学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

解几何题的钥匙

BOOK

内部资料 非卖品

解几何题的钥匙

几何是怎样入门的

几何是研究图形性质的学科。研究图形的性质，既不能单凭观察，也不能先靠度量。那么靠什么呢？靠判断、推理。要做到这一点，首先，要学好概念，这样才能了解题目的具体内容；其次，要学好公理、定理，这是判断、推理的依据。所有这些，既是学好几何的准备，又是几何入门的开始。

几何是研究什么的

几何是研究图形性质的学科。在平面几何中重点研究的对象是三角形、四边形和圆。

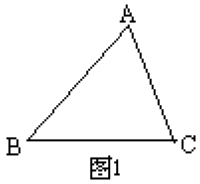

图1

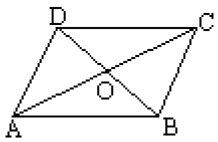

图2

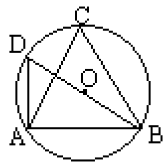

图3

比如图 1 中已知△ABC，用刻度尺量一量每一边的长度，或者用量角器量一量每一个内角的大小，这当然是几何课的内容。但是，几何课主要的内容不是这些，而研究图形的一般性质。象三角形有三个内角，每一个内角有多少度是不一定的，可是三个内角合起来一定是 180°，无论任何人画任何一个三角形都会得出相同的结论。

有了什么条件，必然得到什么结果，这就是规律性的认识。象图 1 中△ABC，若是给了 AB 边大于 AC 这个条件，就一定能得出 AB 边所对的∠C，一大于 AC 所边对的∠B 这个结论。在图 2 中，已知▱ABCD 对角线相交于 O，根据平行四边形定义不但能判断 AB 边等于 CD 边，而且可以判断△AOB 与△COD 是能够重合的。这里，既不用度量，也不用把△AOB、△COD 剪下来真的重合在一起。这就是凡平行四边形一定有的特点，是它们的共性，是人们研究平行四边形得到的规律性认识。

这些都图形的性质。

在图 3 中，已知 A、B、C、D 都是⊙O 上的点，可以判断∠ADB 一定等于∠ACB。这样判断不是单凭观察就能得到的，因为只凭眼看是看不准的，也不是靠度量，因为即使能量准，也不能得到一般性结论（一个圆有这个性质，也不能对所有圆下结论）。

所以，几何要研究的图形性质，是某一种图形的一般的性质，即凡是这一种图形一定有的性质，包括形状、大小和相互位置关系。

练习一

1. 已知∠AOB=+α，∠AOC=β，且α＞β，α、β表示∠BOC。

提示： 原题是不给图的。由已知条件可知 O 是这两个角的公共顶点，OA 是这两个角的公共边，但是 OC 的位置，并没说明，OC 与 OB 若是分在 OA 的两旁，就成为图 4 形状，有∠BOC=∠AOB＋∠AOC=α＋β；OC 与 OB 若是同在 OA 的一旁，如图 5 的形状，就有∠BOC=∠AOB-∠AOC=α-β。只有这样考虑才算全面，才能反映出满足已知条件的角的一般性质。

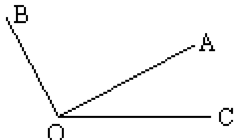

图4

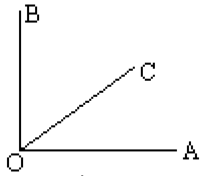

图5

2．画一个四边形 ABCD，使 AB∥CD，并且 AD=BC。提示：题目没有限定四边形的边的长度，只提出 AB、CD 的位置是平行的，AD、BC 的大小是相等的。可能有的读者画出来的是一个平行四边形，有的读者画出来是一个等腰梯形。如果同时画出两种图形，就最好了。学过平行四边形判定的读者知道，一组对边平行，另一组对边相等，是不能判定这个图形是平行四边形的。

不懂概念寸步难行

研究图形性质，既不能单凭观察也不能靠度，那么靠什么呢？靠判断、推理。

要学判断、推理，首先得学概念。

比如学几何必须先明白什么是直线，然后才能分清两直线相交还是不相交，接下去才懂什么叫平行线、什么叫平形四边形。这样研究平行四边形的性质才有了起点。

象直线、平行线、平行四边形这些是名称，相交、平行这些是术语，都是概念。学习几何必须准确、牢固地掌握概念，才可能动手研究，才可能研究出正确的结论。不懂概念是寸步难行的。

在图 6 中，已知：AB∥CD，直线 EF 和 AB、CD 都相交，交点分别是 E、F，∠BEF 的平分线与∠EFD 的平分线相交于 H，求证：EH⊥FH。

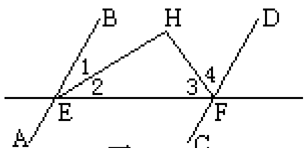

图6

这样一个题目，包含多少概念？AB、CD 是平行线，EF 是直线，它们相交构成角，而且∠BEF 与∠EFD 是同旁内角（懂得三线八角中，用两条直线分内、外，第三条直线分两旁，才能迅速、准确地找到内错角、同旁内角），平行线的同旁内角是互补的，由角平分线的定义得到∠1=∠2，∠3=∠4，然后推出∠2、∠是互余的。由三角形内角和 180°算出∠H=90°，再根据两条直线互相垂直的概念，判断 EH⊥FH。

这当中平行线、直线、角、同旁内角、角平分线、三角形、内角都是名称；而相交、互补、互余、互相垂直是术语。这个问题的解决共计用了十一个概念。无论哪一个概念不明确。都将导致错误。

再如三角形的高是一个重要概念，不能一般对待，要格外认真地学。大家知道：

三角形一个顶点到它的对边所在直线的垂线段叫做三角形的高。

学习这一概念的时候，必须一定一句对照图形认真研究。如图 7，在△ABC 中∠ABC 是钝角，现在我们想从 A 点向它的对边画垂线，或者说想画出 BC 边上的高。这时，A 是“三角形一个顶点”，而“它的对边”是 BC 线段，“它的对边所在直线”是 BC 直线。既然是直线，那么 BC 可以向两方无限延伸。引垂线就要自直线 BC 一点 A 用基本作图的方法（或用三角板推）画出垂线 AD 来。A 点到垂足 D 之间的线段（即线段 AD），才是要作的高。

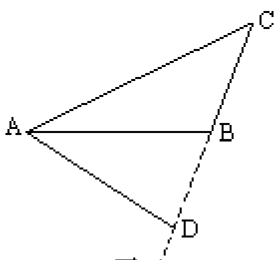

图7

这道题能否作正确，就看你对三角形的高的概念是否清楚。具体地说，这里用到了三角形、顶点、对边、所在直线、互相垂直、直角、垂线、垂线

段等概念。

我们经常用概念指导画图或作图，用概念指导计算，用概念指导推理。所以说，只有掌握好概念，才能形成正确的思路。

练习二

回答下列问题：

1．什么叫钝角？

2．什么叫垂线？

3．两点间的距离、点到直线的距离、两条平行线的距离各是什么意思？

4．什么叫三角形的外角？三角形外角和指的是什么？

5．一条直线上有 A、B、C 三个点，图中有几条射线？这个题目和射线概念有什么关系？

6．什么叫命题、逆命题、公理、定义、定理？

7．什么叫多边形的对角线？

8．两个角既互余、又相等，这两个角各是多少度？既互补、又相等？

9．一个角是它余角的 5 倍，求这个角的补角是多少度？

10．画出钝角三角形的三条高。

怎样记概念学概念

一开始学几何，就遇到许多概念，光是前两节，大约就有 60 个名称、术语。初学的同学一下子把这么多的概念都记住是有困难的。怎么办？请你把最重要又常用的概念记牢，比如，射线、线段，特别是角的概念，包括各种单称、并称、互称的角都必须学会；对于其他概念可以先读读，做作业用到哪个概念就读哪个概念。逐渐对这些概念就会熟悉了，以后用到的时候再认真学。分散难点，集中精力，为的是把重要概念学好。

到底怎样才能把几何概念学好呢？

首先，我们应该把概念多念几遍，直到念顺了嘴为止。一个新概念，说都说不利落，怎么能讲理解、运用呢？比如，点到直线的距离的定义是："从直线外一点到这条直线的垂线段的长度，叫做点到直线的距离。"只有反复念几遍以后，才能在全面了解这个概念的基础上，抓住"垂线段"、"长度"这个要点。

其次，我们应该结合图形，理解记忆。几何是研究图形性质的学科，几何概念应该结合图形去理解记忆。比如图 8 中任意四边形 ABCD 内有一点 P，问 P 点到各边的距离是多少厘米，要求用刻度尺去量，精确到 0.1㎝。

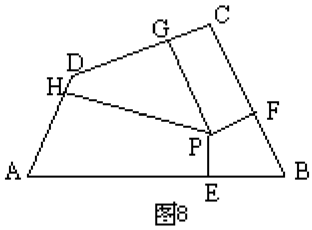

图8

根据点到直线的距离这个概念，应当先画出 P 点到这 AB 的垂线 PE，这里垂足为 E，所以垂线段 PE 的长就是 P 点到 AB 的距离。同样，可以画出 P 点到 BC 的垂线段 PF，P 点到 DC 的垂线段 PG，P 点到 AD 的垂线段 PH，再用刻度尺去量就可以了。这样边想概念边画图，就能懂得快、记得牢。

再就是运概念解题。无论几何证明题、几何计算题、几何作图题，都离不开几何概念。学过等腰三角形性质以后，有这样一道证明题：求证"等腰三角形底边中点到两腰的距离相等"。

在图 9 中，已知 AB=AC，D 是 BC 中点。有的同学说，因为 DB=DC，所以 D 到两腰距离相等。这就是错把 D 到 B、C 点的距离，当作 D 到 AB、AC 的距离了。应该首先看清题目，是"底边中点"即 D 点，到"两腰"即 AB、AC 的"距离"，是指点到直线的距离，不是点到点的距离。然后复习点到直线的距离的概念，画出 D 到 AB、AC 的垂线段。这样，运用概念解决了问题。

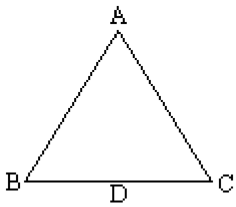

图9

值得一提的是，有些概念应该格外注意。例如，平角是用射线绕端点旋转，始边终边成一直线定义的，而不是用 180°角定义的；钝角概念的理解、叙述都要完整；互余、互补概念不要混淆……

下面看两个例题。

例1 一个角是它的余角的 $\frac{1}{3}$，求这个角的补角。

分析：设这个角为α，则它的余角为 90°-α，它的补角为 180°-α。这就是用互余、互补的概念来表示这些角。再根据另外的大小关系列方程，即 $\alpha=\frac{1}{3}(90°-\alpha)$，可得 α=22.5，它的补角 180°-α=157.5°。

若是用 $\frac{1}{3}$ 的关系设未知数，即设这个角的余角为α，则这个角为 $\frac{1}{3}$α，然后用互余概念列方程 $\alpha+\frac{1}{3}\alpha=90°$，可得 α=67.5°。因为一个角的补角比它的余角大 90°，所以这个角的补角为 157.5°。这又是根据互余、互补的概念作出的判断。

例 2　求证：三角形一边的两个端点到这边上的中线距离相等。

分析：如图 10，这个题涉及的概念中“三角形”、“边”、“端点”，都不难懂，三角形的“中线”，就需要明确是“连结三角形一个顶点和它的对边中点的线段”；尤其值得注意的是这个“距离”，是点到直线的距离，所以要从 B 点和 C 点分别向 AD 及其延长线引垂线段。

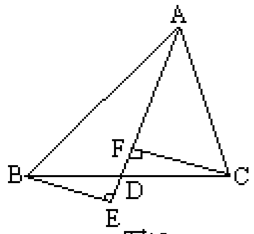

图10

在平面几何中，有三种不同的“距离”概念：两点距离；点到直线的距离，两条平行线之间的距离。只有把它们归在一起，对比着念，才能分得清，记得住。

概念清楚，证明就容易了。这个题只要用“角角边”证△BDE≌△CDF，就可以得到 BE=CF 了。

练习三

想一想，下列各题错在哪里。

1．　在图 11 中，已知 AD∥BC，就说∠1=∠2 对不对？在图 12 中，已知 AB∥CD，就说∠DEC=∠BFH 对不对？

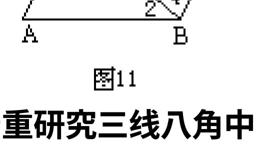

图11

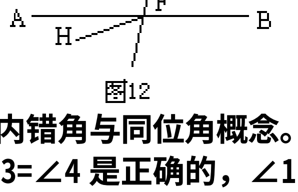

图12

提示：　应着重研究三线八角中内错角与同位角概念。在图 11 中，两条平行线 AD、BC 被 DB 所截，内错角∠3=∠4 是正确的，∠1、∠2 这一组三线八角无关。若说∠1、∠2 也是内错角，那指的是两条直线 AB、CD 被 DB 所截，但是 AB、CD 是否平行还不知道，所以不能说∠1=∠2。在图 12 中，两条平行线 AB、CD 被 EF 所截有四组同位角，其中没有∠DEC 与∠BFH，这两个角的边

是 ED、EG、FB、FH 已经是四条直线了，怎么会是同位角呢？用三线八角认真检查一下就明白了。

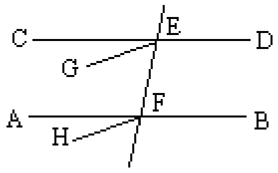

图12

2．在图 13 中，问 E 到 CD 的距离，就画出垂线段 EF，然后量 EF 的长对不对？

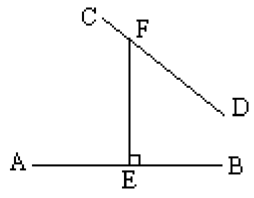

图13

提示：点到直线的距离是用“垂线段”的长定义的，而“垂直”是用两条直线相交成直角定义的。那么，对这道题来说是哪两条直线呢？既然是 E 到 CD 的距离，当然 CD 是一条直线，再就是所作的垂线 EF 是一条直线。下面，我们在看一看 CD 与 EF 所成的四个角中是不是有一个角是直角呢？没有。所以量 EF 的长是错误的。因为它不是从 E 点到 CD 所作的垂线，应该自 E 点作 CD 的垂线，然后再量垂线段的长。

3．把钝角三角形的三条高，画成图 14 的样子，对不对？

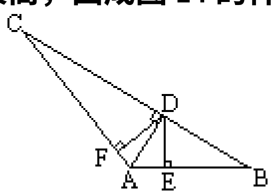

图14

提示：AD 是△ABC 的高是对的，DE、DF 虽然也是垂线段，但是与三角形的高的概念（“三角形一个顶点到它的对边所在直线的垂线段”）不符合，所以有两条垂线段不是高。我们应该从 C 点向 BA 的延长线引垂线，从 B 点向 CA 的延长线引垂线。

4．如图 15，AB 是直线 l 的垂线，垂足为 B，AC 为直线 l 的斜线，斜足 C，CD⊥CA，就说∠1 与∠2 互余、∠1 与∠3 互余，所以∠2 与∠3 互余，对不对？

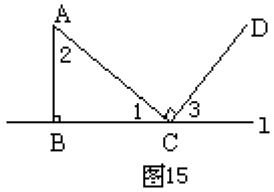

图15

提示：根据互余的概念，写出表达式∠1＋∠2=90°；∠1＋∠3=90°这两个等式经过移项，可改写成∠2=90°-∠1；∠3=90°-∠1。显然，∠2=∠3，不是∠2 与∠3 互余。一般地说，由α＋β=90° γ＋β=90°是判断不出α＋γ=90°的，应该得出α=γ。当然除非要α、β、γ都是 45°的情况。

5．如图 16，已知在△ABC 中，D 是 AB 中点，E 是 AC 中点，N 是 BC 上一点，AN交DE于M。就说DM等于$\frac{1}{2}$BN，根据是三角形中位线定理，对不对？

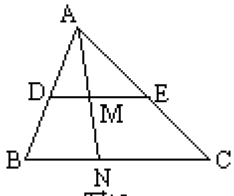

图16

提示：　在应用三角形中位线定理的时候，必须符合三角形中位线的概念。在△ABN 中，已知 D 是 AB 中点，可是，M 是不是 AN 避点，却还没证明。应该先证 DE∥BC，再用平行线等分线段定理的推论，判断 AM=MN，才能用△ABN两边中点连线DM平行于BN且等于$\frac{1}{2}$BN这个结论。

6．如图 17，在正方形 ABCD 中，E、O、F 分别是 AB、DB、AD 的中点，能不能说根据三角形中位线定理，有$OE = \frac{1}{2}AD$、$OF = \frac{1}{2}AB$。因为 AD=AB，所以 OE=OF。又 AE=AF，∠A=90°，所以四边形 AEOF 是正方形。这样说对不对？

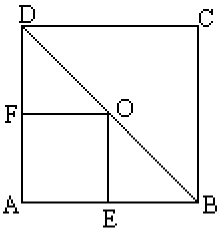

图17

提示：这个题中，论据摆了不少，但是对照正方形定义（“有一个角是直角并且有一组邻边相等的平行四边形叫正方形”），还是少了一个条件，即没有证明这个四边形是平行四边形。如果说先以两组对边分别是相等证出平行四边形$OE=\frac{1}{2}AD=AF$，$OF=\frac{1}{2}AB=AE$，再有∠A=90°，AE=AF，这样证明就对了。判断、推理的依据

判断、推理是研究图形性质的主要方法，判断、推理的依据又是什么呢？是几何的概念、公理和定理。概念问题，前两节已经讲过。下面，我们着重谈谈公理和定理的作用。

让我们通过一道几何证明题，看看几何公理、定理的应用，以及公理、定理间的联系。

如图 18，已知：△ABC。求证：∠A＋∠B＋∠C=180°

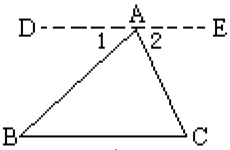

图18

证明时过 A 点作 DE∥BC，得到∠1=∠B，∠2=∠C。这就用到学过的定理：

二直线平行，内错角相等。由于∠1＋∠BAC＋∠2=180°，比等量代换，可以得到∠B＋∠BAC＋∠C=180°。

从表面上看这个证明过程只用了一个定理："二直线平行，内错角相等"，可是这定理是在学了"二直线平行，同位角相等"和"对顶角相等"这两个定理之后得到的。因此，这个问题的解决，需要三个定理。 再进一步说，学习另外两个定理时，又需要先学另外的公理、定理，还需要应用反证法的知识和基本作图的技能。

看起来一道几何题的证明，就是研究一个图形的性质的过程，而这个研究过程用的是判断、推理的方法。几何学要求每一步的判断都要有根据，这些根据就是前面讲过的公理或定理。前面定理又要它前面学过的定理作依据，照这样总要向前面要根据，最前面的怎办呢？这就是公理。几何公理是人们从实践中总结出来的图形的基本性质，它已为大家所承认，可以作为说明其他问题的根据。

在几何课里学公理、定理，如同在代数课里学法则、公式一样，就靠这些内容来解题。研究图形性质，就要根据题目条件，选用一条或几条几何公理、定理来判断、推理，最终得到需要的结论。所以，大家一定要象熟悉代数法则、公式一样地念熟几何公理和定理。

推论是证明定理时附带得出的几何图形性质，也可以把它看作定理，只不过推论往往是没有单独证明过。尽管如此，有时候一个定理的理论，比本定理应用的时候还要多。例如，三角形内角和定理的推论，圆周角定理的推论，都是这样。

练习四

1．将上面所说证明三角形内角和等于 180°的过程中用到的定理，都追问一个为什么，并且加以证明。

2．证明下列定理，认真写出已知、求证、证明过程，以及每一步骤的依据：

(1) 同角的余角相等；

(2) 同角的补角相等；

(3) 等角的余角相等；

(4) 等角的补角相等。

思路是怎样打开的

思路随着推理过程而展开，为了找开思路，必须会推理。

首先，要弄懂弄通某些局部知识的推理特点。比如，平行线部分的推理特点是分清判定定理和性质定理；全等三角形部分的推理特点是有选择地挑出三个元素对应相等；平行四边形是平行线与全等三角形的综合，必然兼有以上两部知识的推理特点。

其次，要认真钻研某些知识的纵向联系，真正做到举一反三，触类旁通。比如，下面将要看到的：从研究相似形开始，引入了基本图的思想；从研究圆开始，提出了十套知识归类训练法。

思路打开以后，千万注意一个容易被人们忽视的问题：当你添设辅助线的时候，一定别忘了添线的合理性和可能性。推理从这儿开始

如果把概念、公理、定理都学会了，判断、推是就有了基础。这时就要进行一些训练，比如，从具体到抽象的训练。

下面，我们先从两个角互余的关第出发，研究一下推理是如何展开的。

若α为 40°，则它的余角β为 50°。互余是两角之间的大小关系，只要知道其中一个角的大小，就可以求出另一个角的大小。

若α为 40°，画出它的余角γ，则γ为 50°；再画出α的另一个余角θ，则θ亦为 50°。结论是：凡是 40°角的余角，无论画出多少个，都是 50°，也就是相等。

若α不是 40°，则它的余角当然不是 50°，但总可以用 90°-α来表示。结论是：凡是α角的余角，无论画出多少个，都可以用 90°-α表示。所以，凡是α角的余角都是相等的。

以上道理虽然简单，但是已经离开了具体数字的计算，开始上升到抽象推理。（或几个角）的大小（度、分、秒），过渡到判断两个角大小相等，虽然这时并不知道这两个角各自是多少度。

与此相类似，若是α角等于β角，则α角的余角必等于β角的余角。

两角互补的关系也是一样，下面写出推理的具体思路看一看。

已知：如图 19，∠α是∠β的补角，∠γ也是∠β的补角。

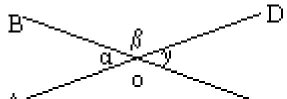

图19

求证：∠α=∠γ。

分析：既然∠α、∠β是互补的角，就用式子把它们的关系表示出来，写成∠α＋∠β=180°，再进一步，∠α等于什么呢？∠α=180°-∠β；同样的想法写出∠γ=180°-∠β。到这里，可以看出：∠α与∠γ都等于 180-∠β，所以∠α=∠γ。

证明：∵∠α＋∠β=180°（补角定义），

又∵∠γ＋∠β=180°（补角定义），

∴∠α=180°-∠β（等式性质），

∠γ=180°-∠β（等式性质），

∴∠α=∠γ（等量代换）。

同样是图 19，可以把知条件改作∠α与∠γ是对顶角，求证∠α=∠γ。证明开始时，先说 OB、OC 分别是 OA、OD 的反方向延长线，根据是对顶角定义；再说∠AOB 与∠COD 都是平角，根据是平角定义；接着说∠α＋∠β=180°，∠γ＋∠β=180°根据是互补定义。到了这时就可以直接得出结论，∠α=∠γ，根据是同角的补角相等。

通过上述推理过程可以看出，从已知条件出发，每一步骤就是一次判断，把一次又一次的判断连接起来就构成了推理。判断的依据不是概念，就是公理、定理，也包括等式性质，开始学某一部分知识的时候，一般用概念进行判断较多；逐渐定理学多了，用定理作为推理依据就多了。

练习五

1．已知：∠AOC 和∠BOC 互为邻补角，OD 平分∠AOC，OE 平分∠BOC。求证：OD⊥OE。

2．已知：AB⊥MN 等于 B，CD⊥MN 于 D。求证：AB∥CD。

泾渭分明的平行线问题

从研究同角的余角相等这个结论开始，我们已经走进了推理论证的大门。判断、推理伴随着学习几何的全过程，但是各阶段的推理也有它自己的特点。平行线这一部分推理的特点，是必须分清判定和性质。即已知平行用性质定理；求证平行用判定定理。

用角的关系来判断两直线平行，是一各常用的方法。因为平行线虽然有定义，但是不好运用“不相交”这个概念。所以不便用定义，需要另设关定方法。

这里有一项准备工作必须做好。就是弄清三线八角中的同位角、内错角和同旁内角。这些角是因位置不同而得名的并称的角；并不说明两个角的大小关系，即同位角有的相等，有的不相等，内错角也是有的相等，有的不相等；同旁内角有的是互补的，有的不是互补的。

学习平行线判定公理，千万不要过早地简化公理，应该要求自己能完完整整一字不错地将公理全文背不来，明确这是用同位角的大小关系，判断两直线平行或是不平行的。若知道 （已知或已证）同位角相等，就可以判断二直线平行；若不知道同位角相等还是不相等，就不能判断二直线平行。

学过平行线性质定理，必须已知或已证二直线平行才能用，也要全文背诵下来。

若是过早地简化，往往容易忽视“如果”、“那么”的关系，甚至随便就说“同位角相等”，造成凡同位角就相等的错误印象。

有关平行线问题的推理，重要的事情就是分清性质和判定，每次证一个题目，对其中每一个推理步骤，都要问自己一次：是已知平行还是求证平行？是用性质理还是用判定定理？

例如图 20 中，已知：AB∥CD，EG、FH 分别是∠AEF 和图 20∠EFD 的平分线。求证：EG∥FH。

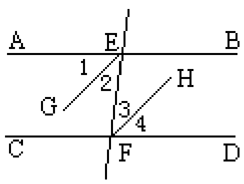

图20

证明：∵AB∥CD（已知），

∴∠AEF=∠EFD（两直线平线，内错角相等）。

∵∠1=∠2，∠3=∠4（角平分线定义），

∴∠2=∠3（等式性质），

∴EG∥FH（内错角相等，两直线平行）。

值得注意的是∠2 与∠3 确实是内错角，但是之所以能说∠2=∠3，并不是因为这两角由它们的位置来看是内错角（因为内错角不见得相等），而是因为∠2 是∠AEF 的一半，∠3 是∠EFD 的一半，∠AEF 与∠EFD 是相等的，∠2、∠3 是等量的一半，所以相等。

练习六

1．如图 21，已知：直线 MN 分别交 AB、CD、EF 三直线于 P、Q、R，且 AB∥CD，∠1=∠2。求证：AB∥EF。

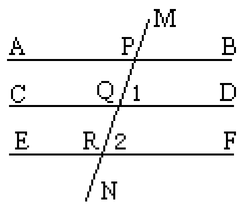

图21

提示：证明 AB、EF 的位置关系时，可以用有关的角证，也可以用平行公理的推论证。

2．如图 22，已知：∠1+∠2=180°，∠3=61°，求：∠4 的度数。

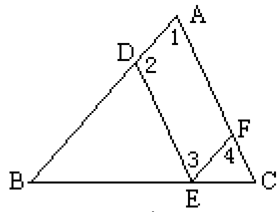

图22

3．如图 23，已知：AB∥CD，且∠1=∠2。求证：BE∥DF。

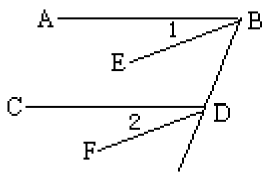

图23

4．如图 24，已知：AB∥CD，AG、CF 分别是∠BAC 与∠DCE 的平分线。求证：AG∥CEF。

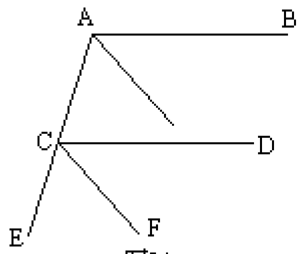

图24

规规矩矩证全等三角形

每一个三角形都有三条边、三个内角。如果两个三角形这六个元素一一对应相等，这两个三角形必然能重合。

如果两个三角形能重合，那么这两个三角形就叫做全等三角形。实际上，在判定两个三角形全等的时候，不需要六个元素对应相等，只要有经过选择的三个元素对应相等就够了。这就是课本上明确的五个判定定理。

但是一道几何题是不会给足三个条件的，至少要缺一个条件，让学生从其他条件中再推出一个条件。

如图 25，已知：△ABC 与△ADE 都是等边三角形。求证：△ABD≌△ACE。

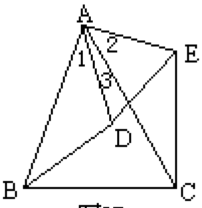

图25

每见到一个图形，就应当立刻想想它有什么性质这是推理的具体准备。比如，已知条件说△ABC 与△ADE 都是等边三角形，我们就会立刻想到 AB=BC=AC，∠CAB=∠ABC=BCA=60°；AD=DE=AE，∠EAD=∠ADE=∠DEA=60°。这些不一定都写出来，只是作好准备，证明时用什么写什么。

再看看求证的两个三角形，已经有两对边分别相等了，下面或是能证明夹角相等，满足“边、角、边”定理；或是能证明第三边相等，满足“边、边、边”定理。结合上面推出的条件，∠1=∠BAC-∠3，∠2=∠DAE-∠3，所以∠1=∠2。可以证明△ABD≌△ACE。

开始学习三角形全等，主要是证这类题，所缺条伯，经常靠下述关系补足：1．公共边；2．公共角；3．对顶角；4．平行线的内错角（或同位角）；5．同角（或等角）的余角相等；6．同角（或等角）的补角相等；7．等式性质。

上面说的是“怎样想”。全等三角形与相似三角形是平面几何两大中心，大部分知识环绕着这两个内容来研究，所以从已知的条件及求证的要求产生证三角形全等的意识是很有用的。

证全等三角形不但要会想，而且要会写，要讲究证题格式。以前的证明格式是在纸上画一条竖线，左边写过程，右边写根据；后来就用“∵”“∴”的形式，一步步往下推理，将主要根据注在括弧内；现在用双箭头、大括号。无论哪一种格式都要求有条有理、有根有据。讲究解题格式，最重要的理由是保证推理无误，也使人能看清楚。出题的人不能把证全等的三个条件给全，这就要求做题的人能根据已知条件有根有据地推出新的相等元素（边或角）。寻新的相等元素的论证过程，未必都很简单，因此，有条有理地、清清楚楚地写出证明过程，就显得十分重要了。

讲究格式对培养自己思维的条理性、全面性也是非常有益的。一道题的前半部分是将需要的内容都证出来，准备好。后半部分是将用作判断三角形全等的三条，摆在一起用大括号括起来，再审查一遍，看合不合要求，到底是“角、边、角”，还是“角、角、边”，最后再用“≌”符号把要证的两个三角形连结起来，在后面注明理由。

如果做到上述要求，就不至于丢三落四了。

请大家看看下面例题的证明格式：

如图 26，已知：AB∥CD，BE⊥AC 于 E，DF⊥AC 于 F，且 AF=CE。求证：AB=CD。

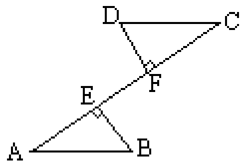

图26

证明：∵AB∥CD，

∴∠A=∠C（两直线平行，内错角相等）。

∵BE⊥AC 于 E，DF⊥AC 于 F，

∴∠AEB=∠CFD=90°（垂直定义）。

∵AF=CE，

∴AF-EF=CE-EF，

即 AE=CF。

∴△ABE≌△CDF（角、边、角），

∴AB=CD。

刚刚开始学习三角形全等的同学，有必要将已经推出的三个条件重写一遍，用大括号括在一起。

证两个三角形全等，往往不是目的，而是通过证明两个三角形全等得到对应边相等或对应角相等。

有时证了一套三角形全等以后，还要再去证第二套甚至第三套三角形全等。这样，题目加深了，内容复杂了，步骤多了，产生错误的可能性就更大了。所以，我们说要规规矩矩证全等，只有找准三个条件，才能依照判定定理证全等。

一般的题目是这样，难度大的题目更是这样。

如图 27，已知：等边△ABC，延长 BC 到 D，再延长 BA 到 E，使 AE=BD，连结 EC、ED。求证：EC=ED。

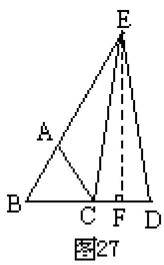

图27

这个题有几种不同的解法，应该怎么想呢？所谓学会想问题的方法，是指什么说的呢？从等边△ABC 着眼，想到 AB=BC=AC，∠B=∠BAC=∠ACB=60°；由 AE=BD=BC+CD 想到为了能说清这些线段之间的关系，不妨设 BC=a，CD=b，则 AB=a，AE=a+b，BE=2a+b；由 BE 的长度可以用 a、b 表示，∠B 又是 60°角，想到若是作 EF⊥BD 于 F，则△BEF 为直角三角形，∠BEF 为 30°，30°角所对边BF为斜边BE的一半，即$BF=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}$（2a+b）$=a+\frac{1}{2}b$。但是，BF=BC+CF=a+CF，所以$CF=\frac{1}{2}b$。又CD=b，所以$FD=\frac{1}{2}b$。即

CF=FD。这时，再证△ECF≌△EDF 就不困难了，易得 EC=ED。

这个题目与前面一些题目比较，显得难了一些，训练要求也高了一些。要求降了必须熟悉等边三角形性质以外，还必须弄清这几条线段间的位置关系与大小关系，才能按照需要运算、推理。

最后，欲证△ECD 是等腰三角形，作出辅助线 EF⊥CD 于 F，制造全等三角形的想法是比较自然的。与些同时制造了直角△EBF，这个一举两得的结果对解这个题是十分关键的。

练习七

1．如图 28，已知：AB=AC，AD=AE。求证：

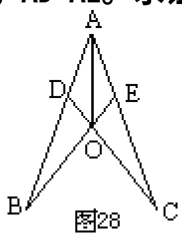

图28

（1）△ABE≌△ACD；（2）△BOS≌△COE；

（3）△AOD≌△AOE；（4）△AOB≌△AOC。

2．已知条件如上题。求证：∠BAO=∠CAO。

3．如图 29，已知：D 是△ABC 的 BC 边的中点，E 是 AC 边上一点，DF⊥DE 交 AB 于 F，以 E 以圆心 EF 长为半径作弧交 FD 的延长线于 G，连结 CG，求证：BF=CG。

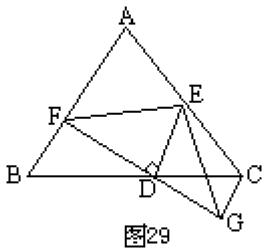

图29

4．如图 30，已知：C 是 AB 上一点，CD=AB，且 BE∥CD，以 BE=AC。求证，AE=AD。

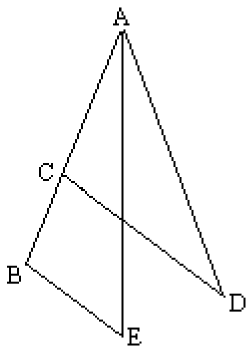

图30

综合性强的平行四边形

平行四边形本身就是平行线与全等三角形的综合，因此，解题的时候必然要兼顾上述两个方面。值得注意的是，对于“见到图形想到性质”的训练，在这里要求更高些。从已知条件向推理，到底从哪个条件开始：这个选择是十分重要的，关系到能不能顺利地进行推理。“已知”告诉我们的是“有什么”，“求证”告诉我们的是“要什么”这就要求我们能按照题目的需要选择有关的图形性质。

如图 31，已知：在四边形 ABCD 中，AB∥CD，∠A=∠C。求证：四边形 ABCD 是平行四边形。

这道题目虽然简单，但是证题的思路要清楚。若利用边的关系来，则可以用定义，也可以用“一线对边平行且相等”或“有两组对边分别相等”。这时，千万不要忙着连结对角线，证三角形全等。首先应当看看本题的条件与哪条定理接近，显然，用平行四边形定义来证是可以的。现在，已经有一组对边平行了，因而可以得出∠A+∠D=180°，现在，换成∠C+∠D=180°，就能证出另一组对边 AD∥BC。其次应当再想一想：因为没有“对边相等”的条件，所以就不考虑后两种办法了；若用角证，则靠等角的补角相等，也能证出另一组对角也相等；因为图中没有对角线，就不考虑用对角线判定了。

如图 32，已知▱ABCD 中，DE⊥AB 于 E，交 AC 于 F，且 FC=2AD。求证：∠DAC=2∠CAB。

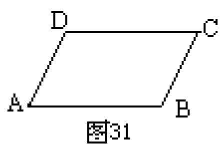

图31

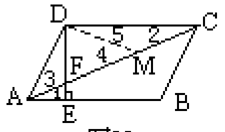

图32

如果一时没有头绪，不妨根据平行四边形的性质，进行推理，扩大可知的条件。由于有平行线，于是有∠1、∠2 相等，同时有∠CDF=90°；这样，图中共有三个直角三角形：△ADE、△AFE、△DFC；显而易见进一步该考虑直角三角形的性质了。我们学过直角三角形的性质，如在直角三角形中，锐角互余，斜边中线等于斜边一半，30°角所对边是斜边一半等等。这里，锐角互余暂时派不上用场，也没有 30°角可用。那么，只好考虑斜边中线等于斜边一半这一条了。已知 FC2=2AD，可改写成

$AD=\frac{1}{2}FC$，这一改写使我们得到启发，若看直角△DFC，斜边就是FC，AD 就是这斜边的一半。取 FC 中点 M，连结 DM，这 DM 就是斜边中线，应该等于斜边一半，于是有$DM=\frac{1}{2}FC$，经等量代换，得到AD=DM，∠3=∠4。而 DM=MC，∠2=∠5，∠4 是△DMC 的外角，∠4=∠2=∠5=2∠2，再换成∠3=2∠1。

再如图 33，已知：▱ABCD 对角线相交于 O，引 OE⊥AB 于 E，OF⊥CD 于 F。求证：OE=OF。

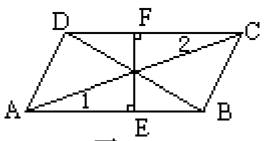

图33

前面那个题的思考方法，主要是从前到后，先看有什么，是从已知向后推理，属于综合法。这一次求证两线段相等，自然想到要证三角形全等，使它们当对应边，这种想法主要是从后向前，先看要什么，希望证出什么，属于分析法。

要证 OE=OF，看看它们所在的三角形，希望证出△AOE≌△COF，或是△DOF≌△BOE。这两个三角形全等的条件够不够呢？有 OA=OC，根据是原平行四边形对角线互相平分，有∠AEO=∠CFO=90°，还有∠1=∠2，满足角、角、边,可以了。从而得到 OE=OF。如果没好好想一想,随便说 OA=OC,∠AEO=CFO=90°，还有∠AOE=∠COF 是对顶角相等，也满足角、角、边，不是也能证△AOE≌△COF 吗？这就错了。因为已知条件给的是分别从 O 点向 AB、CD 引垂线，E、O、F 三点在不在一条直线上还没证明。在肯定 EOF 是直线以前，说∠AOE 与∠COF 是对顶角是不行的。其实，要证三点共线并不难，这个题只要用三角形内角和为 180°，就能证出∠AOE=∠COF，而 AOC 是直线，即∠AOF+∠COF=180°，经等量代换，可以得到∠AOF+∠AOE=180°，则∠EOF=180°，据平角定义，EOF 当然是直线了。即使不证三点共线，也能证明 OE=OF，那么何必自讨苦吃呢？所以，遇到共线问题，能躲开是躲开的好，这是一般的想法。

练习八

1．如图 34，已知：四边形 ABCD 是正方形，直线 MN 过 C 点，BE⊥MN 于 E，DF⊥MN 于 F。求证：DF-BE=EF。

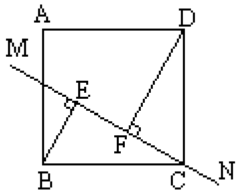

图34

2．如图 35，已知：E、F 分别是△ABC 的边 AB、BC 的中点，G、H 是 AC 边上的点，且 AG=GH=HC，EG 和 FH 的延长线相交于 D。求证：四边形 ABCD 是平行四边形。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0033_1.bmp}

提示：连结 BH，EG 为△ABH 中位线；连结 BG，则 FH 为△BCG 的中位线。可证四边形 BHDG 为平行四边形。连结 BD,交 AC 于 O,因为 OG=OH,易证 OA=OC，OB=OD。这个图形中有对角线的关系，所以用对角线判定平行四边形比较方便。

3．如图 36，已知：△ABC 中∠ACB=90°，CD⊥AB 于 D，∠A 的平分线 AE 交 CD 于 F，FH∥AB 交 BC 于 H，再引 EG⊥AB 于 G，连结 FG。求证：四边开 CFGE 是菱形；四边形 FGBH 是平行四边形。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0033_2.bmp}

提示 ：分别找出∠1、∠2 的余角，可证 CF=CE。易证△AEC≌△AEG，有 CE=EG。

4．如图 37，已知：▱ABCE，且△ABE、△CDF、△BCG 都是等边三角形。求证：EG=AC。提示：由于 EB=AB，BG=BC，∠EBC=60°+∠ABG=∠ABC，所以△EBG≌△ABC。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0034.bmp}

从相似形谈到研究基本图

学习相似三角形，主要是研究比例线段。这是因为证四条线段成比例，在平面几何里是一个重要的内容。

根据图形性质判断四条线段成比例，共有三部分定理：平行线分线段成比例定理，角平分线定理，相似三角形对应边成比例。其中，用得较多的是第三部分定理。我们知道，相似三角形判定定理有五个，但是用得比较多的还是下面两个：平行于三角形一边的直线和其他两边（或两边的延长线）相交，截得的三角形与原三角形相；一个三角形的两个角和另一个三角形的两个角对应相等，则这两个三角形相似。在直线形中的比例线段问题，多用前一个定理，在圆中的比例线段问题多用后一个定理。

下面，我们重点谈谈基本图。什么是基本图呢？就是在成千上万的几何题中，反复出现，重复使用的简单图形。

图 38 和图 39 是比例线段问题中常用的、重要的基本图。

如图 38，D、E 分别是 AB、AC 边上的点，且 DE∥BC。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0035_1.bmp}

这里一方面可用平行线分线段成比例定理，即$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$。这四条线段是连续的，DB在AD的延长线上，EC和AE也是这样。另外，用合比、反比，也可以得到$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$和$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$。另一方面用相似三角形可以得到$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$。如图39，ED∥BC，可以得到$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$。

下面，让我们通过两个例题，说明这两个基本图在证明题中的应用。

如图 40，已知：B 是线段 AC 上的一点，△ABET 和△BCD 都是等边三角形，AD 交 BE 于 M，CE 交 BD 于 N。求证：BM=BN。我们注意到，在图 40 中，△ACD 内有 BM∥CD，符合图 38 的条件，于是有$\frac{BM}{CD}=\frac{AB}{AC}$，即$BM=\frac{AB\cdot CD}{AC}$，同样，在△ACE内有BN∥AE，得到$\frac{BN}{AE}=\frac{BC}{AC}$，即$BN=\frac{AE\cdot BC}{AC}$，等量代换后，有BM = BN。

如图 41，已知：在△ABC 中，D 是 BC 上的一点，E 是 AD 的中点，BE 的延长线交AC于F。求证：$\frac{AF}{FC}=\frac{BD}{BC}$。

若是记住基本图，无论是从图 38 考虑，还是从图 39 考虑，都需要添平行线制造相似三角形。如图 41，作 DG∥AC 交 BF 于 G，易证△GED≌△FEA，同时有$\frac{BD}{BC}=\frac{GD}{FC}$，换成$\frac{BD}{BC}=\frac{AF}{FC}$；如图42，作CG∥AD，有$\frac{AF}{FC}=\frac{AE}{GC}=\frac{ED}{GC}=\frac{BD}{BC}$也可以。

很明显，由于头脑中有了基本图的印象，所以在添设辅助线的时候就有了更强的目的性。无疑有了制造基本图（即想法让图中，出现图 38、图 39）的思想，证题就方便得多了。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0037_1.bmp}

上面这道题目，已知的点共六个：A、B、C、D、E、F，应该从哪一点引平行线呢？作哪条线的平行线呢？通过这样的研究思考，就会产生一题多解的结果，同时还能达到熟悉这一类题的目的。

图 43 和图 44 又是两个基本图。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0037_2.bmp}

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0037_3.bmp}

在图 43 中，EF∥BC。这个图实际上是两个图 38 合关在一起的情况。如果再有 BD=DC 这个条件，就可以证出 EM=MF。在图 44 中，有直角三角形斜边上的高。这里，有互余的角、相等的角，有相似三角形，还有射影定理。

下面一个例题，只要应用图 43 这个基本图，就能很快地找到解题的思路。

如图 45，已知：在△ABC 中，∠ACB=90°，CD⊥AB 于 D，E 是 CD 中点，BE 的延长线交 AC 于 F，FM⊥AB 于 M。求证：FM2=CF·AF。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0038.bmp}

经过细心地观察，你会发现“E 是 CD 中点”这个条件不易使用。如果这时，你能灵活地运用图 38，想到由它所派生的图 43，那么问题就迎刃而解了。具体做法如下：

延长 MF 和 BC 相交于 N 点，用图 43 的思路，由 MN∥CD，CE=ED，即可证出 NF=FM；欲证 FM^2=CF·AF，即可先证 NF·FM=CF·AF，希望先证 $\frac{NF}{CF}=\frac{AF}{FM}$。从而，只要证明△NFC∽△AFM就可以了。

可以这么说，有关直线形的比例线段问题，用得最多的还是图 38、图 39 和图 44。无率是简单题，还是复杂题，凡是有这三个图出现时，立刻用它们的性质写出比例线段；没有这三个图出现时，可以添辅助线制造这三个图，然后用它们的性质写出比例线段。只要掌握了这三个基本问题，这一部分的知识就基本上掌握了。

相似形这一部分可以选出基本图，其他部分是否也有基本图呢？有。

在角平分线这部分知识中，和它有关的三个图形都可以看作基本图。

图 46 的条件是在△ABC 中，AB＞AC，∠1=∠2，果延长 AC 到 E，使 AE=AB，则△AED≌°△ABD（当然在 AB 上截取 AF=AC，也能收到相同的效果）；图 47 的条件是 AP 是∠BAC 的平分线，PD⊥AB 于 D，PE⊥AC 于 E，则△APD≌△APE；图 48 的条件是 AD 是△ABC 的角平分线，且垂直于对边 BC，则△ADB≌△ADC。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0039_1.bmp}

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0039_2.bmp}

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0039_3.bmp}

在三角线、中线这部分知识中，延长三角形中线，使等于它本身，也是一套常用的思路，可以得出全等三角形，得出平行四边形，还可以移动线段、移动角的位置（其实是等量代换），因此，这个图也可以算作一个基本图。

比如，已知两边以及第三边上的中线作三角形。怎么作呢？

如果单单用学过的公法、基本作图、三角形基本作图，那就无法直接作出合乎条件的三角形来。这时就用到上述基本图的思路了。在图 49 中延长中线 AD 到 E，使 DE=AD，有 AC=b，EC=AB=c，AE=2AD=2m。知道三边作三角形是可以的。先按条伯△AEC，然后取 AE 中点 D，连结 CD，延长 CD 到 B，使 DB=CD，再连结 AB，则△ABC 即为所求。{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0040.bmp}

在与三角形中位线有关知识中，基本图有两个：一个是△ABC 中已有两边中点，比如D是AB中点，E是AC中点，则DE$\mathrel{\underline{\not\parallel}}\frac{1}{2}$BC；另一个是在△ABC中，D 是 AB 中点，DE∥BC 交 AC 于 E。在已知条件中，并没有两个中点，还不能说 DE 是△ABC 的中位线，必须先用平行线等分线段定理的推论，确定另一个点为中点。这时，凑够三角形中位线的条件，有时一个题目，先用后面的方法确定另一个中点，再用前面的中位线性质。下面举个典型的例题。

如图 50，已知：在△ABC 中，AD 是中线，E 是 AD 的中点，BE 的延长张交AC于F。求证：$AF = \frac{1}{2}FC$，$EF = \frac{1}{3}BE$。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0041.bmp}

因为求证里有$\frac{1}{2}$FC，所以需要图中出现$\frac{1}{2}$FC，我们不妨取FC的中点M，希望证明 AF=FM，这就得有 DM∥EF。换一个角度看，在△BCF 中，D、M克是 BC、FC 的中点，当然可用中位线定理，得到 DM$\mathrel{\underline{\not\parallel}}\frac{1}{2}$BF。于是，在△ADM中，显然 F 是 AM 的中点，再用 EF$\mathrel{\underline{\not\parallel}}\frac{1}{2}$DM，问题都解决了。此外，某些特殊图形由于给出了某些特殊关系，也可以看作基本图。如图 51，就是一个常用的基本图。这个图告诉我们，如何通互余，证角相等。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0042_1.bmp}
{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0042_2.bmp}

图 51 的条件是，已知：过正方形 ABCD 的顶点 A 引一条直线 EF，作 DE⊥EF，BF⊥EF 。请你注意，在这个图中，∠2 与∠3 互余往往为初学者所忽略。我们知道了∠1 与∠2 互余，又知道了直角两侧的两个角∠2 和∠3 互余，就可以得出∠1=∠3，就可以证△DAE≌△ABF。下面举几个典型例子。在图52 中，已知：正方形 ABCD，延长 AB、BC、CD、DA 分别理 BO′、C′、D′、A′、且 BB′=CC′=DE′=AA′。求证：四边形 A′B′C′D′是正方形。在我胶用三角形全等证出 A′B′=B′C′=C′D′=A′D′以后，还需要一个直角。这时，必须先列出一个等于 90°角的式子：∠1+∠2=90°。由于∠3=∠1,所以可以换成∠3+∠2=90°。应该说，这个题目的证明是很容易的。

在图 53 中，已知：正方形 ABCD，分别在 AB、BC、CD、DA 边上截取 AA′=BB′=CC′=DD′。求证：四边形 A′B′C′D′是正方形。同样，在我们用三角形全等证出 A′B′=B′C′=C′D′=D′A′以后，也是需要一个直角。这个题的证明比上一个题要困难一些。如果熟悉图 51 这个基本图，并能逆过来用，就会由∠1+∠2=90°，换成∠2+∠3=90°，剩下 C′D′A′=90°，问题就解决了。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0043_1.bmp}
{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0043_2.bmp}

在图 54 中，已知：AB、CD 都是⊙O 的弦，且 AB⊥CD 于 E，M 是 BC 中点，ME 的延长线交 AD 于 N。求证：MEN⊥AD。这个题要比上面两个题难得多，如果直接用图 51 这个基本图，就可以得出∠1+∠2=90°。但是∠1+∠2=90°，但是∠1=∠B=∠D，所以 ∠D+∠A=90°,MEN⊥AD 得到证明。

如果把上面这个题目的已知换成 EN⊥AD 于 N，NE 的延长线交 BC 于 M，其余条件不变。那么这个题就可以变为，求证：NEM 平分 BC。读者不妨自已

证一证。

平行四力形性质、判定的综合问题可以举出不少，但是按照它们的特点，一般多与以下两个基本图（图 55、图 56）有关。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0044_1.bmp}

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0044_2.bmp}

如图 55，已知：在▱ABCD 中，E、F 分别是 AB、CD 的中点。求证：四边形 AECF 是平行四边形。这是一个基本图。这个简单证明题，是以一组对边平得且相等（AE$\underline{\mathbin{/\!/}}$CF），证明某个图形是平形四边形，然后，再根据题目的要求利用它的性质。下面，我们举一个例子。

如图 57，已知：在▱ABCD 中，E、F 分别是 AB、CD 边上的点，且 AE+CF，DE、AF 相交于 M，BF、CE 相交于 N。求证：四边形 MENF 是平形四边形。根据基本图的思路，由 AE$\underline{\mathbin{/\!/}}$FC,得车边形 AECF 是平行四边形，有 AF∥CE，由 EB$\underline{\mathbin{/\!/}}$DF，得四边形 DEFB 是平得四边形，有 DE∥BF。这样，就可以用定义判断车边形 MENF 为平行四边形了。

如图 56，属于在对角线上作文章的题目。已知：在▱ABCD 中，E、F 都是对角线 AC 上的点，且 AE=CF。求证：四边形 DEBF 是平行四边形。这又是一个基本图。这个题无论用定义或是任何一种判定定理都可以证；但是，我们应当清楚地看到，这类题涉用对角线，因而用对角线这个条件，证较为简便。我们知道，平行四边形对角线互相平分。这里说的是两对角线间的关系，所以要连结 BD，造出另一个对角线，这样 BD 与 AC 相交于 O，OA=OC，OB=OD，再运用等式性质，以对角线互相平分，可证出平行四边形。下面，再举一个例子。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0045.bmp}

如图 58，已知：矩形 ABCD，对角线 BD 的垂直平分线 EF 交 AB 于 E，交 CD 于 F，交 BD 于 O。求证：四边形 DEBF 是菱形。如果粗心大意，说 BD、EF 互相平分又垂直，这个图形当然是菱形，那是不对的。加为题中只说了 EF 垂直平分 DB，并没说 DB 出平分 EF。如果用几套全等三角形证明 DF=EB、DE=BF、DF=FB 以满足两对边分别相等，且邻边又相等，这种证法是不好的。看过题目以后，关脑非常清楚，本题证菱形用对角线互相平分且垂直为最简便。显然，题目中有 EF 平分 BD，有 EF⊥BD，只差 EO=OF。所以只要证出△EOB≌△FDO，问题就解决了。

和圆有关的角有四个基本图最常用。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0046.bmp}

图 59 是⊙O 内有相交弦，顺次连结圆上各点，出现圆内接四边形，同时出现八个圆周角，其中∠1=∠2，∠3=∠4，∠5=∠6，∠7=∠8。这个知识，不但要懂，而且要会用。从训练角度看，对这个简单图形必须非常熟悉，否则遇到综合题中有这种图形，也往往用不上。图 61 是圆内接四边形外角等于内对角的简单图示，其中∠CBE=∠CDA。对这两个图形的运用，要求同学们达到非常熟练的程度，还有一个原因，就是判断四点共圆的题目，往往就是为了用这两个图。不过，一般证明四点共圆常常不画出圆来，这对同学看图的要求就更高了。图 60 这个图要求胸见到直径，就能想到直角，即直径上的圆周角地直角。特别是需要添加辅助线制造这个基本图的时候，能及时作出来。图 62 这个图要求胸见到弦切角以后，能有意识地找到夹弧对的圆周角，从而

证它们相等。

关于图 59 的应用，在和圆有关的角的题目中用得很多，其中也往往用到图 61。

图 60 和图 62 用处也很多，我们通过下面两个题目让读者体会它们的应用。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0047.bmp}

在图 63 中，已知 AB 是⊙O 的直径，BF 是⊙O 的切线，弦 AC 的延长张交 BF 于 D，统 AE 的延长线交 BF 于 F。求证：AC·AD=AE·AF。在这个题的几种证法中，有一种是直接从直径得到启发，连 BE 和 BC，在 Rt△AFB 中用射影定理，有 AB2=AE·AF；在 Rt△ADB 中，再用射影定理，有 AB2=AC·AD，于是 AE·AF=AC·AD。

在图 64 中，已知：⊙O 是△ABC 的外接圆，AD 是⊙O 的直径，CE⊥AD 于 E，CE 的延长线交 AB 于 F。求证：AC2=AF·AB。我们很容易从直径得到启发，连结 BD，则∠ABD=90°，又∠AEF=90°，且∠FAE=∠DAB，因

而△AFE∽△ADB，有 $\frac{AF}{AD}=\frac{AE}{AB}$，改为乘积形式，即AF·AB = AE·A

D，再连结 CD，则∠ACD=90°，出现射影定理的图形，有 AC2=AE·AD，经等量代换，可以满足求证的要求。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0048.bmp}

对于这个题，因为图中有“直角三角形斜高”这个条件，所以很容易想到这是一个基本图形，可以用它的结论，即射影定理。由于有熟路可走，所以证题的时候，就会想得快、想得好。在这一节里，我们总共介绍了 17 个基本图。那么整个平面几何一共有多少基本图？ 哪个图形算基本图？哪个图形不算基本图？我们粗粗算了一下，充其量不过几十个。每个人可以根据自己证题的体会，记住三四十个自己认为重要的、常用的图形，这\对学好几何是一个捷径。一般地说，这些图形往往是很简单的、常常是复杂题目的组成部分。如果在证题的时候，你能从这些简单的、基本的图形想起，并能利用这些图形的性质，把自己的推理联系起来，那么对于形成解题思路将是十分有益的。

练习九

请读者自己选十个基本图（包括上面说过的），再统计一下，这些图形在你作过的题里反复出现多少次？对于推理所起的作用如何？

从圆谈到知识归类训练法

要想提高自己的解题能力，必须系统地进行思维训练。这里所说的归类训练，是指把某一类知识综合归纳在一起，从而使自己能够根据所学的知识形成几套现成的想问题的方法。这样，就会使零散的知识集中起来，为你想问题、解问题服务。这里提高解题能力的一条捷径。由于圆这一部分知识放在三角形、四边形、相似形这后，所以带有一定的综合性。这时着手知识归类、训练配套的工作是适宜的。

下面，我们从圆开始把知识归类训练法总结为十套。这十套方法实际上是几何中应用较为广泛的思路方法。

第一套：“同弧上的圆周角相等；同弧上的圆周角和弦切角相等；直径上的圆周角是直角；圆内接过形外角等于内对角。”

如果你想学好圆这一章、想迷会证圆的题目，那么可以告诉你，最有用的东西就是上面的四句话。这就要求大家，第一要把它们背熟；第二中图中要把它们看熟。

和圆有关的角是圆这一章的重点。这部分的定理讲的是角和弧之间的关系，其中主要是研究柄点在圆上的角（圆周角和弦切角）和弧之间的关系，我们以上列举的四句话是“推论”，是用来直接说明角与角的关系的。这些推论中有三个是证角相等的，有一个是证直角的。

记两个题：

1．如图 65，已知：AB 是⊙O 的直径，C 是⊙O 上一点，CD⊥AB 于 D，CE 是⊙O 的切线。求证：∠DCB=∠BCE．

2．如图 66，已知：⊙O 的内拉四边形外角∠ADF 的平分线交⊙O 于 E。求证：∠CBE=∠ABE。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0050.bmp}

第二套：“切线性质、切线长、弦切角、圆幂定理。”

圆的切线是圆这一章中另一个重点。涉及圆的切线是题目很多，应该怎样考虑呢？不外上述四个方面。为了好记，这里史列了个“目录”，详细的内容，比如切线性质指的是“切线和过切点的半径垂直”等等，课本上说得很清楚，这里就不详写了。另外，弦切角定理，第一套训练中已经提到，这里重复提出，是从训练的角度考虑的。目是看见图中有切线，就要往这四方面想。还有，在圆幂定理中，中有切割线定理与切线有关，两割线定理、相交弦定理与切线无关，这里一并提出，是让你多记一点知识，有时要用。

记两个题：

1．如图 67，已知：AB 是⊙O 的弦，OD⊥OA，交 AB 于 C；BD 是⊙O 的切线，交 OD 于 D。求证 CD=BD。

提示：用切线性质、切线长、弦切角都可以。

2．如图 68：已知 PC 切⊙O 于 C，PBA 交⊙O 于 B、A，若 PB=4，AB=9。求 PC 的长。

第三套：“圆的直径、圆的切线、多边形的高以及其他垂直关系都会出现直角，直角多了，就要注意：通过互余证角相等，通过四点共圆证角相等，位置合适可以证平行。”

前面几句是说什么情况会出现直角，后面几句是说垂直关系多了有什么用处。这一套思路贯彻全书各章的始终。这中间必然涉及辅助线的添法，比

如直线 BC 切⊙O 于 A，那么“连结 OA”就可以得到 QA⊥BC；再如 AB 是⊙O 的直径，BC 是弦，那么“连结 AC”就可以行到∠ACB=90°。凡是题目中遇有上述条件，就可以往有关的方面去想，再结合其他条件，看看思路有没有进展。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0052.bmp}

记两个题：

1．如图 69，已知：AD、BE 都是△ABC 的高，AD、BE 样交于 H。求证：△CED∽△CBA。

提示：这里有三角形的高，可以考虑用四点共圆来证，我们希望 A、B、D、E 共圆，这样就能得到∠3=∠ABC，从而证明△CED 与△CBA 有两组角相等。但是，怎样证四点共圆呢？于是，又想到∠1 和∠2 都是∠C 的余角，能证∠1=∠2，问题就解决了。如果考虑 H 是垂心，作出高 CF，易证 H、D、C、E 四点共圆，有∠3=∠4；由 F、B、D、H 四点共圆，有∠4=∠ABC 也可以。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0053.bmp}

2．如图 70，⊙O 是△ABC 的外接圆，AD、BE 都是△ABC 的高，它们相交于 H，CF 是⊙O 地直径。求证：四边形 FBHA 是平行四边形。

第四套：“有直角，就会有直角三角形。有直角三角形，就地研究安的性质：人边上看，有射影定理、勾股定理、斜边中线；从角上看，有锐角互余；从边角之间上看，有锐角三角函数。”

大家知道，很多图形中有直角三角形，见到直角三角形自然要研究它的性质。这里切记，对于这些性质，不要想起什么算什么，要系统全面地想起来，根据题目条件，选择应用。勾股定理表示的是 直角三角形三边间的关系，它的形式是通过线段平方米表示的，而且有和、差两种定法，比如，$a^2+b^2=c^2$,$c^2-a^2=b^2$。射影定理是采取乘积形式，所以，这两个定理都可以用的时候，一般地说，射影定理较勾股定理容易变化（例如约分）。锐角互余大家已经熟悉了，这里就不说了。关于锐角三角函娄的应用，应\该说是什得提倡的。

记两个题：

1．已知：D 是△ABC 的 BC 边上一点，C 是 AC 中点，且 AE=DE=EC，F 是AB中点。求证：$BD=\frac{1}{2}AB$。

2．如图 71，已知 Rt△ABC 中，∠ACB=90°，CD⊥AB 于 D，AE 是∠A 的平分线，交 CD 于 F，FG∥AB，交 BC 于 G。求证：CE=BG。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0054.bmp}

提示：作 GH⊥AB 于 H，设∠CAE=∠EAB=a，易证∠BGH=2a。用锐角三角函数，有$CE=AC\cdot tg\alpha=AD\cdot\frac{1}{\cos2\alpha}\cdot tg\alpha=FD\cdot ctg\alpha\cdot\frac{1}{\cos2\alpha}\cdot tg\alpha=GH\cdot\frac{1}{\cos2\alpha}=GB\cdot\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\cos2\alpha}=GB$。

第五套：“要有乘式，就要列比例式；要列比例式，就要证相似三角形；证相似，就要两组角相等；证角相等，靠四个推论。”如果这还不行，就得“换比、换积、换线段。”

这一套讲的是圆中的比例线段以及和圆有关的比例线段问题。这里面有

很多是以乘积相等的形式出现的，实际上所应用的知识就是第一套讲的四个推论。至于说证哪两个三角形相似？一般地说，从求证的比例式中就可以找到。比如求证 $\frac{AB}{AD}=\frac{AE}{AC}$，这里AB、AD、AE、AC都是三角形的边它们中间有对应成比例的关系，那么这个三角形必定是△ABD 与△AEC，或是△ABE 与△ADC；如果靠这个办法证不出要求的比例线段，那就不是一套相似三角形能解决的问题，还得换比、换积、换线段。

记几个题：

1．已知：⊙O 是△ABC 的外接圆，AD 是△ABC 的高，AE 是⊙O 的直径。求证 AB·AC=AD·AE。

2．已知：在△ABC 中，AB=AC，⊙O 是△ABC 的外接圆，弦 AC 交 BC 于 D。求证：AB2=AD·AE。

3．已知：⊙O 的内接四边形 ABCD，作 AE∥DB 交 CB 的延长线于 E。求证：EB·DC=AB·AD。

4．已知：AB 是⊙O 的直径，C 是 AB 上一点，过 C 点的 AB 的垂线和半圆相交于 D，CD 的延长线上有一点 E 连结 BE 交⊙O 于 F，连结 AF 交 CD 于 G。求证：CD2=CD·DG。

5．已知：⊙O 是△ABC 的外接圆，AC 是△ABC 的高，过 A 点引⊙O 的切线 MN，BE⊥MN 于 E，CF⊥MN 于 F。求证：AD2=BE·CF。

6．已知：A 是⊙O 上一点，⊙A 交⊙O 于 B、C，D 是⊙A 上一点，DA 是延长线交 BC 于 E，和⊙O 的加一外交点是 F。求证 AD^2=AE·AF。

如果说圆这部分内容有许多知识、训练可以配套，便于记忆、使用，那么以前的知识、训练是否也可以归成类，配成套呢？当然可以。下面，我们就来讲讲。

第六套：“选全等，造全等；选相似，造相似。”如果把整个平面几何说成是始终环绕着全等三角形与相似三角形的话，那么我闪说这种说法并不算过分。证三角形全等与相似，往往不是目的，而是手段。通过这两种手段来证明线段相等、角相等，证四条线段成比例。我们在证题的时候，应该根据已知条件进行分析，如果发现有全等三角形、相似三角形，就及时把它们挑选出来，以便应用；如果没有现成的全等三角形、相似三角形，就要添加辅助线，制造全等三角形与相似三角形。

那么，怎样添加辅助线呢？下面，我们举例说明。例如，三角形两边不等的时候，可以在长边上截取或把短延长（这里指有这两边夹角平分线时的情况）；再如，延长中线使等于它本身。这些目的都是为了制造全等三角形。另外，制造相似形常常以添加平行线为主。还有，在有关圆问题中常常采用连结圆上两点的方法，用以适应三角表全等或相似的需要。记几个题：

1．如图 72，已知：C 是线段 AB 上一点，△DAC、△ECB 都是等边三角形，AE 交 DC 于 M，DB 交 EC 于 N。求证：CM=CN。

提示：如果考虑选全等三角形，则包括 CM 的有△CMA、△CME；包括 CN 的有△CND、△CNB。如果考虑选相似三角形，证出平行线来以后，有△DCN、△BEN；△ADM、△ECM；△ABD、△CBN；△ABE、△ACM，可供选择。

2．如图 73，已知：AM∥BN，∠MAB 的平分线与∠NBA 的平分线相交于 C，过 C 任作一直线交 AM 于 D，交 BN 于 E。求证：AD+BE=AB。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0057.bmp}

提示：在 AB 上截取 AF=AD，制造，△CAF≌△CAD，再证△CBF≌△CBE。

3．已知：在△ABC 中，C 是 BC 中点，DEF 交 AC 于 E，交 BA 的延长于 F。求证：$\frac{AE}{EC}=\frac{FA}{FB}$提示：试从点引 BC 的平行线或的平行线：再从 B 点引 AC 或 DEF 的平行线；还可以从 C 点引 AB 或 DEF 的平行线。这样可以得到六种不的解法。

第七套：“在三角形中，时常是先定点，后用中点。”

这是针对用用角形中位线推理不来密而说的。比如，在梯形 ABCD 中，AB∥CD，EF 梯形中位线，AC 交 EF 于 C，若 VD=2cm，求 EG 的长。这个题就不能随便答出 EG 为 1cm。首先，要说清在△ACD 中，E 是 AD 中点易证 EG∥DC。然后，再根据平行线等分线段定理的推论，证出 AG=GC。时，才能说 EG 是△ACD 的中位线，EG 等于 1cm。这里值得重视，不要疏忽。

记两个题：

1．已知：在△ABC 中，D 是 BC 中点，E 是 AD 中点，BE 的延长线交 AC 于F，求证：$EF=\frac{1}{3}BE$。

2．已知：在△ACB 是 D、E 都是 BC 边上的点，且 BD=DE=EC，F 是 AC 中点，BF 交 AD 于 M，交 AE 于 N，求：BM：MN：NF。

第八套：“要证边不等，有在一个三角形中，大角对大边，两边和大于第三边；要证角不等，有在一个三角形中，大边对大角，三角形的外角大于和它不相邻的内角。”

记两个题：1．已知：在四力形 ABCD 中，∠A=∠C=90°,四条边中 AD 最小。求证：AB＞BC，

2．已知：中△ABC 内有一点 D。求证：(1) ∠BDC＞∠A；(2) BD+DC＜AB+AC。

第九套：“三角形面积公式要记四个：底乘高的一半；两边乘积上夹角正弦的一半；海伦公式；内切园半径与周长乘积的一半。”

上述面积公式都可以用，但是要注意具体问题具体分析。

记两个题：

1．已知：在△ABC中，VA=60°，a+b+c=20cm，$S_{\triangle ABC}=10\sqrt{3}cm^2$。求：三边 a、b、c 的长。

提示：由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\cdot c\cdot \sin\cdot A$，求得$bc=40$；由海伦公式，求得（10-a）（10-b）（10-c）=30；还有 a+b+c=20。解方程组，求得 a=7cm，b=5cm,c=8cm。

2．已知：在等腰△ABC 中，AB=BC=13cm，AC=10cm。求：内切贺半径 r 的长。

提示：由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\cdot h_b$,同时$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r$（a+b+c），求得$r=\frac{10}{3}$cm。

第十套：“能过比例线段证明两线段相等，一般是值是首先证两个比相等，然后作出判断：若前项相等则后项等；若后项相等，则前项等。”记两个题：

1．已知：在△ABC 中 AD 是中线，E、F 分别是 AB、AC 上的点，且 EF∥BC 交 AD 于 G。求证：EG=GF。

2．已知：AB 是⊙O 的直径，AE、BF 都是⊙O 的切线，半贺上有一点 C，过 C 点的⊙的切线和 AE 交于 E，和 BF 交于 F，引 CD⊥AB 于 D，BE 六 CD 于 M。求证：DM=MC。

提示：可以通过 $\frac{MD}{AE}=\frac{BD}{BA}=\frac{FC}{FE}=\frac{FB}{FE}=\frac{CM}{CE}$，由 $AE=CE$，得出 $MD=CM$。

思路通常是指思才问题的途径。证几何题的思路，因人、因题应有所不同，本不必拘泥于成法，应该根据题目的条件，产生自已的想法，探索、创造形成自己的思路。但是，在培养维能力的过程中，并不排斥学习、运用一些现成的思路，特别是初学的阶段，每个人都有一模仿的过程，特别是同一类问题，总有些共性。我们上面整理出的十套思路方法，仅供同学们参考。

上面十套思路方法，在什么时候应用呢？

第一套是证圆中两角相等（或证直角）的时候用。

第二套是题目条件中有切线的时候，应该往这四个方面想。

第三套是什么时候会产生直角，直角多了有什么作用。

第四套是有直角就可能有直角三角形，要想直角三角形几方面的性质。

第五套是圆中比例线希问题的特点。

第六套是要有选全等三角形、造全等三角形、选相似三角形、造相似三角形的意识。

第七套是关于三角莆中点问题的思路。

第八套是三角形不等问题学过哪些定理，需要用的时候，就该往哪儿想。

第九套是全面掌握三角形面积公式，用到进不要只想“底乘高的一半”。

第十套是通过比例线段相等的思路。

应该说明：为了便于记忆，上述十套知识归类训练法，有的话说得过于简单。不过，只要读者能懂、能用，能帮助读者记忆就好。

每套训练后面都要记两个题，目的是通过具体的题目，记住具体的用法，形成自己的思路，从单纯模仿到学会推理论证的方法。

练习十

你用上面思路，证过多少题？每套能出一至三个题吗？

辅助线与基本作图的关系

辅助线在较为复杂的题目中，是十分重要的。但是，添加辅助线必须是合理的、可能的。

比如说，两条平行直线分别切⊙O 于 A、B 两点，若说“连结 AB，使 AB 经过 O 点”，就是不对的。因为 A、B 是两 个已知点，可以把它们连结起来，但是不能附加其他条件（即不能附加一条：使 AB 经过 O 点）。

那么，初学者不知道什么样的辅助线是合理的、可能的，什么样的辅助线不对，怎么办呢？

应该说，凡是添加辅助线，都必须以公法、基本作图为依据。

这里说的公法，是最简单的仅仅用圆规、直尺作图的动作。

比如，已知两边和夹角，求作一个三角形。第一步作什么呢？作一个角等于已知角。作法怎样写呢？可以写“作∠EAF=α”（α是已知角）。若问作一个角等于已知角怎么作，作法怎样写呢？可以先写“作射线 AF”，若问射线 AF 怎么作，作法怎样写呢？就不好回答了，因为它是最简单、最基本的作图动作。

象这类作图暂且沿用老名字，叫做公法。

通常公法指的是：

（1）连结已知两点或过任意两点作直线；

（2）把已知线段延长到任意长；

（3）在一条已知直线上截取一条线段使它等于定长；

（4）以已知点为圆心，已知长为半径作圆（或者作弧）。基本作图指的是：（1）作一个角等于已知角；

（2）平分已知角；

（3）经过已知直线上的一点作这条直线的垂线；

（4）经过已知直线外的一点作这条直线的垂线；

（5）作线段的垂直平分线；

（6）经过已知直线外的一点作这条直线的平行线。

此外还有几个作图，在添加辅助线的时候，有进要用：

（1）任意等分一条线段；

（2）作点 A 关于直线 a 的对称点 A′；

（3）作点 A 关于中心 O 的对称点 A′；

（4）过不在一条直线上的三个已知点作圆；

（5）过⊙O 外一点 P，作⊙O 的切线；

（6）作两圆的内、外公切线。

下面举两个例题研究一下：

例 1 求证：梯形两条对角线中点的连线的平行于两底并且等于两底差的一半。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0063.bmp}

分析：先以图 74 为例。如果具体作法是“连结 AE、并延长 AE 交 BC 于 M”当然可以，因为这是“公法”。由于梯形两底 AD∥BC，E 为 BD 中点，证△AED≌△MEM 很容易，行到 E 是 AM 中点，本来 F 就是 AC 中点，所以 EF 是 MC 的一半，而 MC 是 BC 与 AD 的差，证明是正确的。如果具体作法是“在 BC 上截取 BM=AD，连结 AM”，这也是“公法”，没什么不可以，但是 AM 是否经过 E

点，就需要证明了。如果具体作法是“在 BC 上截取 BM=AD，连结 AM 经过 E 点”，这就不对了，因为公法和基本作图都没有这个内容。事实上，若有两个已知点，把它们连结起来的时候，还要求经过第三个点，那么可能呢？所以没有此项作图。连结就是连结，到于 E 点在不在 AM 上，需要证点共线。

再以图 75 为例。如果具体作法是“作 AN∥DC，交 BC 于 N”，那么由于 ABCD 是梯形，有 AD∥BC，又 AD＜BD，可见上述的截取和这里 N 点的位置都是有根据的，并且得到一个平行四边形 ANCD。平移腰是梯形常用的辅助线。此时还可以得到 BN 是两底差。继续往下证又遇到了前面提到的问题。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0064.bmp}

这时，只能连结 DN，因为 ANCD 是平行四边形，对角线应该互相平分，即对角线 DN 与 AC 的交点应该是 AC 的中点 F，所以 F 在 DN 上，或者 DN 与 AC 相交于 F′（不管 F′与 F 有什么关系），易证 F′应为 AC 中点，而 AC 只有一个中点，所以 F′与 F 重合。如果开头助线是“作 AN∥DC，使 AN 和 BC 的交点 N，在 DF 的延长线上，”这就不行了，公法和基本作图是没有这个内容的。例 2　如图 76，已知：在⊙O 的内接四边形 ABCD 中，AB、DC 的延长线相交于 E，AD、BC 的延长线相交于 F，EM 切⊙O 于 M，FN 切⊙O 于 N。求证：$EM^2+FN^2=EF^2$。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0065.bmp}

分析：由于求证中有线段平方，所以结合圆的性质，很容易想到切割线定理；$EM^2=EB\cdot EA=EC\cdot ED$；$FN^2=FD\cdot FA=FC\cdot FB$。左右分别相加。后面的乘积式，相加还看不出是否等于 EF^2。这时就只能用割线定理换比了。我们可以过 C、D、F 三点作辅助圆。交 EF 于 G，或者∠CGF=∠ADC，证 C、D、F、G 四点共圆。但是，后一种方法，由于 G 点位置没有确定，所以∠CGF 是不能做的。怎么办呢？我们不妨在 EF 上任取一点 P，作∠EPQ=∠ADC，PQ 交 EC 于 Q，然后作 CG∥QP 交 EF 于 G。这两项都是基本作图，当然是可以的。于是有 $EC\cdot ED=EG\cdot EF$。

接下去，千万不能照样过 C、B、E 三点作图。因为这个圆是否经过 G 点，作图时不能保证。前面已经提到，除公法和基本作图以外，还有几个作图都是课本上学过的。但是，没有过不在同一直线上三点作圆，附带还得经过另一点的作图，所以不成。正确的方法是通过∠CGE=∠FDC=∠ABC，证 B、E、G、C 四点共圆，得 $FC\cdot FB=FG\cdot FE$。合并起来，有 $EM^2+FN^2=EC\cdot ED+FC\cdot FB=EG\cdot EF+FG\cdot FE=EF(EG+FG)=EF^2$。练习十一

1．求证：两条对角线相等的梯形是等腰梯形。

提示：设此梯形为 ABCD，其中 AD∥BC，AD＜BC，且 AC=BD。辅助线可以作 DE∥AC 交 BC 的延长线于 E，这是基本作图与公法的应用，没有问题，如果延长 BC 到 E，使 CE=AD，以一组对边平行且相等制造平行四边形是可以的；若是作 DE$\underline{\parallel}$AC 就不好，因为 B，C、E 是否共线就出了问题，需要证明。

2．已知：⊙O 的外切等腰梯形 ABCD，中 AB∥CD，AB=a，CD=b，且 a＞b、∠B=α。求：⊙O 的直径。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0066.bmp}

提示：如图77，易证AD+BC=AB+CD=a+b，所以BC=$\frac{1}{2}$（a+b）。作CE⊥AB于E，求得CE=$\frac{1}{2}$（a+b）$\sin\alpha$。这时，你一定想说⊙O的直径等于CE，不过，决不能想当然，要看有没有根据。设AB切⊙O于M，辅助线可以这样作：“连结OM，延长MO交CD于N”。这种作法保证了M、O、N共线。由于OM⊥AB，AB∥CD，所以ON⊥DC，这就证明了MN、CE同是这一组平行线间的距离，因而 MN=CE。再用“过圆心而直于切线的直线必过切点”，证明MN是⊙O的直径。若是忽略了上面讲的这一层，在明确了M、N是切点以后，就连结MN，说MN是⊙O的直径，这是不可以的；若说“连结MN，使MN经过O点”，就更不对了，这样做仍是犯了前面提到的错误。

3．已知：在△ABC中，F、E分别是AB、AC的中点，P、Q分别是BE、CF的中点。求证：$PQ=\frac{1}{4}BC$。

提示：若取BC的中点D，连结DF，这时不要管过不过P点；连结DE，同样不要管过不过Q点；再连结EF，用平行四边形BDEF、CEFD对角线互相平分，证明P在DF上，且为DF中点，Q在DE上，且为DE中点。

4．已知：⊙O和⊙O′外切于A，过A点的直线和⊙O相交于B，和⊙O′相交于C，过B、C分别作⊙O、⊙O′的切线MN、PQ。求证：MN∥PQ。

提示：若连结OB、O′C，则必须明确O、A、O′共线。这是定理，应该先说一下。

5．如图78，已知：锐角△ABC，⊙O是以BC为直径的圆，⊙O交AB于D，交AC于E，过D、E的⊙O的两条切线相交于F，若BE、CD相交于H。求证：直线AF经过H点。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0067.bmp}

提 示：若是作出△ABC的高AG,则连同垂足G在内，A、F、H、G共有四点共线,所以辅助线不能这样作。由于BC是⊙O的直径,易证∠BDC=∠BEC=90°，从而确定BE、CD都是△ABC的高，它们的交点H是垂心，然后连结AH，延长AH交BC于G，AG必是△ABC的另一条高。设过D的⊙O的切线交AG于F′，∠F′DC即∠1为弦切角，∠1=∠ABC，又D、B、G、H、四点共圆，∠2=∠ABC，所∠1=∠2。在Rt△ADH中，易证F′是AH的中点。同理，设过E点的切线交AG于F″，F″也应是AH的中点，而AH有一个中点，即F′与F″重合为一个点。这个点是上述三线的公共点，当然也就是两切线的交点，即原题中的F点，所以A、F、H共线。

6．已知：⊙O的半径的r，它的外切等腰梯形ABCD的面积等于以⊙O的直径为一边的正方形面积的两倍，求梯形各边的长。

提示：设梯形上底为2x，下底为2y，依前面说过的方法，说明梯形高为2r，所以梯形面积为$\frac{1}{2}$（2x＋2y）·2r。而正方形面积为（2r）^{2}。这时可以列出方程。另外若作出梯形的一条高以后，正好出现了直角三角形，则可以设法用x、y、r表示这直角三角形的三条边，用勾股定理列出第二方程。最后，解这个方程组，得到梯形上底为2r（2-$\sqrt{3}$），下底为2r（2+$\sqrt{3}$），腰长为4r。

困难是怎样克服的

每个学习几何都会遇到不少困难。我们仅就多数人共同的主要困难问题进行讲解。比如，注意“看题”和“看图”的问题，弄清“有什么”和“要什么”的问题，知道做什么题和怎样做题的问题，学会做过题怎样小结的问题。特别是对改头换面的几何证明题和各种各样的几何计算题进行了认真地探讨。

注意“看清题”和“看清图”

有的有的时候，一道题证错了，或者证不出来，并非思路不对头，而是根本没有看懂题：或是没看清题目，弄不清到底给了什么条件；或是没看清图形，找不到图形之间的关系。

随着对几何知识的研究不断加深，人们出题的形式也有所变化。有的几何题，既没有字母，也没有图。例如，“证明：有两个角及其中一个角的平分线相等的两个三角形全等。”有的几何题有字母，却没有图。例如，“已知 在△ABC 中高 ha 与其外角平分线 AD 的夹角为 60°。求：∠B 与∠C 之差。”还有的几何题虽然有图，但是线段和角多一些，看着比较乱。这就更要学会怎样看题，怎样看图了。

到底如何看题呢？我们不妨以上面的第二个题为例。

首先，我们要从念概念入手，不放过题中的每个细节。比如，在△ABC 中，“高 ha”，是指 a 边上的高，也就是说，它是 BC 边上的高，是从 A 点向 BC 边所引的垂线段。“外角平分线 AD”，指的是从 A 点引出的射线，它不但是∠A 邻补角的平分线，而且必须与 ha 成 60°角。

其次，我们要依题意画图，力求作图准确、清。画完图后，要反复核实一下，看看是否体现了原题的意思。

最后，我们要按照题意去思考，不要出“没看见”，“没注意”等丢失条件的情况。特别是证不出来的时候，一定要重新看题。如图 79，在△ABC 中，AE 是高，AE 与 AD 的夹角是 60°。我们可以在∠EAD 的顶点附近，画一段圆弧，作出一个记号，记住这个角是 60°。接着，得到∠D=30°。再说，AD 是∠BAF 的平分线，于是可用∠1、∠2 表示出两个代数式。我们不妨设∠1=∠2=α，则∠ABC 可以用α+30°表示，同理，∠FAD 等于∠C+∠D，所以∠C=α-30°，所以∠B-∠C=（α+30°）-（α-30°）=60°。

到底如何看图呢？我们通过下面三个例子加以说明。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0071.bmp}

首先，我们要不会一部分、一部分地看图。就说前面说的第一例题吧。这道题是以命题形式出现的，我们需要把它们具体化。如图 80，“有两个角”指的是∠B、∠C；“其中一个角的平分线”指的是 CD；既然是“相等三角形”，必我还有一个三角，这个三角形同样具备上述条件，并与∠B、∠C、CD 对应相等。依题意画出图来以后，先看△ABC 与△A′B′C′，在这两个三角形的六个元素（三条边、三个角）中，只有∠B=∠B′，∠C=∠C′，不足以证全等。再看△BCD 与△B′C′D′，有∠B=∠B′，又可证∠BCD=∠B′C′D′（根据等式的性质），再加上 CD=C′D′，符合“角、角、边”能证△BCD≌△B′C′D′，得到 BC=B′C′，于是，用“角、边、角”证△ABC≌△△A′B′C′就够条件了。

以后遇到复杂图形，就应该采取“想看什么，就看什么，别的只当看不见”的办法，这对看图能力的培养，是有用的。

其次，我们要善于把可以用简称的地方，尽量用简称。如图 81，已知：∠FAC=∠ECB=∠DBA。求证：∠EDF=∠BAC，∠DEF=∠ABC，∠EFD=∠BCA。由于这个题的角都用全称，所以审题的时候应该格外仔细，一不看错，二不写错。然而我们最好还是把它们用简称表示。如图 81，可标出∠1∠2∠……这样一来，各种关系就好表示多了。比如根据外角性质，得∠4=∠7+∠3，现根据等式的性质，得∠4=∠7+∠1，所∠EDF=∠BAC。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0072.bmp}

最后，我们一定要认真研究图形结构。下面再举一个例子。如图 82。已知：在等腰直角△ABC 中，∠C=90°，AD 是 BC 边上的中线，CE⊥AD 于 E，CE 的延长线交 AB 于 F，连结 DF。求证：∠1=∠2。对这个题怎样研究它的图形结构呢？比如，在△ABC 中，∠C=90°，∠A、∠B 一定是锐角，AB 必是斜边，AC、BC 必是相等的两腰，还可以推出∠A=∠B=45°。此外，如果一部分、一部分地看，还有许多图形如△BDF、△BDA、△ADC，围绕着 E 点还有 Rt△AEF、Rt△AEC、Rt△FED、Rt△CED。这些三角形都有它自己的结构。 这时，我们就要仔细看看它们是由带有什么特点、什么条件的边和角所组成的。现在要证∠1=∠2，所以我们应该 先看包含∠1 的△BDF。其中，∠B=45°，∠1 是求证

的角，$BD=\frac{1}{2}BC$。再看△ADC，它是一个直角三角形，其中 ∠DCA=90°，

∠2 求证的角，易知∠2 与∠3 互余，从而推出∠3=∠4，还知道

$DC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AC$（BC、AC都是原等腰三角形的腰）。这里，$BC=AC$

格外重要。它既是概念，又是性质，还是思路。由此，我们很容易产生制造全等三角形的几种设想。因为要证∠1=∠2 相等，先证三角形全等，这是常用的方法。

如果开始就想利用 BC=AC 制造全等形，似乎不大容易。这时，就要换一个角度认真考虑 CE⊥AD 这个条件。因而问题就变为用∠3=∠4 造全等三角形的问题了。不难发现，包含∠4 的三形有△EDC 与△FBC 都不好用。怎么办呢？只有延长 CF 与过 B 点的长线相交于 G 才是办法，于是够条件了。

用“角、边、角”证出 Rt△CGB≌Rt△ADC 以后，得到 GB=DC=BD 之后，不要忘记∠B 是 45°角，这样证△GBF≌△DBF 就不困难了，于是∠1=∠G=∠2 就成功了。

总之，只有会看题、会看图，才能从已知条件出发，根据图形性质进行推理判断。这种一环扣一环的联想，就是人们常说的思维能力，所以看题、看图能力的培养，实在是思维训练不可缺少的重要内容。

有了上述准备，我们再来看下面例题。

例 1　证明：三角形的外心是连结三边中点所成的三角形的重心。

分析：如图 83，设 O 为△ABC 外接圆的圆心，D、E、F 分别是 BC、AC、AB 边中点。这时，AB、BC、AC 都⊙O 的弦。连结 OE、OF 则 OE⊥AC、OF⊥AB。延长 FO 交 DE 于 N，延长 EO 交 FD 于 M。由三角形中位线性质，得 DE∥AB、FD∥AC，于是 FN⊥DE、EM⊥FD，O 是△DEF 的垂心。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0074.bmp}

例 2 已知：MN 是⊙O 的直径，P、C 为⊙O 上两点，引 CA⊥MN 于 A，直线 AC 交直线 PM 于 B、交真线 PN 于 D。求证：AC^2=AB·AD。分析；看题时注意到 AC、PM、PN 都说的是“直线”，这就包含着线段向两方延伸的意思。由于原题没给图，又没具体地说明 P、C 两点的位置，所以需要考虑 P、C 两点在 MN 同旁、或分在 MN 两旁这两种情。第一种情又有两 可能：线段 AC 与弦 PN 相交于 D,而线段 AC 的延长线与弦 PM 的反方向延长线相交于 B(如图 84)；线段 AC 与弦 PM 相交于 B，而张段 AC 的延长线与弦 PN 的反方向延长线相交于 D（如图 85）。第二种情也有两种可能，如图 86 图 87，无非是线段 CA 的延长线与⊙O 有另一个交点 E，这时对原题所说“直线”，有了进一步的体会。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0075.bmp}

由求证：$AC^2=AB\cdot AD$，希望先证出比例式 $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$，因为A、B、C、D 四点在一条真线上，所以不是一套相似三角形能够解决的。这时，如果看图能力强，由直径 MN 可以看出连结 CM、CN 会出现直角三形，用射影定理可以把 AC^2 换成 MA·AN，再证 MA·AN=AB·AD，即证△MBS∽△DNA 就可以了。

这里所说的看图能力，是依条件看图、按条件选图、进一步研究图形性质的能力。

练习十二

1．证明：三角形的高，平分垂足三角形的内角。

提示：这垂直关系很多，要考虑通过四点共圆证角相等；通过互余证角相等。

2．已知：如图 88，A、B、C、D 是一直上顺次四点。求证：AB·CD+AD·BC=AC·BD。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0076.bmp}

提示：这类题主要靠看图分析，尽量把等式左边的线段经过代换，全部换成 AC、BD，即 AB·CD+AD·BC=（AC-BC）（BD-BC）+AD·BC=AC·BD+BC^2-AC·BC-BD·BC+AD·BC=AC·BD-（AC+BD-BC）·BC+AD·BC=AC·BD-AD·BC+AD·BC=AC·BD

3．如图 89，在任意四边形 ABCD 中，∠D〉∠B，AF 平分∠A，BE 平分∠B，CG 平分∠C 交 AB 于 G，AF 交 CG 于 F，交 BE 于 E。求证：

（1）$\angle AEB=\frac{1}{2}\angle D+\frac{1}{2}\angle C$；

（2）$\angle AFC=\frac{1}{2}\angle D-\frac{1}{2}\angle B$。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0077.bmp}

提示：找到包含∠AEB的△ABE，有$\angle AEB=180°-\angle 2-\angle 3=180°-\frac{1}{2}\angle A-\frac{1}{2}\angle B=180°-\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$，把∠A+∠B换成360°-∠C-∠D；同样，$\angle AFG=180°-\angle 2-\angle 7=180°-\frac{1}{2}\angle A-(\frac{1}{2}\angle C+\angle B)$，把∠A＋∠C换成 360°-∠B-∠D。

4．已知：AD 是△AEF 的角平分线，交△AEF 的外接圆⊙O 于 D 点，过 D 点作⊙O 的切线交 AE 的延长线于 B、交 AF 的延长线于 C。

求证：（1）EF∥BC；

（2）$\frac{BD}{DC}=\frac{AE}{AF}$。

提示：看到角平分线这个条件，一方面要考虑圆财角与所对弧之间的关系；另一方面要考虑角平分线与比例线段的关系。

5．已知：在 Rt△ABC 中，∠C=90°，AC=8cm，BC=15cm,D 是 AB 上的一点，并且 CD=AC。求：AD 的长。

提示：看题后想到勾股定理，看图后想到△ADC 为等腰三角形，作出底边上的高CE，用射影定理求得$AE=\frac{64}{17}cm$，则$AD=\frac{128}{17}cm$。

6．已知：⊙O 和⊙O′内切于 P，过 P 作直线 PAB，交⊙O′于 A 交⊙O 于 B，过 B 作⊙O 的弦 BE，过 A 作⊙O′的弦 AC，AC 延长线交 BE 于 D 。

求证：P、C、D、E 四点共圆。

提示：过 P 作两圆公切线，连结 PC、PE。只要证明∠ACP=∠E，问题就解决了。这里要求我们一部分一部分地看图，先看⊙O′找到与∠ACP 有关的弦切角；再看⊙O 找到与∠E 有关的弦切角。弄清“有什么”和“要什么”

如果题目看懂了，图形也会看了，就可以按照自己的思路，进行推理论证了。

这一节，我们重点研究一下怎样想题，也就是如何培养自己分析问题、解决问题的能力。那么，从哪 里入手来培养这种能力呢？通俗地说，当我们拿到一个题目的时候，重要的是要看看这个题目有什么条件，要什么结果。下面，我们就从这里研究直。

确切地说，看一道几何题给了什么已知条件，就是“有什么”；题目的求证，也就是命题的结果，就是“要什么”。每一道题都得这样研究。

先说“有什么”。若把范围扩大一点，“有什么”包括一个题目有什么已知条件，这个图形有什么性质，这类知识有什么训要求，证这类题目你有什么经验。总之，会说什么说什么，能想什么想什么。比如已知一个直角三角形，条件中当然要有一个直角，写出来就是，已知 Rt△ABC 中，∠C=90°。它有什么性质呢？两锐角互余就是一条，勾股定理也是一条。照这样，想一想自己都学过什么性质。这类题有什么训练要求呢？象“见到图形，想到性质”，就是最基本的训练要求，直角三角形的元素有边、有角。研究边有射影定理、勾股定理、斜边中线等斜边一半；研究角有两锐角互余，通过余可以证角相等；边、角之间的关系还有锐角三角函数可用。所有这些就是泛指这一类题的知识，训练内容。具体到一个题，可能用到 些内容，又不是每一条都有用；可能与其中一些内容有关，而与其余内容无关。这种取舍选择，又与求证相关联，中间种种判断，很多时候要靠证这一类题的经验。

再说“要什么”。从表面看来，“要什么”就是“求证”的要求。重要的是从这项要求中，自己得到什么启发。比如求证两线段相等。你可以先看这两线段的位置，若在同一个三角形里，就要证等腰三角形；若在两个三角形里就要证全等三角形。而要证明上述内容，就先要证两个角相等；或找到判断全等的三个条件。这样，一步一步地向前“要”，直到满足要求为止。

对于一简单题来说，无论是从“有什么”向后推理，还是从“要什么”向前提要求，往往只从一头儿下手就能证出来了。遇到较为复杂的题目，你就应该考虑：前面有的，得是后面要的，才有用；后面要的，得是前面有的，才可能。这样双管齐下。，中间江合，题目才能证出来。有的题目，即使这样做了，仍然联系不起来，这就需要利用辅助线搭一搭桥了。

值得一提的是，有些特殊类型的题目，往往不是普通方法所能概括了的。这就要求见多广了。平时，你总会做过一些有特点的，心中有了典型，就能触类旁通。即使如此，这一类题的分析过程也还要看“有什么”和“要什么”，不过方法巧一些或特殊些，并非一进人人都能想得起来而已。对于一个中学生来说，没有凡是几何题都得会做的要求，只是对于大纲、教材要求会做的题会了就行。所以，不必为此增加不必要的精神负担。

下面举两个例子，例题中的思路，读者可以当个参考。

例 1 如图 90，在 Rt△ABC 中，∠ABC=90°，CD 是∠ACB 的平分线，M 是 AB 的中点，ME⊥AB 交 CD 的延长线于 E。求证：CD=ME 。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0081.bmp}

分析：从“有什么”入手，如前面说过的，直角三角形中有斜边中线等于斜边一半。于是，有 CM=MB，有∠1=∠2。GIP E∠1+∠3=45°，∠2+∠A=90°， 至此仍与 ME 无关。再看“要什么”，要 CM=ME，就是要∠3=∠E。既然不能直接证明∠3 与∠E 相等,就要设法找等量来代换。想到 EM 是 AB 的垂线，若是再作一条 AB 的垂线，必与 EM 平行，这样就会有内错角或同位角可以代换，于是引 CF⊥AB 于 F，易证∠4=∠E。现在只要∠3 与∠4 相等就行了。已经知道∠1+∠3=∠4+∠5=45°，要证∠3 与∠4 相等，只要先证∠1 与∠5 相等就可以了。其实，作出斜高 CF 以后，对这个图形熟悉的同学，就已经发现它是表示射影定理的那个图了，∠2、∠5 都是∠A 的余角，当然相等，于是有∠1=∠2=∠5。

例2 如图91在⊙O中，$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD}$，过B点的⊙O的切线交DA的延长线于C，引CE⊥AB于E。求证：$BE = \frac{1}{2}DC$。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0082.bmp}

分析：由“求证”看，这个题属于倍分问题，所以我们想从这里入手：延长BA到F，使$BF = 2BE$，也可以说使$EF = BE$，这样$BE = \frac{1}{2}BF$，只要$BF = DC$就好了。从思路上讲，如果把求证$BE = \frac{1}{2}DC$，改写为$2BE = DC$，另找 BE 的二倍 BF，就将线段倍分问题转化为证线段相等问题了。

看到 DC 与切线 BC 同在△DBC 中，想利用弦切角、圆周角证等角，通过全等三角形证 DC 与 BF 相等。这样想法行不行呢？怎样制造全等三角形呢？

看看“有什么”。有$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{AD}$，于是∠1=∠2=∠3。既然有EF=BE，连结 CF，不难证明 CF=CB，有∠4=∠1。连结 DF，有 BCFD 共圆，有∠1=∠5，有∠1+∠2=∠3∠5，有△DBC≌△BDF，得到 DC=BF。

练习十三

1．如图 92，M、N、分别是△ABC 的 AB、AC 边上的点，且 MN∥BC。D 是 CA 的延长线上一点，NE∥DB 交 BA 的延长线于 E。求证：CE∥MD。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000070_0083.bmp}

提示：这个题目已知有两组平行线，求证仍是平行线。回忆所学知识，由平行线带来的图形性质有两类：一类是有关的角，包括同位角相等，内错角相等，同旁内角互补；另一类是比例线段，包括平行线分线段成比例定理和相似三角形对应边成比例。这些都算是“有什么”，初步判断用比例线段试一试。

因为$MN∥BC$，有$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$，也可以写成另一种形式，即经过更比后的$\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{AC}$。有了这种准备，再换比就方便了。又因为$NE∥BD$，有$\frac{AN}{AD}=\frac{AE}{AB}$。观察这两组比例式，看到$AN$的位置，再看到$AB$的位置，这时容易想到：若把等式的两边分别相乘，AN、AB 都能约掉，会出现新的比例式$\frac{AM}{AD}=\frac{AE}{AC}$，再加上一组对顶角相等，可以证明$\triangle DAM∽\triangle CAE$，从而得到$\angle MDA=\angle ECA$，证出$DM∥EC$；也可以用更比得到$\frac{AM}{AE}=\frac{AD}{AC}$，用平行线分线段成比例定理的逆定理证明 DM∥EC。2．如图 93，已知：在△ABC 中，∠ABC=90°，四边形 ABDE 和 ACFG 都是正方形，BA 的延长线交 FG 于 H。求证：BC=2AH。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE，!16000070_0084.bmp}

提示：从“要什么”看，AH 与 BC 离得远，看不出有什么关系，恐怕还得借助于第三条线段。倍分问题有直接倍、有间接倍。所谓间接倍就是应用图形性质找出某个图形的二倍来，比如，这个题利用三角形中位线定理就可以 制造新的三角形，如果 AH 成为中们线，则第三边是它的二倍。

从“有什么”看，这里面有直角三角形，有正方形，它们都有许多性质可用。结合上述想法，延长 EA 到 D，使 AK=EA，则 A 为 EK 中点。这时，还要看 H 是否 EG 中点。在图形中，有直角，有互余，易证∠1=∠2，又有 AC=AG，AB=AE=AK，可证△ABC≌AKG。芋是，有∠K=90°。有 AH//KG，有 EH=HG。根据是平行线等分线段定理的推论，于是有$AH=\frac{1}{2}GK$。而GK与BC是全等三角形的对应边，于是有$GK=BC$，得到$AH=\frac{1}{2}BC$。

3．已知：在△ABC 或，BC 边上有 D、E 两点且 BD=DE=。求证：AB+AC＞AD+AE。

提示：画出图 94，观察图中 AB、AC、AD、AE 四条线段所处的位置，用学过的定理难于判断。这时容易想到，制造全等三角形，通过等量代换，达到移动线段位置的目的。

取 BC 中点 M，连结 AM，延长 AM 到 F，使 MF=AM，易证△BFM≌△ACM，有 BF=AC；连结 DF，易证△DMF≌△EMA，有 DF=AE。这里充分发挥了公用中线的长处。至于要证 AB+BF＞AD+DF，可以延长 FD 交 AB 于 N，用三角形两边和大

于第三边去推导。

4．如图 95，已知在⊙O 中弦 AD∥BC，弦 BE∥AC，过⊙O 上 C 点的直线 FC∥DE。求证：FC⊙O 的切线。提示：已知圆的切线的题目较多，一般比较熟悉；求证圆的切线的题目量少，一般比较生疏。普通的证法是看这条直线是否是满足“过半径外端，并且和这条半径垂直的直线”；另外，切割线定理的逆命题经证明正确，也可以作为定理用。

先看“有什么”，由于平行弦截等弧，所以$\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$，有∠1=∠2=∠E；又 BE//AC，连结 CD，有∠ACB=∠EBC=∠EDC；而 FC//DE，∠EDC=∠DCF。这就是说∠2+∠3=∠3+∠4，于是有∠2=∠4。换成∠1=∠4。这时 FC 是不是⊙O 的切线呢？如果说是，就等于承认了切割线定理的逆命题是正确的。

下面，我们反这个逆命题证明一下，在图 96 中，若∠ACF=∠B，CF 是不是⊙O 的切线呢？作⊙O 的直径 CM，连结 BM，有∠2=∠3，已证∠1=∠4，而⊙∠3∠4=90°，所以∠1+∠2=90°。这时，满足切线判定定理，所以 CF 是⊙O 的切线。

5．如图 97，已知：AC 是⊙O 的直径，AD 交⊙O 于 G，CD 交⊙O 于 F，AF、CG 相交于 B，E 是 BD 的中点。求证：EF 是⊙O 的切线。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0086.bmp}

提示：先看“有什么”，有直径，就有直角，就有三角形的高，就有三角形的垂心，延长 DB 交 AC 于 H，必是另一条高；还有在 Rt△BFD 中，斜边中线等于斜边一半，有∠1=∠2，又∠2=∠3，∠4=∠5，因为∠3+∠4=90°所以∠1+∠5=90°。EF 是⊙O 的切线。

6．如图 98，已知：PD 切⊙O 于 C，PAV 交⊙P 于 A、B。BD 过 O 点。求证：$\frac{BD^2}{CD^2}=\frac{PB}{PA}$。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0087.bmp}

提示：由于求证很特别，先从“要什么”考虑，一般的作法是设法把繁杂的变为简单的，所以应从等式的左边入手。回顾所学知识，涉及线段平方的有切割线定理、射影定下、勾股定理、余弦定理，这样思考就有了范围。未经选定用哪个定理之前，可结合其他条件，试探、摸索，看哪方面希望大，就向哪方面前进。比如，有 $CD^2=DE\cdot DB$（原题没有 E 点，BD 过 O 点，直径的另一端点写作 E，当然可以）。连结 AE，有∠EAB=90°，有 AE//PD，有 $\frac{DB}{DE}=\frac{PB}{PA}$，于是有$\frac{BD^2}{CD^2}=\frac{BD^2}{DE\cdot DB}=\frac{BD}{DE}=\frac{PB}{PA}$。

这里选的题目，多数比较难，层次多，步骤多，目的是想说明分析题目中的“有什么”和“要什么”，是一种重要的数学思想。掌握了这种数学思想对提高你的分析问题、解决问题的能力是十分有益的。

练习十四

请读者自己选十个题，照这样分析一下。

知道做什么题，怎样做题

平面几何课本里的题目已经不少了，其中练习题有 267 题，习题有 405 题，复习参考题有 165 题，共计 837 题。

从教师的角度来说，或者感到一个题作过了，学生该学到的东西并没有完全学到；或者认为某种 9 类型的早上，还没涉及，需要补充几个；或者觉得根据训练的要求还得加些垫加些补充练习。

从学生的角度来说，总觉得心里没底，有的题会，有的题不会，总想找点题练练。

这就提出了一个问题：做什么题，怎样做题。

首先，我们认为最重要的还是先用好课本里的题。课本里的题大体可分为以下两种：

第一是简单实践题和模仿题。学习了新的知识以后，练习中先安排一些题，让学生看一看、想一想、画一画、算一算，简单实践一下，或者按照例题样式做模仿题。如果做起来不困难，这就说明你对于所学的知识弄懂了，初步会用了。比如，讲了切线判定定理以后，安排了这样一个练习：已知：在△ABC 中，且∠A=45°，以 BC 为直径作⊙O。求证：AC 是⊙O 切线。这就为了实践一下，满足“过半径外，端，并且和这条半径垂直”的直线的圆的切线。别人证的题，你看过了；自己证的题，你写过了。以后再遇到类似的情况，你的把握就大了。

第二是从不同角度、不同用法编制的题。定理讲过以后，虽然有例题，但是数量有限。特别是，从不同侧面、不同角度同的题，定理的用法就不一样。比如，讲了切线的判定与性质，有定理还有推论，然后安排了这样一道练习题：已知：OC 平分∠AOB，D 是 OC 上任意一点，⊙D 与 OA 相切于点 E。求证：OB 与⊙D 相切。这个题的特点是求证直线和圆相切，并没有现成的半径。但是，仍要用切线判定定理，于是证法就与上述的例子不同了。既然角的一边 OA 与⊙D 相切于 A 那么连结 DA，则 DA⊥OA。而角的另一边 OB 是束与⊙D 相切，还无从说起。这时，需要“作 DF⊥OB 于 F”，于是可知 OB 赤 DF 的外端并且和 DF 垂直。不过，这里只差 DF 是⊙D 的半径这一条了，这样问题就解决了。又如，课本上还安排了这样一道题：圆的两条切线互相平行，则连结两个切点的线段是直径。这也是一个很好的题，它的特点是要解决三点共线这个问题。设⊙O 的两条切线 AB//CD，切点分别是 E、F，仍可以连结 OE，得 OE⊥AB，然后延长 EO 交 CD 于 F’，用“推论”证明 EOF’必过 F 点。共线问题解决了，此题便得证了。

其次，我们觉得按照训练的要求或者某一学习阶段的要求，将一些题目分类集中，或者适当作一些补充题，对提高学习水平，包括思维训练的水平也是必要的。下面谈谈，在做书上的练习或习题，复习题的时候，应当选作哪些补充题？

第一，把垫脚题与综合题分集中。如图 99，已知：⊙O△ABC 的外接圆，且 AB=AC。求证：AB·AC=AD·AE。

不难证明△ABD∽△AEB，有 $\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AB}$，改写成为 $AB^2=AD\cdot AE$，这个问题就解决了；同是这个图还可以变更为另一个题；由于 AB=AC，有

$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$，得$\angle 1=\angle 2$，不难证明$\triangle BED \backsim \triangle AEC$有 $\frac{BE}{AE}=\frac{ED}{EC}$，改写成 BE·EC=AE·ED。

如果另出一个题，已知条件如上不变。 求证：$AE^2=AB^2+BE\cdot EC$，或者求证：$ED^2=BE\cdot EC-BD\cdot DC$，甚至将圆去掉，只给已知；在△BEC 职，ED 是角平分线。求证：$ED^2=BE\cdot EC-BD\cdot DC$。对于这些题来说，前面的题就可以看伯垫脚的题。有了这些准备工伯，再伯后面的题就简便多了。比如，有了 BE·EC=AE·ED，可换 成 BE·EC=AE（AE-AD）$=AE^2-AE\cdot AD$，前面已经证过$AB^2=AD\cdot AE$， 代入后移项得 $AE^2=AB^2+BE\cdot EC$。

再如图 100，已在：⊙O 的弦 AB⊥CD，垂足为 F，过 F 引直线分别与 AD、BC、相交于 E、G。求证：（1）若 G 是 BC 中点，则 GFE⊥AD；（2）若 EFG⊥AD，则 CG=GB。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0091.bmp}

证过这两个小题以后，再证综合题，它们将起垫脚的作用。

仍是上图，已知：⊙O 的弦 AB⊥CD 于 F，G 是 BC 的中点，OH⊥AD 于 H。求证：四边形 FHOG 是平行四边形。

所谓综合题，常常是几个基本题（或者说小题，有些就是所谓垫脚题）的综合，把这些小题（局部）弄清楚了，综合题（全部）的思路也就清楚了。

第二，把代表一个类型的题相对集中。这类题目很值得下功夫研究。比如，有关角平分线的三角形全等问题，由于角平分线位置居中，两侧有相等的角，制造全等三角形很容易。把这一类型题目集中研究一下，在以后用到的时候，就感到极 方便了。再如，直线形中的比 例线段问题，圆中的比例线段问题等，都属于这一类。具体内容前面忆经谈过，这里就不再重复了。

有关四边形中点问题，也有一串题：顺次连结任意四边形、平行四边形、矩形、菱形、正方形、等腰梯形各边中点，将得到一个什么图形？我们不妨把图形都画出来，一一分析思路，找到它们的区别、联系，得出结论。通过观察，可以看出：它们的边都是通过三角形中位线定理与原四形对角线建立联系的，原四边形对角线的位置、大小如何，会直接影响到新四边形对边、邻边的关系，从而确定新四边形是一个什么图形。这么一做，这 一类题就能掌握了。

第三，不排除做一些特殊类型的题目，这样可以增长见识，把它记住，以后证题，可能受到启发。比如图 101 中，已知：$\odot O_1$与$\odot O_2$相交于 A、B，两圆的公切线分别切两圆于 C、D。求证：过 A、C、D 的圆的直径是$\odot O_1$和$\odot O_2$的直径的比例中项。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0092.bmp}

我们所学的定理中涉及圆的直径的，除直接画出直径、半径以外，90°的圆周角可以带来直径，但是，都与本题无直接关联。这时，我们应当想到正弦定理。正弦定理与直径有关，讲的是一边与所对角的正弦的比。由于∠DCA、∠CDA 都是弦切角，在$\odot O_1$上取一点 M，连结 CM、AM，得到∠CMA=∠DCA，并且设它们等于α；在$\odot O_2$粘取一眯 N，连结 DN、AN，又得到∠DNA=∠CDA，设它们 等于β。再设⊙CAD 的直径为

2R；⊙O_1的直径为$2R_1$，⊙O_2的直径为$2R_2$，于是有 $\frac{CA}{\sin\alpha}=2R_1,\frac{CA}{\sin\beta}=2R,\frac{AD}{\sin\alpha}=2R,\frac{AD}{\sin\beta}=2R_2$。由此可以证明$(2R)^2=2R_1\cdot 2R_2$。

事实说明，对于常见类型有一定经验，对某些特殊类型又有一些积累，证丐题来会顺利得多。

第四，应当研究一些多解的题、灵活的题。有些题可能有几种解法，或添加不同的辅助线，或用不同的定理，解题的思路也就不同。这种题对于熟悉图形性质，锻炼思维能力有好处。但是，不必一味求多，多几种、少几种关系不大。只要定理用得灵活。想问题的方法灵活就很好了。除一题多解以外，还有一题多变。所谓一题多变就是稍微改变一下原题的条件，这个 题就会成为另一个题。这样做了以后，再看能不能解，结论如何。这也是很有益处的。例如，已知：在 Rt△AOB 中，∠O=90°，以 O 为圆心，OA 为半径作一个圆，交AB于C，交OB于D，若∠B = 31°。求：$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{CD}$的度数。请你看看这个题能有多少种解法。

又如，已知：AB 是⊙O 的直径，C 是半圆上的一点，过 C 点作 ⊙O 的切线，从 A、B 两点分别作这条切线的垂线，垂足为 E、F，从 C 点再作 AB 的垂线，垂足为 D。求证：$AE\cdot BF=AD\cdot DB=CD^2$。请你想想能有几种证法。另外，若把 AB 是⊙O 的直径这个条件变为 AB 是⊙O 的弦(即除直径以外的任意一条弦）结论将有什么变化，证法又有什么不同？

再如，等腰三角形底边上任意一点到两腰距离之和为定值。可是，对于等边 三角形来说，条件就不必限为底边上任意一点，可以是形内任意一点到三边距离为定值。有了这个思路，在学习立体几何的时候， 证明正四面体内任意一点到四个面的距离之和为定值，就很方便了。

最后，做题还要考虑知识的覆盖面。不要只作自己会做的题，自己爱做的题。只环绕“重点知识”做题也是不够的。应该考虑学过的知识到底会多少，不能置一些知识于不顾。

近年来，各种考试中常有些“小题”，如填空、选择答案，判断正误等，这类题的知识覆盖面大是它们的一大优点。这就要求平日练习认真细致，不草率从事。比如，正三角形边长为 a，中心为 O。从第一次接触它，就应该认真推导、计算，得出结论。诸如，正三角莆的高是多少，而 O 到边的中点距离是多少，O 到顶点的距离是多少、正三角形面积是多少。作过以后，记准结论，随时可用。另外，正式答卷的时候，决不因小题而稍稍一想立即作答，而应 当记住，几何题条件，认真计算，最后，作出判断，写清答案，否则极易发生错误。

总之，任何时候都要记住：决不应该抛开课本上的题，仅仅按照上述题目类别去另找补充题，而应该先以课本题为主，看看各章习题中，那些题目安排意图是什么，做过以后自己体会是什么，它们属于哪一类题，应该怎样对待，今后怎样使用。然后从中选一些题，作为自己研究、掌握的具体内容。最后，再看这样做了以后，还缺什么，需要补充一些什么内容。

练习十四

从做过的练习，习题或考试题中，找到某一简单题为另一综合题“垫脚”

的例子；再选一个有关比例线段的题，说明它在思路上有什么代表性。

学会做过题后作小结

所谓小结就是总结、积累经验的过程，这也是避免盲目地无休止的做题的好办法。那么，怎样做小结呢？

一般地说，有教训、有经验都要小结。比如，前面讲到的图 98 第 6 题。一个同学见到求证 $\frac{BD^2}{CD^2}=\frac{PB}{PA}$，就只记得射影定理的图形中有两条直角边的平方比等于两射影之比，觉得其他情况下还没有这种形式。因此，只得避开这种想法。那么 BD^2、CD^2 是怎么得来的呢？由直径得直角、由直角证平行、由平行得比例，于是有 $\frac{BD}{BE}=\frac{BP}{BA}$，求出 $BD=\frac{BE\cdot BP}{BA}$，有 $\frac{CD}{DP}=\frac{OD}{DB}$，求出 $CD=\frac{DP\cdot OD}{DB}$，而 $\frac{BD^2}{CD^2}$ 怎么化简呢？另一个同学从勾股定理入手，有 $BD^2=PB^2+DP^2$；$CD^2=DO^2-OC^2$，同样不好化简。有时候，有的同学把问题想得太难了，实际上是自己为难自己，其实没那么复杂；有时候，有的同学把道路走岔了，实际上不该往那边去，可他偏往那边去。这个题用切割线定理，化简后再用平行截割定理很简单。走了这样一段弯路之后，想一想，应记住点什么，这就是很好的小结。

再如，做课本上一个练习，已知等腰三角形边长为 5㎝、6㎝,没说哪 是底哪 是腰，问周长多少厘米。你只答周长是 16㎝,忽略还有 17㎝ 或 22㎝，这又错了，因为你忘记了三角形两边和必须大于第三边，三边长为 4、4、9 不能组成三角形 ，只答 22㎝ 才对。出了错，有了都训，记住它，这也是很好的小结。

其实，也不一定只对缺点、错误进行小结，证一类题目的体会、经验也可以小结。比如，在直线形中，证比例线段就可以小结一下：这部分内容常用哪些定理，常添什么样辅助线，什么时候用平行截割定理，什么时候用平行线截得的相似三角形；在图中，证比例线段情况怎样，再小结一下。下面结合两个例题，谈谈怎样结合一个例题进行小结。

例 1 如图 102，已知：PA、PB 分别切⊙O 于 A、B、AB、PO 相交于 C，BD是⊙O的直径。求证：$\frac{1}{2}PA\cdot AD=BO\cdot AC$。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0097.bmp}

分析：证过此题以后，回过头来，再看一看这个题目的解题思路有什么值得研究的地方。假如你曾为求证中的“$\frac{1}{2}$”踌躇了一阵儿，就该记住这 $\frac{1}{2}$ 不是抽象的数字，而是一条线段的一半，如果把这条线段看成是PA，那么 $\frac{1}{2}PA$ 就是PA的半；如果把这条线段年成是AD，那么 $\frac{1}{2}AD$ 就是AD的一半。这时，倘若你能灵活点，还会把“求证”变为 PA·AD=2BO·AC。如果把 2BO 放在一起，就是 BD；如果把 2AC 放在一起，就是 AB。

以上四种情况，除$\frac{1}{2}$PA没有直观的相应线段外，其他三种情况都有直观的相应线段。因此，本题有三种思路：将$\frac{1}{2}$AD换成CO，希望证出PA·CO=BO·AC，证△PAC∽△AOC 可以解决；将等式两边同乘以 2，希望证PA·AD=BO·2AC，而 2AC 是 AB，再将 PA 换成 PB，可证△POB∽△BDA。这时，索性把这些相似三角形好好研究一下，这里 Rt△AOC 算是最小的一种，Rt△BOC 与它全等，对就应元素可以代换;Rt△PAC 算是另一种， Rt△POB 与它全等，对应元素可以代换；再就是 Rt△BDA。它们两两相似可以组成六组相似三角形、勾、股、弦各自相比，可以写出下面六组相等的比：

$\frac{OC}{AC}=\frac{AC}{PC}=\frac{OA}{PA}$；$\frac{OC}{OA}=\frac{AC}{PA}=\frac{OA}{PO}$；$\frac{AC}{OA}=\frac{PC}{PA}=\frac{PA}{PO}$；$\frac{OC}{AD}=\frac{BC}{AB}=\frac{OB}{BD}$；$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{PC}=\frac{BD}{PA}$；$\frac{AD}{AO}=\frac{AB}{PA}=\frac{BD}{PO}$。有了这么深刻，这么广泛的认识，再见到这个图形或和它类似的题目，自然就会胸有成竹。这就是研究一个题，学会一类题的意思。

例2已知：在△ABC中，BC=a，AC=b，AB=c，且s=$\frac{1}{2}$（a+b+c）。

求证：

△ABC的面积 $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

分析：海伦公式的推导过程分解一下，写出每一个步骤的内容，也可以算作自己的一种小结。在图 103 中，作出 BC 边上的高 AD，用 ha 表示。AB 在 BD 用 m 表示。步骤如下：{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0099.bmp}

1．先用余弦定理有 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$；

2．由 m=cosB,上式可改写成 $b^2=a^2+c^2-2am$；

3．求射影，$m=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$；

4．用勾股定理求ha,有$h_a^2=c^2-m^2$；

5．把m的值代入，$h_a^2=c^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2$；

6．分子分母 都平方，$h_a^2=c^2-\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{(2a)^2}$；

7．通分，$h_a^2=\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}$；

8．用公式，$h_a^2=\frac{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}{4a^2}$；

9．再用公式，$h_a^2=\frac{[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]}{4a^2}$；

10．还用公式$h_a^2=\frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$。

11．将 s 换进去，

$$h_a^2=\frac{2s(2s-2b)(2s-22c)(2s-2a)}{4a^2}$$

$$=\frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$ ；

12．**开方** $ha=\frac{2}{a}\cdot\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$；

13．**求面积**，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot ha$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$。

练习十五

这里我们不加提示，请读者自己小结。

1．如图 104，已知：E、G 分别是平行四边形 AB、DC 边上的点，且 EG//AC，BF⊥AD 于 F，BM⊥DC 于 M 。求证：AE·BF=CG·BM。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0100.bmp}

2．已知：H 是 ABC 的垂心。求证：H 把每一条高分为两部分乘积为常数（在图 105 中，AH·HD、BH·HE、CH·HF 应为常数）。

3．如图 106，已知：在△ABC 中，D 是 AB 上一点，F 是 A 长 一上一点，连结 DF，∠ADF 的平分线与∠B 的平分线相交于 N，∠AFD 的平分线与∠ACB 的平分线相交于 M。求证∠BND=∠CMF。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0101_1.bmp}

4．如图 107，已知：直线 MN 和⊙O 相离，自 O 点引 MN 的垂线 OA，垂足为 A，割线 ABC 交⊙O 于 B、C 割线 ADE 交⊙O 于 D、E，CE 延长线交 MN 于 F，DB 的延长线交⊙O 于 G。求证：AF=AG。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0101_2.bmp}

5．已知：在 Rt△ABC 中，∠B=90°，A 百∠A 的平分线，BE⊥AD 于 E，BE 的延长线交 AC 于 F，引 EC∥BC 交 AC 于 G。

求证：$\frac{AB^2}{AD^2}=\frac{BC}{2CD}$。

6．已知：在梯形 ABCD 中，AB∥CD，AC、BD 相交于 E，若 $S_{\triangle EAB}=P^2$，$S_{\triangle ECD}=q^2$。求证：S 梯形 ABCD=（p+q）^{2}。

初步了解改头换面的几何证明题

几何这一门学科，年代相当久远了，题目自然很多。为了考试编一道新题，并不是很容易的，所以，人们经常把题目改头换面，稍加变化作为考题。

比如，把一个几何命题换成它的逆命题，证明过程自然就不同了；把圆的直径换成一般的弦，结论也可能会随之而变；一点在某一段上，换成上这线的延长线上，结果有时大不一样；把图形转换方向，或换成从纸的背面去看的图形，甚至只是把锐角三角形改为钝角三角形……从表面看来，好象仅仅图形不一样了，其实会带来一系列的变化。下面，举三个例题。

如图 108，已知：BC 是⊙O 的直径，EF 切⊙O 于 A、BE⊥线 EF 于 E，CF ⊥直线 EF 于 F，AD⊥BD 于 D。求证 $AD^2=BE\cdot CF$。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0103.bmp}

这道题能这射影定理与三角形等，便可得出结论。若把“BC 是⊙O 的直径”这一条去掉，成为图 109 的样子，靠△ADC∽△BEA，△ABD∽△CAF，也可以得出结论。这就是说条件变了，结论没变。我们甚至可以用图 109 的证法去证图 108，这是因为直径 BC 是弦 BC 的特例；直径是最大的弦。但是，图 108 可以得到的其他结论，例如可以求证∠EDF=90°，在图 109 就办不到了。这是变化以后的不同处。

如图 110，已知：在▱ABCD 中，BC=2AB，CE⊥AB 于 E，M 是 AD 的中点，求证：∠EMD=3∠AEM。

四边形 AECD 为直角梯形,引中位线 MF,据平行线等分线段定理,得 EF=F，平行线证明∠1=∠2，用三角形全等证明∠2=∠3，而∠3、∠4 是平行线的内错角，∠4、∠5 是等腰三角形的二底角，问题就解决了。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0104_1.bmp}

若是把条件化为“CE⊥AB 的延长线于 E”，如图 111，思路一致，题目就不是完全相同。

再如图 112，已知：在四边形 ABCD 中，AB=CD，M、N 分别是 AD、BC 的中点，BA 延长线交直线 MN 于 E，CD 在延长线交直线 MN 于 F。求证：∠AEM=∠DFN。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0104_2.bmp}

关于任意四边形的问题除了内角和为 360°以外，没有其它性质可用。这种题目一般都是用连结对角线，把四边形化为三角形来解决的。我们连结 BD，取 BD 中点 P，再分别连结 PM、PN。这是三角形中点问题的一般处理方法，目的是靠三角形中位线性质，一方面得到 PM=PN，从而∠1=∠2；另一方面同时得到∠1=∠3，∠2=∠4。如果不是这样，而是把 AD、DC 两边接成一直线（即图 113 的样子），那么有了证图 1124 经验，就会联想到这里也是两个中点，也是三条延长一，如法炮制， 可以得到求证的结果。

这就是说，出题的人可以考虑变化，证题的人也可以考虑题目的怎样变化来的。在以研究证题思路为主的情况下，再以观察研究图形变化为辅，是很有用处的。

以上三个例题仅仅有两个变化，下面看看两个以上变化的情况。

先看看命题不变，图形位置改变的情况。

比如，同是“自平行四边形各顶点向直线 l 引垂线”这样一句话，可以得到如下几种不同的情况，不同的图形：

在图 114 中，直线 l 与▱ABCD 无交点；在图 115 中，直线 l 过 ABCD 的一个顶点；在图 116 中，直线 l 过▱ABCD 两邻两顶点、与一边重合；在图 117 中，直线 l 过▱ABCD 相对两顶点、与对角线重合；在图 118 中，直线 l 过▱ABCD 一组对边相交；在图 119 中，直线 l 与▱ABCD 一组邻边相交。

上述几种图形，尽管题的已知条件相同，但是由于图中直线和平行四边形的位置的改变了，所以求证和证明相应就发生了变化。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0106.bmp}

再看看命题稍作调整，图形略有改变的情况。

图 120 是常见的图形，已知：以△ABC 的 AB、AC 为一边向外作正方形 ABEF、ACGH，引 AD⊥BC 于 D，延长 DA 交 FH 于 M。求证：FM=MH。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0107.bmp}

作 FP⊥直线 PM 于 P，HQ⊥直线 DM 于 Q 以后，证明△ADC≌△HQA，△ADB≌△FPA，再证△FPM≌△HPM 就可以了。

若是把直线 DAM 变化一下，改变“作 AD⊥FH 于 D，延长 DA 交 BC 于 M，求证：BM=MC”。这时，情况又将如何呢？

在图 121 中，延长 DAM 与过 B 点而平行于 A 牟直线相交于 N（由于不是已知 BM=MC,而是待证 M 是 BC 中点,所以辅助线与△ABC 中线 AD 的作法不同，不能延长 AM 到 N，使 MN=AM，那样不易直接证明△BMN≌△CMA。此时，不如作 BN∥AC，与 AM 的延长线相交，这样既避免了证三点共线的问题，又有平行线的内错角可用），∠2、∠3 同时∠1 的余角，所以∠2=∠3，同理∠5=∠6，而∠6=∠7，又有 AF=A，不难证明△FAH≌△ABN，得到 BN=AH=AC，证明△BMN≌△CMA 就容易了。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0108.bmp}

上述两题都是从三角形的两边向外作正方形，若是改为向外作矩形又将有什么变化呢？

如图122，这里求证的是：$BM:MC=\frac{AB}{AG}:\frac{AC}{AE}$。由于矩形一边的长度定了。而另一边的长度没定，因而，命题的结论必与这长、宽之比有关。先制造相似三角形。作 CH⊥直线 GE 于 P，与 BA 的延长线相交于 H。因为∠1、∠2 同是∠NAE 的余角，所以∠1=∠2，用平行线证出∠2=∠3，又∠GAE=∠HAC，可证△AHC∽△AGE，得到AH∶AG=AC∶AE，即$AH=\frac{AG\cdot AC}{AE}$；另在△BCH中，由于AM∥HC，有BM∶MC = BA∶AH，代入上项结果，有$BM:MC=AB:\frac{AG\cdot AC}{AE}=\frac{AB}{AG}:\frac{AC}{AE}$。

最后，我们把上面两种情况结合起来：即有命题上变，图形位置改变的情况，又有命题稍作调整，图形略有改变的形况。这样一来，一个题目的变化就更大了。

如图 123，已知：直线 l 与⊙O 相离，作 OA⊥l 于 A，引⊙O 的割线 ABC 交⊙O 于 B、C，过 B 点作⊙O 的切线交直线 l 于 D，过 C 点作⊙O 的切线交直线 l 于 E。求证：AD=AE。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0110_1.bmp}

此题连结 OB、OC、OD、OE，分别证明 O、D、A、B 与 O、A、E、C 四点共圆以后，不难证明∠1=∠2=∠3，△ODB≌△DEC，得到等腰△ODE。这样问题

就能解决了。

若直线 l 与⊙O 相交，情况又如何呢？

如图 124，直线 l 被截在⊙O 内部的部分，就成为⊙O 的弦。作此弦的弦心跑 OA，且过 A 的直线交⊙O 于 B、C，这对 A 点在 B、C 之间。下面，添加辅助线与证明四点共圆同前面类似，∠1=∠2 似同弧上的圆周角相等，∠2=∠ODB 是圆内接四边形外角等于内对角。最后仍然可以通过全等三角形与等腰三角形证出 AD=AE。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0110_2.bmp}

如果把图 124 中的 CE、DB 延长相交于 P，那么题目的可以换一个出法：如图 125，已知：PB、PC 分别切⊙O 于 B、C，一直线 l 交 BC 于 A，交⊙O 于 M、N、，交射线 PB 于 D，交 PC 于 E，且 AM=AN。求证：DB=CE。

连结 OA，因为 MA=AN，可证 OA⊥l，点共圆证法如前，有∠1=∠2，∠3=∠4，但是∠1 和∠3 为等腰△OBC 的二底角，所以能证 OD=O，以斜边、直角边对应相等，证明△ODB≌△OEC。

如果在图 124 中，过 A 点作两条割线情况又如何呢？

如果 126 中，直线 l 与⊙O 相交于 M、N，引 OA⊥l 于 A，过 A 引⊙O 的两条割线，分别交⊙O 于 B，C 和 F、G，连结 BG 交 MN 于 D，连结 CF 交 MN 于 E。求证：AD=AE。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0111.bmp}

连结 OD、OE 以后，希望证∠1=∠2，以便证明△ODA≌△OEA。作出 BG 弦和 CF 弦的弦心距 OP、OQ，分别得到 O、P、D、A 与 O、A、E、Q 四点共圆，因而∠1=∠3，∠2=∠4。由△GBA∽△CFA，得到

$\frac{AB}{AF}=\frac{BG}{FC}=\frac{\frac{1}{2}BG}{\frac{1}{2}FC}=\frac{BP}{FQ}$，以一组角相等，夹边成比例，证明△PBA∽△QFA，

从而∠3=∠4，达到用∠1=∠2 证△ODA≌△OEA 的目的。

继续研究变化，画直线 l 与⊙O 相离，引 OA⊥l 于 A，如图 127，设 OA 交⊙O 于 M，画出⊙O 的直径 MN，别引⊙O 的割线 ABC，交⊙O 于 B、C 两点，射线 CM 交直线 l 于 D，射线 NB 交直线 l 于 E。求证：AD=AE。

既然 MN 是⊙O 的直径，事情好办了。连结 NC，则∠NCM=90°，从而 N、C、A、D 四点共圆，有∠1=∠2，而∠2=∠3，证明△NDA≌△NEA 就不困难了。

若是没有直径这个条件，改为画⊙O 的两条割线呢？

在图 128 中，已知：直线 l 与⊙O 相离，引 OA⊥l 于 A，作⊙O 的割线 ABC 与 AFG，分别交⊙O 于 B、C 与 F、C，射线 GB 交直线 l 于 D，射线 CF 交直线 l 于 E。求证：AD=AE。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0112.bmp}

此题仍作 BG、CF 弦的弦的心距 OP、OQ，分别得 O、Q、A、E 与 O、A、P 四点共圆，与图 126 的思路是一样的。这时有∠1=∠2，∠3=∠4，只要证明∠1=∠3，就有办法了，由△ABG∽△AFC，

得到 $\frac{AB}{AF}=\frac{BG}{FC}=\frac{\frac{1}{2}BG}{\frac{1}{2}FC}=\frac{BP}{FQ}$，仍以一级角相等，夹边成比例证明△ABP∽△AFQ，∠1=∠3。不过，这一次∠ABG 与∠AFC 为什么相等，得借助于∠A 公用、∠G=∠C，用三角形内角和为 180°来证明一下。

有了∠1=∠3，换成∠2=∠4，再证△ODA≌△OEA 就容易了。

练习十六

你能找一个例子，说明某一个题目是经过什么变化，由另一个题目变化来的吗？多观察一些题，看看还有没有类似的情况。

认真做好各种各样的几何计算题

几何计算一般指的是角度和弧度的计算、线段长度和弧的长度的计算、面积的计算。因为这种题是几何题，所以一定要以几何图形的性质为依据；又因为这种题是计算题，所以算术、代数上学过的积识都可以用。那么怎样才能学好几何计算呢？

首先，要弄清几何图形的性质。几何图形的性质有的用于证，有的用于算。我们可以把用于算的几何图形性质分成两大类：

一类是可以直接用于计算的性质。这多表现为公式或几何关系式，例如，多边形内角和公式、弧长公式、圆面积公式。另外，象射影定理、勾股定理、正弦定理、余弦定理、切割线定理，可以直接将题目的已知量代入，然后计算求值或解方程。

另一类是间接与计算有关的定理。例如，相似三角形判定、圆的直径与圆的切线，通过它们得到比例线段，或得到直角三角形之后，才能开始进入计算。

比如，已知菱形两对角线之比为 3∶4，周长 40cm，求菱形的面积的高。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0114.bmp}

在图 129 中，“菱形 ABCD 的对角线 AC、BD 相交于 O，AC 与 B 相垂直平分”这个性质，虽未直接参加计算，却是计算中不可缺少的重要内容。由此可有Rt△DOC，可用勾股定理，得出$\frac{OD}{OC}=\frac{BD}{AC}=\frac{3}{4}$。

设 OD=3x，OC=4x。因菱形四边相等，求出 DC=10cm，所以 OD=6cm，OC=8cm，$BC=12cm$，$AC=16cm$，代入菱形面积公式，$S=\frac{1}{2}\times12\times16=96cm^2$。

作出菱形的高 DE，由 10DE=96，求得 DE=9．6cm。

其次，要注意代数知识的运用。几何、代数都是数学的一个分支，前者偏重于形，后者偏重于数。形和数是一个统一的整体，研究的时候不妨分开，应用的时候不忘结合。几何中用代数知识，往往是一些浅近的、基本的内容，并不很难。

比如，菱形周长为 2p，两条对角线的和为 m，求菱形面积。在这问题中，设菱形为 ABCD，对角线 AC、BD 相交于 O，OC 为 x，OD 为 y，依题意，有

$$\begin{cases} x^2+y^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2, & (1) \\ 2x+2y=m。 & (2) \end{cases}$$

由（1），得$x^2+y^2=\frac{P^2}{4}$，

配方，得$(x+y)^2-2xy=\frac{P^2}{4}$　（3）

由（2），得 $x+y=\frac{m}{2}$　　　　(4)

将（4）代入（3），得 $(\frac{m}{2})^2-2xy=\frac{P^2}{4}$，

即 $2xy=\frac{m^2}{4}-\frac{P^2}{4}$。

而 $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 2x\cdot 2y$

$=2xy=\frac{m^2-P^2}{4}$。

值得提一提的是，这里运用代数知识，不是为了列方程、解方程、求出未知数的值，而是为了解几何计算题。另外，在代数法作图中，也有类似的情况，例如，黄金分割，并不是求出 x 的值才算完，而是到了能作图就算完。

第三，还要认真地研究题意，认真地画图，认真地检验。许多几何计算题是以命题的形式出现的，这时，需要认真地研究题意（看符合题意的情况是否只有一种），并依题意认真地画出图来。

比如，等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角是 18°，求这个等腰三角形各内角的度数。

题目中没说顶角是锐角还是钝角，依题意就应画出两个图：如图 130，当∠A 为锐角时，高 BD 在形内，由∠ABC=18°，算出∠A=72°，∠ABC=∠C=∠54° 如图 131,当∠BAC 为钝角时,高 BD 在形外,由∠ABD=18°,∠BAC=108°，∠ABC=∠C=36°。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0117_1.bmp}

再如，⊙O 的两条平行弦 AB 和 CD，距离 22㎝，AB=40㎝，CD=48㎝，求⊙O 半径的长。

题目中没说 AB 和 CD 是分在 O 点的两侧，还是同在 O 点的一侧，应该两种情况都考虑到，画图做计算。经计算可知，若 AB 和 CD 在 O 点的两侧，则求得⊙O 半径等于 25㎝；若 AB 和 CD 在 O 的同侧，则求得弦心距为负值（不合题意），所以 AB 和 CD 分在 O 点的两侧。

题目解过以后，最后一定要认真地检验：看推理有没有根据、计算有没有错误、结果是否符合题意。

下面，看两个例题。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0117_2.bmp}

例 1　如图 132，已知⊙O 和⊙O′相交于 B、C，⊙O 的直径 CF=2，⊙O 的切线 FA 与 CB 的延长线相交于 A，⊙O′的割线AED交⊙O′于E、D，$ED=2$，$BC=\sqrt{3}$，求AB、AE的长。

分析：看过题目以后，对圆的切线、割线、直径留有印象，产生联想：可能切线的性质（和过切点半径垂直、弦切角等于两边所夹弧上的圆周角、切割线定理）可用。直径能产生直角、出现直角三角形，尤其是把2和$\sqrt{3}$这两个数字和勾股定理或锐角三角函数第起来，就会想到，它们可能与特殊角有关。有了这一段构思过程以后，就可以着手分析了。连结 BF，有 Rt△CFB，据勾股定理求得 BF=1，∠BCF=30°，∠AFB=30°。设 AB 为 x，则

$AF=2x$。仍用勾股定理，可求$AB=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

在⊙O′中，有AE·AD=AB·AC，把已知量代入，得AE（AE+2）= $\frac{\sqrt{3}}{3}$（$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$），化简为$AE^2+2AE-\frac{4}{3}=0$，用一元二次方程求根公式，$AE=\frac{\sqrt{21}}{3}-1$。

例 2 如图 133，已知 D、E 分别是△ABC 的 AB、AC 边上的点，且 DE∥BC，
AB=10，若 S△ADE=2S△BCD，求 S△ADE：S△ABC。{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0119.bmp}

分析：若想用三角形面积公式来表示 $S_{\triangle BCD}$，可作出△BCD 的高 DG，则$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot DG$。由DE∥BC，△ADE∽△ABC，有$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC}$，$BC=\frac{AB\cdot DE}{AD}$；易证△DBG∽△ADF，有$\frac{DG}{AF}=\frac{DB}{AD}$，$DG=\frac{AF\cdot DB}{AD}$。所以，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{AB\cdot DE}{AD}\cdot\frac{AF\cdot DB}{AD}$。

依题意列方程，$\frac{1}{2}DE\cdot AF=2\times\frac{1}{2}\cdot\frac{AB\cdot DE\cdot AF\cdot DB}{AD^2}$，化简为$AD^2=2AB\cdot DB$，把已知量代入，经整理得$AD^2+20AD-200=0$，求得$AD=-10+10\sqrt{3}$。

所以，$\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AD^2}{AB^2}=\frac{(-10+10\sqrt{3})}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{1}$，即$S_{\triangle ADE}$：$S_{\triangle ABC}=4-2\sqrt{3}$。

练习十七

1．如图 134，已知在梯形 ABCD 中，AB∥CD，AB、BD 相交于 O，过 O 引 EF∥AB 交 AD 于 E，交 BC 于 F，若 DC=9㎝，AB=12㎝，求 EF 的长。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0120.bmp}

提求：易证 AB∥EF∥CD，这样就有五组相似三角形可用，即△DEO∽△DAB； △COF∽△CAB，△AOE∽△ACD；△BOF∽△BDC；△DOC∽△BOA。这种研究图形性的方法，正是几何课里思维训练的重要内容，这时，

可证EO=OF。设EO=OF=x，于是有$\frac{12}{x}=\frac{AC}{CO}$，用分比定理，得$\frac{12-x}{x}=\frac{AO}{CO}$；另选，$\frac{BD}{BO}=\frac{9}{x}$，用分比定理，得$\frac{DO}{BO}=\frac{9-x}{x}$。用反比定理，得$\frac{BO}{DO}=\frac{x}{9-x}$，所以$\frac{12-x}{x}=\frac{x}{9-x}$，化简后，21x=108，$x=\frac{36}{7}$, $EF=2x=\frac{72}{7}$。

2．已知在△ABC 中，AB=14，BC=15，AC=13，求 BC 边上的高 AD 的长。

提示：考虑到△ABC 是不等边三角形，知三边长可用余弦定理求出 BD 的长为 8.4㎝，再用勾股定理求得 AD 的长为 11.2㎝。另外，还可以用高线公式

直接求，也是一样：另给 a=37，b=30，c=13，求 hb。请你再练习一次。

3．如图 135，已知⊙O 的两条弦 AC、BD 相交于 M，$\overset{\frown}{AB}$含有120°，$\overset{\frown}{CD}$含有90°，若S△AMB与S△CMD的和为$100cm^2$，求这两个三角形的面积各多少？

提示：由已知$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{CD}$的度数，求得∠ADB = 60°，∠DA = 45°，用正弦定理，得$\frac{DM}{\sin 45°}=\frac{AM}{\sin 60°}$，即$\frac{DM}{AM}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，那么$\frac{S_{\triangle DMC}}{S_{\triangle AMB}}=\frac{2}{3}$，可以求出两个三角形面积：$S_{\triangle DMC}=40cm^2$，$S_{\triangle AMB}=60cm^2$。

4．如图 136，已知 O 是等边△ABC 的中心，以 O 为圆心作一个圆交 AB 于M、N，交BE、F，交AC于G、H，且$\overset{\frown}{MN}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{GH}=90°$，若此等此等边三角形边长为 a，求图中阴影部分的面积。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0121.bmp}

提示：考虑到 O 是等边△ABC 的中心，即△ABC 的垂心和重心，易证 O 到BC所引垂线OD必是高线AD的一部分，即中线AD的$\frac{1}{3}$，等边三角形边长为a，则中线长为$\frac{\sqrt{3}}{2}$a，OD的长为$\frac{\sqrt{3}}{6}$a；OD又是EF弦的弦心距，必平分EF弦，且平分$\overset{\frown}{EF}$；已知$\overset{\frown}{EF}$含有90°，所以∠EOF = 90°，则∠EOD = 45°，$OE=\sqrt{2}OD=\frac{\sqrt{6}}{6}$a。所以，$S_{扇形OEF}=\frac{\pi OE^2}{4}=\frac{\pi a^2}{24}$；$S_{\triangle DOF}=\frac{a^2}{12}$；得到$S_{弓形EmF}=\frac{\pi a^2}{24}-\frac{a^2}{12}$；求得$S_{阴影}=\pi\cdot\frac{a^2}{6}-3\times\left(\frac{\pi a^2}{24}-\frac{a^2}{12}\right)=\frac{\pi a^2}{6}-\frac{\pi a^2}{8}+\frac{3a^2}{12}=\frac{4\pi a^2-3\pi a^2+6a^2}{24}\frac{(\pi+6)a^2}{24}$。

5．如图 136，已知半圆的直径 AB 长为 578cm，另一个直径为 196cm 的⊙′，切 AB 于 C，同时和这个半圆切，过 C 点的 AB 的垂线交半圆于 D，求 CD 的长。

{ewc MVIMAGE,MVIMAGE, !16000070_0122.bmp}

提示：从思维训练上讲，见到题目的条件以后，先考虑两圆内切，切点在连心线上，即 O、O′、E 共线；接着要考过切点而垂直于切线的直线必过圆心 ，即 C、O′、D 共线。设 OE 和⊙O′的另一个交点为F，根据切割线定理。有$OC^2=OF\cdot OE$。求得$OC=17\sqrt{93}cm$。另外，根据射影定理，有$CD^2=AC\cdot CB$，把已知量代入。有$CD^2=(289-17\sqrt{93})\cdot(289+17\sqrt{93})$，求得CD = 238cm。

6． 已知正方形 ABCD，BC 边上有一点 P。CD 边上有一点 Q。且△APQ 的长为一等边三角形。若此正方形边长为 5，求 BP、AP 的长。

（答案：$BP=10-5\sqrt{3}$ ：$AP=5\sqrt{6}-5\sqrt{2}$。）