学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中小学课堂学习新广角

——数学演义

BOOK

内部资料 非卖品

数学演义

第一回　混沌初分　大千世界识一二
万物肇始　天圆地方自规矩

原始文明只能分辨 1、2 和“许多”。埃及人用|表示 1，用｜｜｜｜∩∩∩表示 34。炎黄始祖首创十进制位值记数，独领风骚数千年。《周易》八卦，现代电脑，有根有据一脉相承。补天女娲，治水大禹，无规无矩难成方圆。

自古以来，我国就流传着一个神话：在最古最古的时候，天地初分混沌开，有一个人，叫做盘古。他生在天地的中间，天每天高了一丈，地也每日厚了一丈，盘古也每天长了一丈。他老是顶天立地的生活着。经过了一万八千年，天极高，地极厚，盘古也极长。

这里讲的宇宙是不断膨胀中的，速度是每日二丈。这倒和现代的“大爆炸宇宙学”有些类似，不过我们现在倒不必去谈天体物理，还是看看这里的数学：一万八千年后，天长高多少？地长厚多少？这是个很简单的计算。天高暂且不论，地厚就是 18000 丈，合 6000 千米左右，这不正是地球的半径吗！

像这样的创世神话，全世界各民族都有。

《圣经》中说，大初的时候，地上全是水，无边无际，水面上空虚混沌，暗淡无光。上帝说：“要有光！”这样就有了白天和夜晚。第二天，上帝说：“要有穹窿！”于是就有了穹窿。上帝称穹窿为天。

上帝如此这般辛苦工作了六天，天上就有了日月星辰，地上就有了万物生长，还造出了人类的始祖——亚当、夏娃。

看来，中国的盘古要比西方的上帝悠久得多，光开天辟地就用了一万八千年，远远超了纪录。

不知是不是咱中国人在很久很久以前，数学比他们学得好，早就知道了很大很大的数？

也许有人要笑：一万八千算个什么大数啊！咱小学二三年级的小娃娃，哪一个不是十万百万地朝大了说，几亿几亿地往本上写？请不要着急，且容我细细道来。

且说在一个原始部落里，有两位智者，很受大家尊重，经常充当咨询顾问一类的角色。但他们之间却往往互不服气，于是决定在部落大会上搞一次智力竞赛。比赛的题目很单纯：谁说出的数大，谁就赢。

比赛开始了。甲先说出：“一。”

乙看了看甲，想了半天说出个数：“二。”

这回轮到甲再伤脑筋了。他拍了一会儿脑门，突然高兴地大声说：“三！”

发言权又转到乙的手上。他绞尽脑汁，最后不得不沮丧地对甲说：“你赢了。”

这个故事多少有些挖苦人，似乎只能算笑话，但却千真万确是原始社会对数的认识的一种写照。探险考古队员在本世纪到达某些原始部落中发现，那里的人确实只能说出简单有限的几个数，最大的数不超过 5。

这样看来，现在的小娃娃要比原始时代的智者强得多。他们从呀呀学语开始，首先就分清了“一”和“许多”。随后就慢慢能扳着手指数出“一、二、三”来。到了两三岁，差不多就能数到“十”了。小学三年级就基本完成了对自然数的认识过程。

这么个认识数的过程和整个人类认识数的过程是基本一致的，只不过时间大大缩短了。这倒很像小娃娃在他母亲的肚子里孕育的情况，从头到尾重复了一遍生命从低级到高级的各个阶段，十分有趣而又十分令我们深思。

可以说，世界上无论那个民族，在最初的原始阶段，那几下蹒跚学步，应该是基本一样的。

人类在最原始的时代首先分清的也是一和许多。随着社会逐步进化，人们当然需要更多的数和对数的认识。一个部落必须知道它有多少成员、有多少敌人；一个人也感到需要知道他羊群里的羊有没有少了。

或许最早的计数方法是用原始人个个都有的“计算器”——手来进行。比如，数羊的只数时，每数一只羊就扳一个手指头，这就叫做“屈指可数”。

当然也可能用的是小石子来进行数数。英语 Calculus（计算）一词，原来的含义就是小石头块。北美印地安人直到前不久还有用小石头块计数的。

切不可小瞧这么一种方法！这样一种方法实际上不就是我们常说的“一一对应”嘛！把羊群里的羊一只一只地和一块一块石头逐一对应起来，或者逐一扳下手指头，这就是所谓一一对应。这样，石头子有多少（或者手指头有多少），羊就有多少。

这种方法虽然历史古远，平平常常，大家好像也并不陌生，但真要用好用活，得出精髓，却真正能做出一篇轰轰烈烈的大文章。上世纪末本世纪初，就有这么一位奇才，将此法用得出神入化，鬼斧神工，给数学史上平添一道炫目之光。这是后话，暂且放下不提。

“识”了数，还需要“记”。我们的先民为了探索记数之法，走过了一段漫长的道路。

说到“记”，不免要多说几句。所谓“记”，就是把一些信息用一定的方式在载体上留下痕迹，留下记号，并且能使群体中的成员了解其记的意义，解读出原来的信息。

“记”的载体可以多种多样。从古代的绳、石、手指，到后来的甲骨青铜，绢帛竹简，一直到四大发明中的纸张的出现，再至现代的音碟光碟，电脑中的内存外存，软驱硬盘，林林总总，数不胜数。小孩子在树干上划个刻痕，标下身高，是“记”；做间谍的在窗台上放盆花，告诉同伙：安全如故，亦是“记”，周幽王烽火戏诸侯，乱“记”一通，丢了周朝八百年江山；秦始皇焚书坑儒，毁“记”一旦。一部人类的文明史，实在是“记”的历史，是“记”的发展史。

那么，先民又是如何开始记数的呢？

最早，当然是用语音这种载体。但一开始，对于两只羊和两个人所用的语音（词）是不同的——尽管他们都是两个。例如，在英语中有 teamofhorses（共同拉车、拉犁的两匹马）,yokeofoxen(共轭的两头牛),braceofpartridge（一对鹧鸪），Pairofshoes（一双鞋）。你看，这里都有 2 这个数，但在不同的对象中有不同的说法。把 2 这种共同性质加以抽象，并采用与任何具体事物都无关的某个语音来代表它，或许在很长时间以后才实现的。我们现在用的数词，起初很可能是指一些具体事物的，但是二者之间的这种关系，我们现在都不知道了。现在的数词，是有相同数目的各类事物，它们所具有的共同性质的一个抽象表示。因此我们可以说，数学在它的萌芽状态，就有了抽象性这么个特点。

用语音作载体，毕竟有个很大的弱点：它太容易消失了，不太牢靠，不

太稳定，有时还会产生不同的理解。怎么办呢？先民们就用当时能有的材料，当时能有的条件进行着创造。

能用的材料当然首先是身边的一些物体，比如小石块啦，贝壳啦，等等。但随后最普遍的，恐怕就是结绳这种方法了。在没有文字以前，人们大都用这种方法记数，记事。春秋时期的古书《易经》上有“上古结绳而治”的记载。结绳记数最迟在新石器时代早期（约 8000 年前）就普遍使用了。

结绳记数这种方法，不但在远古时候使用，而且一直在某些民族中沿用下来。宋朝人在一本书中说：“鞑靼无文字，每调发军马，即结草为约，使人传达，急于星火。”这是用结草来调发军马，传达要调的人数呢！其他如藏族、彝族等，虽都有文字，但在一般不识字的人中间都还长期使用这种方法。中央民族大学就收藏着一副高山族的结绳，由两条绳组成：每条上有两个结，再把两条绳结在一起。

有趣的是，不但我们东方有过结绳，西方也结过绳。看样子，咱们这个星球早就像个地球村了，只不过那时还没有电报电话。传说古波斯王有一次打仗，命令手下兵马守一座桥，要守 60 天。为了让将士们不少守一天也不多守一天，波斯王用一根长长的皮条，把上面系了 60 个扣。他对守桥的官兵们说：“我走后你们一天解一个扣，什么时候解完了，你们就可以回家了。”

回头我们再来看一件有趣的事情。在我国古代的甲骨文中，数学的“数”，它的右边表示一只右手，左边则是一根打了许多绳结的木棍：——“数”者，图结绳而记之也。所以，数学研究所的门口，最好用木棍打几个绳结作标“记”，连招牌都不用挂了。

和结绳几乎同时或者稍后的一种记数方法，要算是书契了。书契，就是刻、划，在竹、木、龟甲或者骨头、泥版上留下刻痕，留下“记”号。《释名》一书中说：“契，刻也，刻识其数也。”意思是在某种物件上刻划一些符号，以记数。

我们国家 1974 年在青海乐都县发掘的原始社会末期的墓葬中，发现了 49 枚骨片，大小形状都差不多，是与小孩的小手指差不多大小，但很薄的一个长方形。在骨片的中部两侧有刻口，有的带 3 个刻口，有的带 5 个刻口，不少是带一个刻口的。如果一个刻口代表一个数的话，那么这 40 多枚骨片大约可表达从一到五六十间的任何一个自然数。当然，这些小骨片也可用来计算。十分有趣的是，公元 1937 年，人们在维斯托尼斯发现了一根四十万年前的骨头，是狼崽子的小腿骨，七吋长，上面有 55 道深痕。这是到现在为止，最早的刻痕记数的历史见证。所以今后诸位如果在荒郊野地里捡得几片骨片，可千万要仔细，莫错过了当一次业余考古家的机会。

随着刻痕刻印的发展，渐渐地就出现了纯粹的数字符号。这可是一项光辉伟大的成就。

说到最初的记数符号，不禁又想起了另一个笑话。

从前有个土老财，目不识丁，于是请了个先生教他儿子读书。

先生来了，先教财主儿子描红。描一笔，先生就数道“这是‘一’字”；描两笔，先生便教道“这是‘二’字”；描三笔，先生又教道“这是‘三’字”。

“三”字刚写完，财主儿子便哈哈大笑，蹦着跳着去找他爹，连声说：“太容易了，太容易了，字我已经都会识了，不用请先生了。”土财主自然很高兴，辞了先生更省了钱。

不久，财主请一个叫万百千的人来喝酒，就叫儿子写请帖。不料过了许久，仍不见儿子拿帖来，只好到书房去看看。

到得书房，只见儿子满头大汗，见面就埋怨说：“这位客人的姓名也太古怪，什么不好叫，偏叫万百千，我一早到现在忙个不息，也才描了五百多划，干脆把扫帚拿来划，来得快一点。”

可别光顾着笑话他们二位，说起来，咱们的先祖刚开始记数时，正是这么干的。

我们把世界上各个民族最早的记数符号归纳来看一看，最初的几个数差不多都一样，都是象形符号。

本世纪初发现的甲骨文，是我国文化史上的一件大事。上面的汉字约有 4500 多个，可辨认的不足 1000，当中有不少数学方面的资料。其中代表 1、2、3、4 的几个符号分别是：这是远在四千年前殷商时候的事了。

同样是远在公元前三千多年的古埃及，埃及人刻在石头上的碑文，也是象形文字，有时这些文字也写在其他材料上，比如纸草片、木头和陶器。其中代表 1、2、3、4 的分别是：

| || ||| ||||

它们都是一些垂直放着的木棒。

早期的巴比伦人，居住在幼发拉底和底格里斯两河流域，大体上就是今天的伊拉克。他们没有纸草片，恐怕乌龟壳也不多，甚至连便于刻划的石头也不容易找到，他们主要用粘土来书写。

用一支硬笔把文字压印在湿的粘土板上，硬笔的笔尖是一个锐利的等腰三角形。把硬笔稍稍倾斜，就在粘土板上印下一个楔形，然后把写好的书板晒干，使其坚硬耐久，便于长期保存。在从公元前 2000 年到公元前 200 年的楔形文字泥板上，表示 1，2，3，4 的是：

▽ ▽▽ ▽▽▽ ▽▽▽
▽ 或 ▽▽
▽▽

16 世纪初，西班牙一支探险队来到墨西哥的尤卡坦，发现了古时代玛雅人的有趣数字，这里面是这样表示 1～4 的：

. .. .

还有大家看到的罗马数字，有时在一些旧钟表上还有，那上面写的是：

I II III III或IV

你看，尽管这些世界文明的发祥地，相隔遥远，当时只能是鸡犬之声不见，老死不相往来，但还是不约而同地创造出差工不多一样的几个最初的记数符号。这也和小孩一样，不管什么民族，最早的几年大家都差不多。

接下来，我们的祖先就会遇到土财主的儿子同样的问题了。

当数目不太多时，恐怕一开始还是采取财主儿子的方法。比如“23”，就用｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜｜来表示。

把这么多的记号写成长长的没有间断的一行，阅读起来就麻烦得很，这就自然需要把它分成较小的组。

如果我们习惯于用一只手来计数的话，那么很自然地把记号分成五个一组（直到现在，还有这样的习惯：做买卖侃价时，把一只手翻上几翻）。

这样，“二十三”就可以写成||||| ||||| ||||| ||||| |||

如果我们更老练一些，用两只手同时计数的话，我们就可以把它写成 HHHHH。

如果这时同时又光着脚，把脚趾头也派上用场的话，我们又可以把数分成以二十为一组了。

你可能会说，这样还是麻烦，干脆把这成组的数再用一个新的记号来表示不就简单许多了嘛！

一点不错，咱们与老祖宗们想到一块了。而这正是进位制的开始！

古罗马人创造的符号有点像逢五进一，不过也有整十整百的符号：

Ⅰ＝“1”　　Ⅱ＝“2”　　Ⅲ＝“3”

V＝“5”　　L＝“100”　D＝“500”

X＝“10”　C＝“100”　M＝“1000”

记数时，采用的是加法和减法法则：即数值较小的符号位于数值较大的符号后头时，则两数相加；反之,则数值相减。比如：“VⅡ”表示“五加二”，即“七”；而“ⅠV”则“五减一”，也就是“四”了。

这样，1988 用罗马符号表示就是：

M C M L X X X V Ⅲ

你看，识数捎带着连加减法一块儿练了，实在太费神，如果眼睛不济再加上脑袋犯迷糊，就得全乱套。

比起罗马人来，尼罗河畔的古埃及就要先进了！比如“3224”，他们是这么写的：

■

想必大家也能破释这其中的密码：

头一个符号，代表一千，其实这是一朵莲花。

第二个符号，表示一百，这是一圈绳子。

∩，自然是十，它画的是一副脚镣。

后面的四根竖线当然就更一目了然了。

不过，埃及当时是从右到左写的，而我们这里是按照现在的习惯从左到右了。

这已经是相当方便，相当不容易了。但更值得自豪的是我们中国人的创造！早在四千年前，我国刚刚进入奴隶社会时期，就出现了相当完善的十进制记数系统。在殷商时期的甲骨文中，便有从 1 到 10 的文字表示，以及“百”、“千”、“万”等相应的符号（见下页图）：

这最后三个字，与现在的“百”、“千”、“万”的书写已十分接近了。而且那“万”字是一只蝎子，想必那时这种小爬虫多得很。

甲骨上有着不少数字记录。比如，有一片甲骨刻着“八日辛亥允戈伐二千六百五十六人”,意思是说在八日辛亥那天的一场战争中，消灭了敌方 2656 人。

像这样的资料甲骨文中还有许多，可以说已经达到当时的最高水平，领导世界新潮流。

不要把这当作笑谈，大家仔细把前面刚说过的埃及记数法看看，自然是能够明白。

在古埃及人那里，“三千”要用三朵莲花表示；两百呢，就用两圈绳子表示。多麻烦！

中国的就不一样了，有多少个“千”、“百”、“十”，就在这些单位的前面写上多少，多简单，多方便，多聪明！

再说，“二千六百五十六”，这里的“千”、“百”、“十”都是按从

大到小的顺序一溜排开，咱们就是把这些都省了，写成“ 二六五六 ”，不也是一样知道是多大嘛！古人有时也多是这么写的。只不过那些老前辈们都是竖排写字写惯了，把“ 二六五六 ”这么一竖起来，就有点不太好认了。也难怪，咱老祖宗从一开始就用竹简写书写惯了，那竹简只能是竖排。

回头咱们再说说这“ 二六五六 ”。

11

你仔细瞅瞅，这和现如今的记数方法是不是一码事？只不过现在用的是阿拉伯数字罢了。

这现在的记数方法可真算是先进，是记数这方面的一大发明。先进在什么地方呢？第一点，它只用了十个符号。这第二呢，就是有了数位的概念，比如说同一个 3，写在百位上和写在千位上，意义就不一样：一个是“三百 ”，一个是“ 三千 ”。

这么个聪明的办法现在就叫做位值记数法。

话说到这会，有些朋友可能心里还有些不踏实，总觉咱们的古人在记数时中间还要夹上一些“ 万 ”、“ 千 ”、“ 百 ”这些单位，和现在记数法毕竟不太一样。

大家放心，待往下细细一看，便知这发明位值记数法的冠军宝座，稳稳是咱中国人坐的。

且说秦始皇一统天下，倒是忙了不少事：书同文，车同轨，修长城，统一度量衡。忙得心烦意乱，就想出都城到处转转。于是就浩浩荡荡排起仪仗顺着当时的高速公路——那时叫驿道——一路游去。

这一天来到东海之滨，始皇帝初观沧海，不免大放豪迈之情，手舞足蹈，一不留神把腰里佩带的算袋失落水中。算袋就变成了乌贼鱼，所以乌贼又有算袋鱼之称。

你可知，这算袋有何用处？内装何物？

原来这算袋是一只丝质的小口袋，里面装的是算筹。

这“ 算筹 ”是些什么物件？秦始皇为什么时时要把它带在身边？其实看看这两个字的结构就能猜出个大概了。

筹，是竹字头，就是一般粗细、一般长短的小竹棍。黄河流域一带当时是茂林修竹，竹子多得很，所以我们的祖先写字用竹简，吃饭用竹筷——古时叫“ 箸 ”，又是竹字头。

那么，这算筹又是干什么用的呢？就是用来计算的。那时没有纸张，古人们就用这些小竹棍摆成不同的行列，表示不同的数，进行计算。

《说文解字》中有这样的话：“ 筭长六寸，计历数者，从竹，从弄。言常弄乃不误也。 ”

这“ 筭 ”，是算的古代写法，竹字头，下面一个弄字。弄，就是运算，你看，多像把一些算筹摆在地上进行计算的情况。

算筹起源于周朝，后来运用了很长时间。所谓“ 决胜千里之外，运筹帷幄之间 ”，就更有了计划、指挥的意思啦！直到现在咱们还常说“ 请仔细筹划一番 ”，这根源就都起于算筹。

这算筹起先是用竹子做成，《汉书》上说长六寸，径一分。古时候尺小一些，大约合现在 14 厘米左右。后来看看不行了，摆一个算式要用好大面积，就逐渐缩短了。这形状呢，也有了改变。一开始是圆柱状的，会乱滚，后来就有了方的，三棱形的等等。算筹的材料也来了个百花齐放，有骨制的，木

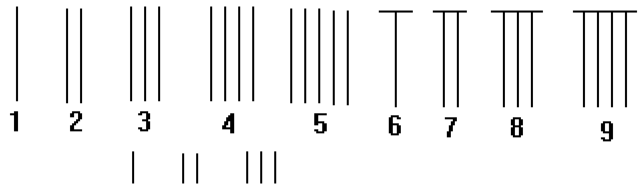
制的。不过，就是秦始皇，恐怕也不会用金做的。你想想，把那金做的沉甸甸的一大把放在算袋里，挂在腰上，多累人！

大家看到此处可能会小吃一惊：皇帝还要亲自计算？是的，那时不但搞天文历法的要用算筹，就是一般的文武大臣，腰里都佩着一个算袋。而且是法律规定，不佩不行。上朝的时候，皇上问你话，说不定要叫你把算筹拿出来，当面算算帐。那时的知识分子士大夫阶级，腰里佩个算袋，可是个时髦玩意儿。

要用筹来算，首先必须能用“筹”把数摆出来。一开始，是这么摆放的：

古人写字是从上到下，竖排。而这摆数，就是从左到右了。

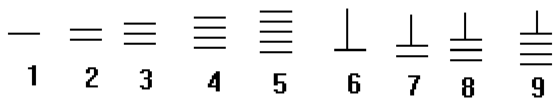
那么现在摆一个 l、2、3，看看如何：



这一看，毛病就出来了。

几根竖放的棍子摆放在一起，数位与数位之间很容易搞乱。中间的间隔一乱，就难以说清是 1、2、3，还是 2、l、3，还是 1、5……

怎么办呢？“山人自有妙计”。古人除了上面提到的摆法（叫纵式）以外，还有一种横式摆法：



这样一来，就好办了，相邻数位纵横交错摆放。古人有这么个说法：“凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当。”

就是说个位以纵式表示，十位以横划表示。百位是纵的（“立”），而千位则是横的（“僵”）；这样，千位和十位看起来是相同的，万位和百位也是如此。

那么现在摆起来就不会乱了。比如，6614 这个四位数用算筹表示是：⊥　⊤　一　||||遇到某位数是零的时候，最早的方法是不放算筹，让它空位。比如 86021，就这么摆：

𝍧　⊥　=|

后来才改用圆圈（0）来表示：

𝍧　⊥　○　=　|

现在咱们可以很放心地说一句：这位值记数法咱中国人早就发明、早就用上了。这块金牌非我莫属。

这种位值记数再加上十进制，就叫做十进制的位值记数法。

说到进制，大家都还记得前边给大伙说过的五进制、二十进制。

五进制就是逢五进一，最初用得很广泛，直到现在，一些南美部落还是用手计数——“1，2，3，4，手，手和 1”，等等。

而玛雅人则是以二十进制为计数原则。这恐怕是因为玛雅人鞋子发明得太晚了。不过，格陵兰人也有这种进制的痕迹：它们用“一个人”代表 20，“两个人”代表 40。

其实，逢几进一里的这个“几”，除了一以外，随便什么自然数都成。

这里面一要看当时的环境，二要看实际需要。这个话题很长。

上古时候中国野兽很多，黄河里面的水族，尤其千奇百怪无所不有。其中有一种类似河马的动物，身上有黑白相间的花纹，也常常随波上下。

有位智者伏羲氏，偶然在晴朗天气到河边观赏，看见这马上的花纹陆离斑驳，黑自分明，心中忽然有感。自从做了部族首领，常常为内政外交许多事操心，又无法记忆计算。用打绳子结来记事吧，也不够用了。他便模仿这兽身上的黑白长短条纹，创造了两种长短线条，互相配搭，成了八个不同样子的记号，用来代表一些事物，名为“ 八卦 ”。

后来黄河里这种兽绝迹不见了（恐怕是没划野生动物保护区），后人便认为马是不会生在河里，除非是龙马；马身上不会有花纹，除非背上驮了什么图。这就是所谓“ 河图 ”的来由。再传下去，就又有了洛水里出现的一只神龟，背负“ 洛书 ”，这就叫“ 河出图，洛出书，圣人则之 ”。也就是说圣人伏羲根据“ 河图洛书 ”，画成八卦，这就是《周易》（也就是《易经》）的来源。

《周易》的研究现在可是个大热门，感兴趣的人、赶热闹的人都不少。不过我们现在只单单说一说“ 八卦 ”的组成。

这古圣人认为，世上万事万物归根结蒂是由阴阳两种基本元素构成的，就把它们画成两种卦爻（念 yáo），一阳一阴，阳爻为“ —— ”，阴爻为“ — — ”。

把阳爻和阴爻每次取两个排列，就成四象：

⚌ ⚍ ⚎ ⚏

每次取三个呢，就有了八种不同的排列，就叫八卦了：

☰ ☷ ☳ ☶ ☲ ☵ ☱ ☴

八卦代表不同的八种基本自然物：乾为天，坤为地；巽为风，震为雷；坎为水，离为火；艮为山，兑为泽。

四对物质两两相对，相反相成，即所谓天地、风雷、水火、山泽，表示的符号也正好是相反的。

德国数学家莱布尼兹（1646—1716），几千年后看到八卦大吃一惊：想不到自家辛辛苦苦多少年创造出来的二进制，竟让中国人大大抢先一步！

为何有此一说呢？因为二进制就是“ 逢二进一 ”。十进制，“ 逢十进一 ”，只要用到 0～9 十个数码，所以“ 二进制 ”，就只要用 0、1 两个数码，多一个都不要。因为你要表示 2，就需要在高一位上用“ l ”表示，逢二进一嘛。

比如说“ 二 ”，写成二进制数就是：10；“ 三 ”呢，就写成：11；“ 四 ”在二进制里就表示成 100。

莱布尼茨老先生把“ —— ”（阳爻）看作 1，阴爻“ — — ”当作 0，这样一来，八卦就是二进制数了：

八卦：☷ ☳ ☵ ☱ ☶ ☲ ☴ ☰

卦名：坤 震 坎 兑 艮 离 巽 乾

二进制码：000 001 010 011 100 101 110 111

十进制码：0 1 2 3 4 5 6 7

后来周文王姬昌被有名的暴君纣王拘押在羑里地方，他倒不显得着急，而是用心研究起伏羲氏的卦来，演成六十四卦。这就是现在的《周易》。太史公所谓“ 文王厄而演周易 ”，就是讲周文王在羑里遭受困厄，反而成就了一番学问，发展八卦成六十四卦。相信朋友们现在也能依次写出这六十四个

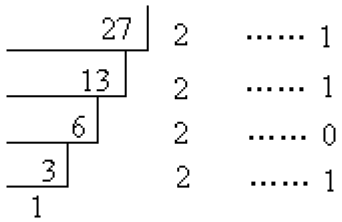
二进制数，再对照一下六十四卦，倒也不失为一件有趣的事。

这里我们想给大伙提供点帮助，看看如何写出一个二进制数。

比方说“ 二十七 ”这个数，因为它含有十三个二，再加上一个一，所以在“ 个 ”位上就可以写上“ l ”，而在上一位（右边第二位）就可以暂且写上“ 13 ”。

不过这“ 13 ”还要继续往前进，因为“ 13 ”比二大得多。所以我们看看“ 13 ”里有几个二，就向前进几（向右边第三位）。用除法一除，可以知道“ 13 ”里有六个二，还多一个一，这样第二位就写“ 1 ”，而第三位可暂时写上“ 6 ”。

下面对“ 6 ”就可以如法炮制了。用算式表示可以看得更清楚：



最后一次除，商是 1，不能再被 2 除了，所以最高位就是“ 1 ”（即第五位，从右数）。其余各位依次取余数。

这样“ 二十七 ”写成二进制数就是 11011。

大家可以看到，这办法的主要原则就是不断除以二，叫做“ 除二取余 ”。

而且我们也能清楚，这二进制各个数位的单位依次是：

……2^6，2^5，2^4，2^3，2^2，2^1，1

就好像十进制各数位是：……10^6，10^5，10^4，10^3，10^2，10，1

二进制数位的单位弄清楚了，把二进制数化成十进制数也就容易了。

不过，同一个数，用二进制表示就长得多了。比方上面所说的“ 二十七 ”，用十进制表示是两位，用二进制表示就是五位。而且数越大，位数增加得越快。

所以在 17 世纪莱布尼茨老先生那会儿，这二进制倒未见得有什么风光。一直到本世纪中间，这二进制忽然大红大紫，风头十足，原因何在呢？说起来很简单，也只是时势二字罢了。

原来在 20 世纪中叶，发生了一场轰轰烈烈、至今仍方兴未艾的大革命：计算机革命。

这计算机中的逻辑电路都是由开关型的电子器件构成，它们只有两种状态：“ 开 ”和“ 关 ”。

这样的两种状态的器件一是比较可靠，二是实现比较容易。所以我们就用“ 开 ”表示“ l ”，用“ 关 ”表示“ 0 ”，其他数码就不能表示了，这样就必须用二进制记数法来表示数。

再者，咱们通常进行逻辑推理，常喜欢说：“‘ 是 ’就是‘ 是 ’，‘ 非 ’就是‘ 非 ”’。也就是在下判断的时候，对就是对，错就是错，没什么含糊。

这就是所谓“ 二值逻辑 ”。“ 对 ”，可以用“ 1 ”来表示；“ 错 ”，可以用“ 0 ”表示。许许多多的命题以及命题之间的关系，都能用一个数学式子和数学式子的演算来实现，而这些演算都是用二进制记数的。

因此，电脑在本世纪 40 年代的发明，必然使二进制风云一时。

话说到这会儿，这二进制咱们聊得也差不多了。不过，有时它还是使人

有些不习惯，不明白。其实，这二进制不但老早中国就有，现在全球风行，就是澳洲的一些原始部落里还从古到今一直用到现在呢！

兴许是识数太少的原由，所以澳洲东部昆士兰的土人是这么计数的：“1，2，2 和 1，两个 2，多多。”您瞧，这不就是用了“逢二进一”吗？只不过数到 4 就停下来了。

阿根廷火地岛的一个部落，用的是所谓“逢三进一”，三进制；而南美的一些部落则是用四进制。

这里的“二”、“三”、“四”，我们就把它叫做计数的“基”。

前面谈过五进制，它的基就是五。是古代用得很广泛的记数法。而现在最常用的十进制，基就是十了。

也难怪，谁让咱们人类都长着五个手指头呢？要是女娲造人多捏了一个手指头，现在流行的可就不是十进制了。

还有一种大家都知道一点的，就是以 12 为计数的基。

咱们都了解，一打（dozen）是 12 个，一箩（gross）是 12 打。这些都是英国人常用的。古代的一英磅是 12 盎斯，1 先令是 12 便士，1 英寸是 12 英分，l 英尺是 12 英寸。

这也许是由于一年大约有 12 个朔望月；也可能是因为 12 能被许多整数整除。

二十进制就是 20 为基的记数法，曾被广泛应用，它使人想起人类的赤脚时代。这种记数法，曾由美洲印第安人使用过，在高度发达的玛雅文化中更有完整的表现。

就是在欧洲各国的语言中，也能发现这种进位制的痕迹。法语中常用四个 20 代替 80，用四个 20 加 10 代替 90；格陵兰人则用“一个人”代表 20，“两个人”代表 40，英国人也常常用 csore（20）这个字。

而以巴比伦古代那会儿，就是以六十进位制为主了。直到现在，咱们计算时间，计算角度，也还是这么用着。

咱们中国虽然是以十进制为主流，不过也还有其他的一些。比如，咱们古代记时辰，也是分一天为 12 个时辰。

这记时用的 12 个字分别就是：

子、丑、寅、卯、辰、巳、午、未、申、酉、戌、亥。

这十二个字就叫“地支”。

夜里 11 点到 1 点，就叫子时，每个时辰合现在两个小时。依次类推，就能出丑时、寅时、卯时等等。哪位同学有兴趣，也不妨算一算，自己是何“时”出生的。

亥时一过，新的一天又开始了，就又是新子时。这 12 个字循环往复，轮回使用，正反映了一种周而复始的现象，一种周期性的运动。

不过，它也可以看作是“逢十二进一”，是一种十二进制记数法。

可能有人会说，这“逢十二进一”，进的那高一位的“数”在哪呢？

这里给大家打个比方。比如说有一块自动日历表，那么每到夜里 12 点（也就是“子夜”）就会咔嚓一声，日历框里换了个新的日子。而时间呢，依然是从 0 点开始重新往前去。您看，这新的一天不就等于往前进的一位吗？

不过我国古代最早是把一日分为百刻，是用十干来记时。后来才把一日分为 12 辰，用地支（12 支）来表示。

十干，也就是平常所说的天干，一共有 10 个字：

甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸。

魏晋时还有“甲夜、乙夜、丙夜、丁夜、戊夜”的说法，就相当于后世的一更、二更、三更、四更、五更。这就说明了记时是用过天干的，因为一日百刻，甩十干比较方便。

那么记日又怎么办呢？早在夏代，就用甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛、壬、癸这 10 个字来记日。

不过，大家也可以看出来，这种词法十天一轮换，太短，容易把日子弄混了。

后来，人们就想了个办法，把天干的 10 个和地支的 12 个字配合起来，依次组合，比如“甲子”，“乙丑”，“丙寅”，“丁卯”，等等。

有心人动手亲自这么一搭配，就会发现点小问题：

天干只有 10 字，而地支有 12 个字，等到天干的最后一个字“癸”和地支中的第 10 个字“酉”搭配成“癸酉”后，天干的 10 个字已经用完了，地支还余两个字“戌”，“亥”。

怎么办呢？就把天干 10 个字依次重新再使用，配合成“甲戌”,“乙亥”,“丙子”，“丁丑”，等等。以后不管是“干”，还是“支”，用到最后一个字了，就都这么从头循环使用。

那么，这么一搭配，会出现多少个不同的情况呢？什么时候再出现一开头的“甲子”呢？

这个问题倒也不复杂，是个求最小公倍数的问题：10 和 12 的最小公倍数是 60。

因此，上面的正确答案就是 60，共能配合成六十组，循环使用，就叫做“六十甲子”。

这种干支搭配最早是用来记日的，殷商武乙时期（约公元前 13 世纪）的一块牛胛骨上，就刻有完整的六十甲子。

后来到了东汉建武三十年（公元 54 年），就开始用来记年了。直到现在，咱们中国的日历上，还有这种记年方法。这记年，也是 60 年一轮换，所以叫“六十花甲子”。因此，如果一个人一辈子遇到两个甲子年，或者是其他两个相同名称的农历记年，那他肯定超过了六十花甲。

不用我说，大伙也明白，这六十次一轮回，当然也可以看作是“六十进位制”。

所以，我国的记数方法是既很先进，又很丰富。既有占有主导地位、在全球发明最早的十进制位值记数法，又有沿用至今的“二进制”、“十二进制”、“六十进制”等等其他记数法。真可谓源远而流长，历久而弥新。

这盘古开天地，天高地厚的答案，古人总算给了我们一个交代。顺理成章，老祖宗随后自然而然要问天，问地，问自己，这天像什么物体？地是什么形状？

让咱们看看周公和商高的一席话，便知究竟。

这周公是周武王之弟，名旦，是一位很有本事、很有贤德的人。武王死后，其子尚小，就由周公摄政，主持一切。

周公旦礼贤下士，甚至于“一沐三握发，一饭三吐哺”。也就是说他勤于接待，洗发时三次握着头发停下来不洗，吃饭时三次吐出食物，急忙迎客，殷勤待士。这就是所谓“握发吐哺”的来历了。

话说这高商亦是当时的一位算学大家，“高级知识分子”。周公也经常

和他讲论算学。这一天周公与商高又见了面，行一番“吐、握”之事，彼此按周礼躬让一阵，就开了讲。

周公很虚心地向商高请教：“我听说，大夫很精通数的艺术。是不是请您谈谈，古代伏羲是怎样确定天球的度数的？天是没有一种梯子能登攀得上的，地也无法用尺子来测量。因此我很想问问您，这些数字是从哪里来的？”

商高施了一礼，回答说：“数的艺术是从圆形和方形开始的。圆形出自方形，而方形则是用矩（带边的丁字尺）作出来的。而矩的制作出于‘九九’乘法表。一个矩形沿对角线对折起来，如果勾长三单位，股长四单位，那么弦长一定是五单位。昔日大禹治水，就是用这样一些方法。”

周公听了很感叹，又接着说道：“数这门艺术真是了不起啊！我想再请教应用矩的道理。”

这里的矩，是一种工具，所谓“不以规矩，不成方圆”，有点像现在的丁字尺。

商高一听到这话题，更来了劲，不由得侃侃道来：

“把矩平放在地上，可以用绳子设计出平直的和方形的工程。把矩竖立起来，可以测量高度。倒立的矩可用来测量深浅，而平放的矩则可用测出距离。

“让矩旋转，可以画出圆形；把几个矩合在一起，可以得到正方形和长方形。”

接着，他又谈到了天和地：

“方形属于地，而圆形则属于天，所以天是圆的，而地则是方的。方形的数是标准，从方形的数可以推出圆形的大小来。

“天像一个笠子。天的颜色是蓝的和黑的，地的颜色是黄的和红的。可以用一个按照天的数制成的圆盘来表示天，朝上的一面像外表面一样，是蓝色和黑色的；朝下的一面像内表面一样，是红色和黄色的。这就是天和地的形象再现出来了。”

商高随后又发表了一番议论：“对地有所了解的人是聪明人，而对天有所了解的人则是圣人。‘矩’和‘数’结合起来，就是指导和统治万物的东西。”

周公听得都入了迷，隔了好一会才回过神来，不由得感慨地说：“这确实是太妙了。”

这一段记在《骨髀算经》上的故事，大约已经有三千年左右了。这说明人们很早就认识了几何图形。最早认识的，就是正方形和圆形。而且在周朝以前，就有了车辆，所以当时不但认识了圆，而且能造出圆。

这商高确实了不起！他不但认识到勾三股四弦五，而且还是个天文学家，有了天圆地方、天像个笠子盖在地上这样一种初步认识。古代的许许多多数和形的知识就是从天文观察和测量中得来的；古时许多天文学家就是数学家，而数学家又同时是天文学家。

商高大夫还提到大禹的事。其实，太史公司马迁也说过，夏禹治水时，是“左准绳，右规矩”。

你瞧瞧，咱们这位禹王爷不但运筹帷幄、指挥策划，而且还是位高级水利工程师，左手拿着水准工具和绳子，右手带着规和矩去测量放线。真是事必躬亲，身体力行。

不过，战国的一位学者，把这规与矩的发明推得更早：“古者，倕为规、

矩、准、绳，使天下仿焉。”

这“倕”，是传说中距今四千五百年黄帝时的能工巧匠。

不管怎么说，反正人们对这方面的认识是够早够远够先进的了。而所有这些发现、发明，也都是与生产的不断发展，文明的不断进步、一代一代人的不断继承紧密联系的。

比如说，20 年前在湖北，发现了一批几十万年前的旧石器。其中的“石核”，就是经过人工打击而成的球状石器。古人正是从这样一些活动中，逐渐形成了几何观念。

而六七千年前古人所做的陶器，更有许多的类型，有尖底瓶、筒状的器皿、盘、大小不等的球、纺轮，等等。这说明那时已具有了圆、球、圆柱、圆台、同心圆等等几何观念。

读者如假日有空，倒真可以到西安半坡、山东大汶口这样一些遗址去看看，凭吊一番先民们的丰功伟绩，艺术修养。那陶器上的几何图案确实描画得简练生动，抽象概括，而且有着很好的对称美，倒不是今天的每一个人都能画出来做出来的。

咱们华夏的先民们在黄河两岸创造着这一切，那两河流域的巴比伦人和尼罗河畔的埃及人，也同样勤劳辛苦，发展着自己的文明。

且说埃及位于非洲东北部，东临红海，北濒地中海，西南是浩瀚无垠的撒哈拉大沙漠。如果不是尼罗河从北向南贯穿它的全境，埃及早就成了寸草不生的沙漠了。难怪古希腊历史学家希罗多德把埃及称为“尼罗河的赠礼”。

尼罗河是埃及人的生命源泉。他们靠耕种尼罗河每年泛滥的淤土所覆盖的田地谋生。肥沃的淤泥给他们带来了丰收，同时也需要他们要有丰富的天文知识，预报洪水到来的日期。

泛滥后的土地年年要重新划界，需要测量，需要计算，需要工具。这样，初步的几何认识就在劳动中产生了。

有关尼罗河的文明，人们知道得很早。在很长一段时期内，埃及一直是西方研究古代历史最丰富的宝库。

说起这其中的原因，倒有点是歪打正着。埃及的法老们生前为了扬威，修建了不少庙宇；死了以后呢，更是大造坟墓，这就给后世留下了许多极其丰富多彩的壁画和雕刻。

再说，尼罗河两岸气候异常干燥，他们留下来的许多纸草片，也就不会腐烂。要知道，这纸草片可就是那古埃及人的百科全书，记下了他们的文明和创造呢！

古埃及人的纸草片就这样留传下来。而西方人也一直认为那里的数学起源最早，最先进。一直到上个世纪，考古学家们在两河流域挖出了五十万块刻着文字的粘土书板，这才大吃一惊，想不到巴比伦人的数字，水平更高，也更独特。

这正所谓：山外有山，天外有天。

欲知后事如何，且听下回分解。

第二回　甲骨泥版　共创数学纪元
竹简纸草　同著算术春秋

一块古巴比伦泥版上刻满了毕氏三数，可惜残缺不全，留下千古之谜。中国的陈子胆子倒确实不小，居然测量起太阳的直径，用的仅是根竹竿！埃及的神庙，夏至时阳光能直射神像，善男信女惊异不已。

且说这西方学界，一直认为埃及的古代数学是希腊文明繁荣之前，水平最拔尖的，待到巴比伦的泥版问世，方知更技高一筹；更不需说他们对古华夏的数学成就一无所知了。这里先谈一番巴比伦。

这巴比伦人居住在美索不达米亚。“美索不达亚”是古希腊语，意思是两河之间的地方。这两条河就是底格里斯河和幼发拉底河。

两河流域最早的文明大约至少有六千多年了。这块地方大致以今天的巴格达城为界，分为南北两部。北部以古亚述城为中心，称为西里西亚；南部以巴比伦城为中心，称为巴比伦尼亚。各个民族居住在一些独立的城邑中。

这南部主要有苏美尔人、阿卡德人。美索不达米亚文明最初就是苏美尔人创造出来的。

苏美尔人几乎和埃及人同时发明了文字。这就是大名鼎鼎的楔形文字了。

上个世纪开始，考古学家们在美索不达米亚进行大规模的发掘。

这里的房屋几乎一直都是有土坯盖起来的，有点像北方的干打垒。下一次大雨自然要冲毁一些，就在旧屋子上面又造新屋。这样盖了塌，塌了盖，最后就形成了一个个土丘。把这些个土丘直直地挖下去，就会看到这个城市从古到今一层一层地分得很清楚，真好像一块历史的千层饼。

考古学家们在这块千层饼里细剔细筛，发现了五十万块写有文字的粘土书板，仅仅在古代尼普尔这个地方就出土了五万块！

许多的国家，许多的博物馆、文物馆，那是闻风而动，千方百计各种途径，收藏这些珍贵的文物。有时，同一块泥版会分成几块，藏在不同的博物馆里。

这些泥版有大有小。大的呢，也就和教科书差不多，小的只有巴掌那么大吧。有时书板的一面有字，有时又是两面都有字。想必做这样一本书也不容易，要节约用纸。

现在流传问世的，大约有三四百块和数学有关的泥版和一些碎片。

泥版上没有什么年代的记号，学者只能根据它们在千层饼中的位置来推断啦。他们发现，大部分泥版是在 3000 年以前的若干世纪内制作的，前后延续有 2000 年左右。还有一小部分是公元前 600 年到公元 300 年间制作的。

这两部分之间留下了很大的一段空档，正是巴比伦历史上的一个动乱时期。

看来，巴比伦的数学创立得十分迅速。而在这短暂的迅速发展之后，接下来的却是长时期的停滞不前。

要想破译这泥版的内容，可就比断定它们的年代更难啦。一直到 1935 年，经过诺伊格尔和吐娄——当兰的著名发现，人们才了解了不少数学书板上的内容。

许多早期的书板，都是有关田地转让的计算。还有不少是一些契约文书，

像帐单、收条啦、期票啦、卖货的单据、商号和帐目等等。

巴比伦人的计算倒是挺有意思，是借助各种各样的表来实现的。在数学泥版中，大约有 200 块是表，有乘法表，倒数表，平方表和立方表，甚至还有指数表。

接下来，咱们拿一块巴比伦泥版来试看破译一下，和大伙一起暂时当一次考古研究者。当然，现在我们早已就知道一些谜底了，猜起来可就要比那些先驱者容易多了。

我们现在看到的就是一块古代巴比伦泥版了（见下页图）。正确点说，是它的一个复制品。左面是正面，右面是反面，两面都刻有字。

首先我们数一数行数，一共有 24 行。每一面呢，都有两列，我们把它分别叫做第Ⅰ列（左边的）和第Ⅱ列。

现在我们从第 1 列开始正式考察。

它的第一行是一个垂直的楔形，我们把它叫“直楔”。第二行就是两个直楔了。第三行呢，是三个。其实这些记号咱们都碰过面，就是没碰过面大家也能猜出来：不就是 1、2、3 嘛！

顺下来的几行也很容易，就是从 4 到 9，只要数一数直楔的个数就成了。不过大家看到它们有时是三个一组的，这么一来就更容易读了。比如 8，写成三层，两层各有三个直楔，一层有两个，一眼望过去，就知道是多少。这开头的九行倒很顺利，咱们破译初步成功。

再往下看，到 9 后面，我们发现了一个新记号：“■”，我们把它叫做“角楔”。

我们当然首先想到这应该是 10，不过还要谨慎一些，看看能不能往下顺。如果在下面的几行中把它看作 10 也正确，那么猜想就对了。

接下去的几行确实令人很高兴，没费周折，我们可以认出 11，12，13，……，18。再往下应该是 19，从规律和书写的情况来看，肯定是 19，只不过有一些涂改的痕迹，可能是这位巴比伦人写得有点不耐烦了，笔划太多。

再往下也没什么难懂得的，是 20，30，40 和 50。

这么一来，我们就破译出第Ⅰ列，这一列顺序写出了 1 到 20，然后是 30，40，50。直楔代表 l，而一个角楔代表 10。

现在咱们要扩大战果，把我们的发现用到第Ⅱ列上。

开头的几行当然畅行无阻，是 9，18，27，36，45，54。咱们把它们和第Ⅰ列中同一行的数一联系，窍门就看出来了，这不就是九的乘法表嘛！

再往下，第七行、第八行当然应该是 63 和 72。但是第七行写的是：

▽ ▽▽▽

那右边一块堆的三个直楔自然是 3，那么 60 又在哪呢？好像把最左边的那个大一点的直楔认作是 60 才妥当。

这样看来，同样都是直楔，放的位置不同，表示的数也不一样；这正是前面说过的位值记数法。不过咱们在这向左移一移，不是变成 10，而是 60 了！这是不是“逢六十进一”呢？

这泥版上的 63，我们用现在的符号写一下，就是 1，3＝１×60＋3＝63。

记住，我们这里用逗号把两个数符分开，表示两个数位。就像十进制中的个位和十位一样。只不过“个”位的单位当然是１，这里的“十”位的单位可就是 60 了。

下面可就势如破竹了，咱们可以把它们改写成：

l，12＝1×60＋12＝72；

1，21＝1×60＋21＝81；

1，30＝90；1，39＝99；

l，48＝90；1，57＝117。

所有这一切都说明咱们一开始就猜对了；这块泥块果然是九的乘法表。

下面第 14 行，是▽ ▽ ▽▽▽ ▽▽▽。

咱们当然把它改写为 2，6＝2×60＋6＝126，这 126，不就是 14 乘以 9 的答案嘛！

以下的几行当然不难改写成：

2，15＝2×60＋15＝135，

2，24＝144，

2，33＝153，

2，42＝162，

2，5l＝171。

值得注意的是，我们需要把逗号右边的那些数，比如 15 啦，24 啦，33 啦等等，看作是一位数！是巴比伦人用的六十用制中的个位数。尽管这里用十进制表示出来是两位，但在六十进制中，是一位，是用一个完整的独立的符号表示的。

所以，六十进制中记数的符号一共要有从 0 到 59 这六十个符号。而十进制位值记数法，则是用从 0 到 9 这十个符号。

不难理解，b 进制记数法就应该用从 0 到 b—1 这 b 个记数符号。比如现在电脑中常用的二进制，只用 0，l 这两个符号。十六进制也是电脑中常用的记数法。只用 0 到 9 这十个符号就不够了，所以又添了 A、B、C、D、E、F 这六个符号表示 10 到 15 这六个数。因为这六个数还不够资格向前进位，只能在低一位上用一个符号表示出来。

比如 15，十六进制中就写成 F。而 2B 这个十六进制数，就等于 2×16＋ll＝43。

不过看起来好像巴比伦人只有从 1 到 59 这五十九个符号，少了个 0。我们仔细看一下 2，51 后面的那个数就可以知道，它是三个直楔，后面空了格。想必那空的一格表示 0，这样这个数就是 3，0＝3×60＋0＝180。下面的几行也很容易破译。咱们就请朋友们自便吧。

像上面一样，1，25，30 这个巴比伦数就是个三位数，其中的 25 和 30 都看作是一位。它应该是 $1\times60^{2}+25\times60+30=3600+1500+30=5130$。

不过因为巴比伦早期用空格表示零，这空到底是空一格还是空两格，还是不空格，就比较模糊。所以，l，25，30 也可以看作是 1，25，30，0 或者是 1，25，30，0，0。

1，25，30，0＝$1\times60^{3}+25\times60^{2}+30\times60+0$

＝60×5130＝307800

而 1，25，30，0，0＝$1\times60^{4}+25\times60^{3}+30\times60^{2}+0\times60+0$

＝$60^{2}\times5130=18468000$。

你瞧，把这个数向左移动一位，就扩大了 60 倍。这也与十进位差不多。十进位中，一个数向左移动一位，就扩大了 10 倍。

60 和 10 分别是六十进制和十进制中的“基”。所以，把一个二进制数向左移动一位，就扩大 2 倍；把一个十六进制数向左移动一位，就扩大了 16 倍。

因为用空格表示零比较模糊，所以把一个数 1，25，30 看作是 l，25，30，0 还是 1，25，30，0，0 就要根据上下文来确定。

在后期的泥版中，巴比伦人也偶尔用一个记号表示零，这样就比较方便了。

这六十进位与十进位的明显差别首先自然是基底不一样，一个是 60，一个是 10。

当然，每种基底都有自己的优点和缺点。以 60 为基底的只有很少几位就能写出很大的数，这在上面大家已经看得很清楚；而以二为基底的二进制数，我们以前的已经说过，同一个数用二进制比用十进制，位数要多得多。

不过这基底较大，缺点也很明显。比如说二进制，只有两个数码就成；六十进制呢，得用六十个不同的符号，可真够难记的。

这且不说，尤其难的是它的乘法口诀。十进制中叫“九九表”，因为它有九九八十一句口诀。为什么要九九八十一句呢？因为十进制中一位数只有从 1 到 9 九种情况（不连零）。

问题到了六十进制那地方，可就麻烦大了。六十进制中一位数有 59 种情况！所以它的乘法口诀共有 59×59 句！近 3600 句！太难记了。

人们想到可怜的巴比伦学童们背这么一张 59×59 的大表可能会不寒而栗。看书的同学大概也很庆幸自己没有出生在伟大的巴比伦时代，尽管那儿有举世闻名的空中花园。

有过好在那时已经有了各种类型的大量数表，不必要再去死记硬背了。利用数表来进行计算正是巴比伦的特点，巴比伦的创造。

在巴比伦的泥版中有许多“倒数表”。这所谓倒数表，也就是一些分子为 1 的分数。不过在他们那儿是用六十进制表示的。

比如 $\frac{1}{8}=\frac{7}{60}+\frac{30}{60^2}$， $\frac{1}{3}=\frac{20}{60}$等等。

这样一来，巴比伦就能做整数除以整数的除法了。比方说一个整数要除以 8，那就把它乘以 1/8，查一查倒数表，看看 1/8 能化成什么样的六十进分数。

这十进分数在我们的十进制记数法中，实际上就是十进的有限小数。所以，六十进分数在六十进位制中也就是有限小数。这样，化除法为乘法一个小数，当然简单了。

巴比伦的数表真真是数不尽，道不完。他们还有表示平方、平方根、立方和立方根的数表。

遇到无理数，当然不能用有限的六十进制表示啦，不过 $\sqrt{2}$ 在那会儿倒算得挺准：1．414213……当然，他们哪能知道 $\sqrt{2}$ 是无限不循环小数呢？那时各个地方的人似乎都认为世界上只有有限位的小数。

当然，这 $\sqrt{2}$ 在巴比伦人那里还是用六十进制分数表示的：

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$$

却说这巴比伦的数学泥版，除了大量的表以外，其他就是一些提问式的

内容了。这些问题的一个个解决，往往反映了他们的代数方面的水平。

早期巴比伦的代数相当发达。这方面的一个著名问题，就是求出一个数，让它和它的倒数的和等于已知数。

用现代的记号来说，就是要求出这样一个 x，使得

$$x+\frac{1}{x}=b$$

这么个代数方程大家都能把它化成一个一元二次议程：$x^2-bx+1=0$

他们先出（$\frac{b}{2}$）^{2}，再求出$\sqrt{(\frac{b}{2})^2-1}$，然后得出答案。

$(\frac{b}{2})+\sqrt{(\frac{b}{2})^2-1}$ 和 $\frac{b}{2}-\sqrt{(\frac{b}{2})^2-1}$。

由于巴比伦人不知道负数，所以负根是略去不提的。

这样看起来，巴比伦人实际上知道二次方程根的公式。当然，我们这里看到的二次方程是特殊了点，常数项只是 1。

不过，有好些问题是打算说明二次方的一般解法的。对于更为复杂的代数问题，甚至用到了等量代换，把复杂的化成简单的！

巴比伦人很喜欢用文字代表未知量，把代数方程用语言叙述并且还用语言求解出来。他们常常用长、宽、面积这些了来代表未知量，好像我们求解方程时，把未知量设为 X、Y 等。

比如说，在一块泥版中有这么个问题：

“长乘以宽得到面积 10；现在我把长自乘，得到的也是面积。再把长与宽的差平方，然后乘以 9，得到的还是面积 10。问长和宽是多少？”

这个问题翻译成现在的写法就是

$$XY=10$$
$$9（X—Y）^2=X^2$$

这样的方程组咱们初中生解决起来不费事，不过，你要想想这可是三千多年前的事（公元前 1600 年），可真够伟大的！

这古代的巴比伦人不但在记数、算术和代数方面技高一筹，几何方面的知识也不赖。从公元前 2000 年到 1600 年的一些泥版中，可以知道他们已熟悉了长方形面积、直角三角形面积的计算。还有一些简单立方体的体积也已经能算出来。

对于圆，全世界的文明都对它有浓厚的兴趣。这里关键的一点，就是对圆周率的认识。

圆的面积他们是用$\frac{C^2}{12}$（C表示圆周长），这样一个式子算出来的，这说明在那时候，圆周率取得了。

这和我国古代“周三径一”的说法是如此的相同！后来，他们用了$\frac{1}{8}$来作为圆周率的值，相对来说要精确一些。

不过，巴比伦在几何方面的造诣可远不止这么些。

1945 年，有两位学者对放在哥伦比大学的一块数学泥版解读一番，发现了更令人吃惊的事情。这块泥版的编号叫变普林版 322 号。

这块泥版上一共列举了 15 行数，经过认真地研究这才发现：原来每一行都是毕氏三数！

什么叫毕氏三数呢？也就是能构成直角三角形边的三个整数。比如像3、4、5，就是商高说过的“勾三股四弦五”。还有5、12、13等等。

但是这普林顿322号版上给出的15组毕氏三数可是了不得！很大，现在咱们写出几组：

（120，119，169）（3456，3367，4825）

（4800，4601，6649）（6480，4961，8161）

其中有一组更大：（13500，12709，18541）

这么大的数决不可能是用一次次试算求得的。人们猜测这些古人是不是掌握了计算毕氏三数的一组公式：

$d=2xy$，$b=x^2-y^2$，$c=x^2+y^2$

这里，x与y互素，有偶性也不同，并且x＞y。这样，a、b、C就构成毕氏三数了。

这组公式可是在普林顿泥版的一千多年后，才作为一项伟大的成就出现的呢！

人们还猜测，这些古巴比伦人是不是当时就得知了“毕达哥拉斯定理”（也就是勾股定理）。要真是这么回事，那可就是把毕代定理提前1500年发现了！

不幸的是，这普林顿322号是个残品，这块书板的右边中间有一个很深的缺口，左边掉下的一块也下落不明。这左边破的地方还有现代胶水粘过的痕迹。大概是这块书板不知怎么破了，人们尝试着用胶水把它们粘在一起，但最后还是脱了胶。更糟糕的是这掉下的一半都不知弄那去了。也许是想要这块泥版的人太多，你争我抢弄坏的吧？也许是原来不当它回事，东扔西丢搞掉了吧？说不定也有可能还蕴含着一个惊险曲折的传奇故事。反正在大洋彼岸的我们，也只能这么瞎猜猜了。

巴比伦人的天文学知识很丰富，三千年前就有了系统的观测资料。他们的天文学家甚至能把新月和亏蚀出现的时间准确地算到几分钟之内。

巴比伦古代有的是阴历。这阴历的一月是按月亮的运行周期定的，所以有的月份是29天，有的月是30天，全是根据新月出现的情况来定。这样，哪一个月定29天，哪一个月定30天，计算起来就复杂啦！

再者，阴历的月和一年的时间长短也不能很好配合。12个月就是都照30天算，也还只有360天，何况这其中还有不少是29天的，这就和一年的天数差得多了。所以要根据情况，必要时在一年中插进一个月，变成13个月。这就是阴历的闰月。如果19年里插进7个月，也就是19年7闰，那么月和年就能配合起来了。

这和我们中国用的农历是完全一样的。正所谓“英雄所见略同”吧。

使我们感兴趣的还有他们建造过的许多巨大的天文台。这种建筑通常是由7个梯台组成的，一个造在另一个的上面，就好像一架巨大的梯子伸向天空。每一个梯台上都涂有一种颜色，代表七个星球——太阳，月亮，金、木、水、火、土星。也许，这就是传说中巴比伦造的通天塔吧。

用这种建筑形式建造的宫殿，它的宏伟、朴素、匀称和美观是令人惊讶的。谁敢说，建造这些宏大的建筑不需要几何知识呢？

说了巴比伦，下面要把尼罗河畔的事由道一个明白。

这古埃及人得天独厚，在尼罗河畔沐浴着阳光幸福地成长。当美索不达米亚的统治权在各个民族间你争我夺，迭经更替的时候，埃及的文明却在尼

罗河的摇篮里独自发展着。

埃及的文明源自何处今天已难以考证，不过可以肯定的是，在公元前 5000 年之前，就存在着。

在今天埃及这块土地上，一开始有许多的州。每个州都有自己的名称、都城，军队、政权、方言和图腾，俨然是一个个独立的小王国。

经过长期的战争和兼并，到公元前 4000 年代的中期，形成了两个较大的王国。两国以孟斐斯为界，以南的尼罗河谷地为上埃及，以北的尼罗河下游三角洲平原为下埃及。

公元前 2100 年左右，上埃及国王美尼斯征服了下埃及，实现了全埃及的统一。美尼斯把都城迁到上下埃及接壤的孟斐斯，并把它称为“ 白城 ”。

以后埃及历史的主要时期就以统治的朝代来命名，而以美尼斯为第一王朝的创建人。

埃及文化在第三王朝（公元前 2500 年左右）到达顶峰，当时的统治者建造了至今闻名的金字塔。一直到公元前 332 年，亚历山大征服它以前，埃及文明都按着自己的道路延续着。从此以后，埃及的历史和数学就融入到希腊文明中去了。

古代埃及文明的历史延续了 3000 多年，是世界文明发祥地中的一个。

古代的埃及好像“ 书 ”没有“ 同文 ”，他们有几套自己的文字，最早的是象形文字，这些都和咱们中国一开始的情况差不多。公元前 2500 年左右，开始用一种所谓“ 僧侣文 ”来作日常的书写。

他们又是怎么书写的呢？大家或许都知道就是用墨水写在纸草片上。

纸草是尼罗河下游的一种植物，又叫纸莎草，形状像芦苇。古代埃及人把这种草从纵面剖开，压平后用来写字。同时，一般是把许多条纸草片粘在一起，连成长幅，卷在一个杆子上，形成卷轴（倒很人些象我们的卷轴书画呢！），所以这些纸草文书又叫纸草卷。

古埃及的气候干燥，所以纸草卷不会霉烂，这样就能保存下来，留给后世；但正因为也太干了点，所以纸草片又容易干裂成碎末，这样保存下来的又不多。正所谓“ 成也萧何，败也萧何 ”，老天爷弄得也挺为难的。

留给后世的纸草文书那可是大不一样了，恒温恒湿，高精控制，比总统住的还高级。这里面有数学内容的主要是两批。

一批是在 1893 年由俄罗斯收藏家哥列尼舍夫所收购，1912 年转为莫斯科美术博物馆所有，所以叫莫斯科纸草卷。

一批是 1858 年由英国发现的，现存英国博物馆。因为它的作者阿摩斯，是公元前 1700 年左右的一位埃及僧人，所以又叫阿摩斯纸草文书。

据这位僧人记载,这份纸草文书的内容是从公元前 2200 年第十二王朝时代的纸草文书上转录下来的。他在这份纸草文书的开头写下了这么句话：“ 获知一切奥秘的指南。 ”

数学纸草卷都是在古埃及政府和庙宇里工人的纪录员们记下的作品。

在莱因德纸草文书里有 85 道数学问题和解答，莫斯科纸草文书里有 25 道。虽然这些数学问题“ 解答大全 ”是在公元前 1700 年左右编写的，但所含的数学知识是埃及人早在公元前 3500 年就已经知道的,而从那时起直到希腊人征服他们以前，他们也还是没增加什么新内容。

埃及的数学就这么平静地流淌了三四千年，好像尼罗河停止不动了。不过，当时的生产水平也就那么高，当时的需要也就那么多。纸草卷上的那点

数学也就足矣！

看来不但时势造英雄，时势也成就科学。

从纸草卷上来看，古埃及还学会用数学来管理国家和宗教事务，确定付给劳役者的报酬，求谷仓的容积和田地的面积，征收按田亩估出的地税，计算修房盖屋和建防御工程所需要的砖块，再算算酿酒要多少谷物，等等，数学一开始就是从实际需要发展起来的，这恐怕是全球都适用的公理。

古埃及人创造了一套从一到一百万的有趣的像形数字记号。咱们前面已见识过：1 是垂直的一根木棒，10 是一副脚镣（有人把这解释为放牛时用的弯曲工具），100 是一卷卷起来的测量绳（可能当时每卷测绳都是 100 个长度单位），1000 是朵莲花。

一万呢，是个手指头，十万就画成小蝌蚪。最有趣的是一百万，画了一个举起双手表示吃惊的人（这么大的数确实也令我们吃惊，古埃及好像是最早写出这么大数的人）。

这套数字符号是以 10 为底的，但不是进位制的。书写的方式呢，也是从右向左。咱们在上一回已经看到了，故且放下不提。

埃及的算术具有加法的特征，不但加法是加，而且乘法也是用叠加的方法做出来的。

现在我们当一回古埃及人，做一下 26 与 33 的积，看看究竟是如何叠加的。

因为 26＝16＋8＋2，所以我们只要把 33 的这些倍数（2 倍、8 倍、16 倍）加起来就行了。而 2、8、16 等等，都是 2 的乘幂，所以只要对 33 逐次加倍就可能得到所求的倍数。

具体做法如下：

		1	33
对33逐次加倍	*	2	66
		4	132
	*	8	264
	*	16	<u>528</u>
			858

把那些带有星号（“*”）的 33 的倍数加起来，就得到答案 858。

做除法呢，就是连续减去加倍。

比如对 753 除以 26，可以连续地把除数 26 加倍，一直到再加倍就超过被除数 753 为止。其程序如下：

12625241048208164l628

右边的一列分别表示 26 的 1 倍、2 倍、4 倍、8 倍、16 倍，26 的 32 倍已经超过被除数 753，所以就没有列出。

因为

753＝416＋337

＝416＋208＋129

＝416＋208＋104＋25

这样我们又可以得到：753—26×（16＋8＋4）＝25 减式中一共有 16＋8＋4＝28 个 26，所以商就是 28，余数为 25。

有人会想了，如果一个除法中，商不是 28，能不能由左边的那列数：1、

2、4、8……，也就是 2 的各次乘幂，相加得到呢？

回答是肯定的。因为任何一个整数，都可以表示成 2 的各次幂的和。为什么呢？这是因为任何一个整数都可以用“ 除二取余 ”的方法化成二进制数。一进制数不就是 2 的乘幂的和吗？

埃及的乘法和除法在计算过程中不仅不需要乘法表，而且便于用算盘。

古埃及的乘法程序不断发展，到后来就把上面讲过的叠加法改变为“ 双倍和折半法 ”。

假如我们还是以 33 乘以 26，那么就可以连续地减半 26，并对 33 连续加倍：

26	33
13	66*
6	132
3	264*
1	528*
	858

然后把倍列中的那些与半列中奇数相对应的 33 倍数加起来，即 66＋264＋528，便得到乘积 858。

这其中的道理其实只要把 26 化为二进制数，就能理解。

今天电脑中的乘法就是用这种方法进行的，因为电脑中数的表示都是二进制。相信朋友们自己能够解决这个问题，我们就不多谈了。

埃及人的分数记法也比较独特，还比较复杂。比如在像形文字中：

$=\frac{1}{5}$　　$=\frac{1}{10}$，等等。

大家可以看到这卵形（■）的下面是个整数，所以卵形■加在整数上就表示是一个几分之一的分数，也就是单位分数。

其他的分数就用单位分为九的和来表示

比如：$\frac{2}{5}$写成$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$。

在莱因德纸草文书中有个数表，把分子为 2 而分母为 5 到 101 的奇数的这样一些分数，表达成单位分数的和：

$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$，$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$……

利用这张数表，就能把其他一些分数写成分子为 1 的单位分数之和，埃及人利用单位分数来进行分数四则运算。

这分数运算这么一来很繁琐，恐怕这也是尼罗泥畔的算术和代数没有达到更高水平的原因吧。

在莱因德纸草文书的 85 个问题中，许多都是用来计算面包的分法，啤酒的深度，牛和家禽的饲料混和比例，还有谷物贮藏等的。

对于其中出现的未知量，他们用纯粹算术的方法，没有解方程这种想法。有些是用后来在欧洲称为“ 试位法 ”的方法来解决的。

比如对方程：$x+\frac{x}{7}=24$，

先选定的x的一个简便的值，譬如说7，于是

$x+\frac{x}{7}=8$，而不是24。因为8必须乘以3才是24，

所以互的正确值一定是$7\times3=21$。

在卡洪发现的一份公元前 2000 年的纸草文书中，有这么个问题：

“两个正方形面积之和是100，两者边长之比为$1:\frac{3}{4}$，求它们的边长。”

我们可以列出两个现在的方程：

$$x^2+y^2=100\text{和}x=\frac{3}{4}y$$

消去一个未知数，就得到一个一元二次方程，自然好解。可是，我们也可以用“试位法”来解这个问题。这“试位法”其实就是“假设法”。

比如，取 $y=4$，则 $x=3$。而 $x^2+y^2=25$，不是 100；所以我们必须修正 x 和 y，把原来的数值加倍，这样 $X=6$，$y=8$。

当然，埃及人当时并没有用未知量、方程，而是用文字去叙述解的过程的。所以这基本上只能是算术。

在莱因德纸草卷中，有一个问题（第 79 号问题）很有趣，对它的解释也五花八门。在这个问题中，出现了一组奇妙的数据。我们把这个问题写在下面：

一个人的全部财产

房子　7

猫　　49

老鼠　343

麦穗　2410

谷物　16807　19607

眼睛尖的读者可能已经发现，这些数是 7 的前 5 次幂，最后是它们的和。这样，人们一开始就认为这不过是一张形象一点的 7 的乘方表。

然而有位历史学家康托尔（不是那位数学家）在 1907 年对此给了一个更精彩也更合理的说法。

他首先联想到中世纪一位意大利数学家斐波那契在他的《算盘书》中谈到的一个问题：“有七个老妇人走在去罗马的路上，每人有七匹骡子；每匹骡子驮七条口袋；每只口袋装七个大面包；每个面包带七把小刀；每把小刀有七层刀鞘。在去罗马的路上，妇人、骡子、口袋、面包、小刀和刀鞘，一共有多少？”

这个问题后来在英国还演变成了一首童谣：

我赴圣地爱弗西，
途遇妇女数有七，
一人七袋手中提一袋七猫数整齐，
一猫七子紧相依，
妇女、布袋、猫与子，
多少同时赴圣地？

这么简单的一联想，思维的火花顿时迸出光芒，康托尔很自然地把莱因德 79 号问题解释成：“一份财产包括七间房子；每间房子有七只猫；每只猫吃七只老鼠；每只老鼠吃七个麦穗；每个麦穗产七克谷物。在这份财产中，

房子、猫、老鼠、麦穗和谷物，总共有多少？”

当今天的孩子在唱英国人的那首有趣的绕口令时，不知是否知道，这也许还是三千七百年前埃及人留传下来的呢！

埃及人的几何又是怎样呢？尼罗河畔自然不能缺少几何；而谈到几何，自然又想到巍巍屹立的金字塔。

公元前 2900 年建造的胡夫金字塔最大，它原高为 146．5 米（现在还剩下 137 米），用 2000000 块石头组成，每块平均重 2．5 吨，非常仔细地砌在一起。正方形的底面每边长 233 米（现在 227 米）。

但是，这么巨大的正方形，底边长度的误差只是全长的 $\frac{1}{14600}$，仅仅只有1．6厘米！四个直角的误差只有 12″，仅为直角的 $\frac{1}{27000}$。

此外金字塔的四个面正对着东南西北，与正北的偏差也只有 3′左右。

这么高大的金字塔，建造精度如此之高，唯有叹服也！不过有人认为，莫斯科纸草文书的第 14 个问题，更是一座最伟大的金字塔。

在这个问题中，要你求一个截去了顶的金字塔，也就是现在常说的棱台的体积。当然，它接着就告诉你上、下两个正方形的边长，这个截顶金字塔的高。然后就教你怎么算了。

从这些埃及人的伟大教导中，我们竟得出了一个连现代人都感到困难的四棱台计算公式：

$$V=\frac{1}{3}h\ (a^2+ab+b^2)$$

这里当然是用了现代的记法，h 代表高，a、b 分别是上、下正方形的边长。

这也许是埃及几何里最了不起的一项成就了，因为它完全正确。

不过在计算比较简单的四边形的面积时，却有一个明显的，令人迷惑不解的错误。

在一个庙宇的墙上就刻有一张捐献田地的表，这些田地一般都有四边，我们用 a、b、c、d 表示它们的长。并且，a、b 两边相对，C、d 两边相望。

不过，这一次埃及人给我的教导令人失望，墙上刻出的这些田地的面积是：

$$\frac{(a+b)}{2}\cdot\frac{(c+d)}{2}$$

这个公式用来计算长方形时是完全正确的，但用来计算一般的四边形面积就不对了。如果这个四边形的四角与直角相差太大，那误差就非常明显了。

如果碰上一些三角形的田地，他们就认为d消失了，面积的算法就变成 $\frac{(a+b)}{2}\cdot\frac{c}{2}$，这个公式自然也有毛病。

有一个流传很广的说法；古埃及的拉绳人（测量员），在绳子上打结，把全长分成 3 比 4 比 5 的三段，然后用来构成直角，或者构成直角三角形。这个美好传说在纸草文卷和庙宇壁刻上都找不到痕迹。

但是找不到并不能说他们对勾股定理没有认识。应当相信，许多普遍性

的东西在各个文明发源地都会有发现，有表现的。

所以有人建议，如果地球人发射宇宙飞船去寻找外星人的话，不妨用勾股定理去作勾通的名片，交流的话题。当然，这送去当礼物的勾股定理有什么文字书写，用什么话去说都没什么用，外星人谁懂得你地球上的一套信息符号呢？所以有人就又建议把这勾股定理画成一幅一看就懂得的几何图，行不行就是两说了。因为外星人有没有更是两说呢。

埃及人对圆面积的计算好得惊人，有的公式是$A=\left(\frac{8d}{9}\right)^2$。

这 d，自然是直径。这就等于取圆周率为 3．1605，够精确的了。

尼罗河定期泛滥，这样，观察好天象，研究好历法可是件大事，这可真正是关系到能不能得到食物的事情。古埃及靠观察天狼星来算得一年的日子。他们把一年定为 365 天，分为 12 个月，每月 30 天，年末外加 5 天。不过他们的天文学比起巴比伦人来，要逊色多了。

不过，埃及人在天文和几何方面有另一项好记录，他们造的神庙，能使一年中白天最长的那一天（也就是夏至），阳光可以直照入庙宇，照亮祭坛上的神像。小民们不知事情缘故，自然是惊恐地或惊讶地伏在神像下多叩头了。

两边文明一一叙，让咱们再回到华夏古国。

却说这周公、商高的一番对话，自然使我们好激动。不过大家对只有“勾三、股四、弦五”这点内容当然不够满意。3、4、5 这一组数毕竟只是最好找的毕氏三数。

那么，商高们似乎并不仅仅停留在勾股定理的一些特殊情况。

《周髀算经》中在摆谈了一阵周公、商高的恳谈后，又出现了一段荣方和陈子的问答。这荣方与陈子是何年何月何处人氏，典籍都没有交代，想必不是名人，不像周公旦那样名声远播。但陈子的一席话却是有历史纪念碑般的作用，不可小觑。

陈子曰：“若求斜至日者，以日下为勾，日高为股。勾、股各自乘，并而开方除之，得斜至日。”

陈子是在说，你想求出“斜至日”（弦），只要把勾股分别平方（自乘），然后相加，再对其开平方，也就是说：

$弦=\sqrt{勾^2+股^2}$。

这样，我们的勾股定理就不限于 3、4、5 这些具体情况，而是有着对任意直角三角形都适用的一般形式。因此，尽管我们古人对勾股定理并没有像希腊的毕达哥拉斯那样去证明，但却要早几百年发现。

这《周髀算经》是中国最古老的算书，大约在 2000 多年前写成，主要记述的是周代的一些数学、天文知识。

“髀”的原意是股或股骨，所谓“髀者，股也”，就是这个意思。这里是用来指测量太阳影子的“表”了，也就是标杆。想必当初一开始用的标杆就是动物的一段股骨。

“正晷者，勾也”，这是陈子对“勾”的说法，意思是影子的长。所以，这陈子得出勾股定理，是从测量太阳影子的工作中取得的。知道了标杆的长和影子的长，就能把“斜至日”，也就是影子的末端与标杆的顶端的那一段算出来。

陈子教导荣方说，夏至的时候到南面 16000 里的地方，冬至的时候南去

135000 里，正中午时候立一根杆子，就没有影子了。

竹筒测日径陈子的胆子倒确实不小，他居然测量起太阳的直径！用的方法也很先进。“即取竹，空径一寸，长八尺，捕影而视之，空正掩日，而日应空”，就是说用根空心的竹杆，直径一寸，长八十寸（八尺），朝太阳去看，竹筒的那个圆（“空”）正好把“日”满满地套住，不留一点空。这也许就是“管窥蠡测”中的管窥吧。

接下来是用比例来计算日径。竹筒口径与筒长之比是 1：80，当时认为观察者至太阳是 100000 里，如果没日径为 D，那么：

D：100000＝l：8，

这样得到：D＝1250 里。

由于日地距离取十万里误差太大，当然这里的日径也与实际的相差太远，不过我们更应该为陈子的勇气，陈子的观测方法和计算方法而惊叹不已。用比例来计算，来测量，远在三千年的中国就有这样先进的方法，真是太了不起了。

当时在《淮南子》等书中也有这方面的内容：“若使景（就是影子）与表相等，则高与远等也。”这“表”也就是前面说过的标杆。

这可是个很有用的测量高度的方法。比如说我们现在想测量一下电视塔的高度，怎么办呢？可以拿一根标杆，立在太阳底下，等影子和标杆的长度一样了，赶紧再测量电视塔的影子，那么这电视塔影子的长度，就是它的高度了。

这里面用的就是相似三角形对应线段成比例的知识。所以同学们自然会想到，倒不必一定要等到影子和标杆一样长再动手，任何时候只要有影子就都可进行啦！

这影子的研究可是重要的很。在古代，没有钟，也没有其他天文观察仪器，全靠看太阳投射的影子来确定时间和节气了。用来计算时间的，叫日晷，根据日晷的影子来确定一天的时间。用来定出节气的，就是“髀”了，也就一根标杆，根据一年里这根标杆的影长，来定出二十四节气。

《周髀算经》中的“髀”是八尺长。这些古人首先测出影子最长的冬至和影子最短的夏至（当然是中午时分的影子），分别是一丈三尺五寸和一尺六寸。

以冬至到夏至共有 12 个节气，用 12 去除冬至与夏至的影长的差：

$(1350-160)\div12=99\frac{1}{6}$。

这就得到了从冬至开始，每个节气影长减少的长度，正所谓：“八节二十四气，气损益九寸九分、六分分之一。”

这样，每个节气逐次相减，到了夏至以后又每个节气逐次相增，《周髀》中就列出了中午时分，八尺“表”（即标杆）的影长表。

同学们自不妨也弄个标杆树在自家门口，具体地测一测冬、夏至和其他节气的影子，倒是件增长学问的好事情。

《骨髀》中给出的这些节气影子的长度，实际就是一个等差数列。更值得注意的是，这其中出现了分数。

所谓“六分分之一”，就是$\frac{1}{6}$分。

此外在影长表中还有“小分一”、“小分二”、“……”，$\frac{5}{6}$这些分数了。

在《周髀》中还有很复杂的分数计算，也是计算天文方面的问题，出现了这么一个式子：

$$119000 \div 182\frac{5}{8}$$

也就是书中所说的：“置十一万九千里为实，以半步一百八十二日八分之五为法。”“实”就是被除数，“法”即除数。

“一百八十二日八分日之五”就是一年$365\frac{1}{4}$日的“半步”，也就是一半。

“八分日之五”呢，就是一“日”的八分之五，这里面的分数概念是十分清楚的，而且与现在的分数一致，没有古埃及人那样繁杂的表示，领先于世界。

那么，上面那个复杂的除法《周髀》中是如何算得呢？书中接下来是这么说的：“通之，得九十五万二千为实，所得一千四百六十一为法，除之。”

这么一个运算的方法已经很高明了，就是先行把$182\frac{5}{8}$化为假分数（“通之”），是$\frac{1461}{8}$，然后被除数、除数同时扩大8倍，被除数11900变为952000，就计算出结果了：

$$\begin{aligned} 11900 \div 182\frac{5}{8} &= 119000 \div \frac{1461}{8} \\ &= 952000 \div 1461 \\ &= 651\text{里}182\frac{798}{1461}\text{步} \end{aligned}$$

其实，分数在春秋战国时就已应用到各个领域，达到了成就的程度。

那时的一本书《考工记》，记载了各种器具的规格，好像现在的技术应用大全。里面在讲到车子的构件时说：“车人之事，半矩谓之宣，一宣有半谓之■，一■有半谓之柯，……”其中“矩”就是直角，这段话是说：

$\frac{1}{2}$矩（＝45°）叫做宣，

1宣＋$\frac{1}{2}$宣（＝45°＋$\frac{1}{2}$×45°＝67°30′）叫■，

1■＋$\frac{1}{2}$■（＝67°30′＋$\frac{1}{2}$67°30′）叫柯。

您瞧，不但有分数，而且有角度，还出现了各种带分数。从 3500 年前的阿摩斯草纸卷到十五、六世纪的欧洲，西域之人一直可怜而不幸地用着古埃及人所用的分数，脑袋里弄得昏天黑地。可是在华夏古国，一开始就是先进的十进分数，确实是独领风骚几千年了。

《周髀》中周公、商高的交谈中有“矩出于九九八十一”说法。说明“九九”表早已有之了。

说到“九九”表我们又想到了一件趣事。

春秋五霸之一的齐桓公想称霸中华，开了个招贤馆延聘贤才。但是招聘

广告贴出去多时了还未见有一个人上门，倒不是那时候各个单位卡住档案不放人，而是因为大家对齐桓公先生的诚意有点不相信。

话说有一天有一个人前来求见，齐桓公问道：“ 你有什么本领啊？ ”来人答曰“ 我会‘ 九九歌 ’ ”。

齐桓公扑哧一笑：“ 会背‘ 九九歌 ’也算是件本领吗？ ”

这人不慌不忙地说：“ 这‘ 九九歌 ’确实不够资格拿来作为见面礼，但是您对我这个只懂得“ 九九 ’的人都能重视重用的话，还愁比我高明的人不接踵而来吗？ ”

齐桓公一听精神一振，立即请讲招贤馆隆重招待。果然不出一个月，许多有识之士纷至沓来，投入“ 齐董事长 ”帐下效力。

这就告诉我们早在春秋时期，会背“ 九九歌 ”已经很不稀奇，更不要说加、减、乘、除四则运算了。

再说这春秋战国乃百家争鸣、百“ 子 ”并立的热闹时期，内中单道一位姓墨名翟人称墨子的先生。墨子是主张“ 非攻 ”的，是当时“ 绿色和平组织的领导者 ”，他与咱中国工程技术的祖师爷鲁班倒有过一段过节。

鲁班是当时有名的能工巧匠，会造各种器械，后来楚王把他延揽了去，造了攻城的云梯，准备攻宋。

墨子一听，立即从鲁国出发，走了十天十夜，鞋都走没了，就用破衣服裹一下脚。到得楚地，就给楚王做了番比喻，说了番道理。他说，你们楚国地方广阔，宋国才一点点；楚国物产丰富，而宋国还比较贫困，何必去攻宋呢？不有点像一个富人去偷穷邻居一样可笑吗？

楚王回答说，对是对，但现在鲁班高级工程师已经为寡人造了云梯了，一定要攻宋，没办法啦。

墨子笑道，那不要紧，我就和鲁先生演练一下，来一次沙盘演习。咱要是斗败了，掉脸就开路。

于是墨子解了衣带做一个城的模样，和鲁班演习起攻守之策。鲁工改变了 9 次攻城的战术，墨子都把他挡了回去。鲁班的攻城器械用完了，而墨老先生的守御办法还富富有余。

鲁班这时有些不起好心，对楚王说，我想还有最后一个办法。谁知墨子微微一笑说，鲁先生的意思是让楚杀掉我，可惜迟了，我的弟子早已拿着守城器械在宋国恭候您的大驾呢。

这一场化干戈为玉帛的故事说明墨子和鲁班都有相当丰富的几何知识。试想想，没有几何方面的认识，城墙的建造，距离、高低、土方等测量，器械的修造，又怎么可能呢？要知道，当时建筑中已开始绘制平面图，图上有建筑物的墙线、名称和墙之间的距离等等。

墨子他老人家不仅实践上数得着，理论上也独树一帜，有相当水平。《墨子》就是一本包含着逻辑学、力学、光学和几何学等方面内容的典籍。墨老先生用严格的逻辑方法来说明几何概念，这种做法和古希腊亚里斯多德有些相似。而“ 亚先生 ”正是形式逻辑的鼻祖。

《墨子》中有 19 条数学方面的内容，许多是与现代的观念一致的。当然不可避免地要提到矩形和圆，我们曾说过这是人类最早认识的图形。“ 方，柱隅四杂也 ”，墨子在这里所矩形说成是四条直边、四个直角构成的图形，完全准确、严密。对于圆，他是这样说的：“ 圆，一中同长也。 ”中，就是圆心。几乎不要解释大家都明白，它和我们现在圆的定义是多么的一致！不

但有定义，而且有圆的作法，“圆，规写文也”，就是说圆是用圆规画出的，终点与起点相重合（“交”）的曲线。

《墨子》中还读到了分割问题，把一个物体从中间分开弃去一半，从剩余的一半中再弃去一半，如此分割下去，最后剩下一个不能分割的“端”，也就是一点。

这使大家想到古希腊一个著名的故事：飞毛腿阿基里斯和乌龟赛跑。

欲知后事如何，且听下回分解。

第三回　逻辑朗朗　数学首次辉煌
思维清清　运算同步灿烂

人们把“黄金比”看作美的密码。无理数的发现引发了第一次数学危机。在一条小舟上，希帕索斯被愤怒的毕氏门徒扔入水中。芝诺说：神跑手绝对追不上乌龟。

说这古希腊位于爱琴海周围，不但包括希腊半岛，而且也包括爱琴海中各岛屿、克里特岛和与希腊半岛隔海相望的小亚细亚半岛的西海岸一带。荷马史诗中所讲到的特洛伊城，就位于小亚细亚半岛的西海岸。

史诗的作者是一位盲人——荷马，他把希腊文明的发生推到遥远的公元前 2800 年。

希腊人创造的灿烂文明，那可是现代西方文化的源头，对现代文明起了奠基的作用。才华横溢的古希腊学者们，在建筑、雕塑、天文、数学许多方面都做了大量开创性的工作，对世界许多国家的文化产生了深远的影响。就连现代的奥林匹克运动会，不也可以追根寻源到古希腊吗？

这爱琴海附近与大河流域的各文明发祥地大大不同。这块地方倒是不大，但海陆交错，山峦重叠，所以这地方以一个一个城邦为主。再说这块地方处处离海都很近，几乎没有一个地方离海岸有五十公里以上的。那爱琴海里的岛屿可是星罗棋布，有 480 多个，就像一个个跳石密布在海面上。航海的人就是船不太好也不要太担心，到哪都能看到岛，看到陆地。还有，那些大城邦如雅典，城里的人口多了，这粮食供应就要到外面去买。而尼罗河古埃及正与他们隔地中海相望，所以这笔外贸生意就做到了埃及。

古希腊和巴比伦两河流域也不远，陆路海路都可以走。所以这古希腊“对外开放”做得很好。那时候不但有很多人到尼罗河、巴比伦去做生意，还有不少有名的学者去访问、游历，他们好像应当是世界上最早的“访问学者”了。

所以这古希腊虽不能说是物华天宝，却倒也是人杰地灵。吸纳了两大文明，地处爱琴海之边，不创造出优秀的文化，那就真有点对不起世界人民了。

那么这古希腊的数学为何也往往被认为是现代数学的奠基石呢？

关键就在这“为何”二字。

原来这古希腊的仁人智士往往不但问“如何”，而且也经常问“为何”，即不但要知其然，而且还要知其所以然。

比如，对等腰三角形，不少古代人都知道两底角相等；对于圆呢，也都知道被直径两等分，这就是所谓“如何”了。那么，为什么两底角相等呢？为什么圆被直径两等分呢？这“为何”的问题不是人人都想到做、都乐意做的事。而在当时古希腊，就弥漫着这么一种气氛，凡事讲究为何，讲究推理，讲究证明。也许，现代意义上的数学就诞生于这么一种气氛之中。

比方说这古希腊数学第一个学派的祖师爷泰勒斯先生，他就有这种凡事讲证明的瘾头。

那泰先生乃小亚细亚西岸富裕之城米利都人氏，是希腊古代七贤之一，生活于公元前六世纪。这泰贤人多才多艺，哲学家、律师、工程师、天文学家、数学家，各种职称都取得过。不仅如此，他还经过商，“下过海”。

话说泰勒斯有一年预见到橄榄油必定丰收，就把附近地区的所有榨油设

备都买到手，然后在大家都要用的时候再租出去，当然是狠赚一把。

当大家纷纷祝贺时，泰勒斯先生微微一笑：“我只不过想证明赚钱是很容易的。”

泰勒斯先生活得很潇洒，是个独身主义者。另一位七贤、古希腊著名改革家梭伦问他为什么不结婚，他第二天让人给梭伦送去个谎信，说梭伦心爱的儿子突然被杀身亡。然后他又到这位异常伤心的父亲面前，拍拍他的肩膀说：“我只不过想告诉你，我‘为何’一辈子不结婚。”有一次他夜观天象时失足掉在沟里，一位多事的老太太笑话他：“你连自己脚边的东西都看不见，还能指望看见天上的东西。”不知道泰勒斯有没有说“燕雀安知鸿鹄之志”，不过相信泰先生一定是很潇洒地笑笑。

当然我们不能把泰勒斯看成是只知插科打浑的东方朔。他可是一位很有学问的一代宗师。泰勒斯赚了不少钱后，就专心研究并到处旅游。

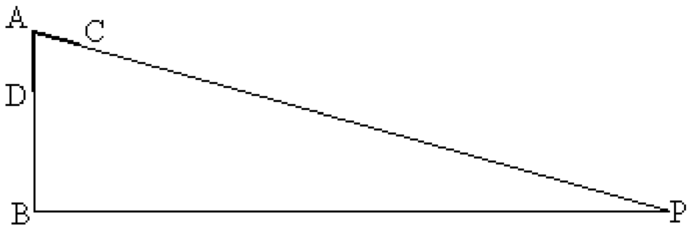
有一个时期他住在埃及，搞搞学术交流活动。埃及的法老想知道自己死后睡的那所“大房子”有多高。找了很久也没有人敢来测量这很高很高的金字塔。后来法老就请外国专家泰勒斯解决这个问题，他很愉快地接受了邀请。

虽然泰勒斯根本不可能到过中华大地，但是地测量的方法也是利用太阳的影子，和上回书里说的方法是一模一样。看样子咱们又要说那句老话了：英雄所见略同。不过当时他这么一手，倒真是把周围的人都镇住了，佩服得了不得。

泰勒斯当时还发现了不少几何定理，比如圆被任一直径二等分；等腰三角形两底角相等；对顶角相等；半圆上的圆周角是直角等等。

这些发现的意义倒不在这些定理本身，而是泰勒斯运用了逻辑推理，进行了证明。

海边的人对测量船与岸的距离自然很有兴趣，也很实用。泰勒斯就想了个绝妙的办法，进行测量。



首先他做了个两根杆的仪器，这两根杆子的夹角可以变化转动，我们把它们叫做 AC，AD。然后他站在岸上一个高处，让 AD 杆垂直指向地面的 B 点，再调整两杆的夹角，使得沿着 AC 杆子看过去，正好指向船 P。最后，不改变角 DAC，让仪器绕 AD 转，再把 AC 杆指向地面上的那一点 Q 记下来。这样，只要测出 B 到 Q 的距离就可以了，也就是岸上 B 点到船 P 的距离。

这里面用的是两个三角形全等的定理。

看，△ABP 和△ABQ，不就是两个“两角和一条也对应相等”的三角形吗？泰勒斯正是发现而且证明了这么条三角形全等的定理，而且用得也很灵活。

我们的孔夫子当年曾授徒讲学，得弟子 3000、72 贤人。泰勒斯当年在希腊也收了不少徒弟，创立了爱奥尼亚学派。其中有位高足，比他大约小 50 岁，是爱琴海的萨摩斯岛人，住在离泰勒斯的故乡利都城不远，出师后更树立起自己的学派，以至声名都大大超过其师。

他就是下面即将登场的赫赫的有名之人——毕达哥拉斯。

毕达哥拉斯在米利都泰勒斯那里学了一段时期之后，就到处游历，当然是出洋考察，到埃及和巴比伦一带学数学，长见识，当然还有哲学和宗教等等。据说，他的数学是在埃及学的，而在巴比伦树立了他的宗教信仰，不过好像也受巴比伦数学的影响更大一些，熏陶更深一些。

这毕达哥拉斯学成归来，到老家萨摩斯岛一瞧，发现此地在波斯暴政之下不是个好去处，便打点行装又到得南意大利的克洛乔，这是个希腊的移民城市，从希腊本土跨海即到。

在克洛乔，他开始独树一帜，授徒讲学，开办学校。这学校不但研究数学、哲学和其他自然科学，而且是个组织严密的学术团体和政治团体。入这个团体挺严格，有一套秘密仪式，还有一套盟约，组织内讲授讨论的知识不能外泄，有些神秘兮兮的。而且这组织的人员还控制发展，大概是考虑其思想和组织的纯度吧。

这形成的毕达哥拉斯学派在学术上倒确实不错，但他们也太关心政治了，和贵族党派结了盟，以致当地的民主力量摧毁了学校，把他们的团体也弄得七零八落。毕达哥拉斯亡命邻近的米太旁登，公元前 497 年，也许是他七八十岁的时候，被害于此处。

这毕达哥拉斯有句著名的话：“ 万物皆数。 ”那意思是说，这整数是人和物质的各种各样性质的起因，是宇宙的要素，就像咱们心目中的原子一样。

虽然这在现在看起来有些荒唐，但咱们也不必太苛求他们啦。

你想，当时对自然的了解都很欠缺，所以当这些古人们看到“ 数 ”在自然界中无处不在，很觉有些神秘。他老人家教导大家说：“ 看看你自己的周围，世界上各处的秩序都得服从于和谐和度量，甚至是声音也得服从于数，天上的星宿，地上的万物都得服从于它。 ”

确实，有些现象表面上看来完全不同，却表现出完全相同的数学性质，给他们留下了深刻的印象。想给井然有序和谐地运动着的自然界一个完美统一的解释，这在今天看来也值得咱们称赞一声，相信自然规律嘛。

整数在毕达哥拉斯学派的心目中有如此崇高的地位，所以一区有新的数发现，那可是大大动摇军心的信仰危机，足足会使他们惊恐不已。此是后话，暂且按下不提。

毕达哥拉斯对数学的看法，是认为数学上的东西，比如数和图形，都是一种思维的抽象，同实际的事物是截然不同的。咱们大家都学过几何上的‘ 直线 ”，这种数学中规定的“ 直线 ”，您在实际中见过吗？肯定没有，现实中到哪去找没有粗细、只有长度的直线？哪里有什么无限长的线？也从来不存在直而又直的直线！

数学中的“ 直线 ”，只能是现实中那些“ 很直 ”（而不是直而又直）的东西，那些看起来没有粗细的“ 线 ”，所提炼出来的一个高度概括、高度抽象的概念！

咱们把这些抽象的概念归拢到一块，再用逻辑推理的方法让它们运动起来，就能产生许许多多新的概念，还有定理，建立起新的数学大厦。

就像在几何的学习中咱们看到的那样，从不多的一些概念和公理，能推出一系列新东西，这种推理方法就叫演绎推理，演绎证明。

使数学成为抽象性的科学，建立了演绎证明，这确实是了不起的一步。

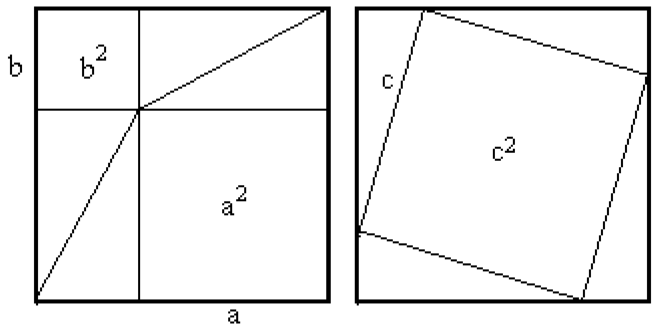
“ 逻辑朗朗，数学首次辉煌 ”，这首功当归于毕达哥拉斯学派，当然还有他的老师泰勒斯先生。

毕达哥拉斯赫赫有名的几何发现，当然是西方人所说的毕达哥拉斯定理了。当然，咱们把它叫做勾股定理也决没有损害到他的知识产权。在我看来，这个定理两种名称都能叫，都是咱地球村的宝贵遗产。当然，咱中国的勾股定理毕竟要早 500 年发现。

据说毕达哥拉斯在得出这条著名定理，兴奋得了不得，认为这是上天的赐予，曾向神供献顾一百头牛。所以这个定理在中世纪也叫做“百牛大祭”。

杀一百头牛这未免残忍了些，违反牛道主义，但也说明了这条定理在古人心目中的地位。那么究竟毕达哥拉斯是用什么方法去证明的呢？一般认为可能是下面这种面积割补的方法。

在下面的图形中，可看到两个一样大小的正方形，边长都是 $a+b$。



第一个正方形分成六块，即两个以直角边为边的正方形和四个与给定的直角三角形全等的三角形。从第一个正方形中减掉四个三角形，剩下的面积就是 a^2+b^2。

第二个正方形被分成五块，是一个以斜边 c 为边的正方形和四个与给定直角三角形全等的三角形。同样，从第二个正方形中还是去掉四个三角形，就留下了那个以 c 为边的小正方形，所以剩余的面积是 c^2。

两次剩余的面积应该相等（等量减等量嘛），所以当然就应该是 $a^2+b^2=c^2$ 了。

当然这里还要说明，第二个正方形中间的那一块，确实是边长为 c 的正方形。边长是 c 不成问题，关键是要看四个角是不是直角了。换句话讲也就是要用到“直角三角形的三角和等于两个直角”这个定理。

一千五百年前的一位历史学家认为，毕达哥拉斯学派确定证明过三角形内角和等于 180°，初中的朋友们都知道，要证明三角形内角和，就要用到平行线的性质，所以呢，平等线方面的理论也就归功于毕氏学派啦。

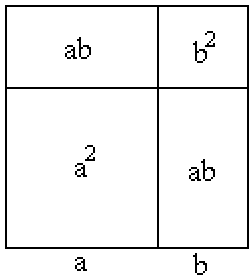
著名的毕氏三数，在上回已经提过。这次回到了毕氏的领地了，自然也要道个分明。

毕氏学派用来计算这三个数的公式是：

$$m，\frac{m^2-1}{2}，\frac{m^2+1}{2}，$$

当然这里 m 必须是奇数，要不然后面两个式子可就算不出整数了。

这三项虽然可以构成毕氏三数，但却不是全部的数组。各位同学可以和上一回用的公式对照一下，动手试试，便知结果。



毕达哥拉斯们用几何图形的变换和分割得出了勾股定理，自然是心情振奋，所以就用几何图形这种好武器到处开拓，许多代数问题也因此而得到解决。

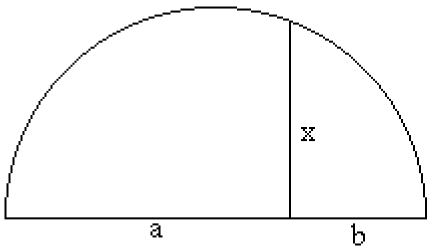
在他们那儿，完全用长度来表示数，根本没有适当的代数符号，用灵巧的几何程序去解决代数问题，也许咱们可以把这叫做“几何的代数”吧。

看看左面的图形，大家都会发现是初中代数课本封面所画的一个图形。

用这么个图形不就能证明（a＋b）$=a^2+2ab+b^2$这个代数恒等式了嘛。

还有像（a－b）（a＋b）$=a^2-b^2$，4ab＋（a—b）^{2}＝（a＋b）^{2}这样一些式子，毕氏门徒都是用几何图形的剖分来证明的。

用几何作图解方程．也是毕代学派喜欢做的事情。



同学们都知道，给了你两条已知线段 a、b，要求作出一条新的线段 x，使得 a：x＝x；b，我们可以用 a＋b 为直径作一个半圆，然后从 a、b 接头的地方作一条垂直线段就是 x 啦！

所以，这线段 x 的长，就是 $x^2=ab$ 的解了。

毕氏学派的几何式代数倒是挺巧妙，但哪里比得上用代数符号，既简单又方便。

说白了吧，他们那种方法是“手工业作坊”，做出的东西倒很精致，也许还能算艺术品，但效率可差多了，要一题一法；我们用代数符号，那可是“大工业机械化生产”，一种方法就能处理一大批问题。

毕老先生对几何的这种偏爱，恐怕是内心里面那种追求和谐、追求完美的心理在起作用。而几何图形的美更能直接传达给每一个人。毕达哥拉斯有一句至理名言：“凡是美的东西都具有共同的特性，这就是部分与部分以及部分与整体之间的协调一致。”

其实咱们每个人都在实践着毕老前辈的教导，比如说到哪一处名胜摄影留念，很多时候我们都是把自己放在画面的一侧，放在中间就不太好看了。当然也不能太靠边了，“过犹不及”嘛。一般来说大约站在画面的 0．618 处比较多，比较合适。

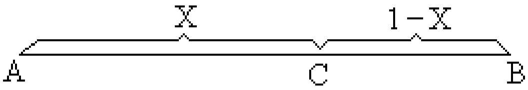
世界上绝大部分国旗都是矩形。大伙把这百多面国旗拿出来看看，匀称好看的也大多是那些边长之比接近 0．618 的。从古代起人们就似乎有这种感觉，这种矩形特别令人赏心悦目。

这样一个比就叫做黄金比，而一条线段分成这么两段的话，就叫黄金分

割。瞧，多值钱！多被人们看重！

那么这 0.618 黄金之比倒是如何发现的呢？这就要想到毕达哥拉斯的那段名言了：

假如 C 是线段 AB 的一个分点。



为了使 C 满足毕达哥拉斯所讲的“部分与部分以及部分与整体之间的协调一致”，显然应该有：

AB：AC＝AC：CB 如果 AB＝1，咱们看看 AC 应该是多少。设 AC＝x，那么就有：

1：x＝x：（1－x）

也就是方程 $x^2+x-1=0$

接着解这个方程那倒不费力$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$！

人们把它称之为“美的密码”，二千多年来如痴如醉。毕氏团体更是把含有这黄金分割点的五角星作为他们的徽记。五角星中的黄金分割点究竟有几个？其中的黄金分割究竟在哪里？好好的画上一个五角星，就立即会发现了。

这毕氏门徒们对几何形体之美是如此神魂颠倒，弄得对什么样的几何体都要给个“说法”，以符合宇宙的和谐之美。

比如像正多边体，它们确实对称，均匀，所有的面都是正多边形，而且还是都一样的多边形，有着一种均衡、对称的韵律美。像立方体（也就是正六面体），有四个三角形面的正四面体，有八个三角形面的八面体，都是咱们平常经常看见的。

毕老先生们就把它们和古代人认为的四种原始“元素”神秘地联系在一起：四面体代表火；二十面体代表水；八面体代表气：六面体能很稳地放在地上，就让它代表地了。

怪不得他们的学派弄得神秘兮兮的，原来做学问的时候就有着这毛病。追求美、追求和谐自然不错，不过一旦“唯美”了就过了“度”，反而把本来是美的弄成不美了。

毕氏学派也很崇尚数字之美。他们把 6 叫做完全数，因为 6＝1＋2＋3，而 1、2、3 是 6 的全部真因子。

28 的全部真因子是 1，2，4，7，14，而 28＝l＋2＋4＋7＋14，所以 28 也是个完全数。

人类对完全数的寻找可真是费了劲。直到 1952 年，才知道 12 个完全数，它们都是偶数，其中头三个就是 6，28 和 496。

那么奇完全数是否存在呢？这就成了数论中一个著名的还没有解决的问题。

现如今咱们有不少人，要电话号码拿汽车牌照，以至于结婚、开张，都想弄个吉利的数码讨个口彩，什么“168”啦，“1898”啦，为弄个数码花钱托人。要是摊上个“184”，定有几天几夜睡不着。

不过喀们这些个可爱的土迷信要是到了毕达哥拉斯那儿，可真算得上粗俗不堪土得掉渣，连讲究个迷信都没那份水平。

那么毕达哥拉斯们又把什么数看成是大吉大利的呢？这就是亲和数。亲和数总是成对的，毕达哥拉斯提出的一对亲和数是 284 和 220。

为什么称它们为亲和数呢？因为，220 的真因子是 1，2，4，5，10，11，20，22，44，55，l10，其和为 284；而 284 的真因子是 1，2，4，71，142，其和为 220。

你瞧，这两数倒亲亲密密，关系不浅，所以那时就把这两个数分别写在两个护身符上，两个佩带护身符的人一定能平平安安万事顺利友谊地久天长。这洋迷信还真上点档次，有点学术水平。

奇怪的是，从毕老前辈以后，很长一段时间都没有发现新亲和数。直到 136 年，法国数论大家费马才宣布 17926 和 18416 是另一对亲和数。又过了两年，法国数学家笛卡儿我到了第三对。

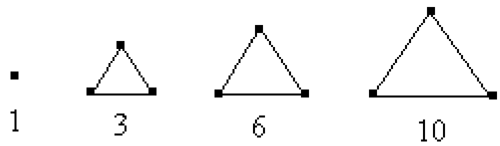
瑞士数学家欧拉其志不小，他想一劳永逸地解决这个问题，虽然不太成功，但他仍然才气非凡地在 1747 年给出了一个 30 对亲和数的表，后来又扩展到超过 60 对！

在这漫漫的寻宝历史中，还有一件趣事，一个十六岁的意大利男孩帕加尼尼，居然在 1886 年发现了被人们忽视的、比较小的一对亲和数：1184 和 1210。现在，已经知道的亲和数有 1000 对以上。

尽管亲和数、完全数被毕氏派笼罩了一层神秘迷信的色彩，可这毕竟开拓了数论——这门古老而又年轻的数学学科的道路。

毕氏数学“学会”不但从真因子这方面去研究数，而且他们把整数看成是一些几何图形的排列。他们常把数在沙滩上用小石子排成某个图形。

1，3，6，10．……这些数叫三角形数，因为相应的点子能摆成正三角形。这第四个三角形数特别使他们神往，因为这 10 等于 l＋2＋3＋4，而这四个数更是神秘地被认为是构成宇宙的基础呢！



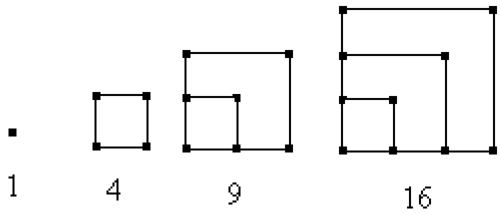
在沙滩上不断地摆弄这些三角形，时间久了当然看出门道来了，三角形数不就能写成 1，l＋2，l＋2＋3，l＋2＋3＋4 吗？

这从图形上来看是很清楚的呀！慢慢地又得出了一般情况

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

得出这样一个数列的和已经相当不容易了，但毕氏门人更有绝招，正方形、正五边形，他们都用石子来摆弄一番，得出了更多数列方面的发现。

瞧瞧下面的一些正方形，就是 2500 年前爱琴海滩上的杰作，数一数就能知道，分别是 1，4，9，16……这些数当然就叫正方形数了。用咱们现在的话来说，就是自然数的平方项：1^2，2^2，3^2，4^2……n^2 在某一个正方形中（比如说第三个）打上一条斜杠，正方形不就变成两个三角形了？所以，两个相邻的三角形数的和，就是个正方形数，用现在的记法就是：



$$\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n^2$$

这正方形数的花样他们还能变出更多。比如说把这正方形的点阵分割成一把一把曲尺，就像我们在图里看到的那样，您再仔细看看，每一把曲尺里都是多大的数？从里向外一数就可以明白了，不就是 1，3，5，7，……，奇数数列！

再把它们加起来，不就是个正方形吗？于是有：$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$

且说毕氏学派把学问发展到这份上，就觉着相当满意了。很对得起自己，也很对得住和谐完美的宇宙了。

“万物皆数”，在他们看来确实是颠扑不破的真理了。当然，他们心目中的“数”，是完美、和谐、有着种种美妙表现的整数。

那么当时难道就没有分数？当然不会。做买卖，搞贸易，测天量地，不可避免会出现“零头”，要把一个单位，比如说一块钱啦一尺长啦，分成几分之几。就是日常生活，拿了一块面包分给几个孩子吃，也要平均分一下，这样久而久之，当然会有分数的概念了。

但是毕氏学派并不把这些分数看作是一类新的数，而是把分数看成两个整数的比：

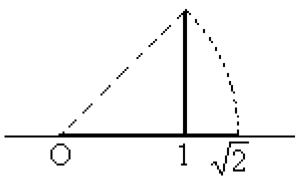
$$\frac{p}{q}$$

这么一来，一切都还是整数的天下，完美无缺的世界当然会永远继续下去。

毕氏学派把分数看成是 $\frac{p}{q}$ 倒也很对，我们现在也还是这么看的。

而且这么一来，也没有古埃及人和巴比伦人那一套繁杂的表示了，当然是一大进步。

把数和图形联系起来是华达哥拉斯们的一大爱好，什么三角形数啦，正方形数啦等等，从中还发现了不少美妙的性质。那么这整数之比又用什么图形呢！当然也有办法。



用一条直线，上面标上单位，哪一个分数不能在这条直线上找到一点呢！

比如说 $\frac{p}{q}$：

要表示的话，就把 0 到 1 那段线段等分成 q 份，再取其中的 p 份，不就成了？这样，每个分数（按照毕老的意见，是“整数之比”），都对应着直

线上的一个点。

在这些老前辈看来，直线上的点就这么用完了，不是整数点，就是分数的点。所以，像$\sqrt{2}$这样的无理数居然能在直线上表示出来，对他们来说，简直是不能忍受的大打击。

这$\sqrt{2}$的发现很可能也是在研究直角三角形时产生的。

等腰直角三角形是一个常见的三角形了，如果两条直角边都等于 1 的话，那么用毕达哥拉斯定理，当然能得出斜边应该是 2 的平方根，也就是$\sqrt{2}$。

当然那时候这$\sqrt{2}$也不是咱们现在这种表示，大家也都把它当成是一个有限的小数，那里想到会出什么事呢？比如巴比伦人，就是用一串六十进制的分数来表示的：

$$1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$$

想法大家都差不多，但是用毕氏学派的惯用语言来说，那就是$\sqrt{2}$肯定也是两个整数之比，绝对错不了，否则宇宙不乱了套？

这毕氏一派毕竟是讲究推理，讲究证明，2 开平方到底是个什么样“整数之比”，总想问个明白。这种正面寻找的工作究竟做了多少时候，想了些什么办法，有哪些人从事这项课题，又拔了多少科研经费，咱们现在都不清楚了。不过虽然一直都没找到这“整数之比”，也都觉得不会有多大的问题。

这一天，毕氏的一位门徒希帕索斯先生，又把这个问题拿出来考虑一番。猛然间想到，既然大家都认为它是一个整数之比，那不防设它为$\frac{m}{n}$。

约去 m、n 的公因数，则 m、n 之中至少有一个是奇数。

如此一来，$2=\frac{m^2}{n^2}$，从而$m^2=2n^2$是偶数；

m^2既是偶数，那么 m 必然也是偶数，因此 n 是奇数。

m 既然是偶数了，那么可以设它为 2p：$m=2p$，这样就有$4p^2=2n^2$，约去 2 就得到$n^2=2p^2$，n 又变成偶数了。

如此一来产生矛盾，那$\sqrt{2}$的地位就十分清楚了：根本不可能是两个整数之比，不可能是分数。

一个新的数发现了。一种新的证明方法也从此得到了运用，这就是上面所用的反证法。不过希帕索斯并没有因为这两项成果得到什么科学奖，却被他的同伴们引到了茫茫的大海上。

话说这希帕索斯的发现在学术讨论会上一公布，顿时是议论纷纷，那惊愕的程度不亚于原子弹爆炸。

其实咱们细想一下也并不奇怪。实际生活中谁会用到$\sqrt{2}$？分数足矣！如果你去买$\sqrt{2}$斤糖，售货员小姐不给你一个“卫生球”才怪呢！说不定还要喊保安。再说了，她也没法称啊！就是拿最精密的天平，也绝对称不出$\sqrt{2}$来。

人们的直觉中，根本没有无理数的地位，只有当演绎推理的方法一应用，大家这才张开吃惊的嘴巴。在这里，我们看到了另外一种数学之美：逻辑美。

再说这毕氏门中之人自然都不是无能之辈，一开始当然是不相信，都想

找找希帕索斯的发现是不是有些毛病，挑出点错。可日子一久，在那铁的逻辑推理面前，都只能哑口无言。

一边是苦心经营多年的和谐完美的数的大厦，一边是不容怀疑、被他们的当作锐利武器的逻辑推理，这真叫“以子之矛，攻子之盾”，学派陷入了两难境地，思想混乱，信仰危机。

这就是历史上常常说起的“第一次数学危机”。

痛苦万状的毕氏学者们真不知怎么办是好。照理来说，痛痛快快地承认，向真理投降，不失为大丈夫气概，学者风范。但细细一想，却万万不可。且不说心目中那神圣和谐的宇宙秩序倾刻瓦解，就连学派的地位也岌岌可危，闹不好会全盘崩溃、树倒猢狲散。

于是这帮有着责任感的弟兄们决定再做努力，邀请那位闯祸的哥们作最后的谈判。

会谈是在平静海面的一条小舟上进行的。希帕索斯真理在握，自然力图再一次说服大家，但船里的诸位哪能不明白。

不明白的是那位希帕索斯先生，大伙的目的是要他放弃“邪说”，以后少说废话。希先生还想辩个究竟，但见七八只手一起伸过来，来了“一、二、三”，听“扑嗵”一下，请他一了百了。

数学史上一位悲壮的殉道者就这样产生了。

崇尚“美”的毕氏门徒，就这样否认了“真”，违背了“善”。

看来不管什么改革运动，有些人不是不明白要改革，但他更明白改革要改到自己头上。所以反对起来最起劲。

不过也有人说，希帕索斯的那帮弟兄看在多年的情份上，饶他一死，但立即革出教门，请他马上离开家乡，自我流放。

然后就造了一座假坟，断了其他人的是非之心。

这毕达哥拉斯学派的功功过过咱们已经明明白白，成败是非咱们也已一清二楚。

真可谓：伟哉毕氏学派！创千年数学之基业，开逻辑证明之先河！

悲哉，毕达哥拉斯学派！置伟大发现于不顾，入“唯美”迷途而不返。

由于他们不承认无理数，所以他们认为，结构严密的数学大厦只能是几何。是啊，正方形的对角线在几何图形中一点没困难，一点没毛病，但是一到了代数、算术中，要用一个他们认为不可能存在的数去表示，确实使这些老先生既头痛，又迷糊。

于是，几何在希腊数学中占有特殊地位。代数和几何分成了截然不同的两部分。

一边是遭到他们冷落的代数和算术，许多方面的问题在那会儿都用几何方法去解决。古希腊的学者们对“算”没什么兴趣，认为那不过是商人们关心的事，哪能进入神圣的数学殿堂！

一边是备受青睐的几何。用严密的逻辑，严格的推理，把它构筑成一座令人赞叹的宏伟建筑。一直到欧几里德，集希腊数学之大成，以不朽名著《几何原本》登上了当时的最高峰，我会在第四回中详细介绍。

上回书中说到中国的墨子谈到的分割问题，与古希腊倒也有一段瓜葛。这也并非说有什么产权官司好打，只不过是异曲同工而已罢。

那墨老先生是说，把一个物体从中间分开，丢掉一半；再从中间分开，再弃去一半；如此这般分下去，最后剩的就是一点了。

墨老先生是公元前五世纪人，和希腊的学者们完全是同时代。那么他的希腊同行们是如何看待这个问题的呢？

话说到这儿，也该讲个故事给大伙听听了。不过，这次的故事还是个进口的，虽然都是些洋名号，聊起来倒是挺有趣。

那希腊雅典，本是神话的沃土，什么太阳神阿波罗，战神阿雷斯，雅典守护神雅典娜，如此等等，真是丰富多彩，琳琅满目。

内中单道一位善跑之神阿基里斯，虽然没有与咱中国追太阳的夸父在什么运动会上一决雌雄，相信他俩恐怕也是不分伯仲，一天之内绕地球几圈没问题。

这一天，不知为的是啥，阿基里斯居然要与乌龟比一比高低。为了表示大度，决定先让乌龟跑上一百里。

比赛尚未开始，有一位智叟在旁放了话。他说阿基里斯永远追不上乌龟！

各位观众一听愣了神，纷纷请智叟说个明白。

这位智叟不慌不忙说了一番话：“咱们现在就比方阿基里斯跑的速度是乌龟的十倍。那么当阿基里斯跑完开始的一百里的时候，乌龟又向前爬了 10 里，等阿基里斯追上这 10 里，乌龟又向前爬了 1 里；等冠军阿基里斯再追上这 1 里，乌龟又走了 1/10 里……，如此一来，你们说阿基里斯能追上乌龟吗？”

众人想想这道理还真对。后仔细一想，与真实的情况又大不一样啊！被智叟弄得一头雾水，脑门子想疼了也得不出个所以然，只有作鸟兽散回家睡觉。

这种似是而非、充满着矛盾的问题，就叫“悖论”。“悖”，就是有悖常理的意思。这就是历史上有名的“芝诺悖论”。

提出这悖论的芝诺是公元前 495 年到公元前 480 年间的数学家，也是位哲学家。他和他的老师都是毕达哥拉斯派的学者。

芝诺先生是位大学问家，当然不会不明白阿基里斯实际上一会儿功夫就能上乌龟。他提出这么个问题，正说明他想得深刻，问得高明，把人们原来模糊的东西，很清楚很尖锐地展现出来。

那人们又模糊在什么地方呢？这就是无限与有限的关系。

阿基里斯要追上乌龟，就要不停地跑下去。在这不停地跑（也就是“追”）的过程中，他追的路程依次是：

100，10，1，0．1，0．01，0．001，……

这是无限多个距离，越到后面越小。

有人说了，后面数字哪怕再小，总是个有大小的数，那阿基里斯和乌龟不就还是存在距离吗？比方说，从头数第 10000 个数，是 10^{-9997}，($1/10^{9997}$)，不有大小吗？

不错，你说的有几分对。如果阿基里斯走到这时停下来了，那两者之间确实从理论上说有这么点点小距离。

但是现在阿基里斯是继续地往下追！所以两者的差距肯定比这要小！

阿基里斯不停地这么追下去（就像我们在前面所说过的那样），无限地追下去，那两者之间的距离可就比你给的任一个很小很小的差距还要小。

比方说，你说现在阿基里斯和乌龟相差 $1/10^{100000}$，那么因为继续无限地在追，两者之差肯定比它小。

如果你还有兴趣举一些很小的数的话，回答还是一样。这样一来，两者

之间的距离就只能是零了，也就是神跑手追上了乌龟。

这里的关键就是“无限”，无限地在追！中途停下来可就不成了。

通过无限的过程，一直往小里变化的正数可就变成一个固定的常数了。

在古代华夏，差不多与芝诺同时，也有对无限的思考。

一位是咱们前面提过的墨子。

另一位是庄子。老庄先生有句名言：

“一尺之棰，日取其半，万世不竭！”意思是把长一尺的木棒，每天取下前一天所剩下的一半，一万年也取不完。

这墨子说的也是把东西一分为二，不过他是说，老这么分，无限地分，分到最后就没有了，变成一点（“零”）。

通过芝诺悖论的分析，当然大家知道墨子的话是对的。

那庄先生呢？他的话对吗？

如果真是只取一万年，停下来不取了，那自然是还有这么一小段（不是一点），倒也真是没取完。

不过古代这“万世”，意思也就永远不停地取下去。这么一来，庄先生可就要“梦蝶一场空”了，说的就不对了。

这无限与有限还真是不一样。所以就像咱们的圆脑袋不能往方帽子里套一样，那无限的问题也不能用有限的框框去套。

话是这么说，可事到临头又会不自主去套以前现成的框框。

比如说，那阿基里斯追上乌龟的距离之和应该是：

100＋10＋1＋0．l＋0．01＋0．001＋……

这么多个有限的数！无限多个！加起来照咱们以前的框框，应当是无限大了！但答案自然不是无限大。

瞧，那后面的小数之和：

0．1＋0．01＋0．001＋…＝0．1 就是循环小数 0．l，而 0．1＝1/9，是个有限数！

当然，并不是所有无限个数的和都是一个有限数：

l＋10＋100＋1000＋……

这就是无限大了。

所以，无限的世界与有限的世界不一样，具体问题要具体分析。

奇妙的无限世界并不神秘，而彻底揭开这神秘的面纱，已经是离古希腊2000 多年后的 19 世纪了。

让咱们回过头来再谈一番古希腊，然后聊 19 世纪不迟。

再说这古希腊数学，从公元前 600 年泰勒斯首开证明先河，到公元前 300 年，著名的欧几里得《几何原本》的问世，可谓是成就辉煌的 300 年，英雄辈出的 300 年。

在这 300 年中，有三个不同的发展方向，我们已经谈了其中的两个。

其一，是泰勒斯开头，毕氏学派高擎大旗，后经希波克拉底、欧多克斯等人不断努力，形成一股讲求严密和逻辑推理的主流。最后汇入到欧几里德的《几何原本》中去，使其成为傲视千年的经典。

其二，以芝诺悖论为开篇，有关无穷小、无限以及求和过程的各种概念的萌发，代表了古代对极限思想的认识，其中又以欧多克斯的穷竭法最合理，最先进。而其余的学者，往往只能用迷朦的眼光看着自己的问题。一直到现代，微积分发明之后，才得最后的解决。

那么，这第三个方向又为如何呢？这倒可以从古希腊几何中的三大难题或说趣题谈起。

这三大难题也许大家都知道一些，因为它们很有名，而且有名有了几千年。

这是三个著名的作图问题：

化圆为方问题。就是作一个正方形，让它与一个给定的圆面积相等。

三等分角问题。就是给你一个任意角，把它分为三等分。

倍立方体问题。给你一个立方体，让你作一个新的立方体，体积是原来的两倍。

这三个问题名气之大，可以说是上下几千年，纵横几万里。它的有名居然是因为统统作不出图！是古希腊所谓几何三大作图不可能问题。

不过，咱们要说得周全一些的话，是尺规作图不可能问题。

这尺和规是人类老祖宗最早的作图工具。

所谓大禹治水，是“左准绳，右规矩”，这是前面说过的老话了。不知古希腊人让哪一位神灵执规拿矩的，反正不会没有。

在古代，这国家元首级的人物才拿有规矩，可见这尺规在古人心目中神圣的地位。“规矩”一词在以后更转化或规则、准则的意思，也可知用尺规作图是当时作图的主要手段。

尺规的作用这么一神化，立即变得崇高伟大。喜欢事事讲理由、处处要严格的希腊人又给自己作图立了个“规矩”：只准用直尺和圆规去做几何中的作图题。

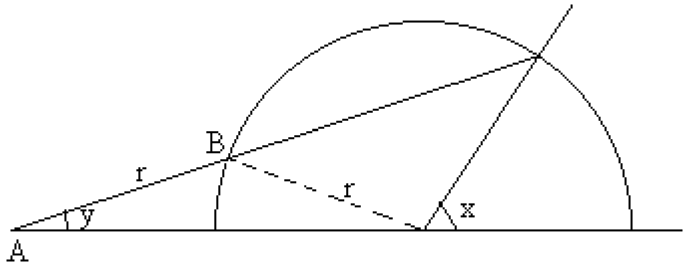
而且这直尺是没有刻度的，直尺和圆规也不能使用无限多次。实际上作图，谁又能用无限次尺规去画图呢？但是希腊人做这么个限制，说明他们考虑得周密：不但实际上不允许你无限次地使用作图工具，而且想象中的无限次使用也不允许。

用尺和规确实能作出许多的几何图。也许是太多了，古希腊人认为它们简直是无所不能了。所以对于尺规不能作的图，自然吃惊。

比如说等分一个角。两等分，也就是平分，是很容易用尺规办到的事。所以大家很自然地想到将角三等分。再说了，将一条线段任意等分，是件再简单不过的事了，为什么对角要说“不”呢？

但是，用直尺和圆规确实不能三等分角，这是早已得证的了。现在还有许多人在撞运气，试图想各种办法，用尺规作出来，那真是所谓“痴心妄想”。奉劝诸位不要虚耗精力在这类不可能问题上。

对一些特殊的角，比如 90°角，用尺规那是可以三等分的。但对 60°角就不行了。不过我们要用一把有尺度的直尺，那任意角都可以三等分。



比如对任意角 x，将角的底边向左延长，而以为 o 为圆心，取半径 r 作一半圆。在直尺上刻 A、B 两点，使得 AB＝r。

然后呢，就保持 B 点在半圆上，滑动直尺，使 A 点在角 x 的延长线上，同此，直尺还要通过 x 角的终边与半圆的交点。

最后按住直尺，画一直线，那么角y就是$\frac{1}{3}$x。

有兴趣的朋友可以自己证明这一点。

这种方法古希腊人也早就知道了（多聪明），但他们的游戏规则却宣布这么做不算。

巧妙的方法还有的是。古希腊的尼哥梅德斯（约公元前 240 年），设计了一种工具，可以画出一种叫蚌线的图形来。用这个“ 蚌 ”，就能三等分一个任意角。

什么叫蚌线呢？大家看一看图就可以明白，就是从直线一点 O，画出无数射线，与直线 RS 相交。在这些射线上都从交点起，截取相同长度的线段 a，那么这些线段端点的几何轨迹就是蚌线。

下面我们就可以享受一下发明的成果了。

从∠AOB 的 OB 边上取一点 K，作 KL⊥OA。再按点 O，直线 KL 作出蚌线，并且线段 a＝ZOK。过 K 作 KN∥OA，交蚌线于 N，再连结 ON，就大功告成了：

■

$\angle NOA = \frac{1}{3}\angle AOB$

如果咱们作出 MN 的中点 P，连结 PK，就能很轻松地证出结论。

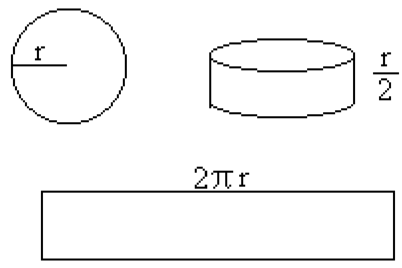
关于三等分角，从古到今想的办法真叫“ 不计其数 ”。古希腊的人在想，近现代的人也在想。不过不是用尺规作图，而是发明一些工具，或者突破对尺规作图的限制。

比如说在上世纪（对数学来说这并不是个古老的年代，我们大部分人只有在大学才学到一点点本世纪的数学），有位叫斐耳科斯基的先生给出了一种“ 渐近 ”的方法，按照他的方法，你作图的次数越多越准确。如果无限多次作下去（这自然是不可能的），就可以精确地得到所求等分线。

回头再说说化圆为方。

如果圆的面积是πr^2的话，那么所要作的正方形边长就是$\sqrt{\pi}$ r，所以问题的关键是$\sqrt{\pi}$能不能用尺规作出来。直到百多年前人们才最后确定$\sqrt{\pi}$是不可能用尺规作出的。

不过不用尺规方法就多了，而且也挺简单：



先以已知圆作底面，以$\frac{r}{2}$为高作一个直圆柱，

然后把这个直圆柱放在平面上滚一周，得到一个长方形。这个长方形的面积就等于已知圆的面积πr^2。最后把长方形变成等积的正方形，就比较容易做了。

在三大不可能作图问题中，最具传奇和文学色彩的要算倍立方体问题。

据说在公元前五世纪的雅典，原本欢乐活跃的都市突然变得死气沉沉。却道为何？原来此地正受瘟疫袭击，千树薛荔，万户萧疏。

幸存下来的人用虚弱的身体匍匐在太阳神的神殿下，祈求阿波罗高抬贵手，放咱们下界百姓一码。

一片哀告声上达天廷，阿波罗终于有了怜悯之心，传下神谕：“只要诸位把神殿的立方体祭坛扩大一倍，那么悲伤和忧愁将一去不回，歌舞升平的日子就会到来。下界的愚民们，好好干吧。”

雅典人听了以后自然很高兴，立刻重新做了个立方体祭台，边长是原来的两倍。认为这满足了阿波罗的要求。

谁知瘟疫仍然疯狂肆虐，大家似乎觉察到太阳神的震怒。是不是没给他老人家把事办好？于是，立刻再请各方高士到祭坛前紧急研究，这才发现体积竟然是原来的八倍，而不是两倍！

后来这个问题就成了文人雅士们津津乐道的话题了，自然也发明了不少工具，想了不少不用尺规的办法。

这三大问题好像谈不上有什么实际意义。但是，数学的难题往往有这样的特点，它们能激发起研究的兴趣。有时虽然问题本身并未解决，但是却发展了丰富了其他一系列问题，甚至于能启动一门新学科！大数学家们都把这样的难题叫做“能下金蛋的母鸡”。

这三大不可能问题虽然最终证明是不可能的，但却引发了对圆和直线以外的曲线进行研究的兴趣。而卓有成就蔚然而集大成者，就是后面与各位见面的阿波罗尼斯！

希腊人在古代就对这些复杂的曲线有那么多深刻的认识，广博的知识，与那只能下金蛋的母鸡大有关系！

与同学们谈了多时希腊数学，当然要攀登一下它的高峰《几何原本》。

欲知后事如何，且听下回分解。

第四回　东方中国　《九章算术》标青史
西域雅典　《几何原本》传百世

《几何原本》的版本竟育一千多个，在西方仅次于《圣经》。对“辗转相除”、“盈不足术”你一定感到很新奇，不过两千年前的《九章》早就有了记载。毕氏定理意和“新娘的椅子”有关系。柏拉图在门口挂了个牌牌：“不懂几何的人不准入内。”

同学们看完回目也许纳闷：上一回中说得好好的要谈谈《几何原本》，如何又出来个《九章算术》？此两书可否相提并论？

大家有这些问题倒也并不奇怪。历来西方学界常常只提《原本》如何如何了得，忽略中国古代算术的独特成就。大家学到初中，也往往只知有《原本》，不知有《九章》，都因为咱们现在的数学体系，全以《原本》为蓝本。

其实，两篇巨著都是名标青史、流传百世的大手笔，各有千秋，各领风骚，各辟蹊径，代表了数学发展的不同方向呢！

再说，虽然《九章》不知出自何人之手，而《原本》是由自欧几里德著，但两书成书的年代（那时不能叫出版，没出版社，都是手抄本），大约都是公元前二三百年间，《几何原本》要稍稍早一点。

花开两朵，各表一枝，让我分头说起。

且说古华夏文明在开始的几千年确实是灿烂，确实够辉煌。就从数学这方面说，咱们在前面已经看到，拿过好几项世界冠军：十进制位值记数法，最早的先进计算工具算筹，《周髀》中介绍的勾股定理、日影测量以及复杂的分数运算。

《周髀算经》中分数运算已经很令我们吃惊了，在那样繁杂的分数除法中，很正确地使用了分数的基本性质，达到了熟练运算而法则也了然于胸的程度，不简单，堪称世界第一。

不过，比起《九章》中的分数运算来，《周髀》就比较逊色了。《九章算术》中的分数运算法则系统明确，除了约分等的步骤与今略有不同外，其他运算法则与如今的完全一致。

那么《九章》又是一本什么样的算书呢？起自何代？出自何人之手？内容有哪些？下面我就一一道来。

我国古代数学典籍，是十分的丰富。其中尤以“算经十书”最为宝贵。这“算经十书”是几千年来，辗转相传的中国古代算术的精华本，使得中算传统一脉相承，具有自己的特征和风格。而《九章算术》正是《算经十书》中的最重要一部！后世为《九章》作注解的，学习《九章》进而研究并成正果的，把自己作的书也称为什么什么九章的，大有人在。

《九章》，标志着我们中国初等数学体系的建立，所以在隋唐那时候，国家当时就在相当于现在的国立大学里，设立算学专业，用的教材就是《周髀算经》和《九章算术》。

说了半天，这《九章算术》到底是什么时候由什么人写成的呢？

由什么人写成的，这已经很难考证出来了，除非以后在地下挖到的什么“简”上有另外的说法。不过从这本书的情况来看，很可能是经过许多人辗转传抄，再加上批注一番，或者增加一些，才成了一本书。

那么这本大约又是什么时候写成的？这也好像不能完全肯定。有人认为

是西汉时期；有人认为与《周髀》同时。不过成为我们现在看到的这种样子就比较晚了。

现在流传的是刘徽加了批注的本子了。刘徽“幼习九章，长再详览”，也就是说小时候认真细致地学习《九章》，长大后更进一步详加研究，于是成为名闻中外的数家大家。

那么《九章》究竟又有些什么内容呢？

它是一本数学应用的问题集，一共收集了 246 个问题。

说到这儿，可能有些朋友会感到心烦，在学校、在家里被习题集折磨得已经够呛，想弄本演义轻松一下，不想又碰响了地雷。

要我说那《九章》里面的 246 个问题不是什么题目，咱也不敢昧着心瞎蒙。不过，那古人的意思是借题说“法”，说算理，讲述一般的原则，比如像约分通分啦，方程的解法啦等等。所以，这至多是一本通过例题来讲解方法和原则的书籍，倒根本不是那些搞题海战术的习题集。

《九章》采用的是“问——答——术”这样一种编排的方法，就是先提出问题，再给出答案，最后得出一般的算法。

这算法咱们不要简单地认为就是计算的方法，而应当把它看作是解决问题的方法来得更得当。当然，这解决方法可以是比较具体的，也可是解决一大类问题的一般方法，自然也可以包括计算的方法。

不过这算法不能是泛泛而谈，而是要有具体的步骤，告诉人，一步一步该怎么做。

那《九章》里面的“术文”就是表示算法的，也就是一个程序，而且确实可以用计算机程序设计语言把这些程序写出来，上计算机运算。

现在还有人更想得深刻，也比喻得很生动。他们认为那在古中国时时在用的算筹就好像是计算机的硬件，而“术文”则是软件。有软有硬，形成了传统中国算学的程序化计算的风格。

这样一种与电脑的使用相映成趣的古今局面，自然引起国内外有关专家的兴趣和注意。

从《九章算术》起，中国古代数学著作大多沿用了“问——答——术”这么一种形式，你看，影响多大！

在书中的这 246 个问题中，有的是一题一术，有的是多题一术，有的是一题多术。而且整本书都按实际应用分为九部分，这就是“九章”的来历了。

这九章分别是：方田、粟米、衰（cuī）分、少广、商功、均输、盈不足、方程及勾股。

所谓方田章，主要就是计算各种形状的田亩，有方形的，等腰三角形的（叫“圭”田），直角梯形（“邪田”），还有什么“箕田”（等腰梯形），圆田（圆形田地），弧田（弓形）等等。

方田章先明确方田的算法：“方田术曰：广从步数相乘得积步。”又说“广从里数相乘得积里”。方田，就是正形或长方形的田地。

这里的“广”，就是宽。“从”就是“纵”，也就是长，“广从步数相乘”所得到的就是面积的步了（平方步，那时还没有这概念）。

对于圭四（等腰三角形）的面积，是这么求的（“术”）：“半广以乘正从。”“正从”，就是等腰三角形的高。“半广”，当然是指“广”的一半了。所以当然有：

圭形面积＝$\frac{1}{2}$广×正从。

那么一般的三角形为什么就没有招“术”了呢？可能是等腰三角形沿高对称一裁，再移过去一拼，就是一个长方形了。而一般的不等腰三角形就不太好拼了。想想这些古人也真不容易，研究了半天，还只能得个等腰三角形的面积。

《九章》中对梯形的面积，给出的“术”也完全 OK。而对圆型的面积计算，有的正确，有的就不对了。

咱们现在看看《九章》方田章第 31 问。原汁原味，抄录如下：“今有圆田，周三十步，径十步。问为田几何？”“答曰：七十五步。”

这里面“问”和“答”都有了。

“问”中是说，有一块圆形的田，周长是三十步，而直径是十步，请问这块田面积多少呢？这里周长与直径之比，也就是圆周率，是 3，自然很不精确。刘徽先生在几百年后的三国时期（他是魏国人）看到这圆周率 3，自然觉得有补充、更改的必要，所以就很详细认真地进行了研究，并发表了论文（他很谦虚地用给《九章》加注的形成公布了他的光辉论著），咱们在后面会慢慢谈起他的这些伟大成就。

那么，计算圆的面积，为什么给了周长，又给直径呢？那不是多给已知条件了吗？

实际上并不是这样，而是因为随后给出的招“术”中，有四个计算公式，都是利用圆周、直径表示的。

“术曰：半周半径的相乘得积步。又术曰：周径相乘，四而一。又术曰：径自相乘，三之，四而一。又术曰：周自相乘，十二而一。”

瞧瞧，一下子给出了四个“术”，或者说四个解题的程序：

圆面积＝半周×半径，

圆面积＝$\frac{1}{4}$×圆周×圆径

圆面积＝$\frac{3}{4}$×圆径×圆径

圆面积＝$\frac{1}{12}$×圆周×圆周

这里，都是把圆周率取为 3。你用圆周率 3，可以很方便地在这四个公式之间互推。

平面圆形面积当然好算一些。那么，体积在《九章》中又有什么“术”呢？

体积的算法集中在商功章里。商功章里首先就给出了城墙啦，堤坝啦，沟渠啦等等的体积，这些体积好算，大家在小学就学过，不外乎截面积乘以一个长度，而截面大多又是个等腰梯形。商功章中给出的术文是：

“并上、下广而半之，以高若深乘之，又以袤乘之，即积尺。”

那个“上、下广”，就是截面等腰梯形的上、下底；而“高、深”，就是截面的高；而“袤”、就是城墙沟渠堤坝之类的长度了。很显然，这个公式与现在的计算是分毫不差，值得赞叹。也难怪，春秋战国一直到秦始皇，修长城筑城墙挖沟渠都成了小小老百姓每年每日的功课了，再算不好体积，量不出土方就对不住伟大的秦始皇们的栽培了。

这个圆柱体呢，在那时叫“圆■■”（b ǎo d ǎo），也就是一个土碉堡，

土炮楼子。刘徽说：“■……谓以土拥木也。”也就是用木头搭个架，然后用土拥上去，成一个小土堡。

可见那时候庄园主们的土炮楼比比皆是，使得《九章》作者的脑子里的印像，圆柱体就是土堡子了。

圆■■的计算“术”是“周自相乘，以高乘之，十二而一”，也就是：

$$\text{体积}=\frac{1}{12}\times(\text{周长})^2\times\text{高}$$

考虑到那时候 3 是圆周率，那么这个公式是一个精确的、正确的公式。如果不准，那是因为圆周率。

《九章》中的“方亭”、“圆亭”也很有趣，大家想想，亭子这种建筑大体是什么形状呢？大体上是上面小一些，下面大一些，也就是我们所谓的台体。

所以“方亭”、“圆亭”，就是今天的正四棱台和正圆台。像这种台体的体积，算起来是很复杂的，差不多要到高二才能学到。我们在前面提到过，古埃及曾正确地写出它的公式，那可是古埃及数学王冠上的一颗明珠。

而在商功章中，对方亭、圆亭的“术文”分别是：

“上、下方相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三而一。”

“上、下周相乘，又各自乘，并之，以高乘之，三十六而一。”

第一条是说“方亭”的体积：

$$\text{体积}=\frac{\text{上方}\times\text{下方}+\text{上方}^2+\text{下方}^2}{3}\times\text{高}$$

第二条是说“圆亭”的体积：

$$\text{体积}=\frac{\text{上周}\times\text{下周}+\text{上周}^2+\text{下周}^2}{36}\times\text{高}$$

这其中所谓的“并之”，就是相加的意思。而上、下方指的是正四棱台（就是一个正四棱锥截去一个尖顶）上、下底面的边长；而上、下周是正圆台上、下底面的周长。

瞧瞧，比古埃及的成就毫不逊色，而且还多一样圆台（下面我们会看到，还有多得多的在等着）。

许多西方的学者把埃及人的公式称为“最伟大的金字塔”，“了不起的成就”。这些称赞也许都还算恰如其分。不过，好像他们没想到中国。

中华古算在体积、面积的计算方面是当之无愧地领导世界新潮流。

在上面第二个式子中,分母为什么是 36 呢？这也是因为在分子中底面面积的计算是通过周长而来的，把周长用半径换掉，并且圆周率取 3，那么就得出和现在任何一本教科书，任一本数学手册上一模一样的公式了。伟大！

如果那些对古埃及的成就感到惊讶的西方学者，看到下面的公式，他们肯定会再一次对华夏文明产生深刻印象：

$$\text{方锥体积}=\frac{\text{下方}^2\times\text{高}}{3},$$

$$\text{圆锥体积}=\frac{\text{下周}^2\times\text{高}}{36}。$$

这两个公式比台体体积公式自然要简单一些，但也是来之不易。不可能想象，我们的祖先都是一个一个公式通过大量的实例逐渐试出来的，肯定有某种推理和推导和过程，只不过他们认为不重要而省略了。

从以上咱们可以看出，我国几何偏重于实际运用，与希腊几何编于证明推导完全不同。但到三国时代，赵爽、刘徽两位大数学家对《周髀》和《九章》作了很多重要的补证，严密而又精巧，在我国数学的发展上起到极其辉煌的作用。

讲了这么多的《九章》中的几何，其实，《九章》中成就最辉煌的还是算术和代数，它远远超过公元 270 年左右的古希腊水平。

咱们现在学习分数，一般在小学就可以完成了，名副其实的“小儿科”。但现在这一套运算法则，性质等等，欧洲的洋人们一直到 15 世纪以后才逐步形成。原因就是因为一开始，随着巴比伦人走进那六十进分数的繁杂迷宫里去了。

咱们中国人可就幸福多了，《九章算术》是全世界系统地叙述和形成分数算法的最早著作，这个“早”还不是一般的早，而是整整早了 1500 多年！

当然，那时的分数理论和算法与现在的稍稍有些不同，但这种不同决不是本质的。

《九章》中对分数是这么定义的：“实如法而一。不满法者，以法命之。”这里的“实”就是被除数，“法”呢，就是除数。上一句话也就是：“被除数除以除数，如果不能除尽，便可以用法定义一个分数。”

为什么那除数叫“法”呢？其实，“法”就法律规定下来的单位量度。除法，实际上就是看看被除数里面有多少除数，那除数不就相当于比较、度量的单位吗？

咱们在前面已经看过了，“三十六之一”，“八分之四”，等等，都是书中的分数。

所以，以分母为“法”，为标准，分母相同的分数自然归为一类；而不同的就不是一类。

异分母不能相加减，这在《九章》已有认识了。所以，要通分。当然也要有约分，这都在《九章》有清楚明白的叙述。

约分术曰：“可半者半之，不可半者，副置分母、子之数，以少减多，更相减损，求其等也。以等数约之。”

其中所说的“等数”，就是最大公约数。求“等数”的办法是“更相减损”法，实际上就是辗转相除法。

辗转相除法求最大公约数，是一种比较好的方法，比较快。

对于 52317 和 75569 两个数，你能迅速地求出它们的最大公约数吗？一般来说你会找一找公共的使因子，这题可麻烦了，不好找，质因子大。

现在教你用辗转相除法来求最大公约数。

先用较大的 75569 除以 52317，得商 1，余数 23252，再以 52317 除以 23252，得商 2，余数是 5813，再用 23252 做被除数，5813 做除数，正好除尽得商数 4。这样 5813 就是 75569 和 52317 的最大公约数。你要是用分解使因数的办法，肯定找不到。

那么，这辗转相除法为什么能得到最大公约数呢？下面我就给大伙谈谈。

比如说有要求 a、b 两个整数的最大公约数，a＞b，那么我们先用 a 除以 b，得到商 8，余数 r_1：$a÷b＝q_1…r_1$ 我们当然也可以把上面这个式子改写成乘法式：$a＝bq_1＋r_1$ l）

如果 $r_1=0$，那么 b 就是 a、b 的最大公约数 3。要是 $r_1\neq0$，就继续除，用 b 除以 r_1，我们也可以有和上面一样的式子：

$b=r_1q_2+r_2$2）

如果余数 $r_2=0$，那么 r_1 就是所求的最大公约数 3。为什么呢？因为如果 2）式变成了 $b=r_1q_2$，那么 b_1r_1 的公约数就一定是 a_1b 的公约数。这是因为一个数能同时除尽 b 和 r_1，那么由 l）式，就一定能整除 a，从而也是 a_1b 的公约数。

反过来，如果一个数 d，能同时整除 a_1b，那么由 1）式，也一定能整除 r_1，从而也有 d 是 b_1r_1 的公约数。

这样，a 和 b 的公约数与 b 和 r_1 的公约数完全一样，那么这两对的最大公约数也一定相同。那 b_1r_1 的最大公约数，在 $r_1=0$ 时，不就是 r_1 吗？所以 a 和 b 的最大公约数也是 r_1 了。

有人会说，那 r_2 不等于 0 怎么办？那当然是继续往下做，用 r_1 除以 r_2，……直到余数为零为止。

在这种方法里，先做除数的，后一步就成了被除数，这就是辗转相除法名字的来历吧。

一般用辗转相除法，都列成下面的式子：

2	52317	75569	1
	46501	52317	
	5813	23252	4
		23252	
		0	

这就是一开始说的那题。

不过，《九章》中的辗转相除法略有些不同，它叫“更相减损”，是辗转相减的方法。这也很好理解，除法就是一种连续地减去除数的一种简便运算，一直减到结果比除数小为止。

比如我们用“更相减损法”来求 91 和 49 的最大公约数，可以由 91 减 49 一次，得余 42；再由 49 减 42 一次，余 7；更由 42 减 7，这一回要减五次，余的还是 7，再减，就是 0 了。那么这个 7 就是 91 和 49 的最大公约数。

这个 7 就是约分术中所谓的“等数”，因为减得结果和最后一次的减数相等了，就叫等数。

辗转相除法在小学中学都没教过，恐怕是有点难讲清其中的道理。不过，两千多年前的古人居然有此创造，咱们后人再学不会，可就惭愧了，何况这还是一种很实用的方法。

总而言之，分数的加、减、乘、除在《九章》已有完备的“术”了，咱们上面只不过说了比较精彩的一些罢了。中国的分数这一套东西，是对世界数学发展的重大贡献。印度人后来学了去，把筹算改为笔算，再后来阿拉伯人又传到欧洲，这才把欧洲从巴比伦六十进制分数的受苦受难中解放出来。不过那已经是十五世纪了。

此外，《九章》中还提出了正、负数运算的法则，远远比其他国家为早。

且说《九章》中还有一样十分有趣、十分精巧的解题方法，后来在欧洲

被称为“双假位法”，特别受重视。在 16、17 世纪，欧洲人的代数学还未发展的时候，竟称霸数学王国，成了一种万能算法。这就是所谓“盈不足术”。

典型常见的有这么一题：

“今有共买物，人出八，盈三；人出七，不足四。问人数、物价各几何？”

说的是许多人合买一件东西，每人出钱八，多出了钱三（即“盈”）；每人出钱七呢，又少钱四。那么人数和物价各是多少呢？

《九章》中给出的算法程序（“术”）确实很巧妙，而又科学精炼。两千多年前能达如此成就只能说是奇迹。它给出的方法是这样的：

首先，人数的计算很简单，每个人两次出钱，相差为 8—7＝1；这是所谓“一人之差”。而“盈不足为众人之差”，也就是说由于每个人两次出钱都差一点，导致了最后有 3 个“众人之差”，大家相差的就是“盈”的三块钱和“不足”的四块钱之和，“众人之差”是七块钱。“以一人之差约众人之差，故得人数也”。咱们现在以 7 除以 1，就得到了人数是 7 人。下面再来算算买一件东西，不多不少钱正好的话，每人应该出多少钱。

古人是用比例来想这个问题的。这可以这么想，很巧妙：

如果每人出 8 块钱，买一样东西，就多出 3 块钱，那要乘以 4 倍呢？不就是出 8×4＝32 块钱，买到 4 样东西，多 3×4＝12 块钱了吗？为什么要乘以 4 呢？这 4 不就是那不足之数 4 吗？

所以对每人出七块钱买一件东西从而不足了 4 块，咱们当然可以让它扩大 3 倍，变成每人出 7×3＝21 块钱，买 3 样东西，就少了 4×3＝12 块钱。

这么一处理，就让两次多的和少的钱相同了。于是通通相加，也就是每人出 8×4＋7×3＝53 块钱，买 4＋3 样东西，第一次多的 12 块与第二次少的 12 块相抵、变成不多不少正好。

每人出钱53块，买了7件东西，所以买一件东西每人应出钱$\frac{53}{7}$。

上面已经算过有 7 个人，所以物价应该是 53 块了。

当然，《九章》中的盈不足术是一套简炼完整的计算程序，用下面的图示可以更清楚：

人出钱买物盈不足 x_1x_2 成比例 x_1y_2 1 1 y_1（盈）y_2（不足）扩大 y_1y_2（盈）x_2y_1 合并相加 $x_1y_2+x_2y_1$ 人数 y_1y_2+y（不足）（不多不少）物价

那“盈不足术”中的物价是如何推得的，相信大家不会使古人失望的。

令人感到有趣的是，用这种方法还可以解一些看起来根本就不是盈不足的问题：

“今有垣高九尺。瓜生其上，蔓日长七寸。瓠生其下，蔓日长一尺。问几何日相逢？瓜瓠各长几何？”

说的是一堵墙高九尺，墙上是瓜蔓，墙下有瓠蔓，各向中间长，速度都是已知的，何时相逢。

《九章》中是这么做的，你看绝不绝：

如果长了五天，那瓜蔓长 3．5 尺，瓠蔓长 5 尺，还不足 0．5 尺。如果六日之后呢，瓜蔓长 4．2 尺，瓠蔓长 6 尺，又多出 1 尺 2 寸。这样就转化成了盈不足问题了，再用“盈不足术”来解就会有：

$\frac{6\times 0.5+5\times 1.2}{1.2+0.5}=5\frac{5}{17}$（日）

这“盈不足术”在那时的作用可真是算得上万能的了。后来这方程术就

进一步发展了演算程序化的传统，使古代筹算进一步达到完善的水平。

《九章》中的方程都是多元的一次方程组。这样的方程组又叫线性方程组，因为每个未知元都是一次，方程表示的曲线都是直线（或平面），所以叫线性方程。下面就是用今天的符号给出的一个线性方程组：

3x－2y＋z＝10

－2x＋y－3z＝7

9x－y＋4z＝8

解这个方程组不是什么难事，常用的是加减消元法。在解的过程中大家都会觉察到，对于一个线性方程组来讲，它的解是多少，有解没有解，起关键作用的，是各变元的系数和常数项，所以人们往往把这些系数、常数项按顺序排成一个“阵”——叫矩阵：

3 -2 1 10

-2 1 -3 7

9 -1 4 8

只要对这个矩阵进行适当的变换，就能知道有没有解，解是多少等等。比如说对矩阵的任意一行，都可以乘以一个不为零的数，进行变换，因为相应的方程也可以进行这样的变换。

人们利用矩阵来讨论线性方程组，可就方便多了。而且矩阵的提出使得人们能在更高更抽象的层次上研究问题，也就使得问题的解决更深刻更一般。可以说，数学概念的每一次提高和抽象，都会带给我们丰硕的果实。

不过，大家享受到矩阵带来的成果，那可是十八世纪的事了，那时才解决了线性方程组的一般理论。

但是，在《九章》中，就已经出现了矩阵的运算，矩阵的变换。《九章》中解线性方程组的“术”，就是利用矩阵的各种变换完美解决的。

当然，当时的矩阵是算筹提出来的。通过对这样一个算筹提出的矩阵进行“遍乘”、“直除”这些变换，解出线性方程组。这和现在的思想是完全一致的。

可以说，这在世界上是最早的先进数字方法。

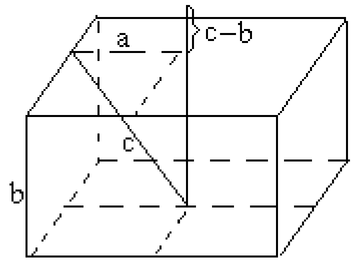
《九章》中的第九章，就叫勾股，专门讨论勾股定理的各种应用。从此，“勾股术”成了中国数字中一个传统保留项目了。

《九章》中的勾股应用，已经相当深入了。比如有这样影响后世的趣味题：

“今有池，方一丈，葭生其中央，出水一尺。引葭赴岸，适与岸齐。问水深、葭长各几何？”

说的是有一个边长为一丈的方形池子，正中央长着一棵“葭”（jiā，初生的芦苇），水面以上部分是一尺。现在把这棵“葭”拉斜到岸边，顶正合与岸齐平。问水有多深，芦苇有多长。

《九章》中是这么教你解题的招“术”的：



“半池方自乘，以出水一尺自乘，减之，余，倍出水除之，即得水深。加出水数，得葭长。”

咱们要是用今天的符号来说的话，比如设池的半个边长为 a，池深 b，葭长为 c，那么按“术”则有：

水深：$b=\frac{a^2-(c-b)^2}{2(c-b)}=\frac{5^2-1^2}{2\times1}=12$（尺）

葭长：c＝b＋（c－b）＝13 尺

同学们只要稍稍将水深公式变一下形，就会发现是完全正确的，是勾股定理 $a^2+b^2=c^2$ 的变形、翻版。那为什么要变成这种样子呢？那自然是因为现在 c、b 都不知道，已知条件中只有 c－b 是 1，所以就要用 a（＝5）和 c－b（＝1），把未知的 b 表示出来。这就是在今天，给我们一些学过勾股定理的人来做，也未必能得出这么个公式。

给了个公式，请你证一证、推一推对不对，也许比较容易；没有公式要寻找出来，可就有难度了。

这么个有趣的题目自然引起大家的胃口，据说好像还出口过，外汇自然是没赚着了，也就是增进各国人民的友谊吧。

这出口的国家似乎是印度。印度有本古算书上写着这么一首诗：

“平平湖水清可鉴，面上半尺生红莲；出泥不染亭亭立，忽被强风吹一边。渔人观看忙向前，花离原位二尺远；能算诸君请解题，湖水如何知深浅？”

这本印度古算书迟于《九章算术》，所以有人估计是从中国传抄过去的。这是完全可能的。说不定玄奘大和尚用它换回了两册经书也未可知。

《九章》中还有其他一些勾股互求的公式，如：

$$c=\frac{a^2-(c-b^2)}{2-(c-b)}+(c-b)$$

$$a=\sqrt{2(c-b)(c-a)}+(c-b)$$

这里 a、b、c 分别是勾、股、弦。此外还有计算直角三角形内切圆直径、内接正方形边长的公式。对于这些正确无误的公式，我们只能除了表示佩服以后，再也不能有其他更好的评论了。两千多年前的中国人能把学问做到这份上，真能算得上超一流水平。

咱们中国古算历史上的明珠，就大致地说这么一些，现在也该欣赏一番西方数学的明珠——《几何原本》了。

且说这《几何原本》四字，现如今人人皆习以为常。而“几何”，也已成为现在研究空间形式这一重要数学分支的名称了。

岂不知那欧氏的传世之作，原只叫《原本》（Elements），“几何”原意是多少，利玛窦等在翻译《原本》的时候，认为这本书是所谓“度数之宗”，也就是数学的老祖宗了，所以取名为《几何原本》。

要说这《原本》，虽然作者是欧几里德无疑，但他老先生的原著已经找不到。不要说原著，就是那个时代的手抄本也绝了迹。《原本》现在的版本，都是以亚历山大里亚的泰奥恩的修订本为依据。泰奥恩，公元四世纪末人，离欧几里德的时代有 700 多年了。泰奥恩修订本的抄本，再加上他讲课的记录，以及后来十八世纪在梵蒂冈图书馆发现的一本希腊手稿，这些就成为研究《原本》的珍贵资料了。

那欧几里德把这本书起名叫《原本》，他的本意就是写一本数学中一般原理和定理的书籍。“elements”这个词，古希腊就是指的最基础的，最重要的，就像字母是构成语言的基石那样。事实上希腊文中的“字母”，就是这个词。

所以，和平常的想法不一样，欧几里德的《原本》不是单讲几何的，它还包括相当的数论和初等代数，可以说是对希腊数学的古典时期的一个系统整理。

其实在欧几里德之前，古希腊已经有不少人写了一些数学原理之类的书。可是《原本》一出现，立即就受到最大的重视，而那些以前类似的书根本就没有流传下来。好像是大树之下的小草，那个叫做历史的老头，根本就没把它们放在眼里。

从 1482 年的第一个版本出版到现在，已出现了一千多个版本。两千多年来，它对整个数学的影响是无与伦比的。在西方，除了圣经以外，没有任何著作能像《原本》那样被广泛引用、认真研究、奉为至理。

那么这本书到底成功在什么地方呢？是不是因为包括了许许多复杂的知识，精巧的问题，从而使它有了不朽的声名呢？当然不是。要是编编习题集或是什么大全能来个流芳百世，那也太容易了点。

欧几里德的主要功绩，倒不是发现了多少定理，而是把多少世纪以来积累下来的所有几何知识组成一个体系，一个由逻辑规律排列整理得井井有条、从简到繁的定理系列。命题和定理在《原本》里，不是没有联系地杂乱地堆在一起，而是有一种前后的逻辑顺序，清晰而又严谨。

好在咱们都学过平面几何，都熟悉这么一种井然有序、前后一致的风格。当然，某条定理是怎么证出来的，根据是什么，一般都可以追溯到；但是这么一直地往前头追源头，追到最后必定有一些“根据”，有一些理由是不能再往前追了，或者说，我们追到源头、起源了。

这些不用再证明的东西就把它们作为不成问题的真理接受下来，就叫做公理。

由几条不多的公理出发，就可以推出许许多多的定理，构筑起几何的宏伟而又严谨的大厦，欧几里德是这么做的第一个人。

把思想用公理形式确立起来，表达出来，就叫做公理化的方法。也许，它是古希腊数学的最伟大的成就。所以有人说了，《原本》的内容固然重要，但那些内容借以表现的形式更为重要。“公理的方法”在今天已经渗透到数学的每个领域了，而世界上第一个公理体系，当然就是《原本》了。

欧几里德作为公理化的老祖宗，自然也是著作颇丰，起码写了十部书，而且保留下来的也不下五部。比如说，他写过《二次曲线》，是讲椭圆、抛物线等圆锥曲线的；还有两本，一本叫《辨伪术》，包括一些正确的和错误的证明；还有一本《数据》。这两本可能都是练习题和训练手册，是教育学生用的。也有人说，《原本》也是一本最早的教科书。

但是欧几里德的《原本》真有点太那个了，太有点光芒四射了，不但使得周围的人相形失色，也使得他自己的其他成就被掩藏得看不清楚。其实，他的其他著作，如果是别人写的，也足够辉煌和炫耀一番的。他甚至还写了《光学》和《镜面反射》这样的物理著作呢！

已经数不清有多少人从《原本》中接受到教益，接受到伟大的启示，或者很可能改变了他人生的道路。不过我们可以肯定，没有一位自然科学家没学习过《原本》，没有为《原本》那严密的逻辑体系，那逻辑美所陶醉。就是个社会科学家吧，如果没有学过那《原本》，甚至中学时对几何就厌恶，看见几何证明就想吐，恐怕绝对成不了大哲学家，或者咱们可以直截了当地说，他简直不够一个家，即便是什么研究社会科学的。看看那二十世纪有名的英国哲学家罗素，他不但是一位大哲学家，简直还是一位大数学家呢！恐怕正因为有后者，才成就了前者。

要说对《原本》佩服得五体投地的，恐怕还得算爱因斯坦了。他老人家小时候八九岁时看到了《原本》，被它那逻辑体系镇得直吐舌头，一直到老都难以忘怀。他是一位被《原本》深深震撼，深深影响的人物。

他多次赞叹过这本著作，他老人家说过这样一段话：

“ 世界第一次目睹了一个逻辑体系的奇迹，这个逻辑体系如此精密地一步一步推进，以致它的每一个命题都是绝对不容置疑的——我这里说的是欧几里德几何。

推理的这种可赞叹的胜利，使人类理智获得了为取得以后的成就所必需的信心。 ”

爱因斯坦老先生的这番话，自然是把评价推到了高峰。不过，这样一种严格的一步一步推导的数学书，使人感到好像数学是从天上掉下来的，感到似乎数学家仅仅用用演绎推理就能搞出发明创造。

其实，证明之前必先有猜想，综合之前必先有分析。希腊人坚持要有准确的概念和证明，这个美德从数学的创造发明来说却是一个缺点。

说起来也挺有趣，希腊人自己把从定理直接推出的结果称作系，不是很看得起的，他们甚至把这些结果叫做横财或红利。

当然啦，建立一个公理体系毕竟是一项创世纪的伟大成就，但不能把它绝对化。

咱们在这说了半天，还不知道欧几里德是何许人也。

这欧几里德，约为公元前 330 年到公元前 275 年人，籍贯古希腊，职业数学家兼教育家。在古埃及托勒密王时代，曾到亚历山大城（即亚历山大里亚）办学，好像是当过亚历山大大学的数学系主任，在那里建立了以他为首的数学学派。

话说到这，可能有朋友发话了，那欧几里德乃希腊人氏，他到古埃及去走的是哪门子亲戚？要么是托勒密大王引进外国人才，请他去凑一份？实际并非如此，其中原委还容一一细说。

欧几里德和以后要提到的另一位大数学家阿波罗尼斯（能和欧氏相提并论的不多），都属于希腊历史上第二个大分期，即亚历山大时期。第一个时期就是毕达哥拉斯们生活过的希腊古典时期。

且说公元前 400 年左右，那希腊的北邻马其顿王国渐渐壮大，经过改革，兵多将广。国王腓力普自然想把南面的邻居吃进来。到了公元前 337 年，腓力普征服了希腊。

过不了几年，他的儿子亚历山大（公元前 336——323 年）继位，发动了空前的侵略战争，把巴比伦、埃及等等统通收入名下，形成了一个横跨欧、亚、非洲的大帝国。他就是历史上有名的亚历山大大帝。

那马其顿深受希腊文化之影响，大量的希腊人移居到埃及和东方。希腊的经济文化在这些地方产生了较大影响。所以希腊文明就进入了亚历山大时期。

亚历山大大帝在埃及得手后，就在那里建筑了亚历山大城。在极短的时间里，亚历山大城便奇迹般地成为富有壮丽的世界性大都市。

到了公元前 323 年，那个有点像成吉思汗的大帝死了，他的大帝国就分裂成了三个，但仍然在希腊文的笼罩之下。

那埃及这一块，就由托协密统治。他把亚历山大城定为首都，便立即建立了著名的亚历山大大学。那规模，那建筑，不但当时首屈一指，就是现代大学也敢比试比试，不相上下。教室、实验室、花园、博物馆应有尽有。尤其是那大图书馆，号称拥有六十万卷纸草书。在很长时间内被当作是世界各地学术著作最多的宝库。

这么个名牌大学，使亚历山大城成了希腊文明的首府，并且足足延续了一千年。

那么好的条件，自然是饱学人士心心向往的地方，于是欧几里德也从雅典来到了这里，主持数学系。

欧几里德曾经师从柏拉图。这柏拉图可是个不同凡响的人物，他写过一本著名的书《理想国》。

柏拉图（公元前 427—347）出生名门，少有壮志。后来他在雅典开办了著名的柏拉图学园，实际上是有史以来第一座大学。

柏拉图是那时代最有学问的人，虽然不是数学家，但他深信其对哲学和了解宇宙的作用。在他的学园门口挂着这么个牌子：不懂几何学的人不准入内。

有位仁兄很想研究研究哲学，可是数学却是不咋的。柏拉图毫不客气地说：走开！你没有哲学工具。

在这么一位老师的教导下，再加上他大师兄亚里士多德创立的逻辑学，给欧几里德写《原本》准备了沃土。

那亚里士多德也是个赫赫有名名垂青史的大学者，是柏拉图的弟子，后来自己另立门户，叫吕园学派。吕园里有个花园，一个课堂和艺术之神谬斯的祭坛。柏拉图对他这位高足那是大加赞赏；什么“ 学园的精英 ”，“ 智慧的化身 ”，等等。

亚里士多德自己也收了一位高徒。这位徒弟是高得不能再高了，就是亚历山大大帝。所以“ 亚先生 ”曾贵为帝师。虽然是伴君如伴虎，不过也得了不少利，建立了最大的动物园和最大的图书馆。

且不说这位欧几里德的大师兄如何博学——确实是博古通今，集诸子百家于一身——单道他创立的逻辑学，就是学术界了不起的大事。

从亚里士多德的著作中，可以十分清楚地看出，他是从数学得出逻辑来的。他的基本逻辑原理——矛盾律，就是说的一个命题不能既是真的又是假的；排中律，它指出一个命题必然是真的或者是假的。而这，就是数学间接证法的根据呢！亚里士多德用当时课本中的数学例子来说明他的逻辑推理。

亚里士多德的逻辑一直到 19 世纪还没有能挑出它的毛病。就是今天，也

是我们一直使用着的规律。

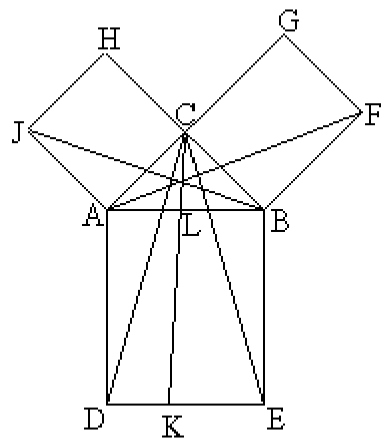
有了这么些准备，有了这么一种创造的氛围，那《原本》当然应该是呼之欲出，没有欧几里德，也会有其他里德把它写出来，传下去。

这《原本》共分 13 篇，共包含 467 个命题。

第一篇到第四篇讲直边形和圆的基本性质；第五篇是比例论；第六篇是相似形；第七、八、九篇是数论；第十篇是不可度量的分类；第 11 到第 13 篇是立体几何和穷竭法。

那第一篇自然从必要的初步的定义和公理开始，逐步展开完整的体系。它包括 48 个命题。第 47 年命题就是毕氏定理，不过给出了一个一直到现在都经常在引用的巧妙证明：

这个图不知为什么在西方叫新娘的椅子。主要是通过等积来证明。比如，（AC）^{2}＝Z△JAB＝Z△CAD＝ADKL，同理还有（BC）^{2}＝BEKL，如此一来，毕氏定理自然是顺势得出，小菜一碟。



第一篇里的两个命题 12 和 13，合起来就是我们今天的余弦定理，那余弦定理也就是勾股定理的推广。

至于第七、八、九三篇，共有 102 个命题，主要是初等数论。其中亦有大名鼎鼎的辗转相除法，所以在西方，它又被叫作欧几里德算法。

第九篇的第 14 个命题是所谓算术基本定理。既然称为基本，当然价值连城。它是说任何大于 1 的整数都唯一地表示成质数的连乘积。

那第 20 个命题的证明，更被数学家们津津乐道，公认为数学的典范，证明的楷模。

这条命题是说，质数有无限多个，欧老先生是用间接证明即归谬法得出的：

假设只有有限个质数，不好用 a、b、……、k 表示之。再设 p＝ab…k，也就是这若干个有限质数的乘积。则 p＋1 要么是质数，要么是合数。倘若是质数，那 a、b、……、k 已经是全部质数了，而 p＋l 比它们都大，所以，依假设不是质数；如果 p＋1 是合数，那么必有质因数，而这质因数必不是 a、b、……、k 中的一个，因为这些数除 p＋1，都得余数 1。而 p＋l 既有不同于 a、b、……、k 的质因数，与假设又生矛盾。种种矛盾都是因为假设的不对，假设的错误，所以必有无限个质数。

要是说到第五篇比例理论的话，那就一定要提到另一位大家——欧多克斯。这位欧先生自然也是学富五车，才高八斗，比例理论全是他精彩而严密的创造。欧几里德老兄看到了当然是爱不释手，立马收入自己的著作。事关

知识产权问题，在下不得不絮叨清楚。

那欧多克斯的比例理论深刻在什么地方？为何被各路神仙纷纷看中？却原来毕氏学派发现了$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$这样的无理数后，立刻给比例理论带来很大麻烦。

原来的比例理论是建立在整数之比这个基础上的。比如 A、B、C、D 四个同类型的量，如果 A∶B＝m∶n，而 C∶D 亦有 m∶n，那么 A∶B＝C∶D。现在 A 与 B 之比很可能不是个整数之比了，这比例就遇到了麻烦。紧接着，相似形理论也会遇到大麻烦。

欧多克斯敏锐地觉察到问题，用巧妙的方法提出了两个比相等的新的定义。他的比例理论和定义，为以后实数系统的理论提供了发展的基础。

有人认为,在 17 世纪中叶以前,数学上再也没有出现可以和欧老先生(欧多克斯）所具有的洞察力相提并论的事了。

“穷竭法”也是欧多克斯的一项创造。在《原本》的最后一篇有着这种方法的应用。

其实“穷竭法”计算面积，和中国大数学家刘徽用的“割圆术”差不多。比如说要算圆面积，就先用内接正方形面积近似；再在内接正方形的基础上改成内接八边形；接着再改为内接正十六边形，等等。这样，就越来越逼近了圆的面积。这实际上是一种极限的思想。

《原本》曾用这种方法和反证法，得出了两个圆面积的比等于它们的半径平方之比。就是用今天的眼光来看这些证明，也是非常的优美、严格，超过了牛顿、莱布尼兹在微积分初创阶段所做的同样工作。

《原本》的高妙之处自然还有不少，但是我们也该提一提欧几里德同时代的另一位大师，著名的阿波罗尼斯了。欲知后事如何，且听下回分解。

第五回　群贤毕至　托勒密王再续前缘
兼容并蓄　阿拉伯人又搭金桥

阿波罗尼斯的《圆锥曲线》如此完美，现在的大学课本都未能超过。罗马统帅说，自己是在和数学打仗。两千多年前测出的地球半径，和现在的相差不到 1%！《天方夜谭》里的哈里发，赞助了一下数学。

且说那阿波罗尼斯，也是古希腊亚历山大时期人。

这一时期的古希腊真可谓人才荟萃，众星捧月，把个古希腊数学描绘得花团锦簇，色彩班斓。

那古希腊的数学在亚历山大时代，也算是得过明主了，故而才有所发展，有所灿烂。上回书中说过，一代雄主亚历山大大帝东征西讨，足迹所至，遍筑新城。这些城市中好多都叫亚历山大城，当然最大最有名的还是埃及的那座。

亚历山大很想让他的大帝国中的各种成份融成一炉，他特意让希腊文明和波斯文明能融合起来。一会儿他自己以身作则，娶波斯公主为妻；一会儿又下诏让欧、亚两大洲的人互相换个地方住住。还强迫他的几百名部将、几万名小卒与波斯女子通婚。看来，这位大帝挺喜欢搞世界一片红的。

不过愿望归愿望，待到他一驾崩，那个大帝国也就分裂成了三大块。欧洲部分变成安提哥那帝国，安提哥那原本为希腊将领；亚洲部分变成塞流卡斯帝国；埃及归希腊的托勒密统治。那塞流卡斯和托勒密自然也是亚历山大手下的部将了。

安提哥那统治下的希腊和马其顿渐渐为罗马兼并，在数学发展上变得无足轻重；塞流卡斯帝国的数学似乎也没什么特色。

但是在埃及的托勒密王朝，几代君主倒是挺把文化当回事，这些当权的希腊人继续亚历山大大学的建筑，还把许多知名学者都请来，由国家供养着，端着铁饭碗研究学问。

再说，几代托勒密王都还比较对外开放，各种民族都可以到亚历山大城居住，贵族、平民和奴隶摩肩接踵。对外贸易、远征考察，使得文化的发展处于活泼的气氛中。

学者们分成四大部分工作：文学、数学、天文、医学。除了文学和数学挨不上以外，医学当然要用到数学。天文学就更不用说了。由此可见数学在当时的学术界是独占魁首。

亚历山大时期的希腊数学和古典时期的不同，虽然仍有抽象思维的光荣传统，不过更注重实际运用。数学家们积极参与力学方面的工作，计算重心，研究各种机械，有时简直就是发明家。

欧几里德和阿波罗尼斯虽然都是亚历山大时代人，不过他们是古典希腊数学的集大成者，和亚历山大城的其他几位大数学家如阿基米德、埃拉拒色尾、希帕克、梅内劳斯、托勒密以及海伦、丢蕃都等等不一样。后面这几位是新时代，也就是亚历山大时代数学的开创者。

阿波罗尼斯既然能和伟大的欧几里德相提并论，当然是身手不凡。虽然他是一位很有名望的天文学家，但是更加非凡的是他的数学成就。《圆锥曲线》——β使他赢得了“大几何学家”的声名。

圆锥曲线，以前的几位包括欧几里德都有过研究，也都著β立说一番。

但阿波罗尼斯的书一问世，立刻光芒四射，成为这方面空前绝后（起码绝一千多年）的经典名著，这位阿波罗先生发了言，其他人也就只有闭嘴的份。按成就来说，这本书确实是古希腊几何的登峰造极之作。

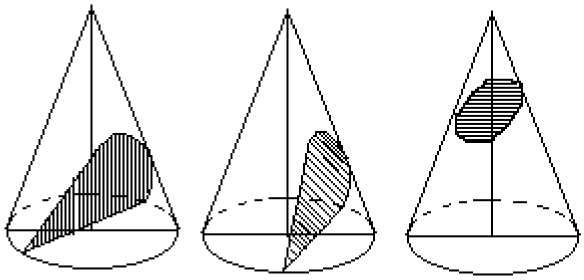
阿波罗尼斯比阿基米德小 25 岁，大约公元前 262 年出生，曾在亚历山大学跟着欧几里德的门徒学习过，算起来是欧几里德的再传弟子了。

阿波罗尼斯先生研究的学问挺够档次。说起来圆锥曲线也就是椭圆、双曲线、抛物线、其实这些曲线的性质要比圆和直线来得复杂，没有一定的“ 透视 ”能力是得不出什么结果的。

其实圆锥曲线与人的实际联系很紧密，不研究透了那可就是要受制于它了。比如炮弹飞行的弹道自然是抛物线；汽车前灯照在地面上的影子，台灯照在墙壁上的影子，那就是双曲线子。以后大天文学开普勒（1571—1630）更发现，地球的运行轨道，其他行星的运行轨道，都是椭圆。就是 1994 年那慧木相撞的大新闻中，自然也有椭圆。

人造卫星宇宙飞船，那也离不开这三种同曲线，速度一变，运行的轨迹也会变成三种中的某一种。

不过这三种曲线为什么叫“ 圆锥曲线 ”呢？原来阿波罗尼斯发现，用一个平面去截两个顶对顶的圆锥面，截的位置不同，就会得到不同的曲线。



如果截面平行于圆锥的底面，截得的是圆；如果截面平行于轴，截出的曲线就是双曲线；要是平行于母线去截，那么结果就是抛物线。除了上面几种情况，用其他方式来截的话，那就是椭圆了。我们这里讲的是直圆性，其实斜圆锥也能截出圆锥曲线，这也是阿波罗老先生的发现。

整个《圆锥曲线》共分八篇，487 个命题。和《原本》类似，这篇鸿篇巨制也有着严格的逻辑体系。但由于内容广泛，解释详尽，以及对许多复杂命题叙述奇特，读起来相当吃力。甚至可以说，这部光辉巨著比目前有关圆锥曲线的大学教科书还要完善得多。

比起欧几里德和阿波罗尼斯，阿基米德在希腊的亚历山大时代更富传奇色彩，流传着他的种种趣谈。

要是认真说起来，阿基米德可真算得上是历史上最伟大的教学家之一。他是亚历山大时期数学的典型代表，成就最多，特点最鲜明。

大家会说了，前面那两位不也是亚历山大时期的数学家吗？不错，是这么回事，但是他们所做的事具有的是希腊古典时期的特点，是集古典时期之大成。

阿基米德大约在公元前 287 年出生于西西里岛上的叙拉古，当时希腊的一个殖民城市。也就是说，那座城市都是希腊的移民。公元前 212 年，罗马入侵叙拉古时被害。

据他自己说，他老子是位天文学家。也算是书香门第，子承父业吧，他也搞起了数学这一行，而且还青出于蓝。阿基米德当然去过埃及留过学，因

为那是当时的文化中心。在亚历山大城，他结交了不少朋友，有些是欧几里德的门人，还有一位叫埃拉托色尼，是咱们马上就要见到面的另一位伟大的希腊数学家。

那阿基米德学成归国，就一直在叙拉古生活、研究。不过一有新发现，就立刻与亚历山大城的学者们交流，征求意见。他的那些发现和创造也着实使他们同行们钦佩得了不得。如果当时有诺贝尔奖的话，一定是一致公认的首位获奖者，保不准还要闹个几连冠。

有些同学会说了，就是评诺贝尔奖，阿先生也不会有份，谁不知道诺贝尔奖里没有数学奖啊！

即使这么看，咱们上面的玩笑也还是错不了。要知道，阿基米德可是位大才子，全才，诸子百家无一不晓，十八般武艺件件精通。文可安邦，武能定国，的确十分厉害。

别的咱们不说,单道那人人知晓的浮力定律,不正是他老人家发现的吗？要不怎么叫阿基米德定律呢？这可是咱们上初中就首先佩服了一下的物理定律，能不能得诺贝尔物理奖？

要说这条浮力定律的发现，还有一个人人知晓的故事。

阿基米德本是叙拉古国王希罗的亲戚，再加上那么大的才气，自然是很得宠信。有一天国王觉得刚做好的金王冠不对劲，怀疑工匠掺杂兑假，是个伪劣产品，就叫阿基米德搞一下质量检验。要求也挺摩登，不能弄坏王冠，是无损害检验，要求很高。

那时也没什么射线去照，也没有质谱议，就靠阿老先生的聪明脑袋了。老先生冥思苦想，菜饭不思也没弄个所以然。

这一天到浴室洗澡轻松一下。当他浸入浴缸看到他的部分身体被水浮起来，就突然领悟到解决问题的窍门。他兴奋得忘乎所以了，竟然光着身子跑到街上大喊：“我成功了！成功了！（eureka！eureka！）”

他发现浸在水里的物体，所受的浮力等于其所排出的那部分水的重量。利用这浮力定律就能测定金冠的真伪成份了。

阿基米德甚至还做了一个令人吃惊的天体运行仪，日、月和五个行星绕着地球运动，不仅可以观察天体运动，而且还能预报日食、月食！这是他在《论制作球》这本书里讲到的。他还发明了一种从河里提水的螺旋提水器。

杠杆，这种最简单然而也是重要的机械（我们的手指、手臂弯曲运动，无一不是杠杆），最早作系统研究的，还是阿基米德。他的一本专著就叫做《论杠杆》，不但“论”，还有“做”。

阿基米德给他的国王亲戚希罗殿下写了一封信，告诉他，一个人的力量也可以移动很重的重物。说到最后夸起了海口：给我一个支点，我可以举起地球。

希罗王不由得大为震惊，心想咱这亲戚本是谦谦一君子，恐怕不是热昏了头，就赶紧请阿老先生做个表演示范。

阿基米德就决定来手绝活，把国王的一艘重型军舰装满了人和物，靠在船坞里。然后用一套复杂的滑轮组把船连接起来。

只见这边阿“工程师”在岸上轻舒猿臂，那一边整个大船已缓缓起动，慢慢拖上岸来。把一船军民、两岸观众惊得目瞪加口呆。

所以当罗马大将马塞路斯率军来攻叙拉古时，国王自然立即请阿老先生出山，匡扶汉室。

阿基米德设计许多武器。有可调整射程并且活动射杆的弩炮，能把重物射到靠近城墙的敌舰。有把敌舰从水中吊起来的大型起重机。还有一些大反射镜，把太阳光一聚焦，就使敌舰着火。

罗马人变得胆战心惊，一看见一条小绳索、小木块从城墙上抛出，就立刻大喊大叫：又来啦！阿基米德又要飞出一种新式武器啦。于是马上四散逃命。

马塞路斯久攻叙拉克不下，也就只好自我解嘲，幽自己一默，他对周围的人说：咱这是和数学打仗，他阿老先生在城里面拍拍脑袋，咱这军舰可就给拍完了。

不过，叙拉古城最后还是被罗马大军攻破了。破城的那会，马塞路斯下令保证阿基米德安全，大将军对阿先生还是挺佩服的。

大将军虽有严令，无奈阿基米德一介书生，怎敌得罗马士兵赳赳武夫，“秀才遇到兵，有理说不清”，最后还是死在罗马士兵的屠刀之下。

关于这位老先生的遇难，说法不一，有好几个版本。

版本之一是说城破之日，阿基米德仍在聚精会神研究问题，手上画着图，脑里想着事。没想到一个罗马大兵突然闯进书房，命令他到马塞路斯那儿去。阿基米德说，容我把问题想个结果出来再去。那罗马大兵勃然大怒，立刻是刀剑相加叫他永远闭了嘴。

版本之二是说，正当阿基米德把用来测量太阳大小的仪器一日晷、球体等等准备带去给罗马大将军去的时候，几位罗马兵卒看见了他，以为那仪器里面装有金银珠宝，自然是乱剑齐下，掠金抢银，呼啸而去。

还有这么种说法，阿基米德在沙地上画图，对走得太近的罗马大兵说：“伙计，离远点，别靠近我的图形！”那位横冲直撞的大兵哪吃这一套，立刻请他一命归西。

这种高度戏剧化的插曲，咱们也是姑且听之。这说明阿基米德颇有众望，人们喜欢给心目中的偶像涂上或是神秘或是传奇的色彩。

就像他光了身子从浴室跑上大街的那种忘我的状态差不多，阿基米德还有许多心不在焉的故事。有时他被强迫去洗澡，然后在身上涂油（这是一种宗教仪式），他就在炉灰上描画几何图形，用油在身上画图。如痴如醉，可称上超级“迷者”，那劲头恐怕大大超过现在的追星族。

这样一些心不在焉的故事往往使常人发笑，不过，阿基米德们之所以成为天才，那必不可少的才智就是能完全贯注于自己的问题，乐在其中而忘身外之忧。所谓“热爱是最好的老师”。

阿基米德还有个习惯，他把自己的定理送给亚历山大城的朋友们的时候，不写证明，希望这些朋友们能享受一番作出证明的乐趣。但这些朋友们不领这份情，直截了当引用这些定理，不耐烦去做什么证明。于是阿先生后来就想了个主意，在最后一组定理中放进两个错误，开开那些朋友们的玩笑。看来，类似计算机病毒的发明权应当归于阿基米德了。

阿基米德遇难后，那位罗马将军塞路斯十分伤心。下令好好安葬，优抚遗属。不过也许是做给活人看的，好像三国里的曹孟德。

但是那阿基米德的墓修得很别致，墓碑是一个内切于一个柱体的球体。这与他的一篇论文大有关系：《论球和圆柱》。

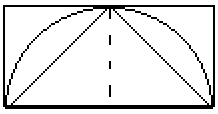
1965 年，在叙拉古建旅馆打地基时，挖出了阿基米德的墓，轰动一时。

在《论球和圆柱》一书中，先进述定义和假定。第一个假定，或者说公

理吧，就是连接两点的线中以线段为最短。

在论及球的表面积、球的体积时，他得到了完全正确的结论：

球面积等于其大圆面积的 4 倍。球的体积与其外切圆柱的体积之比是 2：3。



事实上他是把上面那么个图形绕虚线旋转，生成了一接于半球的圆锥，面半球又内切于一圆柱。这三个圆形体（旋转体）的体积之比为 l：2：3。这一精彩的定理是阿基米德特别喜爱的一个结果。所以早就立下遗嘱，要把一个带有外切圆柱的球以及它们的比例（2：3）雕在墓碑上。

使咱们更惊奇的是推出这一结果的方法。如果说结果精彩，那么方法更是精彩得无与伦比。

阿基米德竟然用了杠杆原理把上面所说的比例给推导出来。然后，又因为圆柱、圆锥的体积都是已知的，自然就能得到很难求的球的体积。恐怕连现在的学者都很难想起这么个绝招。而且在推导球的体积时，运用了现代微分、积分的思想。

不过阿基米德自己认为，这种方法只是用来发现定理，而不能算作严格的几何证明。

在《方法论》这篇论文里，阿基米德表达了他上面的这么个观点。

说起来这本书的发现，本身就有传奇色彩。这作品一直到 1906 年才在一家图书馆里偶然发现的。手稿是 10 世纪抄写的羊皮纸本。确实是纸张紧张，羊皮纸太贵，这羊皮手稿居然是擦过了后又重新利用的。所可庆幸的是，阿基米德的重要思想居然还能辨别出来。

为了说用杠杆原理，物体的重心等等力学方法可以发现许多定理，阿基米德又举了一个抛物线弓形的例子。不过他认为还必须用严格的数学方法去证明自己的发现。他用的数学方法就是所谓“ 穷竭法 ”，说起来是一种极限的思想。

这样一种严格性要超过牛顿和莱布尼茨了。而这两位是公认的现代微积分的创始人。

同学们不知还记不记得任意角三等分问题，咱们在前面给大家说过一个利用有刻度的直尺三等分角的作图法，那可就是阿基米德给出的方法。

下面咱们给大家谈另一颗亚历山大时代的数学巨星——埃拉托色尼。

说那位埃拉托色尼是公元前 284 年出生于地中海南岸的昔兰尼，只比阿基米德小几岁，而且是好朋友。大约 40 岁时，它受埃及的托勒密三世的邀请，来到亚历山大城给他儿子家庭老师（要在中国，恐怕要封为太子太傅了），同时兼任亚历山大大学的图书馆馆长。大约在公元前 192 年，他由于失明故意饿死。

埃拉托色尼是位全才加奇才，以古代最有学问的人闻名后世。头衔挺多，数学家、天文学家、地理学家、诗人、哲学家等等。据说还是运动员，学生们常称他为五顶全能。

他还有个绰号叫β（beità）。这ß是希腊文里的第二个字母，所以那绰号的意思是“二号。”这“二号”到底是什么意思，一直是人们关心的热点新闻。

有人认为，那是因为他的博学和才华，被看作是第二个柏拉图，柏拉图

第二。

还有一种说法，说他虽然在各个领域里都很杰出，但都不能拔头份，只能屈居“二号”。还有人主张，那“二号”不过是他办公室的号码。反正咱们在这录以备考，留待同学们以后能探明真相，揭示谜底。

埃馆长留考百世的伟业共有两大项，不可不提：

一是所谓“埃拉托色尼筛”。

这么个筛子主要是用来筛出素数（也就是质数）的。平时咱们有体会，要从小到大列出个素数表，如果用笨办法，把自然数挨着个一个一个判断是否素数，挺费事。数字小一点还好办，大一些就难了。

下面将两千多年前埃先生发明的绝招教给你，如果要筛出从 2 到 n 中所有的素数的话，那么：

先从小到大写出从 2 到 n 的全部自然数。接着标出第一个素数 2，划去后面数中 2 所有的倍数；再看，2 后面的第一个没划去的数是 3，它是第二个素数，标出它，再划去后面 3 的倍数。

如此这般，如果 P 是一个素数，标出它，并划去后面所有 P 的倍数，排在 P 后面第一个未被划去的，就是下一个素数。重复这个过程，有限次就能得到 n 以内的所有素数。比如：

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~
29	~~30~~							

这是一张 30 以内的素数表。有些划两道杠的，就是被消灭两次了。

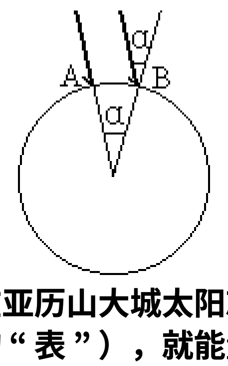
这么一个程式化的划去和寻找的过程，很适合编好程序用计算机自动筛出素数。一般，这种寻找方法就叫筛法。

素数在整个自然数中的分布是很稀的，似乎是越来越稀。有人计算过，在前 10 亿个自然数中，只有 50847534 个素数，约占 5%。素数的故事太多了，难题趣题也不少，容我以后再慢慢说起。

再说那埃馆长的另一项伟大功绩就是丈量地球了。虽说古希腊人早就知道地球是个球形的（他们甚至最早提出了“日心说”），不过丈量这么大的球，别说想了，听听也叫人害怕，叫人咋舌。

这丈量倒不真是弄根绳子一段一段去量地球的“腰身”，而是想了个极妙的方法，得出了地球的半径。

他在赛尼城，也就是现在埃及的阿斯旺观察到每年夏至那天的中午 12 点，太阳光几乎正在天顶，。因为当时的太阳光能直射入当地的一口深井，井底能看到太阳。



一点也不偏斜同日同时在亚历山大城太阳就斜射。用一个日晷那样的简单仪器（或者就是中国人用的“表”），就能量出太阳在亚历山大城的投射

角α是 360°的 1/50 即：

$$\beta = 360° \times \frac{1}{50} = 7.2°$$

而亚历山大城正好在阿斯旺的正北，也就是这两个城市正好在同一个子午圈上（经线），所以咱们就能得到上面的那张示意图。

看看图就知道了，现在 AB 的圆心角α是 7．2°。只要再清楚 AB 的长度，那么地球的半径 OA 就算出来啦！而 AB 的长度就是两城的距离。

他估算出赛尼城到亚历山大城的距离是 785 公里。当时他估算的方法挺奇特，那时的骆驼队一天才走 100 个视距段，每个视距段合现在的 157 米，从亚历山大城到赛尼城要走 50 天。故两城相距 5000 个视距段。即：

157 米×5000＝785 公里

设地球周长是 S，用点小学的知识，就有：

$$\frac{S}{360} = \frac{785}{7.2} \quad \therefore S = \frac{360 \times 785}{7.2} = 39250\text{公里}$$

地球的半经随之得出为 6330．64 公里，这与现在算出的数据 6371 公里简直就可以说没有误差！不到 1%！这种方法确实是盖了帽了，而且是 2000 多年前的古人想出的，绝对盖帽！

埃拉托色尼还提出了经度纯度的概念，用经纬网绘制世界地图。对倍立方问题，他设计了一种作图仪器，也很方便。

希腊的亚历山大时代，三角学的研究也十分发达。这也反应了与古典时期不同的风格，更注重实际的应用。那三角学的发展，绝对就是天文学的需要。

因此，当时的三角首先是球面三角学，您想想，整个天球给人的感觉不就是个球嘛。

三角学的奠基者也许是大天文学家希帕克（公元前 140 年左右人），他所确定的平均太阳月（月球绕一周的时间），与现在测得的数值相比，误差不超过 1"（1 秒）。

希帕克最大的成就就是给出了角的正弦函数表。当然，当时给出的是一种“弦表”，也就是一个圆，从 0·5°到 180°，每隔半度的所有圆心角所对弦的长度。如果诸位有兴趣，可以动手画一个圆，那么已知弦长是很快能得出圆心角的正弦的。

后来亚历山大城的托勒密（各王族没什么关系）写了一本被称为《大汇编》的书，系统总结和充实了三角和天文方面的成果。这部书一共 13 卷，包括了上面讲的弦表。

最重要的是他讲解了构造弦表，推导弦表的方法，主要的根据咱们在几何中也学过：圆内接四边形中，两对角线之积等于两对边之积的和。现在这就叫做托勒密定理。

《大汇编》一书，在哥西尼和开普勒之前，一直是标准的天文学大全。不过因为他是个“地心说”者。所以后来哥白尼的“日心说”被视为正宗的以后，就有些全盘否定墙倒众人推的意思了，不把他的成就当回事。

且说自从毕氏学派发现了$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{7}$这样的新数，一时间好像天塌地陷，日月无光。许多学者一看被毕老先生奉为神明数的严谨体系出了这么大漏洞，都觉得那算术代数没什么搞头，不是真正的数学。

于是纷纷把研究方向对准几何，认为那才是没得说的纯数学，绝对的‘阳

春白雪”。至于算术问题代数问题当然是进不了神圣殿堂，被看作贩夫走卒者所为。碰到实际的算术代数没法不去解决了，也都把它变成几何问题用几何方法去解决。那时候不是有“几何代表”一说嘛！

到了亚历山大时代，情况大不一样了。算术和代数都有了独立的发展，被大家当会事了，有了独立的地位。

比方说那位咱们大家都知道的海伦（约公元1世纪左右人），也就是提出海伦公式的那一位，就是用文字叙述来解决代数问题，而不是用几何的方法。他解决过这样一个问题：给定一个正方形，其面积和周长的和是 896，求其一边。

用现在的记法，这个问题就是求方程 $x^2+4x=896$ 的解。

海伦在方程两边加上 4，配成完全平方，然后再开方，就得出了结果。他并不进行证明，而是说一步一步如何做，做哪些运算。这种风格就是一种古埃及和古巴比伦人解决问题的风格。有人说他是阿拉伯人。

顺便也给同学们聊聊海伦公式。大家都知道，海伦公式是这样计算三角形面积的：

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

这里 a、b、c 是三边，S 是周长之半。

海伦说用这个公式测量计算三角形土地的面积，就不要跑到地中间去取高了。

不过这个公式实际上是阿基米德的。但海伦在几本著作里都引用了它，还进行了证明。历史就是这要样，错了就错了，张冠李戴的事多了。不过现在是阿老先生的帽子被海伦工程师戴去了。这点发明权小纠葛咱们就说到这里。

还有一本书叫《希腊选集》，也是一本习题集一样的书。其中大多是一元线性方程，还有一些二元的和三元三次方程。

这本习题里的一些问题倒是挺有趣，就是给现在学生做，也还有意义。

比如说有这么一题：六个人分一堆苹果，其中四个人分别分得 1/3、1/8、1/4 和 1/5，第五个人得十个，只剩下一个给第六人，请问苹果总数有多少？

另一个问题是今天小学中典型的工程问题：

我要建房子，需要 300 块砖。你单独一天就能完成，但是你儿子一天只能做 200 块，你女婿一天能做 250 块。你们一齐工作，多少天可以完成？

这两个问题叫现如今的中学生做，肯定是用方程了；小学生们也能做出来，是分数应用题。

不过当时是用文字叙述的方式去解决，比较灵活，不太有规律。

正如有一位先生所说过的，代数方法解决问题，好像是机械化生产，不但生产的批量大，而且把思维过程也机械化了。

那么这代数学符号，从历史上来说，可以分为三个阶段。第一阶段，是文字叙述代数，也就是对问题的解，不用缩写和符号，而是写成一篇论说文。

第二阶段就有些进步了，称为简化代数，即对某些常出现的量和运算采用了缩写的方法。

最后一个阶段叫做符号代数，解决问题，多表现为各种数学符号（包括未知量的符号，运算的符号等等），这些符号有更高的抽象性，好像与要解决的问题所说的内容关系不大似的。

咱们可以看到，刚刚说过的两个问题，它们的解法就属于第一阶段的。

实际上全球各种文明，都有这么一个阶段，咱们中国也不例外。

文字叙述代数，在世界许多地方，存在了好几百年。尤其是在西欧。一直到 15 世纪还是文字叙述式的代数。符号代数在西欧的第一次出现是在 16 世纪。然而直到 17 世纪中期，还没有普及。

咱们初等代数课本中的大部分符号化的内容，看样子还没有四百年。

话说到这，咱们一定要提到丢蕃都了。他是公元三世纪人，曾活跃于亚历山大城。丢蕃都在数学上的杰出贡献，就是把代数的符号化过程推到了第二个阶段。

提起丢蕃都，当然要说一下他那著名的墓志铭，这篇墓志铭概括了他的一生：

“过路人，这里埋着丢蕃都的骨灰，下面数目可以告诉你他活了多少岁。

“他生命的六分之一是幸福的童年。

“再活十二分之一，颊上长出了细细的胡须。

“再过了五年，他感到很幸福，有了一个儿子。

“可是这儿子光辉灿烂的生命只有他父亲的一半。

“儿子死后，老人在悲痛中活了四年，结束了尘世生涯。

“请问：‘丢蕃都活了多久？几岁结婚？几岁生孩子？’”

这段墓志铭奇特，新鲜，挺有职业习惯，临死了也没忘出个题目给大家吊吊胃口。

要解出这么一题，不费举手之劳，有初一的水平就可以列出一个一元一次方程来。就是小学生，也很容易地使用分数知识来解答。

答案是，丢蕃都老先生 84 岁高寿，33 岁结婚，38 岁得子，晚婚晚育，算得上标兵。

丢蕃都老先生写过三部书。最重要的一部就叫《算术》，共 13 卷，现在看到的只有 6 卷了。

这本书大约有 130 多个一次、二次方程的问题，其中有些还是三次方程，有些是不定方程。

什么是不定方程呢，就是方程的解有许多，一般是无数多个。一般都取整数解。丢蕃都求解时规定为有理解。西方把不定方程称为丢蕃都问题。

为什么这么命名呢？这丢老先生既不是解不定方程，提出不定方程的第一人，也不是用非几何的方法解二次方程的第一人，如何有此光荣呢？

原因就在他是采用代数符号的第一人。

丢蕃都给出了未知数、未知数的幂（一直到六次）、减、相等和倒数的缩写符号。

据说他用来表示未知量的记号是 S，就像我们用 X 一样。这 S 是个希腊字母。丢蕃都把未知量称做“题中的数”。他说的也是大实话，当然是题目中的数，意味着还不知道。

我们的 x^2，丢蕃都把它记为$\triangle^y$，这是希腊词“乘幂”的头两个字母，x^3 呢，就写成 K^y，也是希腊文“立方”的头两个字母。

x 的四次方、五次、立次方，就采用“组合”的方法了。

x^4 是$\triangle^y\triangle$；x^5 是$\triangle k^y$；x^6 是 k^yk。

这些符号虽然没有清楚地写出来未知量 S，但丢先生的意思隐含地含有那未知量了。

出现这一套符号当然了不起，但更了不起的是他使用三次以上的高次乘

幂！古希腊的数学家从不考虑三个乘数以上的乘法，因为这种乘积没有几何意义。

但是在算术中，在代数中，这种乘积当然有意义。丢番都是采取这种观点的。这说明他老先生把算术、代数当个“人”看了，有独立的“人格”了，不再是几何的附庸品。

这在希腊数学中可以说是一个大进步。不过在咱们中国就没有这个问题了。中国算术几何一直是平行发展的，而且中国古算一直强调“算”，更实用。中国的几何也一直和应用关系密切，不像古希腊那样，形成一个严密的逻辑体系。

同学们眼下当然能看清，古希腊的几何虽然严密有序，统一完整，但它狭隘了人们的视野，使他们的头脑接受不到新思想新方法。它的内部就埋伏下使自己死亡的种子。

如果没有亚历山大文化开阔了希腊数学家的眼界，那么它那狭隘的活动领域，局促的观念，美学上那至美至善的要求，就会窒息了活泼的创造，还谈什么发展。

回头咱们再看一看丢蕃都老先生是怎么表示一个代数式的。

要看懂他的代数式，还要能看懂希腊人表示的数。希腊人表示数，就用希腊字母，比如说 1、2、3、4 就用α、β、γ、δ表示。10 是用 L 表示。所以 13 就表成 Lγ 表示。

这样表示有很大的缺点。看样子，聪明的希腊人也不是事事都聪明。

所以丢老先生的代数式现在看起来就有些别扭。对于 $13x^2$，他当时表示成△Lr，把系数“13”放在后面了。

常数项就用 $\overset{o}{M}$ 表示。

比如：$\triangle^{y}r\overset{o}{M}LB$ 表示 $x^2 \cdot 3+12$

$k^{y}\alpha\triangle^{y}lys\beta$ 表示 $x^3tx^2 \cdot 13+x \cdot 4$

大伙看到了吧，他的式子中，加号省略了。遇到减号怎么办呢？他把表达式中所有的负项聚到一起，前面放个减号，他的减号是“∧”。

所以 $x^6-3x^4+x^2-4x-2$，就是这么个样子：

$$k^{y}ka\triangle^{y}a\wedge\triangle^{y}\triangle\gamma S\overset{o}{v}M\beta$$

看惯了就一样，和现在的代数式差别不大。只是数也用字母表示，容易弄混。

丢先生另一项值得一提的成果是关于毕氏三数的。

毕氏三数的式子，毕氏门人早已所记载：

M，$\frac{M^2-1}{2}$，$\frac{M^2tl}{2}$（m为奇数）

咱们在第三回就已经见过面。但这组式子不能表达出全部毕氏代数组来。比如 8，15，17 就不在上面的式子中。

于是丢蕃都致力于寻找构造毕氏三数的一般法则。他找到了这种法则：如果 m、n 是两个正整数，并且 2mn 是完全平方，那么：

$m+\sqrt{2mn}$，$n+\sqrt{2mn}$，$m+n+\sqrt{2mn}$

就是一组毕氏三数。他究竟是用何法宝得到了这些式子，现在也只能是

历史之谜了。

这位老先生虽然是个解题能手，使人看了目不暇接，但没有什么一般的方法。他的大作看起来有点像药方单子，只告诉你怎么做。欧几里德、阿基米德、阿波罗民斯著作中的那种严密有序的证明是一点也看不见了。

希腊的数学就这样分成了不同的两块，很使后人迷惑一阵，不安一阵的。

不过，更不幸的是随着希腊文明的衰落，希腊数学也渐渐落下了它的大幕。

首先是罗马人的铁蹄，阿基米德被一个罗马大兵杀害就标志着那希腊数学的下坡。罗马人所向披靡，一直杀到亚历山大，把那号称世界第一的图书馆付之一炬，五十万份手稿一扫而光。看来凯撒大帝很有点秦始皇的威风。这一东一西两地火可就把两个文明都害苦了。

所幸的是还有不少书，图书馆收藏不下了，存放在神庙里，这些书就逃过了一关。

不过好景不长，过了 400 年，随着基督教得势，其成为罗马帝国的国教，那座神庙也被来上一把火，三十万种手稿再遭劫难。

不但焚书，而且坑儒。狂热的基督教徒袭击屠杀异教徒，有点像当年的党卫军。

不知大家是不是还记得给欧几里德的《原本》作注释的泰奥思。他一直为希腊的数学经典，比如《原本》、《大汇编》作注解。

他的女儿希帕提娅，数学、医学、哲学都很了得，也为丢蕃都的《算术》和阿波罗尼斯的《圆锥曲线》作过注释。她可是世界上第一位女数学家。

公元 415 年 3 月，她被狂暴的基督徒在亚历山大城的街道上抓到，撕成碎片，因为她不肯放弃她的信仰。

新崛起的回教徒也不示弱，好像要与罗马人展开一场焚书比赛。公元 640 年，他们征服埃及后，给亚历山大城的文明以最后一击，残留的书籍立刻无保留地烧掉。理由很充分：如果这些知识在可兰经里已经有了，那就没什么保存的必要；如果可兰经里没有，那就是违反可兰经的，也要烧掉。

总之一句话，是要烧。就这样，亚历山大城的浴室整整用这些羊皮纸书烧了六个月的水。

经过这三次“文化大革命”，希腊的文化就革得一命呜呼了。希腊的数学家被消灭了，但他们的工作成果终于传到了欧洲。

说起来叫人哭笑不得，把希腊成就传到欧洲，从而逐步发展成现代数字的，也还是阿拉伯人。

且说公元 640 前亚历山大城的一把火，自然是有些头脑发昏。不过那是统治者所为，当然要和人民区别开来。

在一百多年里，阿拉伯人从一个游牧民族通过不断征战，建立起一个从印度经过波斯、美索不达米亚和北非直至西班牙的大帝国，开始定居，创造自己的文明。

到了公元 755 年，这个大帝国又分裂成两个国家。东部王国以巴格达为首都；西部王国以西班牙的哥尔多华为首都。经过充满宗教狂热的征服之后，他们对种族和教派是宽大的，兼容并蓄，吸引了希腊人、波斯人、印度科学家以及犹太人和基督徒，共聚一堂，文化的来源十分丰富。巴格达那里也设立了学院、图书馆、天文观察台。

这其中有一位哈里发（国王），叫哈龙·兰希的，也算得上开明君主。

在他的赞助下，许多希腊经典被译成阿拉伯文。而印度的文化和数学著作也不断传入巴格达，印度数字就是这么着引入了阿拉伯数学，变成了我们现在所说的阿拉伯数学。这位君王还因为《天方夜谭》而为大家所熟知。咱们以后看《天方夜谭》时，可以留心一下他的大名。

他的儿子马姆也是个爱学问的人，并且马姆本人就是一位天文学家。那座天文台就是他建立的，并且还测量了地球子午线。

这位哈里发在位 20 多年（809——833 年），把《原本》和托勒密的《大汇编》都翻成了阿拉伯文。这些希腊手稿，就是作为和平条约的一个条件，从拜占庭帝国的皇帝那得到的。当然，随后其他一些希腊学者和印度学者的著作都有了阿拉伯译本。

后来传入欧洲的就是这些译本，而希腊的原著早已失传。没有阿拉伯学者的工作，大量希腊和印度的科学就会在漫长黑暗的中世纪无可挽回地消失掉。

在马姆当哈里发时期，许多学者写了数学、天文学方面的著作，其中最著名的是花拉子密写的关于代数学的论著和关于印度数学的书，这些书于 12 世纪被译成拉丁文，在欧洲产生了巨大影响。

这位花拉子密（名字挺怪的）生于花拉子模，也就是现在的写乌兹别克（以前苏联学者把他说成是苏联的光荣，现在是没这份荣耀了），后定居巴格达。他那名字的意思是“花拉子模人摩西之子穆罕默德”。

咱们现在学的代数这门课，英文叫 algebra。这英文名称就是起源花拉子密。

花拉子密关于这门学科的论著，其标题是“AI—iabrw’almuqabala”。这个标题要直接翻译的话，就是“重新结合和对立的科学”。

“al—jabr”，原意是复原，根据花先生的上下文，那就是移项，即从方程一边去掉一项，要使方程的平衡“复原”，必须在另一边加上这一项。而“Al’muqabala”，意思是“化简”，对消，比如把 3X 与 4X 并成 7X，或从方程两边消去相同的项。

“al—jabr”又有“接骨者”的意思，后来通过西班牙传入欧洲，就变成了 algebrista，意思还是接骨郎中。那时的理发师们也常常自称为“algebrista”，因为接骨和放血是中世纪理发匠们的副业，倒和中国某些地方的理发匠相似，剃头再加个第二职业：按摩、正骨、治脱臼。

不过以后遇到这“algebra”，可别再当成理发匠，现在这已经是正儿八经的“代数学”了。

花拉子密先生把未知量叫作植物的“根”，解未知量就叫“求根”。

比如他说过这么一题：“根的平方和十个根等于三十九”，也就是 $X^2+10X=39$ 这个方程。他给的解法是：“取根数目（10）的一半，也就是五；然后让它自乘得二十五，把这与三十九相加得六十四；开平方得八，再减掉五，余三，这就是根。”这实际上就用配方解一元二次方程。

这种解法与丢蕃都的解法差不多。这也是当时数学的特点：没什么独创性，可能是希腊典籍太多，翻译都够翻一阵的。

穆斯林的数学家们，在几何法代数中倒也继承了希腊的传统。有位叫海牙姆的（1042—1124），是位伊朗人，他就指出过，三次方程一般不能化成二次方程来解，但可以用圆锥曲线来解。海牙姆算是花先生的后生了，花先生约为 780—850 年间人。

阿拉伯学者一般把他们自己看作是天文学家，这也是当时的世界潮流，古中国就把数学家们称为“畴人”，畴人者，观天之人也。

所以伊斯兰教学家们对三角学表现了浓厚兴趣。现在使用的六种三负角函数就归功于他们。还有一位 15 世纪的波斯皇族天文学家，他甚至编制了一个间隔为 1＇的正弦表和正切表，精确到 8 位小数！这也许是世界上最早的 8 位小数数学用表。

总的来说，他们工作偏重实际，缺乏证明创造性的东西不多。但最值得一提的是，阿拉伯文化保存了那多文明的精华，当这些宝藏有朝一日被发现、被发展时，立刻掀起了现代文明的大潮。这也许是阿拉伯人的“金桥工程”吧。

那阿拉伯世界汇集的的诸多文明之中，自然也有古恒河一脉。

且说那古印度，也是四大文明古国之一，5000 年文明史亦当之无愧。在印度的莫恒卓达罗有一座 5000 年前的城市废墟。这座城市有着宽广的街道、布满全城的排水系统、公共游泳池，带洗澡间的公寓等等。建造这么一座宏伟的城市当然要用基本的数学知识。

不过后来这块土地变化就比较大，先是波斯大军在公元前六世纪入侵；不久又是亚历山大大帝到此一游（他征服印度时间不长，败退）；以后有印度本国皇帝的统治了，但公元 450 年，匈奴人先来，然后是阿拉伯人、波斯人。

所以这么一来希腊、巴比伦、中国的数学对印度的数学，就相互影响相互作用你中有我我中有你，有很多也输到阿拉伯去。这地方好像是一个东西方文明东西方学术的集贸大市场了，或者换个时髦说法，是技术市场，信息交流中心。

要谈到印度的数学，当然要说一说现在所用的“阿拉伯数字”和“位值记数法”。

那“位值记数原则”自然是咱们中国首屈一指，享有世界第一的美誉。不过佛国天堂的印度也是这么种记数原则。

这也许与他们的书写材料有关。据一位德国史学家的意见，古印度是一块小黑板上用笔蘸一点白颜料写字，或者是用小棍在一块撒有红粉的白板上写字。在这两种条件下写数字，写的地方很小，而字要写得比较大，不然看不清。写完之后擦去再重写。

这么一来，写字的空间太小，用位值原则记数好像是节省了地方。印度的记数法也是 10 个符号，十进位。这种记数法的优点当然不言而喻，易读易写，不占地方。

印度的 10 个数字最初用梵文的字头表示,后来逐渐演变,到公元 8 世纪，印度数学中的 1、2、3 就同现在通用的差不多了；而“七”这个数字，那时写作 6，这时，印度数学中有了零这个符号。

8 世纪印度数学传入中亚，经阿拉伯人的改造，到 12 世纪传入欧洲。欧洲人只知道这种数学是从阿拉伯国家传来的，所以就称为阿拉伯数字。其实，同学们都已明察其中来龙去脉。所以，当今记数的数学符号，公平正确地说，应当叫印度—阿拉伯数字。

14 世纪，我国印刷术传入欧洲，英国在 1447 年出版了欧洲第一批印刷书籍，其中的数字符号已和现在差不多了。到了 1522 年出版的一批书中，数字已完全和当今一样。从此数字的写法渐渐固定下来，苦难的欧洲终于摆脱

了其他进位制、其他记数法的折磨，开始享受这种简便有效的“十进制位值记数法”。

19 世纪的法国数学大家拉普拉斯曾如此感慨：“用九个符号表示一切的数，使符号除了具有形式的意义外，还有数位的意义，这一思想是如此简单，以致无法理解它的奇妙程度。就拿希腊学术界中最伟大而又最有天才的阿基米德和阿波罗尼斯两人来说，他们也没有想出这种记数法，可见这一成就是多么不容易呀。”

中国在这方面虽然世界第一，不过好像并没有传播到世界各地，要不然，现在的记数符号也保不准是用中国的那一套。

不过印度数码倒是传入过中国。在唐代开元六年（718 年），有位在司天监任职的天文学家奉命把印度的《九执历》译为汉文。其中就有“天竺算字”。“天竺”，是古中国对印度之称谓。当时的零，是用点表示的。可惜当时没有把印度数码的写法传刻出来，以致印度数码没有在中国流传下来。

印度人计算加法是从高位加起。因为他们在可以擦了再写的黑板上演算，要进位，很容易擦掉高位上原来的数字，再重写，就跟打算盘一样。做乘法，尤其是多位数乘法，已经和现在的计算程序差不多了，后经阿拉伯人传入欧洲，在那里被改造成现在的笔算形式。

古印度的算术问题多用“试位法”解的。其中有一种美妙的方法叫反演法，就是倒过来推，像现在的逆推法。

在公元六世纪，有一个用诗表现的题目，用的是反演法：

“带着微笑眼睛的美丽少女，请你告诉我，按照你正确理解的反演法，什么数乘以 3，加上这个乘积的 3/4，然后除以 7，减去商的 1/3，自乘，减去 52，取平方根，加上 8，除以 10，得 2？”

根据反演法，我们从 2 开始往回推。于是，（2×10—8）^{2}＋52＝196；196 开平方得 14；14×3/2×7×（4/7）÷3＝28，这就是答案了。

印度人在无理数问题上与希腊人不一样，他们倒不去管那些逻辑上的麻烦，理论上的尴尬。反正是把它看成一个数，然后想办法加加减减。

对于无理数这和，比如 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$，他们认为是：

$\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{(3+12)+2\sqrt{3\cdot 12}}$ 照今天的记号，是：

$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}$

这是婆什迦罗（约 1114—1185）在他的著作中所给的无理数之和的定义。

光有定义还不行，还要有“算”的法则。究竟怎么办呢？婆什迦罗继续教导大家：

“较大的无理数除以较小的，所得之商开方，再加 1，和数取平方，然后乘以较小的无理数，其根即为所求。”

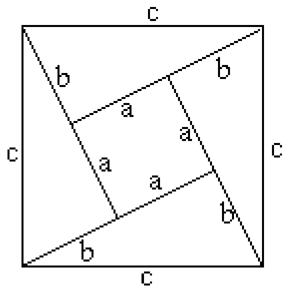
也就是 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(\sqrt{ab}+1)^2\cdot a}$

比如前一题，就有 $\sqrt{3}+\sqrt{12}=\sqrt{(\sqrt{123}+1)^2\cdot 3}=3\sqrt{3}$

这些知识多半来自婆什迦罗的《丽罗娃提》。据说这部著作是以他女儿的名字命名的，让他女儿高兴高兴。

婆什迦罗还用分割、剖分证明了毕氏定理（勾股定理），这就是右边这个正方形。婆什迦罗画了这张图，只写了一个字：“瞧！”正所谓仅著一字，

已得风流。这个证明中国很早就有了。我们在这里还是简单地写个式子，帮助大家进一步明确一下（这里 a、b 是直角边）；



$$c^2 = 4(\frac{ab}{2}) + (b-a)^2 = a^2 + b^2$$

说起来古印度虽然对几何不太系统研究，不过了解得挺早，那是为了造祭坛。有一类经书叫《绳法经》，讲的就是应用几何知识造祭坛，也有圆方问题的解。几何成了宗教的侍女，无可奈何。

印度数学在婆什迦罗以后完全倒退了，一直到现代，才又放出光辉，出现了一位奇才怪才、难以理解之才。此是后话。

欲知后事如何，且听下回分解。

第六回　割之又割　割圆术得徽率祖率
开而再开　开方法解天元四元

勾股定理的证明，是背柴人的杰作。创造了“割圆术”、“重差术”的数学大家刘徽很谦虚，说有道难题确实想不出，祖冲之的儿子把它解决了。当中国人用“天元术”解高次方程，津津有味地说着“物不知其数”时，欧洲还在睡觉。

同学们，说到这里，咱们华夏古算的种种，是应该再表一番了。

中国古算，自文明升华起，一直领先世界。诸般功绩，大家已经有所了解。

大致说来、中国的古算、大约可以化为这么几个阶段：

从上古结绳记事，发明十进制位值记数法，发现勾股定理，还有分数的产生，分数四则运算的运用如此等等，大约有两三千年时间，是数学萌芽和初步发展的阶段。

从这以后一直到元代中叶，这 1300 多年，是中国古算迅速发展繁荣的时期。这期间大数学家并起，连绵不断。

先是三国时期的赵爽、刘徽，接着是以计算圆周率著名的祖冲之父子，他们生活在南北朝时代，再往下就是唐代的一行大和尚，到北宋的贾宪，南宋的秦九韶、杨辉，一时间人才迭出，成果累累。一直到元代“四元术”的产生，达到了中国数学发展的高峰。

这其中一直到清代，中国古算开始走入低谷，缓慢发展。而西方数学也开始输入，一直到鸦片战争以后，中西数学汇合，开始了现代数学的研究和发展。

咱们这回书，就单说那繁荣昌盛欣欣向荣成果累累的一阶段。

且说自《九章》成书以来，中国初等数学的体系初步形成，方方面面都有了成果。这本《九章算术》也是很为瞩目，许多人学习、作注。

给一本书作注，这是中国古代作学问的一种主要方法。这恐怕与中国书的简约概括凝炼有关。一个主张、一种学问、一种观点，往往就那么几句话，看来是节约“纸张”，古时用竹简，挺费事。不过这给后人的理解也添了不少麻烦。

所以一部书成了经典，立刻就有许多人围着它作注释。你这么理解，他那么认为，典籍上的一句话翻来复去要被“炒”多少遍，反正写著的人早就作古，他也没办法发表意见，由着别人折腾吧。

不过有许多注，当然很有见地，往往发扬光大了原来的意思，更把自己的新鲜见解加进去，是一些很有价值、更见风采的好文章、好论说。

不过给数学专著作注，弊病恐怕小一些，数学是形式逻辑作用，一就是一，二就是二，可不能由着性子把正话说反，反话正说。

这位刘徽大师就是给《九章算术》作注作得最好的一个。咱们前几回中谈过，现在看到的《九章算术》就是经过刘大师整理过，注解过的内容。

《九章算术》是我国的一部最杰出的数字典籍，是一颗明珠，可与《原来》媲美，称得上是东西双璧，盖世有双。

所以整理注释《九章》的刘徽，自然是功德无量，给后代做了件大好事。何况在注解中，刘先生匠心独运，旁证博引，使得原先简约深奥的术文得到

了阐明，得到了解释。

这刘徽在注释中还有不少发挥创造，那更是对中国古算的发扬光大了。有些西方人不明究竟，总觉得中国古算注重计算，没有自己的理论体系。

刘徽就在注释中，清理古代数学体系，致力于把“术”文中算理的说清楚。不但说清楚，而且力图把各种数学方法、数学理论之间的关系找出来，追根寻源。

所以刘徽的研究，就不是停留在“举一反三”和简单的类比上，而是深入探求普通的数学原理。刘徽力图用这些普遍的原理去说明和统帅各种方法，这样就形成了一种独特的理论逻辑体系。

不但要有理论，而且还要论证。这就和有些人认为的东方没有证明的看法完全不同了。刘徽曾经说过：“不有明据，辩之斯难。”也就是说，要论证的话，一定要有可靠的证据。他还主张“析理以辞，解体用图”。意思是用逻辑知识去推理，用几何图形去进行直观分析，两种办法结合起来，证明问题。

在注《九章》中，他就这样，用逻辑推理和直观推理的方法，把《九章》提到了新的理论高度。他不仅对书中有价值的公式、定理（就是“术文”）都作出了合乎逻辑的证明，而且对各种算法中涉及的数学概念，也给出了严格的定义，形成一整套理论。

刘老先生虚怀若谷，知之为知之，不知为不知，从不装模作样、不懂装懂。《九章》中球的体积有错误，他发现了。但是经过长期的努力，他也是没能有结果。这时他不是用一个改进的公式去代替，而是实事求是地说真话：“敢不阙疑，以俟能言者。”意思是把这个疑难问题空缺在这里吧，等待以后能够解决它的人。

在《九章》注释的过程中，那些精彩的证明和解释发挥，当然都是好论文。但是最有成果的独家创造是他老人家附有“勾股章”之后的心得体会。后人看它很不错，就把这一部分单独成篇，起个名叫《海岛算经》。

这《海岛算经》是我国古算中的著名经典的十分之一。在我国古算中，共有十部书最有名最珍贵，叫做“算经十书”。

在“算经十书”中，《周髀算经》最古，《九章算术》最宏博丰富，其次为《孙子算经》。这三部价值最大，而其中又以《九章》为代表。

刘徽能以自己丰富的学识，为《九章》这本“算经之最”作注，自然是不简单，何况他所著的《海岛算经》也能算上一份，更加了不起。说到这里，还不得不提另一位人物赵爽。

赵爽与刘徽是同时代人，不过不在一个国家，或者说那时是“一制三国”，在三国时代。刘在魏国，被曹操的孙子管着；赵在吴国，是孙权子孙的臣民。

刘徽以注《九章》著名，而赵爽则以注《周髀》而著称。两人的贡献都很大，对后世的影响也很大。

赵爽又名婴，字君卿，他自己说是“负薪余日，聊观周髀”，也就是背柴火休息下来，研究研究《周髀算经》。有人根据他这一句话，说他是体力劳动者，平民数学家，看样子都不太像。真正是樵夫出身，哪有那闲功夫去看什么周髀？就是想看，也没那么多好条件。

对刘徽的一切也不太明白，只知他受了一次封，不过那是八九百年后的宋朝了。那时为了提倡恢复数学教育，在宋徽宗大观三年（1109 年）追封了历代“著名算数者”，一共 70 多位，而且还在孔庙的两侧走廊画影造形，享

受一下国家级待遇。

那追封的人中有“张衡西鄂伯”、“祖冲之范阳子”，等等。封建社会共有五等爵位：公、侯、伯、子、男，所以张衡得了个三等爵位，祖冲之是四等。刘徽得的是“淄乡男”，第五等。从中也可以知道，刘徽是淄乡人，即现如今山东临淄或淄川一带人。因为以上所封的人大多符合籍贯。

花开两朵，各表一枝。我再说一说那赵爽的成就。

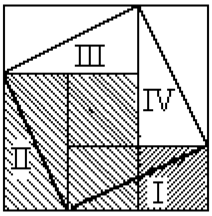
赵爽注《周髀》，首先第一件功劳就是证明了勾股定理。

在咱们中国历史上，有案可考的第一个勾股定理证明，就是赵先生。赵先生的证法是用了“弦图”，而且是彩色的。从下图可以看出，两个打阴影的正方形面积，就是勾的平方和股的平方。现在把三角形Ⅰ移到Ⅱ，三角形Ⅱ移到Ⅲ，又构成了一个新的正方形，它的面积正好是弦的平方。由此，定理得证。

不过，赵爽只在图旁写了一句话：“按弦图可以。”就像那位印度数学家写了一个字：“瞧！”

勾股定理的各种应用，始终是中国古算的一个特征，叫做“勾股术”。第四回中列出一些“勾股术”的公式，都可以用上

面的那种方法来证明。也就是想办法作一个图，然后割补、移位，这就叫“出入相补原理”，这是刘徽提出的思想，赵爽首先运用，日后更被许多人用得淋漓尽致，做出了不少好文章呢！



再说赵爽除建了这第一功以外，更从分数运算中，概括出“齐同术”。

原来那《周髀》、《九章》中，虽然分数的加、减、乘、除都有很多的例子，但是没有概括出运算的法则。

所谓“同”，就是把分母乘在一起，使分母不同的分数变得分母相同，这也就是今天所谓“通分”的来历。

那么“齐”是什么意思呢？比如现在有两个分数：

$\frac{a}{b}$和$\frac{d}{c}$

那么 bc“同”了以后，公分母有了，相应的分子也要变化，这就叫“齐”了，即称 ac、bd 为齐。

所以将$\frac{a}{b}$和$\frac{d}{c}$齐同，就是把$\frac{a}{b}$化为$\frac{ac}{bc}$，将$\frac{d}{c}$化成$\frac{bd}{bc}$。

这样齐同之后，就可以进行四则运算了。《周髀》、《九章》中的分数运算就是通过齐同后做的，只不过没说明罢了。

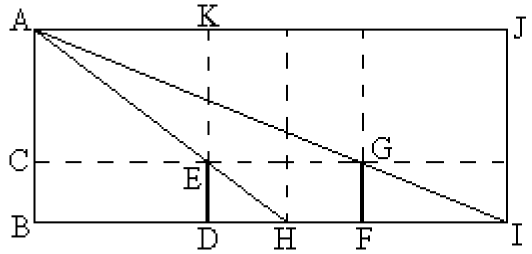
在《周髀》中，还有测量太阳高度的问题，大概的办法就是在地上立两根测杆，古代叫做“表”，然后计下两根“表”的长度，两表之间的距离，两表留下的影子，这样，古人认为就能得出太阳的高度了。

这自然是错误的。因为如果两根测量杆离得较近的话，影子的长度就差不多一样了；而两根测量杆高有十万八千里，那么地球不是一个平面，是弯曲的，而这种测高的算理，是基于测量的基准面是个平面，所以也会错。

古人有测量太阳高度的雄心壮志，当然令人敬佩，虽然有错，精神可嘉。何况用来测一高山、高建筑，所说的一切就完全正确了。因为这时当然可以把测量的基准面——地面认为是个平面，两根“表”离得近嘛。

赵爽就给《周髀》中这么个方法作了注释，详细说明了求法。以后更由刘徽发扬光大，用来表海岛的高、远，著成《海岛算卷》，成一家之说。

那么，《周髀》上的“日高图”（测太阳高度的示意图），究竟是什么样子的呢？原图是早已没有了，但能根据赵爽的说明将其恢复。



赵爽根据“表”的距离、表高和景差——也就是两个影子（“景”）的差，得出以下求日高的公式：

$$日高=\frac{表高\times表距}{景差}+表高$$

刘徽在《海岛算经》中改测日为测海岛的高，公式是：

$$岛高=\frac{表高\times表距}{表目距的差}+表高$$

他测量的方法是这样的：

立两根一样长的标杆（“表”），使得和要测的海岛三点一线。然后“人目著地取望岛峰”，眼睛要趴在地下对准岛峰看，这样对于两个“表”就分别取得了 H 和 I 点。那么“表目距的差”就是 F1 减去 DH 了。

用这种测量方法可以测量很高，以及底部不能到达的物体的高度。不但如此，还能测出海岛离观察点有多远。

那么这个测高公式是怎么得出的呢？是不是有证明呢？原本刘徽是有图有注，而“注”就是证明。到后来，就只有公式没有图和注了。

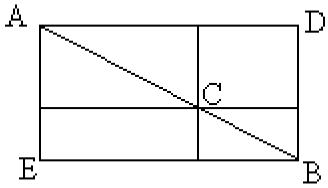
南宋的大数学家杨辉说过，“海岛算法，隐奥莫得其秘”。杨先生甚至将海岛置于座右，以推想“先贤作法之万一”。

到得清朝，李潢等数学家都尝试给出刘徽那时候的证明、不过经现代一些数学家的研究，觉得那些证明都不太符合当时的实际情况。

那么刘徽那时的“古证”，究竟是个什么样子呢？现代大数学家吴文俊先生根据各方面的分析，给出了这么一个古证的复原：

首先，对于矩形 AB，对角线上化一点 C，可以得到矩形 CI）的面积等于矩形 CE 的面积。

这其中的道理也不复杂，因为△ABD＝△ABE，而在这两个大三角形中，各有两对小三角形，面积也是相等的，等量减等量，当然就得到所说的两个矩形面积相等。



在今天，这种方法就是所谓割补法，可以用来计算面积。而在古代，这就归纳成了一条重要的原理，叫“出入相补，各从其类”，这是刘大师的杰作，我们在前面就看到了用这条“出入相补原理”来证明勾股定理。

这么一来，“海岛高”就简单多了！

矩形 JG＝矩形 GB　　矩形 KE＝矩形 EB

两式相减　　矩形 JG－矩形 KE＝矩形 GD，所以

（FI－DH）×AC＝ED×DF，

而 FI－DH 就是“表目距的差”，所以有表目距的差×（岛高－表高）＝表高×表距，由此自然能得到岛高公式。

瞧，多么轻松，多么自然，更主要是符合当时的各方面实际。

《海岛算经》的第一题，就是这么个测岛高的问题。他老先生开头就是这么一句：“今有望海岛……”所以后人、后生就把这本书起个名，叫《海岛算经》。

《海岛算经》只有九个问题，都是一些“测”和“望”问题。不是“望海岛”，就是“望谷”，“望松”，“望楼”等等。因为要“测”，首先必须用标杆“望”，而且都是两“望”两“测”，得到的公式，分母都像上面的一样，是两测之差，所以这一解题的招术就叫“垂差术”，是咱们中国古算一大创造，优良传统。

刘大师在给《九章》作注的序文中说：“凡望极高，测绝深而兼知其远者，必用垂差。”

他那《海岛算经》里的九题，都是高的摸不着头，低的探不着底。而且要测的东西，底部也挨不上去。

这“出入相补原理”，可是当时的一大法宝。比如用来证有勾股定理。古代的中国数学家们，从刘徽、赵爽开始，一直到清朝的梅文鼎、李善兰都用这个法宝，设计出各种巧妙方法，不厌其烦一证再证，乐在其中。有位华衡芳老先生，设计出 22 图，来证这么个定理，真可算得上一绝。

还有第四回中说过，已知勾股之差和弦的长度，求勾、股，或者是已知股弦之和以及勾，求股、弦，等等，在《九章》中都给出了公式，而证明，可就是刘徽用“出入相补原理”给出的啦。

这个原理在今天，对咱们还有用处，用面积相等来求长度，大家好好想想，见到过吗？恐怕不止一次吧。

刘徽用“垂差术”创造出的测量奇迹，西欧社会即使到了 15、16 世纪，也望尘莫及。

却说刘徽另一件功劳就是圆周率的计算。

说到圆周率，大家都清楚，那不是 3．1415926 嘛！有人还会进一步背到小数点后面 100，300 位，倒也真算得记忆的好汉，好学的君子。

只是这圆周率的求法就不那么简单了。’首先是要确定一个计算的步骤，计算的公式；然后是一步一步不畏艰难不怕繁杂去算，古时的计算工具，最先进的就是算筹；最后还要有一种科学的误差分析和误差估计的办法，算对了还是算错了，误差是多少，要有个明白的说法。

这么三件事可不是所有人都能认识到的。在一些人的脑袋里，似乎圆周率的计算很简单，画一个圆出来，半径当然是已知的，然后用一根绢子把圆周一围，得个尺寸，最后再相除一下，不就解决问题了吗？

岂不知你这样量圆周误差不但大，而且各人有各人的量法，误差还很随

意，不好控制。再说了，把一个长度量准了，可要受到测量工具的限制，没法准到多少多少位。

而大师刘徽就是认识到咱们所说的三个要点，做了这三件事的中国第一人！足可笑傲江湖，横刀立马，称雄天下。代表了当时乃至一千多年后的世界水平。

直接“量”，自然是不行，刘徽以前的人大致是用这个方法吧，或者比它好不了多少，所以得出的圆周率大多是“周三径一”，或者是用 $\sqrt{10}$ 来近似。

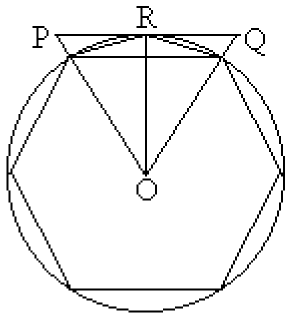
刘徽慧眼独具，他采用的是“算”的办法，这样就达到了三个要求。

让咱们来看一下下页的图，这首先是一个半径为 1 的圆，内接一个正六边形。

正六边形的面积当然好计算，就用它来近似代替圆的面积，而圆的面积就是π的值。当然用正六边形近似圆，很不精确。

不过不要紧，下一步是在此基础上作正十二边形，计算这个十二边形的面积。大家可以看到，图中那正十二边形的一部分（全部的 1/6），是一个四边形，这个四边形是两个三角形底对底（公用一底）构成的，面积好算，是六边形的边长乘以半径，再除以 2。

这样十二边形的面积自然可以得到。



再一步，我不说同学们也会料到，就是再作正二十四边形。根据计算十二边形面积的方法，那当然要首先知道十二边形的边长，才能算出二十四边形的面积。

这个边长如何算？让咱们再看一看图。

因为 PT 是六边形边长之半，OP 是半径，那当然就能用勾股定理得出 OT；然后从 OR 中减去 OT，自然就得到 TR；最后在三角形 PTR 中再用勾股定理，就得到了十二边形的边长 PR。

就这么一直做下去，边数翻倍，十二、二十四、四十八、九十六……这些面积一个比一个大，一个比一个更接近圆的面积。这就是刘徽创造的、大名鼎鼎的“割圆术”。

所谓“割之弥细，所失弥少。割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣”。

刘老先生的意思就是，“割”得越“细”，相差得就越少；一直不停地“割”下去，以至于不可割，就与圆完全一样，而没有误差啦！

实际上又怎么能没有误差呢？因为你没法一直不停地“割”下去，所以你就得估计一下误差，看看算到多少边形，就可以精确到小数点多少位。

想到这一层的人更少，也更不容易，但更加重要。请想一想，这么重要的一个常数，你对它的精确度心里没谱，能放心使用吗？要是用到关键的地

方，说不定会卫星落地，核弹误爆。

那么刘大师是如何估计误差的呢？让咱们回头再看看那张图。

刘徽又在 R 处添了一条切线，然后由 P、Q 作垂线，得到一个矩形，这一块矩形连同三角形 OPQ，构成的面积可就超过了圆的面积了。

所以如果咱算到正十二边形，那么圆面积就大于正十二边形，而小于这么一个齿轮形的面积。这么一来，圆周率的真值也就在这两者之间，它的精确度不就估计出来了嘛！

刘徽算到圆内接正九十六边形，得出它的面积为$313\frac{584}{625}$方寸，而正一百九十二边形是$314\frac{64}{625}$方寸，从而有：

$$313\frac{24}{625}<100\pi<314\frac{169}{625}$$

两头数值之差，是$\frac{169}{625}-\frac{24}{625}=\frac{145}{625}=0.232$，即100个π

按算到一百九十二边形来看，误差不超过 0．232，那么π本身就差不到 0．003，所以刘徽就把圆周率之值取为 3．14。

这么一个圆周率的值，被人们称之为“徽率”。

刘老先生还再三声明，这个圆周率位数还不够，还不算精密，他继续求出正3072边形的面积，从而推得圆周率为$\frac{3927}{1250}$＝3．1416。

这一下就可以放心了，那 3．14 的第二位小数是完全准确的，不是瞎蒙，有根有据。

不过那 3．1416 的圆周率值，竟然打起了一场官司，有人认为它是祖冲之得出的。兴起这场争论的是清朝数学家李潢。后来参加笔战的人就越来越多啦，从解放前一直争到解放后，挺热闹。许多数学家都热闹过，大部分人都主张还算是刘徽阁下的。

说起来也是“是非成败转头空”，就算是刘先生的，与他也没什么大关系了。只不过争论一番，弄清发展的来龙去脉，也还是有益处的。咱们这也算是“古今多少事，都付笑谈中”。

话说那祖冲之自然也是一等一流的数学大师。到如今，也只有他老人家是第一个登月的中国人。

此话怎说？却原来祖老先生不但在中国，而且全球闻名，所以就把月球上的一座球形山，命名为祖冲之山。

大家若是中秋赏月，或是闲来无事看吴钩，那么吴刚嫦娥倒是见不着，而是常常能看祖老先生了。

那祖冲之（429—500）是南北朝时代南朝的宋（420—478）、齐（479—502）两朝人，比刘徽、赵爽晚了 200 多年。

祖冲之在刘宋朝廷被安排在政府的学术机构——华林学省工作，并“赐宅宇车服”，搞学术研究，是个享受国家津贴的有贡献学者。后来又调到各处任地方官，大约是县团级。晚年被提升为长水校尉，成为高级将领，而且给当局上书献策，谈谈治国方略，以图一展抱负。不过这些治国安邦的计划也没实现。

祖冲之最突出的成就倒不是政绩，而是数学了。他继承刘徽思想，通过

研究刘徽的注释和《九章》，水平自然不浅。

他认为徽率 3．14 不够精密，继续往下推求，用的还是“割圆术”，他的新结果是：

3．1415926＜“正数”＜3．1415927 所谓“正数”就是圆周率的准确值。但由于它是无理数，不能用有限小数或分数表示准确值，所以只能用有限小数不断逼近他，用一串有限小数逐渐地靠近那个准确值。

不但要用一串有限小数去逼近，而且要用上限和下限两个数（或两串数）去“夹”，这样，圆周率这个无理数就被准确地描绘出来了。

因为这么一“夹”，就有了精度的衡量，“正数”（准确值）的大小范围明瞭了，这可是一种非常非常先进的思想，了不得，是现代数学才有的思想。而刘徽和祖冲之在那么遥远的年代就有此卓见，同学们，你看应当如何评价呢？

祖老先生把那个不足近似值 3．1415926，叫做“朒数”，而那个过剩近似值 3．1415927 叫做“盈数”。按他的话说，“正数在朒盈二限之间”，可叹，可敬！

祖冲之的这个圆周率，自然叫“祖率”，保持了一千多年的世界纪录。公元 1596 年，荷兰数学家卢道夫经过长期艰苦努力，把圆周率算到 15 位小数。1610 年他逝世后，人们在他的墓碑上刻上他的这个成果，并把这个数叫做“卢道夫数”。数学家墓碑都挺有职业味道，你说是不是？

当然，现在计算圆周率，可不是用这种方法。不是方法不对，而是用这种方法太慢。从这我们也可以想见刘徽、祖冲之的计算工作是多么繁重，要知道，计算中要有多次开平方呢！

祖冲之还给出了分数形式的“约率”、“密率”，

密率是 $\frac{355}{113}$，约率是 $\frac{22}{7}$。

约率，就是精确度差一些的；密，就是精确度好一点的。

圆周率看起来是个简单的问题，其实真不简单，它往往反映了当时的数学水平和数学思想。

祖冲之的家庭真算是书香门弟了，他的先辈有搞建筑工程的，有写诗作文的，也都有历法研究的根底。他的儿子、孙子都精通历法。

尤其是儿子祖　，更是了得，很可以说“青出蓝而胜于蓝”。他造过当时的计时工具——漏刻。在梁天监十三年（514 年），去搞治淮工程，后来工程被水冲垮了，就被逮入狱，不知是不是判的是渎职罪。出狱后遇到一位高人给他讲授数学，恐怕是得益非浅。

祖　的拿手绝活就是计算体积。

许多体积问题咱们在《九章》都已见到“术文”了，都很正确，只有唯一一点遗憾，就是球体的公式不对。

这一点刘徽老先生已经发现。那么如何解决呢？他想了一个关键的办法，就是在一个正方体里，纵横交错内切两个圆柱。那两个圆柱相交的公共部分，就是他所说的“牟合方盖”，像个做得不太好的灯笼，或是两把底对底的方形伞。

这么个图形不太好想象，要发挥一下大伙的水平了。这个圆形名子怪，样子也挺怪。那么刘徽先生为何出此怪招呢？

原来他天才地发现，如果用一个平行截面去截它的话，不管这个截面是

上去一点，还是往下截一点，截出的总是一个正方形！

如果在这个“ 牟合方盖 ”里再内切一球（实际上也是原正方体的内切球），那么再用截面平行去截，截面就是一个正方形含内切圆。那个内切圆就是球的截口。

■

正方形与内切圆的面积比是 4∶π。而现在任意一个平行截面都是这样的形状，都是 4∶π，你说说，“ 牟合方盖 ”与球的体积之比是不是也是 4∶π响？因为体积，咱们可以看作是这无数平行截面垒积而成的！

刘徽在这里提出了一个很重要的思想，就是两个几何体，如果用任一个平行截面去截，截得的两个截面的面积比总是 a∶b，那么这两个几何体的体积之比也是 a∶b。

现在如果这个比是 1∶l，也就是两个截面积相等，那么自然两个几何体的体积就应该相等了。这正是祖　提出的著名判断：

幂势既同，则积不容异。

幂势，即作面积讲；而积，就是体积了。祖　的这一段话后来就被命名为“ 祖　原理 ”，在计算体积中有极重要的基础作用。不过，咱们也看到了，刘徽也有着同样光辉的发现和应用，所以还是叫“ 刘祖原理 ”为好。

但是刘徽在得出了“ 车合方盖 ”和球的体积之比之后，他就想计算出那个怪物的体积了。不过进展很不顺利，他对这个“ 方圆相缠，浓纤诡互 ”的复杂圆形没有了办法，只有“ 以俟能言者 ”了。

祖　看到这个问题后，自然也是想了半天，后来他灵机一动，于脆去计算从正方体中去掉“ 牟合方盖 ”后，所余下那部分的体积。如果能算出来，那么“ 牟合方盖 ”的体积只要两下一减就得到了。

他成功了！用的也是“ 刘祖原理 ”！他首先构造了一个容易算体积的方锥，而后再去截！

这成功确实不容易，难怪他在得出了球的体积之后，得意洋洋地说∶“ 等数既密，心亦昭晰，张衡放旧，贻晒干后；刘微循故，未暇校新，夫岂难哉？抑未之思也。 ”

意思是张衡、刘徽都按着旧套子去干。这有什么难的？那不过是没好好想罢了。

这么重要的“ 刘祖原理 ”，西方一直到 17 世纪意大利数学家卡瓦列利才发现，他们那一直把它叫做“ 卡瓦列利 ”公理，好像是不太公平吧！

祖代父子还有一本高级专著：《缀术》。据说是“ 旨要精密，算氏之最者也 ”，曾经被当作当时数学专业的必修书，要学四年。

但是曲高和寡，“ 学官莫能究其深奥，故废而不理 ”，这部好书就在北宋天对、元丰年间（1023—1078）失传了。也正是个“ 把阑干拍遍，无人会，登临意 ”。

魏晋南北朝时期，虽然战乱频繁，但数学成果倒不少。当时有一本著名的算经，叫《孙子算经》，大约是公元 400 前后的产品，全书三卷，作者已经不详了。

《孙子算经》之所以有名，是因为有一个著名的问题：物不知其数。

即所谓：“ 今有物，不知其数。三、三数之余二；五、五数之余三；七、七数之余二。问物几何？ ”

也就是说有一堆东西，3 个 3 个数余两个；5 个 5 个数余 3 个，7 个 7 个

数也余 2 个，问你一共有多少个物体。

翻译成数学语言，无外乎是被 3 除余 2，被 5 除余 3 如此等等，所以我们今天用方程列出就是：

$$N=3x+2$$
$$N=5y+3$$
$$N=7z+2$$

这里 N 表示物体总数，X、y、z 分别表示被 3、5、7 除后所得的商。三个方程，四个未知数，那么有解的话，就肯定不会唯一的了。这类方程叫不定方程，同学们想必均已知晓。

这个问题现在可以用同余的知识来解决。当时的《孙子算经》是这么给出招“术”的：

将三三数之的余数，乘以 70；五的余数乘到 21；七七之余乘以 15。然后相加，再减去 105 的若干倍，即得答案 23。

这其中的 70，21，15，显然是关键之数。其诀窍就在于，70 是 5 和 7 的倍数，而被 3 除则余 1；21 是 3、7 的公倍数，而被 5 除余 1；15 呢，不用说是 3、5 的公倍数，而被 7 除余 1 了。所以如果问题中各数的余数是 a、b、c 的话，那么 70a＋21b＋15c，便是所求的一个答案。大家不妨推敲一番，便知奥妙。

那么为什么又要减去 105 的倍数呢？因为 105 是 3、5、7 的公倍数，从最初的和数中，减去 105，仍然是一个答案，另一个解。而算经中之所以减去，是为了求得这个问题的最小正整数解。

这一套算计真是奥妙，后人更给它编了一首诗，朗朗上口，十分好记：

三人同行七十稀，
五树梅花廿一枝；
七子团圆正月半，
除百零五便得知。

正月半者，十五之谓也。

这个大名鼎鼎的题目后来由秦九韶发展为“大衍求一术”，在 1876 年德国一学者发现孙子的解法与 19 世纪高斯的理论和解法完全一致,故而这一杰出的成就为世界瞩目，被称作“中国剩余定理”。

《孙子算经》是一本当地的普及读物，雅俗共赏，多为游戏性质的趣题。著名的“鸡兔共笼”便在其中：

今有鸡兔同笼，上有三十五头，下有九十四足，问鸡兔几何？

孙子的算法真是妙不可言。他设想鸡免的足通通减少一半，成 47，也就是小鸡一律金鸡独立，只有一条腿了；而小兔前爪举起，剩两只爪了。

那么这样一来，47 就是兔头的二倍加鸡头数，从中减去总头数 35，得名义头数 12，也就是兔的数目。剩鸡的数目当然是 23 啦。

此外还有这样的趣题：今有出门望见九堤，堤有九木，木有九枝，枝有九巢，巢有九禽，禽有九雏，雏有九毛，毛有九色。问各几何？

诗一般的意境自然能提兴趣，吊胃口，孙子的心理学掌握得不错。咱们在埃及的莱因德纸草卷中，已见过这个问题的类似情况。只不过在那里是 7 的乘方，咱们这儿是 9 的乘方。九，阳数之最也，算是中国古代的极品之数了。

且说那历史车轮转到隋唐时期，隋朝虽然很短暂，但却很繁荣；而盛唐

时期更是古代中国空前鼎盛时代，后代一直津津乐道所谓“贞观之治”、“开元盛世”。

经济各方面发达了，学术研究文化事业当然也跟着繁荣。在这么一个情况下，数学教育也制度化，中外数学交流也比较多。

咱们中国的数学教育有悠久历史。孔老夫子的教育内容有所谓“六艺”的说法，即礼、乐、射、御、书、数。也就是要学会礼仪、音乐、射箭、架车（“御”）、计算等本领、很有培养复合型人才的远见。

据说周秦以来，小孩子六岁及八岁入学，就要学数学的基础知识。

隋代建立了最高学府——国子寺，和亚历山大的大学差不多。其中就设立了明算学，也就是数学系了。主持数学系的有算学博士 2 人，算助教 2 人，招入学生 80 名。不过这位算学博士（系主任）的级别很低，只是从九品下，简直够不上级别，最末一级。

到了唐代，最高学府叫国子监，也有明算科，也有明算博士主持工作。

唐初明算科，分为两个层次，好像专科、本科，或者像大学、研究生那样，都要学七年，学的教科书就是“算经十书”，其中第二个层次要学《缀术》，那时这本书还没有失传。

学习期满要进行考试，从算经中出十道题，答对六道才算及格。有时还加口试，规定“得八以上为上；得六以上为中；得五以上为下”。

这样的教育制度不但影响到宋朝，而且还连制度带教科书一起出口到日本、朝鲜。不知当时是不是按照现在一些大国的做法，搞一个什么“三〇一”条款。

中国和印度的古代数学好像也是互通有无，相似的地方很多，有的完全一样。有趣的是，相似的地方，印度一般晚于中国的记载。

比如印度的文集中，也有圆周率 $\frac{3927}{1250}$ 和 $\frac{22}{7}$，
这些都是刘徽和祖冲之的创造，印度的记载要晚。

不但正确的很相似，而且《九章》中两个误差很大的公式，在印度的《平面积量法》这本书里也记载着，完全一样。对的方面相似还好说，错也错的一样就不大可能了。

就好像阅卷的看到两位学生的试卷锗的一样，那他就要认为是作弊了。当然咱们可不能说印度的数学有什么这个那个的嫌疑，只不过中印两方面，数学肯定有着很密切的交流。诸位也许记得，印度的数学符号，不是也传入过中国吗？

却说中国古代文学中，有唐宋八大家，那当然流芳千古；但咱们中华古算史上，倒也有鼎鼎有名的宋元四大家，将古代数学推上了前所未有的高峰。

这四位前辈倒也是“聚得拢，散得开”。

何谓聚得拢？却是因为他们都是同时代，相差不到 50 年，同时都卓有成就。

那又怎称得上散得开？那是由于这四大家的当时既没有现代火车、飞机的交通便利，又没有计算机联网查询，可以方便地进行学术交流。他们都处于宋、元交替之机，兵连祸结，天各一方，没个安生日子过，各人顾各人钻研学问，但都对高次方程的解法做出了大贡献，你说奇也不奇？

这其中首先一位是秦九韶（约 1292—1261 年），咱们大家也大略知道一点他的大名，秦九韶公式嘛。也就是外国人所说的海伦公式，求三角形面积

的。

秦九韶是南宋人。那时南宋小朝廷内争激烈，腐败不堪。秦先生聪敏好学，“星象、音律、算术以至营造（建筑）无不精究”，“游戏、■马、弓剑莫不能知”。

可能是他精力太过剩了，对那腐败的政治也多想参与，“出污泥而有染”，品行很不好。他是个官迷，还是个贪官，到琼州（海南）做官仅仅百多天，老百姓就盼他早死早好。照这么看来，要是现在被反贪局抓到，非杀头不可。

不过照一位美国史学家说，他无疑是“那个民族、那个时代，并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一”。

秦九韶的学术伟大在什么地方呢？

首先是创建了“大衍求一术”。大家当然能记得咱们刚说过的“中国剩余定理”，也不会忘记那三个关键的数：70、21、15。

这三个数之所以重要，是因为它们除以某个数余 1，而又是另两个数的倍数。比如 70，是 5 和 7 的倍数，但又被 3 除而余 1。

这样的数如何找？如何求？当然有规律可寻，不能瞎碰。秦九韶正是找到这求法，把它称为“求一术”，求一个被某数除余“一”的数。

正因为这么个“求一术”是普遍适用的，所以“孙子问题”就不限于 3、5、7 了，也不限于三个数了，可以是很多个数。

这“大衍求一术”记载在他写的《数书九章》中，反映了中国古代在一次剩余问题的解法方面有着极为辉煌的成就。19 世纪介绍至欧洲，引起很大轰动。

《数书九章》是 1247 年写成，约 18 卷 20 万字，堪称煌煌巨制。它记载秦氏的另一项代表中国乃至世界中世纪最高成就的东西是一元高次方程的解法——秦九韶正负开方术。

中国的开方术，是世界上发明最早的主要算法之一。《九章》中多位数的开平方、开立方法则，是全球最早、最完整的记载。

古代巴比伦的繁杂数表诸位当能记得，那其中就有立方表、平方表，他们就是借助这表来进行开方运算的，烦，没一般方法。古希腊亚历山大时期约 400 年，才有几个开平方的例子。

开平方的一般笔算方法现在初中已经不学了，用计算器按按挺方便。但笔算依据的公式大家都学过，就是 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。同样，开立方就靠公式 $(a+b)^3$ 的展开式。

这开方的一套程序自《九章》以来，又经不断改进，算法比较简便了，但本质都相同。后来又发展成一套高次方程的数值解法（不是用求根公式解），到秦九韶一代更到成熟地步，从而达到当时世界水平的顶峰，谱写了中算史上极其光辉的一页。

秦先生的光辉著作中共有 20 多个高次方程问题。最复杂的有高达十次的方程，那是一个所谓“遥度圆城”题，也就是测量一座圆城。不过秦先生有些好大喜功，这个问题用三次方程就能解决了，他偏要卖弄。可能是性格使然，也可能是为了说明十次方程的解法。

牛顿—拉弗森是西方数学啧啧称道的解高次方程的好方法，但是它的原理却同中国的开方术解法是完全一致的。不过却比咱们中国晚了 600 年以上。

那开方的办法既如此重要，人们自然想到开四次方、五次方等等应依据什么开，照今天的眼光来看，就是看看 $(a+b)^4$、$(a+b)^5$ 等等各项展开的系数。

秦九韶自然是知道这一套的，否则他的七次方程也没法做，没法求根。

但比他更早的是北宋人贾宪所做的贡献。可能会有人问了，这北宋人能算得上你刚才所说的宋元之际的四大家吗？

那自然是算不上。但贾宪活动于 1022—1054 年间，生平和著作都已失传。而他的知于世，全靠着另一位大家、四大家之一的杨辉，在他的《评解九章算法》中记载的。

杨辉的几本著作写于 1261 年—1275 年间。那么他在《评解》又记述了贾宪的什么功劳呢？这就是用来开方的关键图——“开方作法本源图”。这张图就是一一列出了$(a+b)^n$这样一个二项展开式的各项系数，你说紧要不紧要？

在这个二项式中，如果 n＝0，那么系数当然只是 1；若 n＝l，那么展开后的系数就是 1．1；而 n＝2 和 n＝3，分别就是 1、2、l 和 1、3、3、1。如此等等，n 逐次增大，系数的个数也逐次多一个。

贾宪把这些系数依照 n 的不同，一层一层从上往下放好，就成了一个三角形。所以就叫它贾宪三角形。也把它叫做贾宪一杨辉三角形。本来嘛，这个三角形能传播天下，多亏了杨辉的功劳，杨辉不掠人之美据为己有，应该大大表扬。

这贾宪一杨辉三角在西方叫帕斯卡三角形，不过晚咱中华 500 多年了。但是就是在西方，就算不知道贾宪的成果，叫帕斯卡三角形也不对，还有比帕先生早 100 年发现的。

杨辉的生平、年月也不大清楚，是钱塘（今杭州）人。他做过官，比秦九韶好多了，是个清官。

虽然生平事迹没多少人知道，但他的著作很多，流传至今的也有不少。他的《评解九章算法》共 12 卷（1261 年），现在都残缺不全了。杨辉是把《九章》的 246 问提出 80 问进行评解，按由浅入深的顺序，分类讲解，有图有算草，十分细致。

现如今的幻方，也就是在一个棋盘格子里填上数，使纵列横行以至对角线上的各数之和都各各相等，完全相同。这在古代叫做“九宫”，河图洛书就是一种幻方。

杨辉在《续古摘奇算法》中给起了个名叫“纵横图”，记载了 13 幅图。

4	9	5	16
14	7	11	12
15	6	10	3
1	12	8	13

咱们现在看到的图就是一个四阶幻方,你看各行之和不都是 34 吗？各列也是如此，还有两条对角线。

最重要的是杨辉叙述了这纵横图的构造法，如何填数，如何对换，对构成规律已有了发现，可以说是前无古人的。

虽然幻方这个问题很古老，但它却是勃勃兴起的组合数学的重要内容呢！

杨辉还是个优秀的数学教育家，他主张循序渐进，精讲多练。他的许多著作都是写的教科书。所以咱们的数学教育研究会可以选杨辉为首任名誉会长，尊为祖师爷。

这秦九韶、杨辉两位南宋末年的数学家咱们说完了，那就再聊聊元初的两位数学家。这两位创“天元术”、“四元术”，都是解高次方程的，一位叫李冶（1192—1279），一位叫朱世杰，稍后李先生二十多年。

李冶是北方人，住在金国，中进士后曾当过州官。后来蒙古军破了城，李先生就隐居起来，研究学问。大元得了江山，忽必烈下诏让他做官，李冶以老病推托了。

1248 年，秦九韶的著作问世仅一年，李冶的《测圆海镜》就问世了。这本书最重要的是提出了“天元术”，说的是如何立方程，表达一个方程。

怎样表示一个方程，这在代数上很重要，大致分三个阶段，最后一阶段就是符号代数阶段。而李冶创“天元术”，也大致到了这么个地步。

所谓“天元术”，就是天元为未知数，以“太”为常数。把一个一元高次方程，用算筹形式表达出来。表示的是各项的系数。

具体是这样的，首先写下元字（或太字），然后摆上一次项的系数，在“元”的旁边。x^2 的系数摆在一次系数上面，次数每增一次，层次就高一级。“元”下面一层摆“太”，即常数项的大小。太下面可放 X 的－1、－2、……次幂的系数。

这就是我国古代方程的表示方法，大家倒可以用火柴棍当算筹，摆上试试。

虽然秦、李两人一南一北，毫不相识，但他们所用的符号倒是相同的，令人吃惊。

李冶及秦九韶的方程式都是一元的，系数也允许有负数。这表示系数的算筹上要是斜放一杠，就表示是负的了。

一元高次方程的解法当然还用“开方术”。那么多元的问题自然会被人思考。这方面卓有成就堪称大家的就是朱世杰了。

朱世杰客居北京附近，后来就靠数学名家的声望和技艺周游讲学 20 余年，到得扬州，“踵门而学者云集”，上门求学的像云一样汇拢。

他的发明中至少有两项可得全国科技特等奖，或者世界数学菲尔兹奖。

首功是立方程，立四元高次方程。朱世杰所著《四元玉鉴》（1303 年）中，创制“四元术”，把“天、地、人、物”分别当为四个未知数，好像现在的 x、y、Z 和 u。和“天元术”相通，这种四元方程也是用算筹布列成一个系数的阵，只不过不像一元，布的是长长一列，它是四元，布成的就是一个方形，矩阵。

		U^2	U^2Z	U^2Z^2
		U 物	UZ	UZ^2
Y^2Y	地	太	人Z	Z^2
		天 X		
		X^2		

就如上图：“太”居中央，是常数项的位置。四周环列“天、地、人、物”，最靠近太的四个方格，是天、地、人、物四元的一次项，其余的方格就像填表格，或者是坐标系中找点一样，比如 Z 格向上，u^2 格向右，交叉处就是 u^2Z 的系数的位置。

这种布列方程的办法确实很奇特，不过因为位置有限，再多的元就不好

放了，再说，像三元的交叉项 Xyz，xy^2z 等，就不太好放，当然朱先生也想了办法怎么放。

朱世杰多元高次方程组的华彩乐章是“相消之法”，就是消元，把方程组经过变形得到一个一元的高次方程，然后用“开方术”对付它。

这多元一次的方程组当然好消元，而高次的高比较麻烦了。

为了说明白，咱们就按现在方程的记法，用朱大师的消法，来看一看一个二元高次方程组如何消元。比如对于 X、y，咱们现在要消去 y。如果两个方程中 y 的次数都是一次，就可写成 A（X）y＋B（X）＝0 及 C（X）y＋D（X）＝o，这里 A、B、C、D 都是 X 的多项式。

这种一次的很好消，代1入即是，即用$y=-\frac{B(x)}{A(x)}$代入第二个方程。

如果 Y 的次数是二次、三次甚至更高，比如像

$$\begin{cases} A(x)\,y^2+B(x)\,y=0+C(x)=0 \\ A(x)\,y^2+E(x)\,y=0+F(x)=0 \end{cases}$$

就可以先消 y^2 项，得一个一次 y 式，再进行消元。三次的也可类推。

如果两个方程中 y 的最高次不一样，那么就可以给次数低的方程乘上 y 的适当次数，使两个方程中 y 的次数一样高，便于消元。

这消元的杰出成就再加上开方术解法，就基本上完全解决了多元高次方程的解法问题。当然，还有一点小小麻烦，方程何时有实解？如何判断？在中国，这个问题解决得晚。

一直到清朝，有汪莱其人研究了这方面问题。那时离宋、元高度发达的数字已有 500 余年了。宋、元时代那遥遥领先的中华古算，竟在明代被埋没了 300 多年！至此以后，中国的数学就开始从顶峰下滑，从远远领先的位置变成大大落后的局面，可惜啊，中华古算！

但凡万事万物，总有消就有长，希腊数学也是如此。就在这两大数学体系，另一地方的数学成就却在缓慢上升，最后进入快车道，形成完整的现代数学体系。

这块地域在何方何处？如何缓缓上升？又如何快速增长？

欲知后事如何，且听下回分解。

第七回　刀光剑影　竟从方程求解引起
冲天巨浪　却由文艺复兴开辟

欧洲一觉睡醒，拼命地搞知识进口。一位自学成才的数学家正为自家的发现洋洋得意，却险遭杀身之祸。使代数从几何中独立出来的韦达，不料还是破密码的能手。现代数学的帷幕正徐徐拉开……

且说上回书中所说的那块地域，即现如今之欧罗巴洲，欧洲是也。

这西欧一块，现在是所谓“花柳繁华地，温柔富贵乡”了，算是个好去处。孰不知两千年前，当几大文明盛极一时之际，今天的欧洲一带只有原始的文明。住在那里的日耳曼人既没有文字更没有文化，是个“发展中国家”，“第三世界”。

后来发展了千把年，也还不能和咱中国一比。那时的大唐、大宋，早已是繁华昌盛，万邦来朝，俨然是世界文明的精华所在。

欧洲人自己说的幽默：当东方人穿锦戴银的时候，咱们老祖宗还围着树叶在树洞里呆着呢。

正所谓“三十年河东，三十年河西”，沧海桑田，如此而已。

那英法一带，虽早在罗马新闻社国统辖时就获得一些文化，但直到公元 500 年，新的文化影响才开始在欧洲起点作用。

不过，这新的影响一开始却是不大妙。从公元 5 世纪中叶到 11 世纪，这六、七百年时间，是欧洲的黑暗时代，万恶的旧社会。那时，学校教育名存实亡，希腊学问几乎绝迹。

要说有文化，也都在教会的修道院内。大部分的文化人都在院墙内研读圣经，侍奉上帝。就是墙外剩下的几个，又怎敢大胆妄为，离经叛道？大家都得统一在教会的权力下。

好像还是那么个理：圣经以外的知识，如果是好的，早就在圣经里；如果不合圣经，当然是坏的。好坏界限很明确，不由你分说，一切以圣经为准。

那时的数学主要是为了有点基础学学天文，好夜观天象，用占星术来预测吉凶祸福。现在有些人也喜欢看看自己、看看别人是属于什么星座，赶个洋时髦，其源都出于此。

那时有点名气的数学家中，有一位叫博埃齐（约 475—524），他写了两本教科书：《几何学》和《算术》。

那《几何学》也只是对欧几里德的《原本》支离破碎地摘抄了一些，可能还有错误，定理也没给出证明。奇怪的是还在这本书里含有算盘和分数的内容，可能是算命看星座要用得着。

《算术》的内容也是乏味枯燥，神秘兮兮的。就这么两本书还被当作宝贝，好几百年里一直作为教会学校的标准课本，一直用到 12 世纪。

这位博埃齐出自名门，还写了一些哲学书，而他则成为了中世纪经院哲学的奠基人。他理想高尚，又有点刚直不阿的味道，最后竟以叛国罪被斩。

后来还有一位热尔拜尔（约 950—1003），法国人，教士。他幼年就聪明异常，到西班牙的穆斯林学校学习过，很可能随之也把印度—阿拉伯数字带回了欧洲。

他手艺倒也不赖，能做做风琴，制制地球仪，造造钟表，令同辈五体投地，认为他是个鬼才。令人迷惑的是，这么一个有生气的人，在公元 999 年

竟被选为基督教的教皇。

就从这位教皇开始，希腊的科学著作，自然也包括数学著作，开始传入西欧。一个途径是通过贸易、旅游、留学，同地中海地区和阿拉伯人发生接触，吸收他们没见过的大量知识。

希腊文的、阿拉伯文的著作大量翻成拉丁文。那些当权人物不知是什么原因，也支持学者们出国取经。有一位老先生居然乔装打扮，冒充回教徒，去阿拉人的地盘里偷学“ 真经 ”。这要是现在，是要被当作科技间谍的。

还有一个途径是战争。不过这场仗不是为数学去打的，那叫做十字军东征。

1085 年基督教徒攻占托里多城，那些基督教学者们立刻蜂涌而入，那里的阿拉伯著作可是多极了。又过了几年，基督徒又从阿拉伯人那里夺取了西西里岛。

那西西里岛大家当然都觉得耳熟。此处确实是个风水宝地，是东西方的天然会合处，几大文明的聚宝盆。希腊、罗马、阿拉伯，反复争夺，几度易手。基督教的学者在这里如获至宝，把大量的希腊和阿拉伯的手稿翻译成拉丁文。

整个 12 世纪就是这么不停地翻，不停地学。欧洲人对这些著作如此钦佩，以至完全倾倒。他们见到了一片从未见过的绿洲，他们发现了真正的新大陆。这精神文明的大发现要比哥伦布的发现早上 300 多年呢。

这个时期就叫做大传播时期。

火种已经播下了，但要形成燎原之势，还需时间老人起起作用。所以 12、13 世纪那当口，思想还是受着严重的束缚。不过由于有了那么多的希腊书、阿拉伯书，总归有点生气，有点起色。

这其中最值得一提的一位，是 13 世纪初的斐波那契（约 1170～1250），称得上是欧洲中世纪最杰出的数学家。

斐波那契也被称为比隆的莱昂纳多，1175 年出生于比隆的商业中心，其父在那里经商。那时，许多意大利大商行在地中海一带的许多地方拥有仓库。就在他父亲当海关关员时，小小的年纪，他就随父亲到过非洲。做父亲的天天要算帐，当儿子的在旁边看久了，当然就有了兴趣。

后来斐波那契又到埃及，西西里、希腊和叙利亚去游历，当然是长了更多的见识，学了许多的数学，如果他要一直在欧洲，那肯定是没那么大出息了。

回到比隆，受到当局的重视。他确信印度——阿拉伯的那一套数学，是要比当时的欧洲优越。1202 年，契先生写了他的名著《算盘书》，咱们在前面已经见过一次面啦。

这本书虽然有许多是斐波那契的独立成果，但也受了阿拉伯和希腊材料的不少影响，当然这其中也有印度、中国的影响。阿拉伯所做的“ 金桥工程 ”，从欧洲文明的大传播时期起，就发挥了巨大的效益。

斐先生之前，欧洲已多少知道一点印度一阿拉伯记数法，不过只在修道院的院墙内，被教士们研究玩赏。可怜的老百姓依然在用繁杂的罗马数字，用着巴比伦的 60 进制分数。

从斐先生的光辉著作产生巨大影响起，欧洲人这才拨云见日，慢慢用起印度—阿拉伯记数法，用起印度人对整数、分数、平方根、立方根进行计算的方法。

《算盘书》中的代数，他也照着阿拉伯人的样子用文字讲述，而不是用符号，比丢蕃都的立方程和中国的“天元术”都低了一截，未达水准。

各位同学，对于咱们大多数人来说，了解得较多的，就是以他名字命名的斐波那契数列了。

那斐波那契数列确实很重要，流传至今，中学的老师一讲到数列，必提起它的大名，不过就很少讲起这数列中的有趣故事啦。这故事可是斐先生自编的，用来引出问题：

假定一对刚出生的小兔一个月能长成大兔，再过一个月便能生下一对小兔，并且此后每个月都生一对小兔。如果一切正常没有死亡，公母兔也比例适调，那么一对刚出生的兔子，一年系繁殖成多少对兔子？

咱们自己拿着纸头，或者就在书边角上，简单推算一番．就可以知道，按月排下来，每月的兔子对数是：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233。

那 233，就是一对刚出生的小兔，一年内所能繁殖成的兔子的对数。

咱们自然还能往下算。下一个数就是 14＋233＝377。为什么呢？说起来也挺简单：那 233 中包括两部分兔子，一部分是刚生下一月的兔子，那么在下一个月中不能生；一部分是生下已超过一个月的兔子，这一部分在下一个月都要再生一对兔子。把这两部分找出来，到底是多少，当然就能算出 233 后面应该是多少只兔子了。

其实，那第二部分的兔子数已经写在上面了，就是 144。从 144 增加到 233，增加了 89 只新兔子，所以 144 对于 233 的下一个数来说，就是老兔子了。所以 233 的下一个月，应新添 144 只兔子。共计有 144＋233＝377 只兔子。

这自然是游戏之作，数学家们的呆想，实际中那能保证不死亡，永远这么生下去呢？

那么这 377 算出来以后，再往下的各项大家当然也能看出门道了。这个数列中，每一项总是前两项之和！自然，除去第一、第二项以外。

所以这个数列就叫作“递推数列”，也就是说，知道了前两项，就能推出后一项，能像滚雪球一样，逐渐滚大、滚多。

递推数列是种很重要的数列，斐波那契好像是头一份。所以在中学里要讲到递推数列时，当然首先要提到它。

那斐波那契数列，还有一奇妙之处，两个相邻项之比（小的比大的数），就与所谓“黄金分割”的 0．618 发生了绝妙的契合。请看：

$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{8}{13}$，$\frac{13}{21}$……

我这里是依次把第 1 项与第 2 项，第 2 项与第 3 项，第 3 项与第 4 项，如此等等，写成上面的分数之比的形式，得出一系列分数。

开始几个分数的值与0．618相差还多一些，到$\frac{13}{21}$，就是0．619了。再往下去，$\frac{34}{55}$，就是0．618。

当然咱们这算的是近似的。可以证明，这列比值如此无限继续下去，其极限就是$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，而这个无理数，正是0．618的来历。

这 0．618，不但是“黄金分割”，很美，而且也很技术，很科学。此话怎讲？原来后世有“优选法”一说，研究的就是如何从一大堆数据中，好中选好，优中选优。此是后话，暂且不提。

斐波那契数列被斐先生说的生动有趣，很吊胃口，这也是那时的数学书常用的手法。恐怕那时的读者水平初等，板起面孔来教，效果更差。

比如斐先生还给出这样一题，咱们不妨放进脑子里，茶余饭后也能助点谈兴：

一个人经过七道门进入果园，摘了许多苹果。离开果园时，给第一个守门人一半加一个；给第二个守门人，是余下的一半加一个；对其他五个守门人，也如此这般，最后带着一个苹果离开果园。请问当初他一共摘了多少苹果？

看来这些守门人也是乱设路卡乱收费，雁过拔毛，非治理整顿不可。

斐波那契的才能受到皇上陛下弗里德里希二世的垂青，因此被邀请到宫廷参加数学竞赛。皇上的四品带刀侍卫约翰阁下提出了三个问题。所以认真说起来倒不是竞赛，而是想考考咱斐先生的学力功底。

第一个问题是，求一个有理数 X，使 x^2+5 和 X^2-5 都是有理数的平方，当然咱们这里给出的是现在的符号记法。

斐波那契给出的答案是$4\frac{1}{2}$，大家不妨验算一番。

这道题就是对咱们现在的诸君来说，恐怕也不太容易。

第二个问题是求方程 $C^2+2x^2+10X=20$ 的解，这是个三次方程，斐先生先用 $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ 的无理性论证了此方程无限，也就是没有能用直尺、圆规作出的根。然后他给出了一个近似解，X=1．3688081075。不知他是不是用了中国的“开方术”。

13 世纪的欧洲数学，以斐波那契为代表，就这么慢慢地在巴黎、牛津、剑桥和那不勒斯等地的一些大学发展起来。星星之火，终于要成燎原之势了。

且说从 12 世纪的大传播开始，欧洲文明的火种已经播下了，文明之车也缓缓起动。

但这冲天之火却不能突然而起，黎明之前还真有一段黑暗呢。

首先是 13 世纪的基督教可真是不含糊，对异端邪说保持高度的警惕。少数的几所大学都受教会的控制，教授们不能自由地讲授。特别是哪方面发现有和教义相抵触的论调，那是立刻镇压，其残酷与恶毒的程度在历史上是空前的。臭名昭著的宗教裁判所直到现在被人们提起，还不寒而栗，万分憎恶。

还有那老天爷也和欧洲人过不去。14 世纪的下半叶，黑死病流行，扫荡了欧洲三分之一的人口。人们朝不保夕，哪还有心思去想问题，研究学问？

再说了，长期在那种思想僵化的气氛里生活，你给他思考的权利，他也展不开想象的翅膀，何况还有宗教裁判那座大山压在头上。

人们迫切需要一场思想解放的运动，挣脱枷锁，投入到生机勃勃的创造中去。

这场革命终于来到了，这就是从 1400 年到 1600 年左右的文艺复兴。欧洲被深深地震撼，知识和知识界的面貌也大大地改变，数学活动以空前的规模和深度蓬勃兴起。

这文艺复兴的圣地和源头自然是意大利。意大利能担此历史大任，当然

不是上帝随便掷的骰子，而是有方方面面的条件。

意大利南临地中海，生意做得很大，财富源源流入，还建立了不少大银行，钱多了，搞学问才有可能。再者，当时的意大利被战争弄得支离破碎，正是促进个性解放，反抗教皇统治的大机会。战争解放了人民，鼓励知识分子造反。一场思想解放和文化启蒙运动从这里开始不是偶然的。

其他客观也很好，希腊的大量文稿又一次大量涌入欧洲，这次是土耳其人占了君士坦丁堡（1453 年），这些宝贵的手稿比十二、三世纪时得到的要好得多。

好事一桩连一桩。正当其时，中国的造纸术、印刷术又通过阿拉伯传入了欧洲。可怜的欧洲以前可是一直用的羊皮纸、草皮纸，这种纸可真是贵。实在没法想了，还要把写过字的羊皮纸擦掉重用。现在可好了，能用上棉纸和麻纸了。

那印刷术的应用更是一件了不得的大事，一点不比现代电子计算机的发明逊色。试想想，不用印刷，光靠手抄，一本一本传抄，那还了得！敢再过过这种日子吗？

1482 年，译成拉丁文的《原本》第一次印刷出版了。

这么多条件凑在一块，真是“天时、地利、人和”了，单等那伟大人物登高一呼。正像有人那么说过的，这是一个需要巨人而又产生巨人的时代。

果然，就有了所谓“文学三杰”——但丁、彼特拉克、卜伽丘，和“艺术三杰”的出现。那后面的三杰就是达·芬奇、米开朗基罗、拉斐尔。

达·芬奇虽然是大画家，但他的博学多才更是著名。他还设计过直升飞机！说他是个科学家一点也不过份，他写过几何方面的著作。

更伟大的科学家自然是哥白尼（1473—1543），伽利略（1564—1642）、开卜勒（1571—1630），一时间群星荟萃，把旧世界的思想禁区扫荡得人仰马翻，一塌糊涂。

同学们也许会犯迷糊，咱们好好的数学演义，要谈什么文艺复兴、“日心说”“地心说”有什么用？其实咱们的数学，要发展要进步，全要有个环境，有种氛围作基础，万事万物也都是这个理。咱们在这多说道一番，就是明白一下数学发展的道理和道路所在。

要知道，经过文艺复兴这么一解放，知识分子们可是大开眼界。希腊知识体系里的那种崇尚自然，探讨自然，追求完美和自由研讨的作风，成为新的价值观，新的价值标准。

欧洲人这时感觉到，自然界是按照数学方式设计的，设计得非常的和谐优美。而这些正是希腊学者的主导思想。

再说了，文艺复兴的扫帚一到，中世纪的文化和文明自然被扫得支离破碎，各种教会建立的哲学、思想基础上崩瓦解。人们迫切要一个新的基础，而数学是唯一被大家公认的真理体系。

按照那时的普遍看法，上帝是按数学方式设计了大自然，上帝是一位至高无上的数学家。文艺复兴时许多科学家是神学家，用自然代替圣经作为他们的研究对象。

“世界是按上帝的计算创造的”，这就是他们的新信仰。希腊思潮冲击了愚昧的基督教世界，知识分子们既被希腊世界所深深吸引，又不敢（也许是舍不得）做基督世界的彻底叛臣，他们就把两个世界的教义溶为一体了。

一出有声有色的现代数学的大幕就要徐徐拉开了。不过咱们先别忙看最

精彩的部分，而是把目光转向这场运动初期的一些时期。

却说那文艺复兴对欧洲文明、对数学的影响当然是不言而喻，可是在初期，数学上却并没有什么辉煌的成就。辉煌的成就还需要人们在各方面为它作好出现的准备。

那初期一阶段，对现在比较有意义的事情，就是各种代数符号的出现。符号的使用对代数来说具有什么样的意义，不说大家也清楚。

首先咱们看一看等号的使用。发明现在这种等号的是英国人雷科德。雷先生（1510—1558）写出了 16 世纪最有影响的教科书，是用英文，而不是拉丁文写的，这可是一个进步。

1551，他写了本《知识的城堡》，是介绍哥白尼的“日心说”的。还有一本《知识的捷径》，是《原本》的一个节略本。而现在等号的第一次使用，就是他在《智力的磨石》中的创造了。

对这个符号，雷科德说的也很精彩：“再也没有别的两件东西比它们更相等了。”他所说的两件东西，就是指组成等号的两条平行线。

加号和减号，一开始是用 P 表示加，M 表示减，这是意大利人帕奇欧里在 1494 年的一本书里使用的。咱们现在用的“＋”和“-”，是一位捷克人维德曼。这是 1489 年出版的一本书里的记法。

此外，乘号是 1631 年由奥特雷德在他的著作《数学之钥》中第一次使用的；除号是瑞士人雷恩在 1659 年首先用的。还有根号，如此等等。

这些符号一一地使用，就等着代数的彻底符号化了，而这已是不太遥远的事了。

在这伟大时刻到来的前夜，不想在三次方程问题上却发生了一场极具戏剧化的大风波。两位数学家变成了不共戴天之敌，到了动刀动枪玩命的程度，真正是数学史不多见的。

这两位主角，究竟是哪里人氏？缘何成仇？请大家莫急，我给大家说个他细。

话说 1512 年，法国军队越过阿尔卑斯山，占领了意大利北部，征服者无情地烧杀抢劫，离米兰不远的布雷西亚城也遭到了攻击。

虽然是英勇抵抗，结果还是被法国破城。不幸的居民们一起逃到大教堂避难，在神圣的教堂里是不能有暴力行为的，这是当时的一般规矩。

妇女、儿童、伤员都聚集在一起，指望万能的主帮他们渡过这一关。在这拥挤的人群中，有一位十多岁的小男孩尼古拉，同他的当邮差的父亲在一起。教堂里的人，心中自然是七上八下。

没想到，法国兵一拥而入，见人就砍，乱冲乱杀，香烟燎绕的大教堂顿时成为血肉翻花的屠宰场。后来，尼古拉的母亲在她丈夫的尸体旁找到了这个气息奄奄的男孩。

小尼古拉的头盖骨被劈，腭部和舌头也被砍伤，离死是不远了。当母亲的也只得把他弄回家，心想就看这孩子的造化吧。

没料想他居然活了下来，没有钱医伤，就用嘴舔舔伤口，也算是命大。但是舌头上的伤使尼古拉一辈子咬字不清，大家给了他一个塔尔塔里亚（结巴子）的绰号，以后久而久之，就成了他的大号，真名反而没人记得了。

塔尔塔里亚的妈穷得叮 响，砸锅卖铁攒了点钱，就送他进了学校。他只学了 15 天，恐怕是没钱交班费了，只好打道回府。

临走时顺手牵羊带了本字帖（他刚刚学到字母 K），就开始了他的自学

生涯。没钱买纸笔，就在墓碑上画画写写。他不但学会了字母表中的其他字母，而且还学会了拉丁文和英文。

穷人的孩子懂事早，塔尔塔里亚明白，自己这伤残之驱只怕是肩不能挑手不能提，只有靠脑瓜子挣碗饭吃了。所以他学得格外勤苦。

23 岁那年，他开始以教别人数学来谋生，并且还能贴补贴补他母亲。也许那时搞“ 家教 ”，收入还不算低。

后来，他离开老家，到意大利各地，最后还到过威尼斯。请他讲课的倒不少，数学、技艺他都教，不过还是个穷教师，勉强度日。

但是这位大难不死的人总算有个机会扬名天下了。数学家弗里奥要和塔尔塔里来次数学对抗赛。

那时的学者们往往一有发现便严守秘密，然后向对手挑战，这是一个很好的显示实力的机会。所以这种对抗赛进行得不少了，很平常。

那么，弗里奥如何偏偏要找塔尔塔里亚过招呢？

原来，弗里奥是波洛尼亚大学数学教授费尔洛的得意门生。费尔洛教授有一样镇山之宝，那就是一些三次方程的解法。费尔格把他的心爱之物密传给他的高足弗里奥和女婿。

那位弗里奥有此一宝，自然是万分珍视。谁曾想在 1535 年，塔尔塔里亚宣布，他发现了三次方程的解法。弗里奥勃然大怒，他断定这位自学起家的乡巴佬是有意招摇撞骗，于是，立马向塔尔塔里亚下了战表，约定 1535 年 2 月 22 日举行“ 对抗赛 ”，倒也挺有点像骑士的决斗，不过不是用剑，而是用笔。

“ 决斗 ”的这一天，双方应该到公证人面前，每个人交给对方 30 道题，规定在 50 天里解出这些题。谁能解得多，解得快，谁赢。而且，每解一题还能得到五个铜板。

比赛开始前的几天，塔尔塔里亚得到了消息，弗里奥的确知道 x^3 十 px=q 这种方程的解法。

塔尔塔里亚不由得倒吸一口凉气，心想，咱自己的底细自己明白，三次方程也只能解一些特殊情况。自己说都能解，那也是“ 广告做得好 ”，小吹了一次牛。

不过，塔尔塔里亚很快就镇静下来，闭门不出，独练解题内功。正如他自己所说的：“ 我运用了自己的一切努力，勤勉和技巧，以便得到解这些方程的法则。结果很好，我在规定的期限前十天，就是 2 月 12 日，就做到了这一点。 ”

“ 决斗 ”的这一天终于到来，双方准备停当，披挂上阵，虽比不上临潼斗宝，却也正是华山论剑。公证人一声令下，两条好汉各自亮招。

果不其然，弗里奥出的 30 道题，全是 $x^2+px=q$ 这种形式的方程。

塔尔塔里亚成竹在胸，身手不凡，两个小时内当场做完，诸位看客惊得大跌眼镜，感叹之声不断。而那位弗里奥，在规定的 50 天里，对于对方给出的 30 道题，连一道也没解出，全军覆没，大失水准。

塔尔塔里亚一炮打红，名噪意大利。登门者络绎不绝，希望他公布秘密。但塔先生自然是守口如瓶，只准备以后发表在自己的大作里。

这时来了位波伦亚的人物卡当，此人脑子绝对好使，多才多艺，但人品却不敢恭维。

卡当是那个时代最有才华的人物之一，但他那异常的性格更使人吃惊。

1501 年，他出生于帕维亚，是一位法官的私生子。他是个易动感情的人，性格多变，职业也多变，还是位财徒。

他时而醉心于数学，时而又对占星术有浓厚兴趣。他对占星术酷爱到编基督的星占表，被控为邪说而监禁起来。出狱后，丢了帕维亚和波洛尼亚大学的饭碗，迁到罗马，成为有名的占星学家。

据说，卡当曾预言过自己要在某一天死亡。为了保持他这个星相家的荣誉，他在 1576 年的那一天自杀了。

公平点说，卡当是有大才之人，与中国的秦九韶差不多，才优而品劣。他写了许多学科的著作，他的最大一部著作叫《大衍术》，是专讲代数的第一部拉丁文巨著。这书里的方程有了负根，甚至还谈到虚数的计算。

这位卡当和秦九韶一样，是位志大心大，心雄万夫的人物，恨不得天下学问统通姓卡，所以卡当很想获取塔尔塔里亚的神来之笔，把三次方程的秘密收罗进自己的《大衍术》。

他前往威尼斯，请求塔尔塔里亚告诉他这个秘密，并答应不载入自己的著作，当时自然是少不了拍马谄媚，灌灌迷魂汤。

当请求遭到拒绝，卡当就从谄媚转为猛烈的侮辱，大骂结巴子不够意思，并又心生一计。

这一天，塔尔塔里亚收到了从米兰来的信，信中说：“ 一位高贵的先生听到了好多关于著名数学家的传言，特请他前来会晤，以便当面承教。 ”

塔尔塔里亚对这顶高帽子非常的满意，就动身去了米兰。哪知见到的不是“ 高贵的先生 ”，还是卡当其人。卡当再次做了拍马屁的饱和密集轰炸，弄得塔先生晕乎乎的特舒服。

卡当再一次庄严地起誓：我在任何时候对任何人也不公开这个由于塔先生的友爱，而传给我的这些法则和秘密。

塔先生感动得声泪俱下：“ 如果我不信任这个誓言，那咱自己也是个不值得信任的人了。 ”没说的，塔老哥立刻让卡当老弟遂了心愿，口传秘法。这是 1539 年的事。

过了几年，卡当的卓越著作《大衍术》出版了，在这本书里他违背了自己的誓言，详尽叙述了解三次方程的理论。这一招使两位著名的数学家变成了不共戴天的仇人。

“ 我自己的代数著作中最好的装饰品被这个贼子背信弃义地窃走了 ”，塔尔塔里亚气得浑身打颤，于是向卡当下一战表，再用传统的对抗赛决一雌雄，并建议互换 31 个题，在 15 天内解出。

卡当先生哪能在这种场面露怯，立马表示没问题，赛就赛。塔尔塔里亚在七天里就解出对方提出的大部分题，并马上把解法寄到米兰。而卡当和他的弟子费尔拉里过了五个月才把他们的解送来，而且，按塔先生的看法，都是不正确的。

塔先生得手之后，决定再下一战，和卡当公开辩论，以大白真相于天下。他宣布：“ 要求我的对手卡当和费尔拉里于 1545 年 8 月 10 日上午 5 时，在米兰市圣玛利亚教堂举行公开学术辩论。 ”

指定的时刻到来了，只有费尔拉里一人出席。按塔先生的描绘，他是一个有着“ 优美的声音，招人喜欢的面孔，巨大的才能和魔鬼般性格的青年人 ”。

塔先生独在异乡为异客，只和他兄弟两人单刀赴会，而那边却是战将如云，气势上已是胜他一筹。

辩论开始了，塔尔塔里亚首先证明卡当所解的一个题目不正确，并想转入正确的解法，却不料费尔拉里那帮人立刻起哄。塔先生请求先让他把话说完，可是徒劳无益。

费尔拉里马上抢上讲台，在找出塔尔塔里亚的一个错误之后，就开始了冗长的谈论。他说卡当是从某种渠道从费尔洛那里得知方法的，并反诉塔先生剽窃费尔洛的成果。也难怪，当时他们都是私相授受，谁能弄得清这笔糊涂帐。

时间拖到了吃中饭，教堂也很快空无一人。辩论本当在第二天继续，可塔尔塔里亚看看势头不妙，卡当很可能雇黑道人物对自己下毒手。

于是在夜里，塔尔塔里亚和他的兄弟用雨衣裹住身子，惶惶如丧家之犬，急急如漏网之鱼，逃出米兰了。

历史对塔先生似乎也不太公平，那著名的解三次方程的公式长久地叫做“卡当公式”。历史也有点欺负老实人。不过现在人们都称为“塔尔塔里亚-卡当公式”了。

塔尔塔里亚自己也不是无可非议、完全老实。他出版的阿基米德著作的一些译本，实际上是抄别人的；他自称发现了斜面上物体的运动规律，那也是掠人之美。

塔尔塔里亚如何解出 $x^2+px=q$，可能有不少人有兴趣，现在咱们来看看他的做法。

首先他设 $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$，一个未知元 X 变成了两个未知元 t 和 u，似乎是变烦了。实际上他很可能在解了许多具体的三次议程后，看看都具备这么个形式，所以在讨论一般情况时，就作了这个假设。

那么下面就用根据已知的 p 和 q 把 u、t 求出来。为此，他又作出了一个新的独创假设：

$$P = 3\sqrt[3]{u}$$

把 x 和 p 代入原方程，得：

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}}+3\sqrt[3]{tu}(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})=q,$$

大家自己化简，就可以得到：

$$t-u=q$$

这么一来就有了 $\begin{cases}\sqrt[3]{u}=p, \\ t-u=q。\end{cases}$

把 u（或 t）解出来代入第一个方程，得：

$$t^2-qt-(\frac{p}{3})^3=0]$$

由此 $t=\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}$；$u=-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}$

再把 t 和 u 的值代入 $x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$ 中，就得到公式：

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}-\frac{q}{2}}$$

卡当也是个身手不凡的数学家，在他掌握最上面的解法后，又进一步找到了解下列完全三次方程的方法：

$$x^3+ax^2+bx=c$$

卡当是这么想的，如果通过换元，把平方项消去，不就变成了塔尔塔里亚的形式了吗？这样一种化归的思想，化未知为已知，是数学上常用的方法。

他想了很久，发现只要用$y-\frac{a}{3}$代替x，就能达到目的啦。

他的学生费尔拉里，通过更复杂一点的变换，得到了四次方程的求根公式。

费尔拉里的变换，可以把一个四次方程，变成三次方程，这样就得到了答案。很自然地，大家都在想，那么用变换的方法，把五次方程化成四次，或者更高次的化成低次的，那么，所有高次方程的求根公式，不都是能得到吗？

大数学家欧拉，在 1750 年作过这种尝试，结果失败了，30 年后，另一位数学家拉格朗日也尝试了一下，也失败了。

后来人们才发现，一般的五次或五次以上的方程，是求不出、给不出一个像二次、三次方程那样的求根公式的。

大伙看到此处，不免有些疑问，容我详细说明：

这求不出、给不出求根公式，并不是说任一个五次以上的方程都是这样，一些特殊的高次方程，比如说 $x^6+px^3+q=0$，大家就能给它一个求根公式。而对于一般的五次、六次等等，你可就做不到这一点啦。此其一也。

其二，没有一个一般的求根公式，并不说明方程没有根，方程的根还是存在的。方程的根一定存在，这需要证明；而任一个几次方程到底有多少根，也很值得研究。这两个问题以后都得到了完满的解决，此是后话。

这第三点，大家不免会问，前一回中不是说过，中国的秦九韶、朱世杰，不都是解过五次以上的高次方程吗？尤其是那秦先生，更解过一个高达十次的方程，令咱们吃惊。那么，中国当时的解法，是不是仅仅对一些特殊的高次方程而言的，没有一般性？

不是这样。中国的解法能解出任何一个高次方程来（有实根的）。那么这与刚刚说过的五次以上的高次方程没有一个一般的求根公式，矛盾不矛盾呢？

一点不矛盾，两者考虑问题、解决问题的方法完全不一样。

那西洋塔尔塔里亚、卡当一路的方法，是先得出一个一般的求根公式，以后的使用和求解就方便了，把具体的方程的系数代入公式，一次性解决问题。想法好是好，只不过碰到五次以上就卡了壳，得另想招了。

这中国的想法，从《九章》那儿开始，就是所谓“开方术”这三个字，开平方、开立方、开四次方等等，咱们中国研究得都很透彻。而这种方法解高次方程的实质，是一种所谓迭代的思想。也就是先估算出一个近似的根，而后根据给的方程和法则得一个迭代公式，将近似根代入公式而得出新的近似值，再代入，再得之，使得这个近似根一步比一步更精确。

有人说，哪有公式法求根来得好。其实，真正实用的还是这种迭代法，何况五次以上的方程还根本没有求根公式呢。

迭代法是现代计算方程根的一种主要方法，因为根据迭代的公式，很容易编成程序，上计算机运算。咱们中国用来解高次方程的那种“开方术”，就和 600 年后牛顿迭代法是完全一样的。

这解方程、讨论方程的解，一直到 19 世纪，都是代数学的主要问题，甚至变成了唯一的问题。不过咱们都知道，代数要真正地从算术中独立，要使

人相信代数得出的结果也像几何那样可靠，要使代数也变得严密，变得有规律，那么，一套完整简单的符号，是非常重要的。

咱们都知道，这代数的符号系统，大致经历了三个发展阶段。而那希腊亚历山大时期的丢蕃都老先生，还有咱中国的秦九韶、朱世杰诸前辈，都把这符号发展到一定的高度，但是还不够简洁，还没有彻底符号化，所以只能算是第二个阶段，初级阶段。

而韦达（1540—1603），这个咱们每位中学生都熟悉的数学家，在这方面就做出了更大的贡献。也许咱们能说，是韦达才真正把代数从算术中分开。

韦达先生是个专业律师，研究数学是他的业余爱好。早先，一开始，韦达最大的兴趣是从政，治国平天下。所以就在议会里工作过，还当过一位亲王的枢密顾问官。

后来，在 1584 年，韦达先生下了野，归耕垅亩，就安心专门搞了五六年数学，还自费出版了自己的著作，这也是显示扬名的好机会。

关于韦达，倒也有些趣事。有一位国家的大使向国王亨利四世夸口，说法国没有一位数学家能解决他的同国人提出的需要解 45 次方程的问题。于是韦达被召入王宫，几分钟内就给出了两个根，后来又求出了 21 个根。他把负根漏掉了。

韦达大扬国威，也使那位提出问题的数学家大为佩服，亲自骑着牲口长途跋涉拜访韦达先生，两人切磋学术，大有相见恨晚之慨。

韦达的才能在治国安邦上大展宏图。那时法国和西班牙开仗，韦达破译了西班牙的密码，使得法军对西班牙的动态了如指掌，不到两年功夫就打败了西班牙。

可怜的西班牙菲力普三世，败了还不知道怎么败的。弄得一头雾水犯迷糊，还向教皇告御状，说法国在对付西班牙时用了魔法，与基督教的惯例不符合。

那么韦达在符号方面究竟有多大的贡献呢？在韦达以前不也有不少人，比如丢蕃都、卡当、秦九韶、朱世杰等等，不也用了符号表示吗？

这话说得也不错。但是韦达之前，一般用不同的字母，表示一个未知量的各次幂；而韦达用同一个字母，而把它的各次幂适当用其他符号说明一下。

更不一般的是，以前未知量的系数都只能是常数。比如咱们前面看到过的三次方程 $x^2+px+q=0$，实际在塔尔塔里亚那会儿，系数和常数不是写成 p 和 q，而是一些具体的数字。咱们不过为了说话的方便，反映反映塔尔塔里亚解法的实质，把这些具体的数字写成字母 p 和 q。

把系数用字母表示出来，就有了一般性，意义可就不一般了。

韦达充分体会到这一点，他充分认识到，如果一元二次方程写成 $ax^2+bx+c=0$，那么所处理的就不是一些单个的二次方程，而是整整一类，所有的一元二次方程！

他曾经这么说过，代数，是处理一类事物、一类形式的运算方法；而算术，是同数字打交道的。这样，代数就一下子成为研究一般类型的式子和方程的学问啦！一般情形可就包括了无穷多的特殊情形，咱们的思维就真正能机械化了，而不是见一种特殊情况，想一种招术。

代数真正的独立出来了。当然，符号的完善和简化，还要进一步的努力。

现代数学的帷幕已经拉开，序曲已经奏响，波澜壮阔千变万化既广泛又深入既抽象又生动的数学大潮在向我们涌来。

让咱们迎接这个伟大时刻的到来吧。
欲知后事如何，且听下回分解。

第八回　伽利略说　自然中处处有公式
笛卡尔称　空间里点点入坐标

刚刚被计算机淘汰出局的对数计算尺，竟是耐普尔 400 年前的大发明，震惊欧洲。给近代科学造型的人，首先都是数学家。“科学产生于用数学解释自然这一信念。”悬赏十万马克的问题终于有了“说法”……

上回说到，随着文艺复兴，思想解放，樊笼打破，现代数学的帷幕已徐徐拉开。自此以后 400 年，即从 1600 年 17 世纪到现如今 20 世纪之末，人类在数学上的创造和收获，不知要超过以往几千年的多少倍。

其实，就是到 19 世纪为止，300 年间的收获颇为可观，使得今日之数学，分支林立。不用说圈外人对数学方方面面知之不多；就是各个分支的数学家，也是隔行如隔山。

但千里之行总由足下起始，让咱们就从这现代数学的起步开始，看看这以前竟被有些皇上们视为占星之术的数学，是如何成为参天而立枝叶繁茂的大树的。

要说这现代数学，一方面是创建了许多新学科，使用了新的思想新的方法，诸如微积分、解析几何之类，是为高等数学的范畴。

而另一方面，则是初等数学的完善和严格。那几何自有古希腊的欧几里德作得锦绣一般文章，逻辑严密。而代数一门，却正是整理整顿的重点，自然，咱们这里说的是初等代数。

前面已说到，代数要成为独立的学科，符号化是关键的一着。韦达在这关键的一着中，也起了一个关键的作用：方程中的系数也用字母表示，这样就能讨论一类方程，而不是单个的方程。

所以韦达定理的得出就不是偶然的了。当然，咱们中学生现在知道的，是一元二次方程中根与系数的关系，而韦达对三次方程中根与系数的关系也已经有了发现。后人又把这种关系推广到了一元几次方程中去，有了更一般的结论。

在符号这方面的进步一直在进行。

有两位英国数学家也有一定的贡献。一位叫哈里奥特（1560—1621），他曾几乎与伽利略同时，发现太阳的黑点，观察到木星的卫星。他按照韦达的办法，用元音代表未九，用辅音字母代表常数；但他改进了韦达的乘幂的记号。

韦达那会儿，A^2 要写成 Aquad，A^3 要写成 Acub，麻烦，不清楚。哈先生就简单了，他用 aa 表示 a^2，用 aaa 表示 a^3，等等。他还是第一次用现在的大于、小于符号的人。

他的同胞奥特雷德在著作中很重视数学符号，给出了起过 150 个记号，他所写的代数式和方程与现在的已相差不多了。

对韦达的符号有较大改进的是大名鼎鼎的笛卡尔。他用字母表中前面的字母表示已知量，而末后的一些字母，像 x，y，z 啦等等，表示未知量。笛卡尔表示乘幂，就和现在完全一样了；把乘方的次数放在字母的右上角，写得小一些。笛卡尔还发明了根号“$\sqrt{\ }$”。但是，他老人家对 X^2，还是写成 XX。

不过笛卡尔给出的都是正整数幂的表示。现在咱们使用的分数指数和负数指数的记法，就要归功于牛顿他老人家啦。

用现在这种记法表示乘幂，表示未知数和系数，你瞧瞧，多简单，多明了！实用的价值太大了，对数学发展的影响也太大了，不知为什么一直到 17 世纪才有个明白的“说法”，发展得也太慢了点。

不过，现代数学可就变成了符号的科学。有些人“玩的就是心跳”，咱这数学玩的就是符号。现在是后浪超前浪，常用符号已经有二百好几十种了，对行人看了就好像进了“八卦阵”。

用了字母和符号以后，一些数学关系就能用符号、式子表示出来，既清楚明白，又深刻简单，重要的是把关系的本质表达出来了。

y=kX，这个式子咱们都见过，虽然它很简单，却反映了许多不同事物的共同本质。在计算路程时咱们用过它，在那时，K 是速度，X 是时间，Y 算出来就是路程了；上商场买东西，K 又变成单价，X 是数量，Y 就是总价钱了。还能有不少的用途，不少的解释。

不同的东西有了统一的反映，多伟大。

有了字母和符号，还能提高运算和推理的效率。为什么呢？因为用式子这么一表达，关系和量的表示简单而又突出，只要遵循一定的规则对这些式子进行变形，就很快能机械地算，还能代替想。

咱们在小学思考应用题，多难！在中学，同样的问题用立方程解决，真轻松！这不都是用式子的运算表代替想了嘛！思维机械化！

代数依赖于几何，这种从古希腊开始的认识开始逆转了，这就是韦达和笛卡尔开始的进步。笛卡尔看到了代数的巨大潜力，他说他是继韦达未竟之业的。

笛卡尔甚至认为，逻辑上的原理和方法也能用符号表示，而一切过程就能彻底机械化了，他把这一想法称作“通用数学”。

不过他对自己的这一想法还比较模糊，没深入讨论。对此有充分讨论的第一个人是莱布尼茨，咱们不久就要和他见面，暂且不表。

莱布尼茨的逻辑推理机械化思想后来竟成为上世纪一项大发明的基础。但在当时谁又能识见到其中的了不得，这也是形势造成的必然结果。而当时的一些人走的是另一条路，使得计算大大简单，成为轰动一时，影响几个世纪的大发明，这就是对数。

咱们现在好像是看不出那对数的重要了，要做繁杂的四则运算，函数运算，只要把口袋里的电子计算器掏出来，鼓捣一番，立马得结果。这要在 400 年前，别说四百年前，就是四十年前，人们都得把你当神仙、天外来客来看。

三四十年前，搞工程技术、工程设计的人，最好的计算工具就是一把计算尺。所以那时的工程师，人们送给他一个雅号：拉计算尺的人。那时的计算尺也分档次，一把好的计算尺也要值一二百元，不比现在的一台电脑便宜多少（那时的一百恐怕要值现在的一千吧）。

这计算尺就是根据对数的原理制作出来的。所以正确地说，叫“对数计算尺”。

计算尺虽然赶不上电子计算器，可在几百年前，却也是最快的机械化运算工具。如何算得快，在古代还不十分迫切。到了 16、17 世纪的欧洲，工商业迅速发展，科学技术也蓬蓬勃勃。天文、航海、测绘、造船集中暴露出一个头痛的大问题：计算越来越繁杂，数据越来越多。

无数的乘除、乘方、开方、耗费了人们大量的极为宝贵的时间。再说，有些事也等不得你慢慢地用老办法算啊，比如在大洋中航行的船只，总不能停下来算好经纬度后再开航吧！

一开始想的办法跟巴比伦古时候的办法一样，就是造出、编出各种各样的表格；平方表、立方表、方根表圆面积表三角函数表等等。但这只不过解决了一点点燃眉之急。

在这表格的海洋中，人们就这晕头晕脑过了许多年，直到 1544 年，有一位德国哥尼斯堡（前苏联把它叫做加里宁格勒）大学的数学教授斯蒂费尔（1487—1567），在简化计算方面走出了重要的一步。

斯先生宣布自己发现了有关整数的一种奇妙性质，他认为：“为此，人们甚至可以写出整本整本的书……”

那么，斯蒂费尔发现了什么呢？原来他把两个数列对照了一番，对比了一下：

1，2，3，4，5，6，7，9，10．11．……

1，2，4，8，16，32，64，128，512，1024，2048……

第一个数列在下不再多说了，第二个数列诸位也能看个大概，就是 2 的各次乘幂。

斯先生惊奇地发现，如果要计算第二行中两个数的积，只要在第一行中找到对应的两个数，这两个数的和所对应的第二行中的数，就是所求之积。

比如要求 16×128，可找出，16 对应 4，128 对应 7，4＋7=11，11 对应的是 2048，这就是 16×128 的积。

斯蒂费尔得到一个重要结论：通过这样的表，可以把乘除运算化为加减运算！用现在的话来说，就是用了这么条对数的性质：

$$\mathrm{Log}_2（M·N）=\mathrm{Log}_2 M+\mathrm{Log}_2 n$$

$$\mathrm{Log}_2(\frac{M}{N})=\mathrm{Log}_2 M-\mathrm{Log}_2 n$$

斯蒂费尔离伟大的发现只有一层窗户纸了，只要轻轻一捅，那么他的声名可就要远远超过现在。

斯先生究竟是什么问题，使得自己没有摘取发现的桂冠呢？原来他对自己的表格老有一个想不开的问题：16×128 是可以轻易得手了，但像 16×102 却找不到位置，无法用他的表进行运算。

正当斯蒂费尔感到智穷力竭之时，苏格兰的爱丁堡诞生了一位杰出人物，耐普尔（1550—1617），对数发明的金牌得主。

耐普尔出生在名门贵族，天资聪颖，才思敏捷，10 岁入圣安德鲁斯大学学习，算是少年大学生了，16 岁出国留学。公元 1571 年，耐先生学成归国，深为研究天文、数学、机械时的复杂计算而苦恼。冥思苦索，终于在对数的发明上捅破了最后一层窗户纸，跨出了有历史意义的一步。

说起也很简单，耐普尔只不过是让任何数都找到了它的对应者。也就是相当于在上面的表中，密密麻麻地插进许多中间值，这么一来，大事成矣。

1594 年，耐普尔开始精心编制可供实用的对数表。经过 20 年的苦战，一本厚厚的 200 多页的八位对数表终于诞生了！耐普尔在 1614 年发表了《奇妙的对数法则的说明》这本书，论述了对数的性质，给出了对数表的使用规则和实例。

耐普尔用 20 年的光阴，换来了人世间无数生命的延续。耐普尔的惊人发

明被整个欧洲热心地采用。被繁杂计算弄得头昏脑胀的天文学界，简直要为这个发现沸腾起来了，那激动，那赞叹，那惊喜，不亚于 20 世纪的计算机发明。

大数学家拉普拉斯就认为，对数的发现“ 以其节省劳力而延长了天文学者的寿命 ”。伽里略老先生更是眉飞色舞：“ 给我空间，时间及对数，我可以创造一个宇宙。 ”要是伽先生知道 20 世纪还有计算机这一说，那他肯定要创造十个宇宙了。

不过耐普尔的对数概念与现在从指数式引入是不相同的。先有对数，后才有指数概念的清晰表达，把过程反过来了，倒真是一个奇迹。

耐普尔的对数表还不太方便。后来伦敦的一位数学教授布里格斯（1561—1631），专程到爱丁堡向这位伟大的对数发现者表示敬意。两人商定，就以 10 为底，规定对数，这就是今天所说的常用对数。

由于咱们的记数是以十为基数的，这种对数在计算上就有了优越性。又花了八年时间，布里格斯以其全部精力造常用对数表，在 1624 年终于大功告成，从 1 至 20000 和 90000 到 100000 的 14 位常用对数表发表了。现在的诸位是不大看到对数表了。可仅仅在十几年前，书店里还经常出售一二十位的对数表，厚厚几百页。

今天，这几乎已成了历史的陈迹，“ 老古董 ”了，不能不使人发出沧海桑田之慨！

耐普尔的天才和想象力简直使一些人认为他精神不正常。他预言过将来会有许多种穷凶极恶的军事武器，甚至还有图未的“ 在水下航行的机器 ”——潜水艇。他想象中的战车很像现在的坦克。

当然，咱们祖先在这方面的想象更加了不得，姜子牙那会儿就有习来飞去的宝物在空中拼个你死我活，大大超过今天的“ 爱国者导弹 ”。

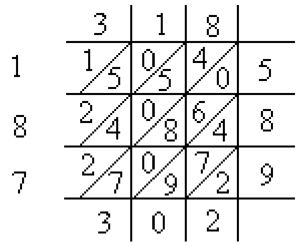
耐普尔的小聪明也不少。邻居家的鸽子很使他心烦，他就跟邻居说，如果再把鸽子乱放，咱哥们可就对不住，要没收了。邻居笑他一笑说：要能抓住请老哥别歇着。他们认为耐普尔没那份能耐。

哪知第二天，鸽子都在耐先生的大袋里了。原来这位“ 能耐先生 ”略施小计，在自家的草坪上撒上了用酒沧过的豌豆，鸽子吃了，都成了酒中仙，来了次“ 太白醉酒 ”。

这对数的发明还有一位并列第一名，就是瑞士的钟表匠比尔吉（1552——1632）。比尔吉完全独立地造出了对数表，在 1620 年，晚耐先生六年，发表了他的成果。比尔吉在业余时间建立若大功勋，令人赞叹，更加不易。

其实，耐普尔在运算机械化方面，还有一项现在被看作古董，当年可是风头出足的大发明——耐普尔计算尺。但是诸位可千万别把它和对数计算尺弄混了。虽然对数计算尺跟耐先生也大有关系，只是它根本不同于咱们在这介绍的耐普尔计算尺。

要说耐氏算尺，还得从 15、16 世纪流行欧洲的“ 格子算 ”谈起。这种算法主要用来计算多位数乘多位数。比如，318×589，就把 318 写在顶端，589



写在右侧，竖写。

然后打上 3×3 个方格子，在每个方格子里打上斜线。相乘时，逐位进行，所得数的十位写在方格中斜线的上方，个位写在下方。诸位看图便知端的。

这种算法中，不必先考虑是从低位还是从高位算起。但是在把各部中间结果相加的时候，得从低位的结果加起，按斜格子相加。本题的结果就是 318×589=187302。要不是印起来麻烦，还要打格网，恐怕现在还在用它。

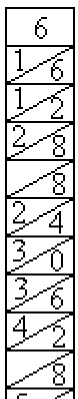
这是现在笔算的一种早期形式，和现在笔算乘法的算理是一样的。在法国，又叫“百叶窗”算法。

其实，这种算法最早起源于印度。大约在十或 1l 世纪，不过不是这种样子，被阿拉伯人采用。改造成所谓“格子算”，是后来传到西欧的事了。

这种算法在 15 世纪传入我国，给起了名叫“写算”，大概是与我国一直流行的“筹算”相区别吧。这是明朝的吴敬在《九章算法比类大全》里，所用的名字。后来，程大位（1533—1606）在《算法统宗》里给它起了个中国特色的新名称：铺地锦。

你看，那横竖交错、斜线穿插的图形，像不像编织的一幅锦缎？咱们自己也不妨识一识。

这种在欧洲非常流行的算法虽然很好用，但是打格子毕竟麻烦。耐普尔在 1617 年，发表了《尺算法》，介绍了他又一项发明，那就是耐氏算尺了。这种算尺发明不久，在明末，又传入了我国，就改了个中国名，叫“算筹”了。当然与古代的那些没刻度的小棒棒是完全不同的。为了区别，在人把它叫做耐普尔筹。至今在故宫博物院还有珍藏。



要做乘法的话，比如还是 318×589，那就把 3 号、l 号、8 号筹拿出来，拼合在一起，按第五行、第八行、第九行的斜线相加，就得结果了，和格子算法是完全一样的。

所以，这耐普尔算尺只不过把格子算法里填格子的任务事先做好了，没什么大花样。但是，咱们不禁要问一句，这么简单的想法、改进，为什么只有耐先生一人想到呢？

许多风靡一时影响至今的发明：吉列剃须刀，回形针，拉链，钮扣，原理都不复杂，比常人的想法也往往只多那么简单的一步。看来关键在于想与

不想，而不在于简单和复杂。不去想，再简单的一步也出不来啊。

话说到这，在下倒想插入一段中国的事。几乎与耐普尔同时，中国也有一位颇有影响的数学家，叫程大位。

程大位在《算法统宗》里，给“ 格子算 ”起了个很富文学色彩的名字“ 铺地锦 ”。不过这本最主要的还是介绍珠算，能算得上珠算大全吧。

这本书一共是 17 卷，595 个应用问题，所有的计算都用珠算，当然有珠算的口诀，还有口诀的应用。其中的开平方、开立方珠算方法则是由程大位首先提出的。

《算法统宗》十分受欢迎。明清两代不断翻刻，“ 风行宇内 ”，“ 莫不家藏一编 ”，影响之大，在中国数学史上是少见的。

这珠算的发明和应用是和当时中国的商业活动的繁荣分不开的。咱们中国搞计算，一直是筹算，把算筹摆了一地来算帐，多不方便！这样，珠算就发明了。

算盘到底是什么时候在中国出现的，由什么人发明的，现在已不大清楚了。不过，至少是在元朝末年，14 世纪左右的事情。

中国古算，到宋元四大家发展到高峰，做出了“ 大衍求一术 ”、“ 天元术 ”、“ 四元术 ”这些世界第一的成绩以后，到明朝程大位那会儿，已经是停滞不前开始落后了。

当然，那珠算的发明还是了不得的功绩，一直到如今，珠算仍然在全球都很影响，尤其在日本更是如此。这与程大位的那本《算法统宗》传到日本，是分不开的。而那耐普尔算尺，现在是真正的古董了，没多少人知道，更没有人用，怕是速度赶不上算盘吧，实践是检验真理的唯一标准。

算盘就说到这里，请大家再随我回到欧洲。

且说此时此刻，欧洲真正进入了一个英雄世纪，大家群起，人才迭出，很有些像希腊时代和中国的宋元之际。

这英雄的 10 世纪，大致可分为两个主要时期：1670 年之前和 1670 年之后。前一时期最著名的人物有意大利的伽利略、德国的天文学家开卜勒，法国的费尔马、笛卡尔、德沙格、帕斯卡。所有这些人都对微积分的发展作了准备工作。而 1670 年后不久，朱顿、莱布尼茨相继创建了微积分。

微积分的发明真正使数学进行了一次脱胎换骨，研究常量为主的初等数学的历史基本结束了，人类从此进入了变量数学的时代。

咱们一切还是从伽利略、开卜勒开始。有人说他们都是物理学家、天文学家，至多不过是用用数学，难道还真有什么大的贡献？值得咱们在这本书里和他们碰碰面？

实际上，那位意大利大物理学家伽利略（1564—1642），他干的差事，按照现在的说法，他的职称，一直是位数学教授。伽利略是个破了产的佛罗伦萨贵族的儿子，一开始他学医，“ 不为良相则为良医 ”。

他在比萨大学学医时，有几次到大教堂祷告，就观察到一个别人熟视无睹的现象：大教堂的大挂灯来回摆动的周期与摆动的幅度大小无关。当时没有计时的手表，想必他是搭着自己的脉来计时的吧。

后来他父母亲也同意他改换门庭，去研究科学和数学。二十五岁时，伽先生被聘任为比萨大学数学教授。据说在这期间，他就在那有名的斜塔上做了个有名的实验，证明和亚里士多德讲的相反，重物体并不比轻物体降落得快。

伽先生得到这么一条定律：不管物体是重还是轻，其下落的距离与下落时间平方成正比。这也就是咱们现在所常常说的自由落体公式

$$S=\frac{1}{2}gt^{2}$$

其实，伽利略可能根本就没有爬上过比萨斜塔去抛什么彩球。他自己这么说过，他是这样考虑问题的：

要去考虑无穷多个不同的重量，不同的形状的物体是怎么降落的，是不可能的。可是看一看不同的物体在空气降落的速度，和在水里下降的情况就不一样了。在空气里下降，几乎能同时落地；在水里下降，不同的物体差异可就大了。

“当观察到这点之后，我就得出结论：在一个完全没有阻力的介质中，所有物体以同一速度降落。”因此，伽利略是在做了仔细的观察之后，抽出了最主要的东西，在自家的脑袋里做了这么一次理想的实验。真空条件，到哪里找？只有脑子里才能构成这么一个实验场所。

当然，实际的物体是在有阻力的场所中落下的，对于这些，伽利略是怎么说的呢？他的回答是：“……因此，为了科学地进行处理，必须割掉这些困难（空气阻力，摩擦力等等），在无阻力的情形下，发现并且证明这些定理之后，再按实际经验所给予的限制来应用这些定理。”

他这么想，正像一个数学家干的事了。数学家从线上，去掉分子的构造，去掉颜色和厚度，而得到了线的基本性质，然后就集中研究这些性质。咱们不是给大伙说过嘛，几何上的线、面、体，实际中哪里去找？只存在于你的脑袋里，你的抽象思维之中。

数学的抽象方法确实离开了现实，但是说也奇怪，当回到现实时，它却比所有因素都考虑进去更为有力！伽利略正是这样一位用数学方式、数学思想研究问题的科学家。

不但如此，伽利略在研究自然时，更是把着重点放在描写自然，用公式去说出规律。

这可与那时传统的方法、亚里士多德的研究方法、看问题的方法不大一样了。那中世纪的教会对希腊的学说根本就是绝对排斥，不过对亚里士多德先生却情有独钟，奉若神明。亚里士多德那严密的逻辑，说的头头是道。他总是喜欢强调强调事物的终极原因。不管有没有实际的根据，反正是把那看起来是对的“终极原因”先提出来，然后推理一番，得出一个完整的体系。所以教会拿他当护法大师来供可就是一点也不奇怪了。伽利略同时代的人还是如此。

比如说，球为什么下落？亚里士多德说是因为它有重量；那它为什么又只落在地上，那是因为任什么物体都要找到它的“自然位置”，而重物的“自然位置”，就是地球的中心。亚先生这么一说，算是把球下落的“终极原因”找出来了，他自认为很圆满。重的东西为什么下落得快？亚先生的解释是重的有更快地回到它的自然位置的本性。

你现在瞧瞧这一切觉得挺可笑，可那时大部份人都把这当回事，觉得是个很神圣很自然的回答。

伽利略完全不同，他坚持用公式来说明一切，用“量”的精确代替“质”的含糊。

像公式$h=\frac{1}{2}gt^2$，它只说明物体下落与路程的关系，没说它为什么下落。

公式，只是描写，不是解释。

用数学家的头脑去研究物理、力学，这就是伽利略成功的原因。这就是一种科学方法的出现和创造首先是用抽象的眼光看世界，得出最本质的；而后再用数学公式对现象进行描绘。今天咱们对这一套是太熟悉了，是科学的方法，也是研究科学的方法。可是在伽利略时代，真算得上石破天惊呢。

大师说过，我之所以看得远一些，是因为我站在巨人肩膀上的缘故。牛顿之所以成为巨人，也正是站在了伽利略的肓膀上，全盘接受了他的那套科学方法。

牛顿还说，在自然事物研究中，近代人则排除物体的形式和玄妙的质，努力把自然现象放在数学的控制之下。他的科学名著就叫做《自然哲学的数学原理》。

伽利略、笛卡尔、惠更斯、牛顿，还有哥白尼、开卜勒，这些为近代科学造型的人，都是以数学家的身份去探索自然的。“科学产生于用数学解释自然这一信念”。科学，被数学化了。

伽先生在比萨大学竭力攻击亚里士多德的科学，年轻气盛，发表起看法见解毫不迟疑。那比萨大学也是知识分子成堆，脑袋都还长在亚里士多德的肩膀上，对伽利略自然是百般挑剔，看不上。

那时他已经开始写出重要的数学论文，一些能力差的人挺忌妒，留短飞长。一气之下，伽利略决定跳槽。第二年，1592 年，他又接到了帕多瓦大学的聘书，依然是数学教授。那里有比较自由宽松的环境。

在那里，他写了一本《力学》，继续他的实验，当然还得教教书，一晃就是 18 年。在这期间，大约是 1607 年，就是在帕多瓦，他听到荷兰磨透镜工人里珀沙姆发明了望远镜，就自己动手做了一个放大 30 倍的望远镜。

这人类历史上有意义的第一望，简直令伽利略也吃惊得合不拢嘴：那平常姣洁无瑕的月亮竟然是坑坑凹凹的麻婆，惨不忍睹；原来看起来是个光棍汉的木星（九四大新闻之明星），却早已成家业，拖儿带女，有四个卫星绕着它转悠。

伽利略这一望，给哥白尼的“日光说”以有力的支持，望出了大名堂。尽管他离开帕多瓦大学后，受一位大公爵的保护，在佛罗伦萨任宫廷首席数学家，可也触怒了罗马教会。

终于在 1633 年，他的传世名作《关于两大世界体系的对话》出版后，第二年，罗马教庭再次传唤他去。在刑具威逼之下，强迫他放弃“日心说”。教廷现在对这次审判很害羞地平了反。

他被软禁起来，禁止发表著作。但是思想是禁止不住的，他的《关于两门新科学的探讨和数学证明》写好后，秘密运到荷兰，于 1638 年出版。

牛顿的“数学原理”，伽利略的“数学证明”。都说明数学在开辟现代科学时的举足轻重。数学，是现代科学的开山巨斧，思想锐器，科学家们的精神支柱。

伽利略在这篇名著中，还第一次探讨了无限的世界。他在书中说了这样一番话：

“平方数的个数不小于所有数的总数；所有数的总数也不大于平方数的

个数。”

所有数，就是所有的自然数；平方数，指的是自然数的平方。

不知同学们可解其中之味、话中玄机。要知道，这短短两句话，真是亘古未有之论，暂且留给大家慢慢消受领悟一番，待等到与康托大师见面时，再提不迟。

伽利略的大作中，唯独没有提到开卜勒那著名的行星运动三定律，看来伽先生也挺妒忌开卜勒的伟大发现。

比起伽利略来，开卜勒可不太走运。

开卜勒（1571—1630）出生于德国的一个小城市。老爸是个酒鬼。先当兵，后来就开酒馆，开卜勒从小就得当酒保。老天爷对这孩子也太不照顾，小开卜勒不幸得了天花，后来就落下了残疾，眼神也不济。

尽管如此，他还是进图宾根大学学习，这是培养教士的，开卜勒原先很想在教会吃口安稳饭。

后来，有一位跟他关系不错的数学和天文教授，私下里教他哥白尼的‘日心说”理论，使他对天文学大感兴趣。图宾根大学的头，看他对教会有些不地道，就在 1594 年，打发开卜勒去奥地利的格莱茨大学任教。

这在开卜勒倒是件好事，在那里有一位著名的宫廷天文学家，是鲁道夫二世的御前占星师。开卜勒就跟着他当助手，天天夜观天象，主要是行星运动的研究。后来这位老师去世了，开卜勒就接替了这个老师的位置，也要为鲁道夫二世算算命。

为皇帝算命，开卜勒也是没办法，只好认了。好在占星术有助于谋生，也是当天文学家研究行星运动的好借口，他也觉得自得其乐了。

开卜勒从老师那儿接受了大量的行星运动的观察资料，进行了大量的计算。那时耐普尔的对数还没有发表，就差那么几年，没那份福气享受神奇的发明。所以就只好啃哧啃哧慢慢算，不过比他的欧洲前辈好多了，总算有了十进制小数，又有了“格子算法。”

经过反复的试验，多次的失败，他终于在 1609 年发表了行星运动的前两条定律。十年后，又接着来了条第三定律：

1．行星绕着太阳在椭圆轨道上旋转，太阳在椭圆的一个焦点上。

2．连接行量与太阳的线段，在相等的时间间隔内扫过相等的面积。

3．一个行星绕太阳运动的周期的平方，与椭圆轨的长半轴的立方成正比。

这些定律都是在大量的数据中总结归纳出来的，和伽利略的那种理想的实验，大胆的假设的有些不同。当然伽利略也不仅仅是用一种方法。

开卜勒要比哥白尼更革命，更大胆。当然在采取“日心说”这一点上他们是相同的。开卜勒的运动轨道是椭圆，行星的运行速度也不是匀速的。这些都和传统，和哥白尼的认识不大相同。“日心说”更加可靠、令人信服了。因为如果按哥白尼一开始提出的一套方案，实际观察的结果也并不比“地心说”好多少呢。

当然，即使经过了开先生的工作，地球绕着太阳转在那时还是叫人想不通，想不通的人还都是些知识分子。比如地球自转，那为什么扔一个东西到空中，还是落到原地，而不是落到西边一点的地方呢？如此等等，有的问题还挺专业。

对所有这些，哥白尼和开卜勒都只用了一句话来回答：咱这么做，数学

上更简洁。上帝设计世界当然要来用更优秀更简洁更优美的理论啦。“ 上帝是最好的数学家。 ”

开卜勒 1619 年那篇关于第三定律的著作，就叫《世界的和谐》，表达了对上帝数学设计的伟大所表示的由衷钦佩。

所以一开始只有数学家支持日心论是不奇怪的。只有数学家，而且只有相信宇宙是按数学方式设计的数学家，才能打破樊笼第一关，把科学建立在数学的基础之上，尽管还会时时出现上帝的身影。

为了得出行星运动第二定律，开卜勒当然要计算椭圆的面积。那时候微积分还没有创立，他所采取的是比较原始的分割、近似、相加求和的思想。开卜勒还用这国法去求出许多几何体的体积。这实际上是一种粗糙的微积分方法，所以开老先生也是微积分的前驱者之一。

他老人家是在见到当时的酒桶体积计算很拙劣时，发生了这方面的兴趣。这也许与他早年当酒保的工作有关吧。

开卜勒是伟大的，可是他的个人生活却十分不幸。他经常受天主教的各种迫害，老娘被认为是巫婆，第一个妻子疯了，而最喜欢的儿子又死于天花。据说，他的第二个妻子更没给他带来什么好运。他的工资还经常被拖欠，看起来那位鲁道夫二世也是不咋的。1630 年，他去领取拖欠已久的工资，走在半道上就去世了。这在今天，恐怕要上 “ 焦点时刻 ” 了。

他给上帝寻找到 “ 世界的和谐 ”，上帝对他却太不和谐了。

下面咱们再来看看上帝对待另一位天才人物帕斯卡究竟如何。

帕斯卡大家非常熟悉，中学物理的第一册就有帕斯卡定律，那是他 23 岁时的发现。不过他最大的贡献是在数学领域。

他被公认为数学史上的神童，1623 年出生在法国克勒芒。上帝给了他一个早熟的脑袋，不过身体一直不好，1662 年就去世了。短暂一生放出的光芒却照射了人类几百年。

他的父亲也是一位数学家，觉得孩子太小不能知道得太多，甚至把数学修书全都藏了起来。不料越不让他学，那小帕斯卡就越觉得神秘好奇，小小年纪，就发现了平面几何的许多定理，比如三角形的内角和定理。

帕斯卡的老爸大为感动，14 岁时，就带他参加每周一次的法国数学家聚会，科学沙龙。后来这科学沙龙就成了法国科学院的胚胎了。那参加沙龙的人物也都大名鼎鼎，笛卡尔，费尔马，德沙格，还有后来的科学院院长梅森。

16 岁，1636 年，这位神童发现了一条名垂青史定理：

若一个六边形内接于一条圆锥曲线，那么每两条对边相交而得的三点在同一直线上。咱们从下面的图可以看得很清楚。

■

16 岁的帕斯卡是这么想问题的：

首先，这条定理对圆是成立的，完全可以证出来。那么，如果把圆变换成其他圆锥曲线，比如，像抛物线、椭圆、双曲线，问题不就解决了吗？

帕斯卡正是这么做的，变换的方法就是 “ 射影 ”。说句通俗点的，就是打幻灯片。要是诸位有兴趣，不妨试一试，在一块玻璃板上一画上圆和内接六边形，然后用点光源（就是发光的光源最好像个点，不能是电棒），往玻璃后面一照，那么墙上就有图形的射影。

下面就看你的屏幕（墙）与玻璃块是个什么关系了。如果两者平行，那么投影还是圆；如果不平行，就是椭圆，或者是其他圆锥曲线。

当然，那直线不管你怎么照射，得出来的永远是直线，直线上的点自然也不会被射到线外去。这样，六边形还是六边形，只不过形状有些变化，而那个结论当然也是成立的。

这可是一种很先进的思想，就是让图形从一个形状连续地变到另一个形状。而在这种连续变换中，哪些东西会变，哪些又不会变，是个十分重要的问题。

比如咱们刚刚做的投影变换，不变的是直线；变的是圆。而圆在这种变换中，又只能变成其他一些圆锥曲线。

一门新的学科就这么产生了，它叫射影几何。它着重于图形的位置和相交方面的性质，而不是像欧氏几何那样，着重考虑图形量的方面的性质。

不过，帕斯卡的这一辉煌成果，竟引起了许多人的怀疑，不相信这是一个 16 岁孩子的思维，而认为是帕斯卡父亲捉笔代刀。但是帕斯卡三年后，又发明了第一架机械计算机，能自动从个位进到十位，从低位进到高位，有点像现在电表里的那个计数盘。

接踵而来的一系列成就，更使人惊叹不已。31 岁那年，他又对赌博时两个赌徒如何分赌全的问题有了浓厚兴趣。这个分赌金的问题，卡当和塔尔塔里亚也都考虑过，没有进展。那位卡当还为此写一本书。帕斯卡在朋友的鼓励下决定一试身手，他把自己的解法告诉费尔马，两人不谋而合，想的都对。又一门新的学科，概率论就这样起步了。

帕斯卡在考虑概率时，要讨论从几件东西中，取 r 件，一共有多少可能的情况。这样，他就又得出了举世闻名的帕斯卡三角形。这种由数字一层一层叠起来的三角形咱们前面就说过，叫贾宪——杨辉三角形，咱们中国要比他早 500 年了，“ 五百年前是一家 ”。

不过，帕斯卡那条著名的内接六边形定理倒确实受过高人启发。那就是他的同僚德沙格（1591—1661），射影几何的另一位奠基者。

画家们画画要讲透视，实际上也就是图形的投影；此外，如何把地球睥图投射成一个平面的地图，这里面也很有学问。射影几何就这么提上了日程。当然那时没有这四个字的名称。

德沙格先是位陆军军官，后来又成了一名工程师，建筑师。他通晓阿波罗尼斯圆锥曲线的著作，总想来一个新招，不是一个一个的证明圆锥曲线的定理，而是归归类，证它一批。新招终于被他发现了！这就是前面所说的投影的方法，看看图形在这样的连续变换下，什么性质会变，什么又不在变。

德沙格就教帕斯卡民用这种高招，能把圆锥曲线的许多问题简化成数几个基本命题。而帕斯卡这么一试，果真灵验，这样就有了那帕斯卡的“ 神秘的六边形 ”定理。要知道，这定理的推论就有 400 多个呢！

不过德沙格本人却不太走运，甚至还招来许多抨击。连笛卡尔也写信给他，说你那磋商方法搞不出什么新名堂。但是当笛卡尔老人家看到了德沙格的证明后，又马上推崇备至，高！

德沙格把他的射影法写成一本书，印成 50 份，送给他的朋友。朋友们可能都心不在焉，书都弄丢了。直到 1950 年，在巴黎国立图书馆才发现了一本，孤本。

那么他的朋友们为什么又都心不在焉呢？笛卡尔又为什么一开始说他弄不出什么名堂呢？原来，当时笛卡尔正在用代数的方法来研究几何，收获不小，大伙的焦点一起盯在了这儿。

用代数方法研究几何，把几何图形用代数方程表示出来，通过对方程的研究和变换来掌握图形，这个好主意可不是人人都能想到的。

想了几千年，也没有人能想到一招，却被一位青年军官“南柯一梦”得出了结果，成了现如今被称为解析几何这一门的鼻祖。

话说这笛卡尔出生于 1596 年，法国的一个名门望族。小时候身体不好，早上要睡睡懒觉。后来养成习惯，那早晨的懒觉，变成了想问题出成果的好时光。他自己也说过，大部分东西是在床上想出来的，特有灵感。

这恐怕是正中同学们下怀，睡懒觉有了好理由。不过大家要睡请各自方便，出不了成果可别怨笛卡尔先生没教睡法大全。公鸡孵不出小鸡别怨鸡窝不好。

再说笛卡尔 20 岁大学毕业，就去巴黎当律师，曾和前面提过的梅森在一块研究研究数学。过了一年，1617 年，这位贵公子心里静不下来，忽然从了军，当了兵。真有点安邦治国建功立业的大志，横刀立马叱咤风云的气派。

这兵一当就是九年，有时还逛逛巴黎，狂欢作乐一番，来点公子哥的小脾气。但他一直研究数学。一次在荷兰布莱达，看到大街上贴招贤榜，围观的人议论纷纷，对那榜上的几道数学题没法下招。笛卡尔揭下此榜，很快解决。这使他自信自己的数学才能，从此静下心来钻数学。

不过笛卡尔最有兴趣的，还是研究科学和寻求真理的一般方法。人们说他是近代第一个杰出的哲学家。同时他对整个自然界都在探索，力学的、光学的、生物的实验，他做了许多，是第一流的物理学家。

也不知怎么，一不留神成了个数学家。倒有点像现如今有些写书的朋友说过的，一不留神能闹出本红楼梦来。

所以他就开始寻找这种一般的方法。但他不久就断定逻辑本身是无结果的，“与其能用来探索未知的东西，不如说用来交流已知的东西”。

就这么找来找去，据他自己说，在 1619 年 11 月 10 日，多瑙河旁的一座军营里，躺在床上的他思维这么一聚焦，立刻悟出了这种方法，这就是数学方法。“众里寻他千百度，暮然回首，那人却在灯光阑珊处。”

据说那天晚上他躺在床上久久不能入睡，望着天花板发呆。突然看到一只苍蝇在天花板上爬来爬去画曲线，这条曲线到底怎么个表示？如何描绘？一时间倒有些摸不着头。再想想那飞逝的流星，飞奔的骏马，不都在画着曲线吗？

昏昏然入了梦乡，好像看见那苍蝇还在爬，和那相邻两墙的距离也是一会大些，另一会小些。有门了！灵感来了！他顿时领悟到，要是知道苍蝇与两墙之间的距离关系，不就能描绘苍蝇的路线吗？

这故事虽然有点玄乎，但是就是当真也无伤大雅，咱们就让它在似与不似之间吧。

那故事里的两堵墙，看起来就是现在所说的坐标系的两根轴了!X 轴和 Y 轴。现在这样一种坐标系，就叫做笛卡尔坐标系。

对于坐标系，咱们不只是在课本里见过面，每个人周围都有不少。那影剧院里的座位，地球仪上的经纬网，不都是要用两个数，才能表示一个确定的点吗？到图书馆找书，每本书的位置也能用第几排、第几层、第几本这三个数表示出来。这里用到三个数，因为书放在了一个立体空间中，两根坐标轴不够了，得添上一根竖起来的，这就叫三维空间。

其实不知大家意识到没有，小学、初中就知道的数轴，一根轴，也构成

了一个坐标系。但是它只能表示直线上的点，用一个数就够了，就叫一维空间。

咱们住在单元房，诸葛亮的八卦阵，城市里纵横交错的道路，无一不是坐标系。我们在实际运用时，都有意无意地用坐标系的语言来说出其中的位置的。

有人说了，那城市的街道不标准，不都是横平竖直的，不相互垂直，怎么还算平面坐标系？其实，平面的坐标系不强求你一定要把 X 轴 Y 轴互相垂直。你画斜了试试，看看能不能表示出平面中的点？

其实，只要把平面编成个网网，把空间隔成个鸽子笼，不管你编的线怎么弯怎么曲，坐标系就被你编成了。就说有无数多种形形色色的坐标系，也是千真万确的事。

咱们要是回到笛卡尔那里去看看，就会惊奇地发现，这位解析几何的老祖宗最初的平面坐标系，就是两根斜交的直线构成的，而不是今天在课本里看到的那样。

平面上的点能用一对有序的数表示，而平面上的图形能用方程来描绘，现在的初中生已经知道一些了。一次函数、二次函数的方程，能在坐标系中作出相应的图形，代数的语言有了直观的几何解释。

而平面上的圆，又能用代数方程来研究，很清楚地知道了圆心和半径。代数，终于从希腊时代的附庸地位一下子变成了完全独立的部门，代数变得比几何更重要。

不过，笛卡尔老先生倒并没有把这若大的发明太当回事。那时候，他把这一套东西都当成附录，附在他的哲学论著《方法论》的后面，突破附庸的大创造又当了一次附庸。

《方法论》是笛卡尔居住于荷兰 20 年中完成的，那里安静自由的学术环境很适合他的胃口。1649 年，瑞典女皇邀请他去讲授哲学。这位年轻的女皇非得要每天早上五点开讲，笛卡尔勉为其难，身体不能适应，懒觉没法睡了。几个月后，染上了肺炎，不治逝世，终年 54。

在笛卡尔叙述了解析几何基础的同时，另一位法国数学天才费尔马也注意到这门学科。两人卷入了优先权之争。

费尔马说，他在 1636 年给罗伯瓦的一封信中说到，他有这方面的概念已经七年了。而 1637 年笛卡尔才发表他的著作。笛卡尔当时已完全知道费尔马的许多发现，但否认他的思想是从费尔马那里来的。

没有知识产权法庭断这件官司，所以就打起了笔仗。罗伯瓦、帕斯卡等人站在费尔马一边，而米道奇、德沙格站在笛卡尔一边。一时间信来信去，争个不休。后来就慢慢平息下来。

1660 年，笛卡尔死后十年，费尔马写了一篇文章，指出笛卡尔的一个错误。但他接着说，他是如此佩服笛大哥的天才，即使有瑕庇，他笛先生的工作甚至比别人没有错误的工作更有价值。

费尔马（1601？—1665）确实要比较谦虚一些。他是一位卑微的律师，业余时间就全用在数学研究上了。他一辈子发表的著作不多，恐怕是没钱自费出版，但他和第一流的数学家经常通信交流。

他还有个僻好，喜欢在书边上写注记，许多重要的发现就这么记着的。他的数论方面的许多贡献就是记在一本丢蕃都的书边上。数论，是费尔马先生最杰出的工作，奠基者。

其中记下了最有名的一个，就是费尔马大“定理”：不存在正整数 X、Y、Z、n，使得 $X^n+Y^n=Z^n$（当 n＞2 时）。

大家知道，当 n=2 时，就是勾股定理了，有解，毕氏三数就是答案。

费尔马发现 n=3 时就来了麻烦，所以就有了上面的猜测。费尔马在书边写道：“我确实找到了一个极妙的证明，但页边太窄，写不下。”

看来有没有证明只能是天知地知了。后来许多数学家都寻求这“极妙的证明”而一无所获。这样 100 年过去了，费尔马大“定理”成了著名的世界难题，人类仍然没能突破。

第一次具有历史意义的突破是在 1779 年，由欧拉先生做出的，他成功地证明了当 n=3，n=4 的情况。大约在 1825 年，勒让德和狄利克雷独立地证出了 n=5 的情况。八年之后，一位完全是自学成才的法国妇女索菲娅，竟然也取得了不小的成果。

历史过了 100 年，n 才被推进到 100。公元 1850 年和 1853 年，法兰西科学院两次悬赏 2000 金法郎，征解费尔马猜想，也不过把指数的上限推到 216。

日历又翻过 50 年，德国数学家佛尔夫斯克给哥廷根科学院留下十万马克，悬巨赏再次征解。一时之间，各种证明纷至沓来，统统不对。费尔马定理如此著名，恐怕就在于发表了许多错误的证明。

借助于电子计算机，n 的上限被推进到 4000 万！但当然不能算是证得了定理。

1993 年 6 月，英国剑桥牛顿数学研究所举行了一个学术报告会。一位英国皇家学会会员。美国普林斯顿大学教授维拉斯，应邀作了一系列演讲，演讲题目是“椭圆曲线，模形式，和伽罗瓦表示”。从这个题目，听众猜不透他到底要得出些什么。

然而在 6 月 23 日他的最后一个演讲结束时，他终于推出了费尔马大定理。在场的数学家纷纷举起相机记录下数学界的这千金一刻。很多报纸纷纷报导，报导这数学发展中的巨大里程碑。

虽然他的证明有 200 多页，许多细节要逐个检查，但专家们认为他是对的，证明的思路是对的。证明中他采用了许多不同分支的最新思想，采用了许多当代名家的思想、结果和技巧。采百家之花，方得芳香之蜜。他的工作是一项意义深远的贡献，是本世纪一项重大科学成就。

费尔马老先生页边寥寥数语。引得 400 年中无数英雄竟折腰，得出了好多成果，真正是能下金蛋的老母鸡。

费先生的声名之大，全因这大定理增加了份量，往往忘了他也是解析几何的奠基人。

欲知后事如何，且听下回分解。

第九回　术精器利　微积分为变量搭脉
西学东渐　徐光启与国际接轨

利用刚出炉的微积分，被预测的哈雷彗星一次又一次地出现。但微积分究竟是谁先发明？是牛顿，还是莱布尼茨？欧拉双目失明，还写出四百多篇论文！中国的梅文鼎家族一共出了五六位数学家。

且说笛卡尔、费尔马两位豪杰，用思维这把利剑，辟得一块个全新的数学疆域，真正是盘古开天地一般的功劳。

此话怎讲？原来所谓初等数学,也就是从盘古一直到 16 世纪这一段的数学，叫常量数学。

咱们在中小学学的，就是常量数学。它主要研究静止的量的各种运算。这些运算现在看来很简单，但却整整折磨了多少哲人的思维，达 4000 多年之久！

解析几何的方法一出，变量登上了数学的舞台唱主角。“ 两个未知量决定的一个方程，它对应着一条轨迹——一条直线或曲线 ”。费尔马的这番话就表示了变量的思想。

你想想，一个方程中有两个未知量，一个未知量变化了，另一个不也随着变化？这实际上还是一种函数关系的体现。

有人会说，那么不定方程中，未知量的个数大于方程的个数，未知量也固定不下来，也在变化，为什么不说不定方程的出现是变量数学的开始呢？

那不定方程，人们的注意力集中在方程的求解，而并不关心未知量是不是在变。

解析几何中，曲线的方程一旦用曲线描绘出来，立即得到一种几何的直观。人们从点的运动想到所对应的量的变化，变量的概念形成了。

老前辈恩格斯曾这么说：“ 数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微积和积分也就立刻成为必要的了。 ”

坐标系、变量、函数，是数学的一个转折点，也是变量数学发展的一个决定性步骤。

现在，咱们已经清晰地听到了那位巨人的脚步声了——牛顿，莱布尼茨。

那牛顿、莱布尼茨的大名，现在是无人不知，无人不晓。说他们是巨人当然不错；如果把他们当成是创建微积分的唯一的两位，那就不大对了。

数学和科学的巨大进展，都是建立在几百年中做出一点一滴贡献的许多人的工作之上的。这时就需要一个人来走那最高的最后的一步。

这个人要有敏锐的透视，从纷纭繁杂的猜测中拣出有价值的想法；这个人要有足够的想象力，把零乱的思维碎片搭成系统的大厦；这个人要有献身的精神，不怕坐冷板凳，眼睛不能天天盯着大款。

牛顿，莱布尼茨正是这样的巨人，他们各自独立地跑完了“ 微积分 ”接力赛的最后一棒。

微积分的萌芽，是古已有之了。

咱们刘徽老先生的著名“ 割圆术 ”，就是把圆近似的割成边数很多，边长很短的正多边形，来计算圆面积。“ 割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆围合体而无所失矣。 ”

刘徽的的这一套，阿基米德在公元前 240 年左右也做过。阿基米德也“割”过圆。而且，他不但用内接正多边形去从内往外逼近圆，还用外切正多边形来近似，从外往内逼。一内一外，把圆周率的真值夹在中间，就能准确估计误差了。

面积体积计算很重要，17 世纪的工作开始于开卜勒。这位酒保被酒桶体积的计算问题吸引住了。不过他的工作比较粗糙。比如算圆面积，他把圆看成是无穷多个三角形，每个三角形的顶点都在圆心，底在圆周上，然后像正内接多边形的面积一样，用长乘以半径除以 2，就是圆的面积了。球的体积也是如此。

这里面实际上就是现在所说的积分。不管是刘徽、阿基米德，还是开卜勒，都是一样的思想，但是，每一种曲线的面积计算，都要用不同类型的直边形去逼近，一题一法、一题一变化，太烦。

而 17 世纪的一些人则采用了系统的办法，都用小矩形。比如计算 $y=x^2$ 之下，从 $x=0$ 到 $x=B$ 的面积（图见下页）：

■

首先将 OB 分为几份，构成一个个小矩形，用矩形面积之和逼近待求面积，当这些矩形的宽度 d 越来越小时，这个面积和就越来越接近曲线下的面积，“割之弥细，所失弥少。”

如果矩形的宽度都是 d，那么根据抛物线 $y=x^2$ 中 x 与 y 的关系，这些小矩形的高分别为 d^2、（$2d^2$）、（$3d^2$），等等，一直到（nd^2）。所以矩形面积之和为：

$d\cdot d^2+d(2d)^2+d(3d)^2+\cdots\cdots+d(nd)^2$，1）

即 $d^3(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$。

这括号中的自然数平方之和为 $\frac{1}{6}(2n^3+3n^2+n)$，

所以，这面积就为

$$d^3\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right) \qquad 2）$$

d是 $\frac{1}{n}$OB的长，再次代入OB，就有：

$$OB^3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2}\right)$$

现在再按这些人的说法，认为当 n 无穷大时，最后的两项可以忽略，那么这待求的抛物线下的面积就求出来了：

$$\frac{1}{3}OB^3$$

同学们能看懂这些，看了之后可能很满意了：任何曲线形的面积似乎都能这么算。

但是仔细考虑一番就会看到有两个麻烦。麻烦之一是为什么 n 无穷大时，最后两项能够略去，没有理论基础，没有证明，只是直观地觉察到。

麻烦之二是从 1）式变到 2）式，不同的题目要用不同的方法，也是个很不方便的大问题，有时单靠技巧还不一定得出结果。

这个困难困扰了 17 世纪所有的数学家。但是牛顿和莱布尼茨却找出了一个解决的通道。相比较而言，牛顿似乎想得更清楚一点。

简单来讲，牛顿的思路大致是这样的：

比如上面抛物线的求积中，求出的面积是$\frac{1}{3}OB^3$。

如果OB再伸长或缩短一些，也就是说OB不固定，是个变化着的x，那么上面抛物线的面积计算仍然一样算，可以得到是$\frac{1}{3}x^3$。

这样，算出的面积$S=\frac{1}{3}x^3$，也是个函数$S=\frac{1}{3}x^3$。

既然是$y=x^2$，通过求积过程变化得到的，那么反过来，$y=x^2$是不是也可以通过对$S=\frac{1}{3}x^3$进行某种变化运算而得出来呢？

经过研究，这种变换果真被牛顿找到了，就是求出当 x 变化时，S 的变化速度。S 随着 x 的变化而变化，自然有个变化速度问题，那么这个速度如何求呢？

这能不能用 S 除以求出来呢？那当然不行。因为对等速运动时的情况，用距离除以时间这样常量数学的公式是可以的。现在 S 随着 x 变，不是等速变化的，常量数学就没戏了。

十六、十七世纪，正有大量的变速运动的问题要求解决。牛顿是这么考虑的：如果让 x 的变化很小，比如只增加△x 这么一点点，那么 S 也有一点点增加，就用△S 表示。

因为△x 很小，所以这一小段内，S 的变化可以认为是匀速的。这时，变化的速度就可以用△S 除以△x 来表示：△S△x。

如果△x 充分的小，那么这速率算得就越精确。当然，这样算出的速度，每一点都不一样，是一种瞬间的速度。这个速度也是变，不是常量。

这么一种求速度的运算，要用到求极限的方法；让△x 无穷地小，看看△S△x 怎么个变化。

经过牛顿的努力，像$S=\frac{1}{3x^3}$这个一个函数式S随x变化的速率算出来了，就是$y=x^2$！

从$y=x^2$，通过求面积，能得到$S=\frac{1}{3}x^3$，这种变换叫积分；而从$S=\frac{1}{3}x^3$，通过求速率，又能求得$`y=x^2$，这种变换叫微分，又叫求导。

大伙看看，微分、积分是不是一种可逆的过程？可逆的变换？实际上也完全可以看成是可逆的运算。

大家可能会说，四则运算都起码有两项，现在微分只是对$S=\frac{1}{3x^3}$进行变换，能叫运算吗？

当然能。其实，咱们在初等数学里也有这种只对一项进行的运算，比如求相反数，求倒数。当然，现在运算的对像可有了质的变化，不是数，是一个函数！

牛顿和莱布尼茨找到了这么一种互逆的关系，就解决了大问题。求面积、

求体积时常用的求和方法，现在可以用微分的逆运算来求了！

而不是像以前那样，每求一个面积之和，都要算一个特殊的和式。

那么这样倒过来的求方便吗？自然方便。比如说你要是知道对函数 $y=x^4$ 的微分结果是 $y=4x^3$，那么你立刻就可以知道 $y=4x^3$ 的“面积”就是 $y=x^4$，不必像以前那样求和。

而微分运算的较好算，所以，我们今算几类（而不是几个）函数的微分，反过来，对许多函数的“面积”就立马可得。

这么个互逆的关系就叫牛顿—莱布尼茨公式，是微积分基本公式，微积分的金桥工程。

牛顿太伟大了。年下在这里只说，伟大的牛顿在数学中的大贡献，而且只说了这大贡献中的一小部分，当然最主要的部分。

这位牛顿老先生在中学的教本里只被描绘成一个伟大的物理学家，物理学的祖师爷。如果咱们听听伟大的莱布尼茨的说法，也许就更清楚更全面了：

“在从世界开始到牛顿生活的年代的全部数学中，牛顿的工作超过一半！”

一个构造了近代物理世界的人，同时又干了数学的一半！真神人也！英国诗人波普，用诗这么表达：

自然和自然的规律沉浸在一片黑暗之中，

上帝说：生出牛顿来，一切都就得明朗。

大数学家拉格朗日也说，他是历史上最有才能的人；也是最幸运的人，因为宇宙体系只能被发现一次。

波普简直把牛顿当成红太阳了，就他的作用而论，或许还不算过份，不过牛顿对自己的评价却十分廉虚：“我不知道世间把我看成什么样的人；但是，对我自己来说，就像一个在海边玩耍的小孩，有时找到一块比较平滑的卵石或格外漂亮的贝壳，感到格外高兴。在我面前是完全没有被发现的真理的大海洋。”真所谓：“我之所以比别人看得远些，那只是由于站在巨人的肩上的缘故。”

牛顿老前辈说的都是大实话。如果咱们和他同时代，这么说很可能被认为是狂妄。可是今天看看，那爱因斯坦的大发现，不就包括了牛顿的物理世界，而且有更高发展吗？

至于站在巨人肩上，那更是千真万确了。要是没有从希腊到意大利，从公元前到公元后的无数大师构成一道天梯，他牛顿恐怕是摸天无门了。

在牛顿受影响较大的那些人们中，最显眼的就是他的老师伊萨克·巴罗（1630—1677）。巴罗小时候讨人厌，不过从剑桥毕业后，就成为大学问家啦。数学、物理、天文学都很高成就。许多微积分的知识，比如求两上函数的积和商的微分法则，x 的幂函数的微分，以及至关重要的微积分基本定理，他都写在著作里。当然他的有些东西说的含糊，没有像牛顿后来所概括的那样，清楚而又普遍。

他是担任剑桥的卢卡斯讲座教授的第一人，1669 年，巴罗先生自动让贤，以高尚的精神把这一席位让给他的学生伊萨克·牛顿。他是最先识出牛顿的超人才能的人之一。

不过小时候的牛顿可是不太怎样，既不是神童，也没进重点学校上学，除了在机械方面有兴趣外，其他好像没有什么特殊的才能。他在 1642 年的圣诞节那天出生在英格兰的一个小村庄里，父亲是农民。

他进入大学学习，但那份几何答卷是有缺陷的。1661 年开始在剑大学之一学院上学，倒也安静专心。刚结束大学课程，可怕的鼠疫就在伦敦地区蔓延，他离开剑桥，在家乡渡过了 1665 年和 1666 两年。

在这两年里，他得到了解决微积分问题的一般方法，做了他的第一个光学实验：白光是由各种颜色的光混合而成的。那举世闻名的万有引力定律，虽然早有人提出过，但在牛顿手里，被构造成一座雄伟力学大厦的基础。

牛顿 1667 年回到剑桥，他的老师巴罗让贤，牛顿遂担任了卢卡斯讲座数学教授。不过听他课的学生很少牛顿看来不是个好教师。牛顿在 1672 年发表了他的光的颜色的论文，不料遭到猛烈的攻击，过了三年，他的另一篇论文又一次落到同样下场，牛老先生想想挺寒心，觉得很无聊，发誓生前再也不发表论文。

他对这些无聊的争论很厌恶，所以才有这么种极端的反应。不过后来他的好朋友们再三劝说，不发表可是人类的一大损失啊！他这才发表了一些。

怕事还是有事。他的微积分方面的思想发表推迟，结果又引起他和革命尼茨大师在这方面优先权的大争论。不但这两个人争论，而且双方的朋友都参加了争吵；不但双方的朋友参加进来，而且英国和欧洲大陆的数学家分成了两派。

不但分成了两派，而且英国和欧洲大陆的数学家停止了思想学术交流。因为牛顿的微积分主要使用了几何方法，所以在他死后差不多 100 年中，英国人继续以几何为主要工具。而西欧的数学家继续发展莱布尼茨的那一套，并且改善进步了。

这事闹得实在太不咋样，影响太大，坏影响！它不仅使英国的数学家落在后面，而且使数学家损失了一批最有才能的人，他们应该可以作出的贡献。两位大师的晚年心境都不很愉快，到死都没弄清楚，留下一块病在心上。

说起来实在是一场天大的误会。牛顿被以前的事弄怕了，很厌烦发表自己的成果。不过他也很想让好友们知道他在干什么。所以在 1665 年到 1687 年间，把微积分方面的一些发现通知了他的朋友。特别在 1669 年，他把《分析学》这篇论文送给恩师巴罗过目，而巴罗还给其他人看了。

而莱布尼茨于 1672 年到过巴黎，1673 年更访问了伦敦，并和一些知道牛顿工作的人通信，然而，莱布尼茨直到 1684 年才在《学艺》杂志上发表微积分文章，太有“ 瓜田李下 ”之嫌了。英国的绅士们把他描绘成剽窃者也算事出有因。

其实，那莱布尼茨先生也不喜欢发表文章。后来，人们在他成百页的笔记本中才发现，莱布尼茨 1675 年就独立地得到他的微分法。

虽然牛顿的工作做在前，在 1665 年得到了大部分成果，但发表更后，直到 1687 年才公开发表在他的巨著《原理》中。

说起来，连这本《原理》都是他的朋友哈雷的力劝才出版的。1684 年哈雷再三敦促劝说，经过两年的艰苦劳动，1687 年哈雷协助牛顿编辑，还自掏腰包付印出版。

这本书给牛顿带来巨大的声望，但它很难懂。他告诉朋友说，他有意使它难懂，“ 免得遭到数学知识浅薄的人的抑制 ”。牛顿先生确实是一想到争论头就胀，挺害怕。就说这本《自然哲学的基本原理》，写到第三册，指责又来了，这次是虎克。气得牛先生封了笔，哈雷又得好说歹说劝解一番，这才有了结果。

这本影响巨大的书发表后两年，牛顿进入议会。再过十年，1699 年，被提升为造币厂厂长。1703 年被选为皇家学会主席，连连被选一直到死，搞了点小小的终身制。又过了两年，被皇家封为爵士。总算在生前得到了莫大的荣誉，成了英国的国粹，国宝。

1727 年这位一代伟人去世，终年 84 岁，按照现在的规矩，下联合国旗向他致哀都应该。

却说英吉利海峡另一侧的莱布尼茨（1646—1716），咱们早已“ 见过面 ”。

比起牛顿来，莱布尼茨聪慧而早熟，从小就是神童。他于 1646 年出生于德国莱比锡城。从儿童时起，就自学拉丁文，希腊文，不到二十岁，就熟练掌握了教科书的数学、哲学、神学和法学知识。

15 岁进莱比锡大学，研究法律，可在答辩了关于逻辑的论文之后，得到的却是哲学学士学位。那莱比锡大学又以他年青，胡子短为借口，不授给他博士学位。莱布尼茨立刻迁到纽伦堡，写了一篇法学方面的杰出论文，献给美因茨的选帝候。选帝侯大加赞赏，命其重修法典，然后又派他做外交使节，到巴黎，到伦敦。

这倒挺有点像李太白，“ 十五好剑术，遍干诸侯，三十成文章，历抵卿相 ”，颇有些入世用世达则兼济天下的气慨。

1672 年 3 月先生出使巴黎，遇到不少数学家，科学家，尤其是大物理学家，数学家惠更斯，更是亲自给他讲解数学，激起了他对数学的浓厚兴趣。

虽然他 20 岁时就发表过数学论文，但他说自己直到 1672 年还基本上不懂数学。这自然是他的自谦之词，但是也可以看出受高人指点后的确不一样，对数学的理解更加深刻了。

1673 年他又出使伦敦，遇到另外一批杰出的人才，切磋磨砥，大有收益，那数学的兴趣更浓了。他研究了笛卡尔，研究了帕斯卡那吸收进去的原料经过天才脑瓜的聚合反应更以理倍的能量负外散发。

后来，莱布尼茨到汉诺威工作，当了另一位选帝侯的图书馆馆长，空闲的时间当然就多了。学者的天才得以尽情发挥，莫不是“ 日试万言，倚马可待 ”，写在成各种学科的论文盈千累万，也算是著作等身了。

他涉猎的范围太广泛了，尽管卷入了各种政治活动，包括为他的东家活动英国王位，但他并没放弃科学兴趣，他研究了逻辑学、力学、光学、数学、气体学、航海学，加上当今宠儿计算机。如果要说“ 家 ”的话，那么他毫不含糊地就是哲学家、法学家、历史学家、语法言学家，逻辑学家，大数学家。

草草一算，照现今来说，可算得上七栖八栖明星，数一数二“ 大腕 ”。看看咱们的莱“ 大腕 ”，再想想当今一些人物，拍了几部影视片再在歌坛上“ 炒 ”它一曲，居然就称什么两栖三栖，倒也觉得挺滑稽。不过也许那些“ 腕们 ”自己幽自己的默，外带着涂个三花脸逗咱们一笑也未可知。

莱布尼茨与牛顿各自独立地跑完微积分的最后一棒，但他的微积分却与牛顿的微积分有明显的不同。牛顿是用几何的语言叙述他的成果，而莱布尼茨的理论则用代数的妙语来表达。

莱布尼茨是历史上最大符号学家之一。他所创立的微积分符号远远优于牛顿的符号，优于牛顿的几何方法，这对微积分的传播和发展有极大的影响。英国的数学界落后了欧洲 100 年，原因也正在此。

他所引入的许多的微积分符号现在通行世界。比如，对一个函数求微分，也就是求函数对 x 变化率，他引进的微分符号就是“ d ”。

对函数求积分，莱布尼茨引入的积分号是“∫”，是个伸长的 S，也就是和“sum”的第一个字母。积分就是以求面积之和引入的。

所以要是对函数 $y=f(x)$ 积分，求曲线 $y=f(x)$ 之下，从 0 到 x 间的面积，就可以写成 $\int_0^x f(t)dt$。

结合咱们以前给大家看过的图，就很好理解，因为 x 在变；所以这算得的面积 $\int_0^x f(t)dt$ 也随看 x 变，是 x 的函数。

咱们也可以设 $\int_0^x f(t)dt=g(x)$。

对 $g(x)$ 进行微分，按照莱布尼茨的写法就是 $\frac{dg(x)}{dx}$。那么这么一“微”，结果是多少呢？就是 $f(x)$！

为何如此？道理很简单，先对 f（x）“积”，积过之后再“微”，积分和微分互逆，自然就回到了原地，微积分基本定量嘛！就好像任一个数加上 4 后再减去 4，结果还是原来的数，加减互逆！

用一个式子表示这个基本定理，就是：

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x f(t)dt\right]=f(x)$$

清清楚楚，明明白白，微积分之间的基本关系一目了然，微分积分是互逆运算。

而牛顿对这个基本定理的表达就全用几何的方式，难以理解，现在是早已不用了。

虽然两位大师因为优先权问题弄得很不愉快，但两人都受到巴罗先生，这位牛顿的老师的很多启发，这就叫“本是同根生了”。

莱布尼茨的另一件大功劳就是对数理逻辑的天才预见和开辟。

咱们说过，笛卡尔早就认为，逻辑上的原量和方法也能符号化。因为那时候代数的各种符号刚刚显出它的神力，解方程立方程就可以把以前难想的问题机械化地解决了。还有那：

$$\int_0^x f(t)dt\int_0^x f(t)dt$$

微积分对于现代科学技术，那是须臾离不开的宝贝。就是在刚刚形成那会，也立刻有了意想不到的应用。

话说 1758 年 12 月，欧洲各地千万个脑袋都时时望天上看。这是因为去世已 16 年的哈雷教授（1656——1742）生前曾预言，这年年底将出现彗星。

人们焦虑地期待着，总觉得一个人能推测生后之事，做出那么准确的预告似乎有点玄。谁知到 12 月底，拖着长长尾巴的彗星果真出现了！彗量，这对天外来客如期而至，立刻轰动全球。

这颗慧星就被命名为“哈雷彗星”。哈雷生前是牛顿的好友，他对牛大师推崇备至。利用刚刚出炉的微积分，他对彗星轨道进行研究推算，大胆推测 1531 年、1607 年、1682 年三次出现的彗量实际上是同一颗！

再用好朋友创造的方法和定律一推算，这颗彗星绕太阳的周期是 76 年，因此 1758 年将回到地球附近。哈雷给它号的脉一次又一次应验了，1834 年、1910 年，1986 年，哈雷彗星一次又一次出现。

利用微积分这个工具，摆钟的运动和周期能够精确计算。牛顿还根据摆

钟周期与重力的关系，考察了地球各地的摆钟运动，是出了地球是扁圆的结论！

微积分在继续扩展自己的领地。数学家们暂时忘掉了严密性，不管它对不对，逻辑上能不能严格证明，只要是直观上觉得对，又能解决问题，那就大胆地往前走。

本来，数学处处讲严密，要证明，这是欧几里德给数学的大贡献。可是把思维束缚在严密的网里，就没有创造性的发现。17、18 世纪的数学家们，就在微积分的基础还很不稳固，有很多东西不能自圆其说的情况下，开始把这所大厦往大里盖，往高里码。

这其间最有名的就是伯努利家族。

咱们学过数理科学的人，对“伯努利”三个字是如雷贯耳，经常遇到。概率论里的“伯努利定理”，“伯努利分布”，还有什么“伯努利多项式”，“伯努利双纽线”，以及流体力学中的“伯努利议程”，如此等等。

不过这些东西不都是一个人的，有好多个伯努利的功劳。伯努利家放是数学史上最著名的家族，也算是历史奇观吧。

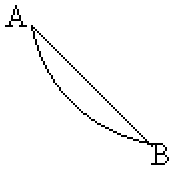
这个家族的光荣首先从两弟兄开始，老大叫雅科布·伯努利（1654—1705），老二叫约翰·伯努利（1667—1748）。

这两位都是莱布尼茨的铁杆，在那场优先权的大争论中冲锋陷阵，当然那都是无用功了。但是他们是最早认识到微积分的惊人力量，并把这个伟大的工具应用于各类问题的科学家。

最著名的，要算最速降线问题。

这问题说起来挺简单，就是从 A 到 B 造一条滑道，使得物体最快下滑。

按一般的想法，这滑梯就是 A、B 间的直线，两点间距离最短是直线嘛！可是大名鼎鼎的伽利略觉得没那么简单，他认为这最速降线是一条过 A、B 的圆弧。现在咱们仔细想想怕是也能想通：虽然弧线比直线长些，但它最初的下降速度快，所以总时间必然少了。



不过那位老二约翰认为，伽利略虽然指出了方向，但没有讲清为什么。所以他在 1696 年呼吁大家来解决这个问题，比试比试看谁解决得好。

经过两兄弟的努力，还有牛顿、莱布尼茨等人的工作，终于弄清楚了，这两点间的最速降线，既非直线也非圆弧，而是一段圆摆线！

圆摆线大伙没听说过，可是却天天见到。你在自行车车轮上做个记号，车轮沿着直线往前滚，那画出的记号在空中跑过的轨迹就叫摆线，又叫旋轮线。

隔了一年，老二的约翰又解决了一个短程线问题，不过只是部分解决。短程线说起来大家又觉得好理解：平面上的两点，距离最短的是过这两点的线段。

可是要是在球面上呢？地球上两点间的最短线就不是直线了，球面上没有的线，那是过这两点的球的大圆！问题再扩展，任一个曲面上这短程线又当如何？可就是个高精尖课题啦。

类似的还有老大雅科布提出过的等周问题，这些都是一类求极值的问

题：最快、最短、最大，这些都是后来发展起来的一门学科——变分学的先声，微积分的发展。

比起大哥来，约翰在数学上贡献更多，但是脾气很不好。约翰脑子快一点，有些恃才傲物，功名心切。弟兄俩很快在许多问题上互相挑战。他们各自发表文章，闹得最后就不和谐了。莱布尼茨就在两边调停，当当和事佬。

可是老大雅科布总觉得莱某偏袒约翰，而且自己发现的东西，莱布尼茨声称早就做过了。所以尽管一开始对莱先生很尊重，以师礼待之，到最后牛莱风波再起，他写信给对方，对莱老头可就不恭敬啦。约翰则是铁心卫道，时不时上阵对英国绅士们叫叫阵，唇枪舌剑来一顿。

雅科布大哥的最大贡献是他的名著《推测术》，也就是现在常说的概率论。

概率这门数学从卡当那会儿讨论赌博开始，到这时，已经变成了一门完整的科学，概率论诞生了。

概率论研究的是大量的偶然现象。投掷一枚硬币，出现正面的可能是多大？大家都能猜出是 1/2。投掷的次数越多，出现正面的次数和投掷总次数的比就越接近 1/2。历史上好多名人都做过这个试验。

雅科布总结了这方面的经验，得出一条定理，就叫做“ 大数定理 ”，也就是“ 伯努利定理 ”。关键在于，他不但提出，还给出了证明，这才是难点所在。

这两位自学成才的弟兄，不但做出了如此巨大的成就，而且培养出下一代伯努利。老二的三个儿子个个都是将门虎子，承继父业。老二的老二丹尼尔·伯努利更是了得，著名的伯努利分布、流体力学中的伯努力利议程就是此人所为。由于这些杰出的成就，他曾十次获得法兰西科学院的嘉奖。

概略地算一下，这个瑞士的家族，总共产生了 11 位数学家。列入吉尼斯当之无愧。

不过，这个家族最光荣的一件事，要算是培养出欧拉这么一位顶级的人物。欧拉的恩师就是约翰·伯努利，无怪乎人们说，他是那个时代最成功的教师。

欧拉（1707－1783），是 18 世纪数学界的中心人物，堪与阿基米德、牛顿和高斯为伍，因为他们不但是数学家，也都是大物理学家，典型的数、理双栖大师级人才。

欧拉诞生于瑞士名诚巴塞尔，13 岁就进入巴塞尔大学，师从约翰·伯努利。17 岁成为这所大学有史以来最年轻的硕士。18 岁发表论文，19 岁获法兰西科学院奖金。

通过约翰老师的两个儿子：尼古劳斯·伯努利（1695—1726）和丹尼尔尼尔·伯努利，欧拉在 1733 年获得俄国圣彼得堡科学院的任命。起先他是丹尼尔（1700—1728）的助手，后来很快接替这位伯努利当了教授。

26 岁的欧拉做了数量惊人的研究工作，可是由于太忙，条件也不好，28 岁右眼就失明了。34 岁时应普鲁士皇上的邀请，到柏林主持普鲁士研究院，一干就是 25 年。

1766 年，俄国女皇叶卡捷琳娜二世亲自出面恳请欧拉重返彼得堡。他的工作条件大大改善了，但积劳成疾，左眼也失了明。接着又遭火灾，大部分藏书和手稿化为灰烬。但欧拉没有屈服，他说：“ 如果命运是块顽石，我就化作大钟，将它砸得粉碎！ ”

大火过后，欧拉已是位 66 岁的老人啦，可是他并没有停止思想停止工作，又与衰老和黑暗拼搏了 17 年 !凭口授发表了 400 多篇论文，许多部论著，占他一生成果的一半！

欧拉确实是一位多产的数学家，堪称空前绝后，他同以前的笛卡尔、牛顿、以及以后的高斯不同，他没有开辟新的数学分支，但没有一个人像他那样多产，像他那样巧妙地把握数学，他对数学的每一个分支都有贡献。

他是顶呱呱的方法发明家，又是一位熟练的巨匠。所以如果咱们学数学时一再听到欧拉，大可不必惊奇：欧拉公式、欧拉多项式、欧拉定理、欧拉常数、欧拉积分和欧拉线，等等。

请看如下最著名的公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

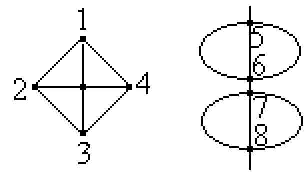
而当 $x=\pi$ 时，就成了　　$e^{ix}+l=o$

这个关系式联系了数学中五个最重要的数：i、π、1、o、e。

其中 i 是虚数单位 $\sqrt{-1}$，e 是自然对数的底，是个常数约为 2．718。这两个符号都是欧拉首先引入的。

欧拉在符号方面的最大贡献是给出了表示函数的式子：f（x）。

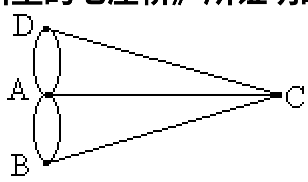
欧拉还解决了所谓一笔画问题。这一笔画问题说起来大伙都玩过，你能不重复，一笔画出“田”字吗？任你试千百回，也是没辙。不过要是“串”字，可就太简单了。



其实道理也挺简单，是欧拉大师发现的。如那“田”字“串”字，可以变换成下列图形。那么一来那几个连结弧线的点便是问题的关键。我们可以看到，点 1 有三条弧线交汇于此，将这样的点称为奇点。点 1 到点 4 都是奇点。而像点 5 到点 8，就都是偶点了。

欧拉注意到，如果要画一个笔画，不是起笔点和落笔点，那么它若有一条弧线进点，就必有另一条弧线出笔，即不是起笔或落笔，必是偶点！

这样一来，能够一笔画的就只能有零个或两个奇点！一笔画问题就此解决！请看，欧拉的思路多明确，多清楚！这是 29 岁时的欧拉向圣彼得堡科学院递交的一篇论文《哥尼斯堡的七座桥》所证明的结果。



原来这一笔画就起始于哥城的七座桥。这座名城共有七座桥连接了四外区域，很早以来城中的居民就热衷于这么个有趣的问题，能不能“一笔画”走过这七座桥。咱们把图画在这里，这些弧线自然就是桥了，大伙不妨用欧拉的办法判断一下，有没有解。

这一笔画到后来有了发展。中国数学家管梅谷在 1960 年提出过一个邮递员问题，是说邮递员投递邮件，从邮局出发，对管区内的每条街（弧线）都至少通过一次，再回到邮局。当然有时没法“一笔画”了，有的街道要经过

两次以上。不过最后有一个要求：要选择一条最短的路。管先生给出了算法，所以这问题国际上就称“中国邮递员的问题”。

西欧的数学波澜迭起，高潮频频，那咱们中国当时的情况又如何呢？让咱们把镜头再缓缓移回东方。

且说咱中国的古代数学，自殷商而至宋元，一路领先，成就卓著。直至秦、李、杨、朱四大家，并起于宋元交替之际，创“天元术”，“四元术”，东方巨龙腾飞环宇。

到得明代，创造性的工作，尤其是在理论方面几乎是没有了，中国数学走入了低潮。大量的数学经典因为无人研究，找都找不到啦！天元术，四元术更是无人知晓，几乎成了绝学。像《九章》这样的名著都不再流传，只有《永乐大曲》才收有抄本。

就连有点名气的数学家吴敬，也都是听说过有《九章》，恐怕都没有直接看过，他算得上是个实用数学的推广者，介绍了一种“写算”的乘法，就是咱们前面说过“格子算法”，程大位（1533—1615）把它叫做“铺地锦”的。

程大位是位平民，以毕生精力进行实用自然术研究，使珠算得以普及，也实在是难能可贵了。可是这时的西域，数学正发展得红红火火，面临着革命的前夜呢。

时光很快到了明朝末年。政治腐败，连年灾荒，农民起义，倭寇袭扰，弄得皇帝老儿坐不成龙庭，明王朝处于覆灭的前夜。

文化方面，尤其是科学技术一片凋零。就是对历法，这个关系国计民生的大事，也是严禁民间研究，“习历者遣戍，造历者殊死”。明朝用的《大统历》，日积月累用下来已有较大误差了，可是这历法依然改不得。而且精通历法的人才也缺乏，改历想改也难。

就在这时，耶稣会传教士来到中国，传入了西洋的天文历法，也传来了西方的数学，从此，西方数学开始传入了中国。

这传教士中影响最大的是意大利人利玛窦（1552—1610）。1582 年他来到中国，带来了世界地图，自鸣钟、天文仪器和数学书籍。结识了不少士大夫知识阶层人士，其中就有徐光启。

徐光启是 1600 年认识利先生的，便和他一块研究两方科学。过了六年，就由利玛窦“口译”，徐光启“笔受”，两人合作翻译了《几何原本》。翻到第六卷，徐光启要求继续翻，利玛窦认为这欧氏几何的精要都在前六卷，就先出版，看看大家喜欢不喜欢吧。这样，第二年就出版了。

在那科技衰落、知识饥饿、中国古算一片荒废之时，这本书确实给中国数学界带来生机，中国数学，从此进入了西学东渐的时期。

徐光启（1562—1633）中过讲士，当过礼部尚书，位至文渊阁大学士。后来他在一些西洋人的参加下，用西洋新法修订了新的历法——《崇祯历书》，不过崇祯帝不久就到煤山上吊了，用不上了。徐光启也早在这之前去世了。

这时已是 17 世纪，中国被满洲人坐天下了，但这历法又提到了皇上面前。后来，《崇祯历书》明朝没赶上用，清朝入关后倒用上了。清政府任命参加过明朝改历的德国人汤若望掌管钦天监，汤先生想想不如把《崇祯历书》换个名献上去得了。顺治二年（1645 年），就把这本历书称作《时宪历》颁行天下。

到了顺治十四年（1657），一直到康熙三年（1664），有人几次上书，竭力反对西洋历法，声称“ 宁可中夏无好历法，不可中夏有西洋人 ”。那时康熙帝才十来岁，做不得主，就由着他们废了西洋历，将汤若望打入大牢，还杀了五个中国人的头。

后来很快发现是件冤案，为汤若望等平了反。康熙大帝更觉得教训很深，用人头交了学费，太有点惨痛了，决定自己亲自学习，把一帮西洋人再请入宫，给他讲述西洋的天文、数学。另一方面广泛招贤，访求人才，鼓励倡导教学天算图书的编写。皇上总算给科学技术添了把草料。

正是在这样的条件，大数学家梅文鼎（1633—1721）出现了。梅文鼎是安徽宣城人，从小就热爱数学、天文学。在当时许多古算书，古算法都濒临失传的情况下，一方面苦心钻研，另一方面吸取刚传入的西方数学片断知识，“ 集古今之大成，溶中西于一炉 ”，做出了许多优秀成果。

他被梁启超称为算学天文方面清代的“ 天山之祖，” 清代六大儒之一。日本的一位先生更把梅文鼎、牛顿、关教和（一位日本数学家）并称为 17、18 世纪世界上三大数学家。不过，梅先生纵然在中国当时数第一，到世界上去比，自然不能和牛顿并肩，整体水平低下是不会有大家出现的。日本先生的好意咱们心领了。

梅文鼎著作甚丰，共有 88 种 200 余卷。他将西方传入的笔算由横式改为竖式，经符合中国当时直书的习惯。对耐普尔算尺，他也进行了改造，能进行采、除、开方，后来写成《筹算》一本。不过他主要在正多面体和球面三角方面，有不少创见。

梅先生的丰富常识受到康熙帝的尝识，皇上亲自召见，恩宠有加，以后又征召他的孙子梅■进入内廷蒙养斋任编修。这使梅氏祖孙的知名度大大提高，使他们的学说思想和著作广为流传，遂成一派学说，其影响达康、乾以下 200 余年，直到清末。经皇上亲自包装，效果确实不同。

有趣的是，梅氏家族也是我国少见的数学家族，除梅文鼎祖孙二人外，还有梅文鼐等其他四、五位数学家。与伯努利家族东西辉映，可称为奇观。

不过从雍正帝登上龙廷，西方的洋鬼子又被赶出国门，西洋教学的传入又被皇上叫了个暂停。咱中国这批数学家一头的兴趣没了个去处，只得拨转马头再向中国古算，整理发掘出散失已久的中国古算名著。古代传统数学来了段“ 回光返照 ”。

要说这古算书的发掘整理，那要谈到乾隆爷编的《四库全书》了。巨型丛书《四库全书》修了十年才完成，共收书 3503 种，79337 卷，分经史子集四部，故名“ 四库 ”耳。通过这部丛书的编修，许多古典算书得以保存下来，对中国传统数学的发掘研究起了推动作用。

在《四库》编纂中对传统数学的搜集整理起主要作用有的戴震、李潢等许多人。

戴震（1724—1777）系安徽休宁人，对数学、天文、史地、音韵有深刻研究，中过举。后被推荐为四库馆纂修官。戴震倾注了大量的精力，对《周髀》、《九章》、《孙子算经》等四部书详加校勘，改了很多错误文字，对《九章》中早已散佚的很多图形予以补绘。

那位李潢（？—1811），虽然当过工部左侍郎，也就是副部长一级的位置，但还是个学问家，尤精算学。编纂《四库全书》时，他以翰林院编修的资格担任总目协纂官，对《九章》、《海岛算经》、《缉古算经》三部书进

行了校注和研究。

这些校注工作都是挺费神的。因为这些古书辗转传抄，文字多一些少一些，读不通的地方很多。就拿戴震整理过的《九章》来说，不通的地方还有不少。李潢再次校订，多方研究，使这些不通之处都能文从字顺，容易读懂了。

还有一些《四库全书》中没有收集的，其他一些学者又进行了整理搜集刻印。经过这样多方面的努力，埋没湮灭数百年之久的科学遗产重见天日，这是一个很大的成就。

不过当时的中国数学界也是没了办法才把全部精力投入到这档子事吧。皇帝老儿对西洋数学叫暂停，一停就是 100 多年，可那正是人家“火”起来的 100 多年呢！

欲知后事如何，且听下回分解。

第十回　近世数坛　基础理论成果绚丽
现代计算　实际应用前景辉煌

高斯墓碑上画的是正十七边形图案。过直线外一点只有一条平行线吗？专刮脸的理发师不知自己的脸蛋该谁来刮。华罗庚说：“大哉！数学之为用。”海湾战争中，数学大显神通。

话说那 18、19 世纪，西欧的数学确实是轰轰烈烈红红火火，在几何、代数两方面都有了空前的变化，彻底地解放，两场大革命相继进行，令人目不暇接。现在先与诸位道一番几何的大变化。

要说这场变化，却与一个人有脱不掉的干系。你道是谁？那便是赫赫有名的数学王子高斯，卡尔·弗里德里希·高斯！他不但被公认为是 19 世纪最伟大的数学家，而且与阿基米德、牛顿并称为历史上最伟大的三位数学家！

小卡尔的故事无人不晓。从 1 连加到 100，如何简便地算，诸位肯定不止一法，觉得挺容易。不过诸位可都是老师教会的，而小卡尔是十岁时自个想出来的，这才真叫不容易。高斯晚年常常幽默地说，在他会说话之前，已经会计算了。神童和天才确实是不常有的。

高斯在 1777 年出生的时候，家境可是不太好。父亲是瓦工，对小娃娃读书没什么兴趣。但卡尔的母亲却鼓励他学习。小学的校长也很爱才，对他赞不绝口，推荐给不伦瑞克公爵。公爵搞了次“手拉手”活动，赞助 15 岁的高斯进了中学，18 岁时又送他进哥廷根大学。

起初高斯对语言和数学都很感兴趣，犹豫不决不知学什么好。他决定为数学而献身是 1796 年 3 月 30 日的事。这一天，他找到了用尺规作出正十七边形的方法！两千年的难题解决了，卡尔知道自己是属于数学的。对这个发现他是如此的钟爱，所以后来留下话，墓碑上就刻这么个图形。

高斯用代数的方法找到了作法。进一步，他解决了全部情形：正多边形的边数是多少就能画出，是多少用尺规又作不出，被证明得妥妥贴贴。

高斯的才能更进一步显示，20 岁作出的博士论文令大家刮目相看，大跌眼镜，他竟然证出了代数基本定理，这个连牛顿、欧拉、拉格朗日等大师也难倒的定理！代数基本定理是说，几次多项式至少有一个根。

这位数学王子在天文学方面也有拿手绝活。同样还是很年轻的时候，他用新方法只根据很少的数据，算出了最新发现的谷神星的轨道。

高斯不管做什么事都要好上加好，力求完美，所以很多成果就永远在他的笔记本上不露面。这其中有很多有着重要创见的思想，“非欧几何”就是一例。

什么是非欧几何呢？那还要从欧几里德的《原本》说起。《原本》是建立在有限的几条公理之上的逻辑构造的大厦，这是大家都知道的。从公理出发，能推出所有的定理，而公理本身就不能再往前推了，就把它当作不言自明的东西承认下来。

对公理体系也有个起码的要求。首先几条公理之间不能相互矛盾。其次，所用公理要尽可能少，不能把可以从公理推出的定理，也当成公理立在那里，也就是各条公理要相互独立。

在《原本》中一共有九条公理，比如说两点间有唯一直线啦，直线可以任意延长啦等等。其中有一条叫平平公理，欧几里德有点把握不住，觉得它

像条定理，可就是没法证出来。没法子，还是把它作为公理，放在了其他几条公理的后面。而且，欧几里德在证前 28 个定理之前，一直没有用过这条平等公理，总想绕开它。

《原本》中的平行公理挺罗嗦，可以换成功效一样的其他说法，比如初中课本中是这么说的：

“过直线外一点能作一条且只能作一条和已知直线平等的直线。”

把平行公理作为定理，试图从其他公理把它推出来，数学家们为此忙碌了两千多年。

有些人是从正面去证，直接证。当他们觉得大功告成获得“证明”时，再仔细检查一看，都用了新的假设，比如像“三角形内角和等于两直角”，“平面上存在着一对不相等的相似三角形”，等等。

这些新的假定都需要用平等公理才能证出，只不过将平行公理换了个说法。这样的“证明”就犯了逻辑循环的错误。

直接证劳而无功，就想到间接去证，用反证法。这样就先否定平行公理，然后从这个否定的前提出发，进行一系列推理，如果推出了矛盾，那么对平行公理的否定就不对了，就证明了平行公理。想法很好，咱们中学生都用这样的反证法。

但是用反证法推来推去，推不出矛盾。比如瑞士的兰伯特（1728—1777），将平行公理否定，最后推出三角形的内角和大于或小于两个直角。

有人说这不就产生矛盾了嘛？其实一点不矛盾，因为三角形内角和定理和平行公理是一码事，两者可以相互代替。你用反证法，假设平行公理不对，也就是假设过直线外一点不是只有一条线和已知直线平行，那么实际上也等于同时假定了三角形内角和不是两直角。

从否定平等公理，不但推出了三角形内角和的稀奇结论，而且还推出了其他一些和平常的几何不一样的定理，不过就是推不出矛盾来。

正面证不行，反证也不行，看来平行公理是证不出了。这说明平行公理和其他公理地位平等，谁也不依赖谁，相互独立。

这一点得到了许多人的承认，对平等公理就只能把它当成公理了，要想证明绝对没戏。但是在用反证法时，从平行公理的反面出发，却推出了一系列和欧氏几何完全一样的结论，把它们集中在一起，不就构成另一堆定理的系统吗？它们完全不同于欧氏几何，但却完全说得通，逻辑上站得住。

不同于欧几里德几何的新几何产生了，它是 19 世纪所有复杂伟大的技术创造中，最深刻但又是最简单的一个。确实太简单了，只要把平行公理换成它的反面，其他公理不动，新几何的基础就打好了，以后只需要进行推理，就能构造出非欧几里德几何的大厦。

要承认非欧几何是十分困难的，尽管逻辑上没矛盾，可心理上太难承受。你能相信三角和的内角和不等于 180 度吗？说破嘴皮你也不信，总觉得和经验不符，似乎我们生活的空间，天然地就是欧几里德式的。

咱们的生活空间，不一定是欧几里德几何所描绘的，不能先入为主。认识到这一点的在当时是凤毛麟角，在现在也不多。咱们平常的世界似乎用欧氏几何都能说得通。

而首先认识到这一点的，就是高斯。他这么说过：“我们不能证明我们的欧几里德几何具有物理的必然性。或许在另一个世界中我们能洞察空间的性质，但现在却不行。”

伟大的天才高斯对非欧几何已经是明察一切了，但是他怕新的理论不被人理解，会受到起哄嘲笑，所以一辈子都没有公开发表的胆。即使别人已经提出来了，他也表示沉默。

那么又是哪一位功夫深湛的大师，有此伟大创造呢？他就是匈牙利数学家鲍耶·亚诺什。鲍耶的老爸与高斯是大学同窗，这位老爸也是位数学家，对平行公理证明了一辈子也没什么名堂。

鲍耶子承父业，又接手了这个问题。老爸知道了火冒三丈，立即写信训子，说你老爸早已苦头吃足，你小子要陷进去也没什么好下场。即使是牛顿在世，他也必陷入泥坑，坏一世英名。你小子赶快给我收摊，改练别的吧。

鲍耶牛脾气一上来，心想我还就要干到底。1823 年，他的思维突然打开，迸发了非欧几何的新设想。他写信给父亲说，“我已经在乌有中创造了整个世界”。

鲍耶在 1825 年基本完成了非欧几何学，后来的几年他央求老爸帮他出版，根本得不到同意。1831 年，鲍耶给老爸说，咱干脆给高斯伯伯寄份论文，看看他怎么个说法。

论文总算到高斯老伯的手中，高斯看后大吃几惊！他回信给他的同学说，我真是吓坏了，贵公子所做的一切和鄙人三十几年前想的完全符合，称赞他等于称赞我自己。使我特高兴的是，这么一位出类拔萃惊世骇俗的人物，正是老哥你的儿子。

说实话，高斯写这封信时，心里恐怕也是酸酸的，谁让自己没那份勇气呢。却说信到得鲍耶手中，大大刺痛了满怀希望的他。他不相信有人会赶在他前面，觉得高斯老伯倚老卖老太不仗义。从此郁郁寡欢，58 岁就去世了。

再说这最完整、最先发表非欧几何的，却是俄罗斯数学家罗巴切夫斯基。罗先生在 22 岁时，就着手研究这个问题。不久，他就意识到肯定存在另一种几何学，他把欧氏几何的其他公理照样采用，而对平行公理进行脱胎换骨，变成：过已知直线外一点至少有两条直线和已知直线不相交。

1826 年，罗巴切夫斯基 33 岁，正式宣读了非欧几何的论文。这位几何学上的哥白尼，又吓得教廷胡话连篇，总主教宣布他的学说是邪说，有人用匿名信谩骂他，种种花样不一而足。这一切正如高斯所预料到的。高斯写信给罗巴切夫斯基，表示十分钦佩。可是在公开场合他又装成个没事的人，从不多说一句话。

后来德国数学家黎曼（1826—1866）又创建另一类非欧几何，人们把它叫做黎曼几何。黎曼的体系中是这么替换平行公理的。

平面上不存在不相交的直线。即平面上不存在平行线。

“19 世纪最有启发性，最重要的数学成就是非欧几何的发现”，大数学家希尔伯特的评价是绝对权威的。除了打破了欧氏几何的一统天下，打破了对欧氏几何的盲目崇拜以外，非欧几何的建立使大家对公理和公理建立起的体系有了更清楚的认识。

一组公理，只要彼此独立，互相无矛盾，就能在这个基础上进行推导，建设新体系。哪怕这其中有些公理似乎是很叫人吃惊，很有些不习惯也不要紧。这么一来对数学家的工作方法、方向都产生了很大影响。

大家都知道怎么去系统化一门数学了，就是先找出一组公理，然后通过推理头头是道推出其他内容。把数学的各个分支都弄成一个个公理的体系，就是数学地公理化思潮，非欧几何在这场变化中的作用是很明显的。

首先是对欧氏几何严格公理化。欧氏的《原本》虽然也说得头头是道，但有很多缺点。比如那第四条公理，“凡直角都相等”是可以证明的，不能算公理，不独立。再说对一些基本的概念，比如说“点、线、面”，没有和一般的概念区别开来。一般的概念都从它们出发来定义的。而基本概念本身就不能下定义，否则会造成逻辑上的麻烦，闹不好会循环定义。

正是这么一考虑，德国大数学家希尔伯特在 1899 年出版了《几何学基础》，使得欧氏几何严格地公理化了。“我们必须能够用‘桌子、椅子和啤酒杯’，来代换点、线、面”，希尔伯特的这番话倒不是说去研究什么啤酒杯，而是说点、线、面不能再给出什么定义了，应该作为原始基本概念，所以不管换成什么名称也无所谓。

这一来，数学就更抽象，但是概括包含的内容就更多。这种着重于对象之间的关系和结构，但是并不把对象看作是某一些具体的东西，确实是数学中更高明的一步，一种划时代的进步。

同样的进步在代数中也在进行着。

比如，乘法有结合律，加法也有结合律，咱们把这条共性抽象出来，就有这么个式子：

（a*b）*C＝a*（b*c）

式子中那“*”号，就代表了一种更一般的运算，比如可以认为是乘法，也可以认为是加法，不过不能是除法。这式子中的 a、b、c 可以是各种各样的数，也可以是多项式。

更进一步，a、b、c 甚至于可以和数没有一点关系，而表示另外的对象。比如，看作是拨钟的一个动作，可以顺时针拨几个小时，也可以逆时针向后拨几个小时。那么 a*b 中，那个运算“*”又看作什么呢？可以看作是先进行拨钟的动作 a，然后再进行拨动动作 b，是拨的顺序。

这样一来，a、b、c 就是多种多样的向前或向后拨的动作。有没有结合律（a*b）*c=a*（b*c）呢？当然有。因为只要 a、b、c 固定下来，先做哪个动作都不打紧，最后结果是一样的。

这就是十九世纪经过革命的代数所具有的特点。不但符号代表的对象可以更广泛，五花八门；而且更着重“代数结构”。不管什么对象，什么运算，只要符合相同的规律，就认为是同一种代数结构。

上面的那种代数结构都有结合律，咱们就把它叫做“半群”。

而首先将代数结构提上数学日程的，就是法国天才数学家伽罗华（1811—1832）。而提到伽罗华，也必定要提起挪威的阿贝尔（1802－1829），他们都像在数学天空中闪电般的流星，发射出早期的异彩，后来又都不幸夭折，而死后才有天才这样的评价。

阿贝尔一生道路坎坷，郁郁不得志。这倒霉的命运从一出生就伴随他，从小就受穷，连病都没钱去治。13 岁时到一所教会学校学习，本来对数学是不大感兴趣的。正在这时，来了一位好老师，年轻热情，叫洪保。

洪老师很快发现阿贝尔是块学数学的料，立刻对他格外关心，送一些书让他自学，还经常在一起讨论当时名家欧拉、拉格朗日的著作。阿贝尔立誓要解决五次方程的根式求解问题。

原来自卡当、塔尔塔里亚解决了三次方程的求根，卡当的学生解决了四次以后，五次方程的求根公式却一直没有得到。

数学大师拉格朗日（1736—1813）想了不少高招还是攻不下来。

1821 年，19 岁的阿贝尔到克里斯蒂大学上学，学识大进更想一展身手。一开始他认为已经得出了五次方程的求根公式。后来再检查一下，发现了错误。

连遭挫折，阿贝尔反复琢磨，悟出很可能根本就没有这样的求根公式！经过艰苦的努力，阿贝尔终于证明了用公式解一般的五次方程是不可能的。

论文发表后，阿贝尔小小地发了点财，拿到一些钱，允许他到欧洲大陆去旅行。他从法国到德国，遍访名家，谁也不把他当盘菜。他再把论文寄给哥廷根的高斯，希望能“ 一识韩荆州 ”，结果还是不理不睬。

阿贝尔一气之下直奔柏林，不去哥廷根了。在那里他十分幸运地结识了工程师克雷尔。克雷尔慧眼识英雄，甘当了一次人梯，特地办了个刊物让阿贝尔施展。这本杂志叫《纯数学和应用数学》，后来都叫它是“ 克雷尔杂志 ”。

阿贝尔在第一卷上就发表了五篇以上论文，头几期一共登了 22 篇。杰出的成就，终于使大家刮目相看。

1827 年，阿贝尔回到挪威。谈不上衣锦荣归，却依然是一贫如洗。这时他又得上了肺结核，真是屋漏偏逢连阴雨。第二年，四名法兰西科学院院士，紧急致信挪威国王，请他为阿贝尔创造点外部环境。

可是阿贝尔也撑不了多少天了。1829 年 4 月的一天，他永远闭上了眼。可是才隔三天，却又接到了柏林大学的聘书，他是再也没法应这个聘了。

再说阿贝尔得出五次方程的结论以后，引起了许多人的注意。内中有一位后生小子，还是个 17 岁的中学生，就接着阿贝尔没有做完的事情继续做下去，彻底解决了方程求解问题。

此人是谁？他就是数学史上有名的青年才子伽罗华（1811—1832）。伽罗华的生命比阿贝尔更短、更悲惨。他是巴黎附近一个小镇镇的孩子。12 岁上中学，有些老师给了他“ 朽木不可雕 ”的评语。过了三年来了位数学教师范厄尔，慧眼识英才，指导小伽罗华自学了许多名家巨作。刚过 15 岁，伽罗华就显示出非凡的数学天才。

眼看着就要进大学，小伽罗华信心十足，两次报考重点院校名牌大学——高等工艺学院，两次名落孙山，他满足不了考官们的死板要求。

伽罗华坚持不懈，终于在 1829 年进了师范学院，准备当个教师，吃口安稳饭。

在考上大学之前，中学生伽罗华就开始研究方程论啦。这时，年轻的阿贝尔成功的消息传来，伽罗华大为振奋。继而觉得还有不少问题需要解决，“ 阿贝尔的杰出成就轰动世界，但他还没有解决哪些方程可以用根式求解，而哪些不能。 ”

比如说，一般的五次方程是不能有求根公式了，但一些具体的五次方程，像 $x^5-32=0$，$x^5+2x^3-{}^3-2=0$，都可以用根式求解。

阿贝尔当然也想过，什么条件下能有根式求解，但苦苦思索终不可得。

绝代天才伽罗华既找准了这个问题，就倾注全力攻坚。恰在此时，他又遇到一位高手里查德，伽罗华受此人指点，才能充分释放出来。1828 年，这位 17 岁的中学生彻底解决了代数方程有根式解的条件问题,取得了划时代意义的成果。大家可能会问，一个方程的解的问题，又如何称上划时代？

原来，伽罗华在研究这个问题时，发现了“ 群 ”这种代数结构，创立了“ 群 ”的研究，这才真正是革了一次命，划了一下时代。

“ 群 ”是一种重要的代数结构。除了要满足结合律以外，还要再加上一

些条件。所以“群”这种结构就是在上面说过的“半群”的基础上再添几条。添的条件倒也一般，第一条是算的对象里要有一个元素，叫做单位元，不管其他什么元素和它进行运算，仍然不变。也就是 a*b＝e*a＝a，这 e 就表示那单位元素。

当然，运算不同、运算的对象不同，这单位元 e 也不同。比如在乘法里，e 当然是 1；在普通的加法里 e＝0，因为这时候运算“*”代表“＋”，a＋o＝o＋a＝a 嘛。而如果 a、b、c 等等表示拨钟的动作，那么 e 就是把钟拨上十二圈，十二小时这么个动作。你想想，假设 a 是把钟拨到四点，这一个动作。那么 a*e 就是先拨到四点，再拨十二圈，不还是四点，还等于 a 嘛：a*e＝e*a＝a。

群，还要添上一个条件，虽然也简单，咱们也不打算再多絮叨。千句并成一句：群是近现代代数学的中心，是一种重要的代数结构。

降了群这种代数结构以外，其他还有环、域、格，等等。

年轻的中学生伽罗华就是发现了置换群与代数方程之间的关系，他用群这种强有力的数学工具，非常清晰非常简单地一举攻克了方程的根式求解问题。

伽罗华为他的发现欣喜若狂，立即把论文寄给法兰西科学院。1828 年 6 月 1 日,科学院举行例会。主审伽罗华论文的,是当时的数学大权威柯西(1789—1857）。众位德高望重的先生正想看看这位乳臭小子搞点什么名堂，可是柯西打开皮包，双手一摊，说对不起，那篇论文找不到了。

过了两年，伽罗华将论文精心修改，再交法兰西科学院。这次决定让老院士、数学家傅立叶（1768—1830）审查。可是还没等到开会，傅先生撒手西归，伽小子的论文又一次下落不明。

伽罗华总觉得“事不过三”，就第三次再送出自己的成果。这一次总算有了审查意见，著名数学家泊松（1781—1840）花了四个月时间看稿，最后签上了“完全不可理解”几个字。曲高和寡，连权威都不解其中奥妙，可见伽罗华领先了多少步！

此时的伽罗华在大学上学，卷入了大革命的浪潮，学校把这位不安分分子开除了，还坐了几个月的牢。出狱不久，晦气还未除尽呢，他的情敌又提出挑战，要和他决斗。

决斗前夕，伽罗华料定难逃此劫，要知道对方是位帝国的小军官。所以伽罗华就匆忙将自己的笔记、论文手稿寄给好友，托付后事。

决斗的场面，非在下之秃笔所可描绘，无非是赳赳武夫，翩翩公子，枪来弹往，血肉模糊。那赳赳武夫是死是伤咱倒不必管他，只是可怜的罗华却伤重不治，24 小时后闭上了眼，时年 21 岁。

过了 14 年，1846 年，法国数学刘维尔（1809—1882）在整理各种遗稿时，惊异地发现了伽罗华的思想。他把伽的论文发表在《数学杂志》上。直等到 1870 年，离伽罗华的发现已经 40 多年了，他的成就才得到充分肯定。人们掸去了埋在明珠上的厚厚尘土。

代数在更抽象、更有用的方向上发展。和几何的解放同时，代数也得到了真正的解放。这种解放就表现在对代数结构的承认，对代数结构的看法。

比如说人们规定一种代数结构，其中的“乘法”，没有交换律，也就是 a*b 不等于 b*a，那么你会怎么看？你肯定很不习惯，或者认为是胡说八道。

当年哈密顿（1805—1865）就遇到过这样一种巨大压力。大家就像责问

几何中怎么会有不等于 180°的三角形一样，也非常地愤怒代数中还有什么交换律不成立的运算。

x	l	I	j	k
l	l	I	j	k
I	I	-l	k	-j
j	j	-k	-l	I
k	k	-j	-j	-l

出于实际的考虑，哈密顿给出了这样一个乘法表，这里一共有四个元素 l、i、j、k。任两个数相乘，能从这张表中查出来。比如 i×j=k，j×i=k。

看清楚了吧？i×j≠j×i！没有交换律的乘法！据说，这是经过他 15 年的冥思苦想，站在都柏林的一座桥上想到的。连他自己都被这种离经叛道突破传统的思想给震住了，就把这张乘法表刻在桥栏杆上，看看这个不同凡响的怪物到底是咋回事。

其实，代数结构的几条规定，和几何体系中的公理差不多，都有某种随意性，不能只是一种。几何中的公理换了，就得到不同的几何；而代数结构中规则和算律换了，就得到不同的代数结构。

这么一种思想渐渐深入人心，大家便见怪不怪，不满足交换律的代数越见越多。英国数学家凯利（1821—1895）在 1857 年就对矩阵设计了一种“乘法”，规定了一种“乘法”，这种“乘法”就没有交换律。

近世的代数学就这样慢慢形成了，这是自从符号以来，代数学的第二次革命，第二次解放。

第一次革命，是符号的大量使用，使得初等代数成为科学的独立的基础（古希腊那会代数是几何的附庸）。第二次革命，就是高等代数学的开始。两者的区别那是高山和平地了。

初等代数是高度计算性的，要讨论运算也只是常见的四则运算，运算的对象不是有理数就是实数，再不就是复数，都是具体的。

高等代数学是概念性的、公理化的，就拿咱们给大家介绍过的“半群”这种代数结构来说，那里的运算对象 a、b、c 可不只是数，而是任什么都行，都可以。而运算也可以由你来规定。

今天，代数学的影响十分巨大，不管哪一个数学分支不会没有代数的思想，它给全部数学提供了有力的工具。而且各种自然科学、经济学都要用到代数。

除了几何和代数的大革命、大变化，19 世纪还发生了第三个有深远意义的数学事件，这就是微积分的基础严格化、精确化。

咱们在前面给大家说过，微积分初创之时，有两个麻烦，其中一个给牛顿—莱布尼茨解决了。另一个麻烦却一直没解决，起码是没彻底解决。什么麻烦呢？就是基础不紧密，不稳固。

比如在牛顿老前辈那会儿，求微分时通常都给自变量一个小小的增加，叫做自变量的无穷小量。有时候，他把这无穷小量不当作零，去做除数；有时候，他又把这无穷小量当作零，在计算中舍去。反正怎么有利怎么干，但是结果却总是对的，弄得大家都挺奇怪，挺纳闷。

可大伙当时都忙着把微积分的大厦朝大里、朝高处扩展，那顾得上这基础！这倒正好倒个身，先盖房，后打桩。其实这在科学发展上却并不奇怪。一开始是打天下，要不受束缚天马行空，这时就讲严格，往往限制了思想。

等到一门学科成熟了，该暴露的矛盾都暴露出来了，那就该给它立立法啦！用严密的逻辑规范它，最好整出一个公理体系来！

那么这无穷小量到底是怎么回事呢？是把它看成“零”，还是看成“非零”？回答倒挺古怪：既不是“零”，又不是“非零”。此话怎讲？

原来，“零”也好，“非零”也罢，都是常数，而无穷小量乃是一变量，在无穷地变化下去。比如咱们前面提过的，阿基里斯和乌龟距离是：

100，10，1，0．1，0．01，0．001……

它就是一个无穷小量，可以用一个字母表示，比如用 A。那么这 A 现在就是一个变量，而 A 将无穷变下去，变化的趋势是零，这样我们就说变量 A 的极限是零。

所以极限就是看变量变化的趋势，是一种涉及到无穷的运算，新的运算。微积分中处处要遇到无穷，处处就要用到极限运算。它是微积分的基础。

首先认识到这一点的是达兰贝尔（1717—1783），他在 1754 年就准确地指出：需要有严格的极限理论。说归说，做归做；这一件重要的“打桩工程”，又过了 70 年才有眉目，那是法国大权威柯西的功劳了。尽管他对伽罗华是不识英才，不过这件功劳还是要说一番的。

当然，柯西定义极限是比较严格的，不像咱们上面那样，列一串数，请您看看变化趋势，然后就下结论，说有极限或者没有极限。

那样做太直观，很生动。但是不严密，容易出错。柯西就用了数学的语言，用不等式来刻画整个极限过程。

后来又过了 50 年，德国数学家魏尔斯特拉斯在 1874 年又提出来，柯西的极限理论，那“打桩工程”做得不彻底，基础没打牢！真正的基础是实数理论！

这又是何意思呢？咱们先看下一列数：

1，1．4，1．414，1．4142，1．41421，……

诸位对这一列数当然很熟悉，无限变化下去，其极限是$\sqrt{2}$。$\sqrt{2}$是个无理数，而问题就出在这无理数上。

无理数自从由希腊希帕索斯发现$\sqrt{2}$以来，一直没有明确的地位。它到底是一类什么样的数，说不清。不像有理数，人们可以把它定义为两个整数的比。有人说无理数可定义为开方开不尽的数，比如$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$，等等。

其实这只是无理数中的一类，其他类的无理数还多得是。圆周率、e 都是无理数。

那么，无理数名份不正，就影响到极限的运算吗？完全如此。就像上面那一列数，它的极限就是$\sqrt{2}$，许多数列的极限都是咱们现在所说的无理数。如果无理数没有明确的地位，那么许多极限都不知结果到底是个什么东西。

所以魏尔斯特拉斯提的很对，极限的基础在实数理论，准确地说，在无理数的定义上。大家在初中见过无理数的定义吗！没有，那时只不过列举了一些无理数的例子而已。

那么究竟如何定义呢？咱们知道，有理数是由整数发展而来的，而有理数就由整数来定义：两个整数之比。用旧的数定义新的数，这是完全可以的。

所以数学家们，就用有理数来定义无理数。这个工作比较艰苦，由魏尔斯特拉斯（1815—1897）、戴德全（1831—1916）、康托（1845—1918）完成了。

这三位都是德国数学家，都是在两个世纪之交时做出了伟大贡献的。他们的基本思路都一样，要给无理数一个明确的“说法”。而戴德全和康托，做的就更严格一点，严格地用有理数来定义、或者说来产生无理数。

无理数得到了定义，整个实数就严密了，而极限的基础就巩固了。一场由于无穷小问题，由于无理数的地位而引起的争论，也就是平常所说的第二次数学危机，得到彻底解决。

说起来，魏尔斯特拉斯是大器晚成的人。他年青时代研究的是法律、经济，很迟才开始搞数学，而且还是个中学的教书匠。看来一辈子只能弄弄初等数学了。一般认为，要成为第一流的数学家，必须很早就开始进行数学研究，不能老泡在初等数学里解五花八门的题。

但是魏尔斯特拉斯却打破了这个一般！虽然他 40 岁才到柏林大学，过了八年才当上教授，但他照样在高等数学上做出了杰出的成就。而且书教得更好，是世界知名的高等数学教师。更被称为“现代分析之父”。

和魏先生相比，康托的人生是另一番的色彩。这位处于世纪之交的伟人，做了一件可以说让数学转入新世纪的工作，开天辟地。

康托出生于俄国的一个丹麦—犹太血统家庭。后来全家从圣彼得堡迁居法兰克福。老爸让他学工，所以在 1863 年他 18 岁时，进了柏林大学，这一下可真是如鱼得水，他得到魏尔斯特拉斯高明的指点，对数学的兴趣更浓了。四年后的博士论文中就有了“离经叛道”的观点了，他认为，在数学中提问的艺术比起解法来更重要。

康托在 1869 年到哈勒大学教书，过了十年提升为教授，一直到去世，都在这工作。倒不是康托想在这小地方混一辈子，他也很想在柏林找一个钱多一点的、声望高一些的教授职位。

但是那位柏林的大权威克罗耐克（1823—1891）处处跟他为难，跟他过不去。原来这位克老头对康托的成果很难接受，许多东西和他脑瓜里的传统背道而驰，完全相反。这自然引起他的敌视。

这位克老头粗暴地攻击康托的思想，整整十年他都没放松过。弄得康托精神崩溃，常常住病院。虽然在 1887 年好了一阵子，恢复工作了，可是后来又不灵了。1918 年 1 月 6 日，康托在哈勒大学附近的精神病院中去世。

那么康托的惊世骇俗之论，石破天惊之语，究竟是所说何论，所论何事呢？

说起来倒也无啥稀奇，那方法就是古人数数时就用过的“一一对应”！啥叫“一一对应”？比如班上有 40 名学生，40 个位子，那么一人一位；反过来，一位一人，这就叫一一对应。如果哪一天位子多出来两个，就知道人少位子多了，两者不一样多。

如此说来，此方法很好改革，经常用。可是如果将这方法用好用活一直用下去，却有了想不到的结果。我们将话题再拉到伽利略身上。

大家应能记得，伽利略老先生曾有如此一说：

“平方数的个数不小于所有数的总数；所有数的总数也不大于平方数的个数。”

所有数，就是所有的自然数，即 1、2、3、4，……等等，有无穷多个。而平方数，即指 1^2，2^2，3^2，4^2，……等等，伽先生之意，是说这两部分数完全一样多！这可是亘古未有之论！要知道，平方数是自然数的一部分；1，4，9，25，……自然数的一部分，竟然和自然数的全体一样多，岂非大大出

人意外？“ 部分小于全体 ”，这是举世公论的原则，欧几里德在《原本》中，更把它列为公理之一，为何伽利略竟反其道而行？

那么伽利略为何有此结论？是否故意出此出人意外之狂言以招摇天下？非也。伽利略是有根有据的。根据就是“ 一一对应 ”。请看如下两者之间的一一对应：

两者之间，每个数都对应着对方唯一的一个数，就像坐位子，一位一人，反过来，也一人一位，位子与人完全一样多。如今看来，平方数与自然数也是这番情境，结论自然不言自明：两者一样多！

1	2	3	4	5	6	……
↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	……

结论既得，则“ 全体大于部分 ”的公理顷刻瓦解。原来，这条原则在对象只有有限个时，是完全对的；而一涉及到无穷，就有时对有时不对了。而自然数全体、平方数全体都是无穷。

比如说，自然数全体 1 到 100 这一部分相比，仍然是“ 全体大于部分 ”，因为两者之间不能一一对应。但是若是伽利略所说的情况，那么这条以前的“ 公理 ”就不“ 公 ”了。这“ 公理 ”时对时错，当然就不能再姓“ 公 ”，这是进入无穷世界后的又一大发现。

这无穷世界的方方面面就是如此的不同，绝对能让你留连忘返，乐不思蜀。当年的康托大师就是因为发现了这无穷的奥妙，不禁万分惊异，连自家也不相信，更使那些权威粗暴猛烈地攻击十年。

康托早期对微积分的基础很有研究。继而他对“ 无穷点集 ”作了描绘。什么是点集呢？就是点的集合。集合这个概念现在或多或少大家都了解一点。而康托就是集合论的奠基人，独创者。一个独行天下，独领风骚，这在数学的发展中倒是不多见的。

康托称，集合是一些确定的、彼此不同的东西的总体。比如，某人书包中书的全体，可构成一个集合；太阳系中所有行星，亦可成一集合。此外，全体自然数，全体平方数，某个二次方程的根，等等，都各自能构成一个个集合。而组成集合的“ 东西 ”，康托把它叫做集合中的元素。

紧接着，康托决定讨论一下集合中元素多少的问题。康托在这里抓住了比较多少的关键：一一对应。这可是每个平常人都经常用的，可你自己还浑然不觉。

比如，你到店里买十根铅笔，这买的铅笔自然也能构成一个集合。那你怎么能知道这个集合中的元素有多少？有人说，那太简单了，一根一根数呗，数完了是几，就是多少根。

告诉你，你这时用的就是一一对应！为什么呢？因为你在数第一根时，嘴里说了个“ 1 ”，再数下一根，跟着说个“ 2 ”，……，这么数着说着，就是把买的铅笔和从 1 开始的自然数“ 一一对应 ”起来了！

数完了，就在铅笔的集合，和数的某个集合之间建立起一一对应关系。这时，咱们当然可以说两者的元素一样多！于是你也就知道买了几根铅笔。

平常的道理，人人都用，可就是熟视无睹！而康托就把这其中的道理一总结，再一推广，就得出了惊人的发现。康托认为不仅有限的集合用一一对应可以知道多少，而且元素无限多的集合更要用这种方法，正如伽利略问题一样。

这样，他就把两个能够一一对应的集合称为有相同的“势”，意思是一样“多”。

运用这一思想，康托发现，有理数集合与自然数集合等势！也就是两者元素一样多！这可真是个惊人的发现！要知道，在数轴上有理数密密麻麻地分布着，要多稠密有多稠密；而自然数却稀稀落落，还只在数轴的右半部！请想一想,每一个自然数周围,不简直就有无数多个数也数不清的有理数吗？

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \rightarrow \frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots &
\end{array}
$$

但是经过康托用一一对应的巧妙办法，确实使有理数与自然数集等势！只要看看这张图，我们会发现，所有的正有理数都在这个陈列中，第一行是分母为 1 的有理数，第二行是分母为 2 的。也不是说，现在证明了所有正有理数与自然数集一一对应！那么全体有理数，即再加上负有理数和零，还能做到这一点吗？这也不难，只要在每个正有理数旁边，添上那个负的即可：

当然，在最前面先加上 0，这样所有的有理数就有规律地排成了一列，也就是和自然数集一一对应！说明两者“等势”，或者说“一样多”！

有人会说，因为这两个集合都是无穷多元素，所以别费劲我就清楚，凡是无穷都一样多。这么说你可就大错特错了！康托进一步证明了，自然数和实数，就建立不起来任何一种—一对应关系。当然，这是用反证法来证明的，因为你要说明任何一种一一对应的关系都不存在、最好的办法就是用反证法。

这就说明了，无穷与无穷是不同的。实数要比有理数、自然数高一个层次，因为“势”不相等。而有理数、自然数是同一个层次的无穷。

康托就是这样一位给无穷世界分出层次的立法者，其中最低一个无穷的层次，无穷世界中“势”最小的，就是自然数集、有理数集。

康托说，如果自然数集的势用 d 表示的话，那么有理数集的势当然也是 d，但实数集的势可就大于 d 了。他进一步证明，有一级比一级更大的势，无穷的阶梯就这样给他找出来，证出来了。

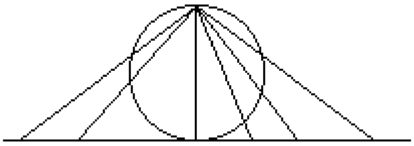
接着，他又引进了基数和序数的理论，惊人的创造，卓越的证明一项接一项。他一个人就这样从 1874 年 29 岁起，一直写到 1897 年，完整地独立地建造了整个集合论基础。他的成绩是这样巨大，工程是如此宏伟，结论是如此惊人。当他得出、证出一些结论时，他写信给戴德金说：“我惊呆了，我简直不能相信它。”

他惊呆在何处呢？原来他证出了，一条线段上的点与一条直线上的点一样多！这只要看一看下页的图就能明白，圆周上的点和直线上的点建立了一一对应关系。更进一步，他证明了，线段上的点，直线上的点，平面上的点，整个地球的点，统通一样多！真是令人目眩，吃不消！

不过咱们可要给大伙说清楚，康大师可是规规矩矩用一一对应的方法给你证明出来的，不是乱说，更不是说凡是无穷都一样。

尽管有人竭力反对，正像人们后来所说的，这些思想和想法是如此的革

命，不遭到反对那倒是个奇迹，然而，许多卓越的数学家深深为之感动。戴德金、魏尔斯特拉斯、希尔伯特，他们都勇敢地支持捍卫康托的集合论。



希尔伯特（1862—1943），这位 20 世纪的大数学家，对他本国同行的伟大创造赞不绝口：“ 没有人能把我们从康托为我们创造的乐园中开除出去。 ”希尔伯特的赞美到了无以复加、最高级的水平：

“ 这是数学思想的最惊人的产物，在纯粹理性的范畴中人类活动的最美的表现之一 ”。

大哲学家罗素把康托的工作说成是“ 可能是这个时代所能夸耀的最巨大的工作。 ”

确实，集合论的创立为整个数学奠下了基础。今天的数学，每一个分支都把集合论作为第一块基石。就是以前的一些老概念，人们用了几十年几百年了，也用集合论的语言和思想再改造一下，重新包装一番，果然是美伦美奂，思想更深刻，形式更简约。

1900 年，新旧世纪之交，数学已经发展成一个庞大的领域，一切都井井有条。特别是经过希尔伯特提但的公理化运动，他的《几何基础》的出版，每个分支都可以如此这般的公理化一番，整得有板有眼。而它们的共同基础当然是集合论。

可正当其时，集合论却出了问题，出了大问题，整个数学界大为震动，数学史上第三次危机爆发了。

什么大问题呢？就是出现了自相矛盾怎么也说不清的悖论。当时，德国数学家弗雷格（1848—1925）已经完成关于算术基础的两册巨著，这可是整个数学的基础工程。而罗素恰恰在这时候把发现的悖论告诉了他。

弗雷格懊悔不迭：“ 一个科学家遇到的最不痛快的事莫过于：在工作完成时，把基础丢弃。在这部著作即将付印时，我收到罗素先生的信时就是这么尬尴。 ”

那么罗素发现的集合论悖论是什么样的呢？他自己在 1919 年曾经这样通俗的说明了遇到的悖论：有一个村的理发师宣布，他给所有不给自己刮脸的人刮脸，并且只给这些老爷们刮脸。

现在对理发师自己的脸蛋就发生了极大的矛盾。假如他给自己刮脸，按照原则，作为理发师他又不能给自己刮；而假如他不给自己刮，按照规定，他又得给自己刮脸。

刮也不行，不刮也不成，理发师就这么僵着！当然这著名的理发师悖论只不过用来形容集合论中的类似情况。而自从在集合论中发现悖伦，陆陆续续又弄出不少。康托本人已早有发现。

矛盾到底如何解决，一时没了个主意。后来大家想一想，觉得康托一开始对集合的定义不严密，这是产生矛盾的根源。正本清源，就需要用公理化的方法来进行治理整顿。

1908 年，由策梅罗（1871—1953）首先提出了一个集会论的公理体系，后来又经弗兰克尔的改进，现在就把这叫做 ZF 公理集合论。

咱们在这说说谈谈，转瞬已有百年光阴，从 19 世纪进入了 20 世纪。这

百多年间，中国数学又如何发展？

同学们自能记清，从徐光启开始慢慢输入西洋数学，中国的数学家正想看看“外面的世界”，喝点牛奶，不料里面的一切却“很无奈”，雍正爷关上窗户叫了个暂停。

直到鸦片战争大炮轰开国门，这才开始了西洋数学输入的第二次浪潮。从此，中西数学合流，并逐渐开始现代数学的研究。简单一句话：与国际接轨。

这第二次浪潮中的两员主将，就是李善兰、华蘅芳。

李善兰（1811—1882）是浙江海宁人。十岁时看了《九章》，自此就喜欢上数学啦。二三十岁的时候就很有名气了。1852 年他来到上海，用八年时间和英国人伟烈亚力一起，翻完了《几何原本》、《代微积拾级》、《代数学》等许多科学书籍。

《代微积拾级》是中国第一部微积分的译本。当年在上海印刷时，没发电厂，只好用牛来带动印刷机。所以那圈内人士也就苦笑笑来点黑色幽默，说老牛你咋跑错了地方不耕陇亩却耕起了书田。

李善兰生于晚清乱世，列强环顾中华，当然要探索强兵富国之道。他曾经十分感慨地写道：“呜呼！今欧罗巴各国日益强盛，为中国边患。推原其故，制器精也；推原制器之精，算学明也。”李善兰也有一定道理。

李善兰在素数论和级数论方面都有卓越的成就。他发现的恒等式被西方称作“李善兰恒等式”，驰名宇内。

中西两大数学潮流终于会合到一起，这部演义也快煞尾。

概而言之，以《原本》为代表的西方数学和以《九章》为代表的中国古算，代表两种不同的倾向，逻辑倾向和算法倾向。

逻辑倾向着重概念与推理，算法倾向以机械的思维方式、程序化的步骤为特色。世界近现代数学史上，各个时期的倾向也各有侧重。大致来讲，新方法的发明、新学科的创建时期，以算法倾向为主；等到成果不断涌现，需要总结归纳，又转入了逻辑倾向。

两种倾向各有优劣，不可偏废。就最近四百年而言，经历了一个“算法——逻辑——算法”的循环，目前正处于算法倾向东山再起、日趋重要之际。

17、18 世纪微积分发明时，那新方法、新思想刚刚出现，各路豪杰纷纷一试牛刀，只顾用得畅快，那管得有没有矛盾！这时自然是倾向于算法。

到得 18 世纪初叶，从柯西、魏尔斯特拉斯诸家对极限论严格化开始，到康托“集合论”，布尔伯特公理化的提倡，又转入了新的演绎时期，使得数学在新的逻辑框架内活动。

本世纪 40 年代，轰然一声巨响，人类历史上最伟大的发明——电子计算机在美国诞生。不到 50 年，竟然遍及各领域各学科各环节和地区。其普及速度之快，影响之大，无哪一项发明可与这相比。由此，算法倾向抬头，已成为这一个世纪之交的新特点。

“四色问题”的证明是计算机的胜利，更是以算法为内容的计算数学的胜利。所谓“四色问题”，是在 1852 年提出的世界级难题，它要求证明，任一张平面地图，总可以用四种颜色区分相邻的国家地区。

一个世纪以来，多少人对此问题都久攻不下，1976 年，美国伊利诺大学的阿贝尔和哈肯宣布：他们在电脑的帮助 F，把世界级难题“四色定理”证出来了！数学界大大震动，邮政局专门发行了纪念封、纪念戳。

它的划时代意义就在于：机器和计算进入了被看作自由发挥天地的证明领域。今天，计算已和实验方法、理论方法鼎足而立，成为第三种科学方法而引入科技界。

今日之数学，不但是科学，也是能产生直接效益的技术。“大哉，数学之为用”，这是早在1959年，华罗庚教授发出的赞叹和感慨。他精彩地叙述了数学在“宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之迷、日用之繁”林林总总、形形色色诸多方面的应用。

有人说第一次世界大战是化学战（火药），第二次是物理战（作战军械、原子弹），而当今的战争就是数学战。

海湾战争期间，美军远涉重洋，大批人员和物资仅短短一月就调运到位，是由于采用了运筹学和优化技术，运用了遍布各地的计算机网络。再看那电子对抗，敌我模式识别，其中也时时离不开数学。

美国在进攻伊拉克前，对伊方点燃油井造成的后果捉摸不透，遂就教于某头脑公司研究此问题。该公司找出数学模型，进行一系列模拟计算后得出结论：大火将造成重大的污染，波及一系列地区，但不地造成全球性气候变化，不会对生态和经济系统造成重大损失。这才促成布什下决心，刮起“沙漠风暴”。

而当今诺贝尔经济奖，更是数学一试拳脚的好去处。从1969年到1981年间颁发的13个诺贝尔经济学奖中，有七个获奖工作是相当数学化的。不懂数学，就不懂经济学。

大哉，数学之为用！数学作为一种文化，对人类精神的熏陶、人类素质的培养，更在不知不觉之中显露其至大至深。从19世纪始，到二战时期，全球有影响的数学家中，德国约占43%！而且不乏诸多大师级人物！因此，我们对德国人惯有的那种严谨认真、一丝不苟的作风，应当是不奇怪了。

几千年数学风云，缩于数20万字演义之中。兴衰交替的史实，正凸现出数学思想的演变。

在此世纪交替之时，我们想起上一个世纪之交时的那位大师——希尔伯特所说的话：

我们必须知道，我们必将知道。附录

附录一　数学世界的吉尼斯纪录

要编全数学世界的吉尼斯大全是个大工程，我们在这里只选一些有趣的，或者重要的，也可能是前面未提到的，以便相互补充。

中国数学的世界之最

1．最早创造了先进的十进位位值记数法。

2．最早发现分数运算规律。《九章》中有成套的分数四则运算法则，与今日所学相同。

3．《九章》中最早发现开平方、开立方的方法。欧洲直到四世纪才知道开平方。而开立方则迟至十四世纪。

4．最早应用比例理论。《九章》中已有比例运算。

5．《九章》首先引进正负数和正负术。

6．《九章》中的“五家共井”，是最早的不定方程求解问题。

7．《九章》最早记载线性方程组的解法。

8．贾宪—杨辉三角形，早西方帕斯卡 500 年。

9．最早研究高阶等差数列，比欧洲早 400 年。即沈括所创“ 垛积术 ”。

10.最早获极精确的圆周率近似值，即“ 祖率 ”。

11．发现体积求积原理：“ 刘祖原理 ”，早欧洲 1000 多年。

12.最早发现二次方程、三次方程的数值解法。以后更能解多元高次方程组，即“ 四元术 ”，为世界首创。

数学家之最

1．最年轻的教授：科林·麦克劳林（1698—1746），他于 19 岁担任苏格兰阿伯丁市玛利查尔大学数学教授。1725 年，在牛顿的推荐下又受聘于爱丁堡大学任数学教授。

另一位是 1948 年 9 月 23 日出生的费利德曼博士。在他 19 岁生日的前三个星期，1967 年 7 月被加洲斯坦福大学聘为数学副教授。

2．著述最丰的：欧拉。在世发表了 530 本书和论文。全部著作包括 886 本书和论文。瑞士自然科学学会从 1907 年开始出版，计有《全集》74 卷。

3．数学家家族：瑞士的伯努利家族，共产生过 11 位数学家。

中国的梅文鼎家族，其产生过七位数学家。

4.有史记载的最早女数学家：希帕提娅，古希腊数学家泰奥恩之女。她在数学、医学各方面都有造诣，也为丢蕃都的《算术》、阿波罗尼斯的《圆锥曲线》作过注释，为公元 400 年左右人。

其他女数学家：柯瓦列夫斯卡娅（1850—1891），俄国人。冲破帝俄阻力，到德国学习，为魏尔斯特拉斯的学生。1883 年任斯德哥尔摩大学教授。1888 年成为彼得堡科学院通讯院士，是俄国第一个获此称号的女性。

诺特（1882—1935），德国女数学家，曾就读于哥廷根大学，后于此执教。1933 年受纳粹迫害，移居美国。是抽象代数的奠基人之一。

5．第一个给地球量“ 腰身 ”的人：埃拉托色尼（约前 274—前 194），古希腊人。

6．第一个获菲尔兹奖的华人：丘成桐（1949—），广州人，后移居香港。早年丧父，备尝辛酸。后为陈省身教授发现，到加州大学伯克利分校跳级读研究生。1976 年，27 岁的丘成桐解决了微分几何的著名难题——卡拉比猜想，名扬四海。后为斯坦福大学和普林斯顿高等研究所终生教授。1982 年获菲尔兹奖。

7．因书而传名永久的欧几里德，古希腊人。其《原本》有如下几项之最：最早公理化的数学著作，影响最广最普及的数学著作，世界上流传最久的教科书。世界上再版最多的科学书籍，迄今已有 1000 多个版本。

8．最令人困惑的数学家：拉玛努贾（1887—1920），印度国宝，世界第一流的数学家。他的一生是个不解之谜。从未接受过正规的大学教育，却独立钻研，不断在笔记本上写下预言般的数学公式。23 岁时在印度数学月刊发表论文。后来给英国著名数学家哈代写了封信，列举自己发现的 120 条公式。这些公式中有一些是著名数学家发表过的（拉玛努贾无资料可参考）；有一些十分深奥；还有一部分公式从未有人讨论过。一个身居偏僻地方的穷青年竟然孤独地走过了别人几十年走过的路！后来，他受到哈代的指导，突飞猛进，共发表了 21 篇论文。但不幸的很，33 岁他就去世了。

更出人意外的是，1976 年又发现了他的笔记本，内有 600 余条公式，都未给证明。有些当时才发现，有些一直未发现，都很复杂。

拉玛努贾似乎是一个猜不透的预言家。

计算工具

1．最早的计算工具：是中国在战国以前发展的算筹。有完整严格的布筹和计算法则。

2．最早的算盘：至迟在元末已普遍使用，因此发明日期应更早。是沿用至今的最古老的计算工具。

3．最早的计算表格：表格也可以加快运算，表算法是一种重要的计算方法。最早的计算表格是巴比伦人早期的泥版表格，有乘法表、倒数表、平方表、立方表，这些表已有 3700 多年历史了。

4．最早用于“格子算”的工具：耐普尔算尺，曾传入中国。耐普尔在 1617 年发表的《尺算法》中对算尺的用法作了说明。

5．最早的对数表：1614 年，耐普尔发表了他的对数理论，并附有对数表。最早的常用对数表由英国布里格斯教授于 1624 年发表。

6．最早的对数计算尺：由奥特富德（1574—1660），在 1622 年发明。奥特雷德是英国人。

7．第一架机械计算机：1642 年，19 岁的帕斯卡发明了第一架机械式计算机，只能做加法，和现代电子计算机有本质区别。

8．第一架能做乘法的机械计算机：1671 年莱布尼茨在德国制成。1820 年德科尔玛将一种莱布尼茨型的机器改革成能做减法和除法运算。

9．第一部实用计算机的专利：在 1875 年由美国人博尔德温获得。能进行四则运算。是以后进入大批实用的机械或电动计算机的原型机。

10．第一架有程序存贮思想的计算机：1812 年英国数学家巴贝奇开始设计构造能帮助计算数学用表的机器，未获成功。以后，开始研究被称做“分析机”的计算机，是想用完全自动作出一系列算术运算，而这一系列运算的步骤由操作者一开始时输入机器。

这就是“程序存贮”的思想，与现代电子计算机有相同的基本原理。所以巴巴奇设计的机器是现代电脑的始祖，而以前的计算工具都没有这种思想。

巴贝奇的设计非常先进，限于当时技术条件没有造出来。

11．第一台现代电子计算机，1946 年在美国制成。这台电子计算机用了 18800 个电子管，占地 180 平方米，重达 30 吨，耗电 140 千瓦，每秒可做 5000 次运算。这第一台的名字叫“E-NIAC”。

电子计算机的出现有划时代意义，它不但能进行“算”，更能处理大量的各式各样的信息，是一台“信息处理机”，是人脑的延伸。

数的世界

1．最重要的五个常数：l，0，i，π和 e。在欧拉手中它们统一在一个公式里，称为欧拉公式：$e^{i\pi}+l=0$

2．最大的质数：虽然欧几里德早就证出没有最大的质数，但因质数无规律可寻，所以迄今发现的最大质数都需借电脑判断。法国数学家默森曾致力于寻找质数公式，他在 1644 年指出，在形如 2^{p-1} 的式子中，存在许多质数。

我们把 $M_p=2^p-1$ 称为“默森数”。默森一气列出九个“默森质数”：M_2，M_3，M_4，M_5，M_7，M_{13}，M_{17}，M_{19}，M_{31}，M_{127}。

他断言 M_{67} 和 M_{257} 是质数，却被后人否定。到现在为至，已发现第 30 个“默森质数”：M_{26091}，共 65050 位。是得克萨斯州豪斯顿彻夫朗地理科学公司的计算机发现的。

3．最大的完美数：某个自然数，如果它的所约数（除去它本身）之和等于这个自然数，那么称其为完美数。如 6＝l＋2＋3，28＝1＋2＋4＋7＋14。最大的完美数是（$2^{216091}-1$）$\times 2_{216091}$。“完美数”也叫做“完全数”。

4．最大的孪生质数：只隔着一个偶数的两个质数，称孪生质数。如 3 和 5，11 和 13 等。1948 年数学家玻林那克猜测孪生质数有穷多对，它和哥德巴赫猜想一样难以解决。

借助电子计算机，发现了许多数值很大的孪生质数。1972 年，美国发现了一对：$76\times3^{169}+l$ 和 $76\times3^{169}-l$，有 83 位。1983 年，德国科学家凯勒发现了 15 对与“默森质数”有关的孪生质数，最大的一对是：

1639494×（$2^{4423}-1$）±1，有一千好几百倍！

5．最精确和最不精确的圆周率：

1897 年印第安那议会竟然在通过的法案中，将圆周率规定为 4 左右，令人感到滑稽！而精确的圆周率，纪录一直在不断刷新：

公元 460 祖冲之仍用刘徽割圆术，算得圆率为 3．1415926，这个精确度保持了一千多年的世界纪录。

1596 年荷兰数学家卢道夫算得有 35 位小数的圆周率。

1873 年，沈克士算得了 707 位的圆周率，1946 年又提高到 808 位。以上都是人工计算。

20 世纪 50 年代，人们用计算机算得了 10 万位小数的圆周率，70 年代又刷新到 150 万位。1987 年 1 月 13 日，日本的金田康正，算出了 133544000 位小数的圆周率！印出的数字占两万页！

1990 年，最新结果：4．8 万位。

6．对圆周率的最高记忆：55 岁的日本横滨人友良获秋，在 1987 年 3 月 9 日到 10 日，用 17 小时 21 分（包括 4 小时 15 分钟的休息）就背出了四万位小数的圆周率！

7．计算赛电脑：1981 年 4 月 7 日，荷兰的克拉恩在日本筑波市，仅以 l 分 28.8 秒的神奇速度，准确无误地把一个 100 位的数进行了 13 次开根运算。

而在 1980 年 6 月 18 日，印度的夏孔塔拉·黛比夫人对于下面这个计算题：

7686369774870×2465099745779

在 28 秒内报出答案：18947668177995426462773730。

8．最没有数的概念的人：是巴西的马托·格罗索南比瓜拉人。他们没有任何数字系统，只有一个动词表示“他俩相像”。

9．最大和最小：从空间来看，人类认识的最小物体是核子，其大小约为 10^{-15} 米；而人类所认识的宇宙可达百亿光年，约 10^{26} 米。两者之差，为 10^{41}，41 个数量级！

10．最多和最少：一个电子质量约为 10^{-30} 千克，而宇宙间物质的总质量多达 10^{53} 千克！相差 83 个数量级！

11．最长和最短：一个Ω介子的寿命，短到只有 10^{-22} 秒！而红矮星的寿命却与其相差 40 个数量级。

附录二　国际数学奥林匹克竞赛

是国际上影响最大水平最高的中学生数学大赛。1959 年由罗马尼亚提议东欧七国在同年 7 月 22 日至 30 日在布加勒斯特举办第一届“国际数学奥林匹克（简称 IMO 克）竞赛”。从此，比赛每年举行一次，参加国逐渐增多，美国于 1974 年参加比赛。

这项竞赛，试题由各参赛国的代表事先提出，然后共同从中选出 6 题作为赛题。竞赛一般在每年七月，历时十天左右。比赛分两个上午连续举行，每次四小时，做三道题。

选手赛毕，成绩先由本国领队和东道主协调评定，若有分歧，交全体协调员会裁定。

我国自 1985 年首次派队参加，以后历届均获好成绩。

1985 年 26 届第一次参赛，获一铜牌，总分排第 16；1986 年 27 届，获三金一银一铜，总分超升第 4；而 1987 年更使总分跃居第二，金、银、铜牌各夺两面，全队人人获奖。以后更是稳占魁首，其中 1989 年夺四金两银，1990 年更是五金一银！令世界刮目相看。

附录三　影响数学发展的几件大事

1．出现记数符号，这是数学的第一次抽象。中国约在公元前 1500 左右的殷商，而埃及、巴比伦更早。

2．十进制的位值记数法。中国，殷商时期。

3．勾股定理的发现。世界各民族或迟或早或抽象或具体认识了这个三边关系。在中国发展成勾股术，更有了理论基础的作用。

4．无理数的发现，第一次数学危机。约在公元前 500 年，古希腊。

5．欧几里德《原本》的产生，对西方数学和现代数学都有极深远的影响。是第一个公理化的科学体系。公元前 300 年，欧几里德。

6．文字叙述代数成了简化代数，代数符号的出现。可以认为，这是自记数符号以来的又一次抽象。公元 250 年，丢蕃都。

7．代数符号在全面使用，字母不仅表示未知数也可表示已知数，从而使讨论更有一般性。韦达、哈里奥特、笛卡尔等，约为 1580—1640 年间。

8．解析几何的创立，“从此变数进入了数学”。笛卡尔、费尔马等。是现代数学的发端。

9．微积分的创立，新的对象、新的方法、新的思想，给数学极大的推动，是现代数学的原动力。牛顿、莱布尼茨等，17 世纪。

10．非欧几何的发现，给数学极大的震动。对了解数学的本质，对公理化运动有极大启示。19 世纪，高斯、鲍耶、罗马切夫斯基、黎曼。

11．分析的严谨化，把微积分建立在严谨的基础上，标志着逻辑倾向占上风。柯西、魏尔斯特拉斯、戴德令、康托，19 世纪。

12．群论的出现，抽象代数的建立。代数摆脱了方程理论的局限，转向

研究“代数结构”。伽罗华、哈密顿、凯莱、约当、诺特等。

13．集合论的创立，第三次数学危机爆发。极大影响了对数学基础的研究。康托、罗素等。

14．希尔伯特《几何学基础》发表，公理化运动。希尔伯特在数学大会上提出的“二十三”个问题，并给 20 世纪数学很大影响。

15．电子计算机诞生，1946 年。它既是数学的产物，也在产生着新的数学。其巨大影响可能会使数学改变面貌。

以上所选，不是以“难”、“繁”为尺度，而是看能不能影响全局，转变方向，甚至带来革命的变化。