问题，叫做逻辑推理问题。解答这类问题对于培养小学生初步的逻辑思维能力有着独特的意义。

有根有据的推理过程，就是逻辑推理过程，下面我们通过具体例子，介绍解决这类问题的基本技巧和方法。

逻辑推理问题的显著特点是层次多，条件纵横交错，如何从较繁杂的条件中选准突破口，层层分析，一步步向结论靠近，这是解决问题的关键。同时也采用列表的方法把错综复杂，眼花缭乱的条件变得一目了然。然后再根据题目的条件用逻辑推理的方法，不断地否定和排除不可能存在的情况，从而得出正确的结论。

例 1 小刘、小张和小徐在一起，一位是工人，一位是农民，一位是战士。现在只知道：

（1）小徐比战士年龄大；

（2）小刘和农民不同岁；

（3）农民比小张年龄小；

你能确定谁是工人，谁是农民，谁是战士吗？

解：由条件（1）推出：①小徐不是战士；

由条件（2）推出：②小刘不是农民；

由条件（3）推出：③小张也不是农民。

把上面②③二点的分析填入表内：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0176_1.bmp}

从最后的表中看出：小刘是战士，小张是工人，小徐是农民。

例 2　三个书包，有一个装着两个红球，另一个装着两个白球，还有一个装着一个红球一个白球。可是，书包外面的标签都贴错了，标签上写着的字与书包里球的颜色不一样。你能不能只从一个书包里摸出一个球，就能说出这三个书包装的是什么颜色的球？

解：错误标签的书包内装的球可分两种情况：

	错误的标签	一红一白	两红	两白
书包内的球	1	两红	两白	一红一白
	2	两白	一红一白	两红

先在错误标签为“一红一白”的书包中摸出一球，就可以说出各书包装的是什么颜色的球。

（1）如果摸出的是红球，根据上表所示，这个书包中实际上是两个红球，标签“两红”的书包装的是两个白球，标签“两白”的书包装的一红一白球。

（2）如果摸出的是白球，这个书包装的是两个白球，标签“两红”的书包装的是一红一白球，标签“两白”的书包装的是两个红球。

例 3　李敏、陈超、张波三位老师，在语文、数学、政治、地理、音乐、

美术六门课中每人教两门，现知道：

（1）政治和数学老师是邻居；

（2）陈超最年轻；

（3）李敏经常对地理和数学老师谈论小说；

（4）地理老师比语文老师年龄大；

（5）陈超、音乐老师、语文老师三人经常一起去游泳。

问：李敏，陈超、张波三位老师各教哪两门课？

解：由条件（5）推出：①陈超不教音乐和语文（教音乐和语文是两位老师）；

由条件（3）推出：②李敏不教数学和地理（教数学和地理是两位老师）；

由条件（2）（4）推出：③陈超不教地理（教地理和语文是两位老师）。

根据①、②、③可列表如下，并从表中可以看出张波教地理。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0178_1.bmp}

从最后的表中看出：李敏教语文、政治，陈超教数学、美术，张波教地理、音乐。

例 4　下面三块正方体六个面，都是按相同规律涂有红、黄、蓝、白、黑、绿六种颜色。请辨别一下涂黄色的对面涂的是什么颜色？涂白色的对面涂的是什么颜色？涂红色的对面涂的是什么颜色？

（洛阳市 1988 年小学生数学竞赛题）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0179_1.bmp}

解：如果直接思考黄色的对面是什么颜色较为困难，不妨换一个角度，间接地思考黄色的对面不是什么颜色。

从图（A）可知，黄色的对面不是白色和黑色；

从图（C）可知，黄色的对面不是蓝色和红色。

把上面分析结果填入表内，简明直观地看到黄色的对面一定是绿色。

同理，从图（A）、（B）可推出白色的对面一定是蓝色。剩下的黑色对面一定是红色。并列表如下：

		红	黄	蓝	白	黑	绿
黄	图A		×		×	×	
	图C	×		×			
白	图A		×		×	×	
	图B	×					×
黑	图A	√	×	×	×	×	×

本题的思考方法是先把不可能的都排除，最后剩下的就是要找的结果。

对于有些推理问题可先假设某一结果成立：并以此为依据，层层推理，若推理导致矛盾，即否定最初假设，再重新提出假设，直到符合要求为止。

例 5　张三、李四、王五三名同学中有一名同学在别人都不在时为集体做好事，事后老师问三人，是谁做的好事：

张三说：是李四。

李四说：不是我。

王五说：不是我。

如果知道他们三人中有两个人说的是假话，有一个人说的是真话，请问是谁做的好事？

（北京市海淀区 1987 年小学生第二届智慧杯数学竞赛试题）

解：分析推理的结论，心须符合“三人中只有一人说了真话”这一条件。

根据题意答案有三个可能：

（1）如果是张三做的好事，那么张三说的“是李四”是假话，李四说的“不是我”是真话，王五说的“不是我”也是真话，这样有两人说真话，与两人说假话，一人说真话的条件矛盾。

所以不是张三做的好事。

（2）如果是李四做的好事，那么张三说的“是李四”是真话，李四说的“不是我”是假话，王五说的“不是我”是真话，与两人说假话，一人说真话的条件相矛盾。

所以不是李四做的好事。

（3）如果是王五做的好事，那么张三说的“是李四”是假话，李四说的“不是我”是真话，王五说的“不是我”是假话，符合题目“只有一人说真话”的条件。

所以是王五做的好事。

例 6　一位老师有三白两黑五顶帽子，让三个学生看了，然后要三个学生闭上眼睛，替每人戴上一顶白帽子，把两顶黑帽子藏起来，最后让他们睁开眼睛，由看看别人头上戴的帽子来判断自己所戴帽子的颜色。

这三个学生犹豫了一下，然后一个学生说出自己戴的是白帽子，他是怎样判断的呢？

解：这个学生想，三人戴的帽子只可能下列三种情况：

（1）二黑一白；

（2）一黑二白；

（3）三白。

如果是第一种情况，那么戴白帽子的人一定会看到别人头上已有两顶黑帽子，就会脱口而出地说出自己戴的是白帽子，但没有人立即回答，可见不是第一种情况。

如果是第二种情况，其中一个戴白帽子的人（不妨设甲）看到一黑一白，他（甲）就会想：假如自己戴的是黑帽子，那么戴白帽子的人（不妨设乙）一定会脱口而出地说他（乙）自己戴的是白帽子，这样在第二种情况下，既然（乙）没有说自己戴的是白帽子，甲就可以推断他自己戴的是白帽子，他就应该说出自己戴的是白帽子。现在既然没有回答，都犹豫了一下，可见第二种情况不存在。

否定了第一、二种情况后，只可能三人都戴着白帽子。

所以，过了一会儿一个学生说他头上戴的是白帽子。

当然，进行这样的推理，要能得出正确的结论，要善于综合运用各种规律和方法，还要注意学会判断别人的心理状态，才能作出正确的判断。

例 7　在一次数学竞赛中，A、B、C、D、E 五位同学分别得了前五名（没有并列同一名次的）。关于各人的名次，大家作出了下面猜测：

A 说：“第二名是 D，第三名是 B。”

B 说：“第二名是 C，第四名是 E。”

C 说："第一名是 E，第五名是 A。"

D 说："第三名是 C，第四名是 A。"

E 说："第二名是 B，第五名是 D。"

可是，每人都只猜对了一半。请研究一下，他们的名次如何？

解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0183_1.bmp}

假设 A 说的"第二名是 D"真，则 A 说的"第三名是 B"假，从而 E 说的"第二名是 B"真。由表（1）看出第二名有两人，与题目的条件"没有并列同一名次"矛盾。

所以第二名不是 D。

从表（2）中可以看出：第一名 E，第二名 C，第三名 B，第四名 A，第五名 D。

经检验上述结果是正确的，这里注意检查的事项是：

（1）横向检查——每人猜中只能一个名次。

（2）纵向检查——每个名次有且仅有一个人得到。

注意，如果先假设再推理，假设情况应不重不漏，才能把问题解答得严密、完整。

有些数学竞赛题数量关系比较隐蔽，我们根据具体问题巧妙设计和使用表格，找到已知条件间的相互关系，并发现隐含问题，从而使问题真相大白，显露出事物的庐山真面目。

例 8　甲、乙、丙、丁与小强五位同学一起比赛象棋，每两人都要比赛一盘。到现在为止，甲已经赛了 4 盘，乙赛了 3 盘，丙赛了 2 盘，丁赛了 1 盘。问小强已经赛了几盘？

（"华罗庚金杯"少年数学邀请赛复赛试题）

解：这道题的数量关系比较隐蔽，如果我们把各人已经赛的盘数填入设计好的表格内，就很容易看出小强已经赛了几盘。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0184_1.bmp}

甲和乙赛了 1 盘，就在表中"甲"与"乙"交叉的那一格里打"√"，丁没有和丙比赛过，就在"丁"和"丙"交叉的那一格里打"○"。根据条件分析，填好表格后，就能一目了然的看出小强与甲和乙各赛了 1 盘，共赛了 2 盘。

例 9 某市举行家庭普法学习竞赛，有五个家庭进入决赛(每家 2 名成员)，决赛时，进行四项比赛，每项比赛各家出一名成员参赛。第一项参赛的是吴、孙、赵、李、王；第二项参赛的是郑、孙、吴、李、周；第三项参赛的是赵、张、吴、钱、郑；第四项参赛的是周、吴、孙、张、王。另外，刘某因故四项均未参加。问谁和谁是同一个家庭的？

（《小学生数学报》1987 年小学生数学邀请赛六年制五年级试题）

解：这道题条件多而错综复杂，使人眼花缭乱，现列表整理如下：

条件: $\begin{array}{r} 5\text{个家庭} \\ \text{每家}2\text{人} \end{array}\begin{pmatrix} \text{吴、孙、赵、李、王} \\ \text{郑、周、张、钱、刘} \end{pmatrix}$

刘某因故未参加

比赛四项

问题：谁和谁是同一个家庭？

项目 参赛 成员	吴	孙	赵	李	王	郑	周	张	钱	刘
第一项	√	√	√	√	√					
第二项	√	√		√		√	√			
第三项	√		√			√		√	√	
第四项	√	√			√		√	√		

从表中可以看出，吴参赛 4 次，刘某因故未参加，可知吴和刘是一个家庭；孙和钱是一家人；赵和周是一家人；李和张是一家人；王和郑是一家人。

练习十一

1.1 号、2 号、3 号、4 号运动员取得了运动会 800 米赛跑的前四名。小记者来采访他们各自的名次。1 号说：“3 号在我前面冲向终点。”另一个得第三名的运动员说：“1 号不是第 4 名。”小裁判员说：“他们的号码与他们的名次都不相同。”你知道他们的名次吗？

2.甲、乙、丙三人，他们是跳伞、田径、游泳运动员，

已知：

（1）乙从未上过天。

（2）跳伞运动员已得到过两次冠军。

（3）丙从未拿过金牌，他经常与田径运动员下跳棋。

请你根据上述情况判断这三人各是什么运动员？

3.一个正方体，每个面上分别写上 A、B、C、D、E、F，你能根据这个正方体不同的摆法，求出相对两个面的字母各是什么？

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0186_1.bmp}

4.有 A、B、C 三个合唱队，每个合唱队有一个指挥，他们是小辉、小英（女）、小芳（女）；王老师、张老师、李老师分别给三个队伴奏。已知：

①A 队和王老师的队分别都是女指挥。

②B 队的女指挥不是小英。

③李老师不给 C 队伴奏。

由此判断：A 队的指挥是（　　），伴奏是（　　）

B 队的指挥是（　　），伴奏是（　　）

C 队的指挥是（　　），伴奏是（　　）

（1988 年长春市小学四年级数学邀请赛）

5.一天，到四年级六班上课的有赵老师，钱老师和李老师。但不知道他们每人上什么课，只知道这三门课是语文，数学和外语。另外还知道赵老师上课全部用汉语，外语老师是一个同学的哥哥，李老师是女教师，她向数学老师问了一个问题。请你想一想这三位老师各上的是什么课？

6.同住一间寝室的 A、B、C、D 四名女大学生，正在听一组乐曲，她们当中有一人在修指甲；一个人在做头发；一个人在化妆；另一个人在看书，已知：

（1）A 不在修指甲，也不在看书；

（2）B 不在化妆，也不在修指甲；

（3）如果 A 不在化妆，那么 C 不在修指甲；
（4）D 不在看书，也不在修指甲。
问他们各自在做什么？
7.小东、小兰、小英读书的学校是一中、二中、三中，他们各自爱好游泳，篮球、排球中的一项体育运动，但谁爱哪项运动，在哪个学校读书还不清楚。只知道
（1）小东不在一中；
（2）小兰不在二中；
（3）爱好排球的不在三中；
（4）爱游泳的在一中；
（5）爱游泳的不是小兰。
你能帮助弄清楚他们各自读书的学校和爱好的运动项目吗?
8.有红、黄、蓝三个盒子，两个盒子是空的，一个盒子放了乒乓球，每个盒子盖上都写了一句话：
红盒上写着“乒乓球不在这里” ①
黄盒上写着“乒乓球不在这里” ②
蓝盒上写着“乒乓球在红盒里” ③
不过，其中只有一句话是真的，想一想：乒乓球究竟在哪个盒子里？
9.有三名工人，一名是电工，一名是车工，一名是钳工。又知道下面的三种说法只有一种是对的：
（1）甲是车工；
（2）乙不是车工；
（3）丙不是钳工。
请问：他们各是什么工种？
10.某同学在校外做了一件好事，老师找了与这件事有关的甲、乙、丙、丁四人。
甲说：是乙做的。
乙说：是丁做的。
丙说：不是我做的。
丁说：乙说得不对。
这四人中只有一人说了实话。问这件好事是谁做的？
11.甲、乙、丙，丁四位同学的运动衫上印了不同的号码。
赵说：甲是 2 号，乙是 3 号。
钱说：丙是 4 号，乙是 2 号。
孙说：丁是 2 号，丙是 3 号。
李说：丁是 1 号，乙是 3 号。
又知道赵、钱、孙、李每人都只说对一半。那么丙的号码是号____号。
（1988 年北京小学数学奥林匹克邀请赛初赛试题）
12.我国有“三山五岳”之说，其中五岳是指：东岳泰山、南岳衡山、西岳华山，北岳恒山和中岳嵩山。一位老师拿出这五座山岳的图片，并在图片上标出数字，他让五位学生来辨别，每人说出两个。学生回答如下：
甲：2 是泰山，3 是华山。
乙：4 是衡山，2 是嵩山。
丙：1 是衡山，5 是恒山。

丁：4 是恒山，3 是嵩山。
戊：2 是华山，5 是泰山。
老师发现五个学生都只说对了一半，那么正确的说法应该是什么呢？
13.红、黄、蓝、白、紫五种颜色的珠子各一颗，用纸包着，在桌上排成一行。有 A、B、C、D、E 五个人猜各包里的珠子的颜色，每人只能猜两色。
A 猜：第二包是紫的；第三包是黄的。
B 猜：第二包是蓝的；第四包是红的。
C 猜：第一包是红的；第五包是白的。
D 猜：第三包是蓝的；第四包是白的。
E 猜：第二包是黄的；第五包是紫的。
猜完了，打开各个纸包一看，每人都猜对了一种，并且每包只有一人猜对。判断他们各猜对了哪一种颜色的珠子？
14.A、B、C、D 四个篮球队一起进行比赛，每两队都要比赛一场，到现在为止，A 已赛了 3 场，B 赛了 2 场，D 赛了 1 场，问 C 赛了几场？
15.甲、乙、丙、丁比赛乒乓球，每两个人要赛一场，结果甲胜了丁，并且甲、乙、丙三人胜的场数相同。问丁胜了几场？
（首届“华罗庚金杯”少年数学邀请赛初赛试题）

参考答案

练习一

1.根据 11-1=10 或者 9＋l=10 条件，填写运算符号和括号，得两个算式，

（1）11-9÷9=11-1=10

（2）（1+1÷9）×9=1×9+19×9=9+1=10

2.这题解法很多，比如下面的解法。

4÷4+4-4=1

4÷4+4÷4=2

（4+4+4）÷4=3

（4-4）×4+4=4

（4×4+4）÷4=5

3.经简略运算不难凑出如下结果：

（1）（1+2）÷3=1

（2）1×2+3-4= 1

（3）[（1+2）×3-4] ÷5=1

（4）1+2+3-4+5-6=1

（5）{[1+2+3+4]÷5+6}-7=1

4.由于等式右边 100 比左边的 1，2，3，4，5 大得多，所以应首先考虑填乘号、加号。经试算可得如下结果：

（1）(1×2+3)×4×5=100

（2）1×(2+3)×4×5=100

5.由于右侧数较大，采用逼近法，用较少的 9 通过运算使结果尽快接近 2000，然后用剩下的 9 通过运算进行调整。

（1）999+999+(9+9)÷9+9×9-9×9+9-9=2000

或(9+9)÷9×999+(9+9)÷9+9÷9-9÷9+9-9=2000

或 9999÷9+999-99-9-9÷9-9÷9=2000.

6.解

$$60\div\begin{cases}14=4\cdots\cdots4\\11=5\cdots\cdots5\\9=6\cdots\cdots6\end{cases}$$

7.解：（1）根据其差值最大的条件，整数部分被减数尽可能大，减数部分尽可能小；分数部分被减数的分子尽可能大，分母尽可能小，减数部分的分子尽可能小，分母尽可能大，这样应是：

$98\frac{5}{6}-12\frac{3}{7}$

（2）根据其和值最小的条件，整数部分尽可能小，分数部分的分子尽可能小，分母尽可能大，这样应是：

$13\frac{6}{9}+24\frac{5}{8};13\frac{5}{8}+24\frac{6}{9};\ 14\frac{6}{9}+23\frac{5}{8}$等

```
(1)      6 6           (2)      2 8 5
       × 3 5                 ×    3 5
      ───────               ──────────
       3 3 0                 1 4 2 5
     1 9 8                   8 5 5
     ───────                ──────────
     2 2 1 0                 9 9 7 5
```

9.解：(1)

```
        5 2
    ───────
37) 1 9 2 4
    1 8 5
    ───────
        7 4
        7 4
       ─────
          0
```

(2)

```
          2 1
    ─────────
84) 1 7 6 4
    1 6 8
    ─────────
        8 4
        8 4
       ─────
          0
```

10.解：

```
            9 8 9
     ────────────
112) 1 1 0 7 6 8
     1 0 0 8
     ────────────
       9 9 6
       8 9 6
      ───────
       1 0 0 8
       1 0 0 8
      ─────────
             0
```

11.解：

```
          9 8 0 7
    ─────────────
12) 1 1 7 6 8 4
    1 0 8
    ─────────────
      9 6
      9 6
     ───────
          8 4
          8 4
     ─────────
            0
```

12.解：

(1) H=2，E＝3，A= 9。

(2) A＝1，B=0，C=8，D＝9。

(3) A=1,B＝9，C=8。

(4)A=5,B=6，C=1,D＝0，E=7。

13.

```
    1 2 3 4 5 6 7 8 9
+   8 6 4 1 9 7 5 3 2
─────────────────────
    9 8 7 6 5 4 3 2 1
```

14.

```
        5 3 2 1
  ×         9 0
───────────────
    4 7 8 8 9 0
```

15.“三”代表 1，“好”代表 4，“学”代表 6，“生”代表 3。

16.

```
   5 2 4 0
+  5 2 1 0
──────────
 1 0 4 5 0
```

兵为 5，炮为 2，马为 4，卒为 0，车为 1

17.(1) $$\begin{array}{r} 21978 \\ \times \quad 4 \\ \hline 87912 \end{array}$$

(2) $$\begin{array}{r} 142857 \\ \times \quad 3 \\ \hline 428571 \end{array}$$

(3) $$\begin{array}{r} 111 \\ \times \ 111 \\ \hline 12321 \end{array}$$

练习二

1.根据“用任何数排列”的条件，则 5=1＋2＋2；5=1＋1+3；5= 3+2+0

那么，13=1+1+3+1+2+2+3+0；

14=1+2+2+1+2+2+2+2

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0194_1.bmp}

2.解

3.图中的 A=12，B=15，C=20，D=16，E=11 时它能构成一个三阶幻方。

4.解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0195_1.bmp}

5.本题的解有三种类型

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0195_2.bmp}

6.解：解不唯一

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0195_3.bmp}

7.解：解不唯一

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0195_4.bmp}

8.解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0196_1.bmp}

9.解：解不唯一

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0196_2.bmp}

10.本题解有三种类型。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0196_3.bmp}

11.解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0196_4.bmp}

12.本题答案不唯一，这里只列二种填法。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0196_5.bmp}

13.解：六个质数的和为 20，则每个质数都很小，只可能是 2、3、5。而 2＋3＋5=10，每个质数恰好用两次。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0197_1.bmp}

每个小三角形的顶点上的数是 2、3、5。把数字填入圆圈有多种填法，不管怎么填，这六个质数的乘积是：

2×2×3×3×5×5=900

14.本题答案不唯一

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0197_2.bmp}

15.本题有下面三种解法：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0197_3.bmp}

16.解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0197_4.bmp}

17.解：
{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0198_1.bmp}

练习三

1.15050
2. 16900
3.5852
4.25050
5. 2550
6.三位数依次为 100，101，102，…999；
（100+ 999）×900÷2= 494550
7.这三个连续自然数的中间数是：231÷3=77，这三个数中最大的一个是 78
8.分解 2370 质因数
2730= 2×3×5×7×13
=13×（2×7）×（3×5）
=13×14×15
答：这三个数分别是 13，14，15。
9.因为相邻的两个偶数相差 2，所以它们与同一个数相乘所得的两个积是这个数的 2 倍，因此这个数为 50÷2=25
11.$1-\frac{1}{200}=\frac{199}{200}$
12.$\frac{1}{100}-\frac{1}{200}=\frac{1}{200}$

练习四

1.[解法一]
（0.25×100—22）÷（0. 25—0.2）＝60（张）……0.2 元的张数。
100—60=40（张）……0.25 元的张数。
[解法二]
（22—0.2×100）÷（0.25—0.2）＝40（张）……0.25 元的张数。
100—40＝60（张）……0.2 元的张数。
2.[解法一]
（$3\times100—100$）÷（$3-\frac{1}{3}$）$=75$（人）……中学生，
100—75=25（人）……幼儿。
[解法二]
（$100-\frac{1}{3}\times100$）÷（$3-\frac{1}{3}$）$=25$（人）……幼儿。
（提示：一个幼儿一顿饭吃$\frac{1}{3}$个馒头）。
3.单打：7 张，双打：5 张。

提示：单打时，每张乒乓球台上有 2 人，双打时，每张乒乓
球台上有 2×2＝4 人。

4.【解法一】

[20×（112÷14）-112]÷（20-12）=6（天）

[解法二]

112÷）4-[112-12×（112÷14）]÷（20-12）=6（天）

5.（15×10-100）÷（15+10）=2（题）。

6.（0.05×17- 0.64）÷（0.05×2-0.02- 0.01）=3
（枚）　　……1 分币或 2 分币。

17- 3×2=11（枚）……5 分币。

（提示：假设 17 枚硬币都是 5 分的，找出与实际总值的相差数后，要用 2 枚 5 分币去调换 1 枚 1 分币、1 枚 2 分币，才能保持总枚数不变。）

7.（0.5×1000- 480）÷（0.5+ 3.5）＝5（块）

8.假设鸡有 13 头，兔有 0 头，则鸡比兔多 2×13- 4 ×0= 26 只脚，与实际相差 26- 16= 10 只脚。如果每次鸡多 1 头，兔也多 1 头（头数差仍是 13 头），那么可减少 4- 2=2 只脚，要减少 10 只脚，就要进行 102÷2=5（次），也就是兔有 0+ 5= 5（头），鸡有 13＋5= 18（头）。

9.（3×42- 56）÷（3+ 2）= 14（人）……女生，
42- 14= 28（人）……男生。

10.蜘蛛 5 个，蜻蜓 7 个，蝉 6 个。

（提示：因为蜘蛛没有翅膀，蜻蜓和蝉都是 6 只脚，都有翅膀，所以先不考虑翅膀，而把 6 只脚的动物看作为一类，这样 200 原题可改变为有连续性的两个“鸡兔问题”：

①有蜘蛛和 6 只脚的动物共 18 个，共有脚 118 只，问两种动物各有多少个？（解得蜘蛛 5 个，6 只脚的动物 13 个。）

②有蜻蜓和蝉共 13 个，翅膀 20 对，蜻蜓和蝉各有多少个？）

11.[（179- 3- 2）-2]÷（3+1）=43……除数，
43×3+ 2= 131……被除数，
131-43＝88。

（提示：由“两数相除商 3 余 2”、“被除数、除数、商与余数的和是 179”可得被除数与除数的和是 179- 3- 2= 174，又可得破除数比除数的 3 倍还多 2。假设被除数减少 2，则正好是除数的 3 倍，所以（174- 2）是除数的（1+3）倍，可以先求除数。）

12.第一船运 4200 块，第二船运 2900 块，第三船运 2700 块。

（提示：假设第一船多运 1400 块，这时，①第一船运的就与其余两船共运的同样多，②三只船共运了 9800＋1400= 11200 块正好是第二、三船共运的 2 倍，由此可得第二、三船共运 11200÷2= 5600 块。再假设第 2 船少运 200 块，则 5600- 200= 5400 块正好是第三船的 2 倍，所以第三船运 5400÷2=2700 块。）

13.12 人

（提示：假设原来女工人数是“1”，则原来男工人数为“2”，男工调走18人，后来男工人数是女工人数的$\frac{1}{2}$，所以18人相当于女工人

数的（$2-\frac{1}{2}$），这样就可求出女工人数了。）

14.420 棵

（提示：假设管理人员几天后能将所有的苹果树与桃树都喷完农药的话，那么他每天喷 15 棵桃树时，就应该每天喷 15×3= 45 棵苹果树（因为苹果的棵数是桃树的 3 倍），但是，实际是苹果树每天少喷 45- 25= 20 棵，导致还有 140 棵没有喷药，由此可求出管理人员喷药的天数是 14020—7 (天)，所以桃树有 15×7＝105 棵，苹果树有 25×7＋140=315 棵。）

15.360 米

（提示：可参考第 14 题的解题思路。）

练习五

1.[解法一]

设乙做 x 朵，则甲做（x＋5）朵，丙做（x＋22）朵，按“ 丙做的是甲的 2 倍 ”等量关系列方程，得

x+22=（x+5）×2。

解方程，得 x=12。

（12+5）+12+（12+22）＝63（朵）。

[解法二]

设甲做 x 朵，则乙做（x-5）朵，丙做 2x 朵，按“ 丙比乙多做 22 朵 ”等量关系列方程，得

2x-（x- 5）＝22。

解方程，得 x=17。

17+ （17- 5）＋17×2＝63（朵）。

答：他们一共做了 63 朵花。

2.45

（提示：因为被减数= 差+ 减数，所以被减数= 差+ 减数= 120÷2+ 60）

3.本题的关键是当父子两人都健在时，他们两人的年龄差恒为 30 岁。

[解法一]

设儿子明年 x 岁，则父亲明年 3x 岁，按“ 父亲比儿子大 30 岁 ”等量关系列方程，得

3x-x=30，解得 x=15，

所以明年父亲 15×3= 45 岁，今年父亲是 45-1=44 岁。

[解法二]

设今年父亲 x 岁，则明年父亲（x＋1）岁，今年儿子（x- 30）岁，明年儿子（x-30＋1）岁，按“ 明年父亲的年岁是儿子的 3 倍 ”等量关系列方程得 x ＋1=3（x-30+1），解得 x=44。

4.[解法一]

设 学雷锋小组共有 x 人，按“ 两种计算砖的块数的结果相等 ”等量关系列方程，得

18x＋2=20（x-1），解得 x＝11 人，所以共有

20×（11- 1）＝200（块）砖。

[解法二]

设　共有 x 块砖，按“两种计算人数的结果相等”等量关系列方程，得

$$\frac{x-2}{18}=\frac{x+20\times1}{20}$$，解得$x=200$。

5.由“上、下底的和是 15 分米，差是 5 分米”可以先求出上底是（15-5）÷2= 5 分米，下底是（15＋5）÷2= 0 分米。

设　梯形的高为 x 分米（也就是 BC、AD 边上的高为 x 分米），按“三角形 BCD 的面积比三角形 ABD 的面积大 10 平方分米”等量关系列方程，得 $\frac{1}{2}\times10\times x-\frac{1}{2}\times5\times x=10$，解得$x=4$，所以梯形面积为$\frac{1}{2}\times15\times4=30$平方分米。

6.45 元、41 元。

7.[解法]

设这批书共有 x 本，按“两种计算每包装的本数的结果相等”为数量关系列方程，得

$$\frac{\frac{7}{12}x-35}{14}=\frac{(1-\frac{7}{12})x+35}{11}$$

解方程，得 x=1500。

8.[解法]

已知乙队完成的是甲队完成的$\frac{1}{3}$，丙队完成的是乙队完成的2倍，并且，甲、乙、丙三队共同完成了一项工程（单位“1”），所以可以先列方程分别求出甲、乙、丙三队各完成了全工程的几分之几，再分别除以相应的工作时间，就可以求出他们各自的工作效率，进而求出他们各自独作所需要的天数。

设 甲队完成了这项工程的$\frac{1}{x}$，则乙队完成了这项工程的$\frac{1}{x}\times\frac{1}{3}$，丙队完成了这项工程的$\frac{1}{x}\times\frac{1}{3}\times2$，按“甲、乙、丙三队共同完成了一项工程”为等量关系列方程，得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{x}\times\frac{1}{3}\times2=1$$

$$\frac{1}{x}(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3})=1$$

$$x=2$$

$$1\div[\frac{1}{2}\div(6+9)]=30(\text{天})$$

$$1\div[\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\div4]=24(\text{天})$$

$$1\div[\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times2\div6]=18(\text{天})$$

答：甲、乙、丙独做分别要 30 天、24 天、18 天完成。

9.[解法]

第一次甲容器中纯酒精倒入乙容器中，使得乙容器 15 升水变为浓度为

25%的酒精溶液，这时乙容器中的水（15 升）占乙容器中混合溶液的（1- 25%），所以乙容器中的混合溶液为 15÷（1-25%）=20 升，乙容器中含纯酒精 20- 15= 5 升（也就是第一次甲容器中的酒精倒入乙容器中的升数），所以，这时甲容器中还剩 11-5=6 升纯酒精。

设　第二次从乙容器中倒入甲容器的混合液是 x 升。按“最后甲容器中的纯酒精含量是 62.5%”为等量关系列方程，得 $\frac{6+25\%x}{6+x}=62.5\%$

解方程，得　x=6。

10.【解法】

首先要明确甲乙越过路口中心才产生“又走 45 分钟后，二人离路口的距离又相等”。从两人同时出发到第二次离路口中心距离相等，共经过 5＋45=50 分钟，甲比乙多走 1500 米，所以甲每分钟比乙多走 1500÷50=30 米。

设　乙每分钟行 x 米，则甲每分钟行[x＋1500÷（5＋45）]米，按“甲、乙同时出发 5 分钟，离路口中心距离相等”为等量关系列方程，得

1500-[x+1500（5+45）]×5= 5x。

解方程，得 x=135，

135+[1500÷（5+ 45）]=165（米）。

11.【解法】

如果所求的原六位数写成$\overline{abcde2}$，那么由题意所得到的新六位数是$\overline{2abcde}$（其中，a、b、C、d、e分别表示各数位上的数字）。

设$\overline{abcde}$为x也就是设由原六位数中，除末位数2外，余下的五个数位上的数字所组成的五位数为 x），则原六位数是（10x＋2），新六位数是（2×100000＋x），按“原数是新数的 3 倍”为等量关系列方程，得

10x+2=3（2×100000+x）。

解方程，得 x=85714。

所以，原六位数是 857142。

答：原六位数是 857142。

12.[解法]

（如左图），显然，两个正方形之间部分的面积（20 平方厘米）等于四个完全相等的梯形的面积之和，所以每个梯形的面积是 20÷4= 5（平方厘米）。

设　小正方形的边长是 x 厘米，按“阴影部分的梯形的面积是 5 平方厘米”为等量关系列方程，得

$$\frac{1}{2}[x+(1+x+1)]\times 1=20\div 4。$$

解方程，得 x=4。

4×4=16（平方厘米）。

13.[解法]

设黄皮球有 x 个，红皮球有 y 个，则蓝皮球有 9x 个，按“总个数是 26 个”为等量关系列方程，得

x+9x+v=26

求这个不定方程的整数解

y=26=10x

因为 x、y 均为自然数，所以 x 只能取 1 或 2。

当 x=1 时，得 y=26-10×1=16，蓝皮球有 1×9=9（个）；

当 x=2 时，得 y=26-10×2=6，蓝皮球有 2×9=18（个）。

答：黄皮球、红皮球、蓝皮球各有 1 个、16 个、9 个或 2 个、6 个、18 个。

14．[解法]

首先要明确 $\frac{3}{10}$ 的单位“1”是被调查的学生总数；$\frac{1}{3}$ 的单位“1”是被调查的男生数；$\frac{1}{4}$ 的单位“1”是被调查的女生数，三个分率所对应的单位“1”各不相同。

设男生有 x 人，女生有 y 人，则学生总数有（x＋y）人，按“两种计算戴眼睛的人数的结果相等”为等量关系列方程，得

$$\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=\frac{3}{10}(x+y),$$
$$20x+15y=18x+18y$$
$$x=\frac{3}{2}y,$$

所以男生占学生总数的 $\frac{x}{x+y}$，其中 x 用 $\frac{3}{2}y$ 代入可以得：

$$\frac{x}{x+y}=\frac{\frac{3}{2}y}{\frac{3}{2}y+y}=\frac{\frac{3}{2}y}{\frac{5}{2}y}=\frac{3}{5}.$$

答：学生的 $\frac{3}{5}$ 是男生。

说明：当解不定方程 $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=\frac{3}{10}(x+y)$ 得到 $x=\frac{3}{2}y$ 后，x、y 虽然都是自然数，但 y 可取无数个正偶数，相应地可求出无数个 x 的值，也就是说本题男、女生的人数有无数个相关的值，因此不必去求这些值。而是用“$x=\frac{3}{2}y$”，

巧妙地求出 $\frac{x}{x+y}$ 的值，直接得到男生占学生总数的几分之几。

15.[解法]

首先要注意：

（1）锯铜管时，锯的段数与次数的关系是次数= 段数- 1，例如要将铜管锯成 5 段，只要锯 5- 1= 4 次就可以了。

（2）要使铜管的损耗最少，就应该把原 1 米长的铜管尽可能多锯些“90 毫米长的铜管”，少锯些“38 毫米长的铜管”，这样，锯的次数少，损耗也少。

设锯得的 38 毫米的铜管有 x 段，锯得的 90 毫米的铜管有 y 段。按“原铜管的长度是 1 米（1000 毫米）”为等量关系列方程，得

38x+90y＋1×（x +y-1）=1000，

39x+91y＝1001，

$$y=\frac{7\times11\times13-3\times13\times x}{7\times13}$$

$$x=11-\frac{3}{7}x.$$

为了使损耗最少，所以 x 应尽可能小，y 尽可能大。由于 x、y 都是自然数，所以 x 必须是 7 的倍数，综合以上情况，

x＝7，

$$y=11-\frac{3}{7}\times7=8。$$

说明：

（1）解不定方程时要选用简便算法，如本题把 1001 写成 7×11×13，39 写成 3×13，91 写成 7×l3，使分子部分和分母部分可以约分，对于迅速推知最后结果是有益的。（2）解不定方程时变形要合理，如本题因为 x 的值越小越好，y 的值越大越好，所以，把原不定方程变形成“$y=11-\frac{3}{7}x$”这种形式，x的值容易控制（$x=7$）；如果把原不定方程变形成“$x=\frac{77-7y}{3}$”这种形式，y的值难于控制，解答时，应该：

$$x=25+\frac{2-7y}{3}$$

$$x=25-\frac{7y-2}{3}$$

因为x是自然数，所以$25-\frac{7y-2}{3}>0$，得，$y<11$，再用$y=10$、9、8、……分别去尝试，这样就繁琐了。

16.[解法]

设这个自然数是 x（x＜80）；

x 与 3 的和被 5 除时的商为 m；

x 与 3 的差被 6 除时的商为 n。

则由 x＋3=5m，得 x=5m-3；

由 x-3=6n，得 x=6n＋3。

所以　　　　5m-3=6n+3。

求这个关于 m、n 的不定方程的整数解。

$$5m=6(n+1)=5(n+1)+(n+1),$$

$$m=(n+1)+\frac{n+1}{5}$$

因为 m、n 均为自然数，所以（n＋1）能被 5 整除，由此得 n 只能取 4、9、14、19……

当 n=4 时，x=6×4+3＝27；

当 n=9 时，x=6×9＋3＝57；

当 n=14 时，x=6×14＋3=87（不符合 x＜80 的题意，应该舍去）。

同理，当 n 取其他数值时，均不符合题意。所以，x 是 27 或 57。

练习六

1.要使$\overline{4A97A}$能被3整除，那么4＋A＋9＋7＋A＝18＋2（1＋A）必须要能被 3 整除，因为 18 能被 3 整除，所以根据整数的基本性质（1），只要 2（1＋A）能被 3 整除，又因为 2 与 3 互质，所以（1＋A）要能被 3 整除。由此得 A=2 或 5 或 8。另一方面，要使 7A 能被 6 整除，我们只要在七十几的数中排出，只有 72 及 72＋6=78 两个数能被 6 整除，由此得 A=2 或 8。

综合以上情况可得所求的五位数是 42972 或 48978。

2.原已知条件可理解为：前排男生人数分别除以 3、4、6 都余 2。如果这排男生减少 2 人，那么男生人数就是 3、4、6 的倍数。因为 3、4、6 的最小公倍数是 12，所以前排男生有 12＋2= 14 人，全班男生有 14×2= 28 人。如果取 3、4、6 的公倍数 24、36、48……，如取 24，则全班男生有（24+ 2）×2= 52 人，大于全班人数（50 人），不合题意。由此全班男生应该是 28 人。

4.能被 2、3、 5 整除的数，一定是 2、3、5 的公倍数 30、60、90、……，被 2、3、5 除都余 1 的数，一定是 31、61、91、……，因为 31、61 不能被 7 整除，而 91 能被 7 整除，所以 91 是符合题意的最小数，各位数之和是 9＋1=10。

5.这个七位数能被 2～9 的数整除，就能被 2～9 的数的最小公倍数 5×7×8×9=2520 整除。可以选一个与题目要求的形式相仿的七位数，如选为 1993000，则

1993000÷2520=790 余 2200，

把余数 2200 凑成 2520，就可以使商 790 增加 1，且“ 余数是 0 ”，正好符合题意，这时的被除数就应该是 1993000+ （2520- 2200）＝1993320。

说明：不要认为开始解题时，可以任选三个数字填入□内，就可以得到无数个答案。事实上：

①如果填入□内的三位数小于 320（有 000～319 一共 320 种情况），那么这时的正确答案仍旧是唯一的，为 1993320。

如三个□内写 179。

因为 1993179÷2520= 790 余 2379，先把余数 2379 凑成 2520，就可使商 790 增加 1，且“ 余数为 0 ”，这时的被除数应该是

199179+ （2520- 2379）=1993320。

②如果填入□内的三位数大于 320，那么均不合题意。

如三个□内写 476。

因为 19934762520=791 余 156，把余数 156 凑成 2520，虽可使商 791 增加 1，且“ 余数为 0 ”，但这时的被除数变成

1993476＋（2520-156）=1995840，显然不合题意。

6.根据数的整除特征（6），可知 222222 能被 13 整除，如果把连续六个 2 作为一组，而 20006÷333（组）……

2，就是$\underbrace{222\cdots\cdots22}_{2000个2}$可以分成333组还多2个2，即：

$$\underbrace{222\cdots\cdots22}_{2000个2} = \underbrace{\underbrace{222222}_{6个2一组}\quad 222222\cdots\cdots222222}_{一共333组}\times 100 + 22$$

显然在这个和式中，第一部分加数能被 13 整除，因此原数除以 13 的余

数就等于 22÷13 的余数 9。

7.9514

（提示：参考例 5 的解法。）

8.因为，除 2 外，所有的质数都是奇数，而 P^3+5 是大于 2，所以 P^3+5 是奇质数，由此 P^3 必是偶数。

又因为 P 是质数，如果 P 是奇数的话，那么 P^3=×P×P 是奇数，所以 P 是偶质数，由此 P=2，$p^6+7=2^6+7=71$。

9.从图中可得，长方体的正面及上面的面积之和等于长×（宽+高），所以

长×（宽+高）=209=11×19，这时有两种可能：

①长=11，宽+高=19；

②长=19，宽+高=11。

因为 19、11 均为奇数，所以，宽与高必是一个奇质数，一个偶质数，在质数中，既是质数又是偶数的，只有一个是 2。由此：

19=17＋2，符合题意。

11=9＋2，不符合题意，略去。

这样，长方体的体积＝11×17×2＝374。

10.先把九个数都分解质因数：

20= 2×2×5，26= 2×13，33= 3×11，35= 5×7，39=3×13，42=2×3×7，44= 4×11，55=5×11，91=7×13。

已知的九个数中一共有 6 个 2，3 个 3，3 个 5，3 个 7，3 个 11，3 个 13 这些质因数，要把九个数分成三组，并使每组数相乘的积相等，每组数中应该一共有 2 个 2，1 个 3，1 个 5，1 个 7，1 个 11，1 个 13 这些质因数。这样便得第一组：20、91、33；第二组：44、35、39；第三组：26、42、55。

11.如果把 5397 减去 15，那么所得的差（5382）一定能被这个质数整除。把 5382 分解质因数，得 5382= 2 ×3×X3×13×23，在 5382 的质因数中大于数 15 的只有 23，所以所求的质数是 23。

12.因为长方体的体积=长×宽×高，所以，长×宽= 2100÷10= 210，把 210 分解质因数，得

210=2×3×5×7。

已知长和宽都大于 10，所以长是 3×5=15，宽是 2×7= 14，长与宽之和是 29（米）。

13.24，1860

（提示：参考例 8 的解法）

14.根据例 8 后的说明可得：一个大于 1 的自然数的约数的总个数等于它的质因数分解式中每个不同质因数的个数加 1 的连乘积。本题中所求自然数的约数的总个数是 15，而

15=（14+1）=（2+1）·（4+1）=（4+1）·（2+1），所以，所求的自然数（N）为下面三种形式：

（1）$N=a^{14}$，（2）$N=a^2\times b^4$，（3）$N=a^4\times b^2$。

要使 N 最小，我们取 a=2，b＝3，得

（1）$N=a^{14}=16384$，（2）$N=2^2\times 3^4=324$，（3）$N=2^4\times 3^2=144$。比较后得 N 的最小值是 144。

又因为 $144=2^4\times 3^2$ 中：

2^4的约数是 1，2^1，2^2，2^3，2^4；3^2的约数是 1，3^1，3^2。所以 N＝144 的所有约数的总和是

（$1+2^1+2^2+2^3+2^4$）·（$1+3^1+3^2$）=403。

15.48

（参考第 14 题的解法）

16.先用试除法得原数中间第一次能被 13 整除的数是 199119911991，如果把连续三个 1991 作为一组，199÷13＝633（组）……2，就是原数可以分成 663 组还多 2 个 1991。因此 a 除以 13 的余数等于 19911991÷13 的余数 8，所以，a 除以 13 的余数也是 8。

17.设这个整数为 W。

63÷w=a 余 r_1，63=aw＋r_1。（1）

91÷w=b 余 r_2，即 91=bw＋r_2。（2）

129÷w=c 余 r_3，129=cw＋r_3。（3）

（1）＋（2）＋（3）得 283＝w（a＋b＋c）＋25。即 W（a+b+c）=258，所以，w 是 258 的约数，而 258 的约数有

1、2、3、6、43、86、129、258。

因为 W＜63，W≠1、3，所以只要分析 W= 2、6、43 时的情况。

当 W=6 时，则一个数被 6 除最多余 5，三个余数的和最多也只有 15，不合题意。

同理，当 W=2 时，也不合题意。

所以 w=43。

18.因为被除数增加了 131-113=18，但余数相同，而结果商比原来增加了 3，所以除数是 18÷3=6，由此该题的余数等于 113÷6 的余数为 5。

19.首先要根据这排数写数的规律，顺次再写出几个数，如第 6 个数等于 21×3-8=55，第 7 个数等于 55×3-21=

144，……再把这一行数中的每一个数都除以 6，得到的余数是：

<u>0、1、3、2、3、1、0、5、3、4、3、5、0、1、3、2、3、1</u>……从这些余数中可知每隔 12 个余数就重复一次，70÷12=5 余 10，这说明第 70 个数除以 6 的余数等于第 10 个数除以 6 的余数 4。

20.如果这个数大 1 的话，它一定能被 3、5、7 整除，或者说它一定是 3、5、7 的公倍数。又由题意，为了使这个数最小，就应该先求出 3、5、7 的最小公倍数（3×5×7=105），所以这个数就是 105-1=104。

21.“每组 7 人，少 4 人”就相当于“每组 7 人，多 7-4=3 人”。可用“枚举法”求解。

（1）除以 5 余 3 的数有 8、13、18、23、28……；

（2）除以 6 余 4 的数有 10、16、22、28、……

显然 28 被 5 除余 3，且被 6 除余 4。因为 5 与 6 的最小公倍数是 30，所以，30＋28、30×2＋28、30×3+28、……30×n+28，都同时满足被 5 除余 3，被 6 除余 4 这两个条件。只须这列数中找到被 7 除余 3 的最小数，为此只要用 n=1、2、3、……依次去代入 30×n＋28。当 n=5 时，30×5+28=178 就是所求的数。

22.显然，两棵桃树间的距离是 60 与 54 的最大公约数（6），所以，在一条长边上共可分成 60÷6= 10 段，一共可种 5×10= 50 棵月季花，同理，

在一条宽边上共可分成 54÷6=9 段，一共可种 5×9= 45 棵月季花。由此，在这个矩形花圃上一共种月季花（50+45）×2=190（棵）。

练习七

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0217_1.bmp}

（如上图）把原来甲的存款数看作单位“1”，则由题意可得甲取出存款数的$\frac{2}{5}$后还余下存款数的$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，这与乙取出12元后余下的存款数相等，也就是线段AB与线段CD所对应的分率都是甲存款数的$\frac{3}{5}$，所以$108-12=96$元所对应的分率是甲存款数的（$1+\frac{3}{5}$），用除法可求出原来甲的存款数。

（$108-12$）÷（$1-\frac{2}{5}+1$）$=60$（元）……甲，

60×（$1-\frac{2}{5}$）$+12=48$（元）……乙。

[解法一]

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0218_1.bmp}

（如上图）因为4天看了全书的$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，所以每天看全书的$\frac{3}{5}\div 4=\frac{3}{20}$，3天看$\frac{3}{20}\times 3=\frac{9}{20}$，由此可得，66页的对应分率是全书的$1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$，用除法可求出这本书的总页数。

$$66\div[1-(1-\frac{2}{5})\div 4\times 3]=120\text{（页）。}$$

[解法二]

当[解法一]中求出每天看全书的$\frac{3}{20}$后，可得线段AB所对应的分率是全节的$\frac{3}{20}$，因此66页的对应分率是全书的（$\frac{3}{20}+\frac{2}{5}$），用除法可求出这本书的总页数。

$$66\div[(1-\frac{2}{5})\div 4+\frac{2}{5}]=120\text{（页）。}$$

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0219_1.bmp}

（$585-15$）÷（$1-\frac{1}{2}$）$=1140$（公亩）……剩下的公亩数，

（$1140+30$）÷（$1-\frac{1}{3}$）$=1755$（公亩）……总公亩数。

4.[解法一]

把全体少先队员数看作单位“1”，女队员占全体少先队员数的$\frac{4}{7}$，那

么男队员应占全体少先队员的$1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$，又已知男队员比女队员的$\frac{2}{3}$多$40$人，也就是男队员比全体人先队员数的$\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{21}$多$40$人。这样$40$人的对应分率就是全体少先队员数的$\frac{3}{7}-\frac{8}{21}=\frac{1}{21}$（如下图）：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0219_1.bmp}

$40\div[(1-\frac{4}{7})-\frac{4}{7}\times\frac{2}{3}]=840$（人）…全体少先队员数，

$840\times\frac{4}{7}=480$（人）……女队员数。

[解法二]

把女队员数看作单位“1”，那么全体少先队员数就是女队员数的 1÷$\frac{4}{7}=\frac{7}{4}$（如图）：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0220_1.bmp}

5.[解法一]假设甲班也取它的$\frac{3}{4}$，那么甲班人数的$\frac{3}{4}$与乙班人数的$\frac{3}{4}$的和就是甲、乙两班总人数的$\frac{3}{4}$，即$84\times\frac{3}{4}=63$人。这就可以看出甲班人数的$\frac{5}{6}$与甲班人数的$\frac{3}{4}$相差$\frac{3}{4}-\frac{5}{8}-\frac{1}{8}$），引起的人数之差是$63-58=5$人，也就是$5$人的对应分率是甲班人数的$\frac{1}{8}$，用除法可求出甲班人数。

$(84\times\frac{3}{4}-58)\div(\frac{3}{4}-\frac{5}{8})=40$（人）……甲班人数，

$(58-40\times\frac{5}{8})\div\frac{3}{4}=44$（人）……乙班人数。

[解法二]

$(58-84\times\frac{5}{8})\div(\frac{3}{4}-\frac{5}{8})=44$（人）……乙班人数，

$(58-44\times\frac{3}{4})\div\frac{5}{8}=40$（人）……甲班人数。

6.假设今年红旗小学转出20人时，光明小学也转出$20\times\frac{3}{5}=12$人，那么今年光明小学的人数仍旧是红旗小学的$\frac{3}{5}$，但由题意，今年光明小学非但没有转出 12 人，反而转入 60 人，这样相差了 60＋12= 72 人，引起今年光明小学的人数是红旗小学的$\frac{3}{4}$，相差了今年红旗小学的$\frac{3}{4}-\frac{3}{5}=\frac{3}{20}$，也就是说

72人对应的分率是今年红旗小学的$\frac{3}{20}$，用除法可求出今年红旗小学的人数。

$(60+20\times 3\ 5)\div(\frac{3}{4}-\frac{3}{5}=480$（人）……今年红旗小学的人数，

480+20=500（人）……去年红旗小学的人数，

$500\times\frac{3}{5}=300$（人）……去年光明小学的人数。

7.【解法一】

甲用了自己钱的75%，还剩下自己钱的1-75%=25%，乙用了自己钱的$\frac{4}{5}$，还剩下自己钱的$1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$。这时，两人剩下的钱数相等，也就是：

$$甲\times 25\% = 乙\times\frac{1}{5}。$$

设乙原来的钱为单位“1”，则甲原来的钱为乙原来的钱的$\frac{1}{5}\div 25\%=$

$\frac{4}{5}$，所以两人原来的总钱数54元的对应分率是

乙原来的钱的（$1+\frac{4}{5}$），用除法可求出乙原来的钱。

$54\div[(1-\frac{4}{5})\div(1-75\%)+1]=30(元)$……乙

$30\times\frac{4}{5}=24$（元）……甲。

[解法二]

$54\div[(1-75\%)\div(1-\frac{4}{5})+1]=24$（元）……甲，

$24\times 1\frac{1}{4}=30$（元）……乙。

8.“速度相当于原来的$\frac{3}{4}$”的含义是实际走3.6千米不平路的速度相当于原来走平路时的速度的$\frac{3}{4}$（或者它们间的速度之比是3∶4）。

因为当距离（3.6千米）一定时，速度与时间成反比，所以走3.6千米不平路所花的时间与走3.6千米平潞所花的时间的比是4∶3。另外，由题意得走3.6千米不平路比走3.6千米平路所花的时间多$\frac{1}{5}$小时，这样，可以找出$\frac{1}{5}$小时所对应的时间的份数差（$4-3=1$份），从而求出原计划走3.6千米平路时所需的时间。

(1)走3.6千米不平路与走3.6千米平路所花的时间的份数差是几份？4-3=1（份）

（2）1份是多少小时？$\frac{1}{5}\div 1=\frac{1}{5}$（小时）

（3）原计划走3.6千米平路要几小时？

$\frac{1}{5}\times 3=\frac{3}{5}$（小时）

（4）原计划的速度是每小时行多少千米？

$$3.6\div\frac{3}{5}=6\text{（千米）}$$

（5）甲、乙两城间的距离有多少千米？

$$6\times5\frac{1}{2}=33\text{（千米）}$$

说明：求原计划走 3.6 千米平路所要的时间也可以列成

$$\frac{1}{3}\div\left(\frac{4}{3}-1\right)=\frac{3}{5}\text{（小时）。}$$

9.（如图）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0223_1.bmp}

科技书借出30本后相当于原故事书的$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$，连环画买进20本后也相当于原故事书的$1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$这时，三种书共有$1550-30+20=1540$（本），它占原故事书的（$1+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}$），用除法可求出原故事书的本数。

$$(1550-30+20)\div[1+(1-\frac{2}{5})+(1-\frac{2}{5})]=700\text{（本）}$$

……故事书。

$700\times(1-\frac{2}{5})+30=450$（本）　……科技书。

$700\times(1-\frac{2}{5})-20=400$（本）　……连环画。

10. 由“A的钱数占其他三个人的钱数的$\frac{1}{3}$”，可得：假设A的钱数有1份，那么其他三个人的份数有3份，所以A的钱数占四人，总钱数的$\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$，同理可得，B钱数占四人总钱数$\frac{1}{1+4}=\frac{1}{5}$，C的钱数占四人总钱数的1$\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$，样就可先求四人总钱数。

$92\div\left(1-\frac{1}{1+3}-\frac{1}{1+4}-\frac{1}{1+5}\right)=240$（元）……四人总钱数；

$240\times\frac{1}{4}=60$（元）……A的钱数；

$240\times\frac{1}{5}=48$（元）……B人的钱数；

$240\times\frac{1}{6}=40$（元）……C的钱数。

11. $19\div\left(1\div\frac{1}{12}-2\frac{1}{2}\right)=2$（千克）……筐重千克数，

2×12=24（千克）……香蕉千克数。

（提示：筐的重量始终未变）。

$12.14 \div (\frac{5}{5+3} - \frac{1}{2+1}) = 48$（人）……两组，总人数，

$48 \times \frac{5}{8} = 30$（人）……原第一组人数，

$48 \times \frac{3}{8} = 18$（人）……原第二组人数。

（提示：两组的总人数始终未变。）

13.两人是同时开始各按一定的速度做同样多的题目，根据时间一定，做的题目数与做题的速度成正比关系，所以小明与小华做题的速度之比等于他们做的题目数之比。

小明第一次做了作业的$\frac{1}{3}$，第二次做了余下的一半，即又做了作业的$(1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$，说明小明两次都做了同样多的题目（当然也说明小华两次都做了同样多的题目），小明两次一共做了作业的$\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$。

因为小华两次一共做了作业的$\frac{1}{2}$，所以每次都做了作业的$\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$（如国）。

①小明和小华做作业的速度比是：

$$[\frac{1}{3} + (1-\frac{1}{3}) \times \frac{1}{2}] : \frac{1}{2} = 4 : 3。$$

小明口算的速度快。

②设小华做 x 分钟完成这次作业，按“题目总数一定，做题的时间与做题的速度成反比”列方程，得

$$6 : x = 3 : 4。$$

解方程，得 x=6。

③这次产业一共有$45 \div (1-\frac{1}{2} \div 2) = 60$（题）。

14.

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0226_1.bmp}

本题关键是求出客车从甲地出发到与货车相遇时行了全程的几分之几？

[解法一]（如上图图）

（1）客车每小时行全程的几分之几？

$$1 \div 10 = \frac{1}{10}$$

（2）货车每小时行全程的几分之几？

$$1 \div 15 = \frac{1}{15}$$

（3）两车相遇的时间是多少？

$$1 \div (\frac{1}{10} + \frac{1}{15}) = 6（小时）$$

（4）相遇时客车行了全程的几分之几？

$$\frac{1}{10} \times 6 = \frac{3}{5}$$

（5）甲、乙两地间的距离是多少？

$$96 \div （80\% - \frac{3}{5}） = 480 （千米）$$

［ 解法二］

因为甲、乙两地间的距离一定，速度与时间成反比。客车行完全程要 10 小时，货车行完全程要 15 小时，所以客车速度与货车速度之比为 15 ：10= 3 ：2。

又因为两车相遇时用的时间一定，距离与速度成正比，所以两车相遇时，客车行的路程与货车行的路程之比等于 3 比 2。由此两车相遇时，客车行了全程的 $\frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$ 。（下面与解法一相同）

$$96 \div （80\% - \frac{3}{3+2}） = 480 （千米）$$

15.设水池的容积为单位“1”。甲、乙、丙、丁四个水管按顺序各开 1 小时，共开 4 小时，灌进的水是全池的：

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{7}{60},$$

加上池内原来的水，池内有水：

$$\frac{1}{6} + \frac{7}{60} = \frac{17}{60}$$

再共开 4 个 4 小时（即先后一共开了 4+4×4=20 小时），池内有水：

17 60+ 7 60×4= 3 4，如果甲管再开一小时，可灌 1 3，而 1 3+3 4＞1，水早已溢出水池了。因此，在 20 小时后，只要甲管再灌 $（1 - \frac{3}{4}） \div \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$小时，水开始溢出水池。由此，水开始溢出水池的时间是：

$$20 + \frac{3}{4} = 20\frac{3}{4}(小时)。$$

练习八

1.两地相距 280 千米。

2.解（1）从甲地出发后几小时，货车从乙地开始返回？

180÷30＋0.5=6.5 小时

（2）货车从乙地开始返回时，客车距乙地的距离是：

180-20×6.5=50（千米）

（3）货车从乙地返到与客车相遇所需时间是：

50÷（30＋20）=1（小时）

（4）从甲地出发后几小时两车相遇？

6.5＋1=7.5 小时

答：略

3.甲行完全程用了 4.7 小时。

4.再用 2.3 小时可以到达乙地。

5.解法一：

（1）慢车速度：20×10÷（15-10）=40（千米/小时）

（2）快车速度：40＋20=60（千米/小时）

（3）全程距离：60×10=600（千米）

（4）相遇时间：600÷（40+60）＝6（小时）

（5）相遇时快车所行路程：60×6=360（千米）

（6）相遇时慢车所行路程：600- 360= 240（千米）

解法二：把全程距离看作“1”。

全程距离为：$20÷（\frac{1}{10}-\frac{1}{15}）=600$（千米）

两车相遇时间为：$1÷（\frac{1}{10}+\frac{1}{15}）=6$（小时）

相遇时快车行了：$600×\frac{1}{10}×6=360$（千米）

相遇时慢车行了：$600×\frac{1}{15}×6=240$（千米）

6.甲、乙对行 10 分钟，乙正好行到南北两地的中点，甲则超过中点 100 米，甲行全程的一半和 100 米行程用 10 分钟，行 100 米需用（100÷80=）$1\frac{1}{4}$分，行全程的一半用（$10-1\frac{1}{4}=$）$8\frac{3}{4}$ 分，甲速乘以行一半行程的时间，就可以求全程一半的路程，再乘以乙就可求出南北两地的全程。

80×（10- 100÷80）×2＝1400（米）

答：南北两地相距 1400 米。

$7.4\frac{1}{2}×[5×（1-\frac{5}{11}）÷\frac{5}{11}]=27$（千米）

8.（15+13）×[3×2÷（15-13）]=84（千米）

9.（550+500）×[200×2÷（550-500）]=8400（米）

10.［40×3-（25×2＋7）］÷3＝21（公里）

答：慢车每小时行 21 公里

11.50×［440÷（35+45）］＝275（千米）

答：燕子飞了 275 千米，两车才能相遇。

12.客车行完全程要 8 小时。

13.180×2÷（90- 60）=12 分……哥哥与妹妹从同时出发到相遇的时间。

90×12-180=900（米）

或 60×12＋180=900（米）……他们家离校的距离。

14.根据爸爸的速度是小明的 4 倍可知，在相同的时间内，爸爸所走的路程是小明的 4 倍；走同样的路程，小明所用的时间是爸爸的 4 倍。已知爸爸从追上小明处回到家里走了 10 分钟，所以走这段路要 10×4= 40（分钟），可见小明从家出来后（40-10=）30 分钟，爸爸才出发去追小明。

10×4-10＝30（分）

答：小明从家里出来后 30 分钟爸爸才出发追赶小明。

15.快车速度每小时 70 千米，慢车速度每小时 50 千米。

16. 5×l2÷（18- 8）=6（公里）……赵琪行走的速度，

4×2÷（6- 4）=4 小时……赵琪追上李军所用的时间，

8＋4=12（时）赵琪追上李军的时刻。

答：赵琪中午 12 时追上李军。

17.队伍 6 分钟向前进 80×6= 480 米，队伍长 1200 米，6 分钟前进了 480 米，所以联络员 6 分钟走的路程是：

1200- 480＝720（米），

720÷6＝120（米/分）。

答：联络员每分钟行 120 米。

18.乌龟到终点时用的时间是：100÷0.5=200（秒），假如小白兔不睡觉到达终点用：100÷10= 10（秒），实际小白兔用了 10＋60×3.2＝10＋192＝202（秒）。

202- 200= 2（秒）。

答：乌龟先到达终点，早到 2 秒钟。

19.从车头上桥到车尾离桥要 4 分钟。

20.火车的速度是每秒 15 米，车长 70 米。

21.（1）（182+ 1034）÷（20+ 18）＝32 秒

（2）（182+ 1034）÷（20- 18）＝608 秒

（3）182÷（20- 18）＝91 秒

（4）1034÷（20- 18）＝517 秒

答：略。

22.火车速度是：120o÷60=20 （米/秒）。

火车全长是：20×15=300 （米）。

23.40×（51- 1）÷2×60÷1000=60（千米/小时）。

24.火车拉汽笛时离这个人 1360 米。因为声速每秒钟 340 米，所以这个人听见汽笛声时，经过了（1360÷340）=4 秒。可见火车行 1360 米用了（57＋4=61 秒，将距离除以时间可求出火车的速度。

1360÷（57+ 1360÷340）

= 1360÷61

≈22（米）

答：火车速度约每秒钟 22 米。

25.火车=28.8×1000÷3600= 8（米/秒）

人步行 15 秒的距离＝车行 15 秒的距离- 车身长

（8×15-105）÷15=1（米/秒）

1×60×60= 3600 （米/小时）= 3.6（千米/小时）答：人步行每小时 3.6 千米。

26.人 8 秒走的距离= 车身长- 车 8 秒走的距离

（144- 60÷60×8）÷8＝17 （米/秒）

答：列车速度是每秒 17 米。

27.船从乙地回到甲地要 15 小时。

28.（1）全程是多少千米？

（18＋21）×18＝702（千米）

（2）甲船行了多少千米？

702÷2+ 81＝432（千米）

（3）甲船顺水每小时行多少千米？

432÷18＝24（千米）

（4）水流的速度每小时多少千米？

24-18=6（千米）

29.设甲、乙两码头间的距离是 x 千米。

$$\frac{x}{20+4}+\frac{x}{20-4}=12.5$$

$$x=120(\text{千米})$$

答：甲、乙两码头间的距离是 120 千米。

30.设上、下山的路程都是“1”，可得

$$\frac{1\times 2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}=24\text{（千米 / 小时）}$$

答：小张上、下山的平均速度是每小时 24 千米。31.

$$31.\frac{2}{\frac{1}{20}+\frac{1}{5}}=8(\text{千米 / 小时})$$

答：往返的平均速度是每小时 8 千米。

32.甲乙两站相距为：40×3- 20= 100（公里）

33.400×3（152＋148）= 4（分钟）

或 400（152+ 48）×3=4（分钟）

答：两人出发后 4 分钟第 3 次相遇。

34.假设这条环形公路长为“1”，则甲每分钟行公路全长的 $\frac{1}{70}$，甲、乙速度之和为每分钟行公路全长的 $\frac{1}{45}$，这样可知乙每分钟行公路全长的 $\frac{1}{45}-\frac{1}{70}=\frac{1}{126}$，由此可求乙走一圈的时间。

$$1\div\left(\frac{1}{45}-\frac{1}{70}\right)=126\text{（分钟）}$$

答：乙走一圈的时间是 126 分钟。

35.本题是求甲、乙、丙三只船绕岛一周（15 千米）所用时间的最小公倍数。三只船各围绕一周所需要时间：

甲：156÷=2.5（小时）　乙：15÷5=3（小时）

丙：15÷3=5（小时）

因为 5 是 2.5 的 2 倍，所以 3 和 5 的最小公倍数是 3×5= 15。这样：15 小时之后三船再次相遇。

36.解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0233_1.bmp}

根据丙遇到乙后 2 分钟，甲、丙相遇，可知乙丙相遇时乙比甲多走了（70＋50）×2=240（米）。

乙、丙相遇时，他们三人各行走的时间为：

（70＋50）×2÷（60-50）=24（分钟）

东、西两镇的距离的 1 4 为：

$$（60+70）\times 24\times\frac{1}{4}=780（米）$$

37.根据题意，甲跑 200 米，乙跑 200-20=180（米）， 丙跑 200-25=175（米）。也可以理解成：乙每跑 180 米丙就跑 175 米，乙到终点还有 20 米，那就看一看 20 米里包含有多少个 180 米，有一个 180 米，丙就要跑一个 175 米。 $20米\div 180米=\frac{1}{9}$。那么丙应跑$175\times 1\ 9=19\frac{4}{9}$（米）。丙这时离终点是$25-19\frac{4}{9}=5\frac{5}{9}$（米）。列式如下：

$$25-175\times\frac{20}{200-20}=5\frac{5}{9}（米）。$$

答：丙距终点还有$5\frac{5}{9}$米。

38.解：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0234_1.bmp}

如果甲班先步行，乙班坐车同时从 A 点出发，到 C 点后乙班下车，车立刻返回在 B 点接甲班上车。那么车从 A 到 C，再从 C 到 B， 所用的时间与甲班步行时间相同，因时间一定，路程与速度成正比。因此：

$$\frac{甲走路程}{车走路程}=\frac{AB}{AC+BC}=\frac{4}{48}==\frac{1}{12},$$

$$\frac{AB}{AC+BC}=\frac{AB}{AB+BC+BC}=\frac{1}{12},$$

所以$\frac{甲走路程}{车从B到C往返路程}=\frac{1}{11}$

为了最短时间内到达，车在 B 点接甲班上车后，要与乙班步行同时到达。就是车从 C 到 B 再从 B 到 D 所用的时间应该与乙班步行时间相同，因此，

$$\frac{乙走路程}{车走路程}=\frac{CD}{BC+BD}=\frac{3}{48}=\frac{1}{16}$$

$$\frac{乙走路程}{车从B到C往返路程}=\frac{CD}{2BC}=\frac{1}{15},$$

$$\frac{甲走路程}{乙走路程}=\frac{\frac{1}{11}车从B到C往返路程}{\frac{1}{15}车从B到C往返路程}=\frac{15}{11}$$

39.解法一：车速是每小时 60 千米，也就是每分钟 1 千米，所以车行几分钟就是几千米。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0235_1.bmp}

在 8 点 32 分的时候，两辆车离开化肥厂的距离是 1∶3；到了 8 点 39 分的时候，两辆车离开化肥厂的距离是 1∶2，也就是 2∶4。这两个比例关系恰好是 1＋1∶3＋1。从图示可以看出，到 8 点 39 分的时候，第一辆车已走过了 4 个 7 千米。

39-7×4=11（分）

解法二：32-（39-32）×3=11（分）

解法三：设在 8 点 32 分的时候，第二辆开出 x 分钟，则第一辆车开出 3x 分钟。

$$3x+7=2(x+7)$$

解方程得 x= 7

$$3x=21$$

$$32-21=11（分）$$

答：第一辆车是 8 点 11 分离开化肥厂。

练习九

1.[解法一]

（1）只会拉手风琴的有 24- 8= 16（人）

（2）文艺组的总人数有 16＋17= 33（人）

[解法二] 24＋（17- 8）= 33 人

[解法三] 根据容斥原理（一）

24＋17- 8= 33 人

2.（如右图）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0236_1.bmp}

[解法一]

32＋35- （52- 8）＝23（人）

[解法二] 设语文、数学都做完的有 x 人。按“容斥原理（一）”列方程，得

52=（32+ 35- x ）+ 8，x＝23

3.（如右图）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0237_1.bmp}

[解法一]

（1）会中国象棋的有

$96\times\frac{7}{12}=56$（人）

（2）两种棋都会的有$96\times\frac{1}{4}=24$（人）

（3）只会国际象棋的有 96-56=40（人）

（4）会国际象棋的有 24＋40=64（人）

[解法二] 设会国际象棋的有 x 人，按“容斥原理（一）”列方程，得

$$96\times\frac{7}{12}+x-96\times\frac{1}{4}=96，x=64$$

4.30-（8+12-3）=13（人）

5.[解法一]21＋26-（50-17）=14（人）

[解法二]设两次测验都满分的有 x 人。按“容斥原理（一）”列方程，得

50=（26+21-x+17，x＝14

6.如右图设课堂上总人数为“1”。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0237_2.bmp}

48%×50%=24%

1-48%-24%＝28%

7.（如右图）[解法一]

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0237_3.bmp}

（1）只做对第 1 题的有

30- 20＝10（人）

（2）两题都不对的有

12-10=2（人）

（3）做对第 1 题或做对第 2 题的有 40- 2= 38（人）

（4）第 2 题做对但第 1 题做错的有 38- 30= 8（人）

[解法二]设第 2 题做对但第 1 题做错的有 x 人，按“容斥原理（一）”列方程，得

30+x+[12-（30-20）]=40

解方程，得 x=8

8.能被 5 整除的数有 10000÷5=2000（个）

能被 7 整除的数有 10000÷7≈1428（个）

能被（5×7）整除的数有 10000÷35≈285（个）

2000+1428- 285＝3143（个）

9.设：题目总数 n 道。甲、乙两人都答错的有 x 道。则甲答对了题目总数的$\left(1-\frac{1}{9}\right)n$，两人都答对了题目总数的$\frac{1}{6}n$。

把所有题目（n 道）用长方形围起来，在这个长方形内：甲答对了的题目（$\frac{8}{9}n$）用圆A围起来；乙答对了的题目（7道）用圆B 围起来。（如下图）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0238_1.bmp}

按“容斥原理（一）”列方程，得

$n=\left(\frac{8}{9}n+7-\frac{n}{6}\right)+x$（n看作常数）

解方程，得 $x=\frac{5}{18}n-7$

因为 x,n 均为自然数,所以 n 是 18 的倍数(也就是 n=18、36 龟 72、……)。

又因为$\frac{n}{6}$ 6＜7，所以＜42，由此可得$n=18$或36。

当$n=18$时，$x=\frac{5}{18}\times18-7=-2$（舍去）；

当$n=36$时，$x=\frac{5}{18}\times36-7=3$（符合题意）。

所以，甲答对了：$36\times\frac{8}{9}=32$（道）。

10.由容斥原理（二）可得

25＋26＋24-16-15-14+5=35（人）

11.[解法]（如下图）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000100_0239_1.bmp}

把爱好体育（55 人）、文艺（56 人）、科学（51 人）活动的学生分别用圆 A、B、 C 围起来。这里特别要注意，“六年级 100 名同学，每人至少爱好体育、文艺和科学三项活动中的一项”表示这 100 名同学中有只爱好体育或只爱好文艺或只爱好科学一项活动的；有爱好体育、文艺或爱好体育、科学或文艺、科学二项活动的；有爱好体育、文艺、科学三项活动的。A、B、C 三个圆覆盖在桌面上的总面积表示参加以上活动的总人数（100 人）。

（1）只爱好体育的有 55-（4＋15＋17） =19 （人）。

（2）设只爱好科学和文艺两项的有 x 人。

则按“容斥原理（二）”列方程，得

100＝55+ 51+ 56-（17+ 15）-（4+ 15）-（15+x）。解方程，得 x=11。

12.因为 105=3×5×7，所以本题相当于求 1～105 这 105 个自然数中，不能被 3、5、7 任何一个整除的数的个数。

能被 3 整除的数有 105÷3=35 （个）

能被 5 整除的数有 105÷5=21 （个）

能被 7 整除的数有 105÷7=15 （个）

能被（3×5）整除的数有 105 （3×5）=7（个）

能被（3×7）整除的数有 105÷（3×7）=5（个）

能被（5×7）整除的数有 105 ÷ （5×7）=3（个）

能被（3×5×7）整除的数有 105÷（3×5×7）=1（个）

把能被 3、5、7 整除的数分别用圆 A、B、C 围起来（如下图）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0241_1.bmp}

设 不能被 3、5、7 任何一个整除的数有 x 个。按“容斥原理（二）”列方程，得

e105＝（35+21+15-7-5-3+1）+x。

解方程，得 x=48。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0241_1.bmp}

13.（如右图）把书架上的书（72 本）用长方形围起来，在这个长方形内：科技书（12 本）、小说书（9 本）、蓝色封面的书（10 本）分别用圆 A、B、C 围起来。

由题意，得既是科技书

又是小说书的有 0 本（也就是圆 A 与圆 B 不相交）：蓝色封面的既是科技书又是小说书的有 0 本（也就是 A、B、C 三个圆不相交）。

设书架上不是蓝色封面的，并且既不是科技书，又不是小说的其他书有 x 本。按“容斥原理（二）”列方程，得

72=（12+9+10-0-4-3+0）+x。

解方程，得 x=48

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0242_1.bmp}

14.（如右图）

把某班学生（30 人）用长方形围起来，在这个长方形中：扫地的学生（18 人）、擦玻璃的学生（20 人）、抹桌椅的学生（13 人）分别用圆 A、B、C 围起来。

由题意，得参加三种劳动的有 0 人（也就是 A、B、C 三个圆的公共部分的面积为 0）。

设既擦玻璃又扫地的有 x 人。按“容斥原理（二）”列方程，得

30＝（18+20+13-x-5-6+0）+2。

解方程，得　　x=12。

15.（如右图）。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0242_2.bmp}

把做对 A 题的学生（10 人）、做对 B 题的学生（13 人）、做对 C 题的学生（15 人）用圆 A、B、C 围起来。

设只做对 A、B 两题的有 x 人；只做对 A、C 两题的有 y 人；只做对 B、C 两题的有 z 人。只做对 A 题的有 a 人；只做对 B 题的有 b 人：只做对 C 题的有 c 人。按“容斥原理（二）”列方程，得

25=10+13+15-（x+1）-（y＋1）－（z+1）+1，

25＝36-（x+y+z），

所以 x＋y＋z=36-25=11　（人）……只做对两道题的总人数。

又因为 a+b+c+x+y+z+1＝25，

所以 a+b+c=25-12＝13（人）……只做对一道题的总人数。

练习十（A）

1.（1）1+2+3+4+5+6=21（条）

（2）（1+2+3+4+5）+（1+2+3+4）=25（条）

2.（1）1+2+3+4+5=15（个）

（2）1+2+3+4+5+6+7＝28（个）

3.（1）（1+2+3+4+5）×3＝45（个）

（2）（1+2+3+4）×2+4=24（个）

4.　（1）　12 个（2）　16 个

5.三角形的总数为：　1＋2＋3＋4＋5=15　（个）

15 个三角形底边的总长为：

4+3+2+5+10+（4+3）+（3+2）+（2+5）+

（5+10）+（4+3+2）+（3+2+5）+（2+5+10）+

（4+3+2+5）+（3+2+5+10）+（4+3+2+5+10）＝

152（厘米）

这些三角形的高都一样，故它们面积之和为

$$S=\frac{1}{2}\times152\times20=1520$$（平方厘米）

6.把图中每个小三角形的边长记为 1，那么

边长为 3 的三角形有 1 个

边长为 2 的三角形有 3 个

边长为 1 的三角形有 9 个

三角形总数为：1+3＋9＝13（个）

7.可以用分类方法解这题

第一类：尖顶向上的三角形

以 A 为顶点的三角形有 4 个

分别以 B_1，B_2 为顶点的三角形有：

3×2=6（个）

分别以 C_1，C_2，C_3 为顶点的三角形有
2×3=6（个）
分别以 D_1，D_2，D_3，D_4，为顶点的三角形有 4 个
尖顶上的三角形共有：
4+6+6+4＝20（个）
第二类：尖顶向下的三角形：
底在 B_1B_2 上的三角形有 1 个
底在 C_1C_2 上的三角形有 3 个
底在 D_1D_4 上的三角形有 3 个
尖顶向下的三角形共有：
1+3+3=7（个）
这样，三角形的总数是 20＋7＝27　（个）
8.长方形中正方形的总数有：
8×4+7×3+6×2+5×1＝32+21+12+5=70（个）
9.（l+2+3+4+5）×（1+2+3+4）=15×10＝150（个）
10.（1）$4^2＋3^2＋2^2＋1^2$=30（个）
（2）$6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2$＝91（个）
11.（1+2+3+4+5）×（1+2+3+4）=150（个）
12.（1+2+3+4）×（1+2+3）=60（个）
13.（1）18 个，（2）15 个
14.自上而下小立方体个数分别是 12，22，32，42，52，62，这样小立体总数是：$1^2+2^2＋3^2+4^2+5^2＋6^2$=91（个）
15.三面涂有油漆的正方体集中在长方体的八个顶点
上，因此，三面涂有油漆的有 8 个。
二面涂有油漆的正方体集中在长方体的各棱上，
在“长”的方向上有：（7-2）×4=20　（个）
在“宽”的方向上有：（4-2）×4＝8（个）
在“高”的方向上有：（4-2）×8=8（个）
共有 20+8＋8=36（个）
一面涂有油漆的正方体集中在各个面的中央：
前、后两个面有（7-2）×（4-2）×2＝20（个）
左、右两个面有：（4-2）×（4-2）×2＝8（个）
上、下两个面有：（7-2）×（4-2）×2=20（个）
共有：20＋8＋20＝48（个）
各个面上都没有涂油漆的有：
（7-2）×（4-2）×（4-2）=20（个）

16.一个长方体或正方体都有长、宽、高三度，三度上各任意取出一条线段就组成一个新的长方体，正方体的每条棱上各有 3+2+1=6（条）线段，所以长方体（包含正方体）的总数是 6×6×6＝216（个）。

正方体的每个平面平分成九个正方形，整个正方体分成 33=27　（个）小正方体，把这些小正方体看成单位正方体，由 1 个单位正方体组成的正方体有 27 个；由 8 个单位正方体组成的正方体有 8 个；由 27 个单位正方体组成的正方体有 1 个。

练习十（B）

1.解：阴影部分的周长与边为 4 厘米的正方形周长是相等的。

阴影部分的周长为：　4×4= 16　（厘米）

2.96 厘米

3.半圆弧长：40×3÷2=60（厘米）

30°圆心角所对弧长：

$40\times2\times3\times\frac{30}{360}=20$（厘米）

阴影部分周长是：

60+20+40＝120（厘米）

4.设 R、r_1、r_2、r_3 分别代表圆 O、圆 O_1，圆 O_2，圆 O_3 的半径，从图上看出：

$R=2r_3$，$R=2r_1+2r_2$

这样，$2R=2(r_1+r_2+r_3)$。这说明大圆直径等于三个小圆的直径和，所以大圆的周长也等于三个小圆的周长。

5.解：把 8 个面积相等的小正方形割补成一个边长 4 厘米的大正方形。

这个图形的面积为：4×4=16（平方厘米）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0247_1.bmp}

6.解：分别延长 BA、CD 交于点 E，因为角 B，角 ADC 都是直角，角 C 是 45°，所以△FBC 及△EDA 都是等腰直角三角形。

四边形 ABCD 的面积=△EBC 的面积-△EDA 的面积

=7×7÷2-3×3÷2

＝20（面积单位）

7.解：三角形滚动一周，由三次旋转组成，各次旋转依次以 C，B′和 A″为中心，转动的角度都是 120°，这时 A 到达点 A″，每个顶点经过的路线都是两段 120°的圆弧。

每个顶点经过的路程是：$2\times3.14\times3\times\frac{120}{360}\times2=12.56$（厘米）

8.如图所示，将小三角形旋转 60°，小三角形将大三角形分割成面积相等的四块，所以大三角形是小三角形面积的 4 倍。

9.解：阴影部分的面积，等于半径为 5 厘米的圆面积的 $\frac{1}{4}$，减去长为5厘米，宽为2厘米的长方形面积与半径为2厘米的圆面积的 $\frac{1}{4}$ 的差：

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0248_1.bmp}

阴影部分的面积：

$3.14\times5^2\times\frac{1}{4}-(5\times2-3.14\times2^2\times\frac{1}{4})$

＝19.625-（10-3.14）

=12.765（平方厘米）

10.（1）根据题意可知阴影部分是一个等腰直角三角形，先分别求出底和高，再求面积。

7×2-10＝4（厘米）……底

4÷2=2（厘米）…………高

阴影部分的面积是： 4×2÷2=4（平方厘米）

（2）如图沿圆的直径对折，阴影部分的面积等于梯形的面积，再减去直角三角形的面积。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0248_2.bmp}

阴影部分面积为：

（5×2+20）×5÷2-10×5÷2

＝75-25

=50（平方厘米）

11.解：连结 BE，三角形 AEB 在正方形内，三角形 AEB 与正方形 ABCD 有相同的底 AB 和高，三角形 AEB 的面积是正方形 ABCD 面积的一半，求出三角形 AEB 的面积，再求 OB 的长。

OB 的长为：（4×4÷2）×2÷5=3.2（厘米）

12.格子布的面积是图（2）面积的 9 倍，格子布白色部分的面也是图（2）上白色面积的 9 倍。这样，只要计算图（2）中白色部分所占面积的百分比即可。

$$\frac{14\times14+6\times6}{20\times20}=0.58=58\%$$

答：格子布中白色部分的面积是总面积的 58%。

13.把正方形割成两块一样大的三角形，三角形 ABC 与三角形 BEC 同高，它们的面积比等于相应的底边的比，三角形 ABC 的面积=50÷2=25 平方厘米，又因为三角形 BEC 的两条直角边中，长边是短边的 2.5 倍，长边就是正方形的一条边，所以 25 平方厘米是三角形 BEC 面积的 2.5 倍，所以三角形 BEC 的面积为：

25÷2.5＝10（平方厘米）

14.总面积是一个大扇形和两个相等的小扇形面积的和，因为大扇形的半径 R=8，小扇形的半径为 r=8-6=2，所以

总面积为：$\frac{(360-60)\times\pi\times8^2}{360}+\frac{(180-60)\times\pi\times2^2}{360}\times2=56\pi$（平方米）

答：绳被狗拉紧时，狗运动后所围成的总面积是 56π 平方米。

15.从图可知，△ABE 与△AEC 是等底等高，因此，它们的面积相等。即△EAF与△EFB是两个等高的三角形，并且△EAF的底长是△EFB底长的$\frac{1}{2}$，因此△EAF的面积是△EFB的$\frac{1}{2}$，又是△ABE面积的$\frac{1}{3}$，是△ABC面积的$\frac{1}{6}$。

16.连结BE，因EG = 2GF △BFG的面积 = $\frac{1}{3}$△BFE的面积。

阴影部分的面积为：$\{10\times6-[\frac{1}{2}\times6\times(10\div2)+\frac{1}{2}\times10\times(6\div2)$

$+\frac{1}{2}(10\div2)\times(6\div2)\}\times\frac{1}{3}$

$=22.5\times\frac{1}{3}$

$=7.5$(平方厘米)

17.解：两个平行四边形等底，等高，它们的面积相等。

阴影部分的面积等于平行四边形面积的一半。

阴影部分面积为：$3.6\times1.2\times\frac{1}{2}=2.16$平方厘米

18.因为甲、乙都是长方形面积的$\frac{1}{4}$，所以E、F分别是AD， DC的中点，三角形DEF的面积是$\frac{1}{2}$（3×4）$=6$（平方厘米）。

阴影部分面积为：$\frac{1}{2}$（6×8）$-6=18$ （平方厘米）

19.解：（5×5+3×3）—[5×5÷2+3×（5+3）÷2]

=9.5（平方厘米）

20.解法一：在大正方形内的阴影部分是 2 为底 3 为高的三角形，大正方形以外的阴影部分也是以 2 为底 3 为高的三角形。

所以，阴影部分面积是（$\frac{1}{2}\times2\times3$） $\times2=6$（平方厘米）。

解法二：$S_{阴影}=S_{梯}-3\times3\div2-(2+1)\times1\div2=6$（平方厘米）

21.解法一：

$S_{阴影}=S_{梯ABCE}+S_{\triangle EFC}-S_{\triangle ABF}$

$=(4+5)\times5\times\frac{1}{2}+4\times4$

$\times\frac{1}{2}-4\times(4+5)\times\frac{1}{2}$

=22.5+8—22.5

=8（平方单位）

解法二：连结 AE，则 DF 和 AC 平行，根据等积变形 $S_{\triangle AEF}=S_{\triangle EFC}$；而△EFC 的面积是小正方形面积的一半，

所以，阴影部分面积为：4×4÷2=8（平方单位）。

22.解：根据图示，重叠部分与（I）构成半圆，其面积为$(20\div2)^2\times3.14\times\frac{1}{2}=157$(平方厘米)；又知重叠部分与（III）构成直角三角形，其面积是157-7=150（平方厘米）。

所以BC的长为：$[(20\div2)^2\times3.14\times\frac{1}{2}-7]\times2\div20=300\div20=15$(厘米)

23.解：延长 BC 至 EF 交于 P 点，则△BPE 的面积为 3×6÷2=9（平方厘米），长方形 CDEP 的面积为 2×3＝6 （平方厘米），9—6=3（平方厘米），所以△BCM 与△DEM 面积之差为 3 平方厘米。

24.解：（1）直角梯形 ABCF 的面积

$\frac{(10+12)\times 10}{2}=110$ （平方厘米）

（2）圆心角为 FCD 的扇形面积

$\frac{3.14\times 12^2}{4}=113.04$ （平方厘米）

4

（3）直角三角形 ABD 的面积

$\frac{10\times(10+12)}{2}=110$ （平方厘米）

（4）阴影部分的面积：

110+113.04—110=113. 04（平方厘米）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0252_1.bmp}

25.解：把圆心和切点连起来，正好是一个小正方形，小正方形的边长就是圆的半径 r，它的面积就是 r 2，小正方形的面积是大正方形面积的 1 4，即 12÷4=3 平方厘米，也就是 r2 等于 3 平方厘米。

阴影部分的面积：S=πr^2=3.14×(12÷4)=3.14×3=9.42（平方厘米）

26.解：阴影部分面积是小正方形 ABCD 与大正方形 AEFG 面积的差。

AE^2—AB^2=45

πAE^2-πAB^2=π×45

圆环面积为：$\pi AE^2-\pi AB^2=3.14\times 45=141.3$（平方厘米）

27.解：扇形的面积是：$3.14\times 10^2\times\frac{90}{360}=78.5$（平方分米）

正方形的对角线为 10 分米，将正方形“对角线的乘积除以 2”就是它的面积，所以扇形中的正方形面积是 10 2÷2=50（平方分米）

这个图形的阴影部分面积是:

78.5—50=28.5（平方分米）

28.解：阴影部分的面积等于边长2米的正方形面积与$4\times\frac{3}{4}$个半径为 1 米的圆面积之和。

（1+1）×（1+1）＋1 2×3. 14× 3 4 ×4

=2×2+1×3.14×3

=4＋9.42=13.42（平方米）

答：阴影部分的面积是 13.42 平方米。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0253_1.bmp}

29.解法一：根据长方形是轴对称图形的性质，作出 QN、PM 力对称轴，这样长方形 ABCD 平均分成八个三角形，阴影部分面积有这样的三角形三个，所以阴影部分面积是长方形 ABCD 面积的 3 8 。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0253_2.bmp}

解法二：连结 CQ，根据等底等高其面积相等的性质：可知三角形 ACQ

与三角形CQB的面积各是长方形ABCD面积的 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

又三角形PQC与三角形BQP的面积是长方形ABCD面积的 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

阴影部分面积是长方形ABCD面积的 $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0254_1.bmp}

30.解法一：把长方形甲和长方形乙拼成一个长方形，这个长方形的宽是（66—2×5）÷（5+2）=8（厘米）。

长方形的面积为 8×8+66=130 平方厘米。

解法二：设正方形边长为 X 厘米。

根据题意列方程：（5＋2）×x^2=66-2×5

解方程，得 x=8

$S_{长方形}$=8×8＋66=130（平方厘米）

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0254_1.bmp}

31.因为△ABC 和△BCD 是等底等高，所以它们的面积相等，从而推出△AOB 的面积=△COD 的面积=6（平方厘米）。

又因为△BOc 和△COD 是等高不等底，所以它们的面积比等于相对应底的比，即BO：DD＝12：6＝2：1，同理推出 $\frac{\triangle AOB的面积}{\triangle AOD的面积}=\frac{BO}{DO}=\frac{1}{2}$

即△AOD的面积 $=\frac{6\times 1}{2}=3$（平方厘米）。

32.解：甲：丁=80：40，所以甲=2×丁。

乙：丁＝60：30.所以乙=2×丁。

因此，甲+乙=4×丁。

丙：丁＝60：30＝2：1，所以丙=2×甲＝4×丁。

因此，（丙+丁）：（甲+乙）=（5×丁）：（4×丁）＝5：4。

所以，丙、丁两个三角形面积之和是甲、乙两个三角形面积之和的 $\frac{5}{4}$ 倍。

33.三个小正方体拼成一个如图样，减少了小正方体 4 个面的面积，表面积减少了 16 平方厘米，先求出小正方体一个面的面积，再求正方体的棱长。

16÷4＝4（平方厘米）……正方体一个面的面积，

4＝2×2。

答：小正方体的棱为 2 厘米。

34.解：

$$[4\times 4\times(4\div\frac{1}{10})-3.14\times(\frac{4}{2})^2\times(4\div\frac{1}{10})\div]\div[4\times 4\times(4\div\frac{1}{10})]$$

＝0.215

＝21.5%

答：在方木中约去掉 21.5%的木材。

35.长方体的底面积是：2100÷10=210（平方米）。

把 210 分解质因数：　210＝2×3×5×7。按题意长与宽都大于高，长和

宽只能是 15 米（5×3）和 14 米（2×7），所以长方体长与宽的和是 15＋14=29（米）。

36.解：以长方形的边 BC 为轴，旋转一周得出来的立方体是一个圆柱体。

（1）圆柱体的底面积：

$$3.14\times4^2=50.24\text{（平方厘米）}$$

（2）圆柱体的侧面积：

$$2\times3.14\times4\times8=200.96\text{（平方厘米）}$$

（3）圆柱体的体积：

$$3.14\times4^2\times8=401.92\text{（立方厘米）}$$

37.解 零件的表面积等于下部正方体部分的表面积与上部半圆柱表面积之和。

零件的表面积：

$$5\times5\times(6-1)+3.14\times5\times5\div2+3.14\times(\frac{5}{2})^2=183.875\text{（平方厘米）}$$

零件的体积：

$$5\times5\times5+3.14\times(\frac{5}{2})^2\times5\div2=174.0625\text{（立方厘米）}$$

38.从上面数一共有 9 个小正方形，下面也是 9 个小正方形，从右面数，有 9 个小正方形，左面也有 9 个小正方形；

从前面数，有 7 个小正方形，后面也有 7 个小正方形。它们的表面积是：

2 × 2 × (9+9+7)×　=20 （平方厘米）

39.解：正方体的表面积一共是：1×1×6=6（平方米），现考虑到每锯一刀就会增加两个面，面积都是 1 平方米。现一共锯了 2＋3＋4=9（刀），共增加 2×9=18（平方米）。

因此总面积是：1×1×6＋1×1×（2＋3＋4）×2=24（平方米）。

40.由铅锤的体积与水下降部分的体积是相等的，可推出水下降的高度为：

$$\frac{3.14\times(6\div2)^2\times20\times\frac{1}{3}}{3.14\times(20\div2)}=0.6\text{(厘米)}$$

41.解法一：设正方体的棱为 d 厘米，即圆柱体的直径为 d 厘米，根据求圆柱体体积公式可得：

$$3.14\times(\frac{1}{2}d)^2\times d=628$$

$$3.14\times\frac{1}{4}\times d^3=628$$

$$d^3=800$$

解法二：根据题意，圆柱体和正方体的高是相等的，因此，底面积与体积（容积）成比例关系。

设正方体底面积为 1，则圆柱体的底面积为：

$$3.14\times(\frac{1}{2})^2=\frac{3.14}{4}$$

假设正方体的容积（体积）为 X 立方厘米，那么

$$\frac{\frac{1}{3.14}}{4}=\frac{x}{628}, \qquad x=800$$

解法三：圆柱体底面积与正方体底面积之间的比值是一定的，它是：

$$\frac{3.14\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1}=0.785$$

而正方体与圆柱体高又相等，因此正方体的容积（体积）是：

628÷0.785=800（立方厘米）

答：正方体的容积是 800 立方厘米。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000100_0258_1.bmp}

42.解法一：如图，把圆柱体分为两部分，下面是一个底面周长为 9.42 厘米，高为 4 厘米的圆柱体，上面是一个底面周长为 9． 42 厘米，高为（6—4=）2 厘米的圆柱体体积的一半。

$3.14\times(9.42\div3.14\div2)^2\times4+3.14\times(9.42\div3.14\div2)^2\times2\div2=35.325$（立方厘米）

解法二：如果把二个一样大小的斜截体拼成一个底面周长为 9.42 厘米，高为（4＋6＝）10 厘米的圆柱体。

$3.14\times(9.42\div3.14\div2)^2\times10\div2=35.325$（立方厘米）

答：截后的体积是 35.325 立方厘米。

43.解：挖去的部分不能简单地看成是三个同样大小的长方体。如果减去三个 4 2×20 的长方体，就必须再加上多减去的两个小正方体；如果减去一个 42×20 的长方体，那就还要减去两个 4 2× （20—4）的长方体。

模型的表面积是原正方体的表面积减去六个正方形开口处的面积，再加上三个底面边长为 4 厘米，高为（20—4）厘米的长方体的侧面积。

模型的体积：

$20^3-4^2\times20\times3+4^3\times2=7168$（立方厘米）

或者 $20^3-4^3\times20-4^2\times(20-4)\times2=7168$（立方厘米）

模型的表面积：

$20^2\times6-4^2\times6+4^2\times(20-4)\times3=3072$（平方厘米）

习题十一

1.3 号第一名，1 号第二名，4 号第三名，2 号第四名。

2.甲是跳伞运动员，乙是田径运动员，丙是游泳运动员。

3.A 的对面是 E，B 的对面是 D，C 的对面是 F。

4.A 队指挥小英，伴奏李老师；B 队指挥小芳，伴奏王老师；C 队指挥小辉，伴奏张老师。

5.赵老师上数学课，钱老师上外语课，李老师上语文课。

6.A 在化妆，B 在看书，C 在修指甲，D 在做头发。

7.小东在二中，爱好排球；小兰在三中，爱好篮球；小英在一中，爱好游泳。

8．乒乓球在黄盒里。

9.甲是钳工，乙是车工，丙是电工。

10.是丙做的。

11.丙的运动衫号码是 4 号。

12．1 是衡山，2 是嵩山，3 是华山，4 是恒山，5 是泰山。

13.A 猜对了第三包是黄的；B 猜对了第二包是蓝的；C 猜对了第一包是红的；D 猜对了第四包是白的；E 猜对了第五包是紫的。

14.C 赛了 2 场。