世界科技全景百卷书（38）

数学大发现

数学大发现

圆面积求法

怎样求圆面积？这已是一个非常简单的问题，用公式一算，结论就出来了。可是你可知道这个公式是怎样得来的吗？在过去漫长的年代里，人们为了研究和解决这个问题，不知遇到了多少困苦，花费了多少精力和时间。

在平面图形中，以长方形的面积最容易计算了。用大小一样的正方形砖铺垫长方形地面，如果横向用八块，纵向用六块，那一共就用了 8×6=48 块砖。所以求长方形面积的公式是：长×宽。

求平行四边形的面积，可以用割补的方法，把它变成一个与它面积相等的长方形。长方形的长和宽，就是平行四边形的底和高。所以求平行四边形面积的公式是：底×高。

求三角形的面积，可以对接上一个和它全等的三角形，成为一个平行四边形。这样，三角形的面积，就等于和它同底同高的平行四边形面积的一半。因此，求三角形面积的公式是：

$$\frac{1}{2}\times 底 \times 高。$$

任何一个多边形，因为可以分割成若干个三角形，所以它的面积，就等于这些三角形面积的和。

4000 多年前修建的埃及胡夫金字塔，底座是一个正方形，占地 52900㎡。它的底座边长和角度计算十分准确，误差很小，可见当时测算大面积的技术水平已经很高。

圆是最重要的曲边形。古埃及人把它看成是神赐予人的神圣图形。怎样求圆的面积，是数学对人类智慧的一次考验。

也许你会想，既然正方形的面积那么容易求，我们只要想办法做出一个正方形，使它的面积恰好等于圆面积就行了。是啊，这样的确很好，但是怎样才能做出这样的正方形呢？

你知道古代三大几何难题吗？其中的一个，就是刚才讲到的化圆为方。这个起源于古希腊的几何作图题，在 2000 多年里，不知难倒了多少能人，直到 19 世纪，人们才证明了这个几何题，是根本不可能用古代人的尺规作图法作出来的。

化圆为方这条路行不通，人们不得不开动脑筋，另找出路。

我国古代的数学家祖冲之，从圆内接正六边形入手，让边数成倍增加，用圆内接正多边形的面积去逼近圆面积。

古希腊的数学家，从圆内接正多边形和外切正多边形同时入手，不断增加它们的边数，从里外两个方面去逼近圆面积。

古印度的数学家，采用类似切西瓜的办法，把圆切成许多小瓣，再把这些小瓣对接成一个长方形，用长方形的面积去代替圆面积。

众多的古代数学家煞费苦心，巧妙构思，为求圆面积作出了十分宝贵的贡献。为后人解决这个问题开辟了道路。

16 世纪的德国天文学家开普勒，是一个爱观察、肯动脑筋的人。他把丹麦天文学家第谷遗留下来的大量天文观测资料，认真地进行整理分析，提出了著名的“ 开普勒三定律 ”。开普勒第一次告诉人们，地球围绕太阳运行的轨道是一个椭圆，太阳位于其中的一个焦点上。

开普勒当过数学老师，他对求面积的问题非常感兴趣，曾进行过深入的

研究。他想，古代数学家用分割的方法去求圆面积，所得到的结果都是近似值。为了提高近似程度，他们不断地增加分割的次数。但是，不管分割多少次，几千几万次，只要是有限次，所求出来的总是圆面积的近似值。要想求出圆面积的精确值，必须分割无穷多次，把圆分成无穷多等分才行。

开普勒也仿照切西瓜的方法，把圆分割成许多小扇形；不同的是，他一开始就把圆分成无穷多个小扇形。

因为这些扇形太小了，小弧 $\overset{\frown}{AB}$ 也太短了，所以开普勒就把小弧 $\overset{\frown}{AB}$ 和小弦 $\overset{\frown}{AB}$ 看成是相等的，即 $\overset{\frown}{AB}=\overline{AB}$。

小扇形 AOB 的面积 $=$ 小三角形 AOB 的面积 $=\frac{1}{2}R\times\overline{AB}$。

圆面积等于无穷多个小扇形面积的和，所以

$$\text{圆面积}S=\frac{1}{2}R\times\overline{AB}+\frac{1}{2}R\times\overline{BC}+\frac{1}{2}R\times\overline{CD}+\Lambda$$

$$=\frac{1}{2}R\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\Lambda\ \Lambda)$$

在最后一个式子中，各段小弧相加就是圆的周长 $2\pi R$，所以有

$$S=\frac{1}{2}R\times 2\pi R=\pi R^2$$

这就是我们所熟悉的圆面积公式。

开普勒运用无穷分割法，求出了许多图形的面积。1615 年，他将自己创造的这种求圆面积的新方法，发表在《葡萄酒桶的立体几何》一书中。

开普勒大胆地把圆分割成无穷多个小扇形，并果敢地断言：无穷小的扇形面积，和它对应的无穷小的三角形面积相等。他在前人求圆面积的基础上，向前迈出了重要的一步。

《葡萄酒桶的立体几何》一书，很快在欧洲流传开了。数学家们高度评价开普勒的工作，称赞这本书是人们创造求圆面积和体积新方法的灵感源泉。

一种新的理论，在开始的时候很难十全十美。开普勒创造的求圆面积的新方法，引起了一些人的怀疑。他们问道：开普勒分割出来的无穷多个小扇形，它的面积究竟等于不等于零？如果等于零，半径 OA 和半径 OB 就必然重合，小扇形 OAB 就不存在了；如果客观存在的面积不等于零，小扇形 OAB 与小三角形 OAB 的面积就不会相等。开普勒把两者看作相等就不对了。

面对别人提出的问题，开普勒自己也解释不清。

卡瓦利里是意大利物理学家伽利略的学生，他研究了开普勒求圆面积方法存在的问题。

卡瓦利里想，开普勒把圆分成无穷多个小扇形，这每个小扇形的面积到底等不等于圆面积，就不好确定了。但是，只要小扇形还是图形，它是可以再分的呀。开普勒为什么不再继续分下去了呢？要是真的再细分下去，那分到什么程度为止呢？这些问题，使卡瓦利里陷入了沉思之中。

有一天，当卡瓦利里的目光落在自己的衣服上时，他忽然灵机一动：唉，布不是可以看成为面积嘛！布是由棉线织成的，要是把布拆开的话，拆到棉线就为止了。我们要是把面积像布一样拆开，拆到哪儿为止呢？应该拆到直线为止。几何学规定直线没有宽度，把面积分到直线就应该不能再分了。于

是，他把不能再细分的东西叫做“不可分量”。棉线是布的不可分量，直线是平面面积的不可分量。

卡瓦利里还进一步研究了体积的分割问题。他想，可以把长方体看成为一本书，组成书的每一页纸，应该是书的不可分量。这样，平面就应该是长方体体积的不可分量。几何学规定平面是没有薄厚的，这样也是有道理的。

卡瓦利里紧紧抓住自己的想法，反复琢磨，提出了求圆面积和体积的新方法。

1635 年，当《葡萄酒桶的立体几何》一书问世 20 周年的时候，意大利出版了卡瓦利里的《不可分量几何学》。在这本书中，卡瓦利里把点、线、面，分别看成是直线、平面、立体的不可分量；把直线看成是点的总和，把平面看成是直线的总和，把立体看成是平面的总和。

卡瓦利里还根据不可分量的方法指出，两本书的外形虽然不一样，但是，只要页数相同，薄厚相同，而且每一页的面积也相等，那么，这两本书的体积就应该相等。他认为这个道理，适用于所有的立体，并且用这个道理求出了很多立体的体积。这就是有名的“卡瓦利里原理。”

事实上，最先提出这个原理的，是我国数学家祖暅。比卡瓦利里早 1000 多年，所以我们叫它“祖暅原理”或者“祖暅定理”。

阿贝尔与 n 次方程的代数解

同学们学过一元一次方程

ax=b（a≠0）

它的代数解是：$x = \frac{b}{a}$ （a≠0）

又学了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$（a≠0）

它的代数解（用方程的系数经过若干次代数运算而得到表示根的式子，叫做方程的代数解）是：

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ab}$$

这个求根公式看来很简单，也很容易学，但同学们可知道它的发现过程却经历了漫长的历史吗？

公元前 2000 年左右巴比伦人的泥板文书中说，求出一个数，使它与它的倒数的和等于一个已知数，即求出这样的一对数x和$\bar{x}$，使

$x\bar{x} = 1$且$x\bar{x} = b$，由此得出关于x的方程是

$x^2-bx+1=0$

他们作出（$\frac{b^2}{2}$），再作出$\sqrt{(\frac{b^2}{2})-1}$，于是得到解答

$x = \frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b^2}{2})-1}$或它的代数解是：

$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - 1}$$

这实际上是古巴比伦人得到的求根公式。但是当时不承认负数的存在，所以他们回避了负根。

希腊的丢番图（约前 246～330）则只承认一个正根，即使两个都是正根，也只取一个。

印度的波罗及摩及（约公元 598～665）在公元 628 年写成的《波罗摩修正体系》中，得到方程

$x^2+Px-q=0$

的一个根的求根公式是

$$x=\frac{\sqrt{P^2+4q-P}}{2}$$

到了 9 世纪乌兹别克数学家花刺子模（约公元 780～850）在他的《代数学》中第一次给出了一般的一元二次方程的解法，他承认有两个根，还允许无理根的存在，但他不认识虚数，所以不承认虚根。

法国数学家韦达（1540～1603）则知道一元二次方程在复数范围内恒有解。

我国数学家对一元二次方程的研究有特殊的贡献。秦汉时代的《九章算术》就有求方程 $x^2+34x-7100=0$ 的正根记载。

在 3 世纪，赵爽（约公元 222 年）注释《周髀算经》时，提出了 $x^2-bx+c=0$ 型的求根公式。也是世界上最早记录了二次方程的求根公式。

一般的三次方程的代数解的表达形式经历了 800 年之久，到了 16 世纪初，欧洲文艺复兴时代，才由意大利数学家给出。下面的三次方程的代数解公式，一般称为卡丹（1501～1576）公式：

方程 $x^3+px+q=0$ 的三个根是 y_1+z_1，$wy_1+w_2z_1$，$w^2y_1+wz_1$，

（其中$y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},z=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},yz=-\frac{q}{3},w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$w^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$）。

其实，发现这个公式的并不是卡丹。原来这里还有一段诱人深思的故事呢！

在意大利的波伦亚城有一位数学教授费洛，他首先发现了方程 $x^3+mx=n$（m，n 为正数）的解法，并于 1505 年把此方法传授给他的学生弗罗里都斯。

到了 1525 年，在意大利的威尼斯城举行了一次数学竞赛会，弗罗里都斯的对手塔尔塔里亚已经估计到对方会提出求解三次方程的问题，所以他就全力以赴的研究这个问题，他在比赛前的 8 天里以惊人的速度解决了 800 多年来没有解决的问题。在比赛过程，塔氏在两小时内解答了弗氏提出的 30 个问题，而最终取得了比赛的胜利，而弗氏却以回答不出塔氏的问题而宣告失败。

在这之后，塔氏更是专心致志的研究三次方程的问题，到 1541 年，他便找到了一般三次方程的代数解。这时卡丹请求塔氏告诉他这个公式，并保证不泄露秘密，于是塔氏便满足了卡丹的要求。但卡丹并没有遵守诺言，在 1545 年，卡丹在他的《大法》一书中公布了这个解法，所以就一直被误认为是卡丹公式，如果这个故事是真的，卡丹的为人品德也真是令人讨厌！

就在《大法》这本书里，卡丹还公布了他的学生费拉里发现的一般四次方程的代数解。

从二次方程到四次方程，人们通过变换，配方和因式分解等手段解决了一般的二、三、四次方程的代数解问题。例如：

$aX^2 + bX + c = 0$，将$X = Y - \frac{b}{2a}$代入可求出代数解；

$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0$，将$X = Y - \frac{b}{3a}$代入可求出代数解；

$aX^4 + bX^3 + cX^2c + dX + e = 0$，将$X = Y - \frac{b}{4a}$代入可求出代数解。

于是人们类比联想：一般的 n（n≥5）次方程可能求出它的代数解。

从 16 世纪中叶到 19 世纪末，当时几乎所有的数学家都坚持不懈地研究这个问题，人们发挥了一切聪明才智，但都没有找到解决问题的办法。

于是人们考虑重新认识这个问题，并且从反面提出问题：“一般 n（n≥5）次方程可能没有代数解”，而且持有这种怀疑的人越来越多。

拉格朗日（1736～1813）在回忆录中写道：“用根号解四次以上的方程的问题是一个不可能解决的问题，虽然，关于解法的不可能性，什么也没有证明。”高斯（1777～1855）在 1801 年的《专题论文》中也说过，这个问题也许是不能解决的问题。

拉格朗日有一个学生叫鲁菲尼在 1799～1813 年之间,曾经多次企图证明 n（n≥5）次方程没有代数解，但都没有成功，直到 1824 年，22 岁的挪威数学家阿贝尔（1802～1829）证明了这个猜想：“n（n≥5）次方程没有代数解”。

值得指出的是，阿贝尔虽然只活了 26 年零 8 个月，但在数学上的贡献是巨大的，正如一位数学家所说：“阿贝尔留下了一些思想，可供数学家们工作 150 年。”他在 1823 年发表第一篇论文，最先提出对一种积分方程的解法。1824 年发表了上述定理的证明，寄给高斯，没有受到重视（当时他的定理的叙述是：高于四次带有任意文字系数的方程不可能用代数一般的解法），1825～1826 年，阿贝尔去柏林，在那里结识了工程师、数学家 A·L·克列尔，成为他的知交和良师，并在克列尔创办的《纯粹数学与应用数学》杂志第一卷（1826 年）上发表阿贝尔关于五次方程研究的详尽内容，当然还有其他方面的论文。

为什么人们经过这么长时间的努力，才证明了“n（n≥5）次的方程没有代数解呢”？是否同不能正确地提出问题和认识问题有关呢？如果能较早地从反面提出问题，也许这个问题的解决会缩短一些时间呢！这个问题是否也给我们这样一个启示：当从正面考虑问题不得其解时，可从反面去思考和研究，这正是“正难则反”的思维策略！

令人着迷的四色问题

同学们，让我们来做这样一个试验：给地图着色。在我国的地图上，给每个省、直辖市涂上一种颜色，要求相邻的省或直辖市有不同的颜色，最少需要几种颜色就足够了？答案是四种！再让我们来看看在世界地图上，用不同的颜色区分开相邻的国家，最少用几种颜色就足够了？答案还是四种。

我们上边做的给地图着色的实验，100 多年前就已经有人做过了。大约在 1850 年，英国伦敦大学的学生居特里偶然发现：要区分英国地图上的州，有四种颜色就够了。他把这个发现告诉了弟弟，哥儿俩又进行了大量这方面的实验，发现有些地图用 3 种颜色，有些地图用 4 种颜色，但最多用 4 种颜色足以把共同边界的两个国家（或地区）区分开，即把相邻的国家涂上不同

的颜色。居特里相信这个发现是正确的，但他证明不了。于是去请教他的老师，他的老师也不能证明这个问题。后来在 1878 年，当时英国的数学权威凯利在伦敦数学会上正式提出了这个问题。这个问题被称为四色问题。

四色问题提出以后，吸引了许多人。不断有人声称自己已经解决了四色问题，但都被人找出了证明过程中的错误。四色问题的影响越来越大，更多的人热衷于这个问题，这期间有人证明了“ 五色定理 ”，即给地图着色，用 5 种颜色就可以把相邻的国家（或地区）区分开，但四色问题仍没有人能够解决。

著名的大数学家闵柯夫斯基在四色问题上还闹出过一个笑话呢。一次闵柯夫斯基的学生跟闵柯夫斯基提及四色问题，一向谦谨的闵柯夫斯基却口出狂言：四色问题没有解决，主要是没有第一流的数学家研究它。说着便在黑板上写了起来。他竟想在课堂上证明四色问题。下课铃响了，尽管黑板上写的密密麻麻，但还是没能解决问题。第二天上课的时候，正赶上狂风大作，雷电交加，闵柯夫斯基诙谐地说：老天也在惩罚我的狂妄自大，四色问题我解决不了。

从这以后，四色问题更出名了，成了数学上最著名的难题之一。由于问题本身的简单、易懂，使几乎每个知道这个问题的人都想解决它。并且一旦接触这个问题，就有点欲罢不能的感觉（当时有人称之为“ 四色病 ”），很多人为这个问题的解决献出了毕生的精力，这其中既有数学方面的专家，也有普通的数学爱好者。我们国内也有许多人为解决这个问题努力过，中国科学院数学研究所接到的声称自己已经解决了四色问题的文章，放在一起足有好几麻袋，可惜他们的证明都有错误。

到了本世纪 70 年代，四色问题的研究出现了转机。美国伊利诺斯大学的阿佩尔、哈肯等人在研究了前人各种证明方法和思想的基础后，认为现在数学家手里掌握的技巧，还不足以产生一个非计算机的证明。从 1972 年起，他们在前人研究的基础上，开始了计算机证明的研究工作。终于在 1976 年彻底解决了四色问题，整个证明过程在计算机上花费了 1200 个小时。

四色问题虽然解决了，但数学家心中多少还留有一点遗憾。用电子计算机解决四色问题，没有创造出数学家们所期望的新方法和思想。数学家还在期待着不借助任何工具，只依靠人本身智慧的“ 手工证明 ”。青少年朋友们，你们对四色问题的手工证明有兴趣吗？如果谁有兴趣，可要千万记住，先得好好学习，掌握足够的相关知识。用锤子和斧头这样的简单工具是造不出航天飞机的！

发现无理数

毕达哥拉斯大约生于公元前 580 年至公元前 500 年，从小就很聪明，一次他背着柴禾从街上走过，一位长者见他捆柴的方法与别人不同，便说：“ 这孩子有数学奇才，将来会成为一个大学者。 ”他闻听此言，便摔掉柴禾南渡地中海到泰勒斯门下去求学。毕达哥拉斯本来就极聪明，经泰勒一指点，许多数学难题在他的手下便迎刃而解。其中，他证明了三角形的内角和等于 180 度；能算出你若要用瓷砖铺地，则只有用正三角、正四角、正六角三种正多角砖才能刚好将地铺满，还证明了世界上只有五种正多面体，即：正 4、6、8、12、20 面体。他还发现了奇数、偶数、三角数、四角数、完全数、友数，

直到毕达哥拉斯数。然而他最伟大的成就是发现了后来以他的名字命名的毕达哥拉斯定理（勾股弦定理），即：直角三角形两直角边为边长的正方形的面积之和等于以斜边为边长的正方形的面积。据说，这是当时毕达哥拉斯在寺庙里见工匠们用方砖铺地，经常要计算面积，于是便发明了此法。

毕达哥拉斯将数学知识运用得纯熟之后，觉得不能只满足于用来算题解题，于是他试着从数学领域扩大到哲学，用数的观点去解释一下世界。经过一番刻苦实践，他提出“凡物皆数”的观点，数的元素就是万物的元素，世界是由数组成的，世界上的一切没有不可以用数来表示的，数本身就是世界的秩序。毕达哥拉斯还在自己的周围建立了一个青年兄弟会。在他死后大约 500 年间，他的门徒们把这种理论加以研究发展，形成了一个强大的毕达哥拉斯学派。

一天，学派的成员们刚开完一个学术讨论会，正坐着游船出来领略山水风光，以驱散一天的疲劳。这天，风和日丽，海风轻轻的吹，荡起层层波浪，大家心里很高兴。一个满脸胡子的学者看着辽阔的海面兴奋地说：“毕达哥拉斯先生的理论一点都不错。你们看这海浪一层一层，波峰浪谷，就好像奇数、偶数相间一样。世界就是数字的秩序。”“是的，是的。”这时一个正在摇桨的大个子插进来说：“就说这小船和大海吧。用小船去量海水，肯定能得出一个精确的数字。一切事物之间都是可以用数字互相表示的。”

“我看不一定。”这时船尾的一个学者突然提问了，他沉静地说：“要是量到最后，不是整数呢？”

“那就是小数。”“要是小数既除不尽，又不能循环呢？”

“不可能，世界上的一切东西，都可以相互用数字直接准确地表达出来。”

这时，那个学者以一种不想再争辩的口气冷静地说：“并不是世界上一切事物都可以用我们现在知道的数来互相表示，就以毕达哥拉斯先生研究最多的直角三角形来说吧，假如是等腰直角三角形，你就无法用一个直角边准确地量出斜边来。”

这个提问的学者叫希帕索斯，他在毕达哥拉斯学派中是一个聪明、好学、有独立思考能力的青年数学家。今天要不是因为争论，还不想发表自己这个新见解呢。那个摇桨的大个子一听这话就停下手来大叫着：“不可能，先生的理论置之四海皆准。”希帕索斯眨了眨聪明的大眼，伸出两手，用两个虎口比成一个等腰直角三角形说：

“如果直边是 3，斜边是几？”

“4。”

“再准确些？”

“4.2。”

“再准确些？”

“4.24。”

“再准确些呢？”

大个子的脸涨得绯红，一时答不上来。希帕索斯说：“你就再往后数上 10 位、20 位也不能算是最精确的。我演算了很多次，任何等腰直角三角形的一边与余边，都不能用一个精确的数字表示出来。”这话像一声晴天霹雳，全船立即响起一阵怒吼：“你敢违背毕达哥拉斯先生的理论，敢破坏我们学派的信条！敢不相信数字就是世界！”希帕索斯这时十分冷静，他说：“我

这是个新的发现，就是毕达哥拉斯先生在世也会奖赏我的。你们可以随时去验证。”可是人们不听他的解释，愤怒地喊着：“叛逆！先生的不肖门徒。”“打死他！批死他！”大胡子冲上来，当胸给了他一拳。希帕索斯抗议着：“你们无视科学，你们竟这样无理！”“捍卫学派的信条永远有理。”这时大个子也冲了过来，猛地将他抱起：“我们给你一个最高的奖赏吧！”说着就把希帕索斯扔进了海里。蓝色的海水很快淹没了他的躯体，再也没有出来。这时，天空飘过几朵白云，海面掠过几只水鸟，一场风波过后，这地中海海滨又显得那样宁静了。

一位很有才华的数学家就这样被奴隶专制制度的学阀们毁灭了。但是这倒真使人们看清了希帕索斯的思想价值。这次事件后，毕达哥拉斯学派的成员们确实发现不但等腰直角三角形的直角边无法去量准斜边，而且圆的直径也无法去量尽圆周，那个数字是 3.14159265358979……更是永远也无法精确。慢慢地，他们感觉后悔了，后悔杀死希帕索斯的无理行动。他们渐渐明白了，明白了直觉并不是绝对可靠的，有的东西必须靠科学的证明；他们明白了，过去他们所认识的数字“0”，自然数等有理数之外，还有一些无限的不能循环的小数，这确实是一种新发现的数——应该叫它“无理数”。这个名字反映了数学的本来面貌，但也真实的记录了毕达哥拉斯学派中学阀的蛮横无理。

由无理数引发的数学危机一直延续到 19 世纪。1872 年，德国数学家载德金从连续性的要求出发，用有理数的“分割”来定义无理数，并把实数理论建立在严格的科学基础上，从而结束了无理数被认为“无理”的时代，也结束了持续 2000 多年的数学史上的第一次大危机。

毕达哥拉斯学派的发现

提起“勾股定理”。人们便很容易与毕达哥拉斯联系起来，西方数学界一般把“勾股定理”叫做“毕达哥拉斯定理”。但据本世纪对于在美索不达米亚出土的楔形文字泥板书所进行的研究，人们发现早在毕达哥拉斯以前 1000 多年的古代巴比伦人就已经知道了这个定理。而且在中国的《周髀算经》中记述了约公元前 1000 年时，商高对周公姬旦的回答已明确提出“勾三、股四、弦五”。不过“勾股定理”的证明，大概还应当归功于华达哥拉斯。传说，他在得出此定理时曾宰杀了 100 头牛来祭缪斯女神，以酬谢神灵的启示。缪斯是神话中掌管文艺、科学的女神。

毕达哥拉斯是科学史上最重要的人物之一，他的思想不仅影响了柏拉图，而且还一直影响到文艺复兴时期的一些哲学家和科学家。

毕达哥拉斯曾旅居埃及，后来又到各地漫游，很可能还曾去过印度。在他的游历生活中，他受到当地文化的影响，了解到许多神秘的宗教仪式，还熟悉了它们与数的知识及几何规则之间的联系。旅行结束后，他才返回家乡撒摩斯岛。由于政治的原因。他后来迁往位于南意大利的希腊港口克罗内居住。在这里创办了一个研究哲学、数学和自然科学的团体，后来便发展成为一个有秘密仪式和严格戒律的宗教性学派组织。

毕氏学派认为，对几何形式和数字关系的沉思能达到精神上的解脱，而音乐却被看作是净化灵魂从而达到解脱的手段。

有许多关于毕达哥拉斯的神奇传说。如，他在同一时间会出现在两个不

同的地方，被不同的人看到；还有传说，当他过河时，河神站起身来向他问候：“你好啊，毕达哥拉斯”；还有人说，他的一条腿肚子是金子做的。毕达哥拉斯相信人的灵魂可以转生，有人为了嘲弄他的宗教教义而传言，一次当他看到一只狗正遭人打时，他便说：别打了，我从他的声音中已认出，我朋友的灵魂是附在了这条狗身上了。

如果有人要想加入毕氏团体，就必须接受一段时期的考验，经过挑选后才被允许去听坐在帘子后面的毕达哥拉斯的讲授。只有再过若干年后当他们的灵魂因为受音乐的不断熏陶和经历贞洁的生活而变得更加纯净时，才允许见到毕达哥拉斯本人。他们认为，经过纯化并进入和谐及数的神秘境界，可以使灵魂趋近神圣而从轮回转生中得到解脱。

毕氏学派企图用数来解释一切，不仅万物都包含数，而且认为万物就是数。他们发现，数是音乐和谐的基础。当一根琴弦被缩短到原来长度的一半时，拨动琴弦，音调将提高 8 度；比率为 3∶2 和 4∶3 时，相对应的是高 5 度和高 4 度的和声。和声就是由这样一些不同的部分组成的整体。他们认为，正是由于各种事物的数值比确定了它们分别是什么，并显示出彼此之间的关系。

毕氏学派在哲学上与印度古代哲学有相类似之处。都是把整数看作是人和物的各种性质的起因，整数不仅从量的方面而且在质方面支配着宇宙万物。他们对数的这种认识和推崇，促使他们热衷于研究和揭示整数的各种复杂性质，以期来左右和改变自己的命运。

他们对整数进行了分类。如整数中包含有奇数、偶数、质数、亲和数及完全数等等。

他们注意到整数 48 可以被 2、3、4、6、8、12、16、24、整除，这 8 个数都是 48 的因子，这些因子的和是 75；奇妙的是 75 的因子有 3、5、15、25，而它们的和又恰好是 48。48 与 75 这一对数叫做“半亲和数”。不难验算出 140 与 195 也是一对半亲和数。考虑到 1 是每个整数的因子，把除去整数本身之外的所有因子叫做这个数的“真因子”。如果两个整数，其中每一个数的真因子的和都恰好等于另一个数，那么这两个数，就构成一对“亲和数”。

220 与 284 是毕达哥拉斯最早发现的一对亲和数，同时也是最小的一对亲和数。因为 220 的真因子是 1、2、4、5、10、11、20、22、44、55、110，而它们的和是 284。284 的真因子是 1、2、4、71、142，其和恰好是 220。有人曾经把亲和数用于魔术、法术、占星学和占卦上，使它带有迷信和神秘的色彩。如认为若两个人都佩带上分别写着这两个数的护符，就一定保持良好的友谊，这当然是非常滑稽可笑的。

有趣的是，后来人们总保持着对亲和数研究的兴趣。1636 年，法国数学家费马发现了第二对亲和数，它们是 17962 与 18416。两年后笛卡儿找出了第三对亲和数。瑞士的大数学家欧拉曾系统地去寻找亲和数，1747 年他一下子找出了 30 对，3 年后他又把亲和数增加到了 60 对。令人惊奇的是，除去 220 与 284 之外最小的一对亲和数 1184 与 1210 竟然被这些数学大师们漏掉了。它被一个 16 岁的意大利男孩帕加尼尼在 1886 年发现。至今，已经知道的亲和数已有 1000 对以上。

更有趣的是人们还发现了亲和链：

2115324，3317740；

3649556，2797612。

由于第一个数的因子之和是第二个数，第二个数的因子之和是第三个数……第四个数的因子之和又恰好是第一个数，它们是一个四环亲和链。一些构成亲和链的数，只要给出其中的一个，便可以计算出其他的数。如 12496 与其他四个数构成一个五环亲和链。有计算器的读者不妨试算一下，补上其余的四个数。

其他与占卦臆测有联系的是完全数。完全数的真因子之和是它自己，就好像自己和自己是“一对”亲和数。最小的完全数是 6=1+2+3。毕氏信徒们认为，数具有象征性的含义。例如，4 是公正或报应的数，表示不偏不倚。上天创造世界，6 就是个完全数。整个人类是诺亚方舟上的神灵下凡，这一创造是不完善的，因为 8 不是完全数，它大于它的真因子和：1+2+4。像 4、8 这样的数叫做亏数。相反凡小于其因子和的整数叫做盈数。

最小的三个完全数是 6，28，496。直到 1952 年人们才发现 12 个完全数。欧几里德的《原本》第九卷的最后一个命题是，证明：如果 2^n-1 是一个质数，则 2^n-1（2^n-1）是一个完全数。由这个公式所给出的完全数都是偶数。后来大数学家欧拉证明了每一个偶完全数必定是这种形式的。人们自然会问，是否还有其他的完全数？即有没有奇完全数？但至今还没有人能够回答这个问题。

1952 年，借助 SWAC 数字计算机，又发现了五个完全数：1957 年用瑞士的 BESK 计算机发现了另外一个；后来有人用 IBM7090 计算机又发现了两个。至今为止已知道的完全数已有 27 个。毕氏学派是一个带有神秘色彩的宗教性组织，但是他们对于数学的研究确实作出了重大贡献。由于华达哥拉斯的讲授都是口头的，按照他们的习惯，对于各种发现或发明都不署个人姓名，而是都归功于其尊敬的领导者，所以很难辨别出他们研究的成果究竟是由谁来完成的。毕氏学派后来在政治斗争中遭到失败，毕达哥拉斯逃到塔林敦后，终于还是被杀害。他死后，他的学派的影响却仍然很大，其学派又延续了 200 年之久。

勾股定理

勾股定理，即直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方。这是平面几何中一个最基本、最重要的定理，国外称为毕达哥拉斯定理。可是，我国周朝初年（约公元前 1100 年）的数学家商高早就讲到过“勾广三，股修四，径隅五”，这实际上就是勾股定理的一个特例。根据我国史书记载，早在公元前五六世纪，就用过勾方加股方等于弦方的公式，不过没有证明过程。我国对勾股定理认识的发展是在西汉时期。这一时期的研究既有理论又有应用，在《九章算术》中有详细的记载。而定理的证明，三国时期（公元 3 世纪）赵爽所著的《勾股圆方图注》进行了详细的记述。

赵爽在这本书中，画了一个弦图：两个全等的直角三角形（三角形涂上朱色，它的面积叫做“朱实”）合起来形成矩形，四个这样的矩形合成一个正方形，中间留出了一个正方形的空格（涂上黄色，其面积叫做“中黄实”，也叫“差实”）。

赵爽释注道：“色股各自乘，并之为弦实，开方除之即弦。”开方除之是当时开方运算的术语。上面这句话实际上就是勾股定理即：$a^2+b^2=c^2$。他又巧妙地证明出：“按弦图，又可以勾股乘朱实二，信之为朱实四。以勾股

之差自相乘中黄实。加差实亦成弦实。”

即 $2ab+(b-a)^2=c^2$

化简便得出：$a^2+b^2=c^2$

这个证明不但是勾股定理最早的严谨的证明，而且也是有史以来勾股定理证明中最巧妙的一个。

勾股定理作为几何学中一条重要的定理，古往今来，有无数人探索过它的证明方法。据说，它的证明方法有 500 来种。我国在清朝初年有一位数学家叫梅文鼎（1633～1712 年），他发明的一种证法极为简便，只需用一张硬纸，剪上几剪刀，一拼就可证明出来，读者如有兴趣不妨试一试。在 1940 年，一本名为《毕达哥拉斯命题》的书中，就专门搜集了 367 个不同的证法。其中有一个证法最令人感兴趣，它是由一位美国总统作出的！

根据当代著名数学科普作家马丁·加德纳的报道，1876 年 4 月 1 日，波士顿出版的一本周刊《新英格兰教育杂志》上刊出了勾股定理的一个别开生面的证法，编者注明资料是由俄亥俄州共和党议员詹姆士·A·加菲尔德提供的，是他和其他几位议员一起做数学游戏时想出来的，并且得到了两党议员的一致同意。后来，加菲尔德被选为美国总统。于是他的证明也就成为人们津津乐道的一段珍闻轶事了（据说这是美国总统对数学的唯一贡献）。

加菲尔德的证法的确十分干净利落。作直角三角形 ABC，设其边长分别为 BA=c 是斜边，AC=b，BC=a。作 AE⊥BA，并使 AE=BA，再延长 CA 到 D，使 AD=BC=a，连 D、E，则四边形 CBED 梯形，

其面积等于 $\frac{1}{2}DC(BC+ED)=\frac{1}{2}(a+b)^2$

求证△DAE 与△CBA 是全等三角形，于是△DAE、△CBA 与△ABE 的面积之和等于 $\frac{1}{2}C^2+2\bullet\frac{ab}{c}$

由于三个三角形面积之和即是梯形的面积，因此可得出等式：

$$\frac{1}{2}(a+b)^2=\frac{1}{2}c^2+ab$$

化简后即得等式：$a^2+b^2=c^2$

这样勾股定理便得到证明。

人们在研究勾股定理时还发现一个有趣现象。古巴比伦人就知道三条边为下列各数的一些三角形：

120，119，169；

3456，3367，4825；

4800，4601，6649；

13500，12709，18541；

72，65，96；

360，319，481；

2700，2291，2541；960，799，1249；

600，481，769；

6480，4961，8161；

60，45，75；

2400，1697，2929；

240，161，289；

2700，1771，3229；

90，56，106。

以上每个数组中的数，我们称为勾股数。

一般说来，如果正数 x，y，z 能满足下列不定方程

$x^2+y^2=z^2$（1）

则这些整数叫做勾股数。

那么怎样求出勾股数呢？我们再观察几个简单的直角三角形的边：

3，4，5；5，12，13；

7，24，25；9，40，41；

11，60，61；13，84，85；

……

从这些数中，可发现以下规律：

第一个数是奇数，第二个数是第一个数的平方减 1 再除以 2，第三个数是第一个数的平方加 1 再除以 2，即设 m 为奇数，则一般会有：

$$m^2+(\frac{m^2-1}{2})^2=(\frac{m^2+1}{2})^2$$

于是就有

$$m^2+(\frac{m^2-1}{2})^2=(\frac{m^2+1}{2})^2 \quad (2)$$

其中 m 为奇数。

但这只是一部分勾股数的规律。

（2）式两边同乘以 4，则变形得：

$(2m)^2+(m^2-1)^2=(m^2+1)^2$（3）

很显然（3）式不论 m 是奇数还是偶数，等式都能成立。

然而由（3）式仍不能得到全部的勾股数。

那么怎样才能得到全部的勾股数呢？在公式（3）中，m 为任意自然数，1 是一个特殊的自然数，若它也变成任意自然数，设它变成 n，为了使（3）式保持恒等，（3）中的第一项 $(2m)^2$ 应变成 $(2mn)^2$，则有

$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2$（4）

其中 m＞n，（m，n）=1 且 m 除以 n 的余数不等于 2。

那么，可以证明出式（4）包括了全部勾股数。对于勾股定理的深入研究，人们不仅要问

$x^n+y^n=x^n$（5）

其中 n＞2，n 是自然数。（5）式是否也有正整数解呢？这就是到现在还仍未解决的“费马猜想”。

通过上面的介绍，各位读者是否觉得勾股定理十分有趣呢？

欧几里得妙法

数论与几何学一样，是最古老的数学分支。欧几里得的《几何原本》的七、八、九章，讲的就是数论。

对于素数的研究，在数论中占有很重要的位置。

我们知道，正整数是由 1、素数（也叫质数）与合数这三类数组成的。一个大于 1 的正整数，如果只能被 1 和它本身整除，不能被其他正整数整除，

这样的正整数就叫做素数；否则就叫做合数。在整数 1、2、3、4、……中，去掉 1 与全部合数，所得的表：

2，3，5，7，11，13，17，称为素数表。在素数表中，除了第一个素数 2，其余都是奇素数。现在世界上最好的素数表是查基尔编的，列有大不大于 50000000（五千万）的素数。

关于素数，最古老的问题是：素数有多少个？欧几里得在《几何原本》中，最先证明了素数有无穷多个。他的巧妙的证明方法，闪耀着智慧的光辉。2000 多年来，人们虽也提出过一些别的证法，但是直到今天，还是欧几里得的证明方法最好。

欧几里得证明素数有无穷多个的方法，大意是：

假若素数只有有限多个，设最大的一个是 P，从 2 到 P 的全体素数是：

2，3，5，7，11……，P。

所有的素数都在这里，此外再没有别的素数了。

现在，我们来考察上面从 2 到 P 的全体素数相乘、再加上 1 这个数，设它是 A，即

$A=2\times3\times5\times7\times11\times\cdots\cdots\times P+1$。

A 是一个大于 1 的正整数，它不是素数，就是合数。

如果 A 是素数，那么，就得到了一个比素数 P 还要大的素数，这与素数 P 是最大素数的假设矛盾。

如果 A 是合数，那么，它一定能够被某个素数整除，设它能被 g 整除。

因为 A 被从 2 到 P 的任何一个素数除，余数都是 1，就是都不能整除，而素数 g 是能整除 A 的，所以素数 g 不在从 2 到 P 的全体素数之中。这说明素数 g 是一个比素数 P 更大的素数，这又与 P 是最大的素数的假设矛盾。

上面的证明否定了素数只有有限多个的假定，这就证明了素数是无穷多个。

这个证明的构思非常巧妙，它的基本思路是：既然对于无论多大的素数，都一定有比它更大的素数，那当然素数就是无穷多个了。

素数虽然有无穷多个，但是在自然数中，它是排列得相当稀的。人们证明了这样一个道理：无论给定一个多大的正整数，比方说 100 亿万，一定能找到一个正整数，在这个正整数中，一个素数也没有。如果你不是说 100 万，而是说 100 亿万，这个结论也成立。

这个定理的证明，在构思上与证明素数无穷相象。

素数虽然有无穷多个，但人们能具体写出来的，总是有限个。因此，找一个比现在所知道的最大素数更大的素数，是人们经常探讨的难题之一。

素数类型

在对素数的长期研究中，有几种类型的素数特别受到重视，这里介绍两种素数的类型 Rn 与 Mn。

$$Rn=\underbrace{111\cdots11}_{n个1}$$

是一个 n 位数，n 位都是 1。R_n 如果是素数，就称为 R_n 型的素数，例如 $R_2=11$ 就是 R_n 型的素数。显然，如果 R_n 是素数，n 必定是素数。

这样的素数一共发现了四个，即 R_2，R_{19}，R_{23}，R_{317}。从发现 R_{23} 到发现

R_{317}，中间经历了 50 年的时间。R_{317}，这个素数，是 1978 年初，由加拿大数学教授威廉斯证明的。他在检验 R_{317} 不可能有任何别的素数因子时，是用计算机来检验的。现在研究数论，大量的计算都是用电子计算机来完成的。

目前，人们猜想下一个 Rn 型的素数是 R_{1031}。

凡是形状是 2^R-1 的数记作 Mn，叫做麦什涅数，如果是素数，就叫做麦什涅素数。例如 $M_2=3$，$M_3=7$，$M_5=31$ 等是麦什涅素数。

人们证明了：如果 Mp 是麦什涅素数，p 一定是素数。但是，不能认为 p 是素数，Mp 就是麦什涅素数。例如 $M_{11}=2^{11}-1=2047=23\times89$，就不是麦什涅素数。

1978 年底，美国加利福尼亚大学的两个学生尼克尔和诺尔，利用电子计算机证明了 M_{21701} 是素数。$M_{2170}=2^{21701}-1$，是当时能写出来、并且能加以证明的最大素数。

我国在报导这一素数时，曾有过这么一段故事：

1978 年 11 月 21 日，我国有报纸刊登了：

“［法新社美国加州赫沃兹十一月十五日电］两位美国学生发现了最大的已知质数 2^{21701}。”

报纸出版没几天，这家报纸的编辑部和很多科技报刊以及许多大学的数学系，就收到了大量的群众来信，内容主要是指出：

2^{21701} 肯定是合数（2 的倍数），怎么能是素数呢？

后来，有的报刊更正说，新发现的最大已知素数，应该是 $2^{21701}-1$，报纸上把 $2^{21701}-1$ 的“-1”都丢了。

紧接着，一些数学教师就围绕着这个数据，出了一些供青少年解答的有趣的数学题目。比如

$2^{21701}-1$ 有多少位？头两位与末两位各是什么数？（答：有 6533 位；头两位是 44，末两位是 51。）

$2^{21701}+1$ 是素数吗？你能不能证明：若 2^m+1 是素数，则 $m=2^n$。

到 1979 年底为止，人们已知的最大素数是 $2^{44497}-1$。

值得注意的是：数学家在判断具体的 Rn、Mn 和 Fn 是不是素数时，虽然一般都要借助于大型电子计算机，但是困难的研究工作，还得靠人来完成。

例如，有人已经证明了 $2^{16384}+1$（即 $F_{14}=2^{2^{14}}+1$）是一个合数，可是无论用现有的什么样的计算机，也找不出它的任何一个因子来。因为人们还没有把这个问题，转化到计算机能帮得上忙的程度。

斐波那契的数列

中世纪最有才华的数学家斐波那契（1175 年～1259 年）出生在意大利比萨市的一个商人家庭。因父亲在阿尔及利亚经商，因此幼年在阿尔及利亚学习，学到不少时尚未流传到欧洲的阿拉伯数学。成年以后，他继承父业从事商业，走遍了埃及、希腊、叙利亚、印度、法国和意大利的西西里岛。

斐波那契是一位很有才能的人，并且特别擅长于数学研究。他发现当时阿拉伯数学要比欧洲大陆发达，因此有利于推动欧洲大数学的发展。他在其他国家和地区经商的同时，特别注意搜集当地的算术、代数和几何的资料。回国后，便将这些资料加以研究和整理，编成《算经》（1202 年，或叫《算

盘书》）。《算经》的出版，使他成为一个闻名欧洲的数学家。继《算经》之后，他又完成了《几何实习》（1220 年）和《四艺经》（1225 年）两部著作。

《算经》在当时的影响是相当巨大的。这是一部由阿拉伯文和希腊文的材料编译成拉丁文的数学著作，当时被认为是欧洲人写的一部伟大的数学著作，在两个多世纪中一直被奉为经典著作。

在当时的欧洲，虽然多少知道一些阿拉伯记数法和印度算法，但仅仅局限在修道院内，一般的人还只是用罗马数学记数法而尽量避免用“零”。斐波那契的《算经》，介绍了阿拉伯记数法和印度人对整数、分数、平方根、立方根的运算方法，这部著作在欧洲大陆产生了极大的影响，并且改变了当时数学的面貌。他在这本书的序言中写道：“我把自己的一些方法和欧几里得几何学中的某些微妙的技巧加到印度的方法中去，于是决定写现在这本 15 章的书，使拉丁族人对这些东西不会那么生疏。

在斐波那契的《算经》中，记载着大量的代数问题及其解答，对于各种解法都进行了严格的证明。下面是书中记载的一个有趣的问题：有个人想知道，一年之内一对兔子能繁殖多少对？于是就筑了一道围墙把一对兔子关在里面。已知一对兔子每个月可以生一对小兔子，而一对兔子出生后在第二个月就开始生小兔子。假如一年内没有发生死亡现象，那么，一对兔子一年内能繁殖成多少对？

现在我们先来找出兔子的繁殖规律，在第一个月，有一对成年兔子，第二个月它们生下一对小兔，因此有二对兔子，一对成年，一对未成年；到第三个月，第一对兔子生下一对小兔，第二对已成年，因此有三对兔子，二对成年，一对未成年。月月如此。

第 1 个月到第 6 个月兔子的对数是：

1，2，3，5，8，13。

我们不难发现，上面这组数有这样一个规律：即从第 3 个数起，每一个数都是前面两个数的和。若继续按这规律写下去，一直写到第 12 个数，就得：

1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233。

显然，第 12 个数就是一年内兔子的总对数。所以一年内 1 对兔子能繁殖成 233 对。

在解决这个有趣的代数问题过程中，斐波那契得到了一个数列。人们为纪念他这一发现，在这个数列前面增加一项“1”后得到数列：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，……叫做“斐波那契数列”，这个数列的任意一项都叫做“斐波那契数”。

这个数列可以由下面递推关系来确定：

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad (n \geq 3) \end{cases}$$

另外，我们还可以利用等比数列的性质，推导出斐波那契数列的一个外观比较漂亮的通项公式：

$$an = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$$

读者可以用数学归纳法去加以证明。

在美国《科学美国人》杂志上曾刊登过一则有趣的故事：世界著名的魔

术家兰迪先生有一块长和宽都是 13 分米的地毯，他想把它改成 8 分米宽、21 分米长的地毯。

他拿着这块地毯去找地毯匠奥马尔，并对他说：“我的朋友，我想请您把这块地毯分成四块，然后再把它们缝在一起，成为一块 8 分米×21 分米的地毯。”奥马尔听了以后说道：“很遗憾，兰迪先生。您是一位伟大的魔术家，但您的算术怎么这样差呢！13×13=169，而 8×21=168，这怎么办得到呢？”兰迪说：“亲爱的奥马尔，伟大的兰迪是从来不会错的，请您把这块地毯裁成这样的四块。”

然而奥马尔照他所说的裁成四块后。兰迪先生便把这四块重新摆好，再让奥马尔把它们缝在一起，这样就得到了一块 8 分米×21 分米的地毯。

奥马尔始终想不通：“这怎么可能呢？地毯面积由 169 平方分米缩小到 168 平方分米，那一平方米到哪里去了呢？”

将四个小块拼成长方形时，在对角线中段附近发现了微小的重叠。正是沿着对角线的这点叠合，而导致了丢失一个单位的面积。读者不妨自己用纸试一下。

涉及到四个长度数 5，8，13，21 都是斐波那契数，并且 $13^2=8\times21+1$，$8^2=5\times13-1$。多做几次上述的试验，就可以发现斐波那契数列的一个有趣而重要的性质：

$a^2_n=a_{n-1}\cdot a_{n+1}\pm1$（$n\geq2$）

除此之外，斐波那契数列还有一些有趣的性质，例如：

$n^2_{m+n}-a^2_{m-n}=a^{2m}\cdot a_{2n}$

若用[i]表示不大于 i 的最大非负整数，i 为非负实数。$C^0_n=1$，而 $C^n_{n-j}=0$，其中 j、n 为非负整数。则斐波那契数列的前 n 项和 S_n 为：

$$S_n=\sum_{j=0}^{(\frac{n}{2})}C^j_{n-i}(n=D,1,2\Lambda)$$

有兴趣的话，读者可以证明一下，或者参阅有关的书籍。

斐波那契数列在实际生活中有非常广泛而有趣的应用。除了动物繁殖外，植物的生长也与斐波那契数有关。数学家泽林斯基在一次国际性的数学会议上提出树生长的问题：如果一棵树苗在一年以后长出一条新枝，然后休息一年。再在下一年又长出一条新枝，并且每一条树枝都按照这个规律长出新枝。那么，第 1 年它只有主干，第 2 年有两枝，第 3 年就有 3 枝，然后是 5 枝、8 枝、13 枝等等，每年的分枝数正好是斐波那契数。

生物学中所谓的“鲁德维格定律”，也就是斐波那契数列在植物学中的应用。

从古希腊直到现在都认为在造型艺术中有美学价值，在现代优选法中有重要应用的“黄金率”，实际和斐波那契数列密切相关。

实际上，黄金率 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.618$。这样，便会产生如下的单因素优选法中的分数法：

1.所有可能试验个数恰好是 a_n-1 个

这时将前两个试验点放在试验范围的 $\frac{a_n-1}{a_n}$ 和 $\frac{a_n-2}{a_n-1}$ 位置上，也就是

选在第 a_n-1 点和第 a_n-2 点上作试验。比较这两个试验结果；如果第 a_n-1 点好，就划去第 a_n-2 点以下的试验范围；如果第 a_n-2 点好。就划去第 a_n-1 点以上的试验范围。在留下的试验范围中，还剩下 $a_{n-1}-1$ 个试验点，另一个是下一步要作的新试验点。两点比较后，和前面作法一样，由坏点将试验范围切开，短的一段不要，留下包含好点的长的一段。这时新的试验范围只有 $a_{n-2}-1$ 个试验点了。由此类推，直到试验结束为止。

显然，用分数安排上述试验，在 a_n-1 个可能的试验中，最多只须作 n-1 个试验就能找到它们中的最好的点。

2.所有可能的试验个数大于某一个 a_{n-1}，而小于 $a_{n+1}-1$

此时，只须在试验范围内虚设几个试验点，凑成 $a_{n+1}-1$ 个试验。于是，这类问题也就归结为第 1 种情况，就可按照上述方法去处理了。

谈谈π和 e

公元前 550 年，希腊数学家毕达哥拉斯发现毕氏定理（即我国发现的勾股定理），他当时非常高兴，曾杀猪宰牛，广宴宾客，以示庆贺。在应用勾股定理求直角三角形的某一边时，就要把一个数开平方，这时可能开得尽，也可能开不尽，若开不尽便出现了无理数。

无理数分为根数和超越数两种，其中π和 e 是两个重要的超越数。如果一个数是某个有理系数的多项式的根，这个数叫做代数数，否则就叫做超越数。

首先说π。

π，在国外又叫鲁道夫数，在我国却叫祖率、环率、圆率等。

最先得出π～3.14 的是希腊的阿基米德（约公元前 240 年），最先给出π小数后面四位准确值的是希腊人托勒密（约公元前 150 年），最早算出π小数后七位准确值的是我国的祖冲之（约 480 年），1610 年荷兰籍德数学家鲁道夫应用内接和外切正多边形计算π值，通过 2^{62} 边形计算π到 35 位小数，花费了毕生精力，1630 年格林贝格利用斯涅耳的改进方法计算π值到 39 位小数，这是利用古典方法计算π值的最重要尝试。

以上都是古典方法计算π值。

在1706年，丁·麦金利格列格里的级数$\operatorname{arctg}x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^3}{7}+\cdots\cdots$

（$|x|\leq 1$）和下面的关系：

$\frac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}(\frac{1}{5})-\operatorname{arctg}(\frac{1}{8})$计算出了π的100位小数。

1884年，德国人Z·达什利用格列格里的$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}(\frac{1}{5})+\operatorname{arctg}(\frac{1}{8})$

计算出π的准确的 200 位数字。

值得提出的是，达什 1824 年生于汉堡，只活了短短的 37 年，便离开了人世，他是一个闪电般的计算者，是一位最了不起的人工计算者，他曾在 54 秒钟内便完成了两个 8 位数的乘法，在 6 分种内完成了两个 20 位数的乘法，在 40 分钟内完成了两个 40 位数的乘法；他曾在 52 分钟内算出一个 100 位数的平方根。达什的这种非凡的计算才能在他制作 7 位对数表和从 7000000 到

10000000 之间的数的因子表便得到了最有价值的充分的运用。

1873 年，英国人威廉·桑克斯利用麦新的公式计算π到 70 位。

1961 年，美国的雷思奇和 D·桑克斯用电子计算机得出π值的 100000 位数字。

1706 年，英国的威廉·姆士首先使用π这个符号，用来表示圆周和直径的比值，但只是在欧拉于 1737 年采用了这方法以后，π才在这种情况下得到了普遍的应用。

π在科学中的应用是极为广泛的，但有时它的出现也会是意想不到的。例如，1777 年，法国数学家毕封做过一个“小针实验”：先在桌上铺一张等距为平行横线的纸，再准备很多长为 2㎝ 的小针，然后将针随便地掷在纸上，掷完后，再将投掷次数除以针与平行线交叉的次数，却惊奇地发现：其所得值竟接近π！π，竟在一个与圆“无关”的问题中奇迹般地出现了。

我们再来说 e。

在中学数学书中这样提出：以 e 为底的对数叫做自然对数。那么 e 到底有什么实际意义呢？

1727 年，欧拉最先用 e 作为数学符号使用，后来经过一个时期人们又确定用 e 作为自然对数的底来纪念他。有趣的是，e 正好是欧拉名字第一个小写字母，是有意的还是偶然巧合？现已无法考证！

e 在自然科学中的应用并不亚于π值。像原子物理和地质学中考察放射性物质的衰变规律或考察地球年龄时便要用到 e。

在用齐奥尔科夫斯基公式计算火箭速度时也会用到 e，在计算储蓄最优利息及生物繁殖问题时，也要用到 e。

像电容器的充放电过程，也是按以 e 为底的指数规律变化的，以电容器放电为例，电容器的电压变化是随时间 t 作指数衰减的，即

$$V_c = V_0 e^{\frac{t}{rc}}$$

同π一样，e 也会在意想不到的地方出现，例如：“将一个数分成若干等份，要使各等份乘积最大，怎么分？”要解决这个问题便要同 e 打交道。答案是：使等分的各份尽可能接近 e 值。如，把 10 分成 10÷e=3.7 份，但 3.7 份不好分，所以分成 4 份，每份为 10÷4=2.5，这时 2.5^4=39 乘积最大，如分成 3 或 5 份，乘积都小于 39。e 就是这样神奇的。

1792 年，15 岁的高斯发现了素数定理：“从 1 到任何自然数 N 之间所含素数的百分比，近似等于 N 的自然对数的倒数；N 越大，这个规律越准确。”这个定理到 1896 年才由法国数学家阿达玛和几乎是同一时期的比利时数学家布散所证明。以 e 为底还有很多优越性。如以 e 为底编制对数表最好；微积分公式也具有最简的形式。

有趣的是，π和 e 虽不能用有限的式子表示出来，但却可用无穷级数表示：

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \Lambda$$

$$\pi = 4(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \Lambda\ \Lambda\ )$$

要补充说明的是：1882 年德国数学家林德曼首先证明了π是超越数，从而完全否定了“化圆为方”作图的可能性。1844 年，法国数学家刘维尔最先

推测 e 是超越数，一直到了 1873 年才由法国数学家爱米特证明 e 是超越数。这样人们逐步认识了有理数、无理数、代数数、超越数，建立了一个完整的实数系统。它的意义是十分巨大的。

出入相补原理

我国古代几何学不仅有悠久的历史，丰富的内容，重大的成就，而且有一个具有我国自己的独特风格的体系，和西方的欧几里得体系不同。这一几何体系的全貌还有待于发掘清理，本文仅就出入相补原理这一局部方面，就所知提出几点，主要根据是流传至今的以下各经典著作：

《周髀算经》（简称《周髀》），

《九章算术》（简称《九章》），

刘徽《九章算术注》（简称《刘注》），

《海岛算经》（简称《海岛》），

赵爽《日高图说》和《勾股圆方图说》（简称《日高说》和《勾股说》）。

田亩丈量和天文观测是我国几何学的主要起源，这和外国没有什么不同，二者导出面积问题和勾股测量问题。稍后的计算容积、土建工程又导出体积问题。

我国古代几何学的特色之一是，依据这些方面的经验成果，总结提高成一个简单明白、看起来似乎极不足道的一般原理——出入相补原理，并且把它应用到形形色色多种多样的不同问题上去。

以下将列举这些不同的应用。

所谓出入相补原理，用现代语言来说，就是指这样的明显事实：一个平面图形从一处移置他处，面积不变。又若把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关系。立体的情形也是这样。

应用这一原理，容易得出三角形面积等于高底相乘积的一半这一通常的公式，由此以定任意多角形的面积。作为另一简单实例，，如果看作把△ACD 移置△ACB，又把Ⅰ、Ⅱ各移到Ⅰ′、Ⅱ′，那么依出入相补原理有：

Ⅲ=Ⅲ′，□PC=□BO，……（指面积相等）由此得

PO×OS=RO×OQ，PQ×QC=RB×BC，……而 PO=AR，OS=QC，PQ=AB，RB=OQ，……因而 AR：OQ=RO：QC，AB：OQ=BC：QC，……就是相似勾股形 ABO 和 OQC、ABC 和 OQC 的相勾股成比例。并且可以导出其他相应部分的比例关系。

以上这些极简单的结果虽然没有在《九章》中明白说出，但是曾经多处用这些关系来解决各种具体问题。

在《周髀》中，就有用两表测日影以求日高的方法，计算的公式是：

$$日高=\frac{表高\times表距}{影差}+表高$$

其中 A 是日，BI 是地平面，ED、GF 是先后两表，DH 和 FI 是日影。《海岛》改测日高为测海岛的高，同图 AB 是海岛，H、I 是人目望岛顶和两表上端相参合的地方，于是日高公式成为：

$$岛高=\frac{表高\times表距}{表目距的差}+表高$$

明末耶稣会传教士利玛窦（1552～1610）来我国，他的主要学术工作之

一是介绍欧几里得几何体系。他曾口授《测量法义》一书，其中载有和海岛题完全类似的一题。在他所作的证明中，需要在 FI 上取一点 M 使（4）式成立，再用比例理论作证。按常理来说，利玛窦应该作平行线而取 M′使 FM′=DH，但是他一反欧几里得惯例而和我国古代传统不谋而合，颇使人迷惑不解。

在《周髀》和《九章》中，都已经明确给出了勾股定理的一般形式：勾^2+股^2=弦^2。虽然原证不传，但是据《勾股说》以及《刘注》，都依出入相补原理证明，并且有遗留到现在可以用来作证的赵爽残图，这几方面互相参照，原证应该大致如下：

勾股形是 ABC，BCED 是勾方，EFGH 是股方，把二者的和 DBCFGH 中的△IBD 移到△ABC，△GIH 移到△GAF，就得到 ABIG=弦^2，由此就得到勾股定理。欧几里得《几何原本》中勾股定理的证明，其中要先证有关三角形全等形以及三角形面积的一些定理，为此要作不少准备工作，因而在《几何原本》中直到卷一之末出现这一定理，而在整个《几何原本》中几乎没有用到。而在我国，勾股定理在《九章》中已经有多种多样的应用，成为 2000 来年数学发展的一个重要的出发点。

在东西方的古代几何体系中，勾股定理所占的地位是颇不相同的。勾、股、弦和它们之间的和差共九个数，只须知道其中的二个就可以求得其他几个。

除勾、股、弦互求就是开方之外，《九章》勾股章中有不少这方面的问题：

第一，知股弦差、勾，求股、弦（五题）；

第二，知勾股差、弦，求勾、股（一题）；

第三，知股弦差、勾弦差，求勾、股、弦（一题）；

第四，知股弦和、勾，求股、弦（一题）。

各题都列出了一般公式，《勾股说》的许多命题也属这一类，《刘注》还给出了证明，公式的来历和证明的方法都依据出入相补原理，有的也用比例作别证。

事实上，《周髀》中已经给出了若干具体数目的平方根，而在《九章》中，更详细说明了开平方的具体方法步骤。这一方法的根据是几何的，就是出入相补原理。

试以求 55225 的平方根为例。这相当于已知正方形 ABCD 的面积就是 55225，求边 AB 的长，。按我国记数用十进位位值制。因 AB 显然是一个百位数，所以求 AB 的方法就是依次求出百位数字、十位数字和个位数字。先估计（《九章》中用“议”字）百位数字是 2，因而在 AB 上截取 AE=200，并且作正方形 AEFG，它的边 EF 的两倍称为“定法”。把 AEFG 从 ABCD 中除去，所余曲尺形 EBCDGF 的面积是 55225-200^2=15225。其次估计十位数字是 3，在 EB 上截取 EH=30，并且补成正方形 AHIJ。从 AEFG 所增加的曲尺形 EHIJGF 可以分解成三部分：▭ FH，▭ FJ，▭ FI，面积依次是 30×EF，30×FG，30^2，其中 EF=FG=200，所以从 ABCD 中除去 AHIJ，所余曲尺形 HBCDJI 的面积是

15225-（2×30×200+30^2）=2325。

现在再估计个位数字是 5，在 HB 上截取 HK=5，并补作正方形 AKLM，从 ABCD 中除去 AKLM 后所余曲尺形面积和前同法应该是

2325-（2×5×230+5^2）=0。

由此知 K 和 B 的平方根恰好是 235。

求立方根的方法步骤和这相似，但是要把一立方体逐步进行分解，比平方根求法稍复杂，所依据的仍是出入相补原理，这在《九章》中也有详细叙述。

我国开平立方法来源很古，它的几何本质十分清晰，而且方法上可以看出我国独有而世界古代其他民族所无的位值制记数法的高度优越性。不仅这样，至迟到 11 世纪中叶，我国就已经把开平立方法推广到开任何高次幂，就是所谓“增乘开方法”，并且出现了有关的二项式定理系数表，就是所谓“开方作法本源图”。从这一方法的几何渊源看来，如果说当时我国数学家已经有高维方体和高维几何的稚影，似乎不是全无根据的。

下面的例取自《九章》，ABCD 是一方城，出北门北行若干步到 G 有木，出南门南行若干步到 F 再西行若干步到 H，恰可望见木 G，问题是求方城每边的长。据《刘注》的方法是依山入相补原理得

▭ ET=2 ▭ EG=2 ▭ KG=2×北步×西步”▭ 为实，以“南步十北步”为从法，开平方除之，得 EI，也就是方城边长。

不仅应用开平方法可得问题（A）的数值解，而且应用出入相补原理，还可以求得解答的精确表达式。如果以长方形的阔作为勾，长作为股，那么问题（A）相当于：

（C）已知勾股积、勾股差，求勾、股。

大小两正方形的边长各是勾股和、勾股差，所以得

勾股和^2=4×勾股积+勾股差^2。

由此得勾股和，因而得勾和股。同样也可从勾股和、勾股积求得勾和股，这一方法可以参阅《勾股说》的末一命题。

宋元时期明确引入了未知数的概念。如果以 x（当时称为天元一）表长方形阔，那么问题（A）相当于解一个二次方程 $x^2+ax=b$，其中 a 相当于从法，b 相当于实。所以在古代实质上已经给出了这一形式二次方程（a，b 都是正数）的近似解和精确解，前者在宋元时期发展为求任意高次方程的数值解法，后者虽文献散佚不可查考，但是据唐初王孝通的著作以及史书关于祖冲之的引述看来，不能排除我国曾经对三次方程用几何方法求得精确表达的可能性。

在其他各国，公元九世纪的时候，阿拉伯数学家花剌子模（约 780～约 850）的代数学名著中列举了各种类型二次方程的精确解法，它的方法是几何的，它的精神实质和出入相补原理颇相类似。公元 16 世纪，意大利数学家关于三次方程的解法，也完全是几何的。

如果规定长方形的面积是长阔的积，那么依据出入相补原理，容易得到：

（1）三角形面积 $=\frac{1}{2}$×高×底，

由此可以完全奠定平面多角形的面积理论。但是在空间情形，如果规定长方体的体积是长、广、深的积，是否依据出入相补原理，可以推得

（2）四面体体积 $=\frac{1}{3}$×高×底面面积，

由此以建立多面体的体积理论，就不是那么明显而极其困难的问题。欧洲直到 19 世纪末，才把它作为一个难题明确地提了出来。公元 1900 年德国数学家希耳伯特（1862～1943）在国际数学会上所作著名讲演中，把体积理

论列为 23 个问题之一。这一问题立即为德恩（1878～1852）所解决，答案是否定的：两个多面体要分割成彼此重合的若干多面体，必须满足某些条件，通称德恩条件。自此以后直到 1965 年，一位瑞士数学家西德勒才证明了德恩条件也是充分的。但是问题决不能认为已经彻底解决。从希耳伯特直到晚近，多面体体积理论仍不断成为一些知名数学家研讨的课题。德恩条件叙述复杂，也难认为是合宜的最后形式。

韦达定理

韦达生于法国西部普瓦图的丰特标勒贡特，曾经在法王亨利四世手下任职，还当过律师，数学原本只是他的业余爱好，但就是这个业余爱好，使他取得了伟大的成就。

他在数学方面的主要贡献有，第一次用字母代替已知量，确定了符号代数的原理和方法，使当时的代数学系统化，并把代数学作为解析的方法使用，因此有“代数学之父”之称。

在几何学方面，他利用阿基米德的方法，通过多边形来计算圆周率π，在计算中，他使用了 393216 边形，得到π的近似值为 3.141592653……。精确到小点后面的第 9 位，是第一个超越祖冲之的人（祖冲之当时算到第六位）。

韦达不仅是一个数学家，而且还是一个破译密码的专家。他在法国政府任职时，曾经帮助法国政府破译了西班牙国王菲利浦二世使用的密码，对法国战胜西班牙起了重要作用，这样引起了西班牙国王的大怒，致使菲利蒲二世认为是法国人使用了什么“巫术”，因而还向罗马教皇指控法国“犯罪”。

青少年朋友们在初中学了一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

方程的根α，β和系数 a、b、c 的关系式是

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

这就是我们熟悉的韦达定理。

但是这种说法不是很确切。请看下面几个定理的发表时间就清楚了。

定理 1.一元二次方程

$$ax^2+px+q=0$$

两个根为α和β，则

$$\alpha+\beta=-p,\ \alpha\beta=q$$

定理 2.一元三次方程

$$x^3+px^2+qx+r=0$$

的三个正根是α、β、γ，则

$\alpha+\beta+\gamma=-p$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=q$，$\alpha\beta\gamma=-r$

定理 3.一元 n 次方程

$x^n+ax^{n-1}+ax^{n-2}+x^{n-3}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的 n 个正根为 x_1，x_2，x_3，$\cdots x_n$，则

$x_1+x_2+x_3+\cdots x_n=-a_1$

$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+\cdots x_2x_3+x_2x_4+\cdots x_{n-1}x_n=a_2$

$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_2x_3x_4+x_2x_3x_5+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-a_3$……。

$x_1x_2\cdots xn=(-1)^na_n$

定理 4.（把定理 2 中的“ 正 ”字去掉就得到定理 4）

定理 1 的发表时间在历史上没有记载，然而定理 2 却是意大利数学家卡丹（1501～1576 年）在 1545 年发表的，所以定理 1 应在此之前，而法国数学家的创作年代应在 1550 年之后，因此定理 2 也不应当是韦达的功劳。只有定理 3 才是韦达于 1559 年之后发表，但却有一个“ 正 ”字，直到 1629 年，那个“ 正 ”字才被荷兰数学家基拉德（1595～1632 年）删掉，才使这个定理完整化，而这时韦达已离开人世 20～30 年之久了。

从这几个定理发表的时间来看，虽然定理 1 不是韦达发现，但对于这个定理他的贡献是很大的，所以用他的名字命名是有一定道理的。但为了慎重起见，因此我国中学教材已不再使用此名了，还是称作“ 根与系数的关系 ”。

罗巴切夫斯基几何

欧几里得几何（或称抛物几何）是我们大家所熟悉的，然而几何世界是广阔的，并非欧氏几何一枝独秀，还有着各式各样的非欧几里得几何，简称非欧几何。但通常意义下，非欧几何是指罗巴切夫斯基几何（或称双曲几何）和黎曼几何（或称椭圆几何）两种。

罗氏几何与欧氏几何有着明显的区别。在罗氏几何中，承认：

过直线外一点有无穷多条直线和已知直线共面但不相交。共面而不相交的两条直线被第三条直线所截，同位角（或内错角）不一定相等；

同一直线的共面的垂线和斜线不一定相交；

三角形内角和小于 180 °：

对应角相等的两个三角形全等（就是说，罗氏平面上不存在相似而不全等的三角形）；

三个内角是直角的四边形，其第四个内角却小于直角（就是说罗氏平面上没有矩形）；

通过不共线三点不一定能作出一个圆；

三角形三条高线不一定相交于一点；等等。

那么对于只熟悉欧氏几何的人来说，这些都是不可思议的。

罗氏几何是以其创建者俄罗斯数学家罗巴切夫斯基（1792～1856）的名字命名的，罗巴切夫斯基在证明欧几里得的平行公理时，力图由否定“ 同一直线的共面的垂线和斜线必相交 ”而引出矛盾。然而推论一个接一个，便形成了一个严密完善的系统而逻辑上并存在的任何矛盾。于是他相信建立起来的几何体系代表着一种新的几何学，称它为“ 虚几何 ”。1826 年 2 月 23 日罗巴切夫斯基在喀山大学数学物理系宣讲了他的关于这种新几何的论文即《关于几何原理的概述》，随后他又陆续出版了许多著作来阐述自己的观点，直到逝世的前一年，眼睛几乎失明了，他还坚持通过口授写下了俄文和法文的《泛几何学》。由于罗氏几何的结论与我们的直觉并不一致，因而遭到同时代的绝大多数的数学家的非议，甚至讽刺、嘲笑。就连当时俄国最大的两位数学家也说这是荒唐至极。罗巴切夫斯基却毫不顾忌这一切，始终坚持他的发现，他不遗余力地丰富它，发展它和捍卫它！

然而最早发现罗氏几何的并非是罗巴切夫斯基，而是德国的高斯，他也是从证明欧氏平行公理中得来，最初他称这种几何为反欧几里得几何，后来

又改称星空几何，最后称之为非欧几何。但由于害怕引起别人的反对和攻击，他没有发表过关于这种几何的任何见解。

发现罗氏几何的另外还有 F·鲍耶的儿子，匈牙利军官亚·鲍耶，他根本不听从父亲的劝阻，在试证欧氏平行公理时，发现了这种几何。1823 年 11 月 23 日给父亲的信中说：“我已经得到如此奇异的发现，连我自己也为之惊讶不止……，我已经从乌有创造了整个世界。”1832 年他的关于新几何的著作以附录的形式发表在他父亲的一本书的后边，根据“附录”的拉丁文字，亚·鲍耶的工作在数学文献上获得“亚编的克斯”的称号。

高斯，鲍耶，罗巴切夫斯基他们各自独立的工作，因此说罗氏几何的问世当归功于他们三人，只是罗巴切夫斯基发表在先，所以命名罗巴切夫斯基几何，遗憾的是，他们三人在生前都没能亲眼看到罗氏几何被社会所公认。罗氏几何直到 1871 年即罗巴切夫斯基死后 15 年才获得公认。

罗氏几何与欧氏几何之所以有如此大的差别，其根源在于罗氏平行公理是欧氏平行公理的反面命题，当我们把欧氏平行公理及等价命题，如过直一外一点恰有一条直线和已知直线共面不相交；

共面不相交的二直线被第三直线所截，同位角（或内错角）相等；

一直线的共面的垂线和斜线必相交；

过不共线三点恒有一圆；

三角形三高线交于一点；

任何三角形内角和等于 180°；

等等。

的反面命题写出来，是否可找到前面出现的那些离奇的罗氏几何定理的踪影了。

其实，罗氏几何中也不尽是离奇的结论，由于罗氏几何的公理中除平行公理外都和欧氏公理相同，因此凡是涉及平行公理的定理都是共有的，如：对顶角相等，三角形全等的判定，外角定理以及三角形中边、角的不等关系等。两者的公共部分被称做绝对几何。就是说：绝对几何的公理加上欧氏平行公理组成了欧氏几何的公理系统，演绎推理构成欧氏几何；绝对几何加上罗氏平行公理构成罗氏几何公理系统，演绎推理就形成了罗氏几何。从公理法的角度看问题，两种几何之间的关联、同异是这样简单的清晰。

孕育了罗氏几何的是由于“平行公理试证”，这是几何学发展史上的一件大事。公元前 6 世纪几何学在古希腊得到了很大的发展，成为至高无上的学科，人人争学几何，数学家柏拉图就在他创建的学院门前高悬“不懂几何学的人莫入”大字条幅。公元前 3 世纪，欧几里得《几何原本》成功地反映了证明几何，完美地实践了当时的公理化思想。它的问世，人们如获至宝，然而，人们为了证明它的平行公理，以为可以由其他公理推证出来，即认为它不是公理而只是个定理，掀起了证明平行公理的热潮，从而导致了罗氏几何的诞生，罗氏几何被公认即定论了欧氏平行公理是独立的，不能由其他的公理推证出来。

罗氏几何的诞生，不只是为几何学增添了一个新的分支，它是一次数学思想的重大飞跃，使几何学从古典阶段进入了现代化阶段。欧几里得《几何原本》是古典几何的代表，是建立在对现实世界的感知之上的，这反映了现实空间形式。因此，古典几何又叫实证或实体几何。

罗氏几何却离开了感知，改变了几何学对直觉真实性的追求，尝试了思

维的创造、人为地构造几何空间。人们开始了在几何领域里充分地施展自己的聪明才智，创造精神，接踵而来的是黎曼几何，仿射几何，射影几何等等，极大地发展了几何学。

等分圆周

人们在研究规尺作图三大难题中，还发现了许多类似的难题。求等圆周的线段的问题，就是一个与化圆为方密切相关的难题。此外，流传很广的是等分圆周问题，它是和三等分角相仿的难题。这个问题又叫做按规尺作图，作圆内接正多边形问题，或者叫做正多边形作图问题。

古希腊人按规尺作图法，作出了正三角形、正方形、正五边形、正六边形，以及边数为它们 2^n 倍（n 为正整数）的正多边形。他们还想继续作出其他的正多边形，可是正七边形就作不出来。于是，什么样的正多边形能作得出来，就成了一个作图难题。因为这个问题与三等分角问题的性质相同，关系密切，所以人们常常把它们放在一块研究。类似的，还有许多作图难题也不断地涌现出来，比如五等分、七等分任意角问题。

在漫长的年代里，难以数计的人参加了研究这些问题的行列，可是谁也提不出解决的办法。慢慢地，人们开始产生了这样一个问题：有些作图难题之所以难，是不是按规尺作图方法，本来就办不到，而不是有可能办到，只不过人们还没有找到这样的方法呢？这个想法，不是哪一个聪明人的头脑里一开始就有的。它是在一代人接一代人，延续研究了 2000 多年，总是找不到解决的方法之后，有些人才生了“异心”！

他们想：圆规和直尺不过是一种工具，世界上本来就没有什么事情就能干的万能工具。特别是规尺作图法，实际上是对规尺的使用作了种种禁令，限制它们的作用，所以有些图可以作出来，有些就可能作不出来。

数学是一门非常精确的科学。数学问题是不能根据想象或者看法就能作出结论的，它必须有严格的证明。假设有些图形是规尺作图法不能作出来的，那么，标准是什么？界限在哪里？也就成为一个难题了。

这些难题，直到解析几何出现以后，人们学会了应用代数的方法来研究几何问题，才找到了解决的途径。

用代数方法研究几何图形

数学和其他科学的发展一样，不少长期解决不了的问题，一旦出现了新的认识，或者把它们放到更大的范围去观察，常常很快就找到了解决问题的途径和方法。解析几何的出现，是规尺作图三大难题走向解决的转析点。

解析几何是 17 世纪法国数学家笛卡儿创立的。笛卡儿和 2000 年前的柏拉图一样，都是哲学家兼数学家，他们都形成了各自的学派，有的数学史说：柏拉图主义者相信权威，笛卡儿学派相信理性，但是他们同样认为数学是科学之王。

1637 年，笛卡儿发表了他的名著《几何学》。这本书起初是作为他的哲学著作《方法论》一书的附录出版的，书中引入了变数，创始了解析几何。

在初等数学中，基本的情况是几何是几何，代数是代数。人们研究和处理几何和代数问题，就方法而言是不同的。比方说，在平面几何中，要考查

三点是否共线，或者四点是否共圆，虽然有时也利用某些代数知识，但是一般不讨论直线或者圆的方程，以及它们的解。

解析几何是用代数方法来研究几何图形，通过建立坐标系，在几何与代数之间搭起了一座桥梁。有了这座桥梁，人们就可以把几何问题先“翻译”成代数题目，例如写出它们的方程，用代数的方法加以解决；之后，再把得到的结果，“翻译”成几何的答案。这样，就不只增加了解决几何问题的思路和方法；而且可以把许多几何问题的性质搞得更为清楚，使这些几何题化难为易了。

解析几何大大帮助了人们对规尺作图问题的认识和判断。在这方面，最先突破的是高斯。

1795 年，高斯来到德国著名的哥庭根大学学习。入学不久，他就按规尺作图法，作出了正十七边形。不久，他又提出理论，证明了按规尺作图方法，根本就作不出正七边形、正九边形、正十一边形和正十四边形等等。所有这些问题，都是延续了 2000 多年没有得到解决的难题，被年轻的高斯解决了。特别是关于规尺作图法的不可能问题，是一项惊人的成就。他从思想方法上，促进了规尺作图三大难题的研究和解决。

数学难题的解决，往往要涉及较多的数学知识。要了解高斯的这一成果，先得了解一下费尔马数。

费尔马是一个很有成就的数学家，提出过很多著名的定理。他还与笛卡儿同时奠定了解析几何的基础；与巴斯嘉一起开创了概率论的研究工作；在光学中提出了费尔马极小时间原理；在数学中提出过无限下推法。不过，费尔马的不朽贡献，主要是在数论方面。

在费尔马一生的大量成就中，也包含着两项影响较大的不确切的工作；一项是他的一个猜想，被证明是错误的；另一项就是前面谈到的近代三大数学难题之一的费尔马大定理，在他宣称被他证明了的 300 年之后，人们还没有找到证明的方法，于是很多人便对他宣称有过的证明明表示了怀疑。这里先介绍前一个猜想。

费尔马研究了形如 $2^{2n}+1$ 的数，共中 n 是非负整数。他令 n 分别等于 0，1，2，3，4，得到相应的 $2^{2n}+1$ 如下表：

n	0	1	2	3	4
$2^{2n}+1$	$2^1+1=3$	$2^2+1=5$	$2^4+1=17$	$2^8+1=257$	$2^{16}+1=65537$

在这个表中，所有形如 $2^{2n}+1$ 的数：3，5，17，257，65537 都是素数。于是，费尔马发表猜相：形如 $2^{2n}+1$ 的数，当 n 为非负整数时，都是素数。

后来，在数论中，把这样的数都称为费尔马数，记作 Fn，即 $Fn=2^{2n}+1$，n 为非负整数。

但是，费尔马死了 67 年之后的 1732 年，25 岁的数学家欧拉，证明了 F_5 不是素数：

$F_5=2^{5n}+1=2^{32}+1$

$=4294967297$

$=641\times6700417$

这样一来，就把费尔马的猜想给否定了。在欧拉那个时候，人们要判断

F_5是不是素数，还是相当困难的，因为事先并不知道要判断 641 是不是它的因数。

后来，人们分别证明了 n 等于 6 到 16 的费尔马数，都不是素数；n 等于 17 时是不是素数，到现在还是一个难题。n 等于 18 以后，也分别找出了三四十个不是素数的费尔马数。

总之，除了原来已经知道的 n 等于 0 到 4 的这五个费尔马数是素数外，新的费尔马数是素数的，一个也没有找着。

这样，有一种相反的猜想已经提出来了：只有有限个费尔马数是素数。这也是一个难题。

高斯按规尺作图法作出了正十七边形后，紧接着就证明了一个关于规尺作图的重大定理：

如果一个奇素数 P 是费尔马数，那么，正 P 边形就可以用规尺作图法作出，否则就作不出来。

根据这个定理，$F_0=3$，$F_1=5$，$F_2=17$，所以正三角形、正五边形、正十七边形都能作出，而 7，11，13 等素数都不是费尔马数，所以正七边形、正十一边形、正十三边形等都不能作出。

对应于 F_3 的正 257 边形，是德国的黎克洛于 1832 年，用规尺作图法作出来的；对应 F_4 的正 65537 边形，经德国的赫尔姆斯十年的研究，才按规尺作图方法作出来。黎克洛的作法，占了一本数学杂志的 80 页；而赫尔姆斯的手搞，装了整整一个手提箱，现在还保存在哥庭根大学。

高斯在数学的许多领域中，都作出了杰出的贡献，被称为“数学之王”。他一生工作严谨，生活简朴，坚持每天读报，喜爱文学和研究过多种外语，并且在物理学、天文学、测绘学方面，都作出了重要贡献。

高斯死后，按照他的遗愿，人们在他的墓碑上刻上一个正十七边形（也有的书上说是墓碑的底座是正十七边形），以纪念他少年时代杰出的数学发现。

高斯的墓碑，也是解决规尺作图难题，在 2000 多年间的一块里程碑。

正多边形的作图问题，其实就是等分圆周的问题，它与三等分角问题有不少相似的地方。有了解析几何，有了高斯等数学家的经验，人们对规尺作图可能作出的与不可能作出的图形，逐渐有了深入的认识。其中，下面两个结论是很重要的：

1.在规定某一线段的长度是单位长度 1 后，如果我们要作的线段的长度，可以由单位长度 1，经过有限次的加、减、乘、除、开平方（指正数开平方，并且取正值）后得出来，那么，这一线段就能用规尺作图法作出；

2.圆规直尺作图法所能作出的线段或者点，只能是经过有限次加、减、乘、除及开平方所能作出的线段或者点。

举一个例子，要考查圆内接正五边形是否可以作出，我们取圆的半径为 1，计算得圆的内接正五边形的一边长为 $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$，这合乎第一条，所以规尺作图法作圆内接正五边形是可能的。

再举一个例子，取一个线段的长为 1，问求作长为 $\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$ 的线段可能吗？

这里要开三次方，根据第二条规定，规尺作图法只能作出经有限次加、

减、乘、除及开平方的线段，看来这条线段作不出。

错了！因为

$$\sqrt[3]{9\sqrt{3}-11\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt[3]{3\sqrt{3}-3\sqrt{2}+6\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt[3]{(\sqrt{3})^3-3(\sqrt{3})\sqrt{2}+3\sqrt{3}(\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^3}$$

$$=\sqrt[3]{(\sqrt{3})^3-(\sqrt{2})}^{\,3}$$

$$=\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

根据第一条，这条线段能作出。你如果有兴趣，不妨一试，把这一线段作出来。

这两个例子说明，要证明一条线段能作出要容易些，要证明一条线段不能作出却困难得多。

但是，标准有了，三大作图难题的解决就提上日程了。

1837 年，23 岁的马彻尔提出了立方倍积与三等分任意角，不可能用规尺作图法解决的证明，宣布了 2000 多年来，人类征服初等几何三大难题夺得了重大的胜利。

我们知道，虽然有些角（例如直角）查以用规尺作图法三等分，但是有些角不可以（例如 30 ° 角），所以要按规尺作图法三等分任意给定的角，就不可能了。

事实上，在 1830 年，19 岁的法国数学家伽罗华，就提出了解决这一类问题的系统理论和方法，所以现在的专门著作，一般着重讲伽罗华理论，而把规尺作图三大难题以及等分圆周等问题的解决，当成这种理论的推论、例题或者习题。因此，后来对万彻尔的工作，并不十分注意。

五次方程的挑战

初中的主要数学课程是几何与代数。“ 代数 ” 一词，是九世纪时亚细亚的数学家阿里 · 花拉子模首先使用的。英文的“ Algebra ”一词，是从阿里 · 花拉子模那里来的。我国从 1711 年清朝康熙五十年起，先后音译作“ 阿尔朱巴尔 ”、“ 阿尔热巴拉 ”、“ 阿尔热八达 ” 等。1859 年清朝咸丰九年，李善兰与伟烈亚力合译的《代数学》，是我国意译 “ Algebra ” 为 “ 代数 ” 的开始。

前面已经说过，解析几何的出现，使人们可以通过解代数方程来解答几何问题。因此，规尺作图三大难题的解决，同代数方程的解挂上了钩。

公元三世纪的希腊数学家丢番都和九世纪的阿里 · 花拉子模，都求得二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

但是，很多数学史的书上只说阿里 · 花拉子模是世界上最先求得二次方程一般解的人，原因是丢番都当时认为只有根式下的数是一个完全平方时，方程才能算有解，并且丢番都只承认正根。

到了 16 世纪，意大利数学家卡尔丹和他的学生费尔拉利，相继发表了用根式求解三次方程与四次方程的方法。卡尔丹在发表三次方程的公式证明时曾声明，公式是威尼斯的塔尔塔利亚告诉他的。这个公式实际上是公元 1500

年左右波仑亚的数学教授非尔洛最先研究，几经转折，为塔尔利亚完全掌握，在卡尔丹保证保密后告诉了卡尔丹的，但六年后，卡尔丹给出证明发表了。数学界称这个公式为卡尔丹公式。

由于无论是二次方程、三次方程还是四次方程，都能通过根式求它的一般解，于是很多数学家，争相研究和寻找根式求解五次方程的公式。经历 16 世纪的后半叶、17 世纪、18 世纪，直到 19 世纪初，很多数学家和数学爱好者，都把它作为检验自己才能的试金石，可是毫无例外，他们都失败了。

根式解法虽然没有找到，可是人们却积累了很多的经验和知识，特别值得一提的，是法国数学家拉格朗日。他在高次方程根的排列等方面作了很多的工作，而且提出这是整个问题的关键。他还指出用根号解五次以上的方程，是不可能解决的问题之一。可是，他对不可能没有给出什么证明，他就这个问题的困难性说：“ 它好像是在向人类的智慧挑战。 ”

人类的智慧终于夺得了胜利。

在拉格朗日去世后 11 年的 1824 年，挪威 22 岁的数学家阿贝尔，证明了一般五次以上的代数方程，它们的根式解法是不存在的。这就是说，除了某些特殊的五次以上的方程，可以用根式解外，许多五次以上的方程，把它的系数看成字母，无论由这些字母组成什么样的千奇万状的根式，都不可能是这个方程的根。延续 300 年的难题解决了。阿贝尔的成果轰动了世界！

阿贝尔一方面证明了有的方程不能用根式解；另一方面也可以举例证明，有的方程能用根式解。于是，能用根式解或者不能用根式解的方程，到底用什么来判断呢？阿贝尔没有来得及解决这一问题。因为他少年时期备受贫困折磨。身体十分虚弱，在 27 岁上，就害痨病死了。

科学的接力棒总是要继续往下传的。法国数学家伽罗华在阿贝尔去世后的第二年，完成了这一项艰巨的工作。可惜他的生命更加短促，只活了 21 岁。

抽象代数学的诞生

伽罗华于 1811 年 10 月 26 日，出生在法国巴黎附近的一个小市镇上。他从 16 岁起，就致力于五次以上方程的根式解法的研究。

伽罗华不仅对前辈数学家拉格朗日等的工作，有深入的学习和了解；而且对同时代的数学家阿贝尔等的成果，也有研究和认识。他是在前人的基础上，走上一条崭新的道路的。

1828 年，17 岁的中学生伽罗华认为自己得到了重大的成果。他写出论文，把它送交有很多当代第一流数学家的法兰西科学院，要求审查。

那年 6 月 1 日，在法兰西科学院的例会上，曾决定由当时的大数学家柯西与波阿松，审查这位中学生的论文。但是，那位法国和世界最有名望的大数学家之一的柯西，根本不重视这件事，他把伽罗华的论文给弄丢了。

伽罗华还在继续研究。1829 年，他又写了一些重要论文，于 1830 年第二次把论文提交法国科学院审查。这一回，科学院决定由著名的数学家富里埃审查。可是 62 岁的富里埃，就在那年离开了人世。人们不但不知道富里埃的审查意见，而且在他的遗物中，没有找到伽罗华的论文，显然是又弄丢了。伽罗华曾对此提出了意见。

幸好，第一次应该和柯西一道负责审查伽罗华论文的那位科学院院士波

阿松，注意到了伽罗华的稿件一再被丢失的情况，劝他重写一份。1831 年，伽罗华把重写的论文，第三次交给法国科学院。

热心的波阿松，亲自审查了这份多灾多难的论文。他审查了四个月，可是看不懂。波阿松只好在他签署的审查意见上，说自己“ 完全不能理解 ”。

当代杰出的数学家波阿松都说他不能理解，怎么办呢？看来，伽罗华应该把自己的论文写得通俗一些，详细一些。

但是，伽罗华不可能有更多的时间和精力来充分阐述自己的观点了。因为他是一个忧国忧民的青年，正在参加当时法国如火如荼的政治斗争。

当时法国的形势是这样的：1830 年六七月间，国王查理一世因为违反和破坏了宪法，被愤怒的巴黎群众赶走了。可是前门驱狼，后门进虎，“ 波旁王朝 ”被推翻，奥尔良公爵路易——菲力浦，却趁机当上了国王，建立了“ 七月王朝 ”。这时伽罗华正在投考大学。

和高斯的情况正好相反。伽罗华在世的时候，很少有人认为他是“ 天才 ”或者“ 神童 ”什么的。后来，人们谈起伽罗华来，有的老师说：“ 他没有智慧，不然就是他把他的智慧隐藏得太好了，使我简直没法子去发现它。 ”有的老师干脆说：“ 他什么也不懂。 ”

当时，巴黎最著名的大学是工科大学和高等师范学校。伽罗华很想读工科大学，但是两次都没考上。在第二次考工科大学时，他也考了高等师范学校，幸好考取了。1830 年，19 岁的枷罗华，进入高等师范学校学习。就在这年的 7 月，路易—菲力浦篡权上台。

生气勃勃的伽罗华，是个激进的共和主义者，他和他的战友向篡夺政权的路易——菲力浦王朝，展开了激烈的斗争。

这年 12 月，入学不久的伽罗华被学校开除了。

被开除后，伽罗华以为人补习数学为业，但他的革命斗志更旺。1831 年六月，他被捕了，罪名是企图暗杀国王。由于警方拿不出证据，只好释放了他。但是紧接着在七月间，伽罗华第二次被捕，并且被投入监狱，一直关到了 1832 年春天，因为监狱里流行传染病，才把他释放出狱。

半年多的监狱生活，使这个 21 岁的青年身心受到了严重的摧残。他的姐姐回忆说，那时伽罗华面色憔悴，两眼发呆，活像一个 50 岁的老头。

出狱后一个月，反动派设下圈套，让伽罗华与路易—菲力浦王朝的一个反动军官决斗，被击中致命处，第二天——1832 年 5 月 31 日早晨，不满 21 岁的伽罗华离开了人世。

伽罗华短促的一生，像一闪而过的明星，照亮了近世代数学前进的道路！

在决斗前夕，伽罗华把他的研究工作写成扼要的信件，托朋友转交《百科评论》杂志发表。这封信在他逝世之后 4 个月发表了，但是没有引起人们的重视。

伽罗华在他仓促写成的信中，希望他的朋友把他的研究成果交给当代的大数学家，信末有这样的话：“ 你可以公开请求雅可比或者高斯不是对于这些定理的真实性，而是对于其重要性表示意见。在这以后，我希望有一些人将会发现，把这堆东西注释出来对他们是有益的。 ”据后来的调查，这些资料在当时并没有交给这两位数学家。

在伽罗华逝世后 14 年的 1846 年，法国数学家柳维勒，从伽罗华的弟弟那里得到了一些伽罗华的手搞，并且把它发表在自己创办和编辑的数学杂志上。从此，伽罗华的思想才逐渐引起人们注意和理解。以后，人们又从伽罗

华的姐姐、弟弟那里，搜集到他遗留下来的全部手稿。这不到 80 页的手稿，是伽罗华给人类留下的十分宝贵的财富。数学家在这个基础上，开始注释、追踪、研究和发展伽罗华所开创的工作。

到 19 世纪晚期，伽罗华所开创的数学工作，逐渐形成了数学的一个重要的分支——近世代数学，又叫做抽象代数学。因为它已经成为了近代代数学的主要内容，所以也有人干脆就叫它代数学的。它的主要内容，包括群论、环论、域论、布尔代数，以及共他代数系统的重要理论。这些理论，是近世代数学的伟大成就，并且在科学技术中有广泛的应用。

伽罗华是群论的奠基人。以伽罗华的名字命名的伽罗华理论，使得五次以上的代数方程，不可能有一般的根式解，初等几何作图三大难题，以及高斯关于正多边形作图的定理等等，都不过是一些明显的推论或者简单的例题、习题了。

今天，大学生在学了伽罗华理论后，稍带就证明了三等分角、立方倍积与化圆为方，是规尺作图的不可能问题。

在规尺作图三大难题中，化圆为方问题是最后得到解决的。

根据伽罗华理论，如果π是超越数，那么，化圆为方是规尺作图的不可能问题。可是，数学家拖了很长的时间，才证明了π是超越数，这就相应地推迟了化圆为方问题的解决。

什么是超越数？这个概念，首先是由著名数学家欧拉提出来的。比如圆周率π是我们很熟悉的。我国南北朝时的数学家祖冲之，计算出π的值在 3.1415926 与 3.1415927 之间。π的值这样算下去，它是有尽小数呢？还是无穷小数？如果是无穷小数，那么，是不是循环小数呢？如果能证明π是不循环的无尽小数，那就是无理数了。

无理数有不同的情况。像$\sqrt{2}$是$x^2-2=0$的根，$-\sqrt[3]{3}$是$x^3+2=0$的根，

$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$是$x^2-4x+1=0$的根。数学的定义规定：凡是能满足某个整系数代数方程。的实数，叫做代数数；凡不是代数数的实数，都叫做超越数。

由此可见，超越数必然都是无理数；但是一个无理数是不是超越数，那就需要证明了。人们发现，要证明π是一个无理数并不太困难，要证明π是一个超越数，却是一个很难的题目。

直到 1882 年德国数学家林德曼才证明了π是超越数,使方圆问题是规尺作图的不可能问题，得到证明。

到此，初等几何三大难题全部彻底解决。

这三大难题，从传说中的第罗斯岛人改造祭坛的年代起，到 19 世纪末叶，前后经历了 2000 多年。在全世界的几十代人的努力中，不知有多少人为它绞尽脑汁，熬尽心血，吃尽苦头，耗尽精力，才夺得最后的解决。

这真是得来不易的胜利啊！

“ 虚幻之数 ”

要让人类接受到一种新数，开始往往是非常困难的，甚至还曾经有人为此丢了性命。第一个发现无理数的人古希腊人希帕索斯就被毕达哥拉斯的忠实信徒们抛进大海喂了鲨鱼。负数虽然没有弄出人命，但是也在好几个世纪

中把欧洲的数学家们搞得六神无主晕头转向。大名鼎鼎的英国数学家、牛津大学教授瓦里斯曾经因为负数闹了一个大笑话，他说：“负数比无穷大还要大”，连后来的大数学家欧拉，也对此深信不疑！直至 19 世纪时，有些数学家如德·摩根、马塞勒还说负数“十分荒唐”，主张把它“从代数里驱逐出去！”

正当欧洲数学家们被无理数和负数弄得晕头转向还没有完全清醒过来的时候，新的问题又来了，他们遇到了一种更为奇怪的数，就是负数开平方。比如解方程$x^2+1=0$，移项得$x^2=-1$最后解出$x=\pm\sqrt{-1}$。试问，哪一个数（这儿当然指的是实数）的平方能够等于-1呢？$\sqrt{-1}$究竟有什么实际意义呢？

最初遇到这种数的人，是法国的舒开。然而第一个认真讨论这种数的，却是文艺复兴时期意大利有名的“怪杰”、三次方程解法获得者之一的卡丹。卡丹在 1545 年提出一个问题：“把 10 分成两部分，使它们的面积是 40。”他列出方程 x（10-x）=40 整理后得 $x^2-10x+40=0$，结果解出这两个根是$5+\sqrt{-15}$，$5-\sqrt{-15}$。卡丹觉得奇怪，称$\sqrt{-15}$是“诡辩量”，并且自我解嘲地说：“尽管我的良心会受到多大的责备，但是，的的确确$5+\sqrt{-15}$乘$5-\sqrt{-15}$刚好是40！”

差不多过了 100 年，1637 年，解析几何的创始人笛卡儿才给这种“虚幻之数”取了一个名字叫“虚数”（和“实数”相对）。又过了 140 年，大数学家欧拉还是说这种数只是存在于“幻想之中”，并且用 i（imaginary 虚幻）来表示它的单位$\sqrt{-1}$。

牛津大学教授瓦里斯具有丰富的想象力,给虚数找到了一个更巧妙的‘解释”“假设某人欠别人 10 亩地，即他有-10 亩，而这-10 亩地又恰好是个正方形，那么它的边长不就是$\sqrt{-10}$了吗？

最有名的是莱布尼兹评论虚数时一段颇带神秘色彩的话：“圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖怪物，那个我们称之为虚的-1 的平方根。”看，虚数竟成了上不着天、下不着地的“两栖怪物”！

虚数从开始出现以后，经过了两个世纪，还是得不到人们的正式承认。

大家都知道，把一个实数和一个纯虚数相加，得到形式如 a+bi 的这种数，叫做复数。复数这个名词是德国数学家高斯先提出的。高斯虽然感到这种数有点虚无缥缈，但又觉得它很有可爱之处。你看，如果不承认这种数，代数方程便有的无解，有的一个解，有的两个解……五花八门，毫无规律可言；如果承认了它，代数方程就都有解，而且 n 次方程不多不少恰好有 n 个解！此外，对复数进行代数运算，其结果还是复数（实数和纯虚数只是复数的特例），这样便形成了一个完整的数域。

复数既然有这么多的“优越性”，为什么数学家对它总是疑虑层层、迟迟不接受呢？直至 19 世纪中期，剑桥大学的教授们仍然抱着“厌恶’’的心情，对它进行抵制。简单点说，就是因为这种数“看不见”，同时也“用不上”，缺乏实践的基础。

为此立功的是挪威测量学家末塞尔，他找到了复数的几何表示法。众所周知，所有实数都可以用直线上的点来表示，正数用 0 右边的点来表示，负数用0左边的点表示；无理数如$\sqrt{2}$，可以用单位边长的正方形的对角线长度来表示。因为“看得见”，大家才不得不承认了负数和无理数。末塞尔发现，

所有复数 a+bi 都可以用平面上的点来表示，而且复数 a+bi 与平面上的点一一对应。这样一来，复数就找到了一个“立足之地”，而且开始在地图测绘学上找到了它应用的价值。

同时，数学家又找到了复数的三角表示法 r（cosθ+sinθ），其中 r 叫做复数的模，θ叫做幅角。后来又找到了复数的指数表示法 re^{Q}（e 表示自然对数的底）。即复数 z=a+bi=r（cosθ+isinθ）=re^{Q}。若令 r=1，θ=π，就可以得到 e^{in}=1，即 $e^{i\pi}$-1=0，这个著名的式子是欧拉得到的，它把数学中五个最重要的数 1，0，i，π，e 溶为一体，被誉为整个数学中最卓越的公式之一。

复数在几何上找到了它的位置以后，人们对它就另眼相看了。从 18 世纪末起，以欧拉为首的一些数学家，开始发展一门新的数学分支，叫做复变函数论。大家都学过函数，但在中学里，函数自变量的取值范围仅限于实数。如果把函数自变量 z 的取值范围扩大到复数，那么这种函数就叫做复变函数。即复变函数 W=f（z），其中 z，W 都是复数。

一个复数如果可以表示为平面上的一个点，那么自变量 z 的取值范围就是平面上的一个点的集合，相应的函数 W 的取值范围却是另一个平面上的一个点的集合。从几何角度来看，所谓复变函数，就是把甲平面上的一个图形 A（点的集合）变换成乙平面上的一个图形 B（也是点的集合）。研究复变函数性质的这一门科学，就是复变函数论。19 世纪以后，由于法国数学家柯西、德国数学家黎曼、魏尔斯特拉斯的巨大贡献，复变函数论取得了飞跃的发展，并且广泛的运用到了空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理学等方面。把这种“虚幻之数”第一次应用到工程部门取得重大成就的，是俄罗斯的“航空之父”儒可夫斯基。

尼古拉·叶哥洛维奇·儒可夫斯基 1847 年 1 月 17 日生于俄国弗拉基米尔省，21 岁毕业于莫斯科大学的应用数学专业。他具备多方面的才能，特别在航空专业方面很有造诣，后来就专门从事飞行的研究。

1890 年，儒可夫斯基在俄国自然科学家会议上作了《关于飞行的理论》的演说。第二年便写出了有名的关于飞行的著作《论鸟之飞翔》。他在长期的观察和研究过程中，发现了鸟类飞行的许多奥秘，即作出了一个大胆的预言：飞机可以在空中“翻筋斗”，当时不少人对他的预言都持怀疑态度，根本没有哪一个飞行员敢于冒险去尝试。十多年以后，陆军中尉聂斯切洛夫做了世界上第一次飞机空中“翻筋斗”的飞行动作，以后这种特技飞行就称为“聂斯切洛夫筋斗”。儒可夫斯基的预言被证实了，他的预言就是根据复变函数的理论计算出来的。

在儒可夫斯基生长的时代，飞机刚刚飞上了天。飞机为什么能飞上天，它应该怎样设计，怎样改进，这一切一切找不到可靠的理论根据，全凭实验来摸索，特别是无法运用数学这个有力工具。由于盲目的实践，所以成功的机会很少，失败的时候居多。一般的科学家都认为，飞行这门学问只能以实验为基础。莫斯科航空学校校长勃劳茨就曾经说过：“要想依靠数学来建立航空学的某些定律，是很危险的事情。”

儒可夫斯基却不相信这一套。他研究了围绕和流过障碍物的不断运动着的气流分子，于 1906 年（就是莱特兄弟的飞机飞上天空后的第三年）发表了论文《论连接涡流》，成功地解决了空气动力学的主要问题，创立了以空气动力学为基础的机翼升降原理，并找到了计算飞机翼型的方法。这一切的成

就，都是依赖于那个前人感到不可捉摸的“虚幻之数”，以及由它延伸出来的复变函数论。

儒可夫斯基翼型，依赖于有名的儒可夫斯基变换，这是一个公式线性的复变函数

$$W=\frac{1}{2}(z+\frac{a^2}{z})$$

其中 z 为自变量，W 为函数 a 是一个常数。前面说过，当自变量 z 的取值范围是平面上一个点集时，函数 W 的取值范围是另一平面上的一个点集。复变函数 z 平面上一个图形 A 变换成 W 平面上的一个图 B（这种变换又称为“转绘”）。上述儒可夫斯基变换，能把 z 平面上以 P（P 不在坐标轴上）为圆心的圆，变成 W 平面上飞机翼型的截面图。这个翼型就是有名的儒可夫斯基翼型。

实际上，儒可夫斯基从理论上提出的这个翼型，要想完全照样制作是比较困难的。实际使用的翼型是根据实验而描出的经验曲线制作的。但是，由于这种理论上的翼型能够用解析式完美地表达出来，对具有这种假想翼型的飞机性能就可以作充分的计算或估计，然后把计算的结果和实际的翼型作比较，就可以为设计出各种优良翼型提供资料。总之，有了理论的翼型，就可以指导我们的实践，在制作翼型的过程中避免盲目性。所以儒可夫斯基翼型在航空工程学上有着重要的意义，从而为从事这项工作的人们所熟悉。1916 年儒可夫斯基的重要著作《航空理论基础》被译成法文，成为航空工程师和飞机设计家的必备手册。

然而，另外有一个中学老师声称也会解三次方程，他便是塔塔利亚。

塔塔利亚是 16 世纪意大利著名的靠自学成才的数学家,为三次方程求解做出了杰出的贡献。

塔塔利亚原名方塔那，出生于意大利北部的布里西亚，父亲在邮局任职。他幼年时，正值意大利与法国交战。有一次父母带他逃到天主教堂避难。法军闯进教堂，杀死他的父亲，方塔那的头部也受了重伤。是母亲在尸骸堆中找到他，由于伤势过重，加上神经受到刺激，伤愈后说话不灵，吐字不清，于是得了个绰号叫“塔塔利亚”（意大利语，结巴之意）。后来他就以此绰号为笔名发表文章。

塔塔利亚由于幼年丧父，家境贫寒。因而经济拮据，没钱买文具纸张，母亲就把丈夫坟墓上的青石碑当做石板，教孩子在上面写写画画，认字学算术。小塔塔利亚天资智慧，勤奋刻苦，在数学上很有造诣，成年后就在意大利各地教授数学并以此来维持生活。他曾将欧几里得的《几何原本》译成意大利文，还发表了不少军事科学著作和数学论著，特别是成功地把数学理论应用于动力学中，对后来成为世界著名的物理学家的伽利略有着重要的影响。

1530 年，布里西亚一位中学数学教师科拉向塔塔利亚提出了两个挑战性的问题：

第一，试求一个数，其立方加上它的平方之二倍等于 5（即求满足方程 $x^3+3x2=5$ 的 x 值）。

第二，试求三个数，其中第二个数比第一个数大 2，第三个数又比第二个数大 2，三数之积等于 1000[即求解方程 x（x+2）（x+4）=1000，$x^3+6x^2+8x=1000$]。

当时，类似这样的三次方程都在数学界的禁区之内，没有人敢去问津。塔塔利亚出于好奇心，跃跃欲试，经过一番推演，居然得出了答案，即：

$$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})}+\sqrt[3]{(3-\sqrt{5})}-1$$
$$=1.0380340$$
$$x=\sqrt[3]{500+\sqrt{250000-\frac{64}{27}}}+\sqrt[3]{500-\sqrt{250000-\frac{64}{27}}}-2$$
$$=8.1333260$$

塔塔利业求出了这两道题的实根后，并没有公布自己的解法。但从此以后，塔塔利亚在数学领域便开始崭露头角。

费罗的学生菲俄听说塔塔利亚解出了科拉的三次方程，心中很不服。他和塔塔利亚约定，于 1535 年 2 月 22 日在米兰市大教堂进行一场公开的数学竞赛。当塔塔利亚得知菲俄是费罗教授登堂入室的弟子时，心想，竞赛时菲俄难免会拿三次方程来为难自己，切不可掉以轻心。于是，他苦心钻研三次方程的解法，昼夜不停的运算，却毫无进展。比赛日期渐渐迫近，塔塔利亚心急如焚、惶恐不安。2 月 11 日，他伏案通宵，钻研到第二天早上。当他走出户外呼吸一口新鲜空气的时候，多日冥思苦想得不到解答的问题，竟豁然开朗，终于找到了进一步解决三次方程的办法。塔塔利亚回忆说：“我运用了自己的一切努力、勤勉和技巧，以便取得解这些方程的法测。结果很好，我在规定的期限前十天，即 2 月 12 日，就做到了这点。”

2 月 22 日，米兰的大教堂热闹非凡，大家都等着看竞赛。比赛开始了，双方各出了 30 个三次方程的题目，其中包括 $x^3+mx=n$ 类型的方程。这些难题，使前来观阵的人们无不摇头咂舌，迷惑不解。可是，不到两个小时，塔塔利亚便出人意料地宣布，30 个题已全部解答出来了。众人瞠目结舌，心中却是赞叹不已。然而菲俄却一筹莫展，一道题也未解出。最后塔塔利亚以 30∶0 大获全胜。

消息一经传出，极大地震惊了数学界。塔塔利亚在获胜之后，再接再励，继续钻研。终于在 1541 年得到了三次方程的公式解，打开了僵持了 700 多年的局面。

一般一元三次方程的形式如

$y^3+by^2+cy+d=0$，设$y=x-\frac{b}{3}$，代入原方程化简后得：

$$x^3+(c-\frac{b^2}{3})x+(\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d)=0$$

令$p=c-\frac{b^2}{2},q=\frac{2b^3}{27}-\frac{bc}{3}+d$

得新方程：$x^3+px^2+q=0$（1）

在此，只须研究这样类型的三次方程就行了。

卡尔丹的办法，是引入两个新变量 t 与 u。

令$\begin{cases}t-u=-q(2)\\tu=(\frac{p}{3})^3(3)\end{cases}$

（2）$^2+4$（3）则为：$(t-u)^2+4tu=(-q)^2+4(\frac{p^3}{3})^3$

化简得：$(t+u)^2=q^2+4(\frac{p}{3})^3$，

即$t+u=\sqrt{q^2+4(\frac{p}{3})^3}$（4）

（2）与（4）联立，可得：

$$\begin{cases} t=-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+4(\frac{p}{3})^3} \\ u=\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+4(\frac{p}{3})^3} \end{cases} \quad (5)$$

这里 t、u 只取正根。

卡尔丹用几何方法证明：$x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$（6）

即为方程（1）的一个解。我们可以用牛顿二项式定理验证（6）式成立：

$$x^3=(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})^3$$

$$=t-3(\sqrt[3]{t})^2\bullet\sqrt[3]{u}+3\sqrt[3]{t}(\sqrt[3]{u})^2-u$$

$$=(t-u)-3\sqrt[3]{t}\sqrt[3]{u}(\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u})$$

$$=-q-3\bullet\frac{q}{3}x$$

$$=-q-px$$

即证明 $x^3+px+q=0$

将（5）、（6）式结合起来可得到：

$$x=\sqrt{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+4(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+4(\frac{p}{3})^3}} \quad (7)$$

这就是塔塔利亚——卡尔丹公式。它又可以化简为：

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}\,(8)$$

这里$D=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3$是三次方程的判别式：

D＞0 时，有一实根二虚根。D＜0 时，有三个实根。D=0 时，若 P=q=0，有三重零根；若$(\frac{q}{2})^2=(\frac{p}{3})^3\neq 0$，有三个实根，其中两个不相等。

三次方程（1）应当有三个根，但卡尔丹只求出实根，是不完全的。直到 1732 年欧拉才得到求出全部根的方法。如果ω、ω² 表示 1 的两个立方虚根，即方程 $x^2+x+1=0$ 的两个根，则 t 和 u 的立方根写全了分别应为：

$\sqrt[3]{t},\sqrt[3]{t}w^2,\sqrt[3]{t}w^2$和$\sqrt[3]{u}w,\sqrt[3]{u}w^2$

这样，方程（1）的全部根应为：

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-D}$$

$$x_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\sqrt{D}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$$

$$X_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$$

最后，由前设$y = x - \frac{b}{3}$，则可求出一般一元三次方程的根（y值）。

中国剩余定理

在我国古代劳动人民中，长期流传着“隔墙算”、“剪管术”、“秦王暗点兵”等数学游戏。有一首“孙子歌”，甚至远渡重洋，输入日本：

“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，

七子团圆正半月，除百令五便得知。”

这些饶有趣味的数学游戏，以各种不同形式，介绍世界闻名的“孙子问题”的解法，通俗地反映了中国古代数学一项卓越的成就。

“孙子问题”在现代数论中是一个一次同余问题，它最早出现在我国公元四世纪的数学著作《孙子算经》中。《孙子算经》卷下“物不知数”题说：有物不知其数，三个一数余二，五个一数余三，七个一数又余二，问该物总数几何？显然，这相当于求不定方程组

N=3x+2，N=5y+3，N=7x+2

的正整数解 N，或用现代数论符号表示，等价于解下列的一次同余组：

N≡2（mod3）≡3（mod5）≡2（mod7）

《孙子算经》所给答案是 N=23。由于孙子问题数据比较简单，这个答数通过试算也可以得到。但是《孙子算经》并不是这样做的。“物不知数”题的术文指出解题的方法：三三数之，取数七十，与余数二相乘；五五数之，取数二十一，与余数三相乘；七七数之，取数十五，与余数二相乘。将诸乘积相加，然后减去一百零五的倍数。列成算式就是：

N=70×2+21×3+15×2-2×105。

这里 105 是模数 3、5、7 的最小公倍数，容易看出，《孙子算经》给出的是符合条件的最小正整数。对与一般余数的情形，《孙子算经》术文指出，只要把上述算法中的余数 2、3、2 分别换成新的余数就行了。以 R_1、R_2、R_3 表示这些余数，那么《孙子算经》相当于给出公式

$N=70\times R_1+21\times R_2+15\times R_3-P\times 105$（P 是整数）

孙子算法的关键，在于 70、21 和 15 这三个数的确定。后来流传的《孙子歌》中所说“七下稀”、“廿一枝”和“正半月”，就是暗指这三个关键的数字。《孙子算经》没有说明这三个数的来历。实际上，它们具有如下特性：

$$70 = 2 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{3} \equiv 1 (\bmod 3)$$
$$21 = 1 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{5} \equiv 1 (\bmod 5)$$
$$15 = 1 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{7} \equiv 1 (\bmod 7)$$

也就是说，这三个数可以从最小公倍数 M=3×5×7=105 中各约去模数 3、5、7 后，再分别乘以整数 2、1、1 而得到。假令 $k_1=2$，$k_2=1$，$k_3=1$，那么整数 k_i（i=1，2，3）的选取使所得到的三数 70、21、15 被相应模数相除的时候余数都是 1。由此出发，立即可以推出，在余数 R_1、R_2、R_3 的情况下

$$R_1 \times k_1 \times \frac{M}{3} = R_1 \times 2 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{3} \equiv R_1 (\bmod 3)$$
$$R_2 \times k_2 \times \frac{M}{5} = R_2 \times 1 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{5} \equiv R_2 (\bmod 5)$$
$$R_3 \times k_3 \times \frac{M}{7} = R_3 \times 1 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{7} \equiv R_3 (\bmod 7)$$

综合以上三式又可得到

$$R_1 \times 2 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{3} + R_2 \times 2 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{5} + R_3 \times 1 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{7}$$

$\equiv R_1(\mathrm{mod}3)$

$\equiv R_2(\mathrm{mod}5)$

$\equiv R_3(\mathrm{mod}7)$

因为 M=3×5×7 可被它的任一因子整除，于是又有：

$$(R_1 \times 2 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{3} + R_2 \times 1 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{5} + R_3 \times 1 \times \frac{3 \times 5 \times 7}{7} - PM$$

$\equiv R_1$（mod3）

$\equiv R_2$（mod5）

$\equiv R_3$（mod7）

这里的 P 是整数。这就证明了《孙子算经》的公式。应用上述推理，可以完全类似地把孙子算法推广到一般情形：设有一数 N，分别被两两互素的几个数 a_1、a_2……a_n 相除得余数 R_1、R_2、……R_n，即

$N \equiv R_i$（mod ai）（i=1、2、……n）

只需求出一组数 K_i，使满足

$$k_i \frac{M}{a_i} \equiv 1 (\bmod\ \ a_{ai})(i = 1、\Lambda\ 2、n)$$

那么适合已给一次同余组的最小正数解是

$$N = (R_1 k_1 \frac{M}{a_1} + R_2 k_2 \frac{M}{a_2} + R_3 k_3 \frac{M}{a_3} + \Lambda\ R_n k_n \frac{M}{a_n})$$

这就是现代数论中著名的剩余定理。如上所说，它的基本形式已经包含在《孙子算经》“物不知数”题的解法之中。不过《孙子算经》没有明确地

表述这个一般的定理。

孙子问题出现在公元四世纪的中国算书中，这并不是偶然的。我国古代天文历法资料表明，一次同余问题的研究，明显地受到天文、历法需要的推动，特别是和古代历法中所谓“上元积年”的计算密切相关。大家知道，一部历法，需要规定一个起算时间，我国古代历算家把这个起点叫做“历元”或“上元”，并且把从历元到编历年所累积的时间叫做“上元积年”。上元积年的推算需要求解一组一次同余式。以公元三世纪三国时期魏国施行的《景初历》做例，这部历法规定以冬至、朔旦（朔日子夜）和甲子日零时会合的时刻作为历元。设 a 是一回归年日数，b 是一朔望月日数，当年冬至距甲子日零时是 R_1，离平朔时刻是 R_2 日，那么《影初历》上元积元数 N 就是同余组

$$aN \equiv R_i \pmod{60} \equiv R_2 \pmod{b}$$

的解。到了南北朝时期，祖冲之《大明历》（公元 462 年）更要求历元必须同时是甲子年的开始，天“日月合璧”、“五星联珠”（就是日、月、五大行星处在同一方位），月亮又恰好行经它的近地点和升交点。这样的条件下推算上元积年，就相当于要求解十个同余式了。天文历法数据一般又都十分庞杂，所以，在《孙子算经》成书前后的魏晋南北朝时期，我国的天文历算家无疑已经能够求解形式比《孙子算经》“物不知数”题复杂得多的一次同余式，因而必定掌握了按一定程序计算一次同余式的方法。《孙子算经》比例题的形式总结、反映了这一事实。以后天文历算家长期沿用孙子算法推算上元积年，这中间肯定会引起更加深入的探讨。到公元 13 世纪，大数学家秦九韶集前法之大成，终于在一次同余式的研究上获得了超越前人的辉煌成果。

秦九韶，字道古，生活于南宋时期，自幼喜好数学，经过长期积累和苦心钻研，于公元 1247 年写成《数书九章》。这部中世纪的数学杰作，在许多方面都有创造，其中求解一次同余组的“大衍求一术”和求高次方程数值解的“正负开方术”，更是具有世界意义的成就。

这里主要介绍秦九韶对一次同余论的伟大贡献。

秦九韶在《数书九章》中明确地系统地叙述了求解一次同余组的一般计算步骤。秦的方法，正是前述的剩余定理。我们知道，剩余定理把一般的一次同余问题归结为满足条件$K_i \frac{M}{a_i}$（$\mathrm{mod}\ a_i$）的一组数k_i的选定。秦九韶给这些数起名叫“乘率”，并且在《数书九章》卷一“大衍总术”中详载了计算乘率的方法——大衍求一术”。

在秦九韶那个时代，计算仍然使用算筹。秦九韶在一个小方盘上，右上布置奇数 g，右下布置定数 a，左上置 1（他叫它做“天元 1”），然后在右行上下交互以少降多，所得商数和左上（或上），直到右上方出现 1 为止。下页就是秦九韶的一般筹算图式，右边是一个数字例子（g=20，a=27，$k=c_4=23$）。

秦九韶在《数书九章》中采集了大量例题，如“古历会积”、“积尺寻源”、“推计土功”、“程行计地”等等，广泛应用大衍求一术来解决历法、工程、赋役和军旅等实际问题。在这些实际问题中，模数 a_i 并不总是两两互素的整数。秦九韶区分了“元数”（a_i 是整数）、“收数”（a_i 是小数）、

“通数”（a_i 是分数）等不同情形，并且对每种情形给出了处理方法。“大衍总术”把“收数”和“通数”化成“元数”的情形来计算，而对于元数不两两互素的情形，给出了可靠的程序，适当选取那些元数的因子作定数而把问题归结为两两互素的情形。所有这些系统的理论，周密的考虑，即使以今天的眼光看来也很不简单，充分显示出秦九韶高超的数学水平和计算技巧。

秦九韶小时曾跟随他父亲到南宋京城杭州，向太史局（主管天文历法的机构）的官员学习天文历法，“大衍求一术”很可能就是他总结天文历法计算上元积年方法的结果。但是“大衍求一术”似乎没有为他同时代的人所充分理解。明中叶以后几乎失传。一直到清代“大衍求一术”又重新被发掘出来，引起了许多学者（张敦仁、李锐、骆腾风、黄宗宪等）的兴趣。他们对“大衍求一术”进行了解释、改进和简化，其中黄宗宪《求一术通解》对模数非两两互素的情形给出了更加简明的方法，但是时代已是晚清。

从《孙子算经》“物不知数”题到秦九韶的“大衍求一术”，我国古代数学家对一次同余式的研究，不仅在中国数学史上而且在世界数学史上占有光荣的地位。在欧洲，最早接触一次同余式的，是和秦九韶同时代的意大利数学家斐波那契（1170～1250），他在《算法之书》中给出了两个一次同余问题，但是没有一般的算法。整个水平没有超过《孙子算经》。直到十八、十九世纪，大数学家欧拉（1707～1783）于公元 1801 年对一般一次同余式进行了详细研究，才重新获得和秦九韶‘大衍求一术”相同的定理，并且对模数两两互素的情形，给出了严格证明。欧拉和高斯事先并不知道中国人的工作。公元 1852 年英国传教士伟烈亚力（1815～1887）发表《中国科学摘记》，介绍了《孙子算经》物不知数题和秦九韶的解法，引起了欧洲学者的重视。1876 年，德国马蒂生（1830～1906）首先指出孙子问题的解法和高斯方法一致，当时德国著名数学史家康托（1829～1920）看到马蒂生的文章以后，度评价了“大衍术”，并且称赞发现这一方法的中国数学家是“最幸运的天才”。直到今天，“大衍求一术”仍然引起西方数学史家浓厚的研究兴趣。如 1973 年，美国出版的一部数学史专著《十三世纪的中国数学》中，系统介绍了中国学者在一次同余论方面的成就，作者力勃雷希（比利时人）在评论素九韶的贡献的时候说道：“秦九韶在不定分析方面的著作时代颇早，考虑到这一点，我们就会看到，萨顿称秦九韶为‘他那个民族’，是毫不夸张的。”

印度学者对一次同余论也有过重要贡献。从公元 6 世纪到 12 世纪，他们发展了一种称为“库塔卡”的算法，用来求解和一次同余式等价的不定方程组。“库塔卡”法出现在孙子算法之后，印度数学家婆罗门芨多（七世纪）、摩柯吠罗（九世纪）等人的著作中，都有和物不知数题相同的一次同余问题。这当然不是要借此断言“库塔卡”法一定受到了孙子算法的影响，但是有人（如万海依等）硬说中国的“大衍求一”来源于“库塔卡”，就是毫无根据的妄说了。万海依居然把中国算法中数码从左到右横写作为“大衍术”受印度影响的重要根据。大家知道，中国古代至迟从春秋战国时期就开始使用算筹记数，我们今天还可以从现存的公元前三世纪的货币上看到这种从左到右的记数方法。由此可见，万海依的论点多么荒唐可笑。中国古代数学家对一次同余论的研究有明显的独创性和继承性，“大衍求一术”在世界数学史上的崇高地位是毋容置疑的，正因为这样，在西方数学史著作中，一直公正地称求解一次同余组的剩余定理为“中国剩余定理”。

影子的数学应用

自古以来，人们仰望遥远的天空时，就会情不自禁地想道：“ 天到底有多高呢？ ”

由于天高不可测，人们便想知道，挂在天空的太阳离地到底有多远。孔子不能回答“ 小儿辩日 ”的问题，然而，初生的牛犊不怕虎，有一个儿童却敢于当着大人的面巧辩太阳离地有多远。

约在公元 300 年，晋元帝司马睿问他才七八岁的儿子司马绍道：“ 长安离我们这儿远，还是太阳离我们这儿远？ ”司马绍回答：“ 太阳。因为：有闻客自长安来，却未闻有人从日边来。 ”元帝很高兴，第二天在宴会上说起这件事，当时别人又问司马绍一遍相同的问题，可是他却回答“ 长安远 ”。这下让元帝大为扫兴，正要提示，只见司马绍不慌不忙地补充说：“ 举目见日，不见长安。 ”这两句话引得元帝满心欢喜，登时四座惊服。司马绍才思敏捷，后来的人把远方亲友不能见面的思念用“ 长安远 ”为辞。成为千古名喻。

那么，到底是长安远还是太阳远，科学家们却是用具体的数学来说话。长安在大地上，自然有办法丈量，而那个太阳高悬在空中，要测量它离我们这儿有多远就很难了。然而，人类的智慧到底还是征服了大自然。

这就是利用“ 影子 ”。

一首题为《影子》的诗写道：“ 岂能依此长短，判定人的高矮！ ”这首诗只有寥寥 12 个字，却揭示了一条深刻的哲理，它寓含于科学与人生之中，就影子本身来说，它貌不惊人，从来都是某种物体的附属品，又是虚无阴暗的代表，习惯被人瞧不起，认为是毫无价值的、空洞的，甚至把它的存在也看成是多余的。然而，我们岂可以依此长短来判断人的高矮呢？诚然，大自然的奇观五光十色，令人眼光缭乱，有多少惊奇奥妙的情与景令人神往啊！对于张目可见的影子实在不屑一提。可是，真正的科学家却不认为影子毫无用处，因为他们早就理解了其中的哲理，明白了衡量一件事物的价值是不能光凭外感来做标准的。

不是吗？因为有了影子，人类才揭示了日食的秘密，同时，光学之中出现了成像原理，微积分学中有了变化率，测量学中有了测高望远之术，定时装置中有了日晷……

早在公元前 6 世纪，古希腊学者塔利斯就曾经借用影子的作用去拯救战火中受难的百姓，据说当时美地亚和吕地亚国（位于现今土耳其西部）发生战争，连续五年未分胜负，满目疮痍，哀鸿遍野。老百姓处于水深火热之中。塔利斯目睹惨景，便去游说两国首领，晓以利害，建议停战，但均遭到冷遇。于是，他便扬言，上天反对战乱，某月某日利用日食作为警告。果然到了那天，两军正在酣战，突然太阳失去光辉，白昼顿时成了黑夜，双方将领大为恐慌，从此罢战言和。

这个传说当然未必可信，因为那时塔利斯是否有能力预测日食发生的时间是值得怀疑的，但这说明影子在宇宙空间也有如此妙用；而塔利斯深知影子的妙用，因此也敢于大胆地回答“ 金字塔之谜 ”的问题：即金字塔有多高？

当时，埃及法老阿美西斯悬赏征求这个答案。当然，要求答案是准确可靠的，如果信口开河，无根据地胡诌一个数，这会要受到惩罚的。因此，在很长一段时间里没有人应征。终于有一天，金字塔前人山人海，争相目睹塔

利斯的测高表演。首先，他在广场上竖立一根木棍，在日光照耀下，顺着影子从木棍的底部引出一条直线，量线长等于木棍高的地方做一个记号；他目不转睛地注视着影子的变化，当棍顶的影子与记号重合时，立即快步跑到金字塔塔顶的影子处去做一个标志；他认为，木棍影长与棍长相等时，塔高就应该等于塔影长的，只需量塔影长就知道塔高了。

是的，这个方法很简单，他的原理也是容易被接受的。可是，当他量了塔影的部分长度（全部长度应是从塔中心开始，而有一部分处于底盘位置），准备再去量取金字塔底盘的宽度时，有人喊叫起来：“塔利斯的测量不准！”等他弄清是怎么回事时，不禁皱起眉头，看看影子，叹了口气！原来，就在他跑去设立塔顶影子的标志时，木棍的影子又变动了；而且，由于金字塔的底盘很大，需要量取底盘宽度，以便确定中心到边界的距离，按这距离加上所见影子的长度才是塔高，本来选择影子方向也不能严格与塔的一边平行，现在方向又偏移了，因此他的失败之处在于测量目的物不是一根“杆”，而是底盘很大的金字塔。

塔利斯虽然第一次尝试失败了，但后来，却利用影子不停息地移动的性质巧妙地进行了新的尝试：观测两次，第一次定下木棍顶和塔顶的影子位置 a 和 A，第二次 b 和 B，那么，AB：ab 就是塔高与棍长之比了。棍长既为已知，自然就容易求出塔高来。

人们惊讶地看到塔利斯的超人智慧，无不叹为观止。然而，一座塔、一棵树，甚至一座山固然都可以应用这个方法测量高度，却没有人敢想象更高的物体，譬如说太阳，它到底有多高呢？

富于幻想的科学家想到，既然太阳是挂在天上的，日高也就是高了。那末，谁能够测得日高呢？

第一个接受挑战的是我国三国时代的科学家赵爽（公元 3 世纪），赵爽在作《周髀算经》注释时巧妙地创造了“双表人影法”来解决这个难题，他绘制了一幅《日高图》，在平地上面立两表（表即“杆”的意思），日照下显出影长 AB 和 CD，作 CE=AB，则 ED 为两影长度之差；接着他证明“黄甲”与“黄乙”的面积相等，而黄甲的面积是表高与两表之间距离的乘积，用影差作为黄乙的宽去除黄甲面积，便得黄乙的长，它的上端与日头相齐，加上表高，就是日高了。

赵爽测日高的方法可用下式表示：

$$\mathrm{FD}=\frac{\mathrm{GA}\bullet\mathrm{AC}}{\mathrm{ED}}+\mathrm{GA}$$

固然，由于地面不是很平的，而且表高与表间距离相对于日高来说过于微小，所以测得的日高是不够准确的。但是，赵爽却为后人提供了一种极为先进的测高望远之术。

历史的发展必然会使科学不断进步，就在赵爽之后几十年，与其同世纪的刘徽提出一种重差理论，发明了“重差术”，“重”就是重复，“差”是日照影子长度的差值，说明只需测两次求日影的差，就可以算出距离。刘徽对赵爽的日高测量法作了比较大的发挥，他认为，重差法用测日高可能不准确，但是，用于测量一座山、一座塔的高度却是游刃有余；特别是用于测量“可望不可即”的景物更是别开生面，譬如说在大陆要隔海测量海岛高度就可以用这种方法。

$$d=\frac{AC \bullet AB}{ED}$$

刘徽对影子的研究，使测高望远之术更加向前推进了一步。

无独有偶。赵爽创立用影子的有关数据进行测量的方法，不但被刘徽推广和发挥，在外国也有惊人的成果。例如，1569 年在威尼斯出版的一本书上绘制的图，所说明的测量建筑物高度的方法，其原理与《海岛算经》的《望海岛》题一样；此外，明末时期，意大利传教士利玛窦来我国，曾口授《测量法义》一书，也记载有与《望海岛》相类似的题目。外国的成果与刘徽方法大同小异，虽不能说他们的成果是源自刘徽，然而，这已是 16、17 世纪的事了，而刘徽的“重差术”却在他们一千多年前已研究出来了。

有人追溯更早期利用影子测量景物的方法，可溯源至古埃及或古印度的时代，但是，除职像塔利斯那样的传说之外，基本上已没有什么当时的文献可查。而在欧洲，虽然有许多利用影子原理的测量的方法记载在数学书籍或某些文学作品中（例如凡尔纳在小说《神秘岛》中描述了算术测峭壁的高度），也多半是近代的事；像 16 世纪威尼斯出版的那本书则是很少见的。

人的自身能力是有限的，不能直接去丈量海岛的高度，更无法量出至海岛的距离，然而，凭借影子，却能把理想（甚至可以称为幻想）变成现实。如果我们回味那首短短的《影子》诗，就能悟出一番真谛。

人们在研究影子的功用时，也曾出现一些疑点，例如有人怀疑塔利斯第一次应用木棍的影子测量金子塔高度的原理是否正确。

木棍比金字塔矮得多，木棍的影长等于棍子高度时，$\alpha=45°$，但此时 β 不是 45°，说明金字塔影长并不就是它的高度。那么，为什么可以认为塔利斯的方法是可行的呢？

道理很明显，因为木棍与金字塔的距离相对于与太阳的距离来说太微不足道了，因此太阳射至木棍和塔的光线可以认为是平行的，这也是赵爽方法实际上不能用于测日高的原因之一。从另一方面看，如果光源很近（例如是一盏灯），塔利斯的方法就不实用了，而刘徽的方法却是可行的。

费尔马定理

费尔马是一个十分活跃的业余数学家，喜欢和别人通信讨论数学问题。他差不多和同时代的数学家都通过信，受到人们的敬重。

费尔马经常提出一些难题，寄给熟人，请他们解答，然后再把这些解答与自己的解答对照。他提出的猜想，有被否定掉的；但是他证明过的定理，却从没有被推翻过。其中，不少成了后来书上的重要定理。费尔马在数论上作过杰出贡献。例如，他发现并证明了一个很重要的基本定理：

若 P 为素数，正整数 a 不能被 P 整除，那么 $a^{P-1}-1$ 这个数，一定能够被 P 整除。

这个定理叫做费尔马定理或者费尔马小定理。1640 年，当费尔马证完这个定理后，兴奋地写信告诉他的朋友说：“我浸浴在阳光中！这个定理按其在数论和近世代数中的重要性来说，的确是值得称道的。

比如我们要考察 5^6-1 这个数能不能被 7 整除，根据费尔马小定理，由于 $5^6-1=5^{7-1}-1$，所以知道它一定能被 7 整除。事实也正是这样。

$5^6-1=15624=7\times2232$。

因为这个数小，所以可以写出来判断。如果是问 $1981^{100}-1$ 能不能被 101 整除，就不好算出来看了，但是根据

$1981^{100}-1=1981^{101-1}-1$，

所以可以保险这个数能被 101 整除。1621 年，20 岁的费尔马，在巴黎买了一本丢番都的《算术学》的法文译本。不知他在什么时候，在书中关于不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的全部正整数解的这一页上，用拉丁文写了这么一段话：

“任何一个数的立方，不能分解为两个数的立方之和；任何一个数的四次方，不能分解成两个数的四次方之和；一般来说，任何次幂，除平方以外，不可能分解成其他两个同次幂之和。我想出了这个断语的绝妙证明，是书上这空白太窄了，不容我把证明写出来。”

在自己的书上空白处写心得，是一些人的读书习惯，通常叫作“页端笔记”。费尔马的这段页端笔记，用数学的语言来表达就是：形如

$x^n+y^n=z^n$

的方程，当 n 大于 2 时，不可能有正整数解。

费尔马虽然在数学上有很多重大成就，但是他生前几乎没有出版过什么数学著作。他的著作大都是在他死后，由他的儿子，把他的手搞和与别人往来的书信整理出版的。

费尔马死后，有人翻阅他的那本丢番都的书，发现了那段写在书眉上的话。1670 年，他的儿子出版了费尔马里的这一部分页端笔记，大家才知道这一问题。后来，人们就把这一论断，称为费尔马大定理或者费尔马问题。

哥德巴赫猜想

哥德巴赫本来是普鲁士派往俄罗斯的一位公使。后来，他成了一名数学家。

哥德巴赫和费尔马一样，很喜欢和别人通信讨论数学问题。不过，他在数学上的成就和声望，远远不如费尔马，有的人甚至认为他不是数学家。其实，有资料说，他是彼得堡科学院院士。

哥德巴赫与另一名彼得堡科学院院士、著名数学家欧拉经常通信。他们有 15 年以上的通信历史，经常讨论的是数学问题。

1742 年 6 月 7 日，哥德巴赫写信告诉欧拉，说他想冒险发表一个猜想：“大于 5 的任何数是三个素数的和。”这里要顺便交待一句，有一个时期，人们把 1 看成是特殊的素数；后来，才像今天这样，把 1 与素数严格区别开来。同年 6 月 30 日，欧拉在给哥德巴赫的回信中说，他认为：“每一个偶数都是两个素数之和，虽然我还不能证明它，但我确信这个论断是完全正确的。”

这次通信的内容传播出来后，当时数学界把他们两人通信中谈到的问题，叫做哥德巴赫问题。后来，它被归纳为：

命题 A：每一个大于或者等于 6 的偶数，都可以表示为两个奇素数的和；

命题 B：每一个大于或者等于 9 个奇数，都可以表示为三个奇素数的和。

这就是今天我们所说的哥德巴赫猜想，实际上，应该是哥德奇巴赫——欧拉猜想。比如

50=19+31，51=7+13+31

52=23+29，53=3+19+31

当然，表示方法可能是很多的。比如

50=3+47=7+43=13+37=19+31

很明显，如果命题 A 成立，那么，命题 B 也就成立。因为假设 N 是大于或者等于 9 的奇数，那么，N-3 就是大于或者等于 6 的偶数。命题 A 成立，就是存在着奇素数 P_1 与 P_2，使得 $N-3=P_1+P_2$，这就是 $N=3+P_1+P_2$，就像前面的 50 与 53 的关系一样。但反过来，如果证明了命题 B 成立，并不能保证命题 A 就一定成立。

19 世纪的很多大数学家，都研究过哥德巴赫猜想，但是进展不大。

1900 年，希尔伯特在巴黎国际数学家会议上，提出了 23 个研究题目，这就是有名的希尔伯特问题，可以说这是 23 个大难题。哥德巴赫猜想命题 A，与另外两个有关的问题一起，被概括为希尔伯特第八问题。

到了 1912 年，在第五届国际数学会议上，著名的数论大师兰道发言说，哥德巴赫问题即使改成较弱的命题 C，也是现代数学家所力不能及的。

命题 C 意思是：不管是不超过 3 个，还是不超过 30 个，只要你想证明存在着一个这样的正数 c，而能“使每一个大于或等于 2 的整数，都可以表示为不超过 c 个素数之和”。

过了 9 年，到了 1921 年，著名数论大师哈代在哥本哈根召开的国际数学会上说：哥德巴赫猜想的困难程度，可以与任何没有解决的数学问题相比拟。哈代也认为是极其困难的，但是不像兰道说得那样绝对。

1930 年，苏联 25 岁的数学家西涅日尔曼，用他创造的“正密率法”，证明了兰道说的那个现代数学家力不能及的命题 C，还估算了这个数 c 不会超过 S，并算出 S≤800000，人们称 S 为西涅日尔曼常数。

西涅日尔曼的成就震惊了世界。这是哥德赫猜想研究史上的一个重大突破。可惜他只活了 33 岁。

1930 年以后，包括兰道在内的很多数学家，竟相缩小 S 的估值，到 1937 年，得到 S≤67。

在 1937 年，哥德巴赫猜想的研究，又取得了新的成就。苏联著名的数学家伊·维诺拉多夫，应用英国数学家哈代与李脱伍特创造的“圆法”，和他自己创造的“三角和法”证明了：

充分大的奇数，都可以表示为三个奇素数之和。

伊·维诺格拉多夫基本上解决了命题 B，通常称为“三素数定理”。

坚固无比的堡垒哥德巴赫猜想，正在被人们逐个攻破。

这里要注意，命题 B 所说的是每一个大于或者等于 9 的奇数，都可以表示为三个奇数之和。数学家在证明这个命题时，往往把 9 放大到很大很大，比方说放大到十万，人们只要证明每一个大于十万的奇数，都可以表示为三个奇素数之和，就算基本上证明了命题 B。对于剩下的那一部分从九到十万的有限个奇数，是否每个都可以表为三个奇素数之和，可以暂时不管，留待以后去检验。所以叫做“基本上”证明了命题 B。

实际上，维诺格拉多夫未检验的有限个奇数，是 9 到 10 的 400 万次方之间的奇数，即 1 后面跟 400 万个 0 那么多个数中的奇数。如果真要去逐个检验每个是否能表为三个奇素数的和的话，那时还没有电子计算机，就算用现在最快的电子计算机，从他那时算到现在也算不完。再说也没有那么大的素数表供他使用。前面已经介绍过，现在最好的素数表才编到五千万。可见凡是大于 10 的 400 万次的奇数都能表为三个奇素数之和，这点被证明了，这就

更不简单了。因为前面的那些奇数到底还是有限个，而这里证明了的是无穷多个！

维诺格拉多夫的工作，相当于证明了西涅日尔曼常数 S≤4。

命题 B 基本上被解决了，于是有些不太了解数论情况的人，曾经认为只差一步就到命题 A 了，谁知这一步的腿迈出了 40 多年，还没有着地哩！

有人核对过从 6 到 3300 万的任何偶数，都能表为两个奇素数之和。这种核对工作是一直有人在作的。

有的人核对，是想找到一个不能表为两个奇素数之和的偶数，即找到一个反例，一举否定哥德巴赫猜想。这样，哥德巴赫猜想便宣告解决。

有的人核对，是想得到一些统计数字，摸清一些规律，为证明哥德巴赫猜想作准备。

当然，也有人可同时兼有上述两种意图。

这里要注意，无论是从 6 算到 3300 万也好，还是从 6 算到 3300 亿也好，都是有限个数。由这些有限个数统计出的任何数据，除非是反例，都是不能用来当作证明的依据。

在命题 A 的研究过程中，人们引入了“殆素数”的概念。

什么叫殆素数？我们知道，除 1 以外的任何一个正整数，一定能表示成若干个素数的乘积，这其中的每一个素数，都叫做这个正整数的一个素因子。每一个正整数，相同的素因子要重复计算，它有多少个素因子，是一个确定的数。如果这个正整数本身就是素数，就说它只有一个素因子。以 25 到 30 这六个数为例：

25=5×5	有 2 个素因子
26=2×13	有 2 个素因子
27=3×3×3	有 3 个素因子
28=2×2×7	有 3 个素因子
29 是素数	有 1 个素因子
30=2×3×5	有 3 个素因子

殆素数就是素因子（包括相同的和不同的）的个数不超过某一个固定常数的自然数。例如 25 到 30 的六个数中，25、26、29 三个数，是素因子不超过 2 的殆素数，其余三个不是。要是说素因子不超过 3 的数是殆素数，那这六个数就是殆素数。

应用殆素数的概念，可以提出一个新命题 D，通过对这个命题的研究，来接近命题 A。

命题 D：每一个充分大的偶数，都是素因子的个数不超过 m 与 n 的两个殆素数之和。

这个命题简记为“m+n”。

注意，这里的“3+4”或者“1+2”等是数学命题的代号，与 3+4=7 或者 1+2=3 毫无任何关系。就像有的电影院把座位 13 排 8 号简写作“13-8”，与 13-8=5 没有任何关系一样。

例如，“1+2”就是每个充分大的偶数，都可以表示成素因子的个数不超过 1 个（即素数），与素因子的个数不超过 2 个的两个数的和。比如 100=23+7×11，434=31+13×31，168=79+89 等都是合乎要求的。如果能证明，凡是比某一个正整数大的任何偶数都能像这样，表示成一个素数加以两个素数相乘，或者表示成一个素数加上一个素数，就算证明了“1+2”。

如果能证明“1+1”，就基本上证明了命题A，也就是基本上解决了哥德巴赫猜想。等到那时，哥德巴赫猜想就该叫哥德巴赫定理了。——人们已经为此奋斗了将近240年。